UNIVERSIDADE DE LISBOA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

A APRENDIZAGEM DO CONCEITO DE LIMITE DE UMA SUCESSÃO:

UMA EXPERIÊNCIA NO 11.º ANO

Renato Nuno Marques do Espírito Santo Agostinho

MESTRADO EM EDUCAÇÃO

Área de Especialidade de Didática da Matemática

Trabalho de Projeto orientado pela

Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira

2018

Resumo

Este trabalho de projeto tem como objetivo compreender como alunos do 11.º ano podem mobilizar os seus conhecimentos matemáticos e intuitivos de convergência para construir uma definição formal de limite de uma sucessão. Este foi orientado pelas seguintes questões: Que conhecimentos matemáticos são utilizados pelos alunos no estudo intuitivo do limite de uma sucessão?; De que forma o recurso a representações numéricas e gráficas contribui para a aprendizagem de conceitos ligados ao limite de sucessões?; e Quais as principais dificuldades manifestadas pelos alunos relativamente à noção de limite?.

O trabalho foi desenvolvido com uma turma de 11.º ano, no âmbito do tema Sucessões, lecionado no final do 2.º período e início do 3.º período do ano letivo 2017/2018 numa escola secundária do concelho de Oeiras.

As tarefas propostas aos alunos no decorrer da intervenção foram voltadas para o desenvolvimento do conceito de limite de uma sucessão, tanto do ponto de vista intuitivo, como a definição formal. A construção de conjeturas, ao longo das tarefas, foi auxiliada pela utilização de tecnologias, calculadora e computador, de modo a representar, tanto gráfica como numericamente um grande número de sucessões.

Seguindo uma metodologia de natureza qualitativa assente num paradigma interpretativo, a recolha de dados baseou-se, essencialmente, na observação participante, através de registos áudio e escritos, e na recolha documental das resoluções dos alunos, tendo sido também aplicado um questionário a todos os alunos.

Da implementação da unidade de ensino verificou-se que a maioria dos alunos evidenciou saber aplicar a definição formal de limite de uma sucessão do ponto de vista operacional. Numa fase inicial, estes revelaram conceções erróneas já esperadas na construção da noção de limite, tais como a ideia de que uma sucessão constante não tem limite e de que o limite é um valor que não é alcançado. Com o auxílio das tarefas implementadas, estas conceções erróneas iniciais foram sendo discutidas e esclarecidas. No entanto, o estudo evidencia que os alunos têm alguma dificuldade em conceber sucessões não monótonas, o que, no caso da noção de limite de uma sucessão, pode contribuir para as tais conceções erróneas.

Palavras-chave: Sucessão, noção intuitiva de limite, definição formal de limite, conhecimento matemático, 11.º ano.

Abstract

This project work aims to understand how students of the 11th grade can mobilize their mathematical and intuitive convergence knowledge to construct a formal definition of the limit of a sequence. This was oriented by the following questions: What mathematical knowledge are used by students in the intuitive study of the limit of a sequence?; How does the use of numerical and graphical representations contribute to the learning of concepts linked to the limit of sequences?; and What are the main difficulties expressed by the students regarding the notion of limit?.

This work was developed with a class of the 11th grade, under the theme Sequences, taught at the end of the second period and beginning of the third period of the 2017/2018 school year in a secondary school in the county of Oeiras.

The tasks proposed to the students during the intervention were aimed at developing the concept of limit of a sequence, both from the intuitive point of view and from the formal definition. The construction of conjectures, along the tasks, was aided by the use of technologies, calculator and computer, in order to represent both graphically and numerically a large number of successions.

Following a methodology of a qualitative nature based on an interpretative paradigm, the data collection was essentially based on participant observation, through audio and written records, and in the documentary collection of students' resolutions, and a questionnaire was also applied to all the students.

From the implementation of the teaching unit it was verified that the majority of the students evidenced how to apply the formal definition of the limit of a sequence from the operational point of view. At an early stage, they revealed misconceptions already expected in the construction of the notion of limit, such as the idea that a constant succession has no limit and that the limit is a value that is not reached. With the aid of the implemented tasks, these initial misconceptions were discussed and clarified. However, the study shows that students have some difficulty in conceiving non-monotonous sequences, which, in the case of the notion of the limit of a sequence, can contribute to such misconceptions.

Keywords: Succession, intuitive notion of limit, formal limit definition, mathematical knowledge, 11th grade.

Agradecimentos

À minha Orientadora, Prof.ª Dr.ª Hélia Oliveira, pela paciência, dedicação e entrega que demonstrou, principalmente nos maiores momentos de tensão.

À minha parceira de batalhas, Liliana Silva, por me ter desafiado, acompanhado, incentivado e aturado durante todo o percurso.

Aos almoços em Benfica, que permitiram voltar à carga com outra energia.

Ao Mell, pela companhia divertida que proporcionou.

Aos alunos da fantástica turma, que, durante todo o ano letivo se mostraram interessados, dedicados, simpáticos e amigos. Inesquecíveis.

À minha família, pelo incentivo e pelo carinho essenciais para que o cansaço não vencesse a persistência.

À Bia, que perdeu a minha companhia durante muitas tardes de verão e mesmo assim não parou de me incentivar.

Índice Geral

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Tabelas

1. Introdução

Nesta introdução começo por indicar as razões que motivaram a realização deste trabalho e a sua pertinência à luz do contexto atual do estudo do limite de sucessões. De seguida, faço uma breve descrição do estudo, referindo o seu objetivo geral e as respetivas questões de investigação. Por último, descrevo sucintamente o modo como este trabalho de projeto foi organizado e a estrutura com que o mesmo se apresenta.

1.1. Motivação e pertinência

Licenciei-me em Ensino da Matemática na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa em junho de 2000 e desde então que sou professor de matemática do ensino básico e secundário.

Como professor, sempre procurei ações de formação que promovessem novas metodologias e novas abordagens dos vários temas lecionados na disciplina. Com a taxa de insucesso que normalmente é associada à disciplina de matemática, sempre senti como necessário fazer uma reflexão constante das abordagens e metodologias utilizadas e consequentes resultados.

Tal como estas ações de formação que me permitem melhorar como professor, fazer mestrado na área didática da matemática foi um objetivo que defini há já algum tempo. No entanto, a sua concretização foi sempre sendo adiada em detrimento de outros projetos. Recentemente, a oportunidade de fazer mestrado surgiu, a qual foi aproveitada da melhor forma.

Ao ponderar sobre a temática do trabalho de projeto a desenvolver e estando a lecionar no ensino secundário, optei por um tema que há muito me melindrava pois toma um lugar de destaque num dos ramos da matemática. O mundo do cálculo diferencial alicerça-se na noção de limite de uma sucessão e na sua definição formal. Sem uma compreensão correta da noção de limite de uma sucessão, corremos o risco de a teoria construída sobre este conceito ser fragmentada e desprovida de conexões. Tal como o NCTM (2007), sou apologista de que "os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios" (2007, p. 11).

As dificuldades dos alunos na construção do conceito de limite estão bem documentadas em investigação recente, nomeadamente, as que decorrem de conceções erróneas (Fernandez, 2004; Jacobs, 2002; Oehrtman, 2008; Oehrtman et al., 2014). A construção destas conceções é normalmente baseada na experiência e respetiva interpretação por que cada um dos alunos passa (Oehrtman, 2008) e tanto pode estar relacionado com a noção intuitiva como com a definição formal de limite. Neste sentido, é importante que o professor domine claramente o conceito de limite de modo a proporcionar aos alunos experiências desafiadoras e esclarecedoras acerca deste conceito. O processo ensino-aprendizagem deve garantir que estes consigam criar a sua própria interpretação dos conceitos de modo a conseguir apropriar-se da definição formal deste conceito e a mobilizarem-na em diferentes situações.

Entre outros, os estudos feitos sob o conceito intuitivo de limite apontam para alguns equívocos relevantes, tais como o limite não ser um valor alcançado ou à medida que n aumenta, a sucessão aproxima-se cada vez mais do seu limite.

Para além disto, a definição formal de limite também apresenta uma série de dificuldades para os alunos, tais como a quantidade de símbolos envolvidos com significados diferentes, o uso de inequações e o valor absoluto. De facto, a investigação tem dado evidência de que alunos aos quais foi dada a definição de limite de sucessão sem qualquer trabalho preparatório tiveram grande dificuldade a dar significado a esta definição (Tall, 1992).

A importância e a pertinência do estudo da noção de limite de uma sucessão levaram-me à implementação deste trabalho na expectativa que esta minha experiência de ensino-aprendizagem possa contribuir para a reflexão e o desenvolvimento de práticas letivas mais adequadas nesta temática.

1.2. Objetivo e questões do estudo

A concretização deste estudo teve início com a leitura e reflexão de documentos de orientações curriculares, nacionais e internacionais, que fazem referência a experiências de ensino-aprendizagem no domínio das sucessões, em particular relativas ao limite de sucessões e a importância que tem assumido na aprendizagem da matemática.

O presente estudo incide sobre a minha prática profissional, onde assumo o duplo papel de professor e investigador. O estudo foi dinamizado numa escola do concelho de Oeiras, sede de agrupamento, no ano letivo de 2017/2018, durante o final do segundo período e o início do terceiro período, numa turma do 11.º ano de escolaridade aquando da lecionação do tema *Sucessões*.

O objetivo deste estudo é compreender como alunos do 11.º ano podem mobilizar os seus conhecimentos intuitivos e matemáticos de convergência para construir uma definição formal de limite de uma sucessão. De forma a alcançar este objetivo formulei as seguintes questões de investigação:

1) Que conhecimentos matemáticos são utilizados pelos alunos no estudo intuitivo do limite de uma sucessão?
2) De que forma o recurso a representações numéricas e gráficas contribui para a aprendizagem de conceitos ligados ao limite de sucessões?
3) Quais as principais dificuldades manifestadas pelos alunos relativamente à noção de limite?

Procurando respostas para as questões supracitadas e com a intenção de apoiar os alunos na construção e no desenvolvimento do conceito de limite de sucessão, criei uma sequência de quatro tarefas que, no seu conjunto, exploram a noção intuitiva de limite de uma sucessão e a definição formal de limite de uma sucessão e que foram pensadas de forma a promover o uso de tecnologias de modo a facilitar diferentes representações de sucessões, tais como numérica e gráfica. As tarefas propostas são de natureza exploratória e foram realizadas pelos alunos, maioritariamente a pares. De acordo com o NCTM (2000), as tarefas foram propostas de forma a potenciar aos alunos atividades como interpretar, conjeturar e justificar. As potencialidades do computador são utilizadas para facilitar o trabalho dos alunos que, de uma forma mais profícua, atingem mais rapidamente os objetivos das tarefas. Pelo facto de se disponibilizarem diferentes representações com recurso a computadores e/ou calculadoras, leva a que sejam alargadas as possibilidades de aprendizagem da matemática (Matos, 1997).

Tanto no trabalho individual, em pares ou no trabalho em grupo-turma que decorreu intercalado com a realização das tarefas, procurei promover uma dinâmica de sala de aula centrada nos alunos e que os incentivasse a trabalhar de forma responsável, autónoma e criativa. Em todas as aulas foi valorizada a partilha de ideias, a construção de significados matemáticos e o respeito pelos colegas.

1.3. Estrutura do trabalho de projeto

Para além do presente capítulo, capítulo um – introdução, este trabalho de projeto está organizado em mais cinco capítulos: capítulo dois – enquadramento curricular e didático; capítulo três – a unidade de ensino; capítulo quatro – metodologia; capítulo cinco – análise de dados; e capítulo seis – considerações finais.

No capítulo dois, procuro dar a conhecer as opções teóricas que sustentam a minha proposta de intervenção pedagógica, fazendo referência à evolução da definição de limite ao longo da história, à aprendizagem do conceito, às dificuldades diagnosticadas noutros estudos e alguns estudos efetuados com alunos. A informação descrita é um resumo baseado nas orientações curriculares e didáticas que retirei de literatura relevante para o tema, para o objetivo e para as questões de investigação definidas.

Relativamente ao terceiro capítulo, descrevo a forma como planeei a minha intervenção pedagógica, faço referência às opções didáticas tomadas em sala de aula, apresento uma planificação da unidade de ensino e faço uma breve descrição dos objetivos de cada uma das tarefas.

No quarto capítulo indico as opções metodológicas deste trabalho, caracterizo o contexto escolar e os seus participantes e indico de forma sucinta os procedimentos e os instrumentos de recolha e análise de dados.

No quinto capítulo é realizada, de acordo com os objetivos do estudo, a análise de dados. São feitas uma descrição e uma análise das resoluções dos alunos em cada uma das tarefas, no teste de avaliação e uma análise quantitativa de um pequeno questionário.

Por fim, no sexto capítulo, são apresentadas as respostas às questões de investigação, as conclusões do estudo e uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido.

2. Enquadramento teórico

Neste capítulo, contextualizar-se-á a temática deste estudo, procurando apresentar um pouco da evolução histórica do conceito de limite de uma sucessão, abordando a aprendizagem da noção de limite associada ao *Conceito Imagem* e ao *Conceito Definição* definidos por Tall e Vinner (1981), enquadrada no programa de matemática em vigor (MEC, 2013), e apresentando uma possível abordagem ao conceito de limite de uma sucessão.

2.1. O conceito limite na história

O conceito de limite é um dos, se não o mais básico conceito da Análise Matemática (Weigand, 2018) e, tal como todos os conceitos de maior relevância na matemática, levou muito tempo a ser construído. É considerado que, apesar de este conceito ter-se desenvolvido bastante nos séculos XVII e XVIII, através de matemáticos tais como Newton, Leibnitz e Cauchy, este teve o seu início na Grécia, cerca de 490 anos a.C., pelas mãos do filósofo Zenão de Eleia (Monteiro, 2008).

Zenão de Eleia (cerca de 490 a.C.– cerca de 430 a.C.) foi um filósofo pré-socrático, que nasceu em Eleia, Grécia, hoje Vélia, Itália. Discípulo de Parménides (530 a.C. – 460 a.C.), defendeu a filosofia do mestre, cujo método consistia na elaboração de Paradoxos. Dos cerca de 40 Paradoxos, dez deles estão intimamente ligados com o conceito de limite, através do conceito de movimento. Os quatro Paradoxos mais conhecidos são o Paradoxo da Dicotomia, o Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, o Paradoxo da Seta Voadora e o Paradoxo do Estádio (Monteiro, 2008).

No Paradoxo da Dicotomia, Zenão afirma que é impossível chegar a um local, porque antes disso tem de alcançar-se o ponto intermédio da distância a percorrer e antes desse ponto tem de se atingir o ponto que está no meio desse e assim por diante (Monteiro, 2008).

No Paradoxo de Aquiles e a Tartaruga, Aquiles, o herói grego, e a Tartaruga decidiram apostar numa corrida. Como Aquiles é mais rápido, a Tartaruga começará a corrida uns metros mais à frente. Zenão afirmava que Aquiles nunca irá ultrapassar a Tartaruga visto que, na altura que

Aquiles chega ao ponto de onde a Tartaruga partiu, já esta terá percorrido uma certa distância, deslocando-se para um ponto mais à frente e assim por diante (Monteiro, 2008).

No Paradoxo da Seta Voadora, Zenão afirma que uma seta em movimento não se encontra em dois locais, simultaneamente, e aquilo que se encontra num local não pode estar em movimento, o que quer dizer que a seta está em repouso em todos os sítios durante o seu voo, logo o seu movimento é apenas uma ilusão (Monteiro, 2008).

O Paradoxo do Estádio refere-se a um estádio com três fileiras A, B e C. Assume-se que a fileira A está em repouso, a fileira B vai se mover para a direita e a fileira C para a esquerda. As cadeiras das fileiras em movimento passam por metade da fileira que está em repouso antes de começarem a passar pelas cadeiras da outra fileira que se encontra em movimento. Zenão afirmava que os objetos eram indivisíveis do espaço e então moviam-se para novas posições numa unidade de tempo indivisível (Monteiro, 2008).

Desta forma, através dos seus famosos Paradoxos, Zenão pisou em terrenos que as correntes gregas nunca ousaram percorrer, a ideia do infinito.

No entanto, chegamos a Newton (1643 – 1727) e Leibnitz (1646 – 1716) e quase nada tinha sido feito para se clarificar este conceito. Estes cientistas, através do desenvolvimento do Cálculo Matemático, deram passos importantes na definição e no desenvolvimento do conceito de limite.

Com o desenvolvimento do seu trabalho no âmbito do Cálculo Diferencial, Newton apercebeu-se da importância deste conceito, outrora negligenciado e, apesar da sua linguagem algo arcaica do ponto de vista matemático, o início da definição moderna de limite estava presente nas suas afirmações (Monteiro, 2008).

Graças aos seus trabalhos, muitos outros matemáticos, tais como D'Alembert (1717 – 1783) e Cauchy (1789 – 1857), viram-se obrigados a procurar uma melhor definição para este conceito ao qual davam tremenda importância, mas, só no século XIX, Bolzano (1781 – 1848) e Weierstrass (1815 – 1897) apresentaram uma definição de limite como a conhecemos nos dias de hoje (Monteiro, 2008).

2.2. *Conceito Imagem* e *Conceito Definição* de limite

Durante todo o percurso da sua aprendizagem matemática, é apresentado ao aluno um leque variado de conceitos matemáticos dos quais é necessária a devida apropriação. Apesar dos conceitos matemáticos estarem formalmente definidos, a sua leitura e interpretação dependem do indivíduo e, neste sentido, são diferentes de pessoa para pessoa. Tall e Vinner (1981) definiram *Conceito Imagem* como sendo a estrutura cognitiva total do indivíduo associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais e propriedades e processos associados. É construído ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novas situações e amadurece e, segundo os autores, a evolução do *Conceito Imagem* não ocorre sempre de forma coerente.

Para além do *Conceito Imagem*, os autores também definiram *Conceito Imagem Evocado*. Este conceito caracteriza-se por ser uma parcela do *Conceito Imagem* que é ativada num momento específico. Em momentos diferentes, imagens aparentemente discordantes podem ser evocadas. Somente quando aspetos discordantes são evocados simultaneamente, é necessário que haja algum sentido real de conflito. Ao resolver problemas, os alunos frequentemente usam diferentes métodos de acordo com o contexto e, por vezes, cometem erros dependendo dos dados. Por exemplo, a adição $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ pode ser efetuada corretamente pelos alunos, mas quando confrontados com $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ podem aplicar um método errado de resolução. Se os alunos não virem nenhum conflito nos dois métodos, então utilizarão o método que lhes fará mais sentido no momento.

Tall e Vinner (1981) definiram também o *Conceito Definição* como o conjunto de palavras usado para especificar esse conceito. Este pode ser aprendido por um indivíduo de forma mecanizada ou mais significativamente aprendido e relacionado em maior ou menor grau ao conceito como um todo, ou seja, "pode também ser uma reconstrução pessoal pelo aluno de uma definição" (p. 152). É então o conjunto de palavras que o aluno usa para sua própria explicação de sua imagem evocada. Desta forma, "um *Conceito Definição* pessoal pode diferir de um *Conceito Definição* formal, sendo esta última uma definição de conceito que é aceite pela comunidade matemática em geral" (Tall & Vinner, 1981, p. 152).

Cada indivíduo pode gerar o seu próprio *Conceito Imagem da Definição* a partir do *Conceito Definição*. Este *Conceito Imagem da Definição* é uma parte integrante do *Conceito Imagem*. "Em alguns indivíduos, este conceito pode estar vazio, noutros pode ou não ser coerente com o *Conceito Definição* formal" (pp. 152-153).

Tal como os autores referem, o *Conceito Imagem* de limite de uma sucessão é propenso a criar situações de conflito com o próprio *Conceito Definição* formal. Aliás, algo que também aconteceu com matemáticos ao longo da História.

2.3. Dificuldades na aprendizagem do conceito de limite

Sendo de extrema importância em vários campos da matemática, este conceito, se parcamente esclarecido, terá consequências negativas nas futuras aprendizagens do aluno (Meyer, 1993). Daí ser importante o professor estar consciente das dificuldades que os alunos possam encontrar e da sua relação com diferentes abordagens didáticas ao conceito que têm sido adotadas.

As dificuldades relacionadas com a noção de limite podem ser divididas em dois grupos: dificuldades associadas à definição formal de limite e dificuldades relacionadas com o *Conceito Imagem* associado a este conceito.

Em relação ao primeiro grupo de dificuldades, Flores e Park (2016) referem que a definição formal de limite de uma sucessão está na origem de várias fontes de dificuldades. A quantidade de símbolos e letras, com diferentes significados, as várias noções matemáticas envolvidas, tais como inequações, valor absoluto, quantificadores universal e existencial e a ordem pela qual estão escritos são obstáculos para uma compreensão correta desta definição. Investigações apontam que os alunos a quem lhes é apresentada apenas uma definição formal de limite têm grande dificuldade em entender essa definição (Tall, 1992; Williams, 1991).

Para além dos aspetos mencionados, Oehrtman et al. (2014) ainda referem que o raciocínio implicado na utilização da definição formal é contrário ao utilizado aquando do trabalho com funções ou sucessões, que normalmente começa com elementos do domínio. Primeiro, os alunos devem começar com um certo valor que define uma vizinhança do limite, depois obter uma condição que relacione a expressão da sucessão com um outro valor e finalmente determinar o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ que verifique a condição obtida.

No que toca ao segundo grupo de dificuldades associadas a este conceito, alguns *Conceitos Imagem* desadequados foram diagnosticados em vários estudos. Flores e Park (2016), por exemplo, referem-se a estes erros como resultantes de uma abordagem informal do conceito de limite. Por exemplo, uma das conceções erradas mais comuns diz respeito ao limite de uma sucessão constante. A ideia de que o limite é um valor inatingível é um *Conceito Imagem* errado frequentemente diagnosticado (Davis & Vinner, 1986). Outro *Conceito Imagem* errado é o de que o limite de uma sucessão é um valor que os termos da sucessão não podem ultrapassar. Neste caso, as diferenças existentes entre a linguagem comum e a linguagem matemática contribuem para uma noção errada do conceito de limite. Por exemplo, ao afirmarmos que, quando estamos a trabalhar, o limite do nosso trabalho contínuo, sem pausas, é de três horas, estamos a dizer que, atingindo esse limite, temos de descansar. A transposição para a matemática desse significado da palavra "limite" faz com que estejamos a atribuir a este conceito a ideia de ser um valor travão de uma sucessão de termos, ou seja, o último termo de uma sucessão (Liang, 2016). Um outro *Conceito Imagem* errado bastante recorrente é o conceito de aproximação. É frequente ouvir-se dizer que uma sucessão tem limite *L* se os termos dessa sucessão estiverem cada vez mais próximos de *L*. É um *Conceito Imagem* bastante comum que está muitas vezes relacionado com a proximidade das palavras "aproximação" e "convergência". Dizer que uma sucessão converge para um certo valor não significa necessariamente que os termos de uma sucessão se aproximam desse valor. Roh (2010) refere, por exemplo, que a sucessão de expressão $a_n = \frac{1}{n}$ tem limite zero e que o seu gráfico tem uma assíntota de equação $y = 0$. Na verdade, o que observamos é que os termos da sucessão se aproximam desse valor. Ao pensar no limite como uma assíntota, corremos o risco de pensar que, por exemplo, a sucessão constante não tem limite visto o seu gráfico não ter nenhuma assíntota horizontal.

Adams, Thompson e Hass (2001) consideram que, por vezes, os próprios manuais escolares reforçam estas más construções de conceitos pelos alunos. Por exemplo, de modo a construir um *Conceito Imagem* do conceito de limite, num certo livro, referido pelos autores, estava presente a analogia com uma ventoinha, referindo que nos podemos aproximar "infinitamente" de uma ventoinha, mas nunca iremos tocar nela porque sabemos que nos vamos magoar. Não só os manuais, mas também os próprios professores podem cometer o mesmo erro, neste caso, de duas formas. Por um lado, se o *Conceito Imagem* do professor não for o mais correto, o *Conceito Imagem* dos alunos terá tendência a não o ser. Por outro lado, se o professor apelar apenas para a noção intuitiva de limite de certas sucessões mais simples, o *Conceito Imagem* dos alunos evoluirá muito pouco e os *Conceitos Imagem* mal construídos não serão corrigidos (Adams et al., 2001).

Tall e Vinner (1981) afirmam que, por um lado, uma abordagem inicial mais intuitiva do conceito de limite é mais frutífera para a construção do seu *Conceito Imagem*, mas, por outro lado, esta abordagem pode acarretar também vários erros na construção deste conceito. No entanto, Oehrtman et al. (2014) afirmam que o importante não é evitar e desconsiderar estas conceções erradas, mas sim construir desafios que ajudem a corrigir estas conceções. Tal como foi defendido pelo NCTM (1991), os alunos devem viver a experiência de fazer conjeturas, abstrair propriedades matemáticas, comunicar os seus raciocínios, validar as suas conclusões, questionar e discutir o seu próprio raciocínio e o dos outros, portanto desafios que ajudem a corroborar ou refutar as suas conjeturas em relação à noção de limite serão mais frutíferos que tarefas que evitem conceções erradas.

Segundo Oehrtman (2008), o professor não necessita de começar do zero para lecionar novos conceitos, a vivência de cada um dos alunos é que deve ser o ponto de partida. Ademais é a resolução dos conflitos que surgem entre a experiência e o *Conceito Imagem* de cada um que possibilita uma aprendizagem consolidada de novos conceitos.

Liang (2016) aponta quatro passos fundamentais para uma resolução de conflitos conceptuais. O primeiro passo é permitir que os alunos reconheçam explicitamente seus *Conceitos Imagem* errados. Em vez de se apressar em introduzir novos conceitos aos alunos, o professor pode dedicar algum tempo a identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre esses conceitos, visto estes trazerem muitos conhecimentos informais de matemática para a sala de aula.

Na próxima etapa, o professor pode apresentar alguns problemas e pedir aos alunos que os resolvam e expliquem na aula e, com base nas declarações proferidas por parte dos alunos, o professor poderá categorizar os vários *Conceitos Imagem*. Depois do debate e dos argumentos dos estudantes, algumas declarações sobreviverão e algumas serão eliminadas. Nesta etapa, o professor poderá resumir as conceções malformadas por parte dos alunos: algumas delas podem ser específicas de alguns alunos e outras podem ser comuns a muitos deles (Liang, 2016).

Na terceira etapa, o professor precisa de confrontar os alunos com os seus equívocos. O professor pode tentar encontrar os erros lógicos nas respostas dos alunos ou apresentar-lhes contraexemplos que exponham os seus mal-entendidos. Espera-se que os contraexemplos confrontem de forma explícita os equívocos dos estudantes (Liang, 2016).

No último passo, espera-se que, nesse momento, os estudantes estejam dispostos a aceitar o novo conhecimento e abandonar os seus equívocos. Nesta etapa, o professor pode ajudar os alunos a incorporar o novo conhecimento ao seu conhecimento prévio, dado que foram criadas as condições necessárias para os alunos aprenderem os novos conhecimentos (Meyer, 1993).

2.4. Ensino do conceito de limite

Durante o século vinte, várias abordagens de ensino deste conceito foram desenvolvidas e influenciaram consideravelmente o ensino de Análise nas escolas. Roh (2008) refere os estudos de Piaget e Inhelder (1967), Taback (1975) e Brackett, (1991) como tendo dado grandes contributos para o desenho curricular do tema das sucessões, assim como para definir a faixa etária dos alunos à qual se deve lecionar o conceito de limite de uma sucessão.

Tal como vários autores sugerem, a definição formal de limite é de difícil interpretação (Fernandez, 2004, Tall & Vinner, 1981) e, como tal, o caminho que os alunos fazem para a interpretar de forma correta deve ser meticulosamente pensado de modo que os diferentes *Conceitos Imagem* de cada um sejam o mais congruentes possível com o *Conceito Definição*.

Desta forma, o conceito de limite deverá ser introduzido de uma forma intuitiva, hierarquizado e enquadrado conforme os diferentes significados do conceito de limite que os alunos vão construindo ao longo da sua aprendizagem. Uma abordagem inicial ao conceito de limite que contemple a sua definição formal pode não trazer vantagem em termos da compreensão do seu conceito (Tall & Vinner, 1981). No entanto, é importante termos consciência de que necessitamos de trabalhar a definição de limite com os alunos e não ficar pela abordagem do conceito de uma forma puramente intuitiva (MEC, 2014)

Em Portugal, as orientações curriculares têm evoluído consideravelmente ao longo do tempo. As indicações metodológicas do programa de matemática de 1997 e de 2002, com a mesma redação, sugeriam o seguinte:

> Depois de se terem introduzido as noções de sucessão como função de variável natural, de ordem, de termo geral, etc. podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos chegar

> aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno, de limite de uma sucessão. Cada definição deve ser suportada por exemplos e contraexemplos que esclareçam as ideias imediatas e corrijam eventuais conceções alternativas e erradas. (ME, 1997, p. 30)

Era ainda sugerido que as definições fossem estabelecidas em linguagem corrente de acordo com os exemplos e contraexemplos e, após cada redação em linguagem corrente, estabelecer uma redação em simbologia matemática (ME, 1997). Em 2013, aquando da introdução das metas curriculares, é enfatizado que a noção de limite deve introduzida de forma cuidada e que uma "abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências concetuais graves" (MEC, 2013, p. 15). Uma leitura destes dois programas sugere que os percursos de aprendizagem que preconizam para este conceito parecem ser contrários, sendo que o anterior atribui uma importância significativa à intuição do limite de uma sucessão e o mais recente atribui uma maior importância à definição formal de limite.

Para além desta diferença entre os dois programas, a importância que é dada às tecnologias nos dois documentos é algo que também chama a atenção. Se, nos programas de 1997 e de 2002, a referência à calculadora gráfica está muito explícita, principalmente quanto à visualização gráfica de exemplos e contraexemplos, no programa em vigor atualmente não há qualquer referência à utilização da calculadora gráfica neste capítulo, deixando ao professor essa gestão.

De facto, a evolução da tecnologia no início do século XXI trouxe uma grande facilidade de acesso a estas, o que, a meu ver, faz com que a sua utilização na sala de aula seja muito pertinente. Como refere Ponte (2014), "na verdade, o grande desenvolvimento destas tecnologias põe à disposição dos professores (e dos formadores) um manancial inesgotável de recursos" (p. 353). Segundo o NCTM (2000), a utilização da tecnologia apoia os alunos no desenvolvimento de uma compreensão mais profunda da matemática.

Em particular, no estudo de sucessões podemos facilmente:

- Representar numericamente e graficamente uma sucessão "com o carregar de um botão";
- Os processos de limite podem ser visualizados em mais detalhes usando a ferramenta zoom;
- A interdependência interativa de diferentes representações de sucessões pode ser analisada ao nível simbólico, gráfico e numérico ao mesmo tempo;

- Considerações sobre limites com sucessões definidas por recorrência podem ser simplificadas pelo menos ao nível representacional, uma vez que essas sequências podem ser numérica e graficamente exibidas "com o pressionar de um botão".

Com a utilização do *software* de geometria dinâmica *Geogebra*, podemos observar várias características das sucessões, tais como, conjeturar se a sucessão é monótona, limitada, se tem limite finito, determinar termos e determinar objetos. Ponte et al. (2009) referem-se a esta ferramenta como sendo um "importante suporte para a aprendizagem" (p. 17)

2.5. Uma possível abordagem ao conceito de limite de uma sucessão

A sequência da unidade de ensino foi inspirada no trabalho desenvolvido por Roh (2010) que refere um método, denominado de *ε-strip activity*, que ajuda os alunos a conceptualizar o conceito de limite de uma sucessão. Segundo a autora, este método tem três grandes objetivos: fornecer um critério geral para se conseguir determinar o limite de qualquer sucessão; ajudar a desenvolver uma imagem mental apropriada do limite de uma sucessão; ajudar a interpretar corretamente o conceito formal de limite. Seguidamente, apresenta-se um sumário das tarefas a desenvolver através do método desenvolvido pela autora (Quadro 1).

Quadro 1 - Sumário da Atividade ε-strip

Passo 0:	Verificar o conceito inicial de convergência dos alunos
Passo 1:	Representar sucessões numericamente
Passo 2:	Representar sucessões graficamente
Passo 3:	Examinar quantos termos estão dentro/fora duma vizinhança quando esta está centrada no limite da sucessão
Passo 4:	Examinar quantos termos estão dentro/fora duma vizinhança quando esta não está centrada no limite da sucessão
Passo 5:	Avaliar a validade de duas definições de limite de uma sucessão
Passo 6:	Comparar a definição *ε-strip* (vizinhança) com a definição *ε-n*

De acordo com a autora, este estudo deve ser desenvolvido ao longo de pelo menos um período letivo, o que, de acordo com o programa em vigor, se torna inviável nas salas portuguesas, devido à extensão do programa em vigor e à obrigatoriedade de cumprimento do mesmo. Este é descrito pela autora como uma abordagem que é orientada para o aluno, onde o papel do professor é o de moderador nas discussões e de verificar se os objetivos são atingidos, através da interação com os alunos.

Em seguida, descrevo com maior detalhe os passos apresentados no Quadro 1, de acordo com Roh (2010).

2.5.1. Passo 0 - Verificar o conceito inicial de convergência dos alunos

Neste passo, os alunos são convidados a descrever o que entendem por sucessão convergente. São levados a determinar o limite de sucessões dadas a partir da sua própria interpretação de convergência. A autora refere que é fundamental propor aos alunos diferentes tipos de sucessões, nomeadamente, sucessões monótonas limitadas, monótonas não limitadas, não monótonas, constantes, sucessões de termos alternados convergentes e divergentes. Deste modo, os *Conceitos Imagem* que os alunos vão construir inicialmente terão como referência uma grande diversidade de tipos de sucessões.

2.5.2. Passo 1 - Representar sucessões numericamente

Neste passo, os alunos são levados a representar numericamente as sucessões de diferentes tipos que lhes foram indicadas. Apresentam-se os exemplos explorados por Roh (2010) no Quadro 2.

Quadro 2 - Exemplos de sucessões (adaptado de Roh (2010))

Monótonas limitadas	Não limitadas	Constantes	Termos alternados convergentes	Termos alternados divergentes
$a_n = \frac{1}{n}$	$a_n = n$	$a_n = k$ $(k \in \mathbb{N})$	$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se n ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se n par} \end{cases}$	$a_n = \begin{cases} 0 & \text{se n ímpar} \\ 1 & \text{se n par} \end{cases}$
$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \leq 10 \\ \frac{1}{10} & \text{se } n > 10 \end{cases}$	$a_n = \sqrt{n}$	$a_n = 1$	$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se n ímpar} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{se n par} \end{cases}$	$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se n ímpar} \\ \frac{1}{n} & \text{se n par} \end{cases}$
$a_n = \frac{n}{n+1}$	$a_n = \frac{n^2}{n+1}$	$a_n = \frac{0}{n}$	$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$
$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$a_n = 10^n$	$a_n = 0$	$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$	$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$

Nesta fase, não é dito aos alunos quais as ordens dos termos a calcular. No entanto, um dos objetivos deste passo é que os alunos entendam que os primeiros termos não têm influência no limite da sucessão, dado que o cálculo dos primeiros termos não é suficiente para perceber o comportamento da sucessão.

2.5.3. Passo 2 - Representar sucessões graficamente

Um dos objetivos deste passo é verificar se, no caso de uma sucessão convergente, o gráfico da sucessão se aproxima ou é igual a uma reta de equação y=L. Esta atividade também é importante para os alunos serem confrontados com as diferenças entre um gráfico de uma função de variável natural e de uma função de variável real.

2.5.4. Passo 3 - Examinar quantos termos estão dentro/fora duma vizinhança quando esta está centrada no limite da sucessão

Neste passo, os alunos são levados a colocar no gráfico uma "tira", cuja condição é do tipo $L-\varepsilon \leq y \leq L+\varepsilon$, onde *L* representa o limite da sucessão e ε representará o valor de uma vizinhança de *L*, e concluir que quando se trata de uma sucessão convergente, independentemente de ser monótona, constante ou mesmo de termos alternados, sempre que a tira é centrada no limite, há infinitos termos que se encontram dentro da "tira" e um número finito de termos fora da mesma, independentemente do valor de ε (Figura 1).

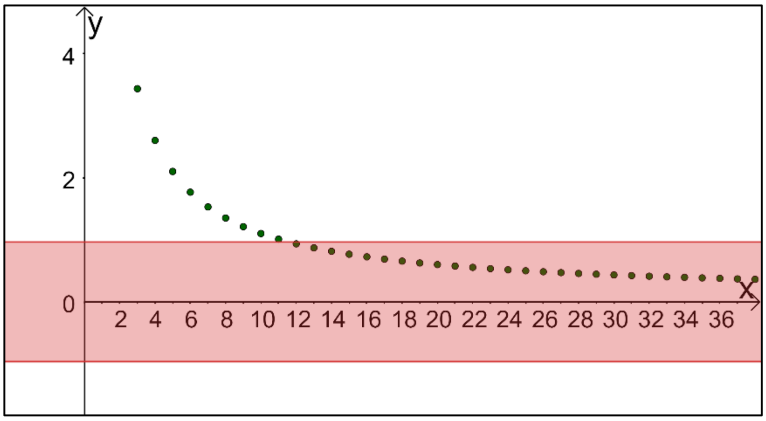


Figura 1 - Representação gráfica de uma sucessão convergente e de uma tira do tipo $L-\varepsilon \leq y \leq L+\varepsilon$

No exemplo representado na Figura 1, podemos reparar que há apenas 11 termos exteriores à tira e infinitos no interior da tira. Mesmo quando diminuímos o valor de ε, e consequentemente a largura da "tira", continuarão a existir infinitos termos no interior da tira.

2.5.5. Passo 4 - Examinar quantos termos estão dentro/fora duma vizinhança quando esta não está centrada no limite da sucessão

Neste passo, os alunos são novamente levados a colocar no gráfico uma "tira", cuja condição era do tipo $a-\varepsilon \leq y \leq a+\varepsilon$, onde *a* representa um valor diferente do limite da sucessão e ε

representará o valor de uma vizinhança de *a*, e reparar que a conclusão do passo anterior já não é válida. Na Figura 2, está representada uma sucessão infinitesimal e uma "tira" de condição $2 \leq y \leq 3$, ou seja, $a = 2$ e $\varepsilon = 1$.

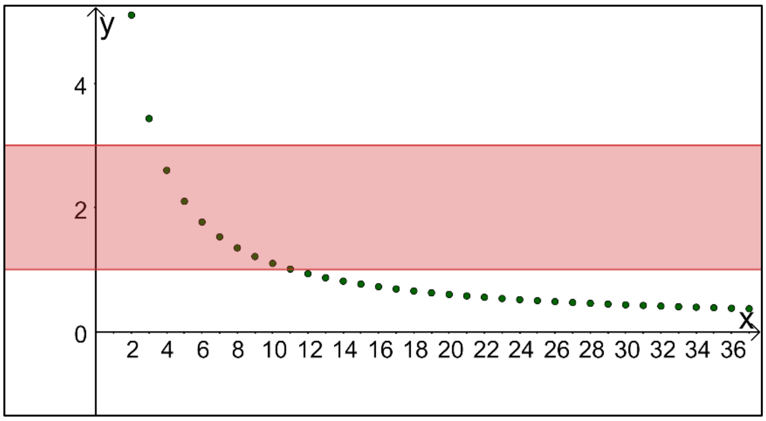


Figura 2 - Representação gráfica de uma sucessão infinitesimal e de uma "tira" do tipo $1 \leq y \leq 3$

Como podemos observar na Figura 2, o facto de a "tira" não estar centrada no valor do limite da sucessão determina que, neste caso, esteja apenas um número finito de termos no interior da "tira".

2.5.6. Passo 5 - Avaliar a validade das definições de limite de uma sucessão

Neste passo, são dadas duas definições aos alunos com o objetivo de compará-las e/ou validá-las – a definição ε-strip A e a definição ε-strip B – que são formuladas da seguinte forma (Roh, 2010).

Definição ε-strip A

> *L* é o limite da sucessão se infinitos pontos do gráfico da sucessão estão dentro de qualquer "tira" centrada em *L.*

Definição ε-strip B

> *L* é o limite da sucessão quando apenas um número finito de pontos do gráfico da sucessão estão fora de qualquer "tira" centrada em *L.*

Numa primeira instância, os alunos são levados a comparar as duas definições, aplicando-as aos vários tipos de sucessões estudados anteriormente. Depois, estes são levados a discutir se as duas definições podem definir o limite de uma sucessão. Ao considerar apenas sucessões convergentes, as duas definições não transparecem nenhuma diferença, visto ambas classificarem sucessões convergentes como convergentes. No entanto, se pensarmos em sucessões de termos alternados, percebemos que a definição ε-strip A classifica a sucessão de expressão $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ como convergente, apesar de esta não o ser.

2.5.7. Passo 6 - Comparar a definição ε-strip (vizinhança) com a definição ε-n

Neste último passo, é dada aos alunos a definição formal de limite de uma sucessão com o objetivo de os alunos a compararem com a definição ε-strip B. Deste modo, os alunos podem perceber a relação entre a inequação $|a_n - L| \leq \varepsilon$ e a "tira" que utilizaram anteriormente. Ao relacionarem o valor ε com a dimensão da tira, podem interpretar facilmente a condição "a partir de certa ordem" com o facto de apenas um número finito de termos se encontrar fora da "tira".

Como conclusão, a autora refere que o objetivo não passa pela memorização do limite de sucessões em particular, nem ajudar ao cálculo algébrico de qualquer limite, mas sim fornecer um modo de visualizar o conceito de limite de uma sucessão que não só faça os alunos perceber a definição formal de limite, mas também distinguir o conceito de limite de outros conceitos, tais como assíntotas ou pontos de acumulação.

A relevância deste estudo também se prende com a forte articulação que é estabelecida entre as representações simbólica, gráfica e numérica (Tall, 1993). Quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre várias representações aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente (NCTM, 2000).

3. A unidade de ensino

Neste capítulo pretende-se apresentar e descrever a proposta pedagógica que serviu de base a este estudo, com vista a desenvolver e, posteriormente, analisar aspetos que evidenciam a capacidade de interpretar o conceito de limite em alunos do 11.º ano.

Inicialmente, será apresentado o contexto escolar onde se desenvolveu a unidade de ensino, nomeadamente as orientações em que esta se sustenta, o planeamento da unidade de ensino e a abordagem metodológica adotada. Por fim, será realizada uma breve descrição de cada uma das tarefas da unidade de ensino referentes aos tópicos do limite das sucessões bem como os seus objetivos.

3.1. O contexto escolar

3.1.1. Caracterização da escola

Este trabalho foi desenvolvido numa escola secundária, sede de agrupamento, que recebe alunos do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Secundário. Localiza-se no concelho de Oeiras.

De acordo com a informação contida no Projeto Educativo do Agrupamento de Escolas, em que este trabalho foi desenvolvido, a população que é acolhida pela escola é bastante heterogénea. A área geográfica de inserção do agrupamento pauta-se por uma forte ligação ao setor terciário, em termos laborais, o que já determinou alterações significativas no modo de vida familiar. Ainda segundo o projeto educativo em vigor, muitas famílias dos alunos que frequentam o agrupamento são marcadas, neste momento, não só pelo desemprego, como também pela quase certeza da sua continuidade, em termos de situação profissional. A par desta mobilidade social descendente, deve destacar-se que a prevalência das habilitações dos pais e encarregados de educação é o grau de licenciatura. As profissões dominantes situam-se ao nível dos quadros superiores da Administração Pública, dirigente ou quadro superior de empresa.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma onde foi realizado este estudo é do 11.º ano e é constituída por 20 alunos, 11 rapazes e 9 raparigas, com uma média de idades de 15,9 anos. Nenhum destes alunos tem necessidades educativas especiais ao abrigo do decreto-lei n.º 3/2008 e apenas um dos alunos regista uma reprovação no seu percurso escolar. Durante o ano letivo, o conselho de turma classificou o comportamento geral da turma de Bom e o aproveitamento de Suficiente.

Por motivos legais, os dados recolhidos ao longo do estudo referem-se apenas a 18 alunos da turma (ver capítulo seguinte). Os níveis atribuídos a cada um desses alunos, na disciplina de Matemática, no final de cada um dos períodos letivos encontram-se representados no gráfico que se segue (Figura 3).

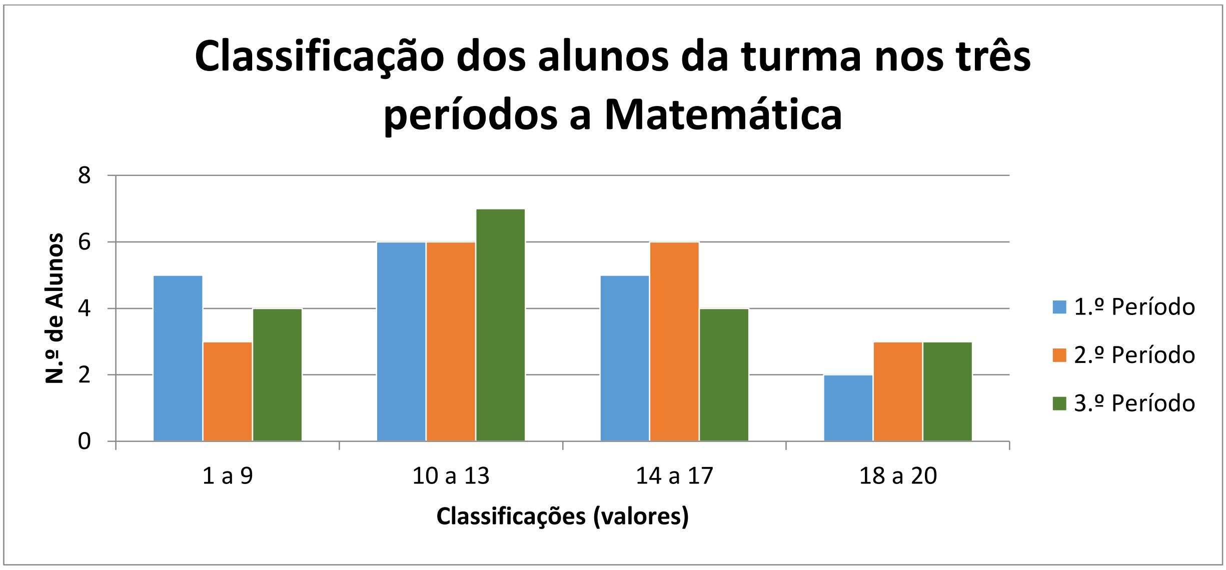


Figura 3 - Classificação dos alunos da turma nos três períodos a Matemática

Como podemos observar, no primeiro período, cinco alunos obtiveram classificações inferiores a dez valores. Estas classificações foram entre cinco e nove valores. Também observamos que seis alunos obtiveram entre 10 e 13 valores, cinco alunos obtiveram entre 14 e 17 valores e dois alunos entre 18 e 20 valores. É de salientar ainda que quatro alunos mantiveram as suas classificações ao longo de todo o ano letivo, as classificações de dois alunos variaram positivamente dois valores do primeiro para o segundo período, mantendo no terceiro período a classificação obtida no segundo período. As classificações de quatro alunos variaram positivamente um valor do primeiro para o segundo período, mantendo no terceiro período a classificação obtida no segundo período. De destacar ainda que outros quatro alunos tiveram uma variação positiva de dois valores nas suas classificações do primeiro para o segundo período e negativamente um valor do segundo para o terceiro período. A classificação de um aluno variou positivamente três valores do primeiro para o segundo período e negativamente dois valores do segundo para o terceiro período, a classificação de um aluno variou positivamente quatro valores do primeiro para o segundo período e negativamente um valor do segundo para o terceiro período, a classificação de um aluno variou positivamente um valor do primeiro para o segundo período e negativamente um valor do segundo para o terceiro período e a classificação de um aluno variou negativamente um valor do primeiro para o segundo período e positivamente um valor do segundo para o terceiro período. Assim, no final do ano letivo, 7 alunos obtiveram classificações entre 10 e 13 valores, 5 alunos obtiveram entre 14 e 17 valores e 3 alunos entre 18 e 20 valores.

3.2. Planeamento da unidade de ensino

A unidade de ensino decorreu no ano letivo de 2017/2018, de 7 de março a 19 de Abril, ocupando o final do segundo período e o início do terceiro, o que equivaleu a nove tempos de 50 minutos. Inicialmente, a unidade de ensino estava prevista para começar e acabar no segundo período, no entanto, a lecionação de conteúdos anteriores ocupou mais tempo do que o planificado.

Apresenta-se de seguida a planificação do grupo disciplinar da escola referente a todo o capítulo das sucessões, da qual faz parte a unidade de ensino lecionada (Quadro 3).

Quadro 3 - Planificação do grupo disciplinar do capítulo das Sucessões

<table>
<tr><th>Conteúdos</th><th>Número de Tempos letivos (50 minutos)</th></tr>
<tr><td>Majorantes e minorantes de um conjunto não vazio:
• Conjuntos minorados, majorados e limitados
• Máximo e mínimo de um conjunto.</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Generalidades acerca das sucessões:
• Sucessões numéricas; sucessões monótonas, majoradas, minoradas e limitadas;
• Resolução de problemas envolvendo o estudo da monotonia e a determinação de majorantes e minorantes de sucessões.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Princípio de indução matemática:
• Princípio de indução matemática;
• Definição de uma sucessão por recorrência;
• Demonstração de propriedades utilizando o princípio de indução matemática.</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Progressões aritméticas e geométricas:
• Progressões aritméticas e geométricas; termos gerais e somas de termos consecutivos
• Resolução de problemas envolvendo progressões aritméticas e geométricas.</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Limite de uma sucessão (unidade de ensino):
• Limite de uma sucessão (casos de convergência e de limites infinitos); unicidade do limite; caso de sucessões que diferem num número finito de termos;
• Convergência e limitação;
• Operações com limites e situações indeterminadas;
• Levantamento algébrico de indeterminações;
• Limites de polinómios e de frações racionais;
• Limites $\lim a^n$, $\lim \sqrt[n]{a}$ $(a>0)$ e $\lim n^p$ $(p \in \mathbb{Q})$;
• Resolução de problemas envolvendo limites de sucessões.</td><td>10</td></tr>
</table>

De forma a trabalhar o conceito de limite, o Programa (MEC, 2013), apesar de ter em conta uma construção intuitiva da noção de limite, chama a atenção para os riscos que uma abordagem puramente intuitiva acarreta.

Na primeira parte da unidade de ensino, havia a intenção de apelar para um sentido mais intuitivo do limite de uma sucessão por parte dos alunos, utilizando diversas ferramentas e conteúdos já trabalhados anteriormente, tais como o estudo da monotonia de uma sucessão, o cálculo de majorantes e minorantes de um conjunto de valores e da representação gráfica de uma sucessão. Na segunda parte da unidade de ensino, os alunos foram levados a justificar matematicamente as suas conclusões.

Apresenta-se de seguida uma síntese da unidade de ensino (Quadro 4), que, como referido no capítulo anterior, foi construída com base no programa de Matemática vigente (MEC, 2013), suportada pelo programa de Matemática anterior (ME, 2001b) e com objetivo de promover o desenvolvimento do conceito de limite de uma sucessão. Esta tem por base a aplicação de quatro tarefas, sendo que as três primeiras tarefas envolvem vários tipos de sucessões e apelam para uma noção intuitiva do limite de uma sucessão e a quarta tarefa relaciona a noção intuitiva com a definição formal de limite de uma sucessão. Para a realização das tarefas pelos alunos foram necessários nove tempos de 50 minutos cada.

Quadro 4 - Síntese da unidade de ensino

Tópicos		**Tarefas**	**N.º tempos (50 minutos)**
Noção intuitiva de limite	Limite de infinitésimos, constantes, soma de infinitésimos com constantes e infinitamente grandes (casos simples)	Tarefa 1 (Anexo 1)	2
	Limite de progressões geométricas e sucessões racionais	Tarefa 2 (Anexo 2)	2
	Limite de sucessões de termos alternados e outras sucessões	Tarefa 3 (Anexo 3)	2
	Discussão coletiva baseada nas conclusões obtidas. Preenchimento de um questionário.		1
Definição formal de limite	Introdução do conceito de vizinhança e da definição formal de limite de uma sucessão. Noção intuitiva de limite e vizinhanças	Tarefa 4 (Anexo 4)	2
		Total:	9

Tal como sugere o programa de matemática anterior, “podem apresentar-se exemplos de sucessões definidas pelo seu termo geral e, utilizando a calculadora gráfica, através de cálculos e representações gráficas de sequências de termos chegar aos conceitos de infinitamente grande, de infinitamente pequeno e de limite de uma sucessão” (ME, 2002b, p. 9). Neste sentido, as tarefas que estruturaram esta unidade de ensino, que serão apresentadas mais pormenorizadamente mais à frente, contemplam exemplos de sucessões pertinentes e comuns ao longo do programa, tais como progressões aritméticas, progressões geométricas convergentes e não convergentes, infinitésimos, infinitamente grandes, etc. No entanto, foi tido em conta que “uma abordagem puramente intuitiva dos limites leva rapidamente a insuficiências conceptuais graves” (MEC, 2013, p. 15).

A unidade de ensino promove a interpretação intuitiva do conceito de limite e procura desenvolver uma interpretação clara do conceito formal de limite de uma sucessão. A tarefa 4 (Anexo 4) surgiu da necessidade de complementar a ideia intuitiva de limite com a sua definição formal. Deste modo, a definição formal de limite ajuda a clarificar o conceito de limite.

3.3. Abordagem metodológica

Diversos autores referem que a aprendizagem dos alunos depende da qualidade do trabalho desenvolvido nas tarefas que lhes são propostas. Por exemplo, Stein e Smith (1998) referem que a realização de tarefas matemáticas tem um efeito determinante sobre o que os alunos realmente aprendem. Ponte (2005), por sua vez, considera que a aprendizagem, por parte dos alunos, decorre de dois fatores: a atividade que realizam a partir das tarefas propostas e a reflexão que sobre ela efetuam.

No planeamento desta unidade foi assumida uma dinâmica de trabalho de características exploratória e autónoma por parte dos alunos, onde “o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 22). Assume-se assim que é importante criar momentos onde o papel do aluno se torna o mais relevante no processo ensino/aprendizagem. Tal como refere Ponte (2014, p. 155), “o trabalho de cunho exploratório cria oportunidades para os alunos construírem e aprofundarem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas”. Na construção de novos conceitos, o papel dos alunos torna-se muito relevante, uma vez que não é com uma atitude passiva em sala de aula que se consegue levar os alunos a desenvolverem novos conceitos matemáticos.

Assim, de modo a incentivar os alunos a refletir sobre as atividades desenvolvidas, foi adotada uma metodologia em sala de aula que privilegia o trabalho a pares e discussões em pequeno grupo.

À semelhança de outras tarefas desenvolvidas com os alunos ao longo do ano letivo, a formação dos grupos de trabalho foi feita tendo em conta os níveis de desempenho dos alunos na disciplina: alunos com graus de desempenho semelhantes foram colocados no mesmo grupo. Deste modo, por um lado, pretendia-se potenciar que a atividade desenvolvida no grupo fosse trabalho resultante do grupo e não de apenas um dos elementos desse grupo. Por outro lado, visto que a constituição dos grupos mantinha a que vinha a ser adotada desde o início das aulas, favorecendo que os alunos adquirissem, ao longo do tempo, métodos de trabalho colaborativo, esta opção facilitaria o seu trabalho na resolução das tarefas propostas. No entanto, devido ao número limitado de computadores disponíveis na sala de aula, um dos grupos foi desfeito e cada um dos elementos integrou outro grupo.

A organização global das aulas da unidade de ensino seguiu a abordagem exploratória, a qual Canavarro, Oliveira e Menezes (2012) consideram poder estruturar-se em quatro fases: introdução da tarefa, realização da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das aprendizagens matemáticas. Em cada uma das fases, os objetivos principais centram-se nas aprendizagens matemáticas e na gestão da dinâmica dos alunos. Tal como os autores sugerem, as tarefas matemáticas propostas foram conduzidas de modo a contemplar as quatro fases referidas. Na introdução de cada uma das tarefas, os alunos foram esclarecidos acerca dos objetivos das mesmas, realizaram cada uma das tarefas e posteriormente foi promovida uma discussão coletiva e consequente sistematização de aprendizagem. Os alunos tiveram oportunidade de explicar as suas resoluções, justificar melhor as suas respostas e foram confrontados com as resoluções dos seus colegas que, no caso de resoluções diferentes, levantaram questões acerca das conclusões obtidas, levando assim à discussão e esclarecimento de ideias.

Compreendendo que a experiência matemática dos alunos é enriquecida se a sua atividade matemática envolver o uso das tecnologias, nomeadamente com a exploração de ambientes de geometria dinâmica (ME, 2002b), tornou-se o uso do computador e da aplicação *Geogebra* uma ação recorrente e obrigatória. Esta aplicação, tal como a calculadora gráfica, permite "relacionar as informações dadas algebricamente com as representações gráfica e em tabela e apresentam os objetos matemáticos numa representação mais próxima da usual" (Ponte et al., 2009, p. 16).

Desta forma, relativamente aos recursos, tal como foi referido no capítulo anterior, pressupôs-se assim a utilização das potencialidades da tecnologia através do uso da calculadora gráfica e do computador (nomeadamente no ambiente de geometria dinâmica *Geogebra*). Seguindo uma das indicações do programa (ME, 2002b), a utilização deste tipo de tecnologias permite a análise rápida de informação em diversas formas, numérica, algébrica e gráfica, quando nem os cálculos, nem os procedimentos algébricos rotineiros são objeto específico da aprendizagem.

Para a concretização do uso de computadores, foi necessário requisitar uma sala projetada para esse efeito. Esta sala estava equipada com um quadro branco, um computador para o professor, um projetor ligado ao computador do professor e vários computadores, no entanto, na altura, só havia oito computadores à disposição, o que levou a organizar os alunos em seis grupos de dois elementos e dois grupos de três.

A aplicação da unidade de ensino pressupôs a utilização de alguns recursos bem como uma planificação dos momentos de avaliação, que podem ser observados no quadro seguinte (Quadro 5).

Quadro 5 - Recursos e avaliação

Recursos	Tarefas; Calculadora gráfica; Computador; Ambiente de geometria dinâmica. PowerPoint; Escola virtual; E-manual;
Avaliação	Avaliar a intervenção dos alunos ao longo das aulas Avaliar os conhecimentos dos alunos por meio de teste de avaliação

3.4. As tarefas

Com a intenção de promover uma interpretação intuitiva do conceito de limite e uma posterior relação com o conceito formal de limite de uma sucessão, foram criados dois grupos de tarefas, conforme o Quadro 4, apresentado anteriormente: o primeiro grupo (tarefas 1, 2 e 3) incide sobre o tema da noção intuitiva de limite e o segundo grupo (tarefa 4) sob o tema da definição de limite. As tarefas referentes à noção intuitiva de limite, inspiradas no trabalho desenvolvido por Roh (2010), foram estruturadas para serem resolvidas a pares, com o auxílio das aplicações *Geogebra* e *Excel*, enquanto a tarefa relativa à noção formal de limite foi pensada para ser trabalhada individualmente, com recurso à calculadora gráfica.

Optei pelo uso de tecnologias por considerar ser mais significativo, para os alunos a exploração do conceito do limite de uma sucessão com este apoio. O software *Geogebra* permite-lhes, num curto espaço de tempo, visualizar vários gráficos e, mais facilmente, verificar as suas conjeturas. Foi sugerido que os alunos representassem gráfica e numericamente um número considerável de sucessões e, da sua representação gráfica e/ou numérica, tirassem conclusões acerca do seu limite. No entanto, os alunos também foram levados a reconhecer as fragilidades das conclusões obtidas associadas às limitações das ferramentas utilizadas, confrontando, em grande grupo, as diversas conclusões obtidas por eles e pelos colegas.

O enunciado das três primeiras tarefas encontrava-se no ambiente de trabalho de cada computador e os alunos tinham de seguir as indicações do enunciado. Após lerem as indicações dos enunciados, estes perceberam a necessidade de trabalhar no computador com duas aplicações diferentes, o *Geogebra* e o *Excel*. Nestas tarefas, eram dadas expressões de várias sucessões e os alunos teriam de representar, tanto gráfica como numericamente, alguns termos das sucessões para depois indicar o seu limite, caso existisse. De modo a representar graficamente, os alunos teriam de inserir as expressões das sucessões, respeitando uma determinada formatação, de modo a visualizar apenas o gráfico de uma sucessão e não o gráfico de uma função contínua. Para calcular numericamente termos da sucessão, os alunos teriam de colocar numa coluna as ordens e, na coluna adjacente, teriam de colocar uma fórmula que permitisse calcular o termo respetivo. Nestas tarefas eram também solicitadas as justificações dos alunos das suas respostas, nomeadamente, do limite de cada uma das sucessões analisadas.

Passo agora a descrever mais sucintamente cada uma das tarefas.

3.4.1. Tarefa 1 (Anexo 1)

Procurando possibilitar a construção intuitiva de limite de uma sucessão através da observação gráfica e numérica do comportamento de várias sucessões, (Oehrtman, 2008), a criação desta tarefa baseou-se na procura de exemplos significativos a serem, posteriormente, revisitados noutros conteúdos programáticos, tais como o limite segundo Heine. Ou seja, esta tarefa contempla exemplos de sucessões cuja convergência é de determinação imediata. Estes exemplos pretendem apoiar os alunos, no trabalho no pequeno grupo, no desenvolvimento de uma ideia intuitiva inicial da convergência de limite de uma sucessão que permita em seguida, em grande grupo, enriquecer e esclarecer a noção intuitiva de limite.

O previsto para a resolução desta tarefa era 50 minutos, no entanto, os alunos necessitaram de duas aulas de 50 minutos para a completarem. De facto, para além de terem de responder a um número elevado de questões, os alunos tiveram também de passar por um processo de adaptação à tarefa, ao *Geogebra* e ao *Excel*. À medida que foram compreendendo o que era pretendido e se foram familiarizando com as aplicações referidas, iam alternando entre as duas, preenchendo as tabelas e representando graficamente as sucessões. Em seguida, indicavam o valor do limite de cada uma das sucessões, com base nessas representações. Os alunos trabalharam de forma bastante autónoma, requerendo o apoio do professor, essencialmente, para solucionar problemas relacionados com o uso do computador.

Após os alunos terminarem a resolução da primeira tarefa, houve um momento de partilha e discussão das suas conclusões, em grupo turma. Nesse momento, foi possível debater e esclarecer alguns conceitos, tais como a diferença entre uma sucessão limitada e uma sucessão convergente e a convergência de uma sucessão constante.

3.4.2. Tarefas 2 e 3 (Anexos 2 e 3)

Nas segunda e terceira tarefas, os alunos continuaram a desenvolver o mesmo tipo de trabalho por eles efetuado na primeira tarefa. Estas tarefas foram realizadas no final do segundo período, na última semana de aulas.

Estas tarefas têm como objetivo o estudo intuitivo de limite de sucessões algebricamente mais complexas. Após discussão coletiva da execução da primeira tarefa e respetivas conclusões, os alunos seriam levados a conhecer gráficos de outros tipos de sucessões ainda não trabalhadas, tais como sucessões de termos alternados, exponenciais de várias bases e racionais.

Como refere Oehrtman (2008), a noção intuitiva de limite está muito relacionada com os exemplos de vários tipos de comportamentos de sucessões. Assim, um dos objetivos deste grupo de tarefas é o de dar a conhecer o comportamento de um grande número de sucessões. Ao conhecerem melhor o comportamento de diferentes tipos de sucessões, os alunos serão levados a desenvolver uma melhor compreensão do conceito de limite.

3.4.3. Tarefa 4 (Anexo 4)

Na primeira aula do terceiro período, foi feita uma discussão do trabalho desenvolvido no final do período anterior, onde foram focadas as diferenças entre as conclusões que os alunos tinham obtido a partir da resolução das tarefas. Nesta aula também foi introduzido o conceito de vizinhança.

Na tarefa 4 (Anexo 4), os alunos foram convidados a trabalhar individualmente, onde, com o auxílio da calculadora, revisitaram o trabalho desenvolvido nas tarefas anteriores, ou seja, representaram gráfica e numericamente as várias sucessões referidas na tarefa. De seguida, interpretaram o conceito de vizinhança e responderam às várias questões da tarefa.

Na primeira questão da tarefa, os alunos foram levados a usar competências desenvolvidas nas tarefas anteriores, construir gráficos e tabelas e observar a evolução de cada uma das sucessões, agora com o auxílio da calculadora gráfica. Depois, foram chamados a interpretar o conceito de vizinhança e delinear estratégias que permitissem responder às questões, que se prendem com o determinar a ordem a partir da qual o conjunto de termos de uma dada sucessão se encontra numa determinada vizinhança do limite (determinado de forma intuitiva anteriormente).

O principal objetivo da tarefa 4 está relacionado com a construção de um conceito importante na noção formal de limite: a vizinhança. Quando os alunos dominam a ideia de vizinhança, compreendem melhor a noção formal de limite (Oehrtman, 2008).

É importante referir que não foi feito qualquer trabalho algébrico com os alunos no que se refere à definição formal de limite, ou seja, não houve qualquer aula expositiva onde se apresentasse qualquer processo/receita de justificação de limite ou de determinação de termos fora de uma vizinhança. O cálculo algébrico que estes desenvolveram ao longo desta tarefa baseou-se unicamente na noção de sucessão limitada e no estudo de majorantes e minorantes, que foi um dos temas lecionados antes da unidade de ensino.

4. Metodologia

Este capítulo procura descrever a metodologia utilizada ao longo do estudo, estando organizado em quatro secções: as opções metodológicas realizadas; a caracterização dos participantes no estudo; a apresentação dos métodos e procedimentos adotados na recolha de dados e a descrição do método de análise dos dados.

4.1. Opções metodológicas

No presente trabalho, é utilizada uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa, com vista a promover um melhor entendimento dos significados atribuídos pelos alunos nas suas opções, representações e justificações no trabalho que desenvolveram na unidade de ensino.

De modo a analisar o processo de construção das aprendizagens dos alunos do 11.º ano quanto ao conceito de limite, com vista a compreender como estes podem mobilizar os seus conhecimentos intuitivos e matemáticos de convergência para construir uma definição formal de limite de uma sucessão, estes foram convidados a realizar tarefas de natureza exploratória num ambiente de sala de aula, que é o ambiente natural da turma.

Este estudo segue os aspetos que Bogdan e Biklen (1994) consideram como característicos da investigação qualitativa. A recolha de dados foi feita por mim e em ambiente natural dos alunos, ou seja, em sala de aula e a análise dos dados foi feita de forma indutiva. Os participantes deste estudo são os alunos da turma no 11.º ano da área de Ciências e Tecnologias. Durante todo este processo, os fatores externos ao ambiente natural dos alunos foram mínimos, visto ter sido um ambiente de trabalho recorrente e primordial, desde o início do ano letivo. Paralelamente ao meu papel de professor, desenvolvi este estudo, pelo que a minha observação ao longo de todo este processo foi um dos elementos centrais no desenrolar de todo o estudo e que contribuiu para a interpretação e análise dos dados.

Os dados recolhidos têm uma natureza descritiva. A informação foi recolhida sob a forma de palavras, imagens e representações, que analisei do modo mais fidedigno possível, ao recorrer aos registos escritos dos alunos ou à transcrição de diálogos. Esta abordagem é característica de um estudo qualitativo e teve como objetivo o de compreender o objeto de estudo.

A recolha de dados acompanhou a concretização da unidade de ensino que ocorreu no final do 2.º período e início do 3.º período e os dados foram analisados de forma indutiva, já que não estabeleci categorias prévias.

Baseando o estudo num contexto de descoberta, assumi simultaneamente o papel de professor e de investigador, o que, ao desempenhar o meu papel de professor exigiu um envolvimento pessoal na investigação. Como refere Ponte (2002), o meu objetivo é compreender algo que me intriga e não investigar por investigar e as minhas observações como investigador têm necessariamente o meu cunho pessoal, dado que "qualquer olhar é filtrado pela linguagem, género, classe social, raça, etnia" (Aires, 2011, p. 15).

4.2. Os participantes no estudo

O presente estudo foi realizado com os alunos de uma turma do 11.º ano de escolaridade do Ensino Secundário, do ramo de Ciências e Tecnologias, da qual sou professor de Matemática.

Das minhas duas turmas do 11.º ano, a escolha recaiu sobre esta devido a, principalmente, dois critérios. Por um lado, a dimensão da turma era conveniente relativamente aos materiais disponíveis na escola. Uma turma de maior dimensão, obrigaria a ter outra distribuição no número elementos de cada grupo para a utilização dos computadores, o que, consequentemente, implicaria com o seu rendimento. Por outro lado, ao longo do ano letivo, os alunos desta turma foram sempre muito assíduos, colaborativos, interessados e empenhados, ao contrário de alguns elementos da outra turma.

De modo a respeitar as questões de ordem ética, em primeira instância, enderecei um pedido de autorização à Direção do Agrupamento (Anexo 5) que a turma selecionada frequenta, e garanti que o deferimento fosse comunicado tanto à Diretora de Turma, como à Coordenadora do Departamento de Matemática e Informática da escola. Posteriormente, solicitei autorizações aos Encarregados de Educação dos alunos desta turma (Anexo 6), clarificando os objetivos do estudo e informando da garantia de confidencialidade dos dados recolhidos.

Participaram no estudo 18 dos 20 alunos da turma, visto a participação de um dos alunos não ter sido autorizada pelo encarregado de educação e um outro aluno, por estar doente, não ter frequentado as aulas da unidade de ensino. Apesar da não autorização do seu encarregado de educação na participação do estudo, o aluno esteve envolvido em todas as atividades de ensino-aprendizagem nesta unidade de ensino, como aluno da turma, não sendo de forma alguma prejudicado pela sua não participação na investigação.

Atendendo à dimensão da turma e às características das três primeiras tarefas, a turma foi dividida em nove grupos de dois elementos. Posteriormente, devido à reduzida quantidade de computadores disponíveis, a turma foi dividida em seis grupos de dois elementos e dois grupos de três elementos. A formação destes grupos baseou-se principalmente na tentativa de se obter grupos homogéneos, ou seja, grupos de alunos de desempenhos idênticos. Esta constituição dos grupos já tinha sido por mim definida em atividades anteriores, pelo que não foi novidade para os alunos.

4.3. Métodos e procedimentos de recolha de dados

Para realizar este trabalho recorri aos seguintes instrumentos de recolha de dados: observação das aulas, com gravação áudio, recolha documental e realização de um pequeno questionário.

4.3.1. Observação de aulas

A observação participante é um dos métodos de recolha de dados de um estudo desta natureza, pois é através do contacto direto com os participantes no estudo, em contexto de sala de aula, que se pode ter uma perceção da atividade matemática dos alunos no decurso da unidade de ensino.

No entanto, desempenhando duas funções, professor e investigador, nem sempre foi fácil efetuar registos escritos das aulas. Para colmatar esta dificuldade, fui fazendo registos posteriores de episódios ou aspetos que considerei serem pertinentes para o estudo.

A gravação áudio foi também usada para complementar o registo de observação já que possibilitou ficar com o registo das discussões em grande grupo posteriores às resoluções das tarefas por parte dos alunos.

4.3.2. Recolha documental

Ao longo da lecionação da unidade de ensino, recolhi todos os documentos que os alunos, individualmente, produziram em aula, na resolução das tarefas propostas, para que, quando necessário, pudesse digitalizá-los e devolvê-los aos alunos, ficando com o seu registo.

Visto as três primeiras tarefas terem sido resolvidas com o auxílio do computador, foi pedido aos grupos que respondessem às questões das tarefas no próprio computador. Para tal, foi criado um ficheiro onde os alunos colocavam as respostas às questões. No final de cada aula, era feito um *backup* dos ficheiros que cada grupo produzia (um ficheiro por grupo).

4.3.3. Questionário

Após as três primeiras tarefas, procurei ter uma perceção do *Conceito Imagem* de limite que os alunos construíram ao longo das tarefas, construindo para tal um questionário a aplicar à turma, que foi respondido de forma anónima. De facto, o material recolhido através da observação ou da resolução das tarefas pelos alunos poderia não ser muito aprofundado, visto que por vezes estes registam menos informação do que pensam ou expressam oralmente em aula. Assim, o questionário (Anexo 7), que continha uma pergunta de resposta aberta, acerca da definição de limite de uma sucessão, e seis de valor lógico, acerca de várias conceções erróneas, serviu para me esclarecer acerca das várias interpretações da noção de limite que os alunos detinham naquele instante.

4.4. Métodos de análise de dados

Para a análise de dados atribuí principal ênfase às produções escritas dos alunos, analisando em cada tarefa os conceitos trabalhados. A análise destes documentos foi, por vezes, complementada com os registos áudio e dos registos das aulas por mim efetuados. Em relação ao questionário efetuado e às questões presentes no teste de avaliação relacionadas com o tema, estes foram tratados de forma quantitativa.

Ao longo da unidade de ensino, fui arquivando todas as digitalizações e gravações e, posteriormente, organizei as produções escritas dos alunos por tipos de sucessões.

Ao longo desta análise, tentei identificar padrões nas estratégias utilizadas pelos alunos, o tipo de representações a que os alunos recorreram e os conceitos matemáticos utilizados. Ao centrar-me no processo do raciocínio dos alunos, ao partir de um conjunto de dados, fui agrupando-os de acordo com determinadas tendências.

5. Análise de dados

Neste capítulo far-se-á a análise de dados dos documentos produzidos pelos alunos aquando da resolução das tarefas 1, 2, 3 e 4, do questionário aplicado e das questões presentes no teste de avaliação relacionadas com a unidade de ensino.

No decorrer das três primeiras tarefas, era pedido aos alunos que justificassem as suas conjeturas com as leituras gráficas e numéricas efetuadas não pedindo nenhuma justificação algébrica dessas justificações. Logo, quando os alunos referem a monotonia da sucessão como justificação da sua conjetura de limite, a própria conclusão da monotonia também é uma conjetura, visto não ter havido nenhuma demonstração algébrica que comprovasse esse facto.

5.1. Tarefa 1

Nesta tarefa (Anexo 1), os alunos foram levados a representar, tanto gráfica como numericamente, um conjunto de sucessões de expressões algébricas simples. Estas são expressões já anteriormente trabalhadas pelos alunos, tanto no estudo de sucessões limitadas como no estudo de progressões. Mais concretamente, trata-se de sucessões constantes, progressões aritméticas e progressões geométricas. No que diz respeito ao tipo de limite envolvido nas sucessões consideradas, foram tidos em conta três grupos de sucessões, para a organização da análise de dados: constantes, convergentes (não constantes) e divergentes.

5.1.1. Limite de uma sucessão constante

O quadro seguinte resume as resoluções dos alunos no que se refere às sucessões constantes da tarefa 1, onde se indicam as expressões das sucessões propostas, as várias representações gráficas e numéricas utilizadas, os valores dos limites obtidos e as justificações apresentadas pelos diferentes grupos de alunos (Quadro 6).

Quadro 6 - Síntese das resoluções das sucessões constantes da Tarefa 1

Sucessão	Representação Gráfica	Representação Numérica	Valor do Limite	Justificação do valor do limite
$a_n = 5$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	4 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 4 grupos constroem uma tabela com os 9 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 30 primeiros termos	Apenas um grupo refere que a sucessão não era convergente (Figura 5); Os restantes grupos referem que o limite era 5 (Figura 4)	Todos os grupos referem tratar-se de uma sucessão constante (figuras Figura 4 e Figura 5)
$h_n = -2$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	5 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 3 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos	1 grupo refere que, por ser constante, não tinha limite; 4 grupos não indicam o valor do limite (Figura 6)	Todos os grupos referem que tratar-se de uma sucessão constante

A maioria dos alunos indicou corretamente o limite das duas sucessões constantes da tarefa 1, justificando esse valor justamente pelo facto de as sucessões serem constantes, tal como é visível na resolução do grupo 6, que apresenta a representação gráfica e a tabela numérica (Figura 4).

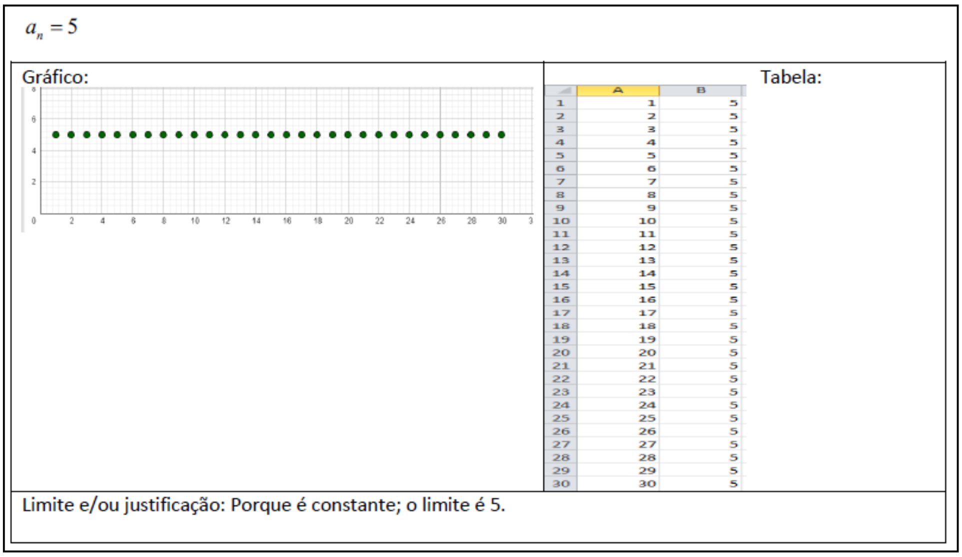


Figura 4 - Resolução do grupo 6 relativa à sucessão a_n

Apesar de ter justificado também que a sucessão é constante, o único grupo de alunos que afirma que a sucessão a_n não tem limite considera que a sucessão, por ser constante, ou seja, todos os seus termos serem iguais a cinco, esta não se aproxima de nenhum valor (Figura 5). Estes alunos representaram corretamente a sucessão, tanto gráfica como numericamente, no entanto, a sua intuição leva-os a supor que a sucessão não converge, ou seja, não tem limite, o que, de acordo com outras definições de limite de uma sucessão, seria verdadeiro. Este grupo de alunos foi o único a referir que nenhuma das sucessões tem limite.

Limite e/ou justificação: A sucessão não tem limite, pois a sucessão não se aproxima de nenhum valor, sendo esta constante (5).

Figura 5 - Resolução do grupo 2 relativa à sucessão a_n

Tal como se verifica com o grupo 6 (Figura 4), na generalidade, os grupos, para além de não darem justificações muito elaboradas, foram ficando cada vez menos cuidadosos na apresentação da sua resolução da tarefa, não respondendo ao que era pedido, mesmo sabendo a resposta, tal como pude observar no decurso das aulas. Apesar de ambas as sucessões a_n e h_n serem constantes, o desempenho dos alunos em cada uma delas é completamente diferente.

Por exemplo, os alunos do grupo 6 apresentaram resoluções muito diferentes quando trabalharam as duas sucessões constantes da tabela 1. Na primeira sucessão (Figura 4), os alunos determinaram os 30 primeiros termos da sucessão e concluíram que o limite era a própria constante. Na segunda sucessão, apenas calcularam os 10 primeiros temos e no final não indicaram sequer o valor do limite, referindo apenas que era limitada e constante (Figura 6).

$h_n = -2$

Gráfico:

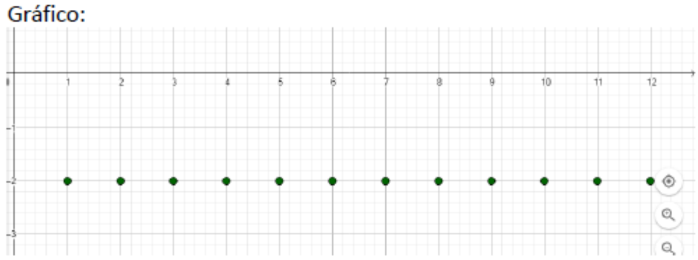


Tabela:

1	-2
2	-2
3	-2
4	-2
5	-2
6	-2
7	-2
8	-2
9	-2
10	-2

Limite e/ou justificação:
É limitada, pois é constante

Figura 6 - Resolução do grupo 6 relativa à sucessão h_n

5.1.2. Limite de uma sucessão convergente

O quadro seguinte (Quadro 7) resume a informação relativa às resoluções apresentadas pelos alunos no que se refere às sucessões convergentes não constantes que surgia na tarefa 1.

Quadro 7 – Síntese das resoluções das sucessões convergentes da Tarefa 1

Sucessão	Representação Gráfica	Representação Numérica	Valor do Limite	Justificação do valor do limite
$e_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	5 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 9 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 30 primeiros termos	5 grupos referem que o limite da sucessão é zero; 2 grupos não responderam; 1 grupo refere que o limite é mais infinito (Figura 8)	Todos os grupos, à exceção do grupo que indica mais infinito como limite, referem que a sucessão era monótona decrescente e limitada; 1 grupo ainda refere que a sucessão era decrescente de termos positivos (Figura 7)
$f_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$	Quase todos os grupos representam graficamente a sucessão à exceção de 1 grupo que representou graficamente a sucessão de expressão $-\left(\frac{3}{4}\right)^n$	5 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos	4 grupos referem corretamente que o limite da sucessão é zero; os restantes grupos não responderam	4 grupos referem que a sucessão não era monótona, mas era limitada; 2 grupos referem que a sucessão pode ser dividida em duas subsucessões, uma de termos positivos e decrescente e outra de termos negativos e crescente (Figura 9)

Os alunos do grupo 7 foram dos que identificaram corretamente o limite da sucessão como sendo zero. Na justificação do limite obtido, referem adequadamente a monotonia da sucessão e ainda mencionam que os termos da progressão são todos positivos e, sendo 0 um minorante, este terá de ser o seu limite (Figura 7).

$$e_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Gráfico:

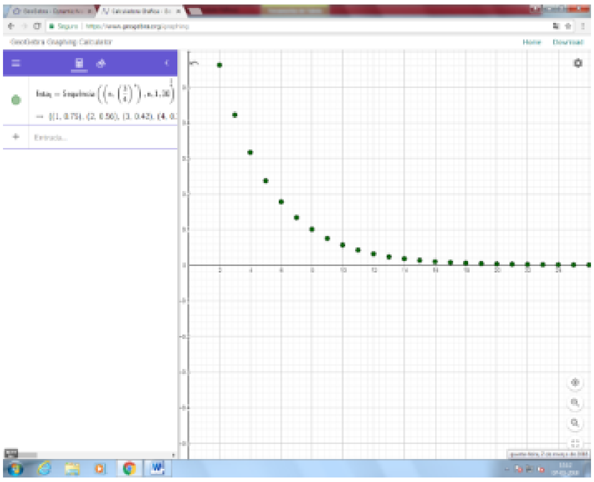


Tabela:

ordem	termo
1	0,75
2	0,5625
3	0,421875
4	0,316406
5	0,237305
6	0,177979
7	0,133484
8	0,100113
9	0,075085

Limite e/ou justificação:
Limite = 0, porque é uma sucessão monótona decrescente positiva sendo sempre maior que 0.

Figura 7 - Resolução do grupo 7 relativa à sucessão e_n

Já o grupo 1, apesar de ter representado a sucessão e_n corretamente, tanto gráfica como numericamente, não acertou no valor do limite da sucessão, como podemos ver na Figura 8. Desta resposta, poder-se-á conjeturar que os alunos talvez tenham confundido o termo com a ordem da sucessão, associando o "mais infinito" ao facto de podermos ter uma ordem tão grande quanto queiramos na sucessão. Apesar de pontual, esta possível confusão foi recorrente neste grupo.

29	0,000238
30	0,000179

Limite e/ou justificação: O limite é mais infinito

Figura 8 - Resolução do grupo 1 relativa à sucessão e_n

Na Figura 9, podemos reparar que os alunos do grupo 8 fazem referência ao comportamento das subsucessões de f_n, no entanto, não concluem acerca do limite da sucessão, referindo apenas que se trata de uma sucessão limitada. Esta resposta talvez evidencie a confusão entre dois conceitos diferentes: limite de uma sucessão e sucessão limitada.

$$f_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$

Gráfico:

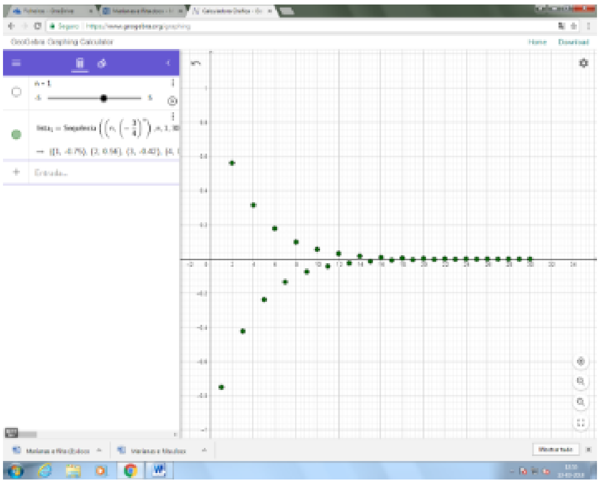


Tabela:

1	-0,75
2	0,5625
3	-0,42188
4	0,316406
5	-0,2373
6	0,177979
7	-0,13348
8	0,100113
9	-0,07508
10	0,056314

Limite e/ou justificação:
A sucessão não é monótona e é limitada entre 0,5625 e -0,75. Quando o n é par a sucessão assume um termo positivo e quando o n é ímpar a sucessão

Figura 9 - Resolução do grupo 8 relativa à sucessão f_n

5.1.3. Limite de uma sucessão divergente

O quadro seguinte (Quadro 8) resume as resoluções dos alunos no que se refere às sucessões divergentes que surgiam na tarefa 1.

Quadro 8 – Síntese das resoluções das sucessões divergentes da Tarefa 1

Sucessão	Representação Gráfica	Representação Numérica	Valor do Limite	Justificação do valor do limite
$b_n = n - 10$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	4 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 3 grupos constroem uma tabela com os 9 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 30 primeiros termos	Todos os grupos referem que a sucessão não tem limite finito	Todos os grupos referem que a sucessão era monótona mas não era limitada; Dois grupos, para além da monotonia, referem que o gráfico de uma p.a. são pontos de uma reta de declive positivo (Figura 10)
$c_n = 2^n$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	4 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 3 grupos constroem uma tabela com os 9 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com 8 termos consecutivos, a partir do terceiro termo	Todos os grupos referem que a sucessão não tem limite	Todos os grupos referem que a sucessão era monótona mas não era limitada (Figura 11)
$d_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	4 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 3 grupos constroem uma tabela com os 9 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com 8 termos consecutivos, a partir do sexto termo	Todos os grupos referem que a sucessão não tem limite	Todos os grupos referem que a sucessão era monótona mas não era limitada

$g_n = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$	Quase todos os grupos representam graficamente a sucessão; 1 grupo representou graficamente a sucessão de expressão $-\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$	5 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos	Apenas 3 grupos referem que a sucessão não tem limite; 1 grupo refere que a sucessão tinha dois limites (mais infinito e menos infinito); Os restantes grupos não responderam	7 grupos referem que a sucessão não era monótona nem limitada; 1 grupo refere que a sucessão pode ser dividida em duas subsucessões, uma de termos positivos e crescente e outra de termos negativos e decrescente

Em relação à sucessão b_n, uma progressão aritmética crescente, os grupos indicam corretamente que a sucessão não tem limite finito, invocando o facto da progressão não ser limitada. Para além desta justificação, os alunos do grupo 3 utilizam conhecimentos de funções para justificarem o comportamento de uma progressão aritmética. Estes referem a existência de um ínfimo, chamando-o de limite inferior, embora esta linguagem nunca tenha sido utilizada nas aulas aquando do estudo de sucessões limitadas, e referem também a inexistência de majorantes justificando assim que a sucessão não tem limite finito, pois não é limitada superiormente (Figura 10).

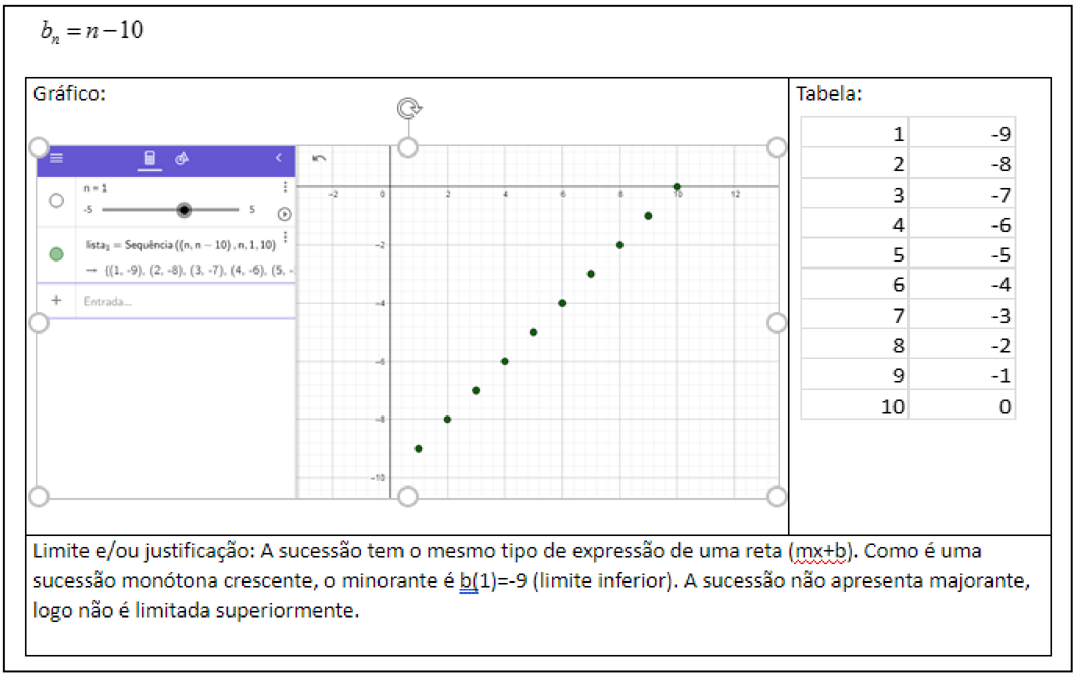


Figura 10 - Resolução do grupo 6 relativa à sucessão b_n

Os alunos do grupo 7 justificam a inexistência de limite da sucessão c_n invocando a monotonia da sucessão e a não existência de majorante (Figura 11).

$c_n = 2^n$

Gráfico:

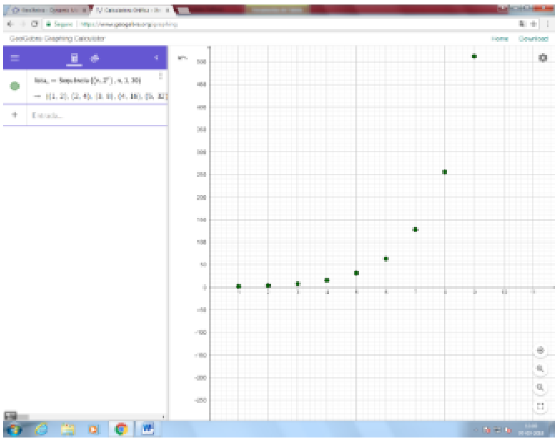


Tabela:

ordem	termo
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512

Limite e/ou justificação:
Não possui limite, pois é uma sucessão monótona crescente que não é majorada.

Figura 11 - Resolução do grupo 7 relativa à sucessão c_n

É de notar que, ao longo da realização da tarefa no computador, pude observar que os alunos retiraram muito pouca informação das tabelas que elaboraram e basearam as suas justificações na visualização gráfica e em conceitos trabalhados imediatamente antes desta unidade de ensino, tais como, monotonia de uma sucessão, majorantes, supremos, minorantes e ínfimos de uma sucessão. As justificações utilizadas pelos alunos assentaram muito nos conceitos de sucessão limitada e sucessão monótona. Deste conjunto de sucessões analisadas pelos alunos, parece haver evidências de que a maioria dos alunos considera que se uma sucessão é limitada então esta tem limite.

Antes de iniciarem a tarefa 2, houve um momento dedicado à discussão das várias resoluções da tarefa 1, onde pude esclarecer e clarificar a noção de limite que os alunos estavam a construir.

5.2. Tarefa 2

Nesta tarefa (Anexo 2), os alunos continuaram o trabalho iniciado na tarefa 1. O objetivo principal seria o de apresentar aos alunos sucessões infinitesimais.

5.2.1. Limite de uma sucessão infinitesimal

O quadro seguinte (Quadro 9) resume as resoluções dos alunos da tarefa 2 no que se refere às sucessões infinitesimais obtidas a partir da razão entre uma constante e uma sucessão polinomial, onde se indicam as expressões das sucessões, as várias representações gráficas e numéricas utilizadas, os valores dos limites obtidos e as justificações apresentadas pelos diferentes grupos de alunos.

Quadro 9 – Síntese das resoluções das sucessões infinitesimais da Tarefa 2

Sucessão	Representação Gráfica	Representação Numérica	Valor do Limite	Justificação do valor do limite
$i_n = \frac{1}{n}$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	5 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos	Todos os grupos referem que o limite da sucessão é 0	2 grupos não justificam a sua resposta; 1 grupo refere que a sucessão se aproxima de zero (Figura 13); os restantes justificam o valor do limite através da monotonia da sucessão e do ínfimo (Figura 12)
$j_n = \frac{1}{n^2}$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	4 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com 10 termos	Todos os grupos referem que o limite da sucessão é 0	2 grupos não justificam a sua resposta; 1 grupo refere que a sucessão se aproxima de zero; os restantes justificam o valor do limite através da monotonia da sucessão e do ínfimo

		consecutivos desde o 21º termo (Figura 14)		
$k_n = -\frac{1}{n^3}$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	4 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com 10 termos consecutivos desde o 21º termo	Todos os grupos referem que o limite da sucessão é 0	3 grupos não justificam a sua resposta; 1 grupo refere que a sucessão se aproxima de zero; os restantes justificam o valor do limite através da monotonia da sucessão e do ínfimo
$l_n = \frac{250}{n}$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	4 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos, 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com 10 termos consecutivos desde o 21º termo	Todos os grupos referem que o limite da sucessão é 0	3 grupos não justificam a sua resposta; 1 grupo refere que a sucessão se aproxima de zero; os restantes justificam o valor do limite através da monotonia da sucessão e do ínfimo
$m_n = \frac{250}{2^n}$	Todos os grupos representam graficamente a sucessão	4 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos, 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com 10 termos consecutivos desde o 21º termo	Todos os grupos referem que o limite da sucessão é 0	3 grupos não justificam a sua resposta; 1 grupo refere que a sucessão se aproxima de zero; os restantes justificam o valor do limite através da monotonia da sucessão e do ínfimo

No que toca a sucessões infinitesimais, podemos reparar que, mais uma vez, a maioria dos alunos representou gráfica e numericamente as sucessões pedidas e, através da monotonia e da referência a um ínfimo ou a um supremo, justificou o limite indicado. No caso do grupo 7, apesar de os alunos terem determinado corretamente o valor do limite, a sua justificação é incompleta, visto existirem sucessões decrescentes e positivas cujo limite não é 0 (Figura 12).

$$i_n = \frac{1}{n}$$

Gráfico:

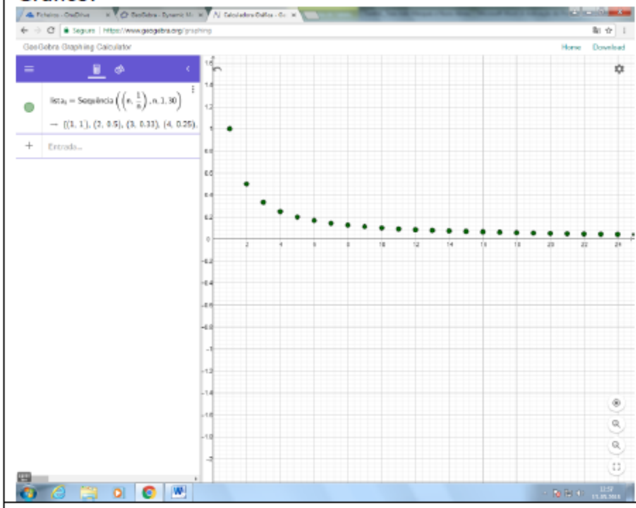


Tabela:

ordem	termo
1	1
2	0,5
3	0,333333
4	0,25
5	0,2
6	0,166667
7	0,142857
8	0,125
9	0,111111

Limite e/ou justificação:
O limite da sucessão é 0 pois esta é decrescente mas é sempre positiva.

Figura 12 - Resolução do grupo 7 relativa à sucessão i_n

Por seu lado, os alunos do grupo 5 indicaram corretamente o valor do limite, zero, baseando as suas conclusões apenas na aproximação a um número, possivelmente pela observação da representação gráfica da sequência, embora apenas para os seus 16 primeiros termos (Figura 13).

$$i_n = \frac{1}{n}$$

Gráfico:

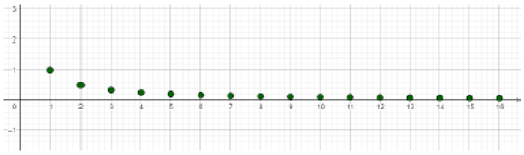


Tabela:

	A	B
1	ordem	termo
2	1	1
3	2	0,5
4	3	0,333333
5	4	0,25
6	5	0,2
7	6	0,166667
8	7	0,142857
9	8	0,125
10	9	0,111111
11	10	0,1

Limite e/ou justificação:
O limite é 0 porque os termos se aproximam do 0.

Figura 13 - Resolução do grupo 7 relativa à sucessão i_n

Ao contrário do que fez noutras questões, o grupo 6 determinou dez termos consecutivos, do vigésimo primeiro termo até ao trigésimo termo (Figura 14). Até esta sucessão, este grupo de alunos determinava sempre os 30 primeiros termos de cada sucessão, à exceção da sucessão constante. No entanto, neste caso, referiu oralmente que determinar os primeiros termos não é importante quando se trata de determinar o limite da sucessão.

$$j_n = \frac{1}{n^2}$$

Gráfico:

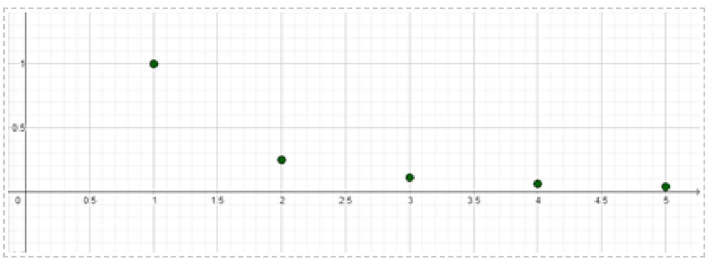


Tabela:

21	0,002268
22	0,002066
23	0,00189
24	0,001736
25	0,0016
26	0,001479
27	0,001372
28	0,001276
29	0,001189
30	0,001111

Limite e/ou justificação:
O limite é 0, pois é decrescente, limitada e sempre positiva

Figura 14 - Resolução do grupo 5 relativa à sucessão j_n

É de notar que, ao longo da tarefa, tal como na tarefa anterior, os alunos retiraram muito pouca informação das tabelas que elaboraram e basearam as suas justificações, essencialmente, na visualização gráfica e em conceitos trabalhados anteriormente.

5.3. Tarefa 3

Esta tarefa (Anexo 3) apresenta um conjunto de sucessões cuja determinação do respetivo limite se torna mais difíceis para os alunos. De facto, as sucessões em causa são tais que a mera observação da representação gráfica não é esclarecedora quanto ao valor do limite, quando este existe.

Nem todos os alunos resolveram a tarefa em questão por completo, visto alguns deles terem demorado bastante tempo na resolução das tarefas anteriores, o que impossibilitou que se debruçassem sobre esta da mesma forma. No entanto, estes foram levados a trabalhar as sucessões racionais r_n e s_n, que, para mim, seriam as mais importantes desta tarefa. No que diz respeito ao tipo de limite envolvido nas sucessões consideradas, foram tidos em conta três grupos de sucessões, para a organização da análise de dados: constantes, convergentes (não constantes) e divergentes.

5.3.1. Limite de uma sucessão constante

Na sucessão seguinte, os alunos eram levados a revisitar o estudo de uma sucessão constante. O objetivo principal seria o de perceber se, após alguma maturação do conceito de limite, os alunos estavam esclarecidos acerca da convergência de uma sucessão constante.

O quadro seguinte (Quadro 10) resume as resoluções dos alunos no que se refere à sucessão constante da tarefa 3, onde se indicam as expressões das sucessões, as várias representações gráficas e numéricas utilizadas, os valores dos limites obtidos e as justificações apresentadas.

Quadro 10 – Síntese das resoluções da sucessão constante da Tarefa 3

Sucessão	Representação Gráfica	Representação Numérica	Valor do Limite	Justificação do valor do limite
$q_n = 0$	3 grupos não representam graficamente a sucessão	2 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos; 3 grupos não constroem qualquer tabela	4 grupos referem que a sucessão tem limite; 1 grupo refere que a sucessão não tem limite (Figura 15); os restantes não responderam	5 grupos referem que a sucessão é contante

Mais uma vez, tal como sucedeu na tarefa 1, independentemente da sua conclusão relativamente ao valor do limite das sucessões, as justificações dos grupos foram todas idênticas, ou seja, os alunos referiram sempre tratar-se de uma sucessão constante. No entanto, destaca-se um grupo de alunos que justifica a não convergência com a não aproximação a um valor (Figura 15). Esta conclusão contrasta com as feitas pelo grupo relativamente às sucessões constantes da tarefa 1, em que este grupo referiu que as sucessões são convergentes, ou seja, têm limite. Nesta tarefa, o grupo relaciona o limite com a ideia de a sucessão se aproximar de um certo valor.

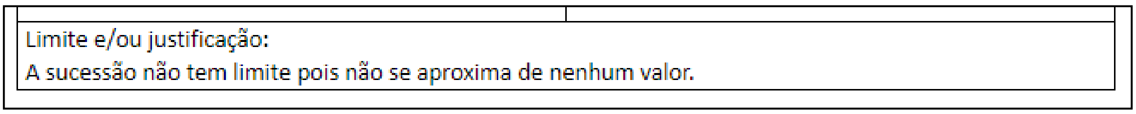

Limite e/ou justificação:
A sucessão não tem limite pois não se aproxima de nenhum valor.

Figura 15 - Resolução do grupo 1 relativa à sucessão q_n

5.3.2. Limite de uma sucessão convergente

O quadro seguinte (Quadro 11) resume as resoluções dos alunos no que se refere às sucessões convergentes da tarefa 3.

Quadro 11 – Síntese das resoluções das sucessões convergentes da Tarefa 3

Sucessão	Representação Gráfica	Representação Numérica	Valor do Limite	Justificação do valor do limite
$r_n = \frac{n+100}{10n}$	7 grupos representam graficamente a sucessão; 1 grupo representou graficamente a sucessão de expressão $\frac{n+100}{10} \times n$	3 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 4 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos	6 grupos referem incorretamente que o limite da sucessão é 0; 1 grupo refere incorretamente que o limite da sucessão é mais infinito; 1 grupo refere que o limite da sucessão é 0,1	1 grupo não justifica a sua resposta; 1 grupo refere que a sucessão se aproxima de zero; os restantes justificam o valor do limite através da monotonia da sucessão e do ínfimo, onde 1 dos grupos refere também o algoritmo da divisão (Figura 16)
$s_n = \frac{5n^2 - 10n + 2}{2n^2 + 1}$	7 grupos representam graficamente a sucessão; 1 grupo representou graficamente a sucessão de expressão $\frac{5n^2 - 10n + 2}{2} \times n^2 + 1$	3 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 4 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos	3 grupos referem incorretamente que o limite da sucessão é 3 (Figura 18); 2 grupos referem incorretamente que o limite da sucessão é mais infinito (Figura 17); 2 grupos referem corretamente que o limite da sucessão é 2,5 (Figura 19); 1 grupo não respondeu	1 grupo não justifica a sua resposta; 2 grupos referem que a sucessão se aproxima do limite; 4 grupos justificam o valor do limite através da monotonia da sucessão e do ínfimo, onde 1 dos grupos refere também o algoritmo da divisão

$t_n = \frac{250\times(-1)^n}{n}$	5 grupos representam graficamente a sucessão; 3 grupos não representam a sucessão	2 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 2 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos	3 grupos referem corretamente que o limite da sucessão é 0; 2 grupos referem incorretamente que não era convergente; os restantes grupos não responderam	1 grupo não justifica a sua resposta; 2 grupos referem que a sucessão se aproxima do limite; 2 grupos referem tratar-se de uma sucessão não monótona, logo não convergente
$v_n = 5 + \frac{10\times(-1)^n}{n}$	3 grupos representam graficamente a sucessão; 5 grupos não representam a sucessão	1 grupo constrói uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 30 primeiros termos	2 grupos referem que o limite da sucessão é 5; os restantes grupos não responderam	1 grupo não justifica a sua resposta; 2 grupos referem que a sucessão se aproxima do limite

Em relação às sucessões convergentes da tarefa 3, podemos reparar que, mais uma vez, a maioria dos alunos representou gráfica e numericamente as sucessões pedidas e, através da monotonia e da referência de um ínfimo ou de um supremo, justificou o limite indicado. De notar que, visto o valor do limite ser mais difícil de obter, houve um aumento do número de grupos que construiu numericamente sucessões até ao trigésimo termo.

As duas primeiras sucessões são sucessões racionais já estudadas em sala de aula no capítulo das sucessões limitadas e da monotonia de sucessões e, no caso do grupo 3, o valor do limite foi obtido a partir do algoritmo da divisão. Apesar do grupo ter referido que a sucessão é monótona decrescente e limitada entre 0,1 e 10,1, talvez por lapso, o valor do limite não foi referido.

$$r_n = \frac{n+100}{10n}$$

Gráfico:

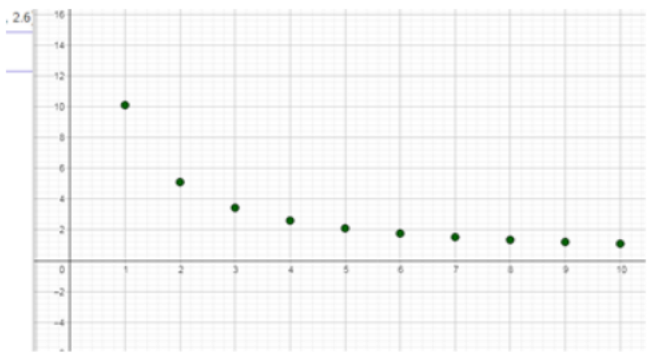


Tabela:

1	10,1
2	5,1
3	3,433333
4	2,6
5	2,1
6	1,766667
7	1,528571
8	1,35
9	1,211111
10	1,1

Limite e/ou justificação: A sucessão é monótona decrescente e é limitada entre r1= 10.1 e 0.1. Percebe-se pelo algoritmo da divisão

Figura 16 - Resolução do grupo 3 relativa à sucessão r_n

O grupo 1 foi um dos que referiu que o limite da sucessão é mais infinito (Figura 17). Apesar de terem representado corretamente a sucessão s_n, tanto gráfica como numericamente, estes não conseguiram interpretar estas representações da forma mais correta, referindo que o limite da sucessão é mais infinito, talvez confundindo o termo com a ordem da sucessão, associando o "mais infinito" ao facto de podermos ter uma ordem tão grande quanto queiramos na sucessão. Tendo em conta que a conclusão acerca da monotonia e limitada serem apenas conjeturas obtidas a partir do gráfico e/ou da tabela e não provas algébricas rigorosas, o limite da sucessão s_n ser mais infinito também será uma conjetura válida.

$$s_n = \frac{5n^2 - 10n + 2}{2n^2 + 1}$$

Gráfico:

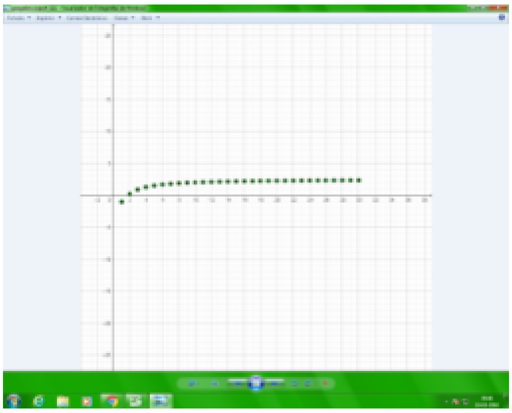


Tabela:

Ordem	Termo
1	-1
2	1,333333
3	1,947368
4	2,181818
5	2,294118
6	2,356164
7	2,393939
8	2,418605
9	2,435583
10	2,447761
11	2,45679
12	2,463668
13	2,469027
14	2,473282
15	2,476718
16	2,479532
17	2,481865
18	2,483821
19	2,485477
20	2,486891
21	2,488109
22	2,489164
23	2,490085
24	2,490893
25	2,491607
26	2,492239
27	2,492803
28	2,493308
29	2,493761
30	2,49417

Limite e/ou justificação:
O limite da sucessão é mais infinito, porque a sucessão é monótona e não é limitada

Figura 17 - Resolução do grupo 1 relativa à sucessão s_n

O grupo 5 justifica o valor do limite através da aproximação da sucessão do valor 3 (Figura 18). Esta afirmação, apesar de correta, não justifica o facto de 3 ser o limite da sucessão ou não.

Limite e/ou justificação:
O limite é 3 porque os termos se aproximam do 3.

Figura 18 - Resolução do grupo 5 relativa à sucessão s_n

Já o grupo 7, apesar de apresentar uma justificação idêntica, referindo a aproximação, identifica corretamente 2,5 como sendo valor do limite da sucessão s_n (Figura 19). Quando questionados acerca do valor, os alunos do grupo 7 referiram oralmente que efetuaram o quociente da divisão de $5n^2 - 10n + 2$ por $2n^2 + 1$.

> Limite e/ou justificação:
>
> O limite da sucessão é 2,5 pois é o valor para o qual a sucessão se dirige.

Figura 19 - Resolução do grupo 7 relativa à sucessão s_n

5.3.3. Limite de uma sucessão divergente

O quadro seguinte (Quadro 12) resume as resoluções dos alunos no que se refere às sucessões divergentes da tarefa 3.

Quadro 12 - Síntese das resoluções da sucessão quadrática da Tarefa 3

Sucessão	Representação Gráfica	Representação Numérica	Valor do Limite	Justificação do valor do limite
$p_n = n^2 - 3n + 5$	2 grupos não representam graficamente a sucessão	2 grupos constroem uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 3 grupos constroem uma tabela com os 30 primeiros termos; 2 grupos não constroem qualquer tabela	4 grupos referem que a sucessão não tem limite; os restantes não responderam	Apenas 3 grupos justificam a sua resposta, referindo que a sucessão era monótona crescente e não majorada (Figura 20)
$u_n = 5 + (-1)^n \frac{n+100}{10n}$	Apenas 3 grupos representam graficamente a sucessão; 5 grupos não representam a sucessão	1 grupo constrói uma tabela com os 10 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 9 primeiros termos; 1 grupo constrói uma tabela com os 30 primeiros termos	3 grupos referem que o limite da sucessão é 5 (Figura 21); os restantes grupos não responderam	1 grupo não justifica a sua resposta; 2 grupos referem que a sucessão se aproxima do limite

Visto esta tarefa ter sido resolvida imediatamente antes das férias da Páscoa, a resolução da mesma não atingiu os objetivos desejados, já que a maioria dos grupos não teve tempo suficiente para analisar todas as sucessões apresentadas, estudando apenas as que foram indicadas como obrigatórias. Este facto justifica a escassez de representações gráficas da sucessão u_n.

No entanto, os grupos que analisaram estas sucessões, mais uma vez, justificam a inexistência de limite através da referência à monotonia da sucessão e ao facto de esta não admitir majorante (Figura 20).

$p_n = n^2 - 3n + 5$

Gráfico:

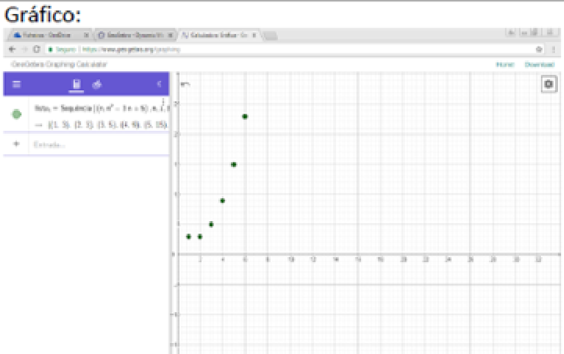


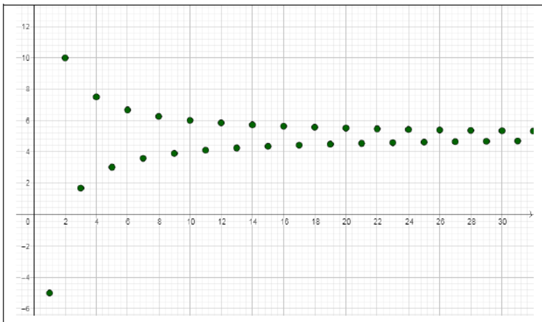
Tabela:

ordem	termo
1	3
2	3
3	5
4	9
5	15
6	23
7	33
8	45
9	59

Limite e/ou justificação:
Não possui limite, pois é uma sucessão monótona crescente que não é majorada.

Figura 20 - Resolução do grupo 7 relativa à sucessão p_n

Apesar de se tratar de uma sucessão divergente, os grupos que analisaram a sucessão u_n consideraram incorretamente que o limite da sucessão era 5 (Figura 21). Esta incorreção talvez se tenha ficado a dever à falta de tempo que dificultou uma análise mais cuidada das características desta sucessão.



	A	B
1	ordem	termo
2	1	0,4
3	2	0,3
4	3	0,133333
5	4	0,15
6	5	0,08
7	6	0,1
8	7	0,057143
9	8	0,075
10	9	0,044444
11	10	0,06

Limite e/ou justificação:
O limite é 5 porque os termos se aproximam de 5.

Figura 21 - Resolução do grupo 5 relativa à sucessão u_n

Apesar do pouco tempo dedicado a esta tarefa, houve evidências de que, ao longo da mesma, os alunos sentiram a necessidade de elaborar tabelas numéricas mais extensas de modo a perceber melhor o limite e mais uma vez basearam as suas justificações em conceitos trabalhados anteriormente, tais como o estudo de sucessões limitadas e monótonas.

5.4. Tarefa 4

Nesta tarefa (Anexo 4), os alunos eram convidados a trabalhar individualmente o conceito de vizinhança. Para tal, teriam de obter o limite de quatro sucessões convergentes bem como a ordem do primeiro termo que pertencia a vizinhanças do valor do limite.

5.4.1. Sucessão a_n

Sendo a_n uma sucessão convergente, as questões referentes a esta sucessão apenas exigiriam aos alunos a sua interpretação, tanto na obtenção do limite, como na determinação dos valores das várias vizinhanças (de raio 1, 0,1 e 0,001) e na ordem dos primeiros termos que pertencem a estas vizinhanças. O quadro seguinte (Quadro 13) sintetiza as resoluções dos alunos relativamente a esses aspetos.

Quadro 13 – Desempenho dos alunos na resolução da tarefa em relação à sucessão a_n

Obtenção do valor do limite	Vizinhança de raio 1		Vizinhança de raio 0,1		Vizinhança de raio 0,001	
	Interpretação	Ordem do primeiro termo na vizinhança	Interpretação	Ordem do primeiro termo na vizinhança	Interpretação	Ordem do primeiro termo na vizinhança
Todos os alunos referem que o limite da sucessão é 5	Todos os alunos interpretam corretamente o intervalo referido	Todos os alunos referem que todos os termos pertencem a esta vizinhança	Todos os alunos interpretam corretamente o intervalo referido	Todos os alunos referem que todos os termos pertencem a esta vizinhança	Todos os alunos interpretam corretamente o intervalo referido	Todos os alunos referem que todos os termos pertencem a esta vizinhança

Podemos observar que todos os alunos indicaram 5 como o limite da sucessão e, após determinarem os intervalos associados às vizinhanças, facilmente referiram que todos os termos desta sucessão pertencem a qualquer uma das vizinhanças dadas (Figura 22).

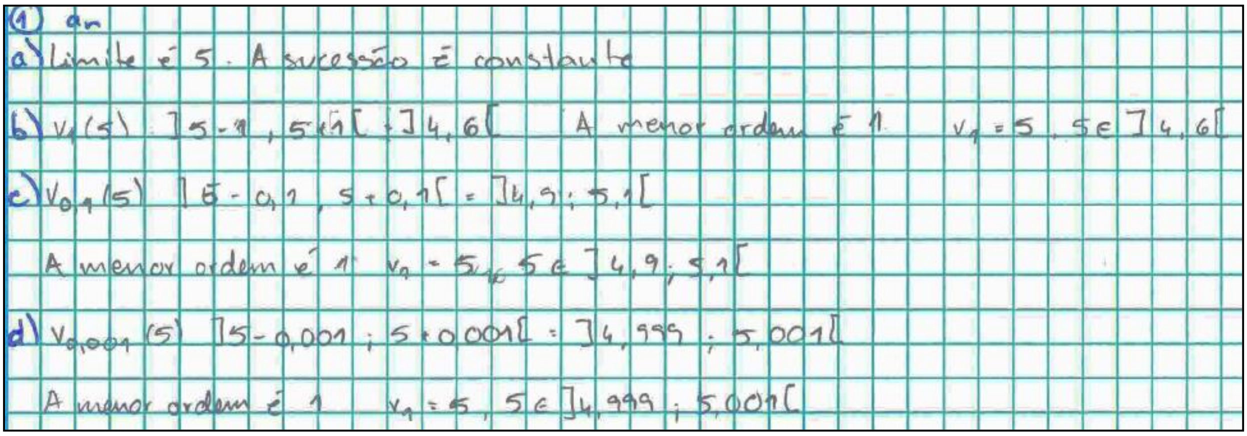


Figura 22 – Resolução do aluno A_{15} de todas as alíneas referente à sucessão a_n

5.4.2. Sucessão b_n

Passando para a sucessão b_n, sucessão obtida a partir da razão entre duas progressões aritméticas, os alunos teriam de obter o valor do limite e, após interpretarem os intervalos referentes a cada uma das vizinhanças, teriam de resolver inequações de modo a determinar o valor pedido. O quadro seguinte (Quadro 14) sintetiza os resultados relativamente a estes aspetos.

Quadro 14 – Desempenho dos alunos na resolução da tarefa em relação à sucessão b_n

Obtenção do valor do limite	Vizinhança de raio 1		Vizinhança de raio 0,1		Vizinhança de raio 0,001	
	Interpretação	Ordem do primeiro termo na vizinhança	Interpretação	Ordem do primeiro termo na vizinhança	Interpretação	Ordem do primeiro termo na vizinhança
Todos os alunos referem que o limite da sucessão é 3	Todos os alunos interpretam corretamente o intervalo referido	Todos os alunos referem que o 2.º termo é o 1.º a pertencer à vizinhança: 7 alunos determinam-no através do cálculo de termos consecutivos; 11 alunos resolvem inequações	Todos os alunos interpretam corretamente o intervalo referido	Todos os alunos referem que o 20.º termo é o 1.º a pertencer à vizinhança: 6 alunos determinam-no através do cálculo de termos consecutivos; 12 alunos resolvem inequações	16 alunos interpretam corretamente o intervalo referido; 2 alunos interpretam erroneamente o intervalo	Todos os alunos referem que o 20.º termo é o 1.º a pertencer à vizinhança: 4 alunos determinam-no através do cálculo de termos consecutivos; 14 alunos resolvem inequações

Dos 11 alunos que resolveram a questão utilizando inequações, quatro alunos resolveram pares de inequações do tipo $b_n < L + \delta$ e $b_n > L - \delta$, enquanto os restantes resolveram apenas uma inequação do tipo $|b_n - L| < \delta$. Estes quatro alunos interpretaram o enunciado e construíram inequações que permitissem responder às questões da tarefa. Por exemplo, para determinar a menor ordem a partir da qual os termos pertencem a $V_1(3)$, os alunos resolveram as inequações $b_n < 4$ e $b_n > 2$ como podemos ver na Figura 23.

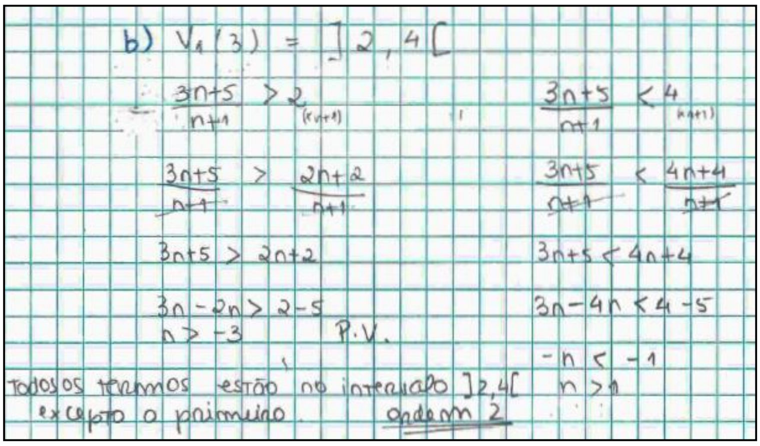


Figura 23 – Resolução do aluno A_{16} da alínea b) referente à sucessão b_n

Os restantes alunos que resolveram a questão através do uso de inequações utilizaram a simbologia presente na definição de limite de sucessão, como podemos ver na Figura 24.

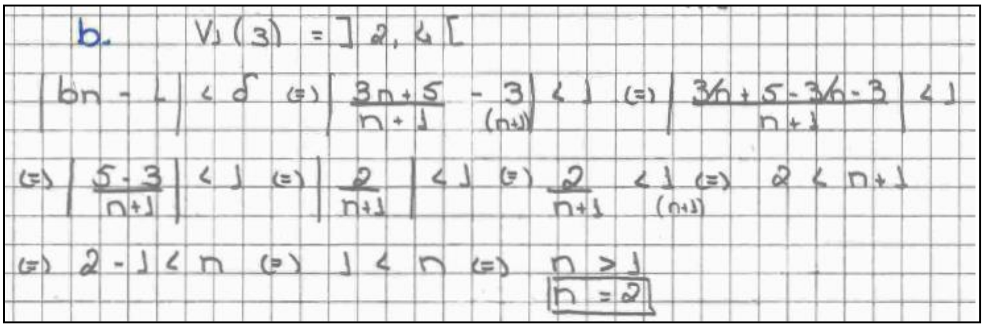


Figura 24 – Resolução do aluno A_5 da alínea b) referente à sucessão b_n

Em relação aos alunos que resolveram a questão numericamente, estes construíram uma tabela, representaram duas colunas com a ordem e o termo respetivo e, em seguida, obtiveram o valor pedido através da leitura direta da tabela (Figura 25).

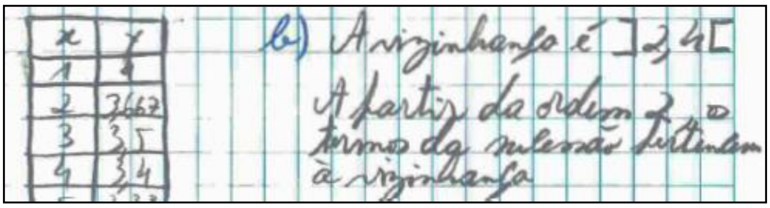


Figura 25 – Resolução do aluno A_{19} da alínea b) referente à sucessão b_n

Os alunos que determinaram o intervalo errado, apesar do erro cometido, resolveram a questão numericamente, obtendo o valor pedido através da leitura direta da tabela (Figura 26).

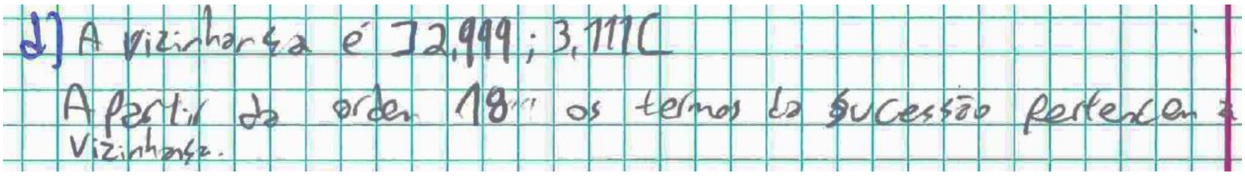

d) A vizinhança é]2,999 ; 3,111[
A partir da ordem 18ª os termos da sucessão pertencem à vizinhança.

Figura 26 – Resolução do aluno A_{19} da alínea c) referente à sucessão b_n

5.4.3. Sucessão c_n

Passando para a sucessão c_n, sucessão infinitesimal de termos alternados, os alunos teriam de obter o valor do limite e, mais uma vez, após interpretarem os intervalos referentes a cada uma das vizinhanças, teriam de resolver inequações de modo a determinar o valor pedido. O quadro seguinte (Quadro 15) esquematiza as resoluções dos alunos.

Quadro 15 – Desempenho dos alunos na resolução da tarefa em relação à sucessão c_n

Obtenção do valor do limite	Vizinhança de raio 1		Vizinhança de raio 0,1		Vizinhança de raio 0,001	
	Interpretação	Ordem do primeiro termo na vizinhança	Interpretação	Ordem do primeiro termo na vizinhança	Interpretação	Ordem do primeiro termo na vizinhança
Todos os alunos referem que o limite da sucessão é 0	15 alunos interpretam corretamente o intervalo referido; 3 alunos não referem o intervalo	Todos os alunos referem que o 251.º termo é o 1.º a pertencer à vizinhança: 5 alunos determinam-no através do cálculo de termos consecutivos; 13 alunos resolvem inequações	13 alunos interpretam corretamente o intervalo referido 2 alunos interpretam mal o intervalo, 3 alunos não referem o intervalo	16 alunos referem que o 2501.º termo é o 1.º a pertencer à vizinhança: 2 alunos referem outra ordem; 5 alunos determinam-no através do cálculo de termos consecutivos; 13 alunos resolvem inequações	13 alunos interpretam corretamente o intervalo referido; 2 alunos interpretam mal o intervalo; 3 alunos não referem o intervalo	16 alunos referem que o 250 001.º termo é o 1.º a pertencer à vizinhança: 2 alunos referem outra ordem; 5 alunos determinam-no através do cálculo de termos consecutivos; 13 alunos resolvem inequações

De notar que apesar de três alunos não terem indicado os intervalos a que se referem as vizinhanças, estes resolveram inequações do tipo $|c_n - L| < \delta$, estando assim escusados de fazer a identificação do intervalo a que se refere a vizinhança, como podemos ver na Figura 27.

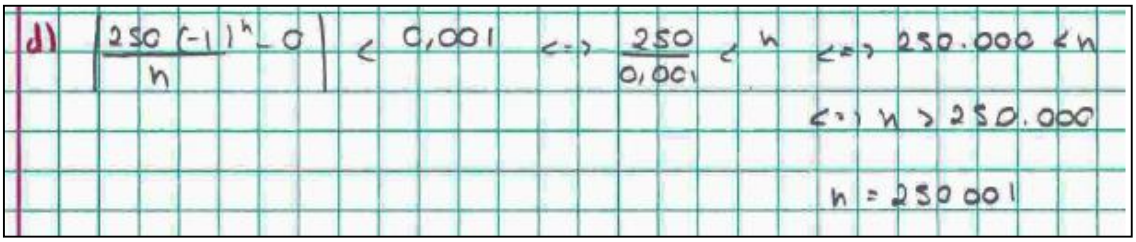


Figura 27 – Resolução do aluno A_1 da alínea c) referente à sucessão c_n

Nesta sucessão, os alunos que, na sucessão anterior, descobriram as ordens utilizando pares de inequações sem módulos, no estudo desta sucessão, abandonaram este tipo de estratégia e começaram a resolver inequações com módulos. Quando questionados, referiram que o processo é idêntico, mas mais rápido, visto terem de resolver só metade das inequações.

5.4.4. Sucessão d_n

Apesar da expressão de d_n ser semelhante à de b_n, o estudo desta nova sucessão apresenta um maior grau de complexidade graças ao facto de o seu limite ser muito próximo do valor 0. Tal situação tinha já levado, na tarefa 3, a que os alunos catalogassem a sucessão em estudo como infinitésimo.

Se os alunos determinassem corretamente o valor do limite, então o estudo desta sucessão seria idêntico ao estudo efetuado para a sucessão b_n. Se os alunos pensassem tratar-se de um infinitésimo, que era o esperado, então seria impossível para eles determinar a ordem a partir da qual os termos se encontram em $V_{0,001}(0)$.

O quadro seguinte (Quadro 16) sistematiza as resoluções dos alunos.

Quadro 16 – Desempenho dos alunos na resolução da tarefa em relação à sucessão d_n

Obtenção do valor do limite	Vizinhança de raio 1		Vizinhança de raio 0,1		Vizinhança de raio 0,001	
	Interpretação	**Ordem do primeiro termo na vizinhança**	**Interpretação**	**Ordem do primeiro termo na vizinhança**	**Interpretação**	**Ordem do primeiro termo na vizinhança**
7 alunos referem que o limite da sucessão é 0; 11 alunos referem que o limite da sucessão é 0,1.	15 alunos interpretam corretamente o intervalo referido de acordo com o limite obtido; 3 alunos não referem o intervalo	17 alunos referem que todos os termos pertencem à vizinhança: 4 alunos determinam-no através do cálculo de termos consecutivos 13 alunos resolvem inequações. 1 aluno não responde	15 alunos interpretam corretamente o intervalo referido de acordo com o limite obtido; 2 alunos não referem o intervalo 1 aluno não responde	16 alunos referem que todos os termos pertencem à vizinhança: 4 alunos determinam-no através do cálculo de termos consecutivos 12 alunos resolvem inequações. 2 alunos não respondem	14 alunos interpretam corretamente o intervalo referido de acordo com o limite obtido; 2 alunos não referem o intervalo 2 alunos não respondem	13 alunos referem que o 90.º termo é o primeiro a pertencer à vizinhança, sendo que 4 determinam-no através do cálculo de termos consecutivos e 8 resolvem inequações e 5 alunos não respondem

No decorrer da resolução da tarefa, os alunos que determinaram incorretamente zero como limite da sucessão d_n, depararam-se com uma condição impossível ao determinar o primeiro termo a pertencer à vizinhança $V_{0,1}(0)$, tal como vemos na Figura 28.

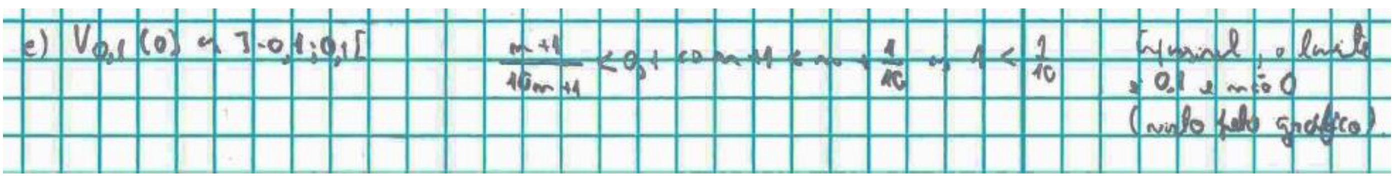


Figura 28 – Primeira resolução do aluno A_{11} da alínea c) referente à sucessão d_n

Após esta resolução e sabendo que a inequação terá de ser possível, seis dos sete alunos cujo limite foi determinado de forma errada alteraram o valor do limite e refizeram o cálculo do termo pedido, tal como vemos na Figura 29.

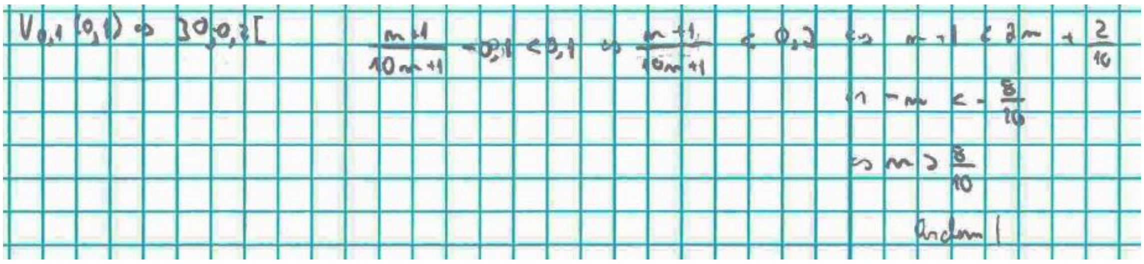


Figura 29 – Segunda resolução do aluno A_{11} da alínea c) referente à sucessão d_n

O aluno que identificou incorretamente zero como limite da sucessão e posteriormente não mudou a sua resposta continuou a sua resolução mas não interpretou as condições obtidas, tanto na alínea referente à vizinhança $V_{0,1}(0)$, como na alínea referente à vizinhança $V_{0,001}(0)$, como podemos ver na Figura 30.

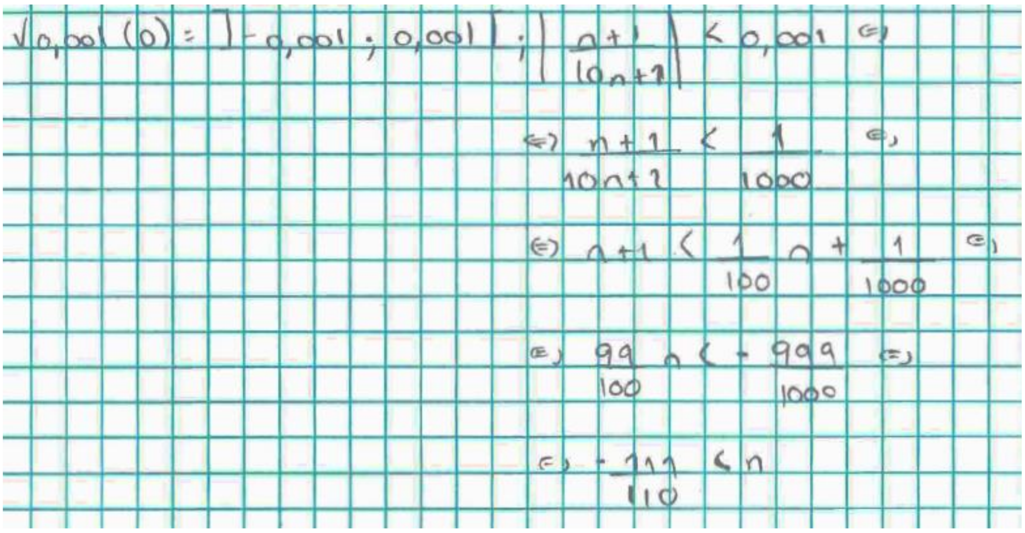


Figura 30 – Resolução do aluno A_{14} da alínea d) referente à sucessão d_n

Não respondendo à questão, o aluno A_{14} não se apercebeu da impossibilidade que a condição obtida significaria.

Em síntese, na generalidade, os alunos conseguiram interpretar com alguma facilidade a noção de vizinhança e, adotando várias estratégias, dependendo das sucessões, tais como, cálculo numérico de termos ou resolução de condições, conseguiram determinar a ordem pedida em cada um dos casos. A conjetura errada do valor do limite da sucessão d_n, obtida a partir da observação do gráfico e/ou de tabela numérica, foi invalidada graças à obtenção de uma condição impossível.

5.5. Questionário

5.5.1. Questão 1 (Q1)

Na primeira questão do questionário, era pedido aos alunos que referissem, por palavras suas, o que entendiam por limite de uma sucessão. Por esta ser uma questão de resposta aberta, obtiveram-se uma variedade de respostas. Em função dessa variedade, foi necessário agrupar as respostas segundo o sentido principal que cada uma parecia atribuir à noção de limite de uma sucessão. A tabela seguinte (Tabela 1) apresenta os resultados de acordo com a categorização adotada.

Tabela 1 - Respostas à tentativa de definir limite de uma sucessão

	Número de alunos
Ser limitada	2
Um dos extremos de uma sucessão limitada	8
Valor para o qual a sucessão se aproxima sem a atingir	6
Valor para o qual a sucessão se aproxima, independentemente de a atingir ou não	2

A tabela anterior evidencia que dez alunos da turma atribuíram uma equivalência entre uma sucessão ter limite com o facto de ser limitada, sendo que dois alunos confundem a noção de limite com a noção de sucessão limitada. Os restantes alunos referem o limite como sendo o valor para o qual a sucessão tende a aproximar-se, havendo dois que referem que a sucessão pode atingir o valor do limite e seis referem que o valor do limite não é atingido.

Reparamos que para dois alunos, o conceito limite confunde-se com o conceito limitada. O limite de uma sucessão é determinar entre que valores a sucessão varia, perceber o intervalo onde os termos da sucessão se encontram (Figura 31).

Limite da sucessão é o intervalo onde a sucessão existe ou tem "ação", ou seja limite serve para especificar onde a sucessão é possível.

Figura 31 - Resposta do aluno A_8 à Q_1 do questionário

Quanto à ideia de o limite ser um dos extremos de uma sucessão limitada, os alunos associaram a definição de limite de uma sucessão apenas a sucessões monótonas e limitadas, tal como faz transparecer a resposta na Figura 32. Nesta definição, apesar de o aluno fazer confusão entre máximo/mínimo e supremo/ínfimo, este refere uma definição que só será válida em sucessões que sejam monótonas e limitadas.

Valor máximo ou mínimo que uma sucessão pode atingir quando é crescente ou decrescente, respetivamente

Figura 32 - Resposta do aluno A_{13} à Q_1 do questionário

Os restantes alunos apresentam definições baseadas em aproximações ao valor do limite, sendo que seis alunos referem que o limite não será atingido (Figura 33).

O limite é para onde uma sucessão tem tendência a progredir, mas nunca toma esse valor

Figura 33 - Resposta do aluno A_{16} à Q_1 do questionário

Dos dois alunos que referiram que o valor do limite pode ser um termo da sucessão, um aluno referiu que esta característica se trata de uma exceção (Figura 34).

Eu acho que o limite de uma sucessão é o valor para qual os termos se aproximam, no entanto há exceções, pois o limite pode ser alcançado ou não...

Figura 34 - Resposta do aluno A_{10} à Q_1 do questionário

5.5.2. Questão 2 (Q2)

Nesta questão, de valor lógico, era afirmado que o limite de uma sucessão é um valor inalcançado. O gráfico seguinte apresenta os resultados obtidos.

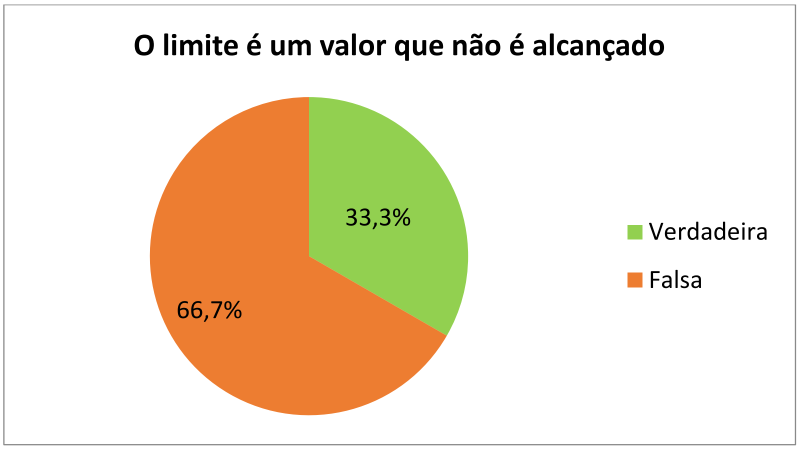


Figura 35 - Respostas dos alunos à Q_2 do teste

Podemos reparar que 33,3 % da turma considera que o limite de uma sucessão é um valor que não é alcançado, ou seja, que não faz parte dos termos da sucessão. Apesar das tarefas anteriores contemplarem exemplos de sucessões que invalidam esta afirmação, estes alunos continuam a afirmar que o limite de uma sucessão não pode ser um termo da sucessão.

5.5.3. Questão 3 (Q3)

Nesta questão, também de valor lógico, era afirmado que o limite é o último termo de uma sequência infinita. No gráfico seguinte podemos observar os resultados obtidos.

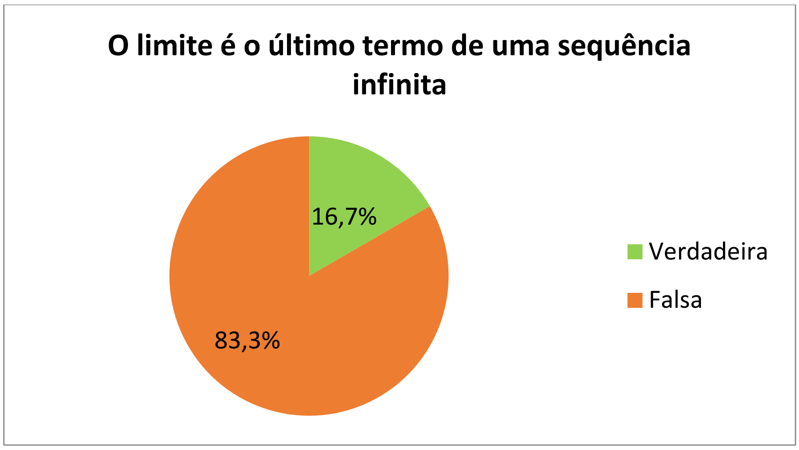


Figura 36 - Respostas dos alunos à Q_3 do teste

Verifica-se que 16,7 % da turma ainda considera que o limite de uma sucessão é último termo da mesma, sendo que esta não tem fim. A resposta destes três alunos decorrerá de uma fraca noção do infinito, não o relacionando com o conceito de sucessão.

5.5.4. Questão 4 (Q4)

Nesta questão, os alunos deveriam indicar o valor lógico da afirmação "à medida que n aumenta, a sucessão aproxima-se mais e mais do seu limite". O gráfico seguinte apresenta os resultados obtidos.

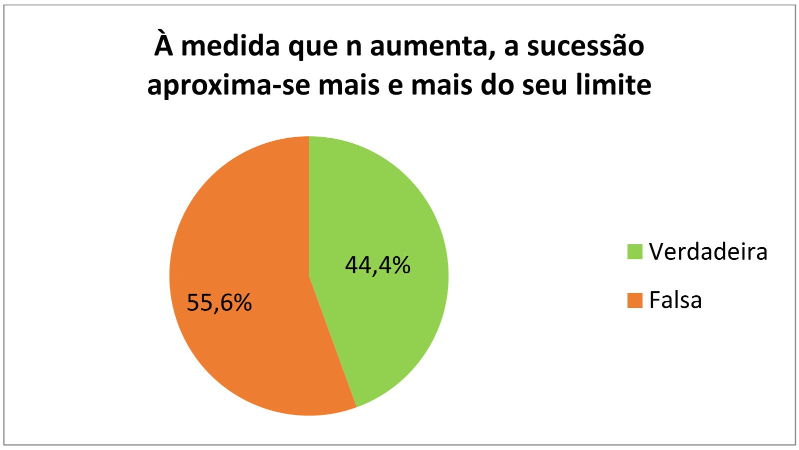


Figura 37 - Respostas dos alunos à Q_4 do teste

Observa-se que 44,4 % da turma considera que à medida que *n* aumenta, a sucessão aproxima-se mais e mais do seu limite. Sendo esta uma das afirmações mais complicadas de analisar, devido à dificuldade de se imaginar sucessões não monótonas, é natural os alunos terem dúvidas no valor lógico da mesma. Ainda assim, mais de 50 % da turma conseguiu responder corretamente à questão.

5.5.5. Questão 5 (Q5)

Nesta questão, de valor lógico, era afirmado que "à medida que *n* aumenta, a diferença entre os termos da sucessão e o valor do limite aproxima-se de zero". No gráfico seguinte podemos observar os resultados obtidos.

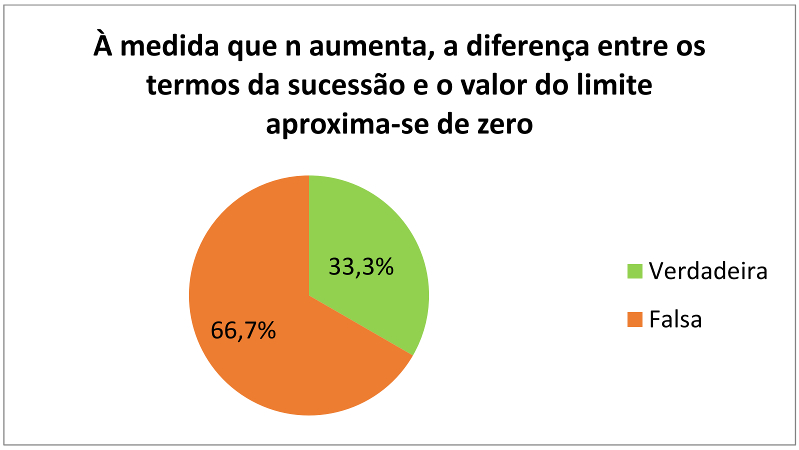


Figura 38 - Gráfico da Q_5

Verifica-se que um terço da turma considera que à medida que n aumenta, a diferença entre os termos da sucessão e o valor do limite aproxima-se de zero. Sendo esta outra das afirmações mais complicadas de analisar, pela mesma razão que apontei relativamente à anterior, só 33% da turma respondeu incorretamente à questão.

5.5.6. *Questão 6 (Q6)*

Nesta questão os alunos eram chamados a indicar o valor lógico da afirmação: “o limite de uma sucessão pode ser um dos termos da sucessão”. Os resultados encontram-se no gráfico seguinte.

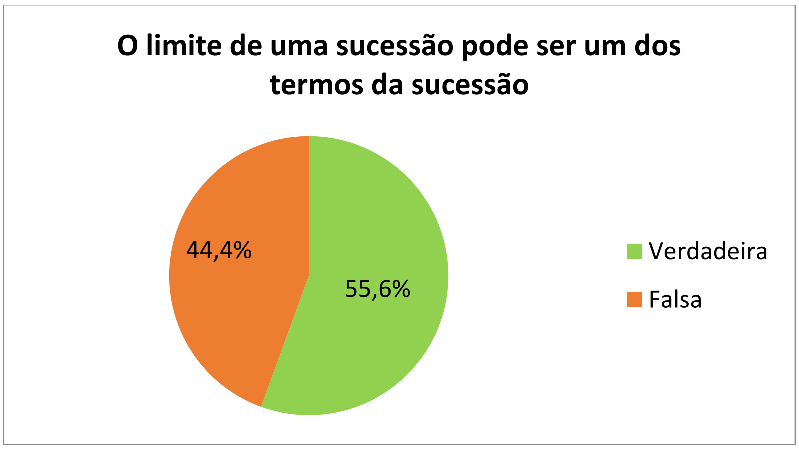


Figura 39 - Gráfico da Q_6

Podemos reparar que 55,6 % da turma considera que o limite de uma sucessão pode ser um dos termos da sucessão. Apesar de, na segunda questão, 66,7% dos alunos considerar corretamente que o limite é um valor que pode ser alcançado, neste caso, há menos dois alunos a responder corretamente a esta questão. Esta diferença talvez seja derivada de um fraco *Conceito Imagem* da noção de sucessão.

5.5.7. *Questão 7 (Q7)*

Na última questão deste questionário era pedido aos alunos que se pronunciassem sobre a veracidade da seguinte afirmação: “o limite de uma sucessão é sempre um dos termos da sucessão”. O gráfico seguinte apresenta os resultados obtidos.

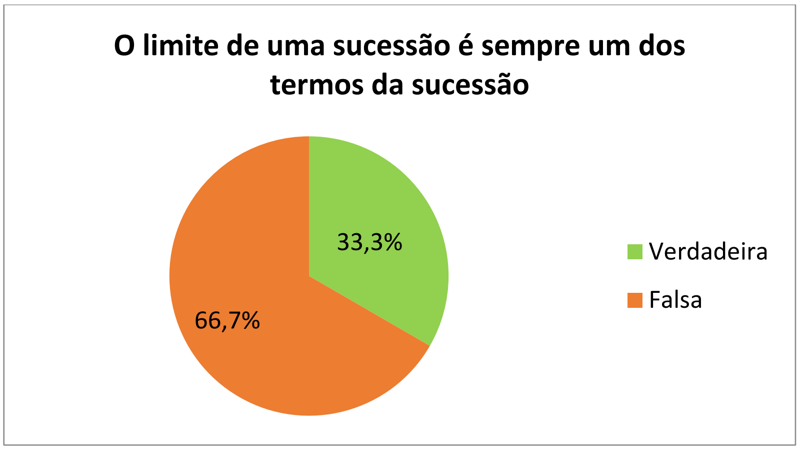


Figura 40 - Gráfico da Q_7

Podemos reparar que 33,3 % da turma considera, incorretamente, que o limite de uma sucessão é sempre um dos termos da sucessão. Para além dos três alunos que consideram que o limite de uma sucessão infinita é o último termo da sucessão (na Q3), também três alunos referem que o limite de uma sucessão é sempre um dos termos da sucessão.

5.6. Questões sobre a Definição de Limite presentes no Teste de Avaliação

Na primeira questão do teste de avaliação, os alunos eram convidados a utilizar a definição de limite para provar a convergência de uma sucessão (Figura 41). Para tal, estes teriam de resolver uma inequação com duas variáveis. Na segunda questão, os alunos teriam de interpretar a noção de vizinhança e, para tal, poderiam recorrer à alínea anterior para responder à questão ou resolver uma inequação para obter o valor pedido.

1. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \dfrac{3n-1}{4n+1}$.

1.1. Mostre, usando a definição de limite de uma sucessão, que $\lim u_n = \dfrac{3}{4}$.

1.2. Determine quantos termos de (u_n) não pertencem a $V_{0,001}\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

Figura 41- Questões do Teste sobre a definição de limite

Os gráficos seguintes traduzem o desempenho dos alunos nas duas questões, em função da correção das respostas que apresentaram.

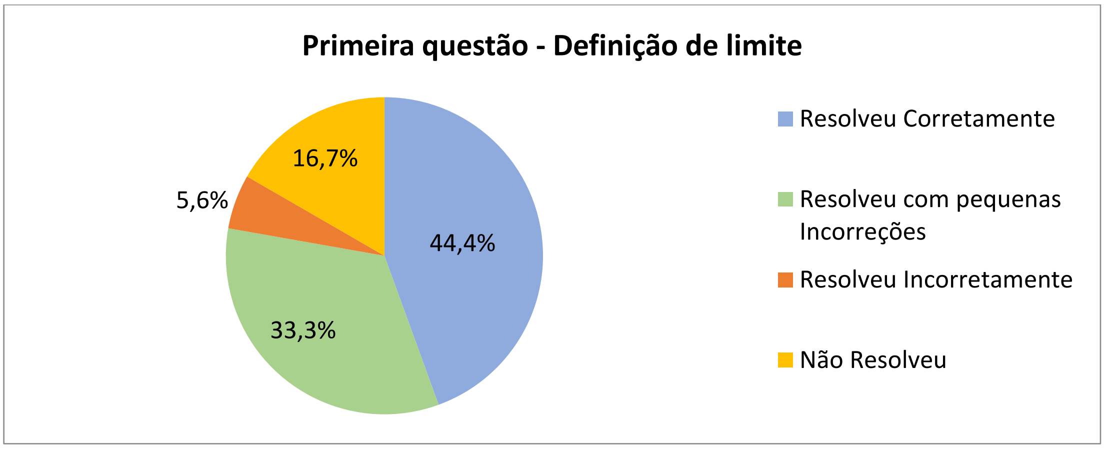


Figura 42 – Desempenho dos alunos na questão do teste relativa à definição de limite

Podemos observar que mais de 75 % dos alunos em estudo conseguiu resolver esta questão, ainda que cerca de 33% tenham apresentado algumas pequenas incorreções na sua resolução (Figura 42). Estas incorreções estavam relacionadas com rigor na escrita matemática, tais como esquecimento de símbolos de equivalência ou ausência de resposta final à questão, embora tendo-a resolvido.

Apenas quatro dos 18 alunos tiveram dificuldade na resolução do que era pedido, não respondendo ou fazendo-o de forma incorreta. Este facto indicia que maior parte dos alunos da turma conseguiu apropriar-se da definição formal deste conceito e mobilizá-la na resolução de exercícios.

Na segunda questão, os alunos tiveram um desempenho muito similar à primeira, notando-se que houve uma ligeira melhoria no número de alunos que resolveu a questão sem qualquer erro (Figura 43).

Figura 43 - Desempenho dos alunos na questão do teste relativa às vizinhanças

Reparamos que 11,1% da turma, o que equivale a dois alunos, resolveu incorretamente a questão, um aluno não resolveu a questão e os restantes 15 alunos responderam corretamente, salvo alguns erros simbólicos associados à escrita matemática. Podemos, ainda, observar que, apesar de, na questão anterior, haver três alunos que não respondem à questão, nesta questão, apenas dois alunos não respondem, o que espelha uma melhor interpretação do conceito de vizinhança, comparada com a definição de limite, ainda que muito ligeira.

6. Considerações Finais

Neste capítulo, procura-se responder às questões do estudo inicialmente apresentadas, indicando as conclusões mais relevantes à luz dos resultados analisados no capítulo anterior, em função das questões de investigação. No segundo ponto, é feita uma pequena reflexão onde são focadas algumas limitações deste trabalho e, por fim, apresentam-se o que podem ser sugestões para um trabalho mais aprofundado e prolongado no tempo.

6.1. Conclusões do estudo

O principal objetivo deste estudo consistia em compreender como alunos do 11.º ano podem mobilizar os seus conhecimentos matemáticos e intuitivos de convergência para construir uma definição formal de limite de uma sucessão. As questões colocadas inicialmente são as seguintes:

1) Que conhecimentos matemáticos são utilizados pelos alunos no estudo intuitivo do limite de uma sucessão?
2) De que forma o recurso a representações numéricas e gráficas contribui para a aprendizagem de conceitos ligados ao limite de sucessões?
3) Quais as principais dificuldades manifestadas pelos alunos relativamente à noção de limite?

Em relação à primeira questão, verificou-se que os alunos recorreram, maioritariamente, a conhecimentos previamente adquiridos no capítulo das sucessões de modo a conseguir responder às questões propostas nas tarefas. Verifica-se que as justificações apresentadas pelos alunos quase sempre referem características das sucessões relacionadas com a monotonia de uma sucessão e com a obtenção, no caso de existirem, de supremos ou ínfimos das sucessões. Em caso muito particulares de expressões, tais como expressões quadráticas ou do primeiro grau, alguns alunos utilizaram conhecimentos relacionados com o estudo de funções afins ou funções quadráticas. No caso de sucessões não monótonas, as justificações dos alunos relativas ao limite, foram algo parcas, ou seja, para além de referirem tratar-se ou não de sucessões limitadas, estes não transmitiram de uma forma explicita outro tipo de conhecimento matemático.

No que concerne à segunda questão, tanto as representações numéricas como as representações gráficas serviram de base para as justificações apresentadas pelos alunos. Nas tarefas propostas, os alunos serviam-se do gráfico para concluir acerca da monotonia das sucessões dadas e, no caso de sucessões convergentes, para obter um valor que pudesse ser o limite pretendido. Aquando do estudo do limite das sucessões presentes nas tarefas, não foi exigido que os alunos estudassem analiticamente a sua monotonia, pelo que estes serviram-se das representações gráficas para observar se as sucessões eram monótonas. O valor do limite das sucessões convergentes também foi obtido, pelos alunos, a partir da observação dos gráficos. Através do comportamento dos gráficos, os alunos conjeturaram sobre o limite das diferentes sucessões que depois corroboravam ou não com as representações numéricas. No entanto, estas últimas revelaram-se pouco relevantes na obtenção dos limites de algumas sucessões com expressões do termo geral mais simples. No entanto, no caso de sucessões com expressões algébricas mais elaboradas, que requeriam uma maior análise, alguns alunos representaram numericamente um maior número de termos e assim conseguiram justificar melhor o limite obtido.

Em relação à terceira questão do estudo, inicialmente, os alunos confundiram a noção de limite de uma sucessão com a noção de sucessão limitada, pelo que alguns preocuparam-se com a obtenção de majorantes e minorantes da sucessão em vez de procurarem obter o valor do seu limite. Esta dificuldade foi ultrapassada com o auxílio de alguns exemplos fornecidos pelo professor. Outra dificuldade diagnosticada prende-se com as justificações dos alunos referentes à obtenção do valor dos limites de sucessões, nas tarefas 1, 2 e 3. Ao longo das três primeiras tarefas observou-se um decréscimo no cuidado das justificações produzidas pelos alunos e, por vezes, principalmente nas sucessões mais complexas, uma ausência de justificação. Penso que esta dificuldade não foi ultrapassada, ao longo da unidade de ensino, e que se deve principalmente à extensão das tarefas. Este é, sem dúvida, um aspeto a melhorar em futuras aplicações desta sequência de tarefas, principalmente porque considero que o aluno deve ser o principal agente da sua aprendizagem e que se conseguir tirar conclusões de uma forma mais autónoma, a sua aprendizagem melhora significativamente. Apesar de reconhecer que existe uma grande diferença entre dominar um conceito e usar esse conceito do ponto de vista operacional, tanto na tarefa 4 como nas questões do teste, a maioria dos alunos não apresentou grandes dificuldades na resolução dos exercícios propostos. A noção de vizinhança, um dos elementos presentes na definição formal de limite de uma sucessão, foi, na maior parte das vezes, interpretada corretamente por parte dos alunos, excetuando alguns erros pontuais, talvez por distração.

Na utilização do computador e do *software* computacional, os alunos sentiram algumas dificuldades iniciais, talvez devido ao facto de estes estarem menos familiarizados com estas ferramentas. No entanto, passando esse período inicial de adaptação, as dificuldades desvaneceram e o foco dos alunos foi direcionado unicamente para as tarefas propostas.

Tal como referido no capítulo 2 e observado com esta turma, as maiores dificuldades associadas à noção de limite prendem-se com os *Conceitos Imagem* que os alunos constroem. De facto, verifica-se que existem algumas conceções erróneas, muitas vezes relacionadas com o significado que os alunos foram construindo de alguns termos. A conceção mais presente nos discursos dos alunos desta turma relativamente a limite está relacionada com a palavra "convergência". A expressão "converge para" é frequentemente tomada como sinónimo de "aproxima-se de". Também Oehrtman (2008) referiu que esta conceção é a mais comum entre os alunos. Associadas a esta conceção, foram também diagnosticadas outras duas conceções erróneas que advêm da ideia de aproximação: a conceção de que uma sucessão constante não tem limite e a conceção de que o limite é um valor que não é alcançado. Se o aluno desenvolveu um *Conceito Imagem* de limite de uma sucessão que é baseado na aproximação infinita a um valor, então ao pensar que numa aproximação infinita nunca se atinge o limite e que uma sucessão constante não se aproxima de nenhum valor, julgará que o seu raciocínio é válido e correto.

Ao ponderar sobre estas conceções dos alunos, há que ter em conta que o conceito de sucessão começa a ser abordado relativamente cedo na disciplina de matemática. Desde o primeiro ciclo que os alunos são convidados a identificar regularidades em sequências numéricas, encontrar termos em falta e determinar termos e, normalmente, estas sucessões apresentadas aos alunos desde tenra idade são monótonas. O conceito de sucessão vai assim sendo construído em íntima relação com a noção de monotonia, pelo que, quando se desafia um aluno a pensar numa sucessão numérica é natural que este pense numa sucessão monótona. Logo, de uma forma natural, confunde as palavras "convergência com "aproximação".

Estas conceções erróneas que também se encontram presentes no questionário que os alunos da turma responderam, corroboram os resultados de outros estudos (Fernandez, 2004; Jacobs, 2002; Oehrtman, 2008; Oehrtman et al., 2014) e, tal como Oehrtman refere, é esperado que estas conceções emerjam e que, por isso, precisam de ser clarificadas nesta etapa da aprendizagem.

Nesse sentido, a unidade de ensino inspirou-se no trabalho de Roh (2010), em particular na atividade denominada de ε-strip. Segundo a autora, esta atividade não foi conceptualizada para ajudar a determinar o valor de limite de uma sucessão nem para memorizar a definição de limite, mas sim, justamente, para ajudar a visualizar o valor do limite e assim apoiar os alunos a construir um *Conceito Imagem* mais próximo do *Conceito Definição*. A aproximação entre as representações simbólica, gráfica e numérica (Tall, 1993) permite uma maior convergência em relação ao *Conceito Definição*.

6.2. Reflexão final

Ao ponderar sobre este trabalho de projeto, e a unidade de ensino que foi planeada e implementada, um dos aspetos que considero bastante positivo é a possibilidade de poder atribuir aos alunos um papel mais ativo e mais relevante no processo ensino-aprendizagem. De acordo com Tall e Vinner (1981), o *Conceito Imagem* que os alunos evidenciam ter é o produto das suas experiências prévias. Como tal, espero que esta experiência vivida pelos alunos os ajude a desenvolver o conceito trabalhado e que os *Conceitos Imagem* que foram construindo convirjam para um *Conceito Definição* correto.

Controlar o tempo é algo que todo o ser humano gostaria de conseguir e que, infelizmente, não consegue. Da forma como o Programa de Matemática A (MEC, 2013) está pensado, espera-se que um aluno assimile este conceito num espaço de tempo que me parece manifestamente demasiado curto para a sua complexidade. Normalmente, o ensino deste tema incide maioritariamente na obtenção algébrica de limites de sucessões, o que a meu ver evidencia uma falta de preocupação no esclarecimento da noção de limite pelos alunos.

Sendo o fator tempo algo que não parece ser remediável no presente, penso que um dos aspetos a corrigir na minha unidade de ensino será a quantidade de sucessões que são propostas aos alunos nas tarefas. O número de sucessões para os alunos analisarem deverá ser inferior, principalmente para proporcionar uma análise mais profunda e estimular uma maior reflexão sobre cada uma delas.

Uma das implicações que considero que este trabalho que realizei tem para a minha prática futura está relacionada com a procura de apoiar os alunos na construção de melhores *Conceitos Imagem*. Frequentemente, o professor fica com a ideia de que só porque os alunos conseguem resolver determinado exercício, assimilaram o conceito trabalhado. No entanto, verifica-se uma tendência de os alunos trabalharem diversos conceitos no ensino secundário, como é o caso de sucessão, limite ou derivada, do ponto de vista operacional (Domingos, 2003). No entanto, estes podem apenas mecanizar processos sendo que os *Conceitos Imagem* associados a estes conceitos podem ser pouco adequados. No final da unidade de ensino, não fiquei com a presunção de ter "corrigido" os *Conceitos Imagem* dos meus alunos. Espero sim, que a experiência pela qual passaram os ajude a clarificar e a corrigir futuros *Conceitos Imagem* relacionados com o que foi trabalhado na sala de aula.

Outra implicação deste trabalho é a vontade de fazer um estudo que dê continuidade a este e que permita acompanhar os alunos que participaram neste projeto. Não creio que a participação dos alunos na unidade de ensino tenha sido suficiente para clarificar todas as conceções erróneas que surgiram, ao longo deste estudo, e acredito que todas as experiências relacionadas com este conceito pelas quais os alunos irão passar ajudarão na construção de um melhor *Conceito Imagem*, pelo que seria interessante compreender a evolução do *Conceito Imagem* destes alunos.

Após a elaboração deste projeto, penso compreender melhor o porquê das más conceções da noção de limite. Do questionário efetuado, principalmente da primeira questão do questionário, onde os alunos eram convidados a indicar uma possível definição de limite, podemos observar que a maioria dos alunos, mais uma vez, recorre a regularidades presentes nas sucessões, principalmente aos conceitos de monotonia e de sucessão limitada, para exprimir por palavras suas o *Conceito Imagem* da noção de limite de uma sucessão. Sendo o conjunto de sucessões monótonas (ou monótonas a partir de certa ordem) uma grande fatia dos exemplos presentes nos manuais do 11.º ano de Matemática A, parece-me natural, apesar de errado, que a intuição dos alunos se baseie nestes para construir este novo conceito de limite. Será mais fácil atribuir significado a este conceito de limite se se tratar de sucessões que se comportam da forma que o aluno espera que estas se comportem, ou seja, limite de sucessões monótonas, o que quer dizer que a ideia de aproximação a um valor inalcançável será sempre uma leitura natural. Pelo que, caberá ao professor corrigir estas conceções erróneas, mas que a meu ver, são perfeitamente expectáveis.

Enquanto professor, sinto que a formação é um processo inacabado e interminável e penso que este projeto me ajudou a ser uma mais-valia para os meus alunos, a ter maior consciência das suas dificuldades, das suas conceções erróneas e a proporcionar-lhes momentos de esclarecimento e de enriquecimento. Sob a perspetiva do meu conhecimento matemático, sinto que o meu *Conceito Imagem* de limite de sucessão também amadureceu significativamente.

Referências

Adams, C., Thompson, A., & Hass, J. (2001). *How to ace the rest of Calculus: The streetwise guide, including multi-variable Calculus*. New York, NY: W. H. Freeman.

Aires, L. (2011). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional*. Lisboa: Universidade Aberta.

Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 255-266). Portalegre: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167–192.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior, 5*(3), 281-303.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior*. Tese de doutoramento, Faculdade Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Lisboa.

Flores, A., & Park, J. (2016). Students' guided reinvention of definition of limit of a sequence with interactive technology. *Contemporary Issues in Technology & Teacher Education, 16*(2), 110-126.

Keene, K. A., Hall, W., & Duca, A. (2014). Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 46(4),* 561-574.

Liang, S. (2016). Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator. *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 2*(1), 35-48.

Matos, J. F. (1997). Modelação Matemática: o papel das tecnologias de informação. *Revista Educação e Matemática, 45*, 41-43.

Ministério de Educação (1997). *Matemática – Programas – 10.º, 11.º e 12.º anos*. Lisboa: Ministério de Educação -Departamento de Ensino Secundário.

Ministério da Educação e da Ciência (2014). *Programa de Matemática do Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação e da Ciência.

Monteiro, M.C.S.T. (2008). *A evolução do conceito de limite* (Dissertação de Mestrado). Universidade Portucalense, Portugal. Disponível em http://hdl.handle.net/11328/545.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. (1997). *As novas tecnologias e a educação*. Lisboa: Texto Editora.

Ponte, J. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2014). Formação do professor de Matemática: Perspetivas atuais. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 343-358). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério de Educação. Disponível em http://hdl.handle.net/10451/7105

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M.C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go?. *ZDM–The International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 507–515.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of sequence. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(3), 217–233.

Roh, K. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of the limit of a sequence via the ε-strip activity. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(3), 263–279.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2002a). *Programa de Matemática do Ensino Secundário*. Cursos *Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas.* Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2002b). *Programa de Matemática do Ensino Secundário. Matemática A 11º Ano. Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas.* Lisboa: Ministério da Educação – Departamento do Ensino Secundário.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268–275.

Swinyard, C., & Larsen, S. (2012). What does it mean to understand the formal definition of limit? Insights gained from engaging students in reinvention. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 465–493.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495–511). New York, NY: Macmillan.

Tall, D. (1993). Students' Difficulties in Calculus. In *Proceedings of Working Group 3 on Students Difficulties in Calculus, ICME-7* (pp. 13-28). Québec, Canada. (

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 219-236.

Consulta de sítios

Wikipédia, Zenão de Eleia. Acedido em 18 de agosto, 2018, de https://pt.wikipedia.org/wiki/Zen%C3%A3o_de_Eleia

Anexos

Anexo 1 – Tarefa 1

	Agrupamento de Escolas de XXX **Escola Secundária de XXX** **Ficha de trabalho de Matemática A – 11º ano** **Março de 2018**
	Nomes: **Números:** **Turma: 11.º X**

Com a ajuda do programa de geometria dinâmica e de uma folha de cálculo, verifica se as sucessões seguintes são convergentes (têm limite finito).

Em caso afirmativo, indica o seu limite.

Instruções

- A expressão a colocar no Geogebra é a seguinte: Sequência ((variável, expressão geral) , variável, 1, número máximo da variável)

  Exemplo:

  Se o termo geral da sucessão for $u_n = \frac{3+2n}{n+4}$, dever-se-á colocar na parte algébrica $\text{Sequência}\left(\left(n, \frac{3+2n}{n+4}\right), n, 1, 30\right)$ e aparecerá a representação gráfica dos primeiros 30 termos da sucessão referida.

- Para inserir o gráfico na folha de respostas, podemos ir ao menu principal ≡ e fazer download como png.

$a_n = 5$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$b_n = n - 10$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$c_n = 2^n$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$d_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$e_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$

Gráfico:	Tabela:

Limite e/ou justificação:	

$f_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$g_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$h_n = -2$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

Anexo 2 – Tarefa 2

	Agrupamento de Escolas de XXX **Escola Secundária de XXX** **Ficha de trabalho de Matemática A – 11º ano** **Março de 2018**
	Nomes: **Números:** **Turma: 11.º X**

Com a ajuda do programa de geometria dinâmica e de uma folha de cálculo, verifica se as sucessões seguintes são convergentes (têm limite finito).

Em caso afirmativo, indica o seu limite.

<u>Instruções</u>

- A expressão a colocar no Geogebra é a seguinte: Sequência ((variável, expressão geral) , variável, 1, número máximo da variável)

  Exemplo:

  Se o termo geral da sucessão for $u_n = \frac{3+2n}{n+4}$, dever-se-á colocar na parte algébrica $\text{Sequência}\left(\left(n, \frac{3+2n}{n+4}\right), n, 1, 30\right)$ e aparecerá a representação gráfica dos primeiros 30 termos da sucessão referida.

- Para inserir o gráfico na folha de respostas, podemos ir ao menu principal  e fazer download como png.

$i_n = \frac{1}{n}$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$j_n = \frac{1}{n^2}$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$k_n = -\frac{1}{n^3}$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$l_n = \frac{250}{n}$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$m_n = \frac{250}{2^n}$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

Anexo 3 – Tarefa 3

	Agrupamento de Escolas de XXX **Escola Secundária de XXX** **Ficha de trabalho de Matemática A – 11º ano** **Março de 2018**
	Nomes: **Números:** **Turma: 11.º X**

Com a ajuda do programa de geometria dinâmica e de uma folha de cálculo, verifica se as sucessões seguintes são convergentes (têm limite finito).

Em caso afirmativo, indica o seu limite.

<u>Instruções</u>

- A expressão a colocar no Geogebra é a seguinte: Sequência ((variável, expressão geral) , variável, 1, número máximo da variável)

  Exemplo:

  Se o termo geral da sucessão for $u_n = \dfrac{3+2n}{n+4}$, dever-se-á colocar na parte algébrica $\text{Sequência}\left(\left(n, \dfrac{3+2n}{n+4}\right), n, 1, 30\right)$ e aparecerá a representação gráfica dos primeiros 30 termos da sucessão referida.

- Para inserir o gráfico na folha de respostas, podemos ir ao menu principal  e fazer download como png.

$p_n = n^2 - 3n + 5$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$q_n = 0$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$r_n = \dfrac{n+100}{10n}$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$s_n = \dfrac{5n^2 - 10n + 2}{2n^2 + 1}$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$t_n = \dfrac{250 \times (-1)^n}{n}$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$$u_n = 5 + (-1)^n \frac{n+100}{10n}$$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

$$v_n = 5 + \frac{10 \times (-1)^n}{n}$$

Gráfico:	Tabela:
Limite e/ou justificação:	

Anexo 4 – Tarefa 4

	Agrupamento de Escolas de XXX Escola Secundária de XXX Ficha de trabalho de Matemática A – 11º ano Março de 2018
	Nome: **Número:** **Turma: 11.º X**

1. Considera as seguintes sucessões:

$$a_n = 5 \qquad b_n = \frac{3n+5}{n+1} \qquad c_n = 250 \times \frac{(-1)^n}{n} \qquad d_n = \frac{n+1}{10n+1}$$

Para cada uma das sucessões responde às alíneas seguintes.

a) Qual é o limite da sucessão. Explica como chegaste à resposta.

b) Determina a menor ordem a partir da qual os termos da sucessão pertencem a $V_1(L)$, sendo *L* o limite da sucessão.

c) Determina a menor ordem a partir da qual os termos da sucessão pertencem a $V_{0,1}(L)$, sendo *L* o limite da sucessão.

d) Determina a menor ordem a partir da qual os termos da sucessão pertencem a $V_{0,001}(L)$, sendo *L* o limite da sucessão.

Anexo 5 – Pedido de autorização à Direção do Agrupamento

Exma. Sra. Diretora do Agrupamento de Escolas de XXXX

Eu, Renato Nuno Marques do Espírito Santo Agostinho, professor do grupo 500, na Escola Secundária de XXXX, venho, por este meio, solicitar autorização para concretizar, nesta escola, o Trabalho de Projeto intitulado "A aprendizagem do conceito de limite de uma sucessão: uma experiência no 11.º ano". Este Projeto integra-se no âmbito do Mestrado em Educação, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver, com a orientação da Profª Hélia Oliveira e tem como objetivo compreender como é que os alunos desenvolvem o conceito de limite e qual o contributo que as diferentes abordagens têm nesse mesmo desenvolvimento.

A concretização do Projeto implicará a recolha de dados, na sala de aula, através de meios áudio e/ou vídeo e ocorrerá no 2.º período do presente ano letivo, em momentos em que o tema das sucessões esteja a ser lecionado. De modo a obter informação mais detalhada está prevista também a recolha de alguns trabalhos escritos dos alunos, assim como a realização de questionários e entrevistas com alguns alunos.

Mais declaro que será sempre preservado o anonimato dos alunos e da escola. As imagens e o som resultantes do Projeto não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins, senão para o trabalho académico. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, sendo garantido o cumprimento dos conteúdos programáticos e das indicações metodológicas preconizadas no programa de Matemática A em vigor. Considero que, pelo contrário, a participação dos alunos no estudo, poderá revelar-se uma mais-valia para a sua aprendizagem, pois terão oportunidade para refletir acerca da sua atividade matemática.

Em todo o processo serão salvaguardados os direitos de privacidade e anonimato que assistem aos participantes e à própria escola, enquanto instituição. Os Encarregados de Educação serão informados sobre este estudo, sendo essencial o seu consentimento para possibilitar a participação dos alunos neste projeto.

Colocando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, despeço-me com os melhores cumprimentos, agradecendo, desde já, a sua colaboração.

XXXX, 20 de janeiro de 2018

Pede deferimento

____

(Renato Nuno Marques Agostinho)

Com o conhecimento da Orientadora

____

(Hélia de Oliveira)

Anexo 6 – Pedido de autorização aos Encarregados de Educação

Exmo.(a) Sr.(a) Encarregado(a) de Educação

Eu, Renato Nuno Marques Agostinho, professor de matemática no Agrupamento de Escolas de XXXX, na Escola Secundária de XXXX, venho, por este meio, solicitar autorização para a participação do seu educando no Trabalho de Projeto intitulado "A aprendizagem do conceito de limite de uma sucessão: uma experiência no 11º ano". Este trabalho integra-se no âmbito do Mestrado em Educação, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, que estou a desenvolver e tem como objetivo desenvolver tarefas e estratégias de ensino que contribuam para uma melhor aprendizagem dos alunos no domínio das sucessões.

A concretização do Projeto implicará a recolha de dados, na sala de aula, através de meios áudio e/ou vídeo e ocorrerá no 2.º período do presente ano letivo, em momentos em que o tema das sucessões esteja a ser lecionado. De modo a obter informação mais detalhada está prevista também a recolha de alguns trabalhos escritos dos alunos, assim como a realização de questionários ou entrevistas com alguns dos alunos.

Mais declaro que será preservado o anonimato dos alunos e da escola. As imagens e o som resultantes do Projeto não serão divulgados nem serão utilizados para quaisquer outros fins, senão para o trabalho académico. Deste trabalho não resultará qualquer prejuízo para os alunos, sendo garantido o cumprimento dos conteúdos programáticos e das indicações metodológicas preconizadas no programa de Matemática A em vigor.

Colocando-me ao dispor para quaisquer esclarecimentos adicionais, despeço-me com os melhores cumprimentos, agradecendo, desde já, a sua colaboração.

XXXX, 20 de fevereiro de 2018
O Professor

____
(Renato Agostinho)

(Recortar por aqui) ---

Declaro que concordo que o meu educando__________________________________ , n.º ____, da turma XX, do 11.º ano, da Escola Secundária de XXXX, participe no Trabalho de Projeto intitulado "A aprendizagem do conceito de limite de uma sucessão: uma experiência no 11º ano", desenvolvido pelo professor de matemática Renato Agostinho.

Autorizo/Não autorizo a gravação vídeo do meu educando nas aulas (riscar o que não interessa)

Data: ______________ Assinatura: ________________________

Anexo 7 – Questionário

Limite de uma sucessão

* Required

1. **Com base na sua experiência na tarefa anterior, indique uma possível definição de limite.** *

Indique o valor lógico de cada uma das afirmações seguintes.

2. **O limite é um valor que não é alcançado.** *
   Mark only one oval.
   - Verdadeiro
   - Falso

3. **O limite é o ultimo termo de uma sequência infinita.** *
   Mark only one oval.
   - Verdadeiro
   - Falso

4. **À medida que n aumenta, a sucessão aproxima-se mais e mais do seu limite** *
   Mark only one oval.
   - Verdadeiro
   - Falso

5. **À medida que n aumenta, a diferença entre os termos da sucessão e o valor do limite aproxima-se de zero.** *
   Mark only one oval.
   - Verdadeiro
   - Falso

6. **O limite de uma sucessão pode ser um dos termos da sucessão.** *
   Mark only one oval.
   - Verdadeiro
   - Falso

7. **O limite de uma sucessão é sempre um dos termos da sucessão.** *
   Mark only one oval.
   - Verdadeiro
   - Falso