ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 37-1 (2019), 71-92
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Cognitive construction of the solution set of a system of linear equations with two unknowns

Miguel Alejandro Rodríguez Jara
Centro de Estudios Avanzados. Universidad de Playa Ancha. Viña del Mar. Valparaíso. Chile.
mrodriguez@upla.cl

Arturo Mena Lorca, Jaime Juan Fernando Mena Lorca, Patricia Vásquez Saldias
Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso. Chile.
arturo.mena@pucv.cl, jaime.mena@pucv.cl, patricia.vasquez@pucv.cl

María Del Valle Leo
Facultad de Educación. Universidad de Concepción. Concepción. Chile
mdelvall@udec.cl

RESUMEN • En esta investigación proponemos una *descomposición genética* para el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, mediante un tránsito desde sistemas homogéneos a no homogéneos, en un contexto geométrico-cartesiano. Para validar nuestra descomposición genética diseñamos instrumentos que aplicamos a estudiantes de formación inicial del profesorado de matemáticas para educación secundaria. Con ello, y haciendo uso de la estadística implicativa, logramos confirmar las estructuras mentales dispuestas en nuestra descomposición genética. Los resultados evidencian cierta incomprensión de lo que es una solución para un sistema, dificultades para articular los aspectos geométricos con los algebraicos y la conveniencia de utilizar una estrategia alternativa para el caso de un sistema de tres o más ecuaciones lineales.

PALABRAS CLAVE: Sistemas de ecuaciones lineales; Futuros profesores; Educación secundaria; Teoría APOE

ABSTRACT • In this research, we propose a *genetic decomposition* for the solution set of a system of linear equations with two unknowns, by means of a transit from a homogeneous to a non-homogeneous linear system, in a Cartesian geometric context. To validate our genetic decomposition, we designed instruments that we applied to students from a secondary school mathematics teacher training program. Thus, and by using implicative statistics, we were able to confirm the mental constructions and mechanisms considered in our genetic decomposition. The results show lack of understanding of what a solution for a system is, difficulties in articulating the geometrical and algebraic aspects, and the convenience of using an alternative strategy in the case of systems of three or more linear equations.

KEYWORDS: Systems of linear equations; Future teachers; Secondary education; APOS theory

Recepción: agosto 2016 • Aceptación: octubre 2018 • Publicación: marzo 2019

Rodríguez Jara, M. A., Mena Lorca, A., Mena Lorca, J., Vásquez Saldias, P. y Del Valle Leo, M. E. (2019). Construcción cognitiva del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Enseñanza de las ciencias, 37*(1), 71-92. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194

INTRODUCCIÓN

Los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) son relevantes para aplicaciones elementales a una variedad de problemas y contextos, fomentan el uso de diferentes procedimientos matemáticos en su resolución y, además, ponen de relieve conceptos matemáticos más generales, en parte construidos para resolverlos (Stewart, 2008; Kleiner, 2007; Dorier, 2000). Además, los SEL pueden ser utilizados para desarrollar la intuición geométrica y fomentar el uso de *software* de geometría dinámica (Betancourt, 2009; Dorier, 2000). Su naturaleza lógica de funciones proposicionales que deben cumplirse simultáneamente y la traducción de estas al conjunto solución vía el axioma de especificación proveen, además, de un buen ejemplo para aprender sobre la constitución básica del trabajo matemático en diversas áreas (Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2013).

El estudio de los SEL, relevando las funciones subyacentes, tiene su propio interés y permite adquirir una mirada comprensiva de los conceptos del álgebra y la geometría (Possani *et al.*, 2013; Oktaç y Trigueros, 2010; Sierpinska, 2000). En un nivel universitario, constituyen una oportunidad privilegiada para aprender los conceptos fundamentales del álgebra lineal y aumentar así la capacidad de resolución de problemas de los que esta se ocupa. Son, además, un buen instrumento para estimular la comprensión y el uso de las estructuras algebraicas.

En Chile, como en muchos otros países, los SEL constituyen un contenido del currículo nacional de enseñanza secundaria, y también figuran en los currículos de las instituciones formadoras correspondientes. Se trata, entonces, de un tema relevante para la formación continua e inicial de profesores. Por ello, nos propusimos estudiar las razones de la persistencia de respuestas erradas de futuros profesores que han aprobado cursos de álgebra lineal y métodos de resolución de SEL.[1]

ANTECEDENTES Y PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

Las ecuaciones lineales y los SEL, antes de adquirir el estatus de objeto matemático, se utilizaron como herramienta para resolver problemas en diferentes contextos. Ello puso de relieve la utilización de métodos como el de falsa posición o el Fancheng, por nombrar algunos (Kleiner, 2007; Martzloff, 2006). En el año 1750, Euler fue el primero en estudiar de manera formal un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, abordando implícitamente el concepto de dependencia e independencia lineal mediante una ecuación lineal (Kleiner, 2007; Dorier, 2000).

La resolución de SEL presenta variadas dificultades de orden cognitivo. Su estudio pone de relieve diversas concepciones que los estudiantes utilizan y/o desarrollan para abordarlos (Borja, 2015; Ochoviet, 2009; Manzanero, 2007; Trigueros, Oktaç y Manzanero, 2007; Duval, 1993). Un aspecto relevante para la cuestión es el tránsito desde la aritmética elemental al álgebra escolar (Sfard y Linchevsky, 1994). Esto se manifiesta con claridad ya en un SEL 2×2 en el que hay ecuaciones equivalentes: al abordarlo un estudiante, letras, incógnitas, variables y parámetros entran en tensión (Ursini y Trigueros, 2006) y, sin una aproximación funcional, es poco probable que aquel estudiante se percate de que un SEL tenga infinitas soluciones (Sfard y Linchevsky, 1994).

Por otra parte, la interpretación geométrica que hacen los estudiantes de los SEL 2×2 y 3×3 es insuficiente para comprender cuál es la solución, dado que su enseñanza se limita, generalmente, a abordar casos específicos con el propósito de sustentar técnicas de resolución; y, cuando el proceso de desarrollo desemboca en una expresión del tipo $0 = 0$ o bien $0 = r$ (r no nulo), ellos no logran conectar la relación entre las rectas o planos con la dependencia lineal de las ecuaciones (Ochoviet, 2009). De hecho, es frecuente que los estudiantes no tengan claro qué es el conjunto solución de un SEL (Manzanero, 2007; De Vries y Arnon, 2004).

1. En lo que sigue, escribiremos SEL $m{\times}n$ o sistema $m{\times}n$ para indicar un SEL de m ecuaciones y n incógnitas.

En términos generales, cabe preguntarse qué conocimientos previos son necesarios para que un estudiante pueda abordar de manera efectiva la resolución de un SEL de dos incógnitas y el nivel de construcción de dichos conocimientos (Oktaç y Trigueros, 2010). La teoría APOE posibilita formular esas preguntas con una precisión mayor a la habitual, pues permite explicitar en qué estado de desarrollo por parte del estudiante se necesita cada uno de esos requisitos, y es ese el marco teórico que usaremos. Las respuestas correspondientes nos permiten además abordar la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué estructuras mentales ponen de manifiesto profesores de formación inicial del profesorado de matemáticas para educación secundaria de una universidad chilena para resolver sistemas de ecuaciones homogéneos y no homogéneos de dos incógnitas?

En atención a la pregunta de investigación nuestro objetivo es, entonces, determinar el grado de coherencia de las construcciones y mecanismos mentales que se han considerado relevantes para construir el conjunto solución de un SEL de dos incógnitas mediante el tránsito de sistemas lineales homogéneos a no homogéneos.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE

La teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto y Esquema) es una teoría constructivista que toma como marco de referencia las ideas de Piaget respecto del desarrollo del conocimiento, particularmente las de *abstracción reflexiva* y *esquema* (Asiala *et al.*, 1996). En dicha teoría se extiende el análisis cognitivo de conceptos matemáticos del nivel escolar a aquellos que se trabajan en un contexto universitario. Para ello, se describe cómo un individuo construye un concepto a partir de *construcciones* y *mecanismos mentales* (Arnon *et al.*, 2014). Tales construcciones y mecanismos mentales son los siguientes: Una *acción* es una operación mental que se caracteriza por ser realizada siguiendo instrucciones detalladas y ejecutadas paso a paso, provenientes del exterior. Si el individuo reflexiona sobre una o más acciones y puede describirlas sin tener que realizarlas, incluso invirtiendo la secuencia de acciones, estas se *interiorizan* en un *proceso*. El individuo que reflexiona sobre un proceso y puede transformarlo, lo ha *encapsulado* en un *objeto* sobre el cual puede realizar acciones. Una colección de acciones, procesos, objetos se puede *tematizar* en un *esquema*. Además, un proceso se puede *revertir* en otro proceso, o dos procesos pueden *coordinarse* para producir un nuevo proceso; los objetos se pueden *desencapsular* para tener acceso a los procesos que los constituyen. En la figura 1 se aprecia la relación que se da entre las diferentes construcciones y mecanismos mentales.

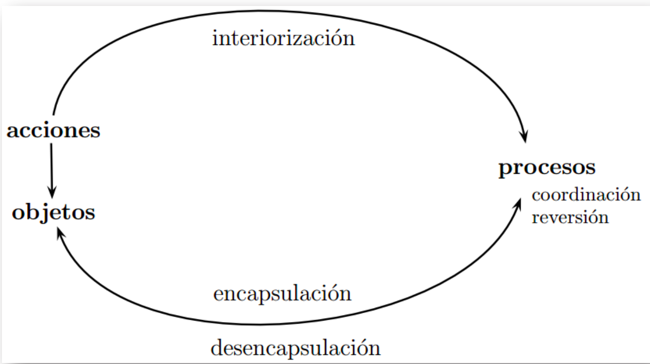


Fig. 1. Relación entre las construcciones y los mecanismos mentales (Arnon *et al.*, 2014: 18).

Una descomposición genética (DG) es un modelo hipotético que describe en detalle las construcciones y los mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante construya un concepto matemático (Codes y González-Martin, 2017; Arnon *et al*., 2014; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006; Asiala *et al*., 1996). Este modelo no pretende ser único y debe ponerse a prueba experimentalmente para ser validado o refinado a través de la aplicación de técnicas de recolección de datos y su posterior análisis (González y Roa, 2017).

A modo de ejemplo, para el caso de un SEL 2×2, consideremos la acción asociar una recta paralela a los ejes coordenados cuando eliminamos una de las variables mediante la combinación lineal de las ecuaciones del SEL y la utilización de un cuantificador universal. La acción rectas paralelas a los ejes coordenados se interioriza en el proceso solución cuando la abscisa y ordenada del punto de intersección de dos rectas paralelas a los ejes coordenados se relaciona con la intersección de las rectas asociadas al SEL. Para ello es necesario verificar que dicha ordenada y abscisa satisfagan ambas ecuaciones y, a su vez, se asuma que por un punto de un plano se pueden trazar infinitas rectas. Todo lo indicado permite ejemplificar la manera como se operacionaliza la teoría APOE en el diseño de una DG para un concepto matemático.

Los SEL y la teoría APOE

Se han realizado algunas investigaciones con APOE que abordan la construcción del conjunto solución de un SEL (Borja, 2015; Manzanero, 2007; De Vries y Arnon, 2004). La propuesta de Manzanero (2007) así como la de De Vries y Arnon (2004) utilizan los conceptos de conjunto, función, igualdad, ecuación y espacio vectorial, a diferencia de la de Borja (2015), que incorpora el concepto de variable, dejando fuera el concepto de espacio vectorial. Cabe indicar que en los casos anteriores la construcción del conjunto solución de un SEL se sustenta en conceptos construidos a nivel objeto y esquema. En cambio, para nuestra investigación, consideramos relevante la coordinación de procesos con base en la desencapsulación de los objetos plano cartesiano y recta vectorial para que se evoquen nociones de la matemática escolar. Esta estrategia obedece, fundamentalmente, a la necesidad de estimular un tránsito entre la matemática escolar y la universitaria.

Una DG para el conjunto solución de un SEL como objeto

Nos interesa el caso de un SEL n×2, particularmente con n≥2.

Para este estudio nuestra DG preliminar se sustenta en el siguiente procedimiento: ante un sistema no homogéneo, se determina primero el conjunto solución del sistema homogéneo asociado y luego se lo traslada a partir de una solución particular del sistema no homogéneo; es decir, se transita desde un subespacio vectorial a una variedad lineal en el espacio ambiente (*cf.* Grossman, 1999). Por cierto, para el caso de un sistema indeterminado esta estrategia tiene la virtud de relevar, cuando corresponde, el conjunto solución, y no detenerse en la afirmación de que «hay infinitas soluciones», con la que se suele terminar no solo el trabajo de los estudiantes sino el de los textos de estudio (Sessa, 1998; Segura, 2004; Ochoviet, 2009). Se ha escogido aquí esa estrategia para averiguar cómo hacen los estudiantes el tránsito homogéneo-no homogéneo en un contexto geométrico-cartesiano. De todas maneras, se debe considerar que puede darse el caso de que para el sistema no homogéneo no haya solución (sino para cada par de ecuaciones constituyentes, por ejemplo), y el sistema homogéneo asociado tenga una única solución (al intentar trasladar el punto solución del sistema no homogéneo, este desaparece y es reemplazado por tres puntos distintos –que los estudiantes suelen tomar por tres soluciones del sistema–). En la figura 2, se presentan las construcciones y los mecanismos mentales para construir el conjunto solución de un SEL.

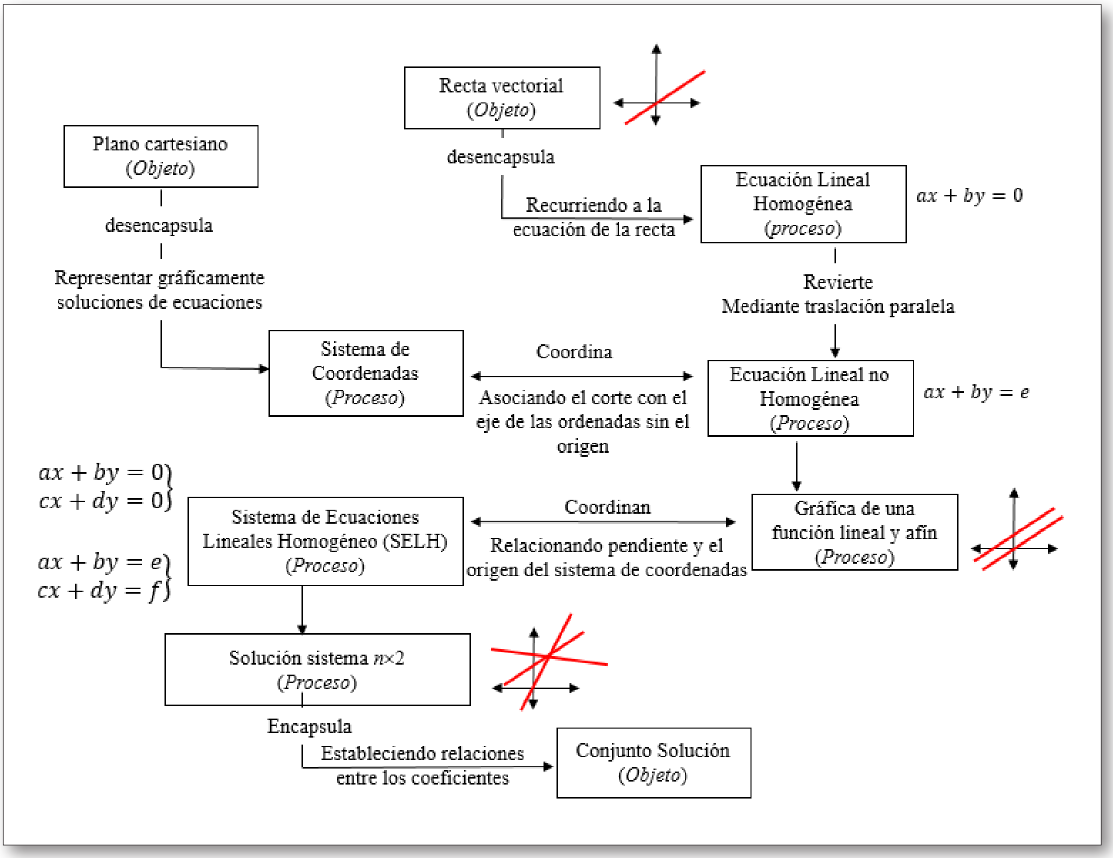


Fig. 2. Diagrama que muestra las construcciones y los mecanismos mentales para la construcción del conjunto solución de un SEL n×2.

La DG procedería como sigue. Se supone que el estudiante posee una concepción objeto del plano cartesiano y de la recta vectorial, es decir, puede representar gráficamente ecuaciones lineales y recurrir al paralelismo de rectas para relacionar una recta afín con una recta vectorial a través de ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas. Se requieren los procesos asociar una ecuación lineal homogénea a una recta vectorial, y una ecuación lineal no homogénea a una recta afín; esos procesos se coordinan mediante la conjunción en el proceso SEL homogéneo y no homogéneo, respectivamente. Tales procesos deben ser encapsulados en objetos SEL homogéneo y no homogéneo, respectivamente, pues se deberán realizar acciones sobre ellos. Para el caso homogéneo, la verificación del par (0,0) como solución de cada ecuación se interioriza en el proceso solución del sistema. Además se requiere coordinar los procesos SEL no homogéneo y SEL homogéneo asociado, por la vía de situar ambos en un único plano cartesiano. Así, el proceso SEL homogéneo se coordina con el proceso SEL no homogéneo para construir el proceso solución de un SEL no homogéneo, para lo cual se requiere a su vez el proceso trasladar paralelamente las rectas solución de las ecuaciones componentes del sistema homogéneo. Ese proceso solución se encapsula en el objeto solución del SEL. Para discriminar los casos posibles de resolución, se requiere una concepción proceso de verificación de la dependencia lineal de las ecuaciones.

METODOLOGÍA

Nuestro estudio se inscribe como una investigación mixta, ya que utilizamos un método estadístico con un enfoque interpretativo y descriptivo mediante un estudio de caso (Stake, 2010), entendiendo que un estudio de caso es una indagación en profundidad de una realidad específica, que no pretende una generalización de los resultados obtenidos, sino más bien mostrar evidencias de una construcción específica (Rodríguez, Gil y García, 1999).

En el marco de lo anterior, se consideró el ciclo de investigación de APOE, que está compuesto por tres componentes: *el análisis teórico*, *el diseño y aplicación de instrumentos* y *el análisis y verificación de datos*. Este ciclo ha sido utilizado con éxito por el Grupo RUMEC y otros investigadores (González y Roa, 2017; Trigueros, Maturana, Parraguez y Rodríguez, 2015; Arnon *et al.*, 2014; Roa y Oktaç, 2012; Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006). El *análisis teórico* permitió proponer las construcciones y los mecanismos mentales descritos en la DG preliminar en la página 74. Una vez propuesta la DG preliminar, se debe validar, es decir, se necesita mostrar evidencia empírica de que el modelo de construcción para el conjunto solución de un SEL de $n\times 2$ señalado en ella, efectivamente se observa en los estudiantes considerados para el estudio.

En una segunda etapa, se diseñaron y aplicaron técnicas de recolección de datos (cuestionarios y entrevistas semiestructuradas) que permiten mostrar y/o refinar las construcciones mencionadas en la DG preliminar. Cabe indicar que las técnicas de recolección de datos utilizadas permitieron identificar e interpretar, con ayuda de la estadística implicativa, aquellos episodios críticos que condujeron a la identificación de las construcciones y los mecanismos mentales que subyacen a la construcción del concepto en estudio.

Sobre el caso de estudio y los instrumentos utilizados

El caso es un curso optativo de tercer año en la malla curricular de formación inicial del profesorado de matemática de una universidad chilena. En dicho curso se trata de articular parte de la matemática universitaria que han aprendido los futuros profesores con la matemática que deberán enseñar en su desempeño profesional. El curso consta de una sesión semanal de 1,5 horas y, en nuestro caso, lo conformaron ocho estudiantes que fueron individualizados como *E1, E2,…, E8*.

Los conceptos previos que ellos debían conocer en el momento de dar este curso son: ecuación de la recta, dependencia e independencia lineal de vectores, álgebra de matrices y métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Por último, para validar nuestra DG, diseñamos los siguientes instrumentos: un cuestionario (véase anexo) que consta de tres preguntas que nos permitió indagar en las concepciones de los estudiantes respecto de los conceptos solución y conjunto solución de un SEL y una entrevista (véase anexo) sobre la base de seis preguntas que diseñamos considerando el desempeño de los estudiantes en el cuestionario. A continuación presentamos un análisis *a priori* de las preguntas de dicho cuestionario.

> *Pregunta 1. Suponga que tiene tres ecuaciones de rectas en el plano. Se sabe que al graficarlas simultáneamente hay 7 posibilidades en total. Dibújelas.*

Con esta pregunta nos propusimos indagar en la representación gráfica de las ecuaciones asociadas a un SEL 3×2. De las 7 posibilidades, se esperaba que los estudiantes manifestaran algunas variantes que pusieran de relieve conceptos del plano cartesiano, tal como se indica en la tabla 1. Por otra parte, se esperaba identificar elementos matemáticos que podrían incidir en la concepción solución de un SEL desde un punto de vista gráfico.

Tabla 1.
Conceptos del plano cartesiano esperados

Aspectos que influyen en el número de posibilidades	*Clave*
Considera la dirección como una de las posibilidades	Cdr
Considera rectas coincidentes	Crc
Considera rectas paralelas	Crp
Considera rectas secantes	Crs
Considera rectas perpendiculares	Crpe
Considera un sistema de coordenadas	Csc
Marca dos sentidos a una recta	Csr
Utiliza notación conjuntista	Unc
Responde correctamente al requerimiento	Rcr

Pregunta 2. Resuelva el sistema de ecuaciones 2x+3y=6, x+2y=4, 3x+6y=18. Explique lo que ocurre.[2]

Con esta pregunta quisimos indagar en el tipo de procedimientos que los estudiantes utilizan para resolver un SEL y, a la vez, dar cuenta de las construcciones y mecanismos mentales asociados con dichos procedimientos, así como el tipo de argumentos que darían los estudiantes, que se cotejarían con aquellos que hemos enumerado en la tabla 2 en función de las investigaciones que se han revisado (Borja, 2015; Manzanero, 2007).

Tabla 2.
Argumentos posibles de los estudiantes

Postura en el tipo de solución del SEL por parte del estudiante	*Clave*
Asume una solución	A1s
Asume dos soluciones	A2s
No asume ninguna solución para el sistema	Ans
No resuelve	Nr
No se pronuncia respecto de la solución para el sistema de ecuaciones	Nsp
Interseca a pares las ecuaciones	Arg1
El sistema tiene solución pues hay ecuaciones que se intersecan	Arg2
Su análisis algebraico tiene relación con lo geométrico	Arg3
Examina si un par ordenado asociado a dos ecuaciones satisface la tercera ecuación	Arg4
Si dos ecuaciones no se intersecan, el sistema dado no tiene solución	Arg5
Hay dos ecuaciones que no se intersecan, pero el sistema dado tiene solución	Arg6
Hace uso de la pendiente para indicar intersección	Arg7
Recurre al rango de una matriz	Arg8

2. Los estudiantes reciben el sistema escrito en la distribución bidimensional acostumbrada, según se aprecia en el anexo.

Pregunta 3. Para cada una de las posibilidades que obtuvo en la pregunta 1, escriba un sistema de ecuaciones que corresponda.

Con esta pregunta nos propusimos indagar en los argumentos y en el tipo de conocimiento que está en juego para escribir un SEL, conociendo para ello el tipo de solución a la luz de las construcciones y mecanismos mentales que se han dispuesto en nuestra DG preliminar, según se expresa en la tabla 3.

Tabla 3.
Argumentos que se deben considerar

Argumentos que se deben considerar	*Clave*
Utiliza la ecuación de la recta $y = mx + n$	Arg9
Ofrece casos particulares	Arg10
Analiza el caso general	Arg11
No hace restricciones cuando corresponde	Arg12
Hace restricciones	Arg13
Su análisis algebraico tiene relación con lo geométrico	Arg14
Considera rectas paralelas a los ejes coordenados	Arg15

Una vez analizadas las respuestas al cuestionario, considerando la DG y la estadística implicativa, se construyeron las tablas 4 y 5, que se presentan más adelante. Luego, sobre la base de dichas tablas, diseñamos 6 preguntas que sirvieron de base para una entrevista semiestructurada (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). El foco de la entrevista fue indagar el grado de coherencia de las construcciones mentales dispuestas en nuestra DG y, a la vez, establecer el papel de los sistemas homogéneos en la construcción del conjunto solución de un SEL de n×2.

Sobre la estadística implicativa

Para analizar las respuestas al cuestionario se hizo uso del análisis estadístico implicativo (*analyse statistique implicative*), de Régis Gras, un método exploratorio que permite la aparición de relaciones de implicancia entre las variables en estudio, así como la clasificación jerárquica de estas (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008; Orús, Zamora y Gregori, 2009). Con esa finalidad, se hizo primero un análisis *a priori* para cada pregunta del cuestionario, y se generó un árbol de *similaridad* (véase figura 10, más adelante), esto es, un diagrama que muestra la agrupación jerárquica de las variables en estudio, y un *grafo implicativo* (véase figura 11), diagrama que muestra relaciones de implicancia entre las variables analizadas (Gras *et al.*, 2008; Orús *et al.*, 2009); para ello, se utilizó el software CHIC (*Cohesive Hierarchical Implicative Classification*), en su versión 6.0.

CHIC permite obtener indicadores tales como *similaridad* e *intensidad de implicación*. El primero es una medida de semejanza o correspondencia de las variables que se van a agrupar, que permite conformar distintas clases que se distribuyen en un árbol de *similaridad*. El segundo es la medida que evidencia el grado de relación entre dos variables con base en el cálculo del número de contraejemplos que invalidan una implicación en su sentido clásico. Estos indicadores permiten afinar la selección de informantes para el proceso de entrevistas, a partir del concepto de *contribución* que el *software* provee, es decir, el aporte de un individuo a la conformación de una clase, por el cálculo ya sea de *similaridad* o de *intensidad de implicación*.

ANÁLISIS

En este apartado presentamos un análisis de las respuestas al cuestionario mediante el análisis estadístico implicativo o estadística implicativa y, luego, damos a conocer un análisis del desempeño de un estudiante a la entrevista semiestructurada.

Análisis de las respuestas al cuestionario

En la figura 3 se observa la respuesta de *E2*, quien logra dibujar las siete posibilidades que se solicitan. Con ello *E2* muestra una concepción objeto plano cartesiano ya que, desconociendo la forma de las ecuaciones, asume distintas posiciones para los tríos de rectas. Además *E2* muestra una construcción proceso SEL n×2 ya que las distintas posibilidades que presenta dependen de la existencia o no de puntos de intersección.

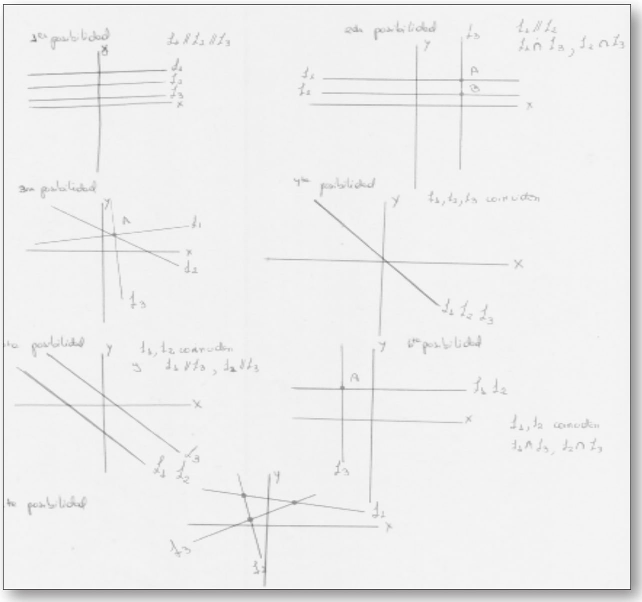


Fig. 3. Respuesta de *E2*, que incluye todas las posibilidades previstas (aquí nos interesa mostrar solamente los dibujos, no el texto).

En las figuras 4 y 5 se aprecian las respuestas de *E7* y *E1*, respectivamente, quienes muestran una construcción acción SEL n×2 ya que consideran tríos de rectas sin reparar en que un cambio de dirección no necesariamente genera una nueva posibilidad.

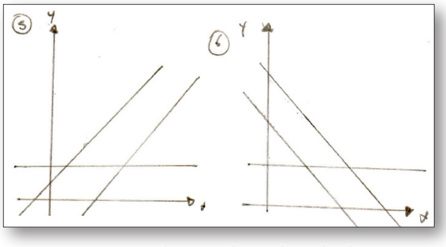


Fig. 4. Respuesta de *E7*; el cambio de dirección y una nueva posibilidad.

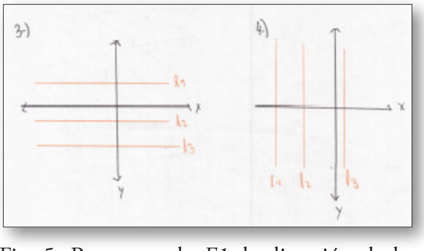


Fig. 5. Respuesta de *E1*; la dirección de las rectas genera una nueva posibilidad.

En la figura 6 se aprecia la respuesta de *E3*, quien muestra una construcción acción matriz escalonada al no lograr interpretar la tercera fila de la matriz que redujo por filas. Ello evidencia que *E3* no ha coordinado los procesos rango y conjunción de ecuaciones en el proceso solución.

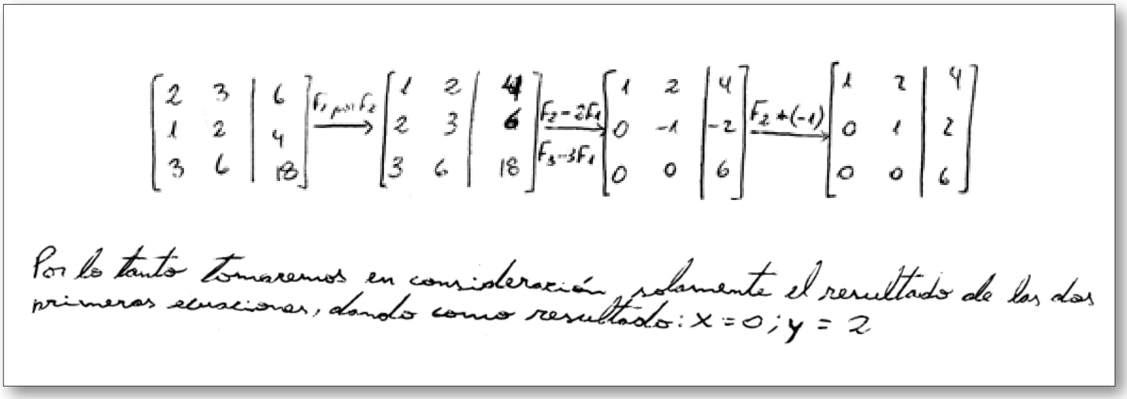


Fig. 6. Respuesta de *E3* a la pregunta 2. «Por lo tanto tomaremos en consideración solamente el resultado de las primeras ecuaciones, dando como resultado: x=0; y=2».

Por otro lado, como se observa en la figura 7, *E1* muestra una construcción acción solución, ya que asocia soluciones del SEL 3×2 con pares de valores que satisfacen solo un par de ecuaciones de dicho SEL.

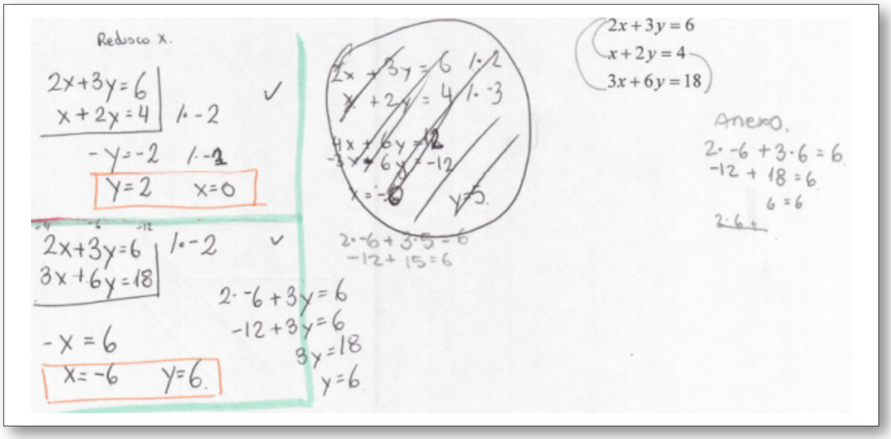


Fig. 7. Respuesta de *E1* a la pregunta 2.

En las figuras 8 y 9 se aprecian, respectivamente, las respuestas de *E8* y *E9* a la pregunta 3. Ello evidencia que ambos estudiantes muestran una construcción objeto plano cartesiano ya que logran representar distintos tipos de rectas según su posición en el sistema de coordenadas rectangular.

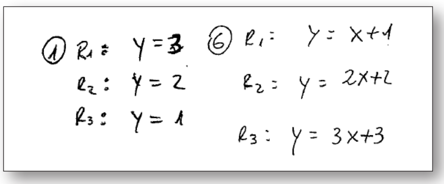


Fig. 8. Respuesta de E8; SEL asociado a la representación de la pregunta 1.

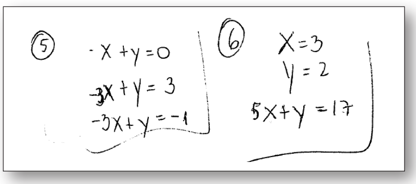


Fig. 9. Respuesta de E9; SEL asociado a la representación de la pregunta 1.

A continuación presentamos el árbol de *similaridad* y el *grafo implicativo* que obtuvimos al rotular y procesar con el *software* CHIC las respuestas que dieron los estudiantes a las preguntas del cuestionario. Para ello consideramos las tablas 1, 2 y 3 siguiendo la propuesta de Rodríguez, Gregori, Riveros y Aceituno (2017). En la figura 10 se aprecia el árbol de similaridad donde destacan seis clases significativas.

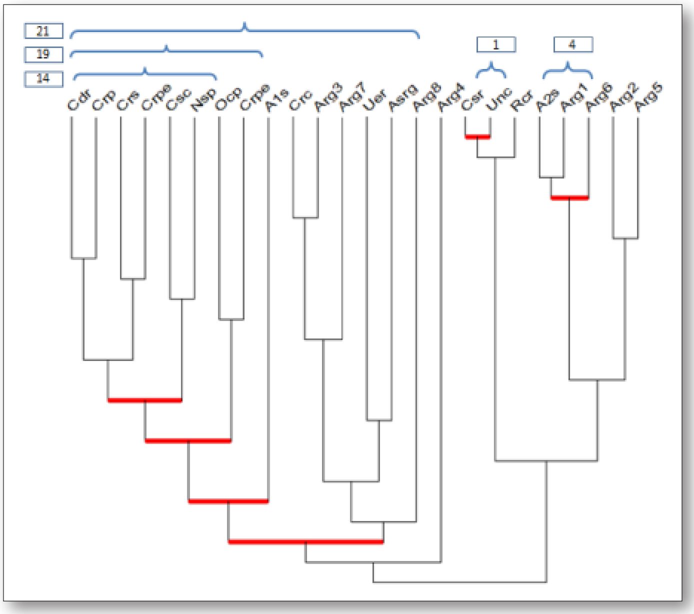


Fig. 10**.** Árbol de *similaridad* asociado al desempeño de los estudiantes en el cuestionario.

En la tabla 4 se aprecian los distintos aspectos que se desprenden de la elaboración del árbol de similaridad. Cabe mencionar que el *software* CHIC permite, después del proceso de clasificación, identificar a aquellos estudiantes que contribuyen a la conformación de las distintas clases.

Tabla 4.
Análisis de las clases significativas asociadas al árbol de *similaridad*

Nodo	*Variables*	*Similaridad*	*Comentarios*	*Estudiantes*
1	Csr, Unc	1	El uso de la notación conjuntista y los dos sentidos que se le asocian a una línea recta.	*E2*
4	A2s, Arg1, Arg6	1	La solución de un SEL requiere que haya intersección, sin verificación de la solución en las ecuaciones.	*E1, E2*
14	Cdr, Crp, Crs, Crpe, Csc, Nsp	0,999	La dirección de la recta, un elemento que interfiere en las posibilidades de representar un SEL desde un sistema de coordenadas.	*E3, E4, E2, E1, E8, E7, E6, E5*
19	Cdr, Crp, Crs, Crpe, Csc, Nsp, Ocp, Crpe, A1s	0,989	Un sistema de coordenadas y las ecuaciones de un SEL desvinculadas.	*E1, E7, E4, E2, E6, E3, E5, E8*
21	Cdr, Crp, Crs, Crpe, Csc, Nsp, Ocp, Crpe, A1s, Crc, Arg3, Arg7, Uer, Asrg, Arg8, Arg4	0,947	La ecuación de la recta en un sistema de coordenadas pone de relieve la dirección y la pendiente de la recta, desarticulado con la intersección de las rectas y la solución del SE y el rango de una matriz.	*E4, E5, E6, E2, E8, E7, E3*

En primer lugar, se observa una alta *similaridad* para cada una de las clases significativas en el árbol de *similaridad*. Esto se asocia a que, independientemente de los conceptos trabajados en un curso de álgebra lineal, prevalecen los procedimientos o técnicas que los estudiantes adquieren en cursos elementales de álgebra o aquel conocimiento que los estudiantes evocan de la matemática escolar. En particular, las técnicas que se plantean para la resolución del SEL 2×2 y 3×3, respectivamente, y lo relativo a la determinación de la ecuación de una recta en el plano cartesiano y viceversa. Por otro lado, en el *grafo implicativo*, que se presenta en la figura 11, se puede apreciar la influencia de los métodos geométricos que se trabajan usualmente en el sistema escolar, y que las investigaciones revisadas sobre el tema en cuestión señalan (Borja, 2015; Ochoviet, 2009; Manzanero, 2007). A la luz de ese grafo, podemos inferir que hay una fuerte incidencia de las concepciones que se manifiestan en la resolución de un SEL 2×2, lo que interviene en las representaciones y procedimientos que se puedan dar para SEL *n*×2, como se pudo apreciar en las respuestas a la pregunta 2 del cuestionario.

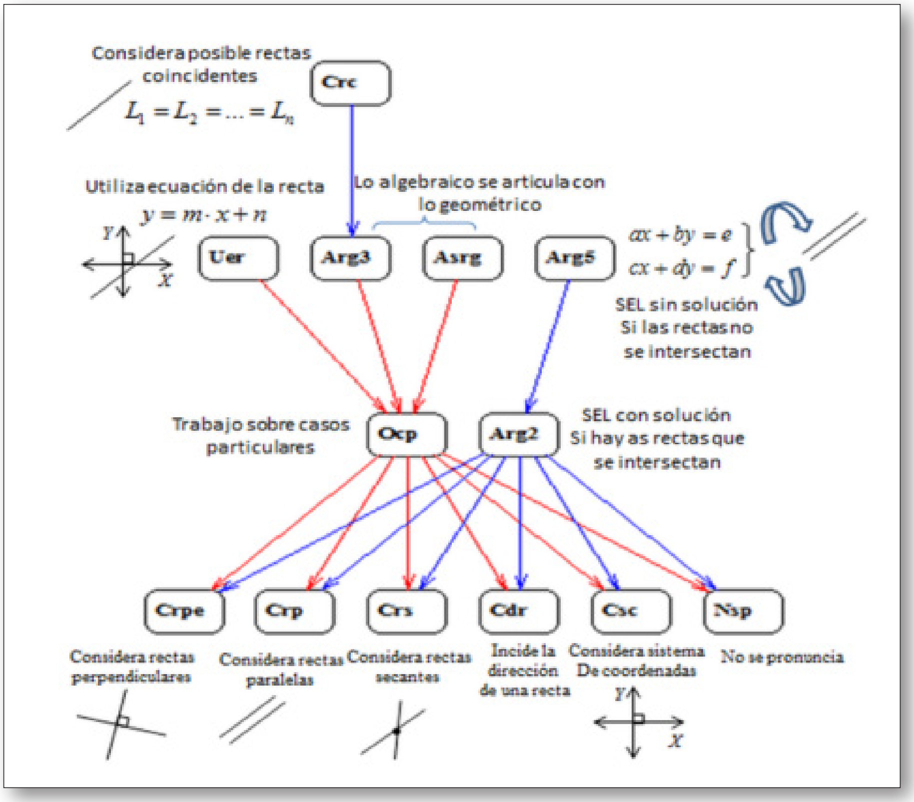


Fig. 11. Grafo implicativo de los aspectos desplegados en las dos primeras preguntas del cuestionario.

Por último, en la tabla 5 presentamos un resumen de aquellos conceptos ligados con nuestra DG preliminar, dándose a conocer los respectivos niveles de construcción, que designamos como acción (A), proceso (P) y objeto (O).

Tabla 5.
Sobre el nivel de construcción conceptos asociados en la DG

Conceptos	Estudiantes							
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8
Recta vectorial	-	P	A	P	A	P	P	-
Representación de ecuaciones lineales	A	P	A	A	P	P	P	A
Sistemas de coordenadas	P	P	P	P	A	P	P	A
Solución de SEL	A	O	A	A	P	A	A	P
Pendiente de una recta	P	P	P	P	P	P	A	A
Ecuación homogénea	-	P	-	P	A	P	P	-
Eliminación gaussiana	A	-	-	-	-	A	-	P
Técnicas de resolución	P	O	A	A	P	P	A	P

Entrevista semiestructurada

Reportamos aquí los resultados de la entrevista semiestructurada. El propósito de esta fue ahondar en el grado de coherencia de las construcciones mentales que se evidenciaron en el cuestionario respecto del conjunto solución de un SEL n×2. Para ello se seleccionó a *E2*, dado su desempeño en el cuestionario y su *contribución* a los distintos niveles que el árbol de similaridad generó; los que dan cuenta de la influencia tantos de los aspectos algebraicos como geométricos que se han considerado relevantes para abordar la construcción del concepto que está en juego en nuestra investigación, como se aprecia en la tabla 4.

Guion de la entrevista

En la tabla 6 se presenta un panorama general de cada pregunta (véase anexo) con relación a las construcciones mentales previstas en nuestra DG sobre la construcción objeto del conjunto solución de un SEL n×2.

Tabla 6.
Sobre la entrevista a *E2*

Pregunta	*Objetivo de la pregunta*	*Construcciones y mecanismos mentales asociados a la DG inicial que se espera evidenciar*
1	Indagar en las concepciones que un estudiante manifiesta respecto de la representación gráfica de un SEL y su conjunto solución.	Presencia de procesos relativos a un haz de rectas, ecuaciones equivalentes, simultaneidad.
2	Indagar en el número de posibilidades que se puede asociar a un SEL 2×2.	Concepción del tipo de solución para un SEL 2×2.
3	Indagar en la relación que se puede dar a un álgebra de ecuaciones desde la representación gráfica de un SEL.	Desencapsulación de algún objeto y reversión de algún proceso que tenga relación con el proceso solución de un SEL.
4	Indagar en las concepciones que se tienen de un sistema de ecuaciones equivalentes y su representación gráfica.	Construcción de un proceso de ecuaciones equivalentes.
5	Indagar en el tipo de solución de un SEL 2×2 y su relación con el tipo de ecuaciones que involucra.	Coordinación de procesos relacionados con la intersección de rectas.
6	Indagar en el tipo de solución de un SEL 2×3 y su relación con el tipo de ecuaciones que involucra.	Qué está incidiendo en la encapsulación del objeto conjunto solución de un SEL.

Análisis a la entrevista de E2

Se ha decidido presentar particularmente las respuestas a las preguntas 5 y 6, pues en ellas se logra evidenciar qué concepción tiene *E2* respecto del conjunto solución de un SEL y la influencia de que tienen un SEL homogéneo.

Respecto de la pregunta 5. La pregunta tenía como propósito indagar en la estructura mental asociada al conjunto solución de un SEL. Según lo que señala *E2* respecto de los apartados 5a y 5d, esta evidencia una construcción objeto del conjunto solución de un SEL 2×2 homogéneo; para los distintos SEL, determina el tipo de solución sobre la base de una relación de los coeficientes y de las constantes de las ecuaciones, según se aprecia en las figuras 12 y 13.

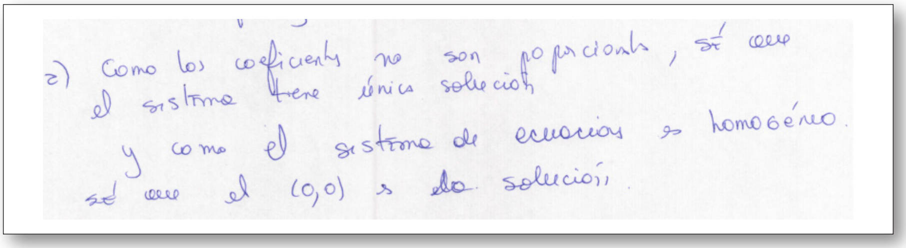


Fig. 12. Respuesta de *E2* a la pregunta 5a de la entrevista: «Como los coeficientes no son proporcionales, sé que el sistema tiene única solución y como el sistema de ecuaciones es homogéneo sé que el (0,0) es la solución».

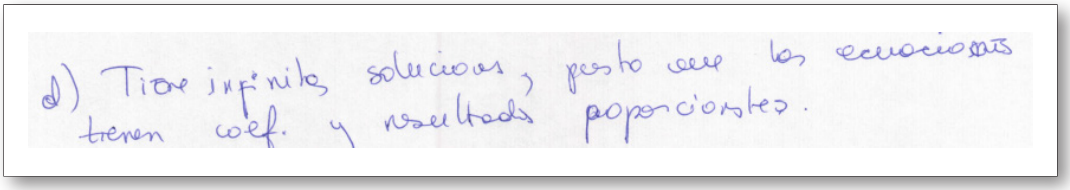


Fig. 13. Respuesta de *E2* a la pregunta 5d de la entrevista. «Tiene infinitas soluciones, puesto que las ecuaciones tienen coeficientes y resultados proporcionales».

Por otra parte, en la respuesta de *E2* a la pregunta 5c se evidencia una construcción esquema para el conjunto solución de un SEL 2×2 homogéneo, al vincular ecuaciones lineales, cuyos coeficientes son respectivamente proporcionales, con rectas paralelas, para así establecer el tipo de solución del conjunto solución del SEL, como se aprecia en la figura 14.

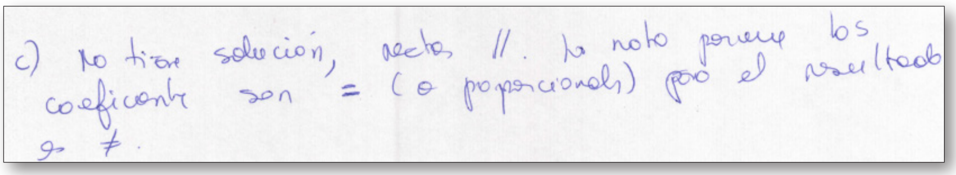


Fig. 14. Respuesta de *E2* a la pregunta 5c: «No tiene solución, rectas [paralelas]. Lo noto porque los coeficientes son = (o proporcionales) pero el resultado es [diferente]».

La entrevista permite ampliar el análisis, como se hace a continuación. «I» significa investigador.

E2: [Refiriéndose al sistema propuesto en 5c]: Solamente mirando, esta no tiene solución.
I: Entonces, digamos de manera sencilla, ¿por qué el sistema en 5c no tiene solución?
E2: Porque las rectas son paralelas.
I: ¿Y por qué son paralelas?
E2: Lo noto porque los coeficientes son múltiplos entre ellos.
I: ¿Y el resultado?
E2: Es distinto.
I: Entonces, si los coeficientes, como dice Ud., son iguales o proporcionales, y si el resultado es distinto, entonces son iguales. Porque Ud. me decía que los coeficientes están asociados con la [E2 interrumpe].
E2: La pendiente.
I: La pendiente [la estudiante sigue escribiendo].
E2: Este... tiene infinitas soluciones, los coeficientes son proporcionales pero el resultado no [escribe lo observado].
I: Podemos decir que una ecuación es múltiplo de la otra.
E2: Sí, esa es una forma más rápida de decirlo porque considera tanto los coeficientes como el resultado son proporcionales.

Cabe hacer notar que *E2*, si bien obtiene una solución del SEL, como se aprecia en la figura 15, no muestra evidencia de una coordinación entre el proceso recta vectorial y el proceso recta afín. Podría haberlo hecho relacionando los SEL de las preguntas 5b y 5a por medio de una traslación paralela como mecanismo de coordinación. Esto hace suponer que *E2* no ha logrado construir un esquema de conjunto solución de un SEL.

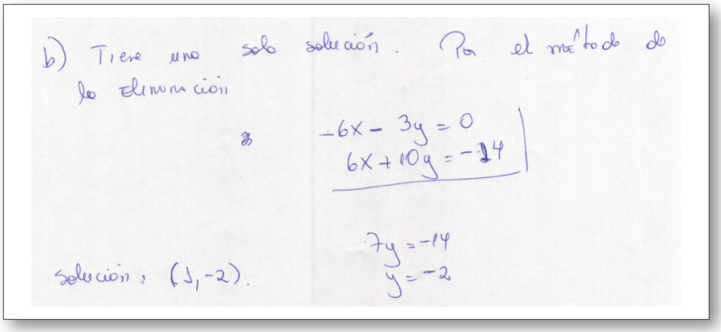


Fig. 15. Respuesta de *E2* a la pregunta 5b: «Tiene una sola solución. Por el método de la eliminación…».

I: ¿Y por qué diríamos que tiene una solución?
E2: Por lo que estábamos hablando antes, no son proporcionales sus coeficientes, no son paralelas y no coinciden… a ver, el… [saca algunas cuentas].
I: Algún procedimiento que usted conozca.
E2: Acá yo hago el método de la eliminación.
I: Haga el método de eliminación [E2 trabaja en su hoja].
E2: Acá es donde uno va perdiendo rectas… [hace referencia a la representación gráfica del método de eliminación que se discutió en una de las clases].
I: Lo importante es que al aplicar el método se sea consciente de lo que ocurre geométricamente.
E2: No se pueden hacer desaparecer rectas.

Como se indicó en la tabla 6, con la pregunta 6 pudimos indagar en el tipo de concepción que se tiene del conjunto solución de un SEL. Para ello propusimos una secuencia de SEL para observar qué aspectos geométricos y/o algebraicos inciden en la determinación del conjunto solución de un SEL. Como se aprecia en la figura 16, *E2* indica que el SEL tiene única solución verificando que los coeficientes del SEL homogéneo no son proporcionales. Con ello descarta la posibilidad de que las rectas sean paralelas o coincidentes.

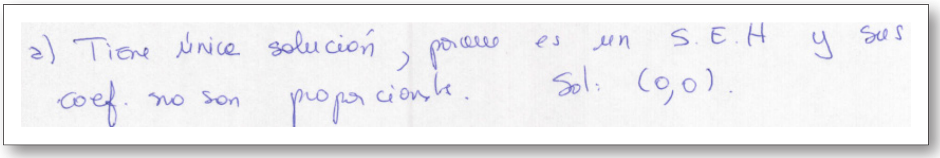

a) Tiene única solución, porque es un S.E.H y sus coef. no son proporcionales. Sol: (0,0).

Fig. 16. Respuesta de *E2* a la pregunta 6a: «Tiene única solución, porque es un [sistema de ecuaciones homogéneo] y sus coef[icientes] no son proporcionales».

Para el caso de los demás sistemas de ecuaciones, *E2* indica que estos tienen una única solución, ya que los coeficientes de las ecuaciones y el «resultado» –refiriéndose al término constante de la ecuación– no son respectivamente proporcionales. Al parecer, *E2* no ha coordinado el proceso «recta vectorial» con el proceso «recta afín», dada la respuesta que se aprecia en la figura 17. Además, suponemos que no ha coordinado el proceso SEL homogéneo con el proceso SEL no homogéneo.

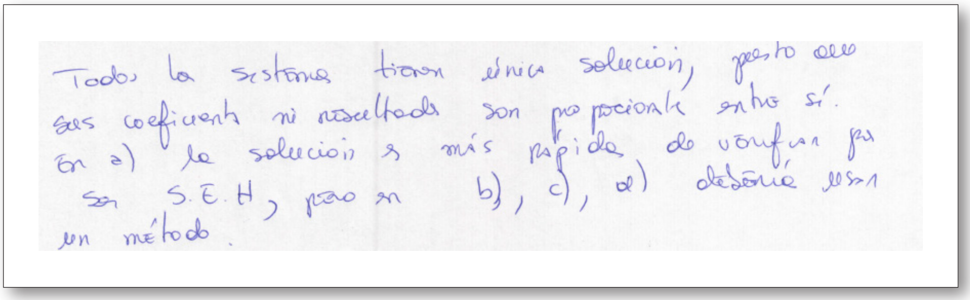

Todos los sistemas tienen única solución, puesto que sus coeficientes ni resultados son proporcionales entre sí. En a) la solución es más rápida de verificar por ser S.E.H, pero en b), c), d) debería usar un método.

Fig. 17. Argumento de *E2* ante la pregunta 6: «Todos los sistemas tienen única solución, puesto que sus coeficientes ni resultados son proporcionales entre sí. En a) la solución es más rápida de verificar por ser [sistema de ecuaciones homogéneo], pero en b), c), d) debería usar un método».

A la luz del desempeño que tuvo *E2* en la entrevista, se evidencia una concepción objeto de conjunto solución para un SEL 2×2, y que está en vías de tener una concepción esquema del conjunto solución de un SEL 2×2, en la medida que coordine los procesos asociados a un SEL homogéneo y un SEL no homogéneo desde un punto de vista geométrico, es decir, vinculando a rectas que consideran el origen del sistema de coordenadas y las respectivas rectas paralelas a estas.

DISCUSIÓN

El método llevado a cabo, esto es, cuestionarios, análisis implicativo y entrevista, permitió, en efecto, dar cuenta de la viabilidad de las construcciones y los mecanismos mentales que se dispusieron en la descomposición genética que se propuso para el concepto conjunto solución de un SEL de n×2. En términos generales, podemos afirmar que: Para que un estudiante construya el proceso coeficientes proporcionales es suficiente coordinar el proceso «rectas paralelas» con el proceso «ecuación general de una recta», mediante la comparación de los respectivos coeficientes de un SEL homogéneo, como mecanismo de coordinación. En tal caso, se debe coordinar la construcción proceso «recta vectorial» con la construcción proceso «recta afín» para construir el proceso solución de un SEL no homogéneo. Así, la construcción proceso solución de un SEL debe coordinarse con el proceso eliminación de ecuaciones, como concepto previo, para construir el proceso solución sistema $n\times2$.

En cualquier caso, no hicimos el refinamiento de la DG propuesta que sugiere la teoría APOE. Ello se debió a que las respuestas de los estudiantes muestran con claridad que el paso del sistema homogéneo al no homogéneo tiene una dificultad que llamaríamos intrínseca. En el caso no homogéneo, se da la situación de que tres rectas intersecten dos a dos, pero que no coincidan en un punto (Manzanero, 2007; Trigueros *et al.*, 2007) y los estudiantes tienden a interpretarlo como que el sistema «tiene tres» soluciones –lo que muestra precisamente que no entienden bien qué es el conjunto solución de un SEL– (Borja, 2015; Ochoviet, 2009). Tal situación no ocurre para el caso de los SEL homogéneos, de manera que el estudio de estos no es, desde un punto de vista cognitivo, suficiente para el estudio de sistemas no homogéneos. Por cierto, en un SEL homogéneo 3×2 tampoco se dan las posibilidades de una o dos rectas paralelas, como en el caso no homogéneo. Por último, la respuesta de *E3* evidencia una desarticulación entre la resolución algebraica y el método eliminación gaussiana, aspecto que se ha manifestado en investigaciones sobre conceptos del álgebra lineal referidas al obstáculo del formalismo (Dorier, 2000).

CONCLUSIONES

En primer lugar destacamos el uso de la estadística implicativa en nuestra investigación, vía el *software* CHIC, ya que por un lado nos permitió establecer con mayor claridad la relación entre los distintos aspectos matemáticos involucrados en la construcción del conjunto solución de un SEL $n\times2$ y, por otro, pudimos seleccionar entrevistados a la luz de su contribución en las diferentes clases significativas que arroja el árbol de similaridad en referencia a las construcciones y los mecanismos mentales dispuestos en nuestra DG preliminar.

Respecto de la coherencia de las construcciones y los mecanismos mentales que propusimos para abordar la construcción del concepto en cuestión, podemos mencionar que la desencapsulación del objeto plano cartesiano y objeto recta vectorial son claves para que un aprendiz acceda a los procesos que articulan la matemática escolar y los aspectos geométricos que sugieren las ecuaciones lineales homogéneas y no homogéneas. Cabe indicar que la manipulación de SEL homogéneos evoca en los estudiantes relaciones entre los coeficientes de sus ecuaciones, propiciando la construcción proceso de coeficientes proporcionales que podría ayudar a la construcción rango, pensando en el método de eliminación gaussiana.

Por otro lado, nuestro estudio mostró con claridad que la DG propuesta debía cambiar la dirección general que se le dio, esto es, no apoyarse en un sistema homogéneo para resolver uno no homogéneo por las razones que se dieron. En todo caso, parece razonable tener presente dicho tránsito para el caso de un SEL 3×2 como eslabón hacia procedimientos más generales, como el método de eliminación gaussiana.

Por otra parte, el estudio muestra que introducir SEL 2×2 y $n\times2$ como caso particular de situaciones más generales presentará dificultades previsibles en álgebra lineal –tales como la de pasar desde la dimensión 2 al caso general de dimensión finita, o la de extender el concepto de dependencia lineal desde el caso de 2 al de más elementos en el conjunto considerado–.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido posible gracias al apoyo del Centro de Estudios Avanzados de la Universidad de Playa Ancha, el Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y el proyecto Fondecyt regular 1171744. Por último, agradecemos a los estudiantes por su desinteresada colaboración en esta investigación.

REFERENCIAS

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nueva York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education II*, *CBMS Issues in Mathematics Education*, *6*, 1-32. https://doi.org/10.1090/cbmath/006/01

Betancourt, Y. (2009). *Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la educación superior*. Tesis de maestría no publicada. Centro de investigaciones y de estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México. Disponible en línea: <https://docplayer.es/18162871-Ambiente-computacional-para-apoyar-la-ensenanza-de-la-resolucion-de-sistemas-de-cuaciones-lineales-en-la-educacion-superior.html>.

Borja, I. (2015). *Conjunto solución a un sistema de ecuaciones lineales: Una mirada desde la perspectiva de la teoría APOE*. Tesis Doctoral no publicada. CINVESTAV-IPN. México. Disponible en línea: <http://biblioteca.cinvestav.mx/tesis/O/O-T00950>.

Codes, M. y González-Martín, A. (2017) Sucesión de sumas parciales como proceso iterativo infinito: un paso hacia la comprensión de las series numéricas desde el modelo APOS. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(1), 89-110.
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1927

De Vries, D. y Arnon, I. (2004). Solution–what does it mean? Helping linear algebra students develop the concept while improving research tools. En M. J. Joines y A. B. Fuglestad. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 55-62). Bergen, Noruega: PME.

Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. En J.-L. Dorier (Ed.): *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques et Sciences Cognitives 5*, 37-65.
https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

González, D. y Roa, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las Ciencias*, *35*(2), 89-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical implicative analysis. Theory and applications*. Berlín: Springer Verlag.

Grossman, S. I. (1999). Álgebra l*ineal.* Nueva York: Mc Graw Hill.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. México D.F.: Mc Graw Hill.

Kleiner, I. (2007). *A history of abstract algebra*. Boston: Birkhauser.

Manzanero, L. (2007). *Sistemas de ecuaciones lineales: Una perspectiva desde la teoría APOE*. Tesis de maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México. Disponible en línea: <https://es.scribd.com/document/282772960/Manzanero-Sistema-de-Ecuaciones>.

Martzloff, J-C. (2006). *A history of Chinese mathematics*. Nueva York: Springer.

Ochoviet, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas*. Tesis Doctoral no publicada. CICATA-IPN. México. Disponible en línea: <https://tesis.ipn.mx/bitstream/handle/123456789/3789/SOBRECONCEPTO.pdf?sequence=1yisAllowed=y>.

Oktaç, A. y Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4), 373-385. Disponible en línea: <https://www.clame.org.mx/relime/201021d.pdf>.

Orús, P., Zamora L. y Gregori, P. (2009). *Teoría y aplicaciones del análisis estadístico implicativo. Primera aproximación en lengua hispana.* Disponible en línea: <http://hdl.handle.net/10234/125568> consulta: 02 de marzo de 2015.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G. y Lozano, M. D. (2013). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*(4), 1779-1792. https://doi.org/10.1016/j.laa.2009.05.004

Roa, S. y Oktaç, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 15*(2), 199-232. Disponible en línea: <https://www.clame.org.mx/relime/201203b.pdf>.

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la investigación cualitativa.* Málaga: Aljibe.

Rodríguez, M., Gregori, P., Riveros, M. y Aceituno, D. (2017). Análisis de las estrategias de resolución de problemas en matemática utilizadas por estudiantes talentosos de 12 a 14 años. *Revista Educación Matemática*, *29*(2), 159-186. https://doi.org/10.24844/EM2902.06

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, *24*(1), 85-98. Disponible en línea: <https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/73534>.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: Una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *7*(1), 49-78. Disponible en línea: <https://www.clame.org.mx/relime/200403a.pdf>.

Sessa, C. (1998). *Los efectos de un tratamiento aritmético de los sistemas de ecuaciones lineales. Análisis de un caso en un libro de texto*. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires.

Sfard, A. y Linchevsky, L. (1994). The gains and pitfalls of reification–The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 199-228. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1_4

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of the students' thinking in algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On teaching of linear algebra*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stewart, I. (2008). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años*. Madrid: Brosmac.

Trigueros M., Maturana, I., Parraguez, M. y Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal. *Revista Educación Matemática*. *27*(2), 95-124. Disponible en línea: <http://somidem.com.mx/descargas/Vol27-2-4.pdf>.

Trigueros M., Oktaç, A. y Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra, En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the 5th Congress of european society for research in mathematics education* (pp. 2359-2368). Larnaca, Chipre: ERME.

Ursini, S. y Trigueros, M. (2006). ¿Mejora la comprensión de variable cuando los estudiantes cursan matemáticas avanzadas? *Revista Educación Matemática*, *18*(3), 5-38. Disponible en línea: <http://www.revista-educacion-matematica.com/descargas/Vol18-3.pdf>.

ANEXO

CUESTIONARIO

1) Suponga que tiene tres ecuaciones de rectas en el plano. Se sabe que al graficarlas simultáneamente tendrá 7 posibilidades en total. Dibújelas.

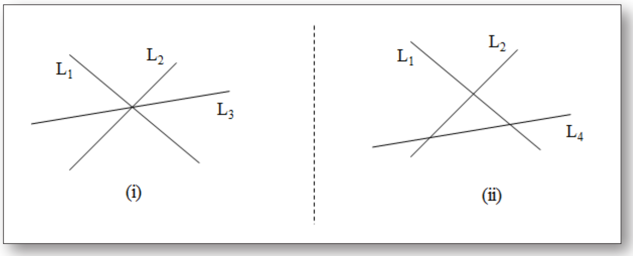
2) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones y a continuación comente lo realizado.

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y&=6\\ x+2y&=4\\ 3x+6y&=18 \end{aligned}\right\}$$

3) Para cada una de las posibilidades que obtuvo en la pregunta 1, escriba un sistema de ecuaciones que corresponda en cada caso, explicando brevemente el procedimiento utilizado.

PREGUNTAS PARA LA ENTREVISTA

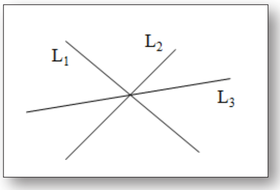
1) Las figuras (i) y (ii) representan a dos sistemas de ecuaciones. Tenga en cuenta que L_3 es paralela a L_4.



   a) En relación con la representación gráfica de ambos sistemas de ecuaciones, ¿qué característica(s) tienen en común?, y ¿qué diferencia(s)? Comente cada una de ellas.
   b) ¿Tiene solución el sistema (i)? ¿Tiene solución el sistema (ii)?
   c) Si se mira una figura en la que hay tres rectas dibujadas, ¿cuándo el sistema de ecuaciones lineales representado tiene solución? Indíquelo de la manera más elemental y directa posible.
   d) ¿Cómo describiría las ecuaciones asociadas a dos líneas rectas? Ejemplifique.

2) ¿Existe un sistema de ecuaciones con dos incógnitas de primer grado que tengan más de una solución pero no infinitas soluciones? Explique.

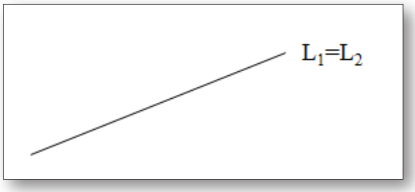
3) Se sabe que el conjunto solución de un sistema de ecuaciones, como el que representa la figura, tiene el elemento (1,2).



a) Muestre un sistema de ecuaciones que cumpla con la condición dada. Explique cómo obtener ese sistema de ecuaciones.
b) Considere dos de las ecuaciones obtenidas y combínelas para obtener un nuevo sistema de ecuaciones. Conjeture respecto del nuevo sistema de ecuaciones. Explique.

4) Se sabe que una de las soluciones del sistema de ecuaciones que está representado por la figura dada es (1,3).

a) Muestre un sistema de ecuaciones para la figura dada.
b) ¿Podría indicar otras dos soluciones para el sistema dado? Explique.



5) Observe cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y determine el conjunto solución de cada uno de ellos. Argumente de la manera más sencilla que le sea posible.

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 3x+5y=0 \end{array}\right\} \text{b)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 3x+5y=-7 \end{array}\right\} \text{c)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 2x+y=2 \end{array}\right\} \text{d)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 4x+2y=0 \end{array}\right\}$$

6) Observe cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y determine el conjunto solución de cada uno de ellos. Argumente de la manera más sencilla que le sea posible.

$$\text{a)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+y=0 \\ 3x+5y=0 \\ x+3y=0 \end{array}\right\} \text{b)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ 3x+5y=0 \\ x+3y=0 \end{array}\right\} \text{c)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ 3x+5y=2 \\ x+3y=0 \end{array}\right\} \text{d)}\ \left.\begin{array}{r} 2x+y=4 \\ 3x+5y=13 \\ x+3y=8 \end{array}\right\}$$

Cognitive construction of the solution set of a system of linear equations with two unknowns

Miguel Alejandro Rodríguez Jara
Centro de Estudios Avanzados. Universidad de Playa. Viña del Mar. Valparaíso. Chile.
mrodriguez@upla.cl

Arturo Mena Lorca, Jaime Juan Fernando Mena Lorca, Patricia Vásquez Saldias
Instituto de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Valparaíso. Chile.
arturo.mena@pucv.cl, mena@pucv.cl, patricia.vásquez@pucv.cl

María Del Valle Leo
Facultad de Educación. Universidad de Concepción. Concepción. Chile
mdelvall@udec.cl

The Systems of Linear Equations (SELs) were already used by early civilizations to address problems in different contexts using ad hoc resolution techniques. With the development of algebra a couple of centuries ago, they acquired the status of a mathematical object, and their formal study makes it possible to tackle new problems and develop new mathematical concepts.

Currently, in South America, SELs are usually part of school-level study plans and programs and are a compulsory part of a university linear algebra course. For those who study a SEL or the first time, understanding what its solution set is is not easy. Given this problem we set out to study their construction from a cognitive point of view. For this task we resort to APOS theory (Action, Process, Object, Scheme), which requires designing and validating a model, the Genetic Decomposition (DG), which details the mental constructions and mechanisms involved in learning the subject.

The didactic strategy on which we based the design of our DG consisted in activating a transition from homogenous to non-homogeneous SELs, in Cartesian geometric context. To validate it, we designed a questionnaire that was applied to students in a secondary mathematics teacher training program. Subsequently we conducted in-depth interviews to delve into those aspects not evidenced in the questionnaire. For the analysis of the data we used implicative statistics, which allowed us to classify and stablish implication relationships between the categories of analysis that we put forward to provide evidences of the mental structures of the DG.

The results obtained show that our model provides with information about how a student can solve a system of equations of two unknowns not mechanically, but articulating school mathematics; they also show difficulties that the strategy has with regards to the teaching of SELs by using the transition from homogeneous to non-homogeneous systems, in the case where there are more equations than unknowns, so that it is necessary to modify our initially proposed DG.