

# La heurística en la creación y resolución de enunciados de problemas de probabilidad

## Heuristics in creating and solving probability problem statements

Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Muñiz-Rodríguez, L., Rodríguez-Muñiz, L.J.

Universidad de Oviedo, España

### Resumen

La resolución de problemas es una tarea cognitiva de vital importancia en el aprendizaje de las matemáticas, ya que permite desarrollar el razonamiento matemático. En este trabajo se ha planteado una experiencia a través del campus virtual universitario para la que se solicitó al alumnado del tercer curso del Grado en Maestro/a en educación primaria que planteasen y resolviesen un problema de probabilidad adaptado a nivel de 6º de primaria. El objetivo del estudio ha sido averiguar qué heurísticos y técnicas son puestas en práctica por los alumnos en la creación y resolución de problemas adaptados a este nivel, así como la detección de patrones de actuación en dicho proceso. Durante el análisis se ha detectado el uso de varios heurísticos (entre ellos se encuentran el tanteo, trabajar marcha atrás o el uso de gráficos) encontrando, además, un patrón interesante que se ve repetido en varias ocasiones.

**Palabras clave:** Resolución de problemas, probabilidad, maestros en formación, heurísticos.

### Abstract

Problem-solving is a very important cognitive task in the process of learning mathematics, as it allows developing mathematical reasoning. In this work, an experience has been carried out through a university online Campus. Students in the third year of the Bachelor's Degree of Primary Education participated in the experience. They were asked to raise and solve a probability problem adapted to 6th level of primary education. The aim of the study was to find out which heuristics and techniques were used by the students for creating and solving problems adapted to a specific primary level, as well as the detection of action patterns in this process. During the analysis the use of several heuristics has been detected (among them are trial-and-error, work backwards or the use of graphics) finding an interesting pattern that was repeated several times.

**Keywords:** Problem-solving, probability, primary school student teachers, heuristics.

## 1. Introducción

Una de las tareas cognitivas más importantes en el aula de matemáticas es la resolución de problemas. El proceso de resolución de problemas permite a los estudiantes adquirir nuevos conocimientos y desarrollar habilidades y destrezas que les permitirán enfrentar problemas cotidianos, mientras desarrollan su razonamiento lógico-matemático (Aksoy, Bayazit y Kirnap, 2015).

La resolución de problemas matemáticos en educación primaria es considerada una parte fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, así como en el desarrollo del pensamiento matemático. Es en la resolución de problemas donde los contenidos matemáticos cobran mayor sentido (Blanco-Nieto, Cárdenas-Lizarazo, y Caballero-Carrasco, 2015). Cuando los futuros maestros de Primaria propongan a sus alumnos problemas que deban resolver, han de saber guiarlos para que desarrollen su pensamiento matemático y no resuelvan los problemas mecánicamente. Mediante el

trabajo de resolución de problemas se favorece la investigación, el descubrimiento y la abstracción del alumnado de primaria.

Debemos tener en cuenta que, para que podamos hablar de problema, éste debe de ser adecuado al nivel formativo en el que nos encontremos. Es decir, una misma situación matemática puede considerarse “actividad” en ciertos niveles educativos y “problema” en otros (Blanco-Nieto et al., 2015).

Es en este momento en el que nos planteamos cómo los maestros pueden crear problemas adaptados a un nivel educativo concreto. Para ello, además de necesitarse un amplio conocimiento del currículo de Primaria para saber qué contenidos matemáticos se deben alcanzar en cada curso, es necesario que sigan unas técnicas o estrategias que les permitan crear y solucionar esos problemas, así como saber justificar sus decisiones. Cerdán y Huerta (2007) relacionan las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje de la resolución de problemas con las de la estadística y la probabilidad. También Shaughnessy (1992) afirma que “la enseñanza de la probabilidad y la estadística es la enseñanza de resolución de problemas”. En este sentido, el uso de técnicas heurísticas favorece el razonamiento de los estudiantes y les facilita el proceso de resolución de problemas Schoenfeld (1979).

Por tanto, nos interesa saber cómo los futuros maestros emplean sus conocimientos matemáticos y pedagógicos para crear un problema. En este caso, el problema será de probabilidad y deberá estar adaptado al nivel de 6º de primaria. Para adaptar el problema, además de los conocimientos matemáticos del nivel habrá que vigilar el contexto y la redacción. Carles, Cerdán, Huerta, Lonjedo y Edo (2009) muestran que la estructura del problema y el contexto en el que están formulados los problemas, influyen en las dificultades del problema y su solución.

Los estudiantes para maestro participantes en esta experiencia han recibido formación previa en técnicas heurísticas de resolución de problemas, que podrían resultarles de utilidad para enunciar y resolver problemas. Además, es de interés observar si entienden por qué plantean un problema y no otro, si saben justificar por qué el enunciado se adapta al nivel, si el enunciado es correcto o puede mostrar ambigüedades que den lugar a confusión, si el proceso de resolución es correcto o si saben que están utilizando heurísticos o los utilizan por pura intuición.

Por lo tanto, los objetivos de nuestra investigación son los siguientes:

- Averiguar qué heurísticos y técnicas son puestos en práctica por los alumnos de tercer curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de Oviedo para la creación y resolución de problemas adaptados a un nivel específico de primaria.
- Detectar patrones de actuación en el proceso de creación y resolución de problemas por parte de los estudiantes para maestro.

A continuación, se muestran los elementos teóricos en los que nos hemos basado para la realización de este estudio; el método empleado, en el que describiremos qué tipo de actividad se propuso al alumnado participante en la experiencia, abordando después cómo hemos realizado el análisis y los resultados obtenidos en el mismo. Concluiremos con una reflexión y unas consideraciones finales sobre los resultados del estudio.

## 2. Marco teórico

Nos acogeremos a la definición de problema aportada en Díaz y Poblete (2001). Para ellos, un problema es una situación en la que pretendemos alcanzar una meta y que requiere de una reflexión previa, considerando que partimos del desconocimiento de las herramientas matemáticas que lo resuelven.

Cuando hablamos del proceso de resolución de problemas, consideraremos el esquema desarrollado por Pólya (1989), que se divide en 4 fases:

1. *Entender el problema* (Comprensión): en esta primera fase el resolutor debe preguntarse a sí mismo si entiende el problema, si lo puede replantear con sus propias palabras, si sabe distinguir los datos, si sabe a qué solución quiere llegar, si la información es suficiente o extraña o si el problema es similar a alguno que ya conozca previamente.
2. *Configurar un plan* (Planificación): en este punto de la resolución del problema se busca explorar y planificar diversas alternativas que permitan obtener su solución. El uso de heurísticos, entendidos como estrategias, técnicas o medios que ayudan a la resolución de un problema sin suponer una garantía de obtención de la solución y siendo independientes del contenido (Puig, 1996), es muy útil para ayudar al resolutor a buscar posibles formas de abordar la resolución de un problema.
3. *Ejecutar el plan* (Ejecución): una vez que se ha configurado el plan de resolución del problema se prosigue implementando la o las estrategias escogidas en el paso anterior hasta resolver el problema o hasta que surja tomar otro camino.
4. *Mirar hacia atrás* (Revisión): finalmente se revisan los pasos dados para confirmar si la solución es correcta, si hay formas más sencillas de resolver el problema, si podemos generalizar, etc.

A partir de las fases del proceso de resolución de problemas de Pólya (1989), Cruz y Carrillo (2004) enuncian una clasificación de heurísticos adaptada a cada una de ellas. A continuación, podemos ver dicha clasificación aportada por Cruz y Carrillo (2004):

En la fase de comprensión, los heurísticos están enfocados hacia el entendimiento del problema: ¿qué datos tengo?, ¿a qué solución quiero llegar? Los heurísticos que consideran para esta fase son: “organizar la información”, “ejemplificar” y “expresar en otros términos”. En la fase de planificación, el alumnado se pregunta cómo puede resolver el problema y para ello pueden utilizarse técnicas heurísticas muy variadas, siempre dependiendo del tipo de problema con el que se esté trabajando. Los heurísticos descritos para esta etapa son: “simplificar”, “estimar”, “buscar regularidades con intención de generalizar”, “tantear”, “considerar problemas equivalentes”, “argüir por contradicción”, “asumir la solución”, “partir de lo que se sabe”, “planificar jerárquicamente la solución”, “descomponer el problema”, “explorar problemas similares” y “conjeturar”. En la fase de ejecución, los heurísticos se centran en el propio proceso de resolución del problema: “registrar todos los cálculos”, “resaltar los logros intermedios”, “actuar con orden y con precisión” y “explicar el estado de la ejecución”. Finalmente, en la fase de revisión del proceso realizado, se encontrarían los heurísticos: “analizar la consistencia de la solución”, “analizar la consistencia del proceso”, “expresar la solución de otra forma”, “explorar solucionar el problema de otra manera” o “generalizar”.

En nuestro caso, las fases del proceso de resolución de problemas de Pólya (1989) nos servirán como marco inicial para identificar los heurísticos empleados en cada etapa. Debemos considerar que dependiendo de la fase de resolución del problema que se esté estudiando, podrán utilizarse un tipo de heurísticos u otro, debido a las diferentes características que presenta cada una.

A partir de la clasificación propuesta por Cruz y Carrillo (2004) estableceremos nuestra clasificación de heurísticos siguiendo un enfoque dirigido en el texto en función de las fases de resolución de un problema.

Para la experiencia propuesta, el conocimiento matemático fundamental que el alumnado debía activar fue la regla de Laplace, teniendo que disponer, además, de una base previa sobre las propiedades básicas de la probabilidad que se utilizan a nivel del 6º de Primaria.

## 2.1. Método

En este estudio han participado 209 estudiantes de los distintos grupos de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica III (versada en estadística y probabilidad) del tercer curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de Oviedo. Para la realización del mismo se ha planteado una actividad a través del Campus Virtual universitario en la que se les ha solicitado enunciar y resolver un problema de probabilidad, partiendo de una estructura dada, adaptándolo a nivel de 6º de primaria y justificando tanto la elección del problema como su adaptación al nivel solicitado.

El enunciado propuesto por los investigadores para la realización del estudio fue el siguiente:

**Enunciado.** Las monedas de euro pueden ser de 1, 2, 5, 10, 20 o 50 céntimos o de 1 o 2 euros. Consideremos la siguiente situación: "En mi bolsillo tengo 3 monedas..."

Añade restricciones a esta situación de modo que puedas formular un problema adaptado al curso de 6º de Primaria cuya pregunta sea "¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 euros?" y cuya respuesta sea un valor entre 0.6 y 0.75 (ambos inclusive).

La redacción ha de ser no trivial, factible y verosímil. Es decir, no pueden incluirse tantas limitaciones como para reducir las posibilidades a un único caso, ni pueden usarse tantas restricciones que sea casi imposible cumplirlas, de modo que sea muy complicado que esa situación ocurra en la vida real.

Escribe tu solución al problema y demuestra justificadamente que la respuesta a la pregunta: "¿Cuál es la probabilidad de tener en mi bolsillo más de 2 euros?" es un número dentro del intervalo  $[0.6, 0.75]$ .

En resumen, en el texto que subas tienes que:

1. Redactar un enunciado que cumpla las condiciones que se piden.
2. Resolver el problema de acuerdo con ese enunciado.
3. Aportar una breve explicación sobre por qué has elegido ese enunciado y por qué consideras que es adecuado."

Cada estudiante realizó un problema diferente, según su propio criterio. De las 209 respuestas obtenidas hemos tomado una muestra formada por 15 respuestas para la realización de un estudio piloto. Esta muestra se corresponde con uno de los grupos de estudiantes que cursan la asignatura, cuyas respuestas fueron posteriormente corregidas por su profesora, ofreciéndoles retroalimentación, en una segunda fase de la prueba que no desarrollaremos en este artículo.

Este estudio piloto pretende ser un comienzo para la realización un análisis en mayor profundidad para la totalidad de los datos recogidos. De esta manera podremos obtener una visión más completa de cómo los estudiantes se enfrentan a la formulación y resolución de problemas de probabilidad adaptados a Primaria.

## 2.2. Análisis

Para realizar el estudio de los datos recogidos del Campus Virtual universitario se han analizado tanto los enunciados como las resoluciones y las justificaciones de los participantes en el mismo, considerando como unidad de análisis las respuestas completas de cada estudiante a la actividad propuesta (enunciado planteado, resolución del problema y justificación de la elección y adecuación al nivel de dicho enunciado).

El análisis se ha realizado en base al marco teórico previamente descrito, llevando a cabo un análisis del texto en el que se han detectado una serie de heurísticos dentro de cada una de las fases de resolución de un problema. Por tanto, partiendo de la clasificación de heurísticos aportada en Cruz y Carrillo (2004) realizamos un análisis cualitativo del contenido de las respuestas recogidas utilizando el paradigma interpretativo con un enfoque dirigido (Hsieh y Shannon, 2005). Dicho enfoque, utiliza teorías existentes como categorías iniciales para la codificación de los conceptos o variables bajo estudio (Potter y Levine-Donnerstein, 1999). La estrategia de codificación empleada para identificar y categorizar casos consiste en la lectura de las transcripciones, en las que se resalta el texto de interés a codificar. A cada pasaje se le asigna un código predeterminado. Cuando no se pueda categorizar un texto en función del texto inicial, se le asigna un nuevo código. De esta manera se consigue crear una codificación específica adaptada a los datos recogidos (Hsieh y Shannon, 2005). Las justificaciones aportadas por los participantes deberían ayudar a entender cómo ha sido el proceso de elección del enunciado en cada caso y por qué creen que su enunciado es adecuado.

A continuación, se muestra la relación de heurísticos encontrada durante el desarrollo del estudio, adaptada de la organización de Cruz y Carrillo (2004). Hemos eliminado los heurísticos que no aparecían reflejados en nuestras respuestas. También hemos añadido dos heurísticos más en la fase de planificación que no se explicitaban en Cruz y Carrillo (2004) y que surgieron durante el estudio. Éstos son “*trabajar marcha atrás*” y “*hacer un diagrama*”:

### *Comprensión:*

- C1: Organizar la información
- C2: Ejemplificar

### *Planificación:*

- P1: Planificar jerárquicamente la solución
- P2: Buscar una sub-meta
- P3: Simplificar
- P4: Asumir la solución
- P5: Trabajar marcha atrás
- P6: Tantear
- P7: Hacer un diagrama

### *Ejecución:*

- E1: Registrar todos los cálculos

- E2: Resaltar los logros intermedios
- E3: Actuar con orden y con precisión
- E4: Explicar el estado de la ejecución

#### *Revisión*

- R1: Analizar la consistencia de la solución
- R2: Analizar la consistencia del proceso
- R3: Analizar si se puede llegar a la solución de otra manera
- R4: Expresar de otra forma la solución

Teniendo en cuenta que para el proceso de creación del problema los estudiantes han trabajado partiendo del análisis de las distintas posibilidades de resolución disponibles para llegar a la solución adecuada, y que a partir de dicha resolución han creado el problema, hemos realizado nuestro análisis en el siguiente orden: en primer lugar, se procedió a la lectura del enunciado sin profundizar en él. Posteriormente, se analizó la resolución del problema, seguida de una nueva revisión del enunciado para determinar si el enunciado era coherente y si la resolución respondía al enunciado planteado. Finalmente, se analizó la justificación de la elección del enunciado y del proceso de resolución.

A continuación, pasamos a exponer el análisis de las respuestas aportadas por los participantes en función de la clasificación de heurísticos previamente indicada.

### **2.3. Discusión de resultados**

En la actividad planteada al alumnado del Grado en Maestro/a en Educación Primaria se solicitó a los participantes trabajar un problema con 3 monedas de forma que se pudiese obtener la probabilidad de tener estrictamente más de 2€ en el bolsillo. El problema debía estar adaptado a nivel de 6º de primaria. Para la resolución del mismo, el alumnado participante debía saber que tendría que utilizar la regla de Laplace.

De los 15 casos analizados en el estudio piloto, solamente se encontró un caso en el que el enunciado planteado por la estudiante no se ajustaba a la actividad propuesta por los investigadores. En dicho problema, no se aplicaba ningún tipo de regla, ni se disponía realmente de un enunciado concreto. La alumna no utilizó heurísticos ya que no se estaba resolviendo ningún problema específico, pero sí fijó una única restricción (aunque en la resolución y no en el enunciado), que se correspondía con que una de las 3 monedas siempre fuese de 2€. Esto hace que la probabilidad del problema sea 1, con lo que, además, no se encontraría en el intervalo pedido  $[0.6, 0.75]$ . La alumna no justificó la elección del problema ni verificó los pasos seguidos o las soluciones encontradas. Además, las operaciones realizadas carecen de sentido y no siguen las normas básicas de la probabilidad.

En relación a los 14 casos restantes estudiados, todos los participantes consiguen formular un enunciado relacionado con las indicaciones ofrecidas por los investigadores (a partir de este momento hablaremos de estos 14 casos en los que sí se ha planteado un ejercicio válido). No todos ellos siguen la norma de comenzar el problema con la frase “*En mi bolsillo tengo 3 monedas...*”. Sin embargo, todos los enunciados son válidos y coherentes. En todos los casos se puede observar la presencia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes en relación al tema de probabilidad que han estudiado en clase.

La regla de Laplace aparece en 12 de esos 14 casos. De esos 12 casos en los que aparece la regla de Laplace, en 9 de ellos los estudiantes indican que van a utilizarla y justifican cómo obtienen el número de casos favorables del total del número de casos posibles. Los 3 alumnos restantes que utilizan la regla de Laplace, la aplican directamente pero no indican que la están utilizando. Simplemente aplican la propiedad “*número de casos favorables entre número de casos posibles*”, realizando los mismos pasos que el resto de sus compañeros, pero sin nombrar la fórmula. Los 2 participantes que no utilizan la regla de Laplace resuelven el problema mediante probabilidades asociadas a diagramas de árbol.

Fijémonos ahora en la clasificación de heurísticos en función de las fases de resolución de un problema de Pólya (1985). La primera fase en la resolución de un problema es la comprensión. Cuando nuestros sujetos comienzan la tarea de desarrollar el enunciado de un problema, todos ellos están ejemplificando (C2). Cada uno de los problemas propuestos puede considerarse como un ejemplo de un caso que podría darse en la realidad en el que tendríamos que realizar el cálculo de una probabilidad. Sin embargo, en el proceso de comprensión, no todos los participantes organizan la información del enunciado (C1). Esto podría deberse a que, al ser ellos mismos quienes formulan el problema y los posibles casos de resolución, no sienten la necesidad de organizar unos datos que ellos mismos se han inventado, porque saben exactamente con qué datos están trabajando. De las 14 resoluciones propuestas, 9 comienzan con un planteamiento de los datos del problema. Los 5 participantes restantes comienzan la resolución del problema directamente.

Respecto a la fase de planificación, pueden encontrarse combinaciones de diversos heurísticos. Los heurísticos encontrados en los trabajos analizados han sido: planificar jerárquicamente la solución (P1), buscar una sub-meta (P2), simplificar (P3), asumir la solución (P4), trabajar marcha atrás (P5), tantear (P6) y hacer un diagrama (P7).

De los 14 participantes, 12 han decidido simplificar (P3) restringiendo los valores de las monedas con las que trabajaban, por ejemplo, monedas de más de 20 céntimos. Se justifica que, haciendo esta restricción, el espacio muestral será más sencillo, con menos casos y más asequible para un nivel de 6º de primaria. Además, algunos estudiantes han fijado el valor que debían tener la primera moneda o la primera y la segunda, de forma que el espacio muestral también quedase reducido y simplificado. Por ejemplo, fijando que la primera moneda fuese de 1€, la segunda de 50 céntimos, 1€ o 2€ y siendo la tercera moneda de cualquier valor. Llama la atención la tendencia de los participantes a fijar el valor de una de las monedas en 1€, que parece ayudarles a aumentar el número de casos favorables. De los 14 participantes, 6 de ellos fijaron que la primera moneda tuviese el valor de 1€. En dos casos se fija el valor de la primera moneda en 1€ o en 2€, ampliando un poco el espacio muestral, aunque con restricciones en las siguientes monedas que hacen que siga resultando sencillo. Un último participante fija el valor de la primera moneda en 50 céntimos.

Por otro lado, de los 14 participantes, 5 justifican que trabajan por tanteo (P6). Esos mismos 5 participantes son los que, además, asumen la solución (P4) como el primer paso para empezar a trabajar en sus respectivos problemas. Es decir, sabiendo que la solución ha de encontrarse en el intervalo  $[0.6, 0.75]$  buscan cuál es el número de casos favorables y cuál es el número de casos posibles que necesitan tener para que su probabilidad se encuentre contenida en dicho intervalo. A partir de ese punto comienzan a aumentar o disminuir los valores hasta encontrar los adecuados (P6) y a buscar las

restricciones necesarias para conseguir dicho resultado (P3). Esto se traduce, a su vez, en un trabajo marcha atrás (P5), que siguen todos ellos.

Además, todos los participantes trabajan siguiendo sub-metas (P2), realizando pequeñas tareas que les llevan a la solución final. De entre ellos, 12 trabajan siguiendo una estructura jerárquica (P1) en su resolución: descripción del espacio muestral, selección del número de casos favorables y del número de casos posibles y aplicación de la regla de Laplace para llegar al resultado final. Los 2 participantes que no trabajan de forma jerárquica tienen una resolución desordenada, realizando primero todas las operaciones e indicando luego las explicaciones que deberían de ser intermedias como, por ejemplo, cuál es el número de casos favorables y cuál el de casos posibles. Los participantes que trabajan marcha atrás, utilizan la estructura jerárquica desde lo particular a lo general para ayudarse en la creación del problema. Invierten el orden partiendo de la solución y llegando al espacio muestral, aunque a la hora de resolverlo formalmente lo hacen correctamente comenzando por la creación del espacio muestral y siguiendo todos los pasos hasta llegar a la solución.

Finalmente, 7 de los 14 participantes realizan un diagrama o gráfico (P7) para ayudarse a resolver el problema, concretamente para ordenar los casos del espacio muestral. Los gráficos que aparecen representados son diagramas de árbol y tablas. De los 5 participantes que trabajaban utilizando los heurísticos P1, P2, P3, P4, P5 y P6, 3 de ellos realizan también un gráfico (P7).

En la fase de ejecución se ha podido observar que 10 de los 14 participantes aplican E1, E2, E3 y E4. Entre ellos se encuentran los 5 estudiantes que trabajan utilizando P1, P2, P3, P4, P5 y P6. Todos los participantes, excepto uno, explican el estado de la ejecución según van resolviendo el problema. Sin embargo, los 4 que no aplican todos los apartados de esta categoría, pierden alguno de ellos como el registro de todos los cálculos o la resolución con orden y precisión.

Por último, la fase de revisión, que queda patente en la justificación que da el alumnado, es bastante pobre. La mayoría de los estudiantes no justifica si la solución (R1) y el proceso (R2) son consistentes, o si pueden llegar a la solución de otra forma (R3). De los 5 que trabajan con P1, P2, P3, P4, P5 y P6, 2 de ellos realizan las tareas de revisión R1 y R2. Los otros 3 realizan, además, R4. Otro de sus compañeros también realiza R1, R2 y R3. Sólo un participante trata de expresar de otra forma la solución (R4), pero ésta no es válida ya que intenta expresar la probabilidad como un porcentaje.

Se han encontrado dos problemas que no se adaptan al nivel solicitado. Son de nivel superior debido a la falta de restricciones que implica un espacio muestral más complejo.

### **3. Conclusiones y comentarios finales**

El objetivo de este estudio piloto ha sido averiguar qué heurísticos y técnicas utiliza el alumnado de tercer curso del Grado en Maestro/a en Educación Primaria para crear y resolver problemas de probabilidad adaptados a nivel de 6º de primaria, analizando los patrones de actuación en el proceso de formulación y resolución de problemas por parte de dichos estudiantes.

Durante el proceso de análisis de los datos hemos podido construir una clasificación de heurísticos en función de las fases del proceso de resolución de problemas de Pólya (1989), similar a la de Cruz y Carrillo (2004).



Los resultados obtenidos muestran que todos los estudiantes trabajan el problema mediante sub-metas y casi todos lo hacen de forma jerárquica. Se ha visto una tendencia a trabajar marcha atrás partiendo de la solución, utilizando tanteo para encontrar el número de casos favorables y posibles que permitan obtener la respuesta adecuada. Además, se fijan valores de monedas de modo que se simplifique el espacio muestral ya que el problema ha de adaptarse al nivel de 6º de Primaria. Se ha observado que el uso de gráficos en la resolución ayuda a los estudiantes a resolver el problema de una forma más sencilla y visual como también afirma Botsmanova (1989). Algunos de los problemas planteados se resolverían más fácilmente si se utilizasen gráficos.

Las resoluciones de los estudiantes suelen ser precisas. La mayoría trata de mostrar paso a paso qué están haciendo durante el proceso de resolución.

Por lo general, observando los enunciados, los alumnos que han trabajado marcha atrás utilizando tanteo y asumiendo la solución como paso inicial parecen haber conseguido adaptar mejor y más fácilmente los problemas que han creado al nivel requerido. Además, el tanteo parece ser una de las técnicas heurísticas más utilizadas por parte de los estudiantes en la fase de planificación, aunque esto no demuestra un potencial superior de ese heurístico frente a los demás, como también afirman Cruz y Carrillo (2004).

Se ha identificado un patrón entre varios de los estudiantes que consiste en fijar el valor de una de las monedas en 1€. Este valor es lo suficientemente alto para ayudar a aumentar el número de casos favorables y obtener una probabilidad más alta que pueda estar contenida en el intervalo pedido. Dos estudiantes fijan que la primera moneda sea de 1€ o de 2€, lo que amplía el espacio muestral, pero también el número de casos favorables, ya que todas las opciones en las que la primera moneda sea de 2€ serán casos favorables.

Cuando los estudiantes tienen que justificar sus resultados, las explicaciones suelen ser escasas. Cruz y Carrillo (2004) ya ponían de manifiesto esta afirmación suponiendo que se debe a una falta de formación en cuanto a reflexión y explicitación del propio razonamiento de los estudiantes. Los casos en los que los alumnos hacen una justificación más detallada ayudan a esclarecer cómo ha sido el proceso de elaboración de su tarea (formulación del enunciado y resolución del mismo). Además, en esos casos resulta clara la utilización de un heurístico u otro porque quedan explicitados en dicha justificación, aunque también puede observarse que algunos estudiantes utilizan heurísticos sin saber que los están usando.

El uso de heurísticos está presente en el proceso de creación de enunciados de problemas, así como en el de resolución. Esta investigación confirma la necesidad de formar a los futuros maestros en técnicas heurísticas de resolución de problemas que les ayuden a plantear enunciados adaptados a un nivel educativo concreto. Schoenfeld (1979) defiende que la instrucción en técnicas heurísticas de resolución de problemas influye positivamente en la forma en la que los estudiantes resuelven problemas.

La justificación de los pasos seguidos en la resolución de un problema es de gran importancia para saber cómo se ha desarrollado dicho proceso. Durante el análisis de datos, se ha observado que muchos participantes no aportan una justificación detallada del proceso. Por ello, sería aconsejable guiar a los estudiantes en el proceso de justificación, fijando unas pautas o preguntas que les ayuden a enfocar sus explicaciones y les inviten a proporcionar más detalles sobre su elección, la naturaleza del problema o

la resolución. De esta manera podría desarrollarse un estudio más profundo, y podríamos entender mejor el proceso de creación y resolución de problemas.

## Referencias

- Aksoy, Y., Bayazit, I., y Kirnap, S. M. (2015) Prospective primary school teachers' proficiencies in solving real-words problems: approaches, strategies and models, *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(4), 827-839.
- Blanco-Nieto, L. J., Cárdenas-Lizarazo, J. A., y Caballero-Carrasco, A. (2015). La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria.
- Botsmanova, E. (1989). El papel del análisis gráfico en la resolución de problemas aritméticos, *Comunicación, Lenguaje y Educación*, 1(3-4), 17-21.
- Carles, M., Cerdán, F., Huerta, P., Lonjedo, M. A., y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y del contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 173-187). Santander: SEIEM.
- Cerdán, F., y Huerta, M. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19(1), 27-61.
- Cruz, J., y Carrillo, J. (2004). ¿Qué ponen en juego los alumnos al resolver problemas?: diferencias entre alumnos de 12 y 14 años. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 195-206). A Coruña: SEIEM
- Díaz, M. V., y Poblete, Á. (2001) Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, 45, 33-41.
- Hsieh, H. F., y Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research*, 15(9), 1277-1288.
- Pólya, G. (1989) *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Potter, W.J., y Levine-Donnerstein, D. (1999) Rethinking validity and reliability in content analysis. *Journal of Applied Communication research*, 27, 258-284.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 10(3), 173-187.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.