



THÈSE

En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier

Présentée et soutenue par

Alexis DALMON

Le 12 décembre 2018

**Simulation numérique du ballonnement d'ergol et
modélisation de l'interaction fluides-membrane dans un
réservoir de satellite**

Ecole doctorale : **MEGEP - Mécanique, Energétique, Génie civil, Procédés**

Spécialité : **Dynamique des fluides**

Unité de recherche :

IMFT - Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse

Thèse dirigée par

Sebastien TANGUY

Jury

M. Frédéric GIBOU, Rapporteur
M. Stéphane VINCENT, Rapporteur
M. Alain BERGEON, Examineur
M. Jean MIGNOT, Examineur
Mme Lisl WEYNANS, Examineur
M. Sébastien TANGUY, Directeur de thèse

Simulation numérique du ballottement d'ergol et modélisation de l'interaction fluides-membrane dans un réservoir de satellite

Résumé : Le ballottement dans les réservoirs d'ergols est une des perturbations les plus importantes de la stabilité d'un satellite en orbite. En considérant des manœuvres faiblement inertielles, il n'existe pas de modèle analytique et l'expérimentation nécessite de longues périodes de temps en micro-gravité. Nous nous proposons donc, dans cette thèse, de réaliser des simulations numériques de ce phénomène. L'étude est basée sur le solveur DIVA résolvant les équations de Navier-Stokes diphasiques avec les méthodes level-set et Ghost Fluid. Deux technologies de réservoirs sont à l'étude : les réservoirs classiques, ne contenant que l'ergol liquide et le gaz pressurant, et les réservoirs à membrane, pour lesquels une membrane hyperélastique sépare les deux fluides. Dans le premier cas, une étude paramétrique complète sur les effets du ballottement lors d'une manœuvre de rotation est menée et les différents régimes d'écoulement obtenus sont décrits par rapport aux paramètres d'études. Par la suite, les données de l'expérience FLUIDICS, envoyée à bord de la Station Spatiale Internationale, sont comparées aux résultats numériques et montrent un très bon accord. Par rapport au second cas, un modèle d'interaction fluides-membrane est développé en s'inspirant de travaux sur la déformation de cellules biologiques. Les déformations et contraintes propres à la membrane sont suivies de façon Eulérienne, les efforts exercés par la membrane sur les fluides environnants en sont déduits et intégrés au solveur diphasique. Les résultats obtenus sont validés par comparaison à des cas-tests de la littérature.

Numerical simulation of propellant sloshing and modelling of fluids-membrane interaction in satellite tanks

Abstract : Propellant sloshing in tanks is one of the most important disturbances of satellite stability in orbit. Considering low-inertial manoeuvres, there is no analytical model and experimental facilities require long time period of microgravity conditions. Thus, this PhD thesis aims to predict this phenomenon by numerical simulations. The study is based on the DIVA code which solves the Navier-Stokes equations for two-phase flows with the level-set method and the Ghost Fluid method. Two tank technologies are studied : simple tanks, which only contain the liquid propellant and the gas maintaining the pressure, and diaphragm tanks, for which a hyperelastic membrane separates both fluids. In the first case, a parametric study on the sloshing effects is done considering rotational manoeuvres and the different behaviours observed are described in relation to the study parameters. Thereafter, the data from the FLUIDICS experiment, sent to the International Space Station, are compared to the numerical results and exhibit good agreement. In the second case, a fluids-membrane interaction model inspired from works on the deformation of biological cells is developed. The membrane strains and stresses are computed in an Eulerian way, from which the force exerted by the membrane on the surrounding fluids is deduced and integrated in the two-phase flows solver. The numerical results are validated by comparison with benchmarks from the literature.

Remerciements

Pour leur aide, confiance, sympathie et bien plus encore durant ces trois années, j'aimerais remercier un certain nombre de personnes sans qui cette thèse ne se serait pas aussi bien passée.

Tout d'abord, je veux remercier Sébastien Tanguy pour m'avoir proposé de faire cette thèse. Je veux le remercier pour la grande liberté qu'il m'a laissé et la confiance, que l'on pourrait qualifier d'aveugle pour la deuxième partie de ma thèse, dont il a fait preuve à mon égard.

Je tiens à remercier le CNES pour le cofinancement de ma thèse et plus particulièrement Jean Mignot dont la passion pour les expériences spatiales est contagieuse. Je le remercie de m'avoir permis de participer aux formations proposées par le CNES, de nous avoir intégrés avec Sébastien à l'aventure FLUIDICS en nous encourageant à publier, à communiquer sur le sujet et en nous invitant régulièrement au CADMOS.

Je tiens à remercier Airbus Defense & Space pour le cofinancement de ma thèse et plus spécifiquement Barbara Busset et son équipe avec qui j'ai pu collaborer pendant ces trois années. Parmi ces derniers, je remercie tout particulièrement Rémi Roumigué d'avoir suivi plus en détail les travaux de ma thèse. Je n'oublierai pas nos nombreux débats sur la manière dont une membrane peut bien se comporter en apesanteur ! J'aimerais également remercier Thomas Miquel qui a participé au post-traitement des données de FLUIDICS.

Par la suite, je veux remercier tout particulièrement deux personnes de l'IMFT pour leur aide plus que précieuse. Tout d'abord, Mathieu Lepilliez qui m'a permis de m'intégrer au projet pendant ma première année, m'a appris les rudiments et quelques secrets du code DIVA et m'a aiguillé sur bon nombre de sujets. La deuxième personne que je tiens à remercier est Romain Alis qui, curieux et passionné, a régulièrement sauvé la vie des thésards de la team DIVA ! Je ne serais sans doute pas allé aussi loin dans ma thèse sans les nombreuses discussions que nous avons eu et les idées qui en sont sorties.

Cette thèse s'est déroulée dans une ambiance plus qu'agréable à l'IMFT grâce à de beaux spécimens de co-bureaux : Lucia, Hacene et Clémence notamment. Ensuite, bien sûr, les collègues doctorants/post-doctorants/stagiaires qui ont, pour certains, réalisé l'exploit de me mettre au trail, sont venus découvrir les splendeurs de mon pays d'origine et avec qui j'ai passé beaucoup de très bons moments. Pour ne pas les citer, merci aux gros sacs, au grand hamster d'Alsace, à la team doct'eau de la belle époque, la team DIVA, la team Lidl (dont j'attends toujours le chèque), aux stagiaires de toujours, aux nouveaux mariés et leurs mariachis, et à ceux qui naviguent entre. Bien sur, il n'y a pas que les doctorants qui font tourner le laboratoire (à ce qu'il paraît !), j'aimerais remercier les permanents du groupe Interface(s), grâce à qui j'ai pu donner des TD et TP à l'N7, participer aux débats enflammés des repas du midi et avec qui j'ai pu partir en conférence.

Je remercie l'école doctorale MEGEP pour laquelle j'ai été représentant des doctorants de l'IMFT ainsi que les membres du jury d'avoir accepté d'évaluer ce travail.

Pour finir, j'aimerais remercier Cécile, ma chère et tendre, sans qui mes publications et ma thèse auraient contenu bien plus de fautes et de non-sens. Merci pour sa patience, sa bienveillance à mon égard et pour son soutien indéfectible pendant ses trois années. Je vais ajouter à ces remerciements ma famille, en particulier Femke et Oscar, qui m'ont toujours fait confiance et me soutiennent à chaque étape.

Table des matières

Introduction	11
1 Ballotement d'ergols en micro-gravité	13
1.1 Propulsion spatiale	14
1.1.1 Systèmes liquides de propulsion spatiale	14
1.1.2 Stockage des ergols	15
1.2 Ballotement dans un réservoir classique	19
1.2.1 Modèles analytiques	20
1.2.2 Études expérimentales	20
1.2.3 Modèles numériques	23
1.3 Ballotement dans un réservoir à membrane	24
1.3.1 Modèles analytiques	24
1.3.2 Études expérimentales	25
1.3.3 Modèles numériques	26
1.3.4 Parallèle avec la déformation de cellule biologique	28
Bibliographie	29
2 Modélisation d'écoulements diphasiques dans un domaine irrégulier	31
2.1 Localisation d'une interface entre deux fluides	32
2.1.1 Méthodes Lagrangiennes	32
2.1.2 Méthodes Eulériennes	33
2.1.3 Méthode level-set	34
2.2 Modèle d'écoulement diphasique	36
2.2.1 Equations de Navier-Stokes	36
2.2.2 Méthode de projection	37
2.2.3 Méthode Ghost Fluid	40
2.2.4 Discrétisation des équations	44
2.3 Conditions aux limites dans un domaine irrégulier	48
2.3.1 Position de la frontière immergée	49
2.3.2 Condition aux limites de vitesse	49
2.3.3 Condition aux limites de pression	51
2.3.4 Angle de contact	53
2.4 Conclusion	54
Bibliographie	55

3	Simulation numérique du ballonnement dans un réservoir sphérique	57
3.1	Introduction	59
3.2	Formalism and description of the tank modelling	61
3.2.1	Dimensionless Navier-Stokes equations	61
3.2.2	Description of the tank and the manoeuvres	63
3.2.3	Assumptions of the physical model	64
3.3	Numerical methods	65
3.3.1	Interface tracking method	66
3.3.2	Projection method	67
3.3.3	Numerical methods for the fluid-solid boundary	67
3.4	Comparison with the FLUIDICS experiment data	68
3.4.1	Description of the FLUIDICS experiment	68
3.4.2	Space convergence	68
3.4.3	Study of the force exerted on the tank wall	69
3.4.4	Study of the torque exerted on the tank wall	70
3.5	Evolution of the centre of mass	71
3.5.1	Grid sensitivity study	72
3.5.2	An example of bubble motion	72
3.5.3	Trajectory of the centre of mass	74
3.5.4	Oscillations of the centre of mass of the fluids upon reaching equilibrium state	76
3.5.5	Equilibrium position of the centre of mass	77
3.5.6	Force generated on the tank wall at the equilibrium state	78
3.6	Evolution of the bubble shape	79
3.6.1	Capillary wave	79
3.6.2	First bounce of the bubble	80
3.6.3	Shape of the bubble at the equilibrium state	81
3.7	Summary	83
	Appendix	85
	References	85
4	Comparaison des données de l'expérience FLUIDICS avec la simulation numérique	91
4.1	Introduction	92
4.2	Tank modelling	93
4.2.1	Dimensionless Navier-Stokes equations	93
4.2.2	Configuration of the manoeuvres	94
4.3	The FLUIDICS experiment	95
4.4	Description of the numerical tool	96
4.4.1	Numerical methods	96
4.4.2	Mesh convergence	97
4.5	Comparisons	98
4.5.1	Force in the y-direction	98
4.5.2	Torque in the z-direction	100
4.5.3	Sloshing frequency	102
4.6	Conclusion	104
	References	105

5	Modélisation d'une membrane hyperélastique immergée	107
5.1	Interaction fluide-membrane	108
5.1.1	Introduction	108
5.1.2	Immersed Boundary Method	109
5.1.3	Immersed Interface Method	110
5.1.4	Méthodes Eulériennes	111
5.2	Modélisation de la membrane	112
5.2.1	Déformation d'un milieu solide	112
5.2.2	Déformations d'une membrane	115
5.2.3	Lois de comportement hyperélastiques	117
5.2.4	Tenseurs des contraintes à la membrane	117
5.2.5	Force élastique locale	119
5.3	Modèle hydrodynamique diphasique avec membrane	120
5.3.1	Modèle hydrodynamique diphasique	120
5.3.2	Modèle de membrane lissé	121
5.3.3	Modèle de membrane discontinu	121
5.4	Méthodes numériques	122
5.4.1	Suivi Eulérien de la membrane et opérateur de projection	123
5.4.2	Discrétisation du modèle de membrane	123
5.4.3	Discrétisation des systèmes linéaires	127
5.4.4	Algorithme d'extension	129
5.4.5	Condition sur le pas de temps et condition de stabilité	132
5.5	Conclusion	133
	Bibliographie	133
6	Validation du modèle d'interaction fluides-membrane	137
6.1	Algorithme d'extension	138
6.1.1	Extension sans résolution en sous maille	139
6.1.2	Extension avec résolution en sous maille	140
6.2	Membrane étirée dans un fluide	141
6.2.1	Description de l'étude	141
6.2.2	Évolutions des rayons principaux et étude de convergence	142
6.2.3	Distribution de pression et des vitesses	144
6.2.4	Apport de l'algorithme d'extension	145
6.3	Membrane étirée séparant deux fluides	148
6.3.1	Saut de viscosité à la membrane	148
6.3.2	Saut de masse volumique à la membrane	150
6.4	Capsule immergée dans un écoulement cisailant	151
6.4.1	Description de l'étude	151
6.4.2	Instabilité de flambage	152
6.4.3	Déformation de la membrane avec le temps	153
6.5	Conclusion	155
6.A	Annexe : Résultats de référence de Tan <i>et al.</i> (J. Comput. Phys., 2008)	155
	Bibliographie	157

Conclusion et perspectives **159**

Annexe **163**

Introduction

Le ballonnement dans les réservoirs d'ergol est une perturbation importante de la dynamique des satellites spatiaux. Lors d'une manœuvre en orbite, la cohabitation au sein d'un réservoir du carburant liquide, appelé ergol, et d'un gaz pressurant induit l'évolution du centre de masse qui génère des forces et couples perturbateurs sur la paroi du satellite et par conséquent des vibrations parasites de la structure totale. Ce phénomène est plus particulièrement problématique pour les satellites d'observation en orbite basse pour lesquels de nombreuses manœuvres sont effectuées tout le long de sa mission et une grande précision de la ligne de visée est nécessaire. La prédiction des mécanismes physiques régissant le ballonnement des fluides dans les réservoirs de satellites permettrait de développer des stratégies pour en limiter les conséquences, notamment en le contraindant par l'utilisation des systèmes de propulsion du satellite. Une seconde possibilité pour limiter les effets du ballonnement est d'implémenter un dispositif particulier au réservoir. Parmi les différentes technologies existantes, les réservoirs à membrane contiennent une membrane hyperélastique (élastique en grande déformation) qui se conforme à l'interface liquide-gaz et amortit le mouvement des fluides. Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons plus particulièrement aux manœuvres à faibles nombres de Bond pour lesquelles les modèles analytiques et les études expérimentales sont difficiles à entreprendre. En effet, dans ces configurations, les effets non-linéaires de la tension de surface ne peuvent être négligés et prescrivent l'utilisation des modèles analytiques linéaires utilisés dans l'industrie spatiale. Du côté expérimental, le temps nécessaire à une oscillation de ballonnement est de l'ordre de plusieurs dizaines de secondes pour de faibles nombres de Bond. L'observation du phénomène complet, depuis le commencement de la manœuvre jusqu'à la tranquillisation des fluides, nécessite plus de temps en micro-gravité que les moyens expérimentaux existants sur Terre ne peuvent nous donner.

Dans ce cadre, le Centre National d'Études Spatiales (CNES) et Airbus Defence and Space (ADS) ont mis en place une R&T Ballonnement d'ergols en très faible poussée pour affiner les modèles analytiques utilisés pour le contrôle d'attitude d'un satellite durant une manœuvre. Ce partenariat a mené au financement de la thèse de Mathieu Lepilliez, soutenue en 2015, sur l'implémentation de méthodes numériques pour simuler le ballonnement dans un réservoir de satellite au sein du code de calcul DIVA (Dynamique Interfaciale pour la Vaporisation et l'Atomisation), développé en interne à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT) par Sébastien Tanguy et son équipe. À la suite des travaux de Mathieu Lepilliez, la présente thèse est proposée pour utiliser le code de calcul DIVA sur des configurations satellites, le valider par comparaison à des données expérimentales inédites et étendre ses capacités à l'étude des réservoirs à membrane en intégrant un modèle d'interaction fluides-membrane. Cette thèse se découpe donc en deux parties. La première porte sur le ballonnement d'ergol dans un réservoir sans dispositif d'expulsion de liquide et la seconde porte sur la modélisation de l'interaction entre des fluides et une membrane hyperélastique.

Dans le chapitre 1, l'état de l'art sur l'étude du ballonnement dans les réservoirs de satellites spatiaux est détaillé. La problématique du ballonnement est expliquée à travers une brève description des systèmes propulsifs et de la gestion des ergols en micro-gravité. Puis, les différentes études analytiques, expérimentales et numériques existantes dans la littérature scientifique sont énoncées dans le cas des réservoirs sans dispositif d'expulsion de liquide et dans le cas plus spécifique des réservoirs à membrane.

Les trois chapitres suivants forment la première partie de la thèse pour laquelle l'étude numérique du bal-

lottement dans un réservoir simple est réalisée. Le chapitre 2 regroupe les méthodes numériques implémentées dans le code DIVA pour permettre la modélisation d'un écoulement diphasique dans un domaine irrégulier. Différentes méthodes permettant la localisation d'une interface entre deux fluides sont exposées. La résolution des équations de Navier-Stokes diphasiques grâce à une méthode de projection est présentée avec une attention particulière sur la prise en compte des effets de la tension de surface de façon discontinue avec la méthode Ghost Fluid. Les conditions aux limites dues au contact entre les fluides et la paroi du réservoir sont également examinées en considérant un maillage cartésien fixe. Le chapitre 3 correspond à l'étude paramétrique effectuée sur une manœuvre de rotation d'un réservoir sphérique en micro-gravité. La dynamique des fluides est étudiée en fonction des nombres de Bond caractéristiques de la manœuvre et du taux de remplissage du réservoir. Le mouvement du centre de masse, la forme de la bulle de gaz ainsi que les forces générées sur la paroi du réservoir sont décrits en fonction des paramètres d'étude et des lois semi-empiriques en sont déduites. Pour finir cette première partie de la thèse, le chapitre 4 propose la comparaison des résultats numériques avec les données expérimentales provenant de l'expérience FLUIDICS. Dans le cadre de la mission Proxima du CNES, cette expérience, constituée d'une centrifugeuse basse vitesse et de différents réservoirs sphériques partiellement remplis, a été envoyée à bord de la Station Spatiale Internationale (ISS) en 2016. Les mesures des forces et des moments exercés par les fluides sur les parois du réservoir en réponse à une manœuvre de rotation sont comparées aux résultats numériques obtenus avec le code de calcul.

Les deux derniers chapitres de la thèse portent sur l'étude numérique de l'interaction entre des fluides et une membrane hyperélastique correspondant au cas du réservoir à membrane. Le chapitre 5 rassemble les méthodes numériques implémentées pour décrire le mouvement d'une membrane hyperélastique immergée dans un ou plusieurs fluides. Dans un premier temps, un bref état de l'art sur les méthodes numériques permettant de décrire le mouvement d'une membrane immergée est présenté. Puis, les caractéristiques mécaniques d'une membrane sont définies, depuis la description de ses déformations jusqu'à ses contraintes grâce aux lois de comportement hyperélastiques. Ceci permet de calculer les efforts exercés par la membrane sur les fluides environnants. Dans une troisième partie, l'intégration de ces efforts aux équations de Navier-Stokes diphasiques est exposée avec deux méthodes différentes : une méthode lissée, épaississant localement la membrane sur le maillage cartésien, et une méthode discontinue utilisant le principe de la méthode Ghost Fluid. Les méthodes numériques utilisées pour calculer les tenseurs caractéristiques de la membrane et résoudre les systèmes d'équations sont décrites dans une quatrième partie. Un algorithme d'extension de variable, nécessaire au bon fonctionnement du modèle, est également présenté. Finalement, le chapitre 6 évalue le modèle d'interaction fluides-membrane sur des cas tests de la littérature scientifique. L'étude d'une membrane étirée et immergée dans un ou plusieurs fluides ainsi que celle d'une capsule immergée dans un écoulement cisailant permettent de valider le modèle d'interaction.

Ballottement d'ergols en micro-gravité

Sommaire

1.1 Propulsion spatiale	14
1.1.1 Systèmes liquides de propulsion spatiale	14
1.1.2 Stockage des ergols	15
1.2 Ballottement dans un réservoir classique	19
1.2.1 Modèles analytiques	20
1.2.2 Études expérimentales	20
1.2.3 Modèles numériques	23
1.3 Ballottement dans un réservoir à membrane	24
1.3.1 Modèles analytiques	24
1.3.2 Études expérimentales	25
1.3.3 Modèles numériques	26
1.3.4 Parallèle avec la déformation de cellule biologique	28
Bibliographie	29

De nombreuses perturbations de la stabilité s'appliquent sur un satellite en orbite autour de la Terre. Celles-ci peuvent provenir de l'environnement spatial ou du satellite lui-même. Parmi les perturbations externes au satellite, on peut citer les effets du gradient de gravité dû à la différence de position entre le centre de gravité et le centre d'inertie du satellite, la pression aérodynamique exercée par l'atmosphère résiduelle, la pression de radiation solaire et les couples magnétiques dus aux interactions entre les matériaux magnétiques et les boucles de courants du satellite avec le champ magnétique de la Terre [4]. Par rapport aux perturbations internes au satellite, les différentes parties mobiles comme les roues à inertie, les miroirs, les parties flexibles telles que les panneaux solaires ou antennes peuvent générer des couples perturbateurs. On peut également citer le ballottement des fluides dans les réservoirs de satellites sur lequel cette thèse porte. Le tableau 1.1 regroupe les ordres de grandeur des différentes perturbations listées précédemment, mesurées à l'aide de gyromètres, pour deux orbites différentes : l'orbite géostationnaire (36 000 km d'altitude) et l'orbite basse (inférieure à 2 000 km d'altitude).

Dans cette étude, nous nous intéressons au phénomène de ballottement d'ergol dans les réservoirs de satellites spatiaux. Comme indiqué dans le tableau 1.1, il s'agit d'une des perturbations de stabilité les plus importantes. Celle-ci risque de s'accroître encore dans les prochaines années avec l'allongement du temps des missions spatiales, impliquant l'intégration de plus grandes quantités de carburant, et l'application de la Loi d'Opérations Spatiales LOS. Cette loi vise à limiter les débris spatiaux en effectuant une manœuvre de désorbitation en fin de

	Satellite géostationnaire	Satellite en orbite basse
Gradient de gravité	Négligeable	10^{-3} Nm
Pression atmosphérique	Négligeable	10^{-4} Nm
Pression de radiation solaire	10^{-6} à 10^{-4} Nm	10^{-4} Nm
Couples magnétiques	10^{-6} Nm	10^{-3} Nm
Mouvement d'équipements	10^{-2} Nm	10^{-1} Nm
Ballottement d'ergol	10^{-3} à 10^{-1} Nm	10^{-3} à 10^{-1} Nm

TABLEAU 1.1 – Ordres de grandeur des perturbations de stabilité subies par un satellite [4, 24].

vie d'un satellite (rentrée sur Terre ou placement en orbite cimetièrre). Une quantité d'ergol supplémentaire est alors nécessaire à cette manœuvre et participe, durant toute la vie du satellite, au ballottement. La connaissance des mécanismes physiques guidant la dynamique des fluides dans un réservoir en micro-gravité et la prédiction de ces phénomènes en réponse à une manœuvre précise permettrait de développer des stratégies pour limiter leurs effets sur la stabilité du satellite et augmenter le temps des missions.

Dans une première partie, une introduction aux systèmes de propulsion chimique et à la gestion des carburants en micro-gravité est énoncée. Quelques dispositifs d'expulsion de liquide intégrables aux réservoirs d'ergol sont décrits ainsi que le fonctionnement des réservoirs à membrane. Dans une seconde partie, l'état de l'art du ballottement dans un réservoir ne comprenant pas de dispositif d'expulsion de liquide est détaillé et étendu aux réservoirs à membrane dans une troisième partie.

1.1 Propulsion spatiale

A partir de son lancement, un satellite spatial doit se positionner sur son orbite définitive, se maintenir à poste tout le long de sa durée de vie, effectuer les manœuvres nécessaires à sa mission jusqu'à effectuer sa désorbitation en fin de vie. Toutes ces étapes nécessitent un moyen de propulsion pour délivrer les forces et couples nécessaires. Ces efforts sont obtenus par éjection de matière à grande vitesse, soit d'un gaz à haute pression et haute température détendu à travers une tuyère, soit de particules chargées électriquement et accélérées [5].

1.1.1 Systèmes liquides de propulsion spatiale

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons aux propulsions chimiques dites liquides pour lesquelles le gaz éjecté dans la tuyère supersonique provient d'une réaction chimique de décomposition ou de combustion d'un ou deux ergols stockés sous forme liquide. Dans le cas d'une propulsion monoergol, un seul carburant sous forme liquide est nécessaire. Celui-ci traverse, grâce à un système d'injection, une chambre contenant un milieu poreux constitué d'un catalyseur. Lorsque l'ergol s'écoule dans le lit catalytique par capillarité, une réaction de décomposition catalytique intervient qui transforme l'ergol en d'importantes quantités de gaz chaud. Ces gaz de décomposition sont ensuite éjectés du lit catalytique à travers une tuyère supersonique. L'ergol le plus utilisé pour ce type de propulsion est l'hydrazine N_2H_4 dont la décomposition catalytique produit un mélange de trois gaz : l'ammoniac N_2H_3 , le diazote N_2 et le dihydrogène H_2 . L'hydrazine est un produit particulièrement toxique qui nécessite beaucoup de précautions lors de sa gestion au sol. Il réagit avec beaucoup d'espèces chimiques ce qui contraint les matériaux solides utilisables pour fabriquer les réservoirs, les moteurs et toutes les pièces du système propulsif avec lesquelles il est en contact. Les réservoirs d'hydrazine sont généralement fabriqués en alliage de titane ou d'aluminium qui ne réagissent pas avec l'ergol.

Pour le cas des propulsions diergols, la combustion se produit par inflammation spontanée par contact entre deux ergols qui génère les gaz chauds, détendus par la suite dans une tuyère. La gamme de poussée délivrée par la propulsion diergol est plus haute que celle du monoergol mais le système est, en contrepartie, moins

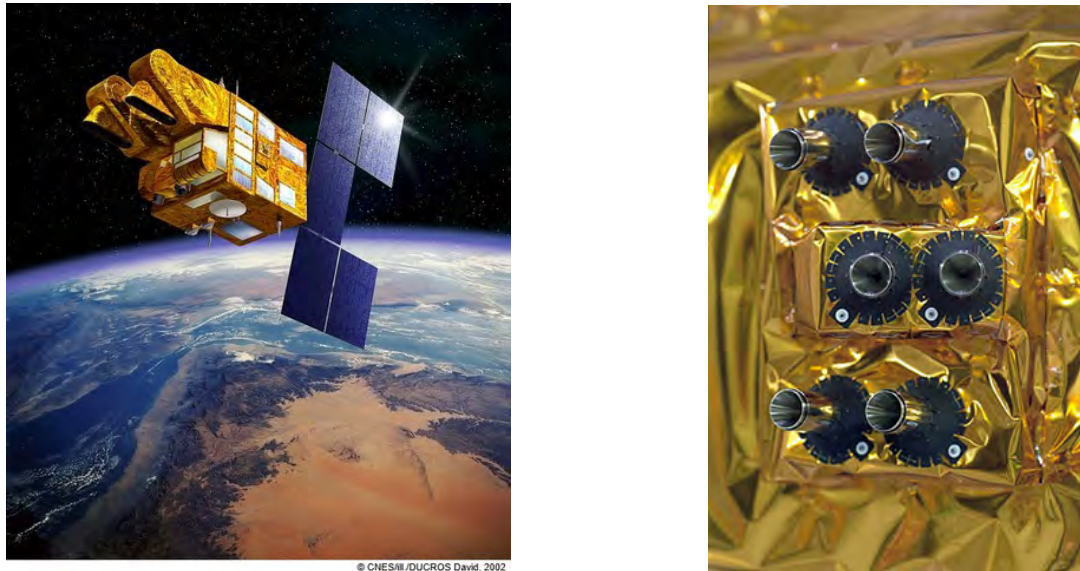


FIGURE 1.1 – Vue d'artiste du satellite SPOT 5 à gauche et zoom sur une de ses platines de tuyères à droite [8].

simple et moins robuste. Dans le cadre des satellites en orbite basse, la propulsion monoergol est privilégiée car les manœuvres d'attitude (modifiant l'orientation angulaire) et de contrôle d'orbite nécessitent des poussées relativement faibles. La figure 1.1 à gauche représente le satellite d'observation SPOT 5 développé par le CNES. La photo de droite montre six tuyères de propulseurs d'hydrazine orientées différemment pour contrôler la direction de la poussée [8].

1.1.2 Stockage des ergols

En fonction de la durée et du type de mission du satellite, la quantité de carburant peut varier mais correspond toujours à un pourcentage important de la masse totale. Pour un satellite de télécommunications en orbite géostationnaire, la masse du système propulsif comprenant les ergols correspond généralement à la moitié de la masse totale. Pour le satellite d'observation SPOT 5, cette masse représente environ 10% de la masse totale [5] mais elle peut augmenter jusqu'à 30% pour d'autres satellites d'observation en orbite basse. La figure 1.2 montre l'intérieur d'une plateforme de satellite du CNES appelé Proteus en phase d'assemblage. Le réservoir sphérique d'hydrazine est visible au centre de la plateforme et correspond à un volume non négligeable de l'espace disponible.

Les ergols sont stockés sous forme liquide dans des réservoirs qui alimentent les propulseurs aux débits nécessaires à la manœuvre. L'expulsion de l'ergol vers le système propulsif s'effectue par différence de pression entre le réservoir et le vide spatial. Les réservoirs d'ergols sont pressurisés afin de fournir les différents débits de carburant nécessaires aux missions du satellite. Cette pressurisation s'effectue en général avec un gaz ne réagissant pas avec les ergols, tel que l'Hélium ou l'azote. Chaque réservoir d'ergol contient donc du carburant liquide et un gaz pressurisant. Dans le cas de la propulsion monoergol, la pressurisation du réservoir s'effectue au sol à une valeur nominale puis la pression diminue avec la consommation d'ergol. Pour le satellite SPOT 5, la pression au sein du réservoir décroît de 22 bars à 5.5 bars entre le début et la fin de sa vie [5]. On parle d'un mode de fonctionnement à pression variable ou mode "blow-down". Un système de régulateurs de pression et de vannes permet de contrôler en aval l'alimentation des différentes tuyères. Une nouvelle mission du réservoir est d'assurer que le fluide transmis au système propulsif correspond bien à l'ergol et pas au gaz pressurisant. Chaque manœuvre du satellite nécessite un débit d'ergol précis et la présence de bulles de gaz dans le système propulsif peut perturber le fonctionnement du moteur et entraîner une panne du système de

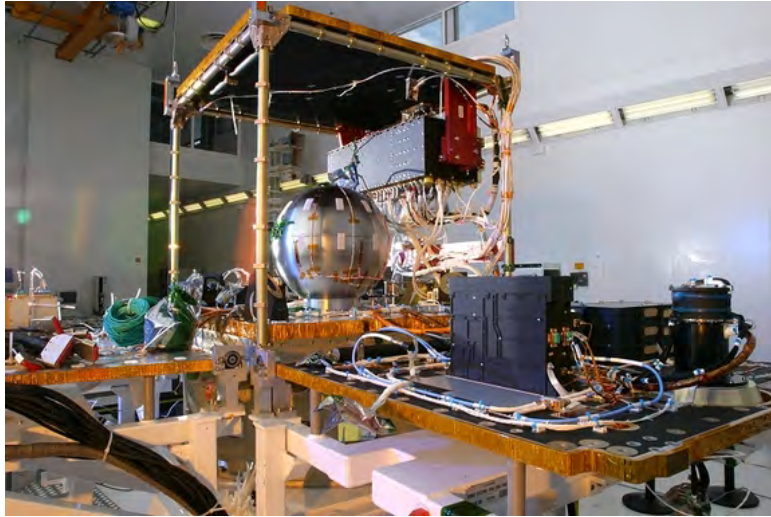


FIGURE 1.2 – Intérieur de la plateforme Proteus pour satellite en orbite basse [10].

propulsion. Différents systèmes existent pour assurer la bonne alimentation en ergol, ils sont nommés Dispositifs d'Expulsion du Liquide (DEL ou PMD pour Propellant Management Devices en anglais), utilisent les propriétés de capillarité des ergols et sont détaillés dans la section 1.1.2.1. Une autre technologie correspond aux réservoirs à membrane pour lesquels une membrane élastique sépare l'ergol liquide du gaz pressurant en se conformant à la surface libre. Le détail de son fonctionnement est présenté dans la section 1.1.2.2.

1.1.2.1 Dispositifs d'expulsion du liquide

En orbite, du fait de la micro-gravité, les accélérations les plus importantes s'exerçant sur un satellite se limitent aux accélérations dues aux manœuvres. On peut quantifier leurs effets grâce à un nombre adimensionnel : le nombre de Bond noté Bo représentant le rapport entre les effets dus aux accélérations imposées au satellite et les effets capillaires, tel que

$$Bo = \frac{\text{Effets inertiels}}{\text{Effets de la tension de surface}}. \quad (1.1.1)$$

Lorsque le satellite n'effectue pas de manœuvre, ce nombre de Bond est très inférieur à 1 et l'on parle de régime dominé par la capillarité. De plus, les ergols liquides utilisés dans l'industrie spatiale ont la particularité d'être parfaitement mouillants pour les parois du réservoir. En micro-gravité, l'ergol liquide est en contact avec la paroi du réservoir et le gaz pressurant forme une bulle au centre du réservoir, comme illustré sur un exemple par la figure 1.3.

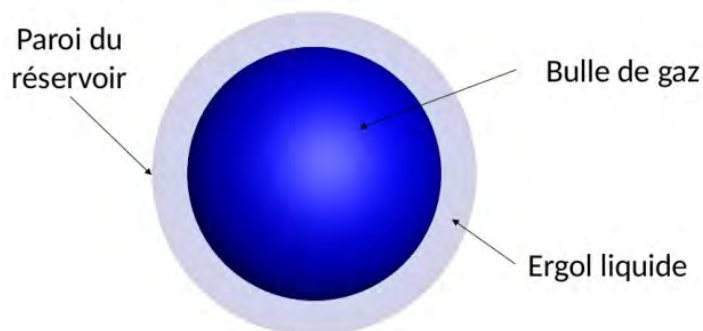


FIGURE 1.3 – Intérieur d'un réservoir sphérique rempli à 50%.

Les dispositifs d'expulsion du liquide mettent à profit ces phénomènes de capillarité et de mouillabilité pour assurer l'alimentation des propulseurs en ergol. Ces dispositifs sont des structures métalliques, généralement en titane ou en aluminium pour éviter toute réaction chimique avec les ergols, fixées à l'intérieur du réservoir. Ils se divisent en deux catégories : les systèmes de distribution de liquide et les systèmes de rétention capillaire. Les premiers captent l'ergol depuis de multiples zones du réservoir et l'entraînent par capillarité vers l'orifice de sortie. Puis, proche de ce dernier, un système de rétention capillaire piège localement l'ergol qui reste disponible pour l'utilisation.

Parmi les systèmes de distribution de liquide, des lames métalliques fixées contre la paroi du réservoir permettent de guider le liquide jusqu'à leur base commune. Grâce à la forte mouillabilité des ergols, ces derniers s'écoulent le long des lames pour rejoindre une réserve au niveau de l'orifice de sortie [11, 17], comme représenté sur la figure 1.4 à gauche. Des systèmes de galeries poreuses ou de réseaux de canalisations avec crépines existent également mais sont généralement plus lourds et plus complexes [5, 11].

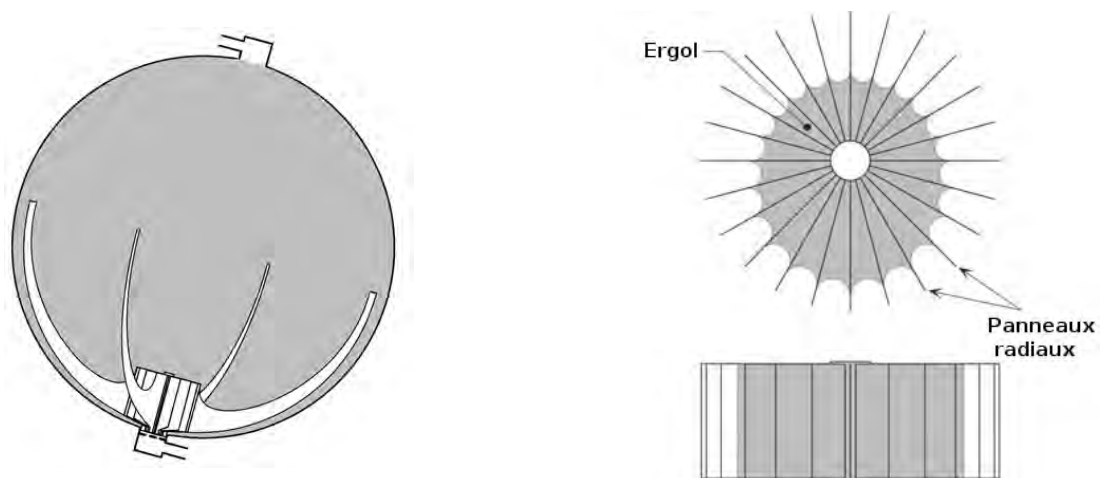


FIGURE 1.4 – Réservoir sphérique contenant un système de lames avec éponge métallique à gauche et schémas vue de dessus et de face d'une éponge métallique [17, 18].

Parmi les systèmes de rétention capillaire, les éponges métalliques sont constituées de fines épaisseurs de métal agencées spécifiquement pour générer un gradient de pression capillaire qui maintient le liquide près de la sortie du réservoir. Ces éponges peuvent être formées par l'alternance de feuilles métalliques planes et crénelées formant des canaux capillaires de différentes tailles ou par la disposition radiale de feuilles planes autour de l'axe de l'orifice de sortie (*cf.* figure 1.4 à droite). Les éponges métalliques sont particulièrement intéressantes pour les manœuvres répétées car elles se remplissent d'elles-mêmes lors des périodes de micro-gravité [18]. D'autres types de pièges capillaires existent pour contenir le fluide proche de la sortie d'ergol [19]. L'efficacité de ces dispositifs dépend de la bonne alimentation en ergol des systèmes de distribution, des niveaux d'accélération subis par le satellite et du volume de liquide soutirable en une fois auprès des systèmes de rétention.

1.1.2.2 Réservoir à membrane

Les réservoirs à membrane constituent un type de réservoirs assurant l'alimentation en ergol des propulseurs sans expulsion de bulles de gaz et sans utiliser les phénomènes de capillarité pour guider le mouvement de l'interface liquide-gaz. Une fine membrane imperméable en élastomère est intégrée au réservoir et sépare l'ergol liquide du gaz pressurant. La membrane peut se déformer de façon importante, elle a un comportement hyperélastique, c'est à dire élastique même en grande déformation. A l'équilibre, la membrane prend la forme d'une demi-sphère seule dans le cas de réservoirs sphériques ou complétée d'une section cylindrique dans le cas de réservoirs cylindro-sphériques. Elle est fixée selon sa circonférence à un anneau métallique qui est soudé avec

les deux dômes hémisphériques, généralement en titane, qui forment la structure externe du réservoir [2]. La figure 1.5 montre une vue éclatée d'un réservoir à membrane sphérique.

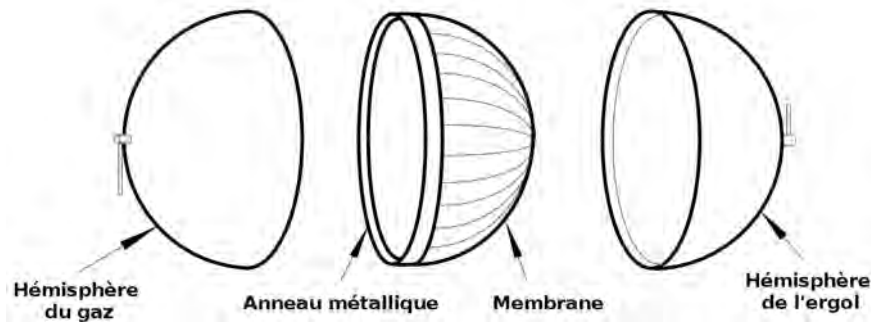


FIGURE 1.5 – Vue éclatée d'un réservoir à membrane [2].

Avant le lancement, le réservoir est rempli d'entre 75 et 95% d'ergol [21] et la membrane se situe globalement du côté de l'hémisphère du gaz. Au cours de la vie du satellite, l'ergol est consommé jusqu'à ce que le réservoir soit pratiquement vide et que la membrane atteigne la paroi de l'hémisphère de l'ergol. Les réservoirs à membrane présentent des rendements d'expulsion très élevés, supérieurs à 99.9% [2]. En effet, l'ajout de nervures le long de la membrane augmente sa rigidité et permet d'éviter l'isolement d'une partie de l'ergol dans une zone non raccordée à l'orifice de sortie. La figure 1.6 montre des exemples de membranes dont les nervures sont visibles.



FIGURE 1.6 – Différentes tailles de membranes en élastomère avec nervures [30].

Le matériau constituant la membrane doit pouvoir se déformer suffisamment pour se conformer à la surface libre dans toutes les configurations possibles en orbite. Il doit pour cela résister aux contraintes de traction et de cisaillement tout en restant dans le domaine élastique. Au niveau de sa composition, celui-ci ne doit pas réagir chimiquement avec l'ergol liquide ni le contaminer ce qui pourrait entraîner des pertes d'efficacité lors du passage dans le catalyseur. La membrane doit rester opérationnelle durant toute la mission du satellite qui peut durer de nombreuses années tout en restant parfaitement imperméable et régulièrement sollicitée. Des critères de fabrication conditionnent également le choix du matériau puisque ce dernier doit être facilement transformable, mis en forme et manipulable à partir de matières premières à un coût raisonnable. L'élastomère utilisé pour fabriquer ces membranes a été développé dans les années 1970 sous contrat de l'US Air Force. Il est à base d'Éthylène-Propylène et est nommé AF-E-332 pour Air Force Elastomer formulation number 332 [2]. Sa masse volumique est de $1070\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et l'ordre de grandeur de son module d'Young équivalent (pour pouvoir le comparer à un matériau élastique linéaire) se déduit de la valeur de la contrainte de traction obtenue pour une elongation de 100% et correspond à 10MPa [25, 30]. Dans les années 2000, un nouvel élastomère a été mis au point pour éviter la contamination au temps long des propulseurs par la silice contenue dans l'AF-E-

332. Cet élastomère est nommé SIFA-35, il ne contient pas de silice et conserve des caractéristiques physiques adéquates. De plus, ce matériau s'adapte directement aux procédés de fabrication, de mise en forme et s'intègre aux réservoirs précédemment conçus pour les membranes en AF-E-332 [30].

Ces réservoirs à membrane sont principalement utilisés pour des volumes d'ergol allant de la dizaine à quelques centaines de litres, pour des satellites en orbite basse ou moyenne et pour les satellites d'explorations. Les sondes Voyager de la NASA, les deux premières générations des satellites GPS, les plateformes Myriades du CNES et bien d'autres encore utilisent des réservoirs à membrane [2, 30]. Les diamètres des membranes varient entre 5cm et 1m en fonction du volume de liquide embarqué, pour une épaisseur de l'ordre du millimètre. Le rapport entre le diamètre et l'épaisseur de la membrane correspond toujours à une valeur supérieure à 100. En revanche, le réservoir à membrane présente des inconvénients pour des tailles de réservoirs trop importantes. La surface de la membrane augmente avec la taille du réservoir entraînant un surplus de masse qui peut rendre cette solution moins attractive que les autres dispositifs d'expulsion de liquide. Les conditions de fabrication par moulage sont également plus difficiles pour de grandes tailles (au delà de 1m de diamètre). Les risques de chevauchement entre différentes parties de la membrane sont également plus importantes dans le cas de grands réservoirs lors de manœuvres en orbite. En effet, pour des remplissages intermédiaires, la membrane peut présenter des plis qui par frottement entre eux peuvent dégrader la surface de la membrane localement. Pour de petits réservoirs, la surface de la membrane est bien moins importante et ces contacts membrane-membrane sont plus rares.

1.1.2.3 Problématique du ballottage d'ergol

Le ballottage d'ergol correspond au mouvement des fluides contenus dans le réservoir durant une manœuvre. En effet, lorsque le satellite se met en mouvement, les fluides présents dans le réservoir d'ergol se déplacent et induisent un mouvement du centre de masse qui génère des forces et couples perturbateurs sur le réservoir et en conséquence sur la structure totale du satellite. L'ordre de grandeur de ces perturbations est renseigné dans le tableau 1.1. En considérant un satellite d'observation, les perturbations de stabilité diminuent fortement la précision de la ligne de visée. Les vibrations générées dégradent les prises de vue et il est alors nécessaire d'attendre un certain temps de tranquillisation après chaque manœuvre pour que les frottements visqueux des fluides les atténuent. Dans le cas des réservoirs à membrane, la raideur élastique de la membrane ajoute une contrainte supplémentaire au mouvement de l'interface liquide-gaz.

Le Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite (SCAO) détermine et contrôle l'attitude d'un satellite (son orientation dans l'espace) grâce à différents capteurs et actionneurs. En plus de leurs missions initiales, les boucles d'asservissement peuvent inclure des lois de commandes permettant d'atténuer des fréquences de perturbations particulières. Il est alors nécessaire de connaître les fréquences caractéristiques des phénomènes physiques perturbateurs tels que le ballottage d'ergol. La compréhension de ces phénomènes physiques et la prédiction de leurs effets en termes de force et de couple en réponse à une manœuvre permettent d'affiner les lois de contrôle pour diminuer les temps de tranquillisation et augmenter le nombre de prises de vue. Différentes méthodes et modèles ont été développés pour caractériser ces phénomènes de ballottage et sont décrits dans les sections 1.2 et 1.3 pour les cas de réservoirs sans et avec membrane respectivement.

1.2 Ballottage dans un réservoir classique

Dans cette section, nous nous intéressons aux réservoirs de satellites spatiaux sans dispositif d'expulsion de liquide et sans membrane. Différentes approches sont utilisées dans la littérature scientifique pour quantifier le ballottage dans un réservoir classique et sont détaillées dans les sections suivantes. Nous nous intéresserons plus précisément au ballottage en réponse à des manœuvres de faibles nombres de Bond pour lesquelles les effets de la capillarité doivent être considérés.

1.2.1 Modèles analytiques

Dans ces travaux, Abramson [1] modélise le phénomène oscillant correspondant au ballottage unidirectionnel dans un réservoir par un système mécanique à un degré de liberté de type masse-ressort ou pendule avec amortissement. Pour chacun de ces deux systèmes, représentées sur la figure 1.7 à gauche, une partie de la masse de l'ergol est considérée fixe dans le réservoir et son complément oscille. Les autres paramètres du problème sont la rigidité des ressorts pour l'un, la longueur du pendule pour l'autre et leurs amortissements. Chacun de ces systèmes permet d'obtenir le mouvement de la masse oscillante par la résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Les valeurs des paramètres des modèles ainsi que la répartition de la masse entre ses composantes fixe et oscillante se déduisent de lois empiriques provenant de nombreux résultats d'expériences et de simulations numériques. Ce modèle permet de déduire en fonction de certains paramètres de l'étude la fréquence de ballottage et son taux d'amortissement. La figure 1.7 à droite montre l'évolution des deux premiers modes de ballottage pour un réservoir sphérique en micro-gravité rassemblée par Dodge [11] grâce à des expériences en drop-tower (*cf.* section 1.2.2) et des simulations numériques.

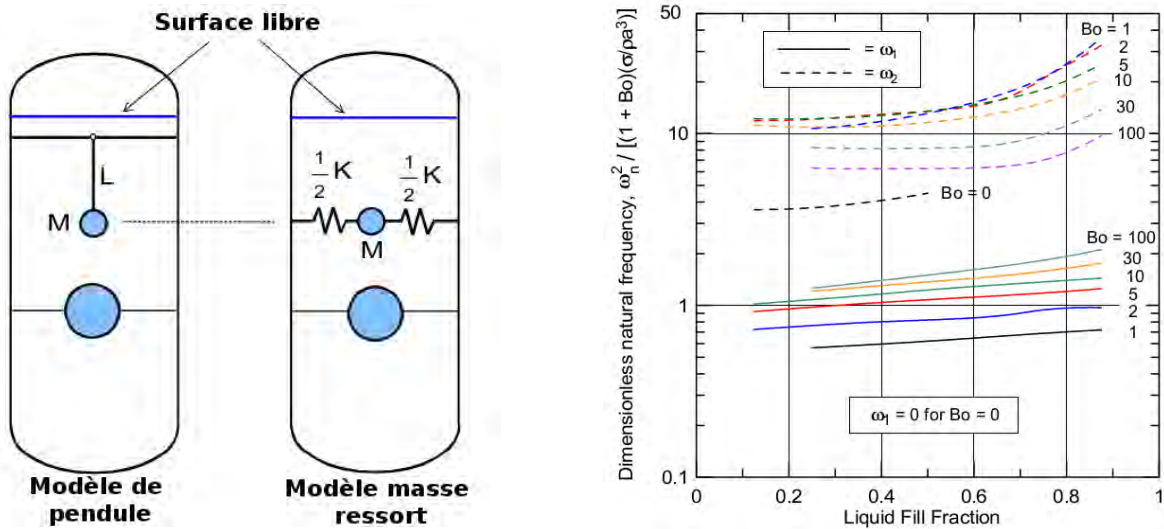


FIGURE 1.7 – Illustrations des deux modèles 1D du ballottage latéral à gauche et modes propres de ballottage pour un réservoir sphérique en micro-gravité [11].

Ces modèles sont simples à mettre en œuvre et utilisables pour des simulations couplées avec le SCAO et la dynamique du satellite. Les expressions empiriques déduites pour différentes géométries de réservoirs permettent d'estimer les ordres de grandeur des fréquences de ballottage et des taux d'amortissement. De plus, le couplage de plusieurs systèmes 1D pour un même réservoir permet de complexifier le ballottage dans plusieurs directions ou d'observer plusieurs modes de ballottage. Néanmoins, cette méthode ne permet d'obtenir que des solutions linéaires or, pour des nombres de Bond faibles, les effets non linéaires de la tension de surface ne peuvent pas être négligés. De la même façon, les solutions obtenues sont uniquement valables pour un nombre de Bond constant. Pour finir, ces modèles analytiques ne prennent pas en compte certains paramètres géométriques et physiques, tels que la géométrie précise du réservoir (forme sphérique, cylindro-sphérique, *etc.*) ou la viscosité des fluides, qui ont pourtant une influence sur le ballottage.

1.2.2 Études expérimentales

La plus grande difficulté pour étudier le ballottage d'ergol expérimentalement est de créer un environnement en micro-gravité. Des moyens expérimentaux utilisent le principe de chute libre pour reproduire l'état

d'apesanteur sur Terre pendant quelques secondes. Les drop-towers sont de grandes tours creuses dans lesquelles le dispositif expérimental est lâché. Le frottement avec l'air lors de la chute est supprimé en réalisant le vide à l'intérieur de la tour. Ces tours permettent d'obtenir un état d'apesanteur pendant une durée inférieure à 10 secondes. Un autre moyen de créer l'état d'apesanteur est le vol parabolique. Un avion décrit une trajectoire parabolique en compensant les efforts de traînée par la poussée des moteurs et en annulant la portance pour être dans un état de chute libre. L'état d'apesanteur dure le temps de la trajectoire en parabole qui peut durer jusqu'à 25 secondes (représenté en rouge dans la figure 1.8). Dans le cadre de manœuvres à faibles nombres de Bond, le temps de stabilisation des fluides est de l'ordre de la minute et les moyens expérimentaux sur Terre ne suffisent pas à maintenir un état de micro-gravité aussi long. Néanmoins, ces moyens expérimentaux servent aux pré-études et à la qualification des dispositifs expérimentaux à envoyer dans l'espace. Pour quantifier le ballottage en micro-gravité, il est alors nécessaire d'envoyer le dispositif expérimental dans l'espace, au sein d'un satellite ou dans la Station Spatiale Internationale ISS. Du fait de la complexité de la conception et du coût de l'envoi en orbite, il existe peu d'études expérimentales sur le ballottage.



FIGURE 1.8 – Trajectoire d'un vol parabolique composé de deux phases d'hyperpesanteur séparant la phase de micropesanteur [9].

Le satellite SlosSat FLEVO (Facility of Liquid Experimentation and Verification in Orbit) a été spécifiquement conçu pour l'expérimentation du ballottage dans un réservoir en micro-gravité par l'Agence Spatiale Européenne ESA et l'agence spatiale néerlandaise NLR [31, 32]. Le satellite est un cube de 90cm de côté contenant un réservoir cylindrique de 87 litres rempli de 33.5kg d'eau distillée (*cf.* figure 1.9). Un ensemble de 12 propulseurs permet de mettre en mouvement le satellite dont la réponse est mesurée grâce à trois gyroscopes et six accéléromètres. Le satellite a été lancé en février 2005 sur une orbite de transfert géostationnaire durant laquelle une fuite de carburant a réduit le temps de fonctionnement du satellite à 8 jours pendant lesquels seulement 56h d'expérimentations ont pu être effectuées. De plus, les données des capteurs de position et de vitesse locale du liquide situés à l'intérieur du réservoir n'ont pas été transmis [31, 32]. Malgré ces anomalies, les données des accéléromètres ont permis d'extraire les fréquences et l'amortissement des vitesses angulaires du réservoir qui ont permis de confronter les résultats provenant de modèles numériques [31].

L'expérience SPHERES-Slosh est un dispositif de la NASA envoyé dans l'ISS en 2013. Elle est constituée de deux systèmes SPHERES (Synchronized Position Hold Engage Reorient Experimental Satellites) permettant de se déplacer et de tourner librement dans l'ISS grâce à des propulseurs de CO₂. Des réservoirs cylindriques transparents contiennent différents remplissages de liquide (de l'eau coloré) et sont fixés entre les deux systèmes SPHERES. Un ensemble de capteurs (gyroscopes et accéléromètres) et de caméras permet le contrôle des manœuvres, la mesure des effets du ballottage et la visualisation de la position de l'interface liquide-gaz à l'intérieur du réservoir [6]. La figure 1.10 illustre les différents éléments constituant le dispositif expérimental. Des manœuvres typiques de la vie d'un satellite sont reproduites : la translation en va et vient dans une direction pour modéliser la poussée d'un propulseur, la rotation autour des axes principaux du système pour reproduire une manœuvre d'attitude, *etc.* [7]. Ces résultats expérimentaux ont été comparés à des simulations numériques mais ne sont pas accessibles puisque classés confidentiels.

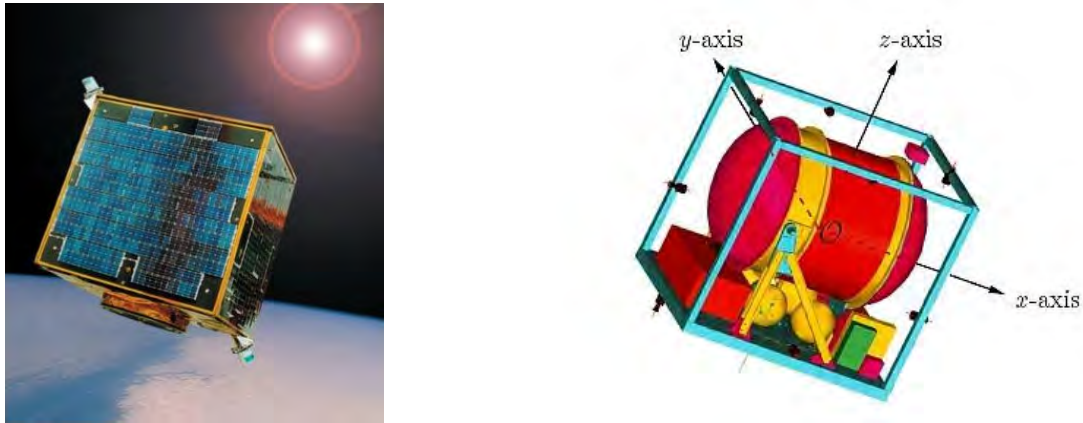


FIGURE 1.9 – Vue d'artiste du satellite SlosSat FLEVO en orbite à gauche et schéma simplifié de son contenu à droite (crédit : NLR, ESA).

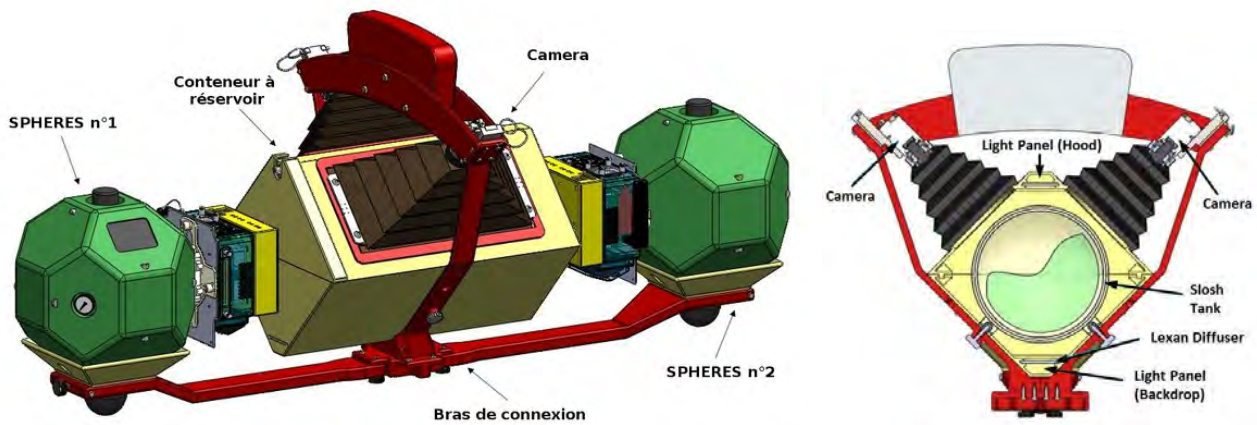


FIGURE 1.10 – Schéma de l'expérience SPHERES-Slosh à gauche et vue de coupe du conteneur à réservoir [22].

L'expérience FLUIDICS (FLUID DynamICS in Space) est une collaboration du CNES et d'Airbus Defence & Space, envoyé à bord de l'ISS en 2017 dans le cadre de la mission Proxima de l'Agence Spatiale Européenne ESA, réalisée par l'astronaute Thomas Pesquet. Le dispositif expérimental est une centrifugeuse basse vitesse au bout de laquelle s'insère un petit réservoir sphérique transparent (*cf.* figure 1.11). Deux réservoirs ont été utilisés pour des remplissages de 50% et 75% en 3M Novec 2704, un liquide ayant des caractéristiques physiques (viscosité, masse volumique, tension de surface et mouillabilité) proches de celles des ergols utilisés dans l'industrie spatiale [26]. Un capteur de force et de couple situé au niveau de l'accroche du réservoir avec le bras de levier permet de mesurer les efforts exercés par les fluides sur la paroi du réservoir. De plus, deux caméras permettent de visualiser la distribution des fluides à l'intérieur du réservoir. L'ensemble du système est contenu dans une enceinte de protection cylindrique afin de respecter les règles de sécurité à bord de l'ISS. L'objectif de cette expérience est de quantifier les effets du ballottage sur le réservoir solide pour des manœuvres de rotation à faibles nombres de Bond. Ces données expérimentales permettent de confronter les résultats provenant de simulations numériques afin d'affiner les modèles utilisés.

Une description plus complète de l'expérience FLUIDICS ainsi que la comparaison de ses données expérimentales avec les résultats numériques obtenus dans le cadre de cette thèse avec le code de calcul DIVA (décrit dans le chapitre 2) sont présentées dans le chapitre 4.

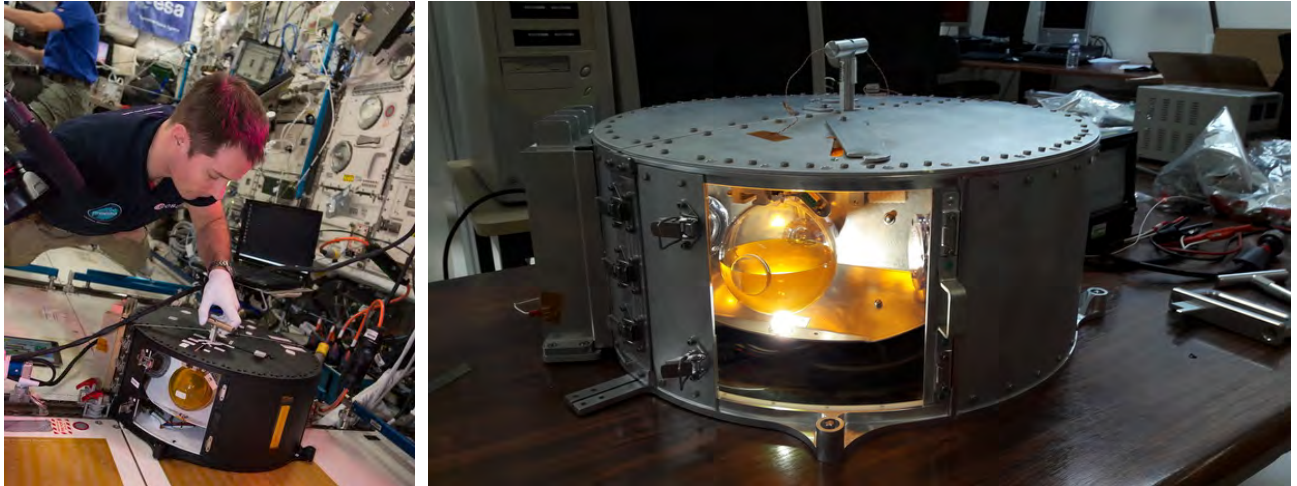


FIGURE 1.11 – Mise en place de l'expérience FLUIDICS dans l'ISS par l'astronaute Thomas Pesquet à gauche et zoom sur le dispositif expérimental à droite.

1.2.3 Modèles numériques

Compte tenu des difficultés des modèles analytiques à prendre en compte les effets non-linéaires de la tension de surface et de la complexité à reproduire un environnement micro-gravitaire pour l'expérimentation, la simulation numérique est un moyen particulièrement intéressant pour la prédiction des phénomènes de ballottement pour de faibles nombres de Bond. Les équations de Navier-Stokes régissent le comportement des fluides à l'intérieur du réservoir. Des méthodes numériques spécifiques sont considérées pour prendre en compte les phénomènes de tension de surface à l'interface liquide-gaz (*cf.* section 2.1) et la frontière fluide-solide correspondant à la paroi du réservoir (*cf.* sections 2.3 et 5.1). Néanmoins, les modèles numériques ne peuvent être validés que par comparaison avec des données expérimentales.

Ainsi, des simulations numériques ont permis de reproduire le comportement des fluides dans l'expérience SloshSat FLEVO décrite dans la section 1.2.2 [31]. Le code de calcul utilise la méthode Volume Of Fluid VOF [15] (présentée dans la section 2.1.2) pour suivre le mouvement de la surface libre à l'intérieur du réservoir. Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées sur un maillage cartésien fixe et les cellules du maillage traversées par la paroi du réservoir sont découpées en suivant la méthode cut-cells [33]. Des manœuvres de rotation effectuées dans l'espace par SloshSat FLEVO ont été simulées numériquement. Les données de vitesses angulaires ont été correctement reproduites par la simulation : les fréquences et amplitudes du mouvement du satellite correspondent bien entre elles lorsque le maillage est suffisamment raffiné [31]. Dans le cas de l'expérience SPHERES-Slosh, des simulations avec le code de calcul commercial STAR-CCM+ ont été réalisées mais ne sont pas consultables. Quelques illustrations de la formation d'un geyser dans un réservoir lors d'une manœuvre de translation aller-retour sont laissées disponibles par la NASA et reproduites sur la figure 1.12.

Pendant sa thèse, Mathieu Lepilliez [24] a développé au sein du code de calcul DIVA (Dynamique Interfaciale pour la Vaporisation et l'Atomisation) les outils nécessaires à la modélisation du ballottement dans un réservoir de satellite. Ces méthodes numériques ont servi de base aux travaux présentés dans la première partie de cette thèse et sont détaillées dans le chapitre 2. Des premiers résultats sur les trajectoires du centre de masse et les forces et moments générés sur la paroi du réservoir ont été présentés dans le cadre d'une manœuvre en rotation [24]. Ces simulations sont étendues à une étude paramétrique complète dans le chapitre 3.

En définitive, la simulation numérique directe permet de simuler des écoulements diphasiques en micro-gravité mais le manque de données expérimentales limite son domaine de validation. La simulation numérique nécessite des ressources et des temps de calcul importants qui ne permettent pas de faire du contrôle en temps

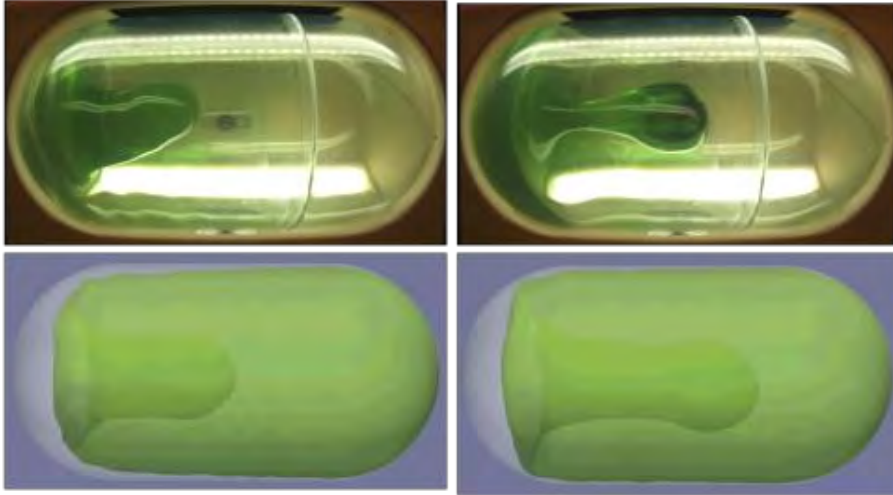


FIGURE 1.12 – Photos (ligne du haut) et simulations numériques (ligne du bas) d'un geyser lors d'une manœuvre de translation avec SPHERES-Slosh [23].

réel par un ordinateur de bord. Néanmoins, ces études numériques permettent de calculer différents paramètres d'intérêt pour chaque configuration et d'en déduire des lois semi-empiriques utilisables par les logiciels de SCAO. Dans le cadre de cette thèse, une étude paramétrique complète a été menée avec le code de calcul DIVA pour le cas d'une manœuvre de rotation et fait l'objet du chapitre 3. De plus, la validation des modèles numériques constituant le code DIVA est présentée dans le chapitre 4 par comparaison de ses résultats avec les données de l'expérience FLUIDICS.

1.3 Ballottement dans un réservoir à membrane

Cette section se concentre maintenant sur l'état de l'art du ballottement dans le cas des réservoirs à membrane présentés dans la section 1.1.2.2. Les études de la littérature scientifique sont moins nombreuses et plus complexes du fait du couplage de la dynamique des fluides avec celle de la membrane hyperélastique. Néanmoins, quelques études, principalement expérimentales et numériques, existent et sont détaillées ci-dessous.

1.3.1 Modèles analytiques

Il existe très peu de modèles analytiques pour prédire le ballottement dans un réservoir à membrane. Dodge et Kana [12] reprennent les travaux d'Abramson [1] sur les modèles de pendule pour modéliser le ballottement latéral dans un réservoir à membrane. La figure 1.13 à gauche montre deux configurations de réservoirs pour lesquelles une accélération (due à la gravité ou à la poussée des propulseurs) plaque le liquide contre la paroi du réservoir ou contre la membrane. Dans le premier cas, le modèle du pendule d'Abramson [1] est utilisé avec un ressort de torsion supplémentaire à sa base, de raideur K_θ et d'amortissement C_θ pour modéliser l'effet de la membrane, comme représenté sur la figure 1.13 au centre. Dans le cas où l'accélération plaque le liquide contre la membrane, le modèle se complexifie. La figure 1.13 à droite montre que le pendule est inversé avec des raideurs dues à la membrane placées en butée et que la fraction de masse fixe est excentrée dans le réservoir. Les paramètres de ces deux modèles sont déduits par comparaison avec des expériences menées en laboratoire avec les effets de la gravité. Avec ce type de modèles, de nombreux paramètres géométriques et physiques ne sont pas pris en compte, tout comme le caractère hyperélastique non-linéaire de la membrane.

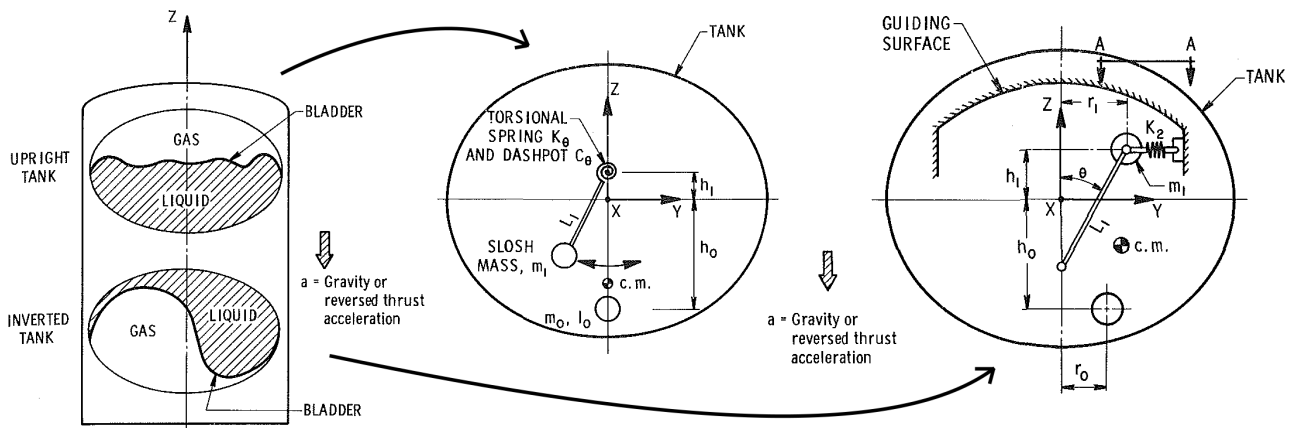


FIGURE 1.13 – Modèles de pendule de Dodge et Kana [12] pour le ballottage latéral dans deux réservoirs à membrane orientés différemment.

1.3.2 Études expérimentales

Les expériences en micro-gravité du ballottage dans les réservoirs à membrane sont inexistantes ou confidentielles. A contrario, de nombreuses études portent sur ces ballottements avec gravité. Les applications correspondent notamment au transport des réservoirs depuis leurs remplissages jusqu'au pas de tir, à l'installation du satellite dans la fusée et aux effets du vent dont la coiffe de la fusée est soumise avant son lancement. En effet, pour un taux de remplissage initial entre 75 et 95% [21], les masses de fluides peuvent générer des contraintes importantes sur la membrane durant les phases d'avant vol. Si en supplément la membrane forme des plis à sa surface, le frottement entre eux peut entraîner des dégradations locales pouvant conduire à sa rupture. Des expérimentations en laboratoire ont été effectuées pour évaluer la tenue des membranes à différentes sollicitations.



FIGURE 1.14 – Dispositif expérimental pour le ballottage dans un réservoir à membrane installé dans un camion à gauche et exemple de surface de la membrane à droite [21].

Lapilli *et al.* [21] ont placé un réservoir à membrane transparent de 42cm de diamètre sur une table mobile à un degré de liberté, guidé en translation. Le réservoir est sollicité à différentes fréquences et amplitudes, une

caméra filme la déformation de la membrane, un capteur d'effort mesure les forces appliquées sur la table et un accéléromètre est placé au niveau du réservoir. Pour des réservoirs plus grands, jusqu'à 1m de diamètre, le dispositif expérimental, représenté dans la figure 1.14, est installé dans un camion. Deux caméras y filment la surface de la membrane, et deux systèmes d'accéléromètre et gyroscope sont placés respectivement dans le référentiel du réservoir et celui du camion. Pour les configurations testées, ils ont montré que l'apparition de plis est fortement liée au diamètre du réservoir. Plus le diamètre D_t est important par rapport à l'épaisseur de la membrane h , plus il y a de risques de formation de plis et de frottement par contact. Ces résultats et d'autres provenant d'études similaires ont été rassemblés par Tam *et al.* [30] et montrent que le ballottage de la membrane, en réponse à des sollicitations représentatives des manœuvres au sol avec gravité, est faible voire inexistant pour des ratios $D_t/h < 340$. La figure 1.14 à droite montre la surface sans plis de la membrane pour un remplissage de 73% dans un réservoir pour lequel $D_t/h = 254$, obtenue par Lapilli *et al.* [21].

Faure *et al.* [13] ont utilisé un système de scanner 3D pour obtenir le déplacement du centre de gravité des fluides dans le réservoir avec le temps. Le scanner est constitué de 6 caméras Kinect de Microsoft, comprenant une caméra RGB classique et un capteur de profondeur infrarouge, placées autour d'un réservoir à membrane transparent (*cf.* figure 1.15 à gauche). Celles-ci permettent d'obtenir une cartographie précise de la surface de la membrane, comme illustré par les exemples de la figure 1.15 à droite. En connaissant l'épaisseur de la membrane et la géométrie du réservoir, il est possible d'en déduire la distribution des fluides. Des mesures de position du centre de masse ont été effectuées pour un réservoir de 1m de diamètre avec différents taux de remplissage et différentes technologies de nervures pour quantifier leurs effets [13].

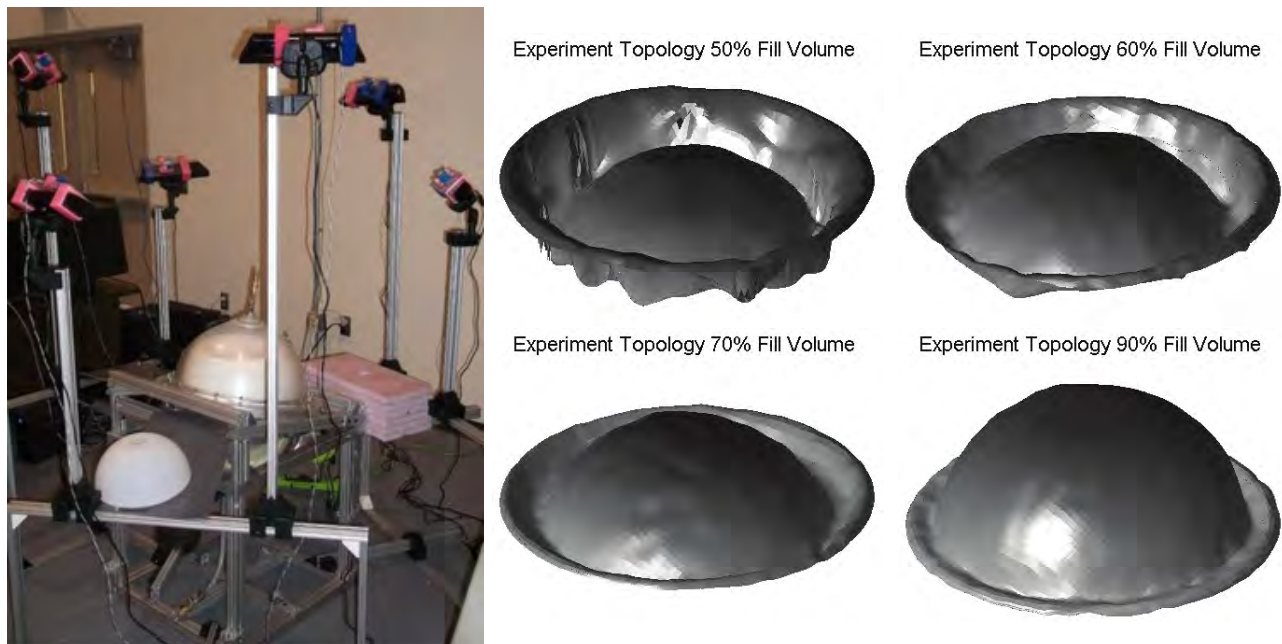


FIGURE 1.15 – Dispositif expérimental du scanner 3D à gauche [13] et illustrations de la surface de la membrane obtenues pour différents remplissages à droite [25].

Ces expériences en laboratoire permettent de quantifier les effets de certains paramètres sur le ballottage dans les réservoirs à membrane sur Terre mais aucune information en micro-gravité n'est disponible.

1.3.3 Modèles numériques

L'utilisation de modèles numériques pour simuler le ballottage dans les réservoirs à membrane se justifie avec les mêmes arguments que dans la section 1.2.3. L'étude numérique est un moyen plus complet que la

modélisation analytique et plus économique que l'expérimentation en micro-gravité. Néanmoins, la cohabitation de différents fluides avec une membrane hyperélastique dans un même domaine de calcul est complexe à mettre en place numériquement. Les études numériques de la littérature portant sur le ballonnement dans les réservoirs à membrane utilisent en règle générale un couplage partitionné de deux solveurs : un solveur fluide et un solveur solide. Chaque solveur dispose de ses propres équations et variables définies sur son propre maillage. Les solveurs sont exécutés successivement, s'échangent explicitement les données d'intérêt à leur interface commune et doivent être synchronisés en temps. Ce couplage est difficile à mettre en place et introduit des erreurs numériques au fil du temps. De plus, les études expérimentales ont montré que pour une même sollicitation, le comportement de la membrane n'est pas identique à chaque essai [30]. Cette non reproductibilité complexifie encore la prédiction du ballonnement puisque plusieurs solutions dynamiques sont possibles. Il est à noter que les simulations numériques présentées dans cette section ne considèrent pas les nervures pouvant être utilisées pour rigidifier la membrane.

Sances *et al.* [29] utilise la suite de logiciels commerciaux ANSYS pour modéliser le couplage fluide-structure. Le solveur fluide ANSYS CFX résout les équations de Navier-Stokes dans les domaines fluides et le solveur ANSYS Mechanical gère la membrane dont le comportement matériau est simplifié en considérant le modèle d'élasticité linéaire. Le couplage entre les deux solveurs s'effectue de façon séquentielle avec, à chaque itération temporelle : le remaillage des zones fluides et solide pour chaque solveur, la résolution du solveur solide, la transmission des conditions d'interface au solveur fluide puis la résolution du solveur fluide. Sances *et al.* [29] modélise avec cette méthodologie un réservoir à membrane initialement perturbé par une accélération transversale. Au repos, la forme de la membrane correspond à un cratère qui sépare deux volumes égaux d'eau et d'air soumis à la gravité (*cf.* figure 1.16 à gauche). Un champ de vitesse non nul et uniforme dans le liquide donne l'impulsion initiale permettant de créer le ballonnement transversal. En réponse, la membrane se déforme périodiquement dans la direction de sollicitation. La figure 1.16 illustre la forme de la membrane à trois instants différents d'une même oscillation. Cette méthodologie partitionnée permet d'obtenir des résultats consistants avec la physique du problème sur une courte période de temps car le code nécessite un maillage raffiné notamment dans la zone proche de la membrane et réduit, en conséquent, le pas de temps. Levine [25] propose une méthodologie similaire pour simuler l'interaction fluide-membrane en considérant un modèle hyperélastique pour la membrane avec la suite de logiciel ANSYS. Des simulations préliminaires ont montré que les temps de calcul nécessaires sont trop importants pour une application dans un cadre industriel et cette méthodologie a été abandonnée au profit de modèles simplifiés [25].

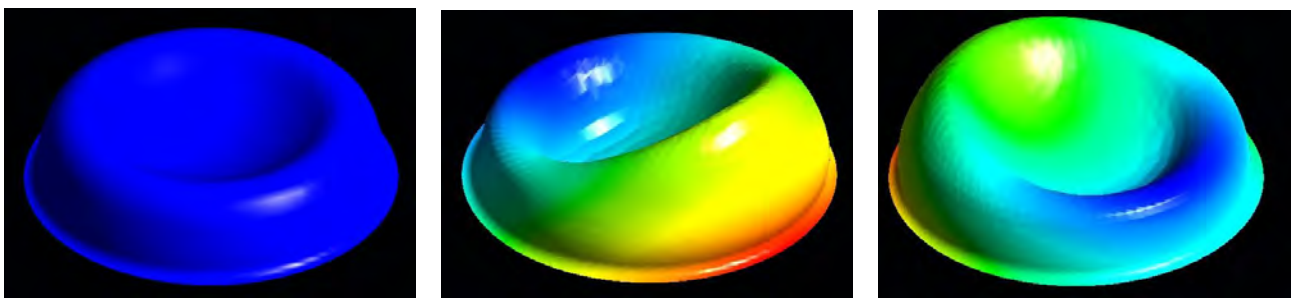


FIGURE 1.16 – Déformations amplifiées de la membrane à trois instants différents provenant des travaux de Sances *et al.* [29]

Une solution pour diminuer le temps de calcul est de simplifier les modèles portant sur les fluides ou la membrane. Levine [25] et Harris [14] proposent de modéliser la membrane comme un solide inextensible, résistant à la flexion, soumis uniquement à la gravité et à la pression hydrostatique des fluides l'environnant. La membrane est représentée par un ensemble de points dont les efforts internes sont dus à sa raideur en flexion et à la contrainte d'inextensibilité : les distances entre chaque couple de points voisins restent constantes. Cette méthode présente l'avantage d'être beaucoup plus rapide mais néglige beaucoup de phénomènes physiques. La comparaison des

formes de la membrane calculées numériquement avec celles obtenues grâce au système expérimental de scanner 3D, décrit dans la section 1.3.2, montre d'importantes différences [25, 14].

En définitive, les simulations de ballottage avec gravité ne sont pas probantes. Considérer toutes les propriétés des fluides et de la membrane augmente considérablement la complexité du problème et nécessite des ressources et des temps de calcul trop importants. La simplification des modèles entraîne des pertes de précision qui dégradent la qualité des résultats et ne permettent pas de retrouver les données expérimentales. A notre connaissance, il n'existe pas d'études numériques portant sur le ballottage en micro-gravité dans les réservoirs à membrane.

1.3.4 Parallèle avec la déformation de cellule biologique

L'étude de la membrane immergée dans un réservoir de satellite présente des similarités avec celles de la dynamique des cellules biologiques rencontrées dans les domaines de la biologie et de la bio-ingénierie. Ces cellules sont composées d'une fine épaisseur d'un matériau dont le comportement est élastique en grande déformation, soit hyperélastique. Elles sont immergées dans un fluide et en contiennent un second. De nombreuses études numériques portent sur la déformation de ces cellules immergées dans un écoulement en fonction de ses caractéristiques élastiques, des propriétés physiques des fluides environnants, *etc.* [3, 20, 27, 28]. Les méthodes numériques généralement utilisées pour l'interaction fluide-membrane dans le cadre des déformations de cellules sont les méthodes de frontières immergées, détaillées dans la section 5.1. La figure 1.17 illustre une simulation numérique de l'écoulement de globules rouges et de plaquettes dans un vaisseau sanguin obtenue par Ii *et al.* [16].

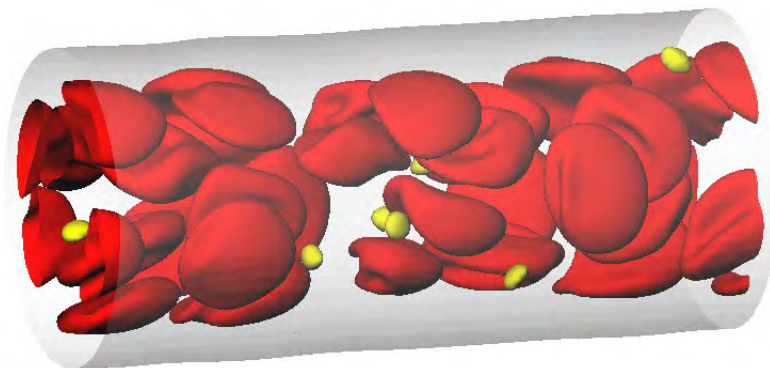


FIGURE 1.17 – Simulation numérique d'un écoulement de globules rouges et de plaquettes dans un vaisseau sanguin [16].

Le parti pris de cette thèse est de ne pas considérer la méthodologie classique détaillée dans la section 1.3.3 mais de mettre en place des méthodes numériques provenant de l'étude des cellules biologiques pour approcher le problème du réservoir à membrane. Les industriels partenaires de cette thèse utilisent en interne le couplage de deux solveurs fluide-solide mais se confrontent à des problèmes de stabilité et de temps de calcul trop importants. L'objectif de la thèse est d'appréhender ce problème d'interaction fluides-membrane avec une méthodologie différente. De plus, les approches utilisées en biomécanique permettent de conserver certaines méthodes numériques déjà implémentées dans le code DIVA pour l'étude du ballottage dans les réservoirs sans membrane (*cf.* section 1.2.3).

Les méthodes numériques développées dans le cadre de la thèse pour modéliser le comportement de la membrane et leurs interactions avec les fluides sont détaillées dans le chapitre 5. La validation de ces méthodes par comparaison avec des cas-tests de la littérature fait l'objet du chapitre 6.

Bibliographie

- [1] ABRAMSON, N. H. The dynamic behaviour of liquids in moving containers, with applications to space vehicle technology. Rapport technique, NASA SP 106, 1967.
- [2] BALLINGER, I. A., LAY, W. D., ET TAM, W. H. Review and history of psi elastomeric diaphragm tanks. In *AIAA Meeting Papers* (1995), AIAA-95-2534, 31st Joint Propulsion Conference and Exhibit.
- [3] BARTHES-BIESEL, D., ET RALLISON, J. M. The time-dependent deformation of a capsule freely suspended in a linear shear flow. *J. Fluid Mech.* 113 (1981), 251–267.
- [4] BERRIVIN, S., DULOT, J.-L., FALLET, C., GUAY, P., LATOURTE, A., MARTINEZ, P.-E., MAUREAU, J., MIGNOT, J., MONTEL, J., PEUS, A., PRIEUR, P., PRIVAT, M., TELLO, M., VANDERMARQ, O., ET TROOSTENBERGHE, P. V. *Techniques et Technologies des Véhicules Spatiaux*. CNES, 2016, ch. Module XII. Stabilisation et pointage, pp. 11–166.
- [5] CADIOU, A., DARNON, F., DILHAN, D., GELAS, C., GIBEK, I., PILLET, N., SALOME, R., ET ARRAT, D. *Techniques et Technologies des Véhicules Spatiaux*. CNES, 2016, ch. Module XI. Propulsion, pp. 277–362.
- [6] CHINTALAPATI, S., HOLICKER, C. A., SCHULMAN, R. E., CONTRERAS, E., GUTIERREZ, H. M., ET KIRK, D. R. Design of an experimental platform for acquisition of liquid slosh data aboard the international space station. In *AIAA Meeting Papers* (2012), AIAA 2012-4297, 48th Joint Propulsion Conference & Exhibit 30 July - 01 August 2012, Atlanta, Georgia.
- [7] CHINTALAPATI, S., HOLICKER, C. A., SCHULMAN, R. E., WISE, B. D., LAPILLI, G. D., GUTIERREZ, H., ET KIRK, D. R. Update on spheres slosh for acquisition of liquid slosh data aboard the ISS. In *AIAA Meeting Papers* (2013), AIAA 2013-3903, 49th Joint Propulsion Conference July 14 - 17, 2013, San Jose, CA.
- [8] CNES. Attitude and orbit control. <http://spot5.cnes.fr/gb/satellite/satellite.htm>.
- [9] CNES. Le vol parabolique. <https://enseignants-mediateurs.cnes.fr/fr/web/CNES-fr/7181-dossier-vol-parabolique.php>.
- [10] CNES. Proteus. <https://proteus.cnes.fr/fr/proteus/fr/index.htm>.
- [11] DODGE, F. T. The new dynamic behaviour of liquids in moving containers. Rapport technique, Southwest Research Institute, Texas, 2000.
- [12] DODGE, F. T., ET KANA, D. D. Dynamics of liquid sloshing in upright and inverted bladdered tanks. *Journal of Fluids Engineering* 109 (1987), 58–63.
- [13] FAURE, J., SARGENT, J., GUTIERREZ, H., KIRK, D., ET TAM, W. Migration of center of gravity on the 40 inch diameter tank with stiffening rings. In *Space Propulsion Meeting Papers* (2016), SP2016_3125270.
- [14] HARRIS, C. A. *Characterization of Sinusoidal Vibration Induced Fluid Motion in Spherical Elastomeric Diaphragm Tanks*. Thèse de doctorat, Florida Institute of Technology, 2013.
- [15] HIRT, C. W., ET NICHOLS, B. D. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 39 (1981), 201–225.
- [16] II, S., SUGIYAMA, K., TAKAGI, S., ET MATSUMOTO, Y. A computational blood flow analysis in a capillary vessel including multiple red blood cells and platelets. *Journal of Biomechanical Science and Engineering* 7, 1 (2012), 72–83.
- [17] JAEKLE, D. E. Propellant management device conceptual design and analysis : Vanes. In *AIAA Meeting Papers* (1991), AIAA-91-2172, 27th Joint Propulsion Conference.
- [18] JAEKLE, D. E. Propellant management device conceptual design and analysis : Sponges. In *AIAA Meeting Papers* (1993), AIAA-93-1970, 29th Joint Propulsion Conference and Exhibit.

- [19] JAEKLE, D. E. Propellant management device conceptual design and analysis : Traps and troughs. In *AIAA Meeting Papers* (1995), AIAA-95-2531, 31st Joint Propulsion Conference and Exhibit.
- [20] LAC, L., BARTHES-BIESEL, D., PELEKASIS, N. A., ET TSAMOPOULOS, J. Spherical capsules in three-dimensional unbounded stokes flows : effect of the membrane constitutive law and onset of buckling. *J. Fluid Mech.* 516 (2004), 303–334.
- [21] LAPILLI, G. D., GUTIERREZ, H., KIRK, D., WISE, B. D., ET TAM, W. Characterization of elastomeric diaphragm motion within a spacecraft propellant tank. In *Space Propulsion Meeting Papers* (2016), SP2016_3125274.
- [22] LAPILLI, G. D., HOLICKER, C. A., GUTIERREZ, H., ET KIRK, D. Design of a liquid sloshing experiment to operate in the international space station. In *AIAA Meeting Papers* (2015), AIAA 2015-4074, 51st Joint Propulsion Conference July 27-29, 2015, Orlando, FL.
- [23] LAPILLI, G. D., KIRK, D., GUTIERREZ, H., SCHALLHORN, P., MARSELL, B., JACOB, R., ET MODER, J. Result of microgravity fluid dynamics captured with the spheres-slosh experiment. In *IAC Meeting Papers* (2015), 66th International Astronautical Congress ; 12-16 Oct. 2015 ; Jerusalem ; Israel.
- [24] LEPILLIEZ, M. *Simulation numérique des ballotements d'ergols dans les réservoirs de satellites en microgravité et à faible nombre de Reynolds*. Thèse de doctorat, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 2015.
- [25] LEVINE, D. V. *Flexible slosh diaphragm modeling and simulation in propellant tanks*. Thèse de doctorat, Florida Institute of Technology, 2012.
- [26] MIGNOT, J., PIERRE, R., BERHANU, M., BUSSET, B., ROUMIGUIÉ, R., BAVESTRELLO, H., BONFANTI, S., MIQUEL, T., MAROT, L. O., ET LLODRA-PEREZ, A. Fluid dynamic in space experiment. *68th International Astronautical Congress (IAC), Adelaide, Australia*, IAC-17-A2.6.2 (25-29 September 2017).
- [27] POZRIKIDIS, C. Effect of membrane bending stiffness on the deformation of ccapsule in simple shear flow. *J. Fluid Mech.* 440 (2001), 269–291.
- [28] RAMANUJAN, S., ET POZRIKIDIS, C. Deformation of liquid capsule enclosed by elastic membranes in simple shear flow : large deformation and the effect of fluid viscosities. *J. Fluid Mech.* 361 (1998), 117–143.
- [29] SANCES, D. J., GANGADHARAN, S. N., SUDERMANN, J. E., ET MARSELL, B. CFD fuel slosh modeling of fluid-structure interaction in spacecraft propellant tanks with diaphragms. In *AIAA Meeting Papers* (2010), AIAA 2010-2955, 51st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 12 - 15 April 2010, Orlando, Florida.
- [30] TAM, W., KAWAHARA, G., WLODARCZYK, K., GUTIERREZ, H., ET KIRK, D. Review of ATK diaphragm tanks - an update. In *Space Propulsion 2018* (2018), SP2018-00024.
- [31] VELDMAN, A., GERRITS, J., LUPPES, R., HELDER, J., ET VREEBURG, J. The numerical simulation of liquid sloshing on board spacecraft. *J. Comput. Phys.* 224 (2007), 82–99.
- [32] VREEBURG, J. P. B. Measured states of sloshsat flevo. Report based on a paper presented at IAF Congress, Fukuoka, Japan, 17-21 October, 2005 NLR-TP-2005-518, National Aerospace Laboratory NLR, 2005.
- [33] YE, T., MITTAL, R., UDAYKUMAR, H. S., ET SHYY, W. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex immersed boundaries. *J. Comput. Phys.* 156 (1999), 209–240.

Modélisation d'écoulements diphasiques dans un domaine irrégulier

Sommaire

2.1 Localisation d'une interface entre deux fluides	32
2.1.1 Méthodes Lagrangiennes	32
2.1.2 Méthodes Eulériennes	33
2.1.3 Méthode level-set	34
2.2 Modèle d'écoulement diphasique	36
2.2.1 Equations de Navier-Stokes	36
2.2.2 Méthode de projection	37
2.2.3 Méthode Ghost Fluid	40
2.2.4 Discrétisation des équations	44
2.3 Conditions aux limites dans un domaine irrégulier	48
2.3.1 Position de la frontière immergée	49
2.3.2 Condition aux limites de vitesse	49
2.3.3 Condition aux limites de pression	51
2.3.4 Angle de contact	53
2.4 Conclusion	54
Bibliographie	55

Ce chapitre porte sur la modélisation et les méthodes numériques utilisées pour suivre le mouvement de deux fluides dans un domaine irrégulier. Dans un premier temps, différentes méthodes pour localiser l'interface entre deux fluides immiscibles sont présentées avec une attention particulière portée sur la méthode level-set, utilisée dans le code DIVA. Par la suite, le modèle d'écoulement diphasique est présenté à travers ces équations constitutives et la méthode de projection permettant leurs résolutions. La démarche entreprise pour considérer les effets de la tension de surface à l'interface est spécifiée avec le détail des discrétisations spatiales et temporelles. Finalement, dans une troisième partie, la gestion des conditions aux limites est décrite dans le cas où l'écoulement partage une frontière irrégulière avec un domaine indéformable.

2.1 Localisation d'une interface entre deux fluides

Afin de reproduire fidèlement le comportement d'un écoulement diphasique, la répartition des deux phases ainsi que la position de leur interface doivent être connues précisément à chaque instant. On distingue deux types de méthodes permettant de décrire l'évolution temporelle d'une interface : les méthodes Lagrangiennes dites de suivi d'interface et les méthodes Eulériennes dites de capture d'interface. Avec les méthodes Lagrangiennes, des marqueurs ou particules sans masse sont advectés par le champ de vitesse local des fluides et indiquent la présence d'un des deux fluides ou directement de l'interface. Avec une méthode Eulérienne, on définit un champ scalaire caractéristique de la présence d'un fluide ou de l'interface, qui est transporté par le champ de vitesse local dans tout le domaine de calcul.

Les prochaines sections donnent quelques exemples de méthodes de suivi et de capture d'interface avec une attention particulière sur la méthode level-set utilisée dans le cadre de cette thèse.

2.1.1 Méthodes Lagrangiennes

Une des premières méthodes dites Lagrangiennes est la méthode Marker And Cell (MAC) de Harlow et Welch [14]. Des marqueurs Lagrangiens sont placés dans la région correspondant à un des deux fluides et sont advectés à chaque itération temporelle par le champ de vitesse local. Cette méthode présente néanmoins de nombreux défauts, le principal étant le nombre très important de marqueurs nécessaires. La dispersion des marqueurs dans l'écoulement doit être suffisamment dense et la connaissance précise de la position de l'interface nécessite une concentration encore plus importante dans les régions limitrophes. Ceci implique un coût élevé en terme de ressource mémoire et de temps de calcul. La figure 2.1 à gauche donne un exemple du nombre important de marqueurs qu'implique l'utilisation de cette méthode.

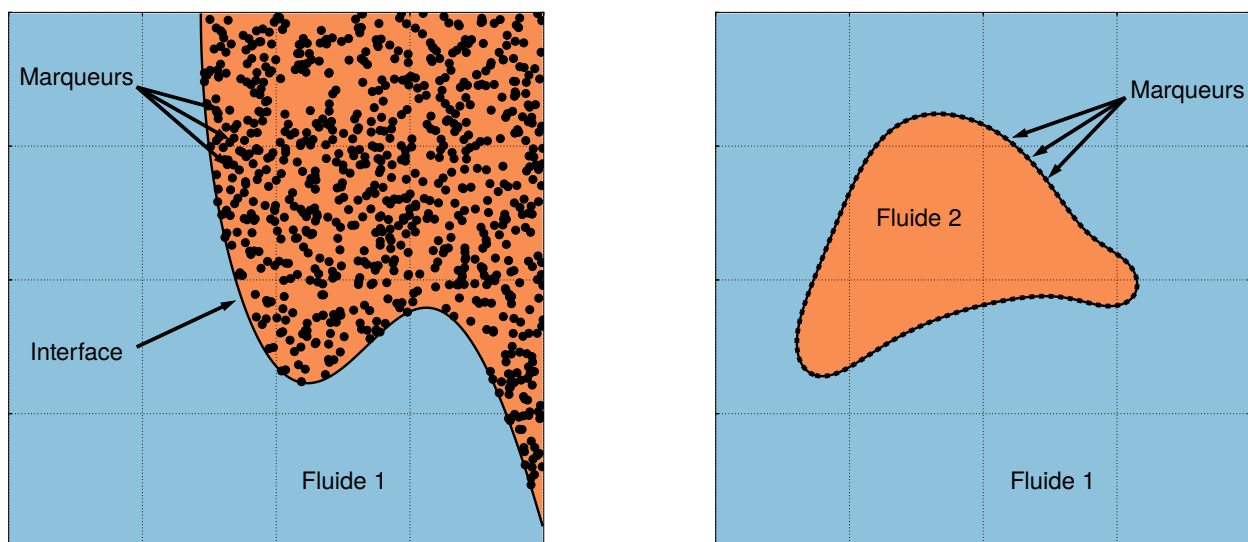


FIGURE 2.1 – Illustrations des méthodes MAC à gauche et Front tracking à droite.

Daly [6] propose une méthode dérivée de la méthode MAC pour suivre le mouvement de l'interface seule. Les marqueurs sont maintenant dispersés uniquement le long de l'interface. La position de cette dernière est donc directement connue si la distance entre deux marqueurs consécutifs reste faible et régulière. Dans le cas contraire, le transport de l'interface et le calcul des propriétés géométriques telles que la courbure perdent en précision, les changements de topologie ne sont pas suivis avec précision et il est alors nécessaire d'ajouter ou d'enlever des marqueurs durant la simulation en fonction des écarts observés. La méthode de Front tracking a

été développée par Glimm *et al.* [4, 12] pour repérer plus précisément la position de l'interface avec le temps. Les marqueurs Lagrangiens sont distribués régulièrement le long de l'interface formant entre eux des segments dans les cas 2D ou des triangles dans les cas 3D (*cf.* figure 2.1 à droite). Ces marqueurs forment un second maillage d'une dimension inférieure au maillage global sur lequel les discontinuités à l'interface sont calculées. Unverdi et Tryggvason [36] ont proposé la forme la plus répandue de la méthode Front tracking, néanmoins, cette méthode gère difficilement l'interaction entre plusieurs interfaces pour les cas de rupture ou de coalescence.

Les méthodes Boundary fitted modifient directement le maillage principal pour s'adapter à l'interface. Les conditions de saut sont directement considérées à l'interface comme des conditions aux limites sur le maillage. Ceci permet une plus grande précision lorsque le maillage coïncide bien avec l'interface. Le principal inconvénient est que le maillage est mobile, il évolue à chaque pas de temps, ce qui augmente le temps de calcul. Cette méthode a notamment été utilisée pour des simulations d'ascension de bulles [7, 29]. La figure 2.2 montre un exemple de maillage axisymétrique dont une partie de la frontière se conforme à la surface d'une bulle en ascension [29]. Cette méthode peut s'avérer complexe à mettre en place dans les cas où l'interface est fortement déformée ou si des changements de topologie sont à considérer.

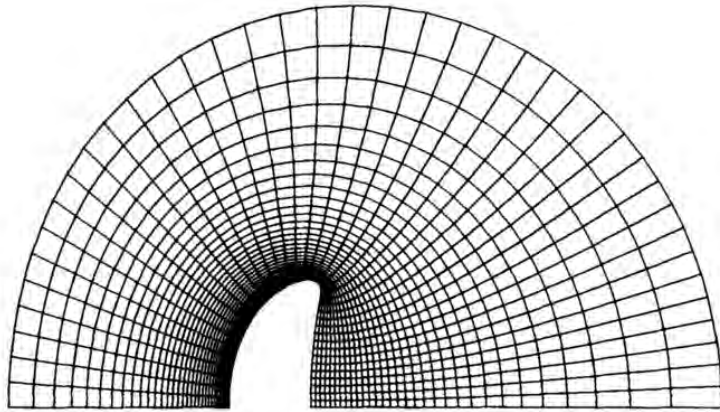


FIGURE 2.2 – Exemple de maillage obtenu avec la méthode Boundary fitted par Ryskin et Leal [29].

2.1.2 Méthodes Eulériennes

La position de l'interface avec une méthode Eulérienne repose sur la définition d'un champ scalaire spécifique au sein d'un maillage global fixe. Ce champ scalaire est transporté par le champ de vitesse local à chaque itération temporelle et permet de façon implicite de déterminer la position des deux régions fluides et de l'interface.

La méthode Volume Of Fluid (VOF), introduite par Hirt et Nichols [15], utilise une fonction scalaire C caractérisant la fraction volumique de l'un des deux fluides présents dans la maille de calcul. Ainsi, une maille remplie du fluide en question donne $C = 1$ et une maille remplie du second fluide donne $C = 0$. Les mailles pour lesquelles la fonction C est différente de 0 et de 1 incluent l'interface. Le champ scalaire C est advecté par le champ de vitesse local par l'équation de transport suivante

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0. \quad (2.1.1)$$

Le champ scalaire C est constant dans chacune des régions fluides mais présente de fortes variations au niveau de l'interface. Le gradient de C dans l'équation de transport se doit d'être discrétisé avec une grande précision pour permettre ces variations brusques.

Le transport de la fraction volumique implique une bonne conservation de la masse avec le temps, néanmoins, la localisation précise de l'interface n'est pas connue a priori et rend le calcul des propriétés géométriques, telles

que la normale ou la courbure à l'interface, plus complexe. Un algorithme de reconstruction est nécessaire à chaque pas de temps pour reconstituer l'interface à partir des valeurs discrètes de la fonction C . La première méthode de reconstruction est la méthode SLIC (Simple Line Interface Calculation) de Noh et Woodward [24] pour laquelle l'interface est constituée de segments de droites alignés avec les directions principales du maillage. Youngs [37] propose une amélioration de la méthode SLIC pour laquelle l'interface est maintenant approximée par un segment de droite non aligné avec le maillage. Cette méthode, baptisée PLIC (Piecewise Line Interface Calculation), utilise les valeurs du champ C aux points du maillage voisins de la cellule de calcul pour déduire l'orientation du segment représentant l'interface. Avec la méthode VOF, la normale à l'interface se déduit directement du gradient de la fonction C par

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla C}{\|\nabla C\|}. \quad (2.1.2)$$

La figure 2.3 montre sur un exemple d'interface circulaire les valeurs du champ C dans les cellules du maillage et des illustrations des interfaces reconstruites avec les méthodes SLIC et PLIC.

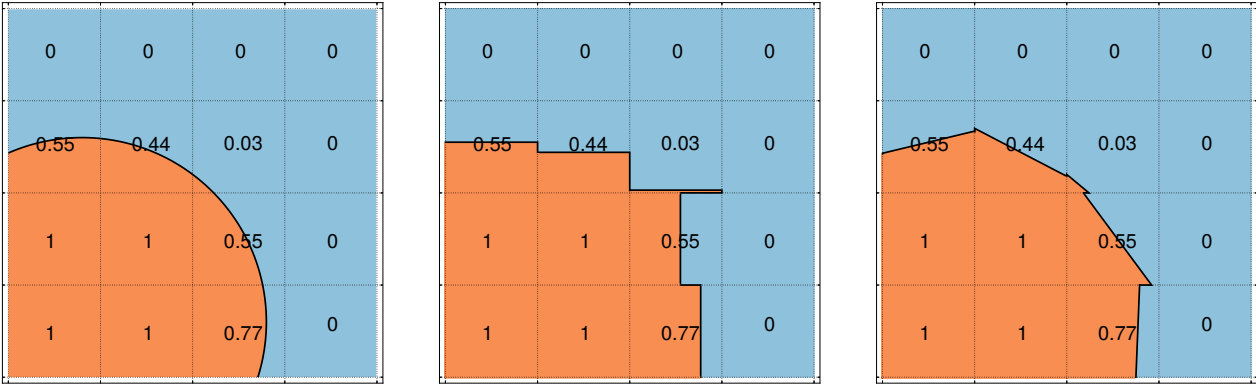


FIGURE 2.3 – Interface initiale et valeurs de la fonction C à gauche, reconstruction de l'interface avec les méthodes SLIC (au centre) et PLIC (à droite).

Les schémas numériques utilisés pour le transport de la fonction C et la reconstruction de l'interface ont été améliorés par de nombreux auteurs [13, 17, 26, 27, 28, 30] pour permettre une plus grande précision sur l'évolution temporelle de l'interface, la conservation de la masse, le calcul de la courbure, *etc.*

La seconde méthode Eulérienne permettant de suivre l'interface entre deux fluides est la méthode level-set dont le fonctionnement est détaillée dans la section suivante.

2.1.3 Méthode level-set

2.1.3.1 Définition et transport d'une fonction level-set

La méthode level-set a été introduite par Osher et Sethian [25]. Elle consiste à définir un champ scalaire ϕ correspondant à la distance signée à l'interface dans tout le domaine de calcul Ω . Ce domaine est découpé en deux régions Ω^+ et Ω^- , correspondant à deux fluides différents, définies grâce au signe de la fonction level-set tel que

$$\Omega^+ = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \phi(\mathbf{x}) > 0\}, \quad (2.1.3)$$

$$\Omega^- = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \phi(\mathbf{x}) < 0\}, \quad (2.1.4)$$

et l'interface Γ est caractérisée par la ligne de niveau zéro du champ level-set

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (2.1.5)$$

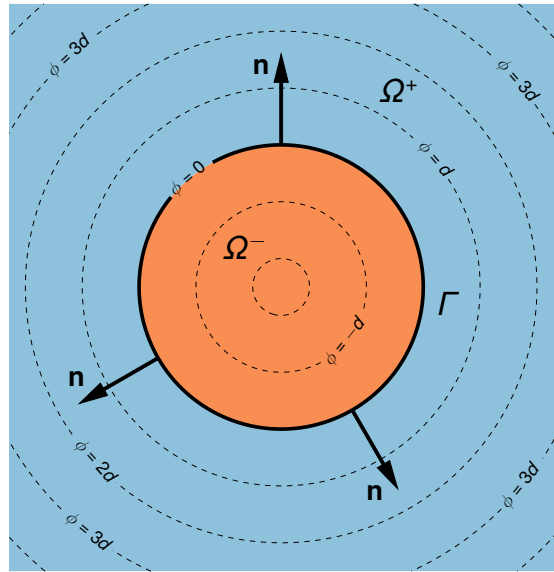


FIGURE 2.4 – Champ level-set correspondant à une interface circulaire.

La valeur absolue de la fonction ϕ en tout point de l'espace correspond à la distance minimale entre ce point et l'interface. Les propriétés physiques des deux fluides, telles que la masse volumique ρ et la viscosité dynamique μ , se déduisent directement du signe de la fonction level-set et sont, en conséquence, notées avec l'exposant "+" ou "-". La figure 2.4 montre un exemple d'un champ level-set pour le cas d'une interface circulaire. L'évolution temporelle de l'interface se déduit de l'équation d'advection suivante

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = 0, \quad (2.1.6)$$

avec \mathbf{u} le champ de vitesse des fluides.

Le principal avantage de la méthode level-set par rapport aux autres méthodes de capture d'interface est qu'il est très simple de déduire les caractéristiques géométriques de l'interface telles que sa normale \mathbf{n} ou sa courbure locale κ de façon précise. Ces dernières dérivent directement de la fonction level-set

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}, \quad (2.1.7)$$

$$\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n} = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \right). \quad (2.1.8)$$

2.1.3.2 Algorithme de réinitialisation

L'équation d'advection seule ne suffit pas à conserver la propriété de distance à l'interface, notamment dans le cas d'écoulements fortement cisailés. Pour ce faire, il est nécessaire d'appliquer l'algorithme de réinitialisation proposé par Sussman *et al.* [34]. Celui-ci conserve la position de l'interface et réajuste les lignes de niveaux pour qu'elles respectent la propriété de distance $\|\nabla\phi\| = 1$. L'algorithme consiste à résoudre itérativement le système suivant jusqu'à ce que la solution converge vers la fonction distance

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial \tau} + \text{signe}(\phi)(1 - \|\nabla d\|) = 0, \\ d(\tau = 0) = \phi, \end{cases} \quad (2.1.9)$$

avec τ le temps fictif sur lequel la fonction distance d est corrigée. La fonction signe est lissée au niveau de l'interface et correspond à

$$\text{signe}(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi^2 + \varepsilon^2}}, \quad (2.1.10)$$

avec $\varepsilon = 1.5 \max(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ l'épaisseur fictive de l'interface sur laquelle la fonction est lissée. A l'instant fictif initial, la fonction distance prend la valeur de la fonction level-set à corriger puis l'algorithme est itéré jusqu'à ce que la fonction d respecte la condition $\|\nabla d\| = 1$. La fonction d obtenue devient la nouvelle fonction level-set ϕ . La variation relative des lignes de niveaux à chaque itération temporelle étant faible, très peu d'itérations sur le temps fictif sont nécessaires pour converger vers la solution respectant la propriété de distance.

Un inconvénient de cet algorithme est la non-conservation de la masse. En effet, durant cette étape de réinitialisation, la position de la ligne de niveau zéro peut être légèrement modifiée et induire une perte ou un gain de masse. Néanmoins, cette perturbation de l'interface reste faible lorsque le maillage est suffisamment fin.

2.2 Modèle d'écoulement diphasique

2.2.1 Equations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes incompressibles permettent de décrire le mouvement d'un fluide au sein d'un domaine Ω tel que

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \bar{\mathbf{D}}) + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (2.2.2)$$

avec t le temps, ρ et μ respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ le champ de vitesse, p le champ de pression, \mathbf{F}_{ext} la force volumique extérieure et $\bar{\mathbf{D}}$ le tenseur des taux de déformation défini par

$$\bar{\mathbf{D}} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}. \quad (2.2.3)$$

On considère maintenant que le domaine de calcul Ω est découpé en deux régions Ω^+ et Ω^- contenant chacune un fluide différent. Les caractéristiques physiques de ces deux fluides sont notées respectivement (ρ^+, μ^+) et (ρ^-, μ^-) . L'interface entre ces deux régions est notée Γ et \mathbf{n} est son vecteur unitaire normal.

On définit deux champs scalaires globaux pour la masse volumique et la viscosité tels que

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho^+ & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ \rho^- & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mu^+ & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ \mu^- & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases}. \quad (2.2.4)$$

Les équations de Navier-Stokes pour un écoulement diphasique s'écrivent alors

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \bar{\mathbf{D}}) + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (2.2.6)$$

$$\left[\mathbf{n} \cdot (p \bar{\mathbf{I}} - 2\mu \bar{\mathbf{D}}) \cdot \mathbf{n} \right]_{\Gamma} = \sigma \kappa. \quad (2.2.7)$$

avec $\bar{\mathbf{I}}$ le tenseur identité, σ le coefficient de tension de surface, κ la courbure locale de l'interface et $[\cdot]_{\Gamma}$ l'opérateur de saut à l'interface Γ défini par

$$[A]_{\Gamma} = A^+ - A^-. \quad (2.2.8)$$

Les équations de Navier-Stokes incompressibles sont inchangées dans chaque région fluide mais une condition de saut à l'interface est ajoutée pour prendre en compte l'équilibre des contraintes normales de pression, de

viscosité et de la force de tension de surface [16, 30]. Dans le cadre de cette étude, nous ne considérons pas de changement de phase. L'interface est inerte et du fait des effets visqueux, la vitesse est continue à l'interface,

$$[\mathbf{u}]_{\Gamma} = \mathbf{0}. \quad (2.2.9)$$

De plus, en l'absence d'effets Marangoni, les contraintes tangentielles sont également continues

$$\left[\mu \mathbf{t}_1 \cdot \bar{\bar{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{n} \right]_{\Gamma} = 0, \quad (2.2.10)$$

$$\left[\mu \mathbf{t}_2 \cdot \bar{\bar{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{n} \right]_{\Gamma} = 0, \quad (2.2.11)$$

avec \mathbf{t}_1 et \mathbf{t}_2 deux vecteurs unitaires tangents à l'interface et orthogonaux entre eux. On peut alors déduire de la divergence nulle de la vitesse que la dérivée normale de la vitesse est également continue à l'interface [16, 30]. La condition de saut (2.2.7) se réécrit alors comme un saut sur le champ de pression

$$[p]_{\Gamma} - 2[\mu]_{\Gamma} (\nabla u \cdot \mathbf{n}, \nabla v \cdot \mathbf{n}, \nabla w \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \sigma \kappa. \quad (2.2.12)$$

Lalanne *et al.* [18] ont montré qu'une condition de saut sur une variable scalaire ψ de type $[\psi]_{\Gamma} = a$ induit deux termes sources, à son gradient et son laplacien, tels que

$$\nabla \psi = a \mathbf{n} \delta_{\Gamma} \quad \text{et} \quad \Delta \psi = \nabla \cdot (a \mathbf{n} \delta_{\Gamma}), \quad (2.2.13)$$

avec δ_{Γ} la distribution de Dirac. Ils explicitent également que le tenseur visqueux peut être décomposé en deux parties

$$\nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}) = \mu \nabla \cdot (2\bar{\bar{\mathbf{D}}}) + 2\bar{\bar{\mathbf{D}}} \cdot \nabla \mu, \quad (2.2.14)$$

pour lequel, si la viscosité est constante par morceaux dans le domaine, $\nabla \mu = [\mu]_{\Gamma} \mathbf{n} \delta_{\Gamma}$. Le premier terme de la décomposition est donc continu et le second différent de zéro uniquement à l'interface

$$\nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}) = \mu \nabla \cdot (2\bar{\bar{\mathbf{D}}}) + 2[\mu]_{\Gamma} \bar{\bar{\mathbf{D}}} \cdot \mathbf{n} \delta_{\Gamma}. \quad (2.2.15)$$

Ceci confirme que le saut de la contrainte visqueuse normale dans l'équation (2.2.12) est implicitement pris en compte en considérant la divergence du tenseur visqueux complet $\nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}})$ dans les équations de Navier-Stokes. La contribution de la tension de surface apparaît alors comme un saut de pression à l'interface $[p]_{\Gamma} = \sigma \kappa$. Cette condition de saut peut être transformée en un terme source dans les équations de Navier-Stokes (*cf.* équation (2.2.13)) qui deviennent alors

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2.16)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}) + \mathbf{F}_{\text{ext}} + \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_{\Gamma}. \quad (2.2.17)$$

2.2.2 Méthode de projection

La résolution des équations de Navier-Stokes s'effectue avec la méthode de projection introduite par Chorin [5] pour les écoulements monophasiques. Celle-ci repose sur la décomposition de Hodge de tout champ vectoriel en la somme d'un champ vectoriel à divergence nulle et d'un champ vectoriel irrotationnel pouvant s'écrire sous la forme d'une dérivée d'un potentiel scalaire. Cette méthode permet de découpler la résolution du champ de vitesse \mathbf{u} et du champ de pression p .

En considérant un écoulement monophasique dont les champs de vitesse et de pression à l'instant t^{n+1} : \mathbf{u}^{n+1} et p^{n+1} sont inconnus, la méthode de projection de Chorin [5] donne avec une discrétisation temporelle explicite

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \quad (2.2.18)$$

$$\rho \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} + (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \right) = -\nabla p^{n+1} + \nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}^n) + \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (2.2.19)$$

La première étape dite de prédiction consiste à calculer un champ de vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* prenant en compte les termes de l'équation de la quantité de mouvement (2.2.19) sans le terme de pression

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n - \Delta t \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{\nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}^n)}{\rho} - \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{\rho} \right). \quad (2.2.20)$$

En remplaçant cette expression dans l'équation (2.2.19), on peut écrire que

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} + \Delta t \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho}, \quad (2.2.21)$$

et l'on retrouve bien la décomposition du champ \mathbf{u}^* en une composante à divergence nulle \mathbf{u}^{n+1} d'après (2.2.18) et une composante dérivant du potentiel scalaire p . En appliquant l'opérateur de divergence à cette décomposition, on obtient une équation de Poisson sur la pression

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (2.2.22)$$

Après résolution de ce système linéaire, la vitesse \mathbf{u}^{n+1} se déduit directement de la décomposition de Hodge

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho}. \quad (2.2.23)$$

Dans le cadre de cette étude, deux fluides différents sont présents dans le domaine. Les sauts de propriétés physiques et de pression à l'interface doivent être considérés et deux méthodologies principales existent. La première est la méthode Continuum Surface Force (CSF) pour laquelle l'interface est épaissie artificiellement sur une certaine zone où les sauts de propriétés physiques sont lissés et les efforts capillaires ajoutés en tant que termes sources. La deuxième méthode est discontinue, les conditions de saut sont directement intégrées aux schémas différences finies lorsque l'interface traverse une cellule du maillage. Ces deux méthodes sont expliquées dans les deux sections suivantes.

2.2.2.1 Méthode Continuum Surface Force

La méthode Continuum Surface Force (CSF) a été introduite par Brackbill *et al.* [3] pour modéliser les effets de la tension de surface entre deux fluides. Elle consiste à définir une zone de transition entre les deux fluides sur laquelle les sauts sont lissés et les forces ponctuelles sont imposées. Les champs de masse volumique et de viscosité dynamique décrits par l'équation (2.2.4) sont définis grâce à une distribution d'Heaviside H_Γ égale à 1 dans Ω^+ , 0 sinon tel que

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho^- + H_\Gamma(\mathbf{x})(\rho^+ - \rho^-), \quad (2.2.24)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu^- + H_\Gamma(\mathbf{x})(\mu^+ - \mu^-). \quad (2.2.25)$$

Dans le cadre de la méthode CSF, on définit une distribution de Heaviside lissée H_ε pour laquelle une zone de transition de taille ε permet le passage de 0 à 1. Celle-ci est définie par rapport à la fonction level-set ϕ telle que

$$H_\varepsilon(\phi^{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \phi^{n+1} < -\varepsilon, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\phi^{n+1}}{\varepsilon} + \frac{\sin(\pi\phi^{n+1}/\varepsilon)}{\pi} \right) & \text{si } |\phi^{n+1}| < \varepsilon, \\ 1 & \text{si } \phi^{n+1} > \varepsilon, \end{cases} \quad (2.2.26)$$

avec ε l'épaisseur fictive de la membrane égale à deux ou trois fois le pas d'espace Δx [18].

On définit de la même manière une distribution de Dirac lissée δ_ε au niveau de l'interface qui s'obtient par dérivation de la distribution de Heaviside par rapport à la variable ϕ ,

$$\delta_\varepsilon(\phi^{n+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\phi^{n+1}| > \varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\phi^{n+1}}{\varepsilon}\right) \right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.2.27)$$

La méthode de projection de Chorin [5] est appliquée au système d'équations (2.2.16) avec les distributions lissées. Elle est constituée de l'étape de prédiction avec le terme source correspondant à la tension de surface

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n - \Delta t \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{\nabla \cdot (2\mu^{n+1} \bar{\mathbf{D}}^n)}{\rho^{n+1}} - \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{\rho^{n+1}} - \frac{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\varepsilon}{\rho^{n+1}} \right). \quad (2.2.28)$$

Par la suite, l'étape de projection permet de résoudre le champ de pression

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}. \quad (2.2.29)$$

Et l'étape de correction permet d'obtenir le champ de vitesse à divergence nulle à partir de la vitesse intermédiaire et du champ de pression

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta t \frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}}. \quad (2.2.30)$$

Cette méthode est simple à mettre en place car il suffit d'ajouter un terme source aux équations de Navier-Stokes néanmoins, le lissage de l'interface peut entraîner la formation de courants parasites. Afin de réduire ces perturbations, d'autres méthodes numériques permettent de conserver l'aspect discontinu des conditions de saut.

2.2.2.2 Méthodes discontinues

Les méthodes numériques dites discontinues permettent de modéliser un écoulement diphasique incompressible en considérant une interface infiniment fine. L'approche Ghost Fluid permet d'intégrer les conditions de saut dans le modèle en modifiant directement les schémas différences finies à l'interface. Le détail de son fonctionnement fait l'objet de la section 2.2.3. Différentes méthodes de résolution utilisant cette approche sont détaillées dans [18, 20]. Dans le cadre de cette thèse, seulement deux méthodes de résolution basées sur la méthode Ghost Fluid sont considérées. Elles sont dénommées Ghost Fluid Conservative viscous Method (GFCM) et Ghost Fluid Conservative viscous Method Implicit (GFCMI) dans [18, 20]. Elles ont été introduites par Sussman *et al.* [35] et intègrent le terme de capillarité comme une condition de saut sur la pression dans les étapes de projection et correction de la méthode de Chorin [5].

La vitesse intermédiaire est calculée de la même façon que dans la méthode originale avec une attention particulière pour le terme visqueux car la viscosité présente un saut de valeur à l'interface

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n - \Delta t \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{\nabla \cdot (2\mu^{n+1} \bar{\mathbf{D}}^n)}{\rho^{n+1}} - \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{\rho^{n+1}} \right). \quad (2.2.31)$$

La discrétisation du saut de viscosité à l'interface est détaillée dans la section 2.2.4.2. Le champ de pression est ensuite déterminée en résolvant l'équation de Poisson suivante avec la condition de saut à l'interface,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \nabla \cdot \left(\frac{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma}{\rho^{n+1}} \right), \quad (2.2.32)$$

car rappelons ici que l'ajout de $\nabla \cdot (\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma / \rho^{n+1})$ au second membre de l'équation de Poisson revient à imposer la condition de saut $[p]_\Gamma = \sigma \kappa$ [18]. La discrétisation du saut de pression est détaillée dans la section 2.2.4.3.

Finalement, le champ de vitesse intermédiaire est corrigé pour prendre en compte la condition de divergence nulle

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} (\nabla p^{n+1} - \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma). \quad (2.2.33)$$

La méthode GFCMI repose sur le même principe en considérant le terme visqueux dans l'étape de prédiction de façon implicite. L'intérêt de cette manipulation est de supprimer la restriction sur le pas de temps due à la viscosité. En contrepartie, l'équation (2.2.31) devient le système linéaire suivant dont la résolution des trois composantes de la vitesse intermédiaire est couplée,

$$\mathbf{u}^* - \Delta t \frac{\nabla \cdot (2\mu^{n+1} \bar{\mathbf{D}}^*)}{\rho^{n+1}} = \mathbf{u}^n - \Delta t \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{\rho^{n+1}} \right). \quad (2.2.34)$$

Les deux autres étapes de la méthode de projection sont identiques à celles de la GFCM. La méthode Ghost Fluid, permettant la prise en compte discontinue de sauts de variable ou de dérivée de variable, est présentée dans la section suivante.

2.2.3 Méthode Ghost Fluid

La méthode Ghost Fluid permet de prendre en compte des conditions de saut au niveau d'une interface dans un système d'équations aux dérivées partielles discrétisé sur un maillage cartésien. Elle a été introduite par Fedkiw *et al.* [10] pour résoudre des écoulements non visqueux avec discontinuités à l'interface puis a été étendue aux écoulements diphasiques avec viscosité, tension de surface et gravité par Kang *et al.* [16].

La méthode nécessite de connaître précisément la position de l'interface et la valeur des sauts. Les schémas de dérivation intersectés par l'interface sont modifiés afin qu'ils ne présentent pas de discontinuité due au saut. La figure 2.5 montre un exemple sur un cas monodimensionnel. A partir de chaque région (représentée en rouge ou bleu dans la figure), les valeurs de la fonction f sont extrapolées sur un certain nombre de points situés de l'autre côté de l'interface grâce à la connaissance de la valeur du saut. Ces valeurs fantômes remplacent les valeurs réelles situées de l'autre côté de l'interface dans les schémas de dérivation pour garantir la continuité de la fonction tout en conservant le saut de valeur à l'interface.

Soit l'équation de Poisson 1D proposée dans [21]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial f}{\partial x} \right) = S_{cm}, \quad (2.2.35)$$

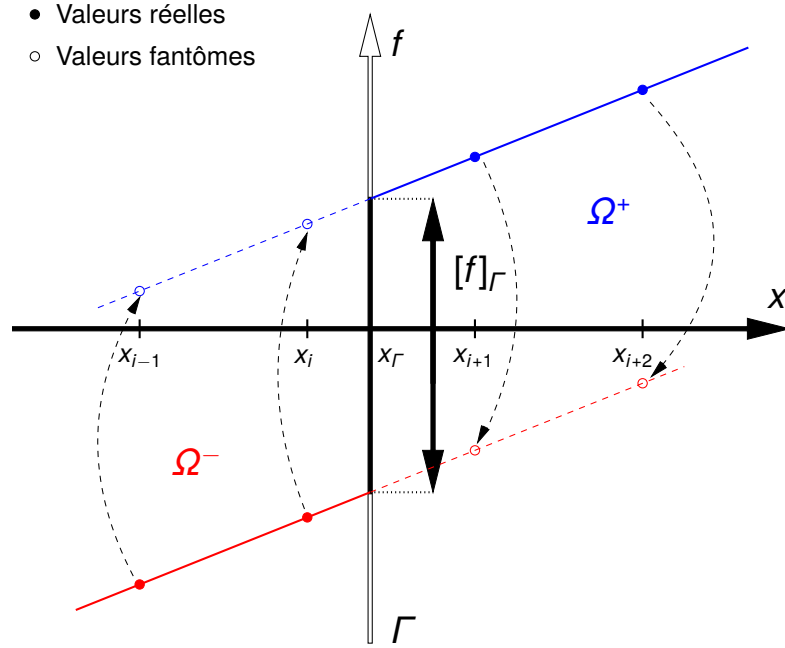
discrétisée, en l'absence de conditions de saut, avec un schéma centré d'ordre 2 sous la forme

$$\frac{\beta_{i+1/2} \left(\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right) - \beta_{i-1/2} \left(\frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = S_{cm}|_i. \quad (2.2.36)$$

Nous détaillons dans les prochaines sections les modifications à apporter aux schémas de discrétisation en considérant trois différents types de conditions de saut : le saut sur la variable $[f]_\Gamma = a(x_\Gamma)$ (comme représenté sur la figure 2.5), le saut sur le flux $[\beta \frac{\partial f}{\partial x}]_\Gamma = b(x_\Gamma)$ et le saut sur le coefficient de diffusion $[\beta]_\Gamma \neq 0$. Ces trois types de conditions de saut peuvent être cumulés et l'extension aux problèmes 2D ou 3D ne présente pas de difficulté supplémentaire.

2.2.3.1 Saut de la variable

Dans un premier temps, on considère un saut de la variable $[f]_\Gamma = a(x_\Gamma)$ au niveau de l'interface située entre les points du maillage x_i et x_{i+1} comme sur la figure 2.5. Nous nous intéressons à la discrétisation de l'équation de Poisson aux deux points voisins de l'interface x_i et x_{i+1} .

FIGURE 2.5 – Illustration 1D d'un saut d'une variable f avec la méthode Ghost Fluid.

Au point x_i , l'équation de Poisson est discrétisée par

$$\frac{\beta_{i+1/2} \left(\frac{f_{i+1}^+ - f_i^-}{\Delta x} \right) - \beta_{i-1/2} \left(\frac{f_i^- - f_{i-1}^-}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = S_{cm}|_i, \quad (2.2.37)$$

avec les exposants $+$ et $-$ caractérisant la région dans laquelle la valeur est considérée : Ω^+ ou Ω^- . Le calcul de la première dérivée comprend un saut de valeur puisque l'on passe d'une région à l'autre. Afin d'y remédier, la fonction f_{i+1}^+ est remplacée par sa valeur fantôme prolongée par continuité au point x_{i+1} appartenant à la région Ω^- notée f_{i+1}^- . Cette valeur fantôme est définie telle que

$$f_{i+1}^- = f_{i+1}^+ - [f]_\Gamma = f_{i+1}^+ - a(x_\Gamma). \quad (2.2.38)$$

La discrétisation de l'équation de Poisson sans le mélange des termes des différentes régions devient alors

$$\frac{\beta_{i+1/2} \left(\frac{f_{i+1}^- - f_i^-}{\Delta x} \right) - \beta_{i-1/2} \left(\frac{f_i^- - f_{i-1}^-}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = S_{cm}|_i, \quad (2.2.39)$$

que l'on peut écrire grâce à la définition de la valeur fantôme f_{i+1}^- par

$$\frac{\beta_{i+1/2} \left(\frac{(f_{i+1}^+ - a(x_\Gamma)) - f_i^-}{\Delta x} \right) - \beta_{i-1/2} \left(\frac{f_i^- - f_{i-1}^-}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = S_{cm}|_i, \quad (2.2.40)$$

soit

$$\frac{\beta_{i+1/2} \left(\frac{f_{i+1}^+ - f_i^-}{\Delta x} \right) - \beta_{i-1/2} \left(\frac{f_i^- - f_{i-1}^-}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = S_{cm}|_i + \beta_{i+1/2} \frac{a(x_\Gamma)}{\Delta x^2}. \quad (2.2.41)$$

On retrouve la discrétisation originelle de l'équation de Poisson avec un terme source au second membre permettant de compenser les effets de la condition de saut entre les points x_i et x_{i+1} .

De la même façon, au point x_{i+1} , l'équation de Poisson originelle est

$$\frac{\beta_{i+3/2} \left(\frac{f_{i+2}^+ - f_{i+1}^+}{\Delta x} \right) - \beta_{i+1/2} \left(\frac{f_{i+1}^+ - f_i^-}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = S_{cm}|_{i+1}. \quad (2.2.42)$$

On retrouve le saut de la variable dans le calcul de la seconde dérivée par le passage d'une région à l'autre. De la même façon, on définit la valeur fantôme $f_i^+ = f_i^- + [f]_\Gamma = f_i^- + a(x_\Gamma)$, et on modifie la discrétisation de l'équation de Poisson pour qu'elle ne considère que les valeurs d'une même région,

$$\frac{\beta_{i+3/2} \left(\frac{f_{i+2}^+ - f_{i+1}^+}{\Delta x} \right) - \beta_{i+1/2} \left(\frac{f_{i+1}^+ - f_i^+}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = S_{cm}|_{i+1}, \quad (2.2.43)$$

qui en remplaçant par la valeur de f_i^+ donne,

$$\frac{\beta_{i+3/2} \left(\frac{f_{i+2}^+ - f_{i+1}^+}{\Delta x} \right) - \beta_{i+1/2} \left(\frac{f_{i+1}^+ - (f_i^- + a(x_\Gamma))}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = S_{cm}|_{i+1}, \quad (2.2.44)$$

soit

$$\frac{\beta_{i+3/2} \left(\frac{f_{i+2}^+ - f_{i+1}^+}{\Delta x} \right) - \beta_{i+1/2} \left(\frac{f_{i+1}^+ - f_i^-}{\Delta x} \right)}{\Delta x} = S_{cm}|_{i+1} - \beta_{i+1/2} \frac{a(x_\Gamma)}{\Delta x^2}. \quad (2.2.45)$$

Là aussi, la discrétisation originelle est conservée avec un terme source pour prendre en compte les effets de la condition de saut dans le calcul des dérivées.

2.2.3.2 Saut du flux

On s'intéresse maintenant au saut du flux $\left[\beta \frac{\partial f}{\partial x} \right]_\Gamma = b(x_\Gamma)$. En considérant que l'interface coupe l'axe horizontal entre x_i et x_{i+1} , la discrétisation de l'équation de Poisson au point x_i donne

$$\frac{\left(\beta_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right)^+ - \left(\beta_{i-1/2} \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \right)^-}{\Delta x} = S_{cm}|_i, \quad (2.2.46)$$

avec les exposants + et - correspondant aux régions où le flux est calculé. La dérivée entre les points $x_{i-1/2}$ et $x_{i+1/2}$ n'est pas continue du fait du saut à l'interface. Le point x_i se situant dans la région Ω^- , la discrétisation devrait être écrite sous la forme

$$\frac{\left(\beta_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right)^- - \left(\beta_{i-1/2} \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \right)^-}{\Delta x} = S_{cm}|_i, \quad (2.2.47)$$

avec, de la même façon que dans la section précédente, la définition d'un flux fantôme $\left(\beta_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right)^-$ correspondant à l'extension par continuité du flux situé dans la région Ω^+ aux points situés dans Ω^- telle que

$$\left(\beta_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right)^- = \left(\beta_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right)^+ - \left[\beta \frac{\partial f}{\partial x} \right]_\Gamma = \left(\beta_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right)^+ - b(x_\Gamma). \quad (2.2.48)$$

En définitive, l'équation de Poisson discrétisée avec le saut de flux devient

$$\frac{\left(\left(\beta_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right)^+ - b(x_\Gamma) \right) - \left(\beta_{i-1/2} \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \right)^-}{\Delta x} = S_{cm}|_i, \quad (2.2.49)$$

soit, en retrouvant la discrétisation originelle avec un second membre,

$$\frac{\left(\beta_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} \right)^+ - \left(\beta_{i-1/2} \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} \right)^-}{\Delta x} = S_{cm}|_i + \frac{b(x_\Gamma)}{\Delta x}. \quad (2.2.50)$$

2.2.3.3 Saut du coefficient de diffusion

Le troisième cas de condition de saut est celui du saut du coefficient de diffusion $[\beta]_\Gamma = \beta^+ - \beta^-$. En considérant toujours le même cas où l'interface coupe l'axe 1D entre x_i et x_{i+1} , la discrétisation de l'équation de Poisson (2.2.36) comprend les deux valeurs du coefficient de diffusion $\beta_{i-1/2}$ et $\beta_{i+1/2}$.

Les points x_{i-1} et x_i appartiennent à la région Ω^- , ce qui entraîne que $\beta_{i-1/2} = \beta^-$. Pour calculer $\beta_{i+1/2}$, on utilise la continuité du flux à l'interface, qui peut s'écrire

$$\beta_{i+1/2} \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} = \beta^- \frac{f_\Gamma - f_i}{(1-\theta)\Delta x} = \beta^+ \frac{f_{i+1} - f_\Gamma}{\theta\Delta x}, \quad (2.2.51)$$

avec f_Γ la valeur de la fonction f à l'interface et $\theta\Delta x$ la distance entre le point x_{i+1} et l'interface, comme illustrée par la figure 2.6 et définie avec la méthode level-set par

$$\theta = \frac{|\phi_{i+1}|}{|\phi_i| + |\phi_{i+1}|}. \quad (2.2.52)$$

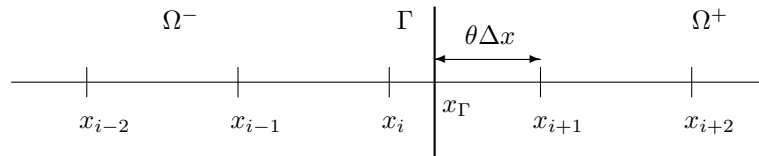


FIGURE 2.6 – Intersection de la grille par la membrane.

On déduit de l'égalité des flux des deux côtés de l'interface la valeur de la fonction à l'interface f_Γ

$$f_\Gamma = \frac{\beta^- f_i \theta + \beta^+ f_{i+1} (1-\theta)}{\beta^- \theta + \beta^+ (1-\theta)}. \quad (2.2.53)$$

En remplaçant cette valeur par son expression, l'égalité avec la forme générale du flux entre les points x_i et x_{i+1} donne la valeur du coefficient $\beta_{i+1/2}$

$$\beta_{i+1/2} = \frac{\beta^- \beta^+}{\beta^- \theta + \beta^+ (1-\theta)}. \quad (2.2.54)$$

Contrairement aux deux conditions de saut présentées précédemment, le saut du coefficient de diffusion entraîne une modification des coefficients du système linéaire à résoudre et n'ajoute pas de terme au second membre.

2.2.4 Discrétisation des équations

Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons un maillage cartésien de type MAC (Marker and Cell) comme représenté dans la figure 2.7 pour un cas bidimensionnel. Les variables scalaires sont définies aux centres des mailles et les composantes des vitesses sont décalées aux faces des cellules.

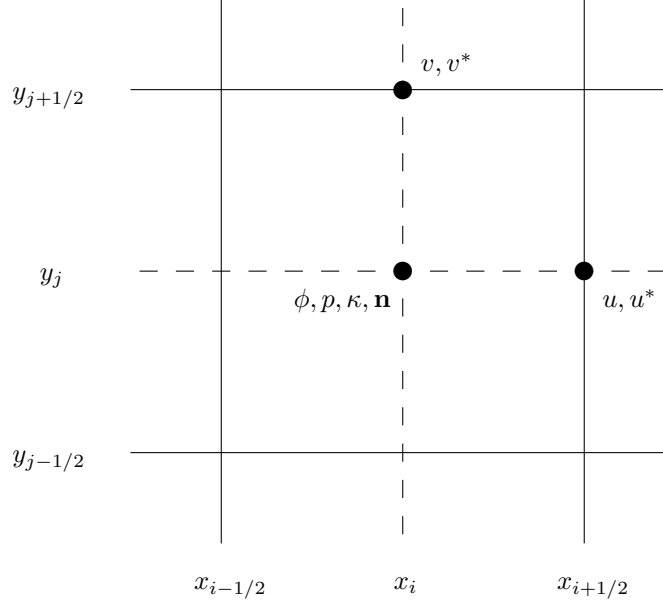


FIGURE 2.7 – Position des variables sur une maille.

Nous détaillons dans cette section les méthodes numériques utilisées pour discrétiser les équations du problème diphasique. Dans un premier temps, la discrétisation de la méthode de capture d'interface est expliquée, puis la discrétisation des deux systèmes linéaires obtenus avec la méthodologie discontinue GFCMI décrite dans la section 2.2.2.2 est détaillée.

2.2.4.1 Discrétisation de la méthode level-set

La variable level-set ϕ est définie au centre des cellules du maillage. A chaque itération temporelle, l'interface est transportée par l'équation d'advection (2.1.6) en considérant le champ de vitesse \mathbf{u} à l'instant précédent. La résolution est explicite en temps et le terme advectif est discrétisé avec un schéma de type WENO-Z [2]

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t \mathbf{u}^n \cdot \nabla \phi^n, \quad (2.2.55)$$

avec Δt le pas de temps.

Une fois que la fonction level-set est calculée à l'instant t^{n+1} , on applique l'algorithme de réinitialisation pour corriger l'écart des courbes de niveaux. On utilise un schéma explicite sur le temps fictif τ et la norme de la fonction d est obtenue grâce au schéma WENO-Z par rapport au signe de la fonction ϕ ,

$$\begin{cases} d^{n+1} = d^n - \Delta \tau \text{signe}(\phi^{n+1})(1 - \|\nabla d^n\|), \\ d^{n=0} = \phi^{n+1}, \end{cases} \quad (2.2.56)$$

avec $\Delta \tau$ le pas de temps fictif. Après la convergence de l'algorithme au bout de quelques itérations, la fonction distance remplace le champ level-set ϕ^{n+1} . Les propriétés physiques des fluides peuvent être mises à jour à partir de la fonction level-set telles que

$$\rho^{n+1}(\phi^{n+1}) = \rho^- + H_\Gamma(\phi^{n+1})(\rho^+ - \rho^-), \quad (2.2.57)$$

$$\mu^{n+1}(\phi^{n+1}) = \mu^- + H_\Gamma(\phi^{n+1})(\mu^+ - \mu^-), \quad (2.2.58)$$

avec une distribution de Heaviside H_Γ définie par rapport à ϕ

$$H_\Gamma(\phi^{n+1}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi^{n+1} > 0, \\ 0 & \text{si } \phi^{n+1} < 0. \end{cases} \quad (2.2.59)$$

2.2.4.2 Résolution du champ de vitesse intermédiaire

Lors de l'étape de prédiction (2.2.34), un système linéaire est résolu pour obtenir le champ de vitesse intermédiaire. Ce champ de vitesse ne présente pas de saut à l'interface, cependant, le coefficient de diffusion dans le tenseur visqueux, correspondant à la viscosité dynamique μ , présente un saut à l'interface. La méthodologie exposée dans la section 2.2.3.3 est donc utilisée et détaillée ci-dessous.

L'équation (2.2.34) peut s'écrire sous la forme

$$\rho^{n+1} \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \cdot (2\mu^{n+1} \bar{\bar{\mathbf{D}}}^*) = \rho^{n+1} \mathbf{u}^n - \Delta t (\rho^{n+1} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \mathbf{F}_{\text{ext}}). \quad (2.2.60)$$

Le terme d'advection du second membre se calcule avec des schémas de type WENO-Z à l'ordre 5 [2]. La discrétisation du terme visqueux, en omettant l'exposant $n + 1$ de la viscosité, est détaillée pour un cas bidimensionnel :

$$\nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.2.61)$$

La composante de la vitesse intermédiaire dans la direction \mathbf{e}_x est définie au centre de la frontière est de chaque maille, correspondant au point d'indice $(i + 1/2, j)$. La projection selon l'axe horizontal donne

$$\nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}^*) \cdot \mathbf{e}_x \Big|_{i+1/2,j} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \Big|_{i+1/2,j} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j}. \quad (2.2.62)$$

Les trois dérivées secondes obtenues sont approximées par des schémas différences finies centrés d'ordre 2 telles que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j} \approx \frac{2\mu_{i+1,j} \frac{u_{i+3/2,j}^* - u_{i+1/2,j}^*}{\Delta x} - 2\mu_{i,j} \frac{u_{i+1/2,j}^* - u_{i-1/2,j}^*}{\Delta x}}{\Delta x}, \quad (2.2.63)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \Big|_{i+1/2,j} \approx \frac{\mu_{i+1/2,j+1/2} \frac{u_{i+1/2,j+1}^* - u_{i+1/2,j}^*}{\Delta y} - \mu_{i+1/2,j-1/2} \frac{u_{i+1/2,j}^* - u_{i+1/2,j-1}^*}{\Delta y}}{\Delta y}, \quad (2.2.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j} \approx \frac{\mu_{i+1/2,j+1/2} \frac{v_{i+1,j+1/2}^* - v_{i,j+1/2}^*}{\Delta x} - \mu_{i+1/2,j-1/2} \frac{v_{i+1,j-1/2}^* - v_{i,j-1/2}^*}{\Delta x}}{\Delta y}, \quad (2.2.65)$$

avec $\mu_{k,l}$ la viscosité dynamique déterminée avec la méthodologie de la section 2.2.3.3 lorsque l'intervalle est coupée par l'interface. De la même façon, pour la composante de la vitesse selon l'axe vertical, la discrétisation s'effectue au centre de la frontière nord de chaque maille, au point d'indice $(i, j + 1/2)$,

$$\nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}^*) \cdot \mathbf{e}_y \Big|_{i,j+1/2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \Big|_{i,j+1/2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \Big|_{i,j+1/2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) \Big|_{i,j+1/2}. \quad (2.2.66)$$

Les dérivées secondes sont également discrétisées avec des schémas centrés d'ordre 2,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \Big|_{i,j+1/2} \approx \frac{\mu_{i+1/2,j+1/2} \frac{u_{i+1/2,j+1}^* - u_{i+1/2,j}^*}{\Delta y} - \mu_{i-1/2,j+1/2} \frac{u_{i-1/2,j+1}^* - u_{i-1/2,j}^*}{\Delta y}}{\Delta x}, \quad (2.2.67)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \Big|_{i,j+1/2} \approx \frac{\mu_{i+1/2,j+1/2} \frac{v_{i+1,j+1/2}^* - v_{i,j+1/2}^*}{\Delta x} - \mu_{i-1/2,j+1/2} \frac{v_{i,j+1/2}^* - v_{i-1,j+1/2}^*}{\Delta x}}{\Delta x}, \quad (2.2.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) \Big|_{i,j+1/2} \approx \frac{2\mu_{i,j+1} \frac{v_{i,j+3/2}^* - v_{i,j+1/2}^*}{\Delta y} - 2\mu_{i,j} \frac{v_{i,j+1/2}^* - v_{i,j-1/2}^*}{\Delta y}}{\Delta y}. \quad (2.2.69)$$

Le système linéaire final est couplé entre les deux composantes de la vitesse ce qui donne pour chaque composante en chaque point une matrice à 9 termes diagonaux à résoudre. La résolution de l'équation (2.2.60) pour la composante $u_{i+1/2,j}^*$ donne

$$\alpha_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}^* + 2a_{i+1,j} u_{i+3/2,j}^* + 2a_{i,j} u_{i-1/2,j}^* + c_{i+1/2,j+1/2} u_{i+1/2,j+1}^* + c_{i+1/2,j-1/2} u_{i+1/2,j-1}^* + b_{i+1/2,j+1/2} (v_{i+1,j+1/2}^* - v_{i,j+1/2}^*) + b_{i+1/2,j-1/2} (v_{i+1,j-1/2}^* - v_{i,j-1/2}^*) = \mathbf{S}_{\mathbf{cm}} \cdot \mathbf{e}_x \Big|_{i+1/2,j}, \quad (2.2.70)$$

et celle sur la composante $v_{i,j+1/2}^*$ donne

$$\beta_{i,j+1/2} v_{i,j+1/2}^* + 2c_{i,j+1} v_{i,j+3/2}^* + 2c_{i,j} v_{i,j-1/2}^* + a_{i+1/2,j+1/2} v_{i+1/2,j+1}^* + a_{i-1/2,j+1/2} v_{i-1/2,j+1}^* + b_{i+1/2,j+1/2} (u_{i+1/2,j+1}^* - u_{i+1/2,j}^*) + b_{i-1/2,j+1/2} (u_{i-1/2,j+1}^* - u_{i-1/2,j}^*) = \mathbf{S}_{\mathbf{cm}} \cdot \mathbf{e}_y \Big|_{i,j+1/2}, \quad (2.2.71)$$

avec $\alpha_{k,l}$, $\beta_{k,l}$, $a_{k,l}$, $b_{k,l}$ et $c_{k,l}$ les coefficients de la matrice définis par

$$a_{k,l} = -\frac{\mu_{k,l}}{\Delta x^2} \Delta t, \quad b_{k,l} = -\frac{\mu_{k,l}}{\Delta x \Delta y} \Delta t, \quad c_{k,l} = -\frac{\mu_{k,l}}{\Delta y^2} \Delta t, \quad (2.2.72)$$

$$\alpha_{i+1/2,j} = \rho_{i+1/2,j}^{n+1} - 2a_{i+1,j} - 2a_{i,j} - c_{i+1/2,j+1/2} - c_{i+1/2,j-1/2}, \quad (2.2.73)$$

$$\beta_{i,j+1/2} = \rho_{i,j+1/2}^{n+1} - 2c_{i,j+1} - 2c_{i,j} - a_{i+1/2,j+1/2} - a_{i-1/2,j+1/2}, \quad (2.2.74)$$

et $\mathbf{S}_{\mathbf{cm}} = \rho^{n+1} \mathbf{u}^n - \Delta t (\rho^{n+1} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \mathbf{F}_{\text{ext}})$ le second membre de l'équation (2.2.60).

Lepilliez *et al.* [20] ont montré que ce système linéaire est à diagonale très dominante si le nombre d'Ohnesorge de maille $Oh_{\Delta x}$ est très inférieur à 1 :

$$Oh_{\Delta x} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma \rho} \Delta x} \ll 1. \quad (2.2.75)$$

Pour des tailles de maille supérieures au centième de millimètre, cette condition est respectée en considérant des fluides de propriétés physiques voisines de l'eau ou de l'air. Comme ce système linéaire est à diagonale dominante, il peut être résolu avec un algorithme de Gauss-Seidel pour lequel quelques itérations suffisent à converger (< 20 itérations [20]). Dans le cas tridimensionnel, le calcul des coefficients du système linéaire est semblable mais avec 15 termes diagonaux pour chacune des trois composantes de la vitesse.

2.2.4.3 Résolution du champ de pression

Lors de l'étape de prédiction (2.2.32), une équation de Poisson sur la pression est résolue. Cette dernière présente un saut à l'interface correspondant au terme de tension de surface et un saut du coefficient de diffusion correspondant, dans ce cas, à l'inverse de la masse volumique. Les méthodologies des sections 2.2.3.1 et 2.2.3.3 sont donc associées pour résoudre le problème.

L'équation de Poisson sur la pression (2.2.32) est discrétisée dans cette section en utilisant la méthode Ghost Fluid pour un cas bidimensionnel. Au point (i, j) du maillage, celle-ci donne

$$\frac{\beta_{i+1/2,j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} - \beta_{i-1/2,j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x}}{\Delta x} + \frac{\beta_{i,j+1/2} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} - \beta_{i,j-1/2} \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y}}{\Delta y} = S_{cm}|_{i,j} + g_{i,j}, \quad (2.2.76)$$

avec $\beta = 1/\rho^{n+1}$ le coefficient de diffusion,

$$S_{cm}|_{i,j} = \frac{\frac{u_{i+1/2,j}^* - u_{i-1/2,j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1/2}^* - v_{i,j-1/2}^*}{\Delta y}}{\Delta t}, \quad (2.2.77)$$

le second membre de l'équation de Poisson et $g_{i,j}$ contenant les termes sources dus à la condition de saut sur la pression. Comme expliqué dans la section 2.2.3.3, lorsque l'interface coupe un des segments du maillage, le coefficient de diffusion β se déduit d'une moyenne harmonique. Si l'interface coupe l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$,

$$\beta_{i+1/2,j} = \begin{cases} \frac{\beta^+ \beta^-}{\beta^- \theta^E + \beta^+ (1 - \theta^E)} & \text{si } \phi_{i,j} < 0 \text{ et } \phi_{i+1,j} > 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^-}{\beta^+ \theta^E + \beta^- (1 - \theta^E)} & \text{si } \phi_{i,j} > 0 \text{ et } \phi_{i+1,j} < 0, \end{cases} \quad (2.2.78)$$

avec $\theta^E \Delta x$ la distance entre le point $x_{i+1,j}$ et l'interface définie par,

$$\theta^E = \frac{|\phi_{i+1,j}|}{|\phi_{i,j}| + |\phi_{i+1,j}|}. \quad (2.2.79)$$

Si l'interface coupe l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$,

$$\beta_{i-1/2,j} = \begin{cases} \frac{\beta^+ \beta^-}{\beta^- \theta^O + \beta^+ (1 - \theta^O)} & \text{si } \phi_{i,j} < 0 \text{ et } \phi_{i-1,j} > 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^-}{\beta^+ \theta^O + \beta^- (1 - \theta^O)} & \text{si } \phi_{i,j} > 0 \text{ et } \phi_{i-1,j} < 0, \end{cases} \quad (2.2.80)$$

avec $\theta^O \Delta x$ la distance entre le point $x_{i-1,j}$ et l'interface définie par,

$$\theta^O = \frac{|\phi_{i-1,j}|}{|\phi_{i,j}| + |\phi_{i-1,j}|}. \quad (2.2.81)$$

Le calcul dans la direction \mathbf{e}_y est identique. Le terme $g_{i,j}$ correspond à la somme des conditions de saut pour chaque segment voisin du point (i, j) traversé par l'interface. Ces derniers sont notés respectivement avec les exposants E, O, N et S correspondant aux segments est, ouest, nord et sud,

$$g_{i,j} = g_{i,j}^E + g_{i,j}^O + g_{i,j}^N + g_{i,j}^S. \quad (2.2.82)$$

Chacun d'entre eux est déduit de la méthodologie présentée dans la section 2.2.3.1,

$$g_{i,j}^E = \pm \frac{\beta_{i+1/2,j} a_\Gamma^E}{\Delta x^2}, \quad g_{i,j}^O = \pm \frac{\beta_{i-1/2,j} a_\Gamma^O}{\Delta x^2}, \quad g_{i,j}^N = \pm \frac{\beta_{i,j+1/2} a_\Gamma^N}{\Delta y^2}, \quad g_{i,j}^S = \pm \frac{\beta_{i,j-1/2} a_\Gamma^S}{\Delta y^2}, \quad (2.2.83)$$

avec \pm correspondant au signe opposé de $\phi_{i,j}$ et, par définition du saut de pression $a_\Gamma = \sigma \kappa$,

$$a_\Gamma^E = \sigma \kappa_{i,j} \theta^E + \sigma \kappa_{i+1,j} (1 - \theta^E), \quad a_\Gamma^O = \sigma \kappa_{i,j} \theta^O + \sigma \kappa_{i-1,j} (1 - \theta^O), \quad (2.2.84)$$

$$a_\Gamma^N = \sigma \kappa_{i,j} \theta^N + \sigma \kappa_{i,j+1} (1 - \theta^N), \quad a_\Gamma^S = \sigma \kappa_{i,j} \theta^S + \sigma \kappa_{i,j-1} (1 - \theta^S). \quad (2.2.85)$$

L'extension aux problèmes tridimensionnels ne présente pas de difficultés supplémentaires. La résolution du système linéaire correspondant à l'équation de Poisson s'effectue avec la méthode Black Box MultiGrid (BBMG) de [9, 22]. Le détail du solveur BBMG et son fonctionnement au sein du code est disponible dans [19].

2.2.4.4 Discrétisation temporelle

La dérivée temporelle de la résolution des équations de Navier-Stokes et celle du transport de la fonction level-set sont discrétisées avec un schéma Runge-Kutta d'ordre 2. Les effets de la convection et de la tension de surface induisent des contraintes sur le pas de temps pour assurer la stabilité du calcul [16, 30, 34]. Le pas de temps convectif Δt_{conv} est défini par

$$\Delta t_{conv} = \frac{1}{\frac{\max(|u|)}{\Delta x} + \frac{\max(|v|)}{\Delta y} + \frac{\max(|w|)}{\Delta z}}, \quad (2.2.86)$$

et Δt_{tens} , le pas de temps lié à la tension de surface est défini par

$$\Delta t_{tens} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\max(\rho^+, \rho^-)}{\sigma}} \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^{3/2}. \quad (2.2.87)$$

Lorsque le tenseur visqueux est résolu explicitement, une contrainte supplémentaire sur le pas de temps doit être considérée. Celle-ci est notée Δt_{visc} et vaut

$$\Delta t_{visc} = \frac{\min(\rho^+/\mu^+, \rho^-/\mu^-)}{\frac{2}{\min(\Delta x^2)} + \frac{2}{\min(\Delta y^2)} + \frac{2}{\min(\Delta z^2)}}. \quad (2.2.88)$$

Dans le cadre de cette thèse, le tenseur visqueux est toujours résolu implicitement donc cette contrainte visqueuse sur le pas de temps n'est pas à considérer. En définitive, le pas de temps global doit respecter la condition suivante pour assurer la stabilité :

$$\frac{1}{\Delta t} > \frac{1}{\Delta t_{conv}} + \frac{1}{\Delta t_{tens}}. \quad (2.2.89)$$

2.3 Conditions aux limites dans un domaine irrégulier

Dans le cas où l'écoulement est en contact avec un domaine solide indéformable, les conditions aux limites de type paroi doivent être considérées à l'interface solide-fluides. Si cette frontière est irrégulière et ne se conforme pas au maillage, la prise en compte des conditions aux limites peut s'avérer difficile numériquement. La méthode présentée dans cette section permet de considérer une frontière immergée indéformable à l'intérieur du domaine de calcul sans conformation du maillage. Si le domaine solide est déformé par l'écoulement, on parle d'interaction fluide-structure. Les effets de pression et viscosité des fluides impactent la frontière solide qui se déforme et en retour contraint l'écoulement de fluide environnant. Des exemples de modèles d'interaction fluide-structure et plus particulièrement fluide-membrane sont détaillés dans la section 5.1.

Dans cette partie, nous considérons que la région Ω_s du domaine de calcul Ω correspond à une phase solide indéformable, se déplaçant à vitesse constante \mathbf{u}_s telle que $\mathbf{u}(\mathbf{x} \in \Omega_s) = \mathbf{u}_s$. Au niveau de l'interface entre le solide et les fluides, notée Γ_s de vecteur normal \mathbf{n}_s , la condition d'imperméabilité et la décomposition de Hodge de la vitesse permettent de lier la vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* et la dérivée normale de pression,

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}_s = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n}_s = \mathbf{u}^*|_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}_s - \Delta t \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \Big|_{\Gamma_s} \cdot \mathbf{n}_s. \quad (2.3.1)$$

Cette relation est respectée en imposant à l'interface Γ_s la condition de Dirichlet sur \mathbf{u}^*

$$\mathbf{u}^*|_{\Gamma_s} = \mathbf{u}_s, \quad (2.3.2)$$

et la condition de Neumann sur la pression

$$\mathbf{n}_s \cdot \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \Big|_{\Gamma_s} = 0. \quad (2.3.3)$$

La définition de l'interface Γ_s ainsi que la prise en compte des conditions aux limites à l'intérieur du domaine de calcul Ω font l'objet des sections suivantes.

2.3.1 Position de la frontière immergée

Par la suite, nous considérons que le domaine de calcul est divisé en deux zones principales, une région dite fluide Ω_f et une région solide Ω_s tel que $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$. L'interface entre les deux est notée Γ_s et correspond à la frontière immergée du solide. Ces différentes régions sont capturées grâce à une seconde fonction level-set ϕ^s correspondant à la distance signée à la frontière immergée telles que

$$\Omega_s = \{\mathbf{x} \in \Omega | \phi^s(\mathbf{x}) > 0\}, \quad (2.3.4)$$

$$\Omega_f = \{\mathbf{x} \in \Omega | \phi^s(\mathbf{x}) < 0\}, \quad (2.3.5)$$

$$\Gamma_s = \{\mathbf{x} \in \Omega | \phi^s(\mathbf{x}) = 0\}, \quad (2.3.6)$$

Le vecteur normal à la frontière immergée est noté \mathbf{n}_s et est défini grâce aux propriétés de la fonction level-set tel que

$$\mathbf{n}_s = \frac{\nabla \phi^s}{\|\nabla \phi^s\|}. \quad (2.3.7)$$

La région fluide est quant à elle toujours découpée en deux parties : Ω^+ et Ω^- définies de la même manière que dans la section 2.2. La figure 2.8 montre un exemple de répartition de courbes de niveaux d'une fonction level-set solide dans un domaine bidimensionnel.

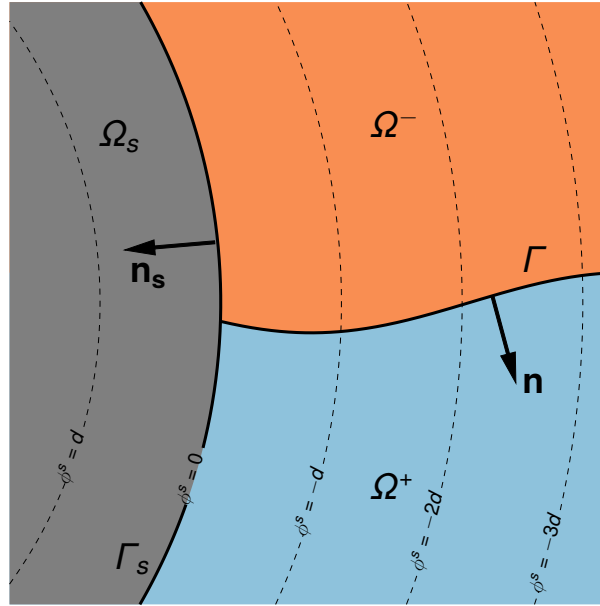


FIGURE 2.8 – Champ level-set ϕ_s dans un domaine contenant une région solide et deux régions fluides.

Le détail du fonctionnement de la méthode level-set se trouve dans la section 2.1.3. Dans le cas où le solide est immobile dans le référentiel du domaine de calcul, la fonction level-set solide ϕ^s n'évolue pas avec le temps, aucune équation d'advection ni algorithme de réinitialisation ne sont à considérer.

2.3.2 Condition aux limites de vitesse

Nous considérons que la vitesse dans la région solide \mathbf{u}_s est connue. La résolution des équations de Navier-Stokes s'effectue uniquement dans la région Ω_f avec la condition aux limites (2.3.2) à l'interface fluide-solide. En

suivant la méthodologie de Gibou *et al.* [11], les schémas numériques sont modifiés afin de prendre en compte la condition aux limites de vitesse à l'interface Γ_s en conservant une précision d'ordre 2. La méthode consiste à étendre dans le domaine solide Ω_s une vitesse fantôme obtenue par extrapolation linéaire de la vitesse dans le domaine fluide.

En reprenant la discrétisation du tenseur visqueux de la section 2.2.4.2, voyons les modifications apportées sur chacun des termes dans la zone proche de l'interface Γ_s . Considérons dans un premier temps, le premier terme de la composante selon \mathbf{e}_x du tenseur visqueux dont la discrétisation, loin de la frontière solide, correspond à l'équation (2.2.63),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j} = \frac{2\mu_{i+1,j} \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{i+1,j} - 2\mu_{i,j} \frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{i,j}}{\Delta x}. \quad (2.3.8)$$

Si $\phi_{i+1/2,j}^s \geq 0$, le calcul n'a pas lieu d'être puisque le point d'indice $(i+1/2, j)$ se trouve dans le domaine solide Ω_s et par conséquent $u_{i+1/2,j}^* = u_s$. Dans le cas où $\phi_{i+1/2,j}^s < 0$ et $\phi_{i+3/2,j}^s \geq 0$, l'intervalle est traversé par la frontière Γ_s et la dérivée première à l'est doit être modifiée en conséquence :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{i+1,j} = \frac{u_s - u_{i+1/2,j}^*}{\theta_s^E \Delta x}, \quad (2.3.9)$$

avec $u_s = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_x$ et $\theta_s^E \Delta x$ la distance entre le point $(i+1/2, j)$ et l'interface fluide-solide telle que

$$\theta_s^E = \frac{|\phi_{i+1/2,j}^s|}{|\phi_{i+1/2,j}^s| + |\phi_{i+3/2,j}^s|}. \quad (2.3.10)$$

Dans le cas où $\phi_{i+1/2,j}^s < 0$ et $\phi_{i-1/2,j}^s \geq 0$, l'intervalle ouest est traversé par la frontière Γ_s et la dérivée première à l'ouest doit être modifiée en conséquence :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_{i+1/2,j}^* - u_s}{\theta_s^O \Delta x}, \quad (2.3.11)$$

avec $\theta_s^O \Delta x$ la distance entre le point $(i+1/2, j)$ et l'interface fluide-solide telle que

$$\theta_s^O = \frac{|\phi_{i+1/2,j}^s|}{|\phi_{i-1/2,j}^s| + |\phi_{i+1/2,j}^s|}. \quad (2.3.12)$$

Cette méthodologie est identique pour tous les termes du tenseur visqueux non croisés (*cf.* équations (2.2.63), (2.2.64), (2.2.68) et (2.2.69)). Un traitement spécifique est nécessaire aux dérivées croisées, la méthode de Gibou *et al.* [11] est appliquée de la même manière sur ces termes mais il y a plus de configurations à prendre en compte. Considérons le troisième terme de la composante selon \mathbf{e}_x dont la discrétisation dans un cas sans interface solide correspond à l'équation (2.2.65),

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j} = \frac{\mu_{i+1/2,j+1/2} \frac{\partial v^*}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j+1/2} - \mu_{i+1/2,j-1/2} \frac{\partial v^*}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y}. \quad (2.3.13)$$

Plusieurs discrétisations sont possibles pour le calcul de la première dérivée $\frac{\partial v^*}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j+1/2}$ en fonction des valeurs du champ level-set solide ϕ^s :

$$\frac{\partial v^*}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j+1/2} = \begin{cases} \frac{v_{i+1,j+1/2}^* - v_{i,j+1/2}^*}{\Delta x} & \text{si } \phi_{i+1,j+1/2}^s < 0 \text{ et } \phi_{i,j+1/2}^s < 0, \\ \frac{v_s - v_{i,j+1/2}^*}{\theta_s^N \Delta x} & \text{si } \phi_{i+1,j+1/2}^s \geq 0 \text{ et } \phi_{i,j+1/2}^s < 0, \\ \frac{v_{i+1,j+1/2}^* - v_s}{(1 - \theta_s^N) \Delta x} & \text{si } \phi_{i+1,j+1/2}^s < 0 \text{ et } \phi_{i,j+1/2}^s \geq 0, \\ 0 & \text{si } \phi_{i+1,j+1/2}^s \geq 0 \text{ et } \phi_{i,j+1/2}^s \geq 0, \end{cases} \quad (2.3.14)$$

avec $v_s = \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{e}_y$ et $\theta_s^N \Delta x$ la distance entre le point $(i, j + 1/2)$ et l'interface fluide-solide telle que

$$\theta_s^N = \frac{|\phi_{i,j+1/2}^s|}{|\phi_{i,j+1/2}^s| + |\phi_{i+1,j+1/2}^s|}. \quad (2.3.15)$$

De la même façon, les discrétisations possibles de la dérivée $\frac{\partial v^*}{\partial x} \Big|_{i+1/2, j-1/2}$ sont :

$$\frac{\partial v^*}{\partial x} \Big|_{i+1/2, j-1/2} = \begin{cases} \frac{v_{i+1, j-1/2}^* - v_{i, j-1/2}^*}{\Delta x} & \text{si } \phi_{i+1, j-1/2}^s < 0 \text{ et } \phi_{i, j-1/2}^s < 0, \\ \frac{v_s - v_{i, j-1/2}^*}{\theta_s^S \Delta x} & \text{si } \phi_{i+1, j-1/2}^s \geq 0 \text{ et } \phi_{i, j-1/2}^s < 0, \\ \frac{v_{i+1, j-1/2}^* - v_s}{(1 - \theta_s^S) \Delta x} & \text{si } \phi_{i+1, j-1/2}^s < 0 \text{ et } \phi_{i, j-1/2}^s \geq 0, \\ 0 & \text{si } \phi_{i+1, j-1/2}^s \geq 0 \text{ et } \phi_{i, j-1/2}^s \geq 0, \end{cases} \quad (2.3.16)$$

avec $\theta_s^S \Delta x$ la distance entre le point $(i, j - 1/2)$ et l'interface fluide-solide telle que

$$\theta_s^S = \frac{|\phi_{i, j-1/2}^s|}{|\phi_{i, j-1/2}^s| + |\phi_{i+1, j-1/2}^s|}. \quad (2.3.17)$$

Cette méthode est similaire pour le terme croisé de la composante selon \mathbf{e}_y de l'équation (2.2.67).

2.3.3 Condition aux limites de pression

La résolution de l'équation de Poisson durant l'étape de projection dans un domaine irrégulier est basée sur les travaux de Ng *et al.* [23] dans le cas d'écoulements monophasiques. A partir de la condition de Neumann (2.3.1), la condition aux limites suivante est imposée lors de l'étape de projection

$$\mathbf{n}_s \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) \Big|_{\Gamma_s} = \mathbf{n}_s \frac{\mathbf{u}^*|_{\Gamma_s} - \mathbf{u}_s}{\Delta t}, \quad (2.3.18)$$

à la frontière fluide-solide dans les schémas de discrétisation en utilisant une approche volume fini conservant une précision d'ordre 2. Cette méthode a été étendue par Lepilliez *et al.* [20] aux cas d'écoulements diphasiques dans un domaine irrégulier. La condition de Neumann devient alors

$$\mathbf{n}_s \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1} - \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma}{\rho^{n+1}} \right) \Big|_{\Gamma_s} = \mathbf{n}_s \frac{\mathbf{u}^*|_{\Gamma_s} - \mathbf{u}_s}{\Delta t}, \quad (2.3.19)$$

en considérant les cas où les interfaces fluide-solide et fluide-fluide coexistent en un même point. Par la suite, nous considérons la discrétisation de l'équation de Poisson (2.2.32) au niveau de la cellule du maillage $C_{i,j} = [i - 1/2, i + 1/2] \times [j - 1/2, j + 1/2]$. Avec l'approche volume fini, l'équation de Poisson est intégrée sur la partie de la cellule $C_{i,j}$ occupée par du fluide $C_{i,j} \cap \Omega_f$,

$$\int_{C_{i,j} \cap \Omega_f} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) dS = \int_{C_{i,j} \cap \Omega_f} \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} dS + \int_{C_{i,j} \cap \Omega_f} \nabla \cdot \left(\frac{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma}{\rho^{n+1}} \right) dS. \quad (2.3.20)$$

En appliquant le théorème de flux divergence, on transforme les intégrales de surface en intégrales linéiques sur les frontières du domaine $\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)$ dont les vecteurs normaux sortants sont notés \mathbf{n}_1 ,

$$\int_{\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)} \mathbf{n}_1 \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) dl = \int_{\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)} \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} dl + \int_{\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)} \mathbf{n}_1 \cdot \left(\frac{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma}{\rho^{n+1}} \right) dl. \quad (2.3.21)$$

Le domaine d'intégration linéique $\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)$ se décompose en plusieurs parties : les portions des frontières de la cellule $C_{i,j}$ couvertes par la région fluide : $\partial C_{i,j} \cap \Omega_f$ et la frontière solide comprise à l'intérieur de la

cellule : $C_{i,j} \cap \partial\Omega_f = C_{i,j} \cap \Gamma_s$ dont la normale sortante est \mathbf{n}_s . Cette décomposition est visible sur la figure 2.9. La discrétisation de l'intégrale linéique sur $\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)$ d'un vecteur quelconque \mathbf{f} donne

$$\int_{\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{f} dl \approx L_{i+1/2,j}(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f})|_{i+1/2,j} + L_{i-1/2,j}((-\mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{f})|_{i-1/2,j} + L_{i,j+1/2}(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{f})|_{i,j+1/2} + L_{i,j-1/2}((-\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{f})|_{i,j-1/2} + \int_{C_{i,j} \cap \Gamma_s} \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{f} dl, \quad (2.3.22)$$

avec $L_{k,l}$ la portion de la frontière centrée en (k,l) couverte par le domaine fluide, illustrée par la figure 2.9 et définie mathématiquement, pour l'exemple de $L_{i+1/2,j}$ par approximation linéaire sur ϕ^s :

$$L_{i+1/2,j} = \begin{cases} \Delta y & \text{si } \phi_{i+1/2,j-1/2}^s < 0 \text{ et } \phi_{i+1/2,j+1/2}^s < 0, \\ \Delta y \frac{|\phi_{i+1/2,j+1/2}^s|}{|\phi_{i+1/2,j-1/2}^s| + |\phi_{i+1/2,j+1/2}^s|} & \text{si } \phi_{i+1/2,j-1/2}^s > 0 \text{ et } \phi_{i+1/2,j+1/2}^s < 0, \\ \Delta y \frac{|\phi_{i+1/2,j-1/2}^s|}{|\phi_{i+1/2,j-1/2}^s| + |\phi_{i+1/2,j+1/2}^s|} & \text{si } \phi_{i+1/2,j-1/2}^s < 0 \text{ et } \phi_{i+1/2,j+1/2}^s > 0, \\ 0 & \text{si } \phi_{i+1/2,j-1/2}^s > 0 \text{ et } \phi_{i+1/2,j+1/2}^s > 0. \end{cases} \quad (2.3.23)$$

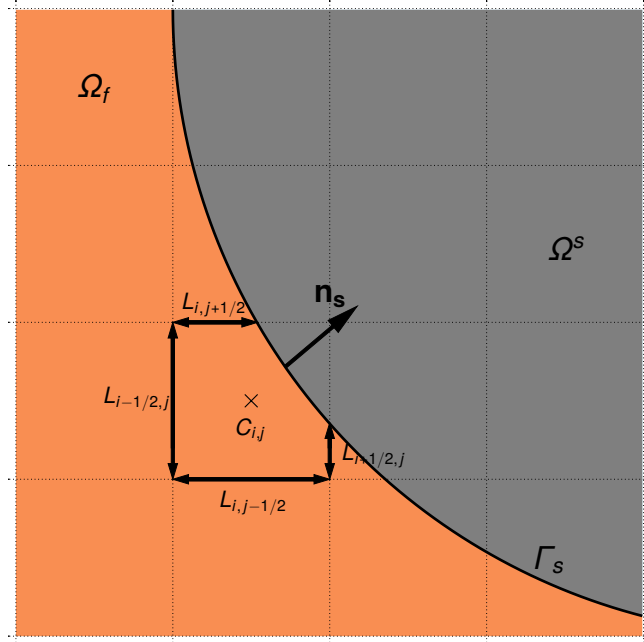


FIGURE 2.9 – Décomposition des bordures de la cellule $C_{i,j}$ couvertes par le domaine fluide Ω_f .

Le premier terme de l'équation (2.3.21) est alors discrétisé par

$$\int_{\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)} \mathbf{n}_1 \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) dl \approx \frac{L_{i+1/2,j}}{\rho_{i+1/2,j}^{n+1}} \left(\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \frac{L_{i-1/2,j}}{\rho_{i-1/2,j}^{n+1}} \left(\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) + \frac{L_{i,j+1/2}}{\rho_{i,j+1/2}^{n+1}} \left(\frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right) - \frac{L_{i,j-1/2}}{\rho_{i,j-1/2}^{n+1}} \left(\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right) + \int_{C_{i,j} \cap \Gamma_s} \mathbf{n}_s \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) dl. \quad (2.3.24)$$

Le second terme de l'équation (2.3.21) devient

$$\int_{\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)} \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} dl \approx \frac{1}{\Delta t} \left(L_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}^* - L_{i-1/2,j} u_{i-1/2,j}^* + L_{i,j+1/2} v_{i,j+1/2}^* - L_{i,j-1/2} v_{i,j-1/2}^* \right) + \int_{C_{i,j} \cap \Gamma_s} \frac{\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} dl. \quad (2.3.25)$$

Le troisième terme de l'équation (2.3.21) correspond à l'effet de la tension de surface au niveau de l'interface entre les deux fluides. Pour les cas où les interfaces fluide-solide Γ_s et fluide-fluide Γ sont présentes dans une même cellule du maillage, la méthode Ghost Fluid présentée dans la section 2.2.4.3 est appliquée sur les portions de frontière couvertes par les fluides et l'on obtient,

$$\int_{\partial(C_{i,j} \cap \Omega_f)} \mathbf{n}_1 \cdot \left(\frac{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta \Gamma}{\rho^{n+1}} \right) dl \approx - \left(L_{i+1/2,j} g_{i,j}^E + L_{i-1/2,j} g_{i,j}^O + L_{i,j+1/2} g_{i,j}^N + L_{i,j-1/2} g_{i,j}^S \right) + \int_{C_{i,j} \cap \Gamma_s} \mathbf{n}_s \cdot \left(\frac{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta \Gamma}{\rho^{n+1}} \right) dl. \quad (2.3.26)$$

Finalement, la discrétisation de l'équation de Poisson complète (2.3.21) donne

$$\begin{aligned} & \frac{L_{i+1/2,j}}{\rho_{i+1/2,j}^{n+1}} \left(\frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) - \frac{L_{i-1/2,j}}{\rho_{i-1/2,j}^{n+1}} \left(\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} \right) + \frac{L_{i,j+1/2}}{\rho_{i,j+1/2}^{n+1}} \left(\frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} \right) - \frac{L_{i,j-1/2}}{\rho_{i,j-1/2}^{n+1}} \left(\frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(L_{i+1/2,j} u_{i+1/2,j}^* - L_{i-1/2,j} u_{i-1/2,j}^* + L_{i,j+1/2} v_{i,j+1/2}^* - L_{i,j-1/2} v_{i,j-1/2}^* \right) \\ & \quad - \left(L_{i+1/2,j} g_{i,j}^E + L_{i-1/2,j} g_{i,j}^O + L_{i,j+1/2} g_{i,j}^N + L_{i,j-1/2} g_{i,j}^S \right) + \int_{C_{i,j} \cap \Gamma_s} \frac{\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{u}_s}{\Delta t} dl, \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

avec \mathbf{u}_s le vecteur vitesse dans la région solide, obtenu en remplaçant les termes des intégrations sur l'interface fluide-solide par la condition aux limites (2.3.19).

2.3.4 Angle de contact

Lorsque l'interface fluide-fluide rencontre l'interface fluide-solide, celles-ci forment entre elles un angle de contact noté θ_s comme illustré dans la figure 2.10.

La modélisation des angles de contact dynamiques est un sujet complexe sur lequel de nombreuses études portent [31, 32, 33]. La variation de l'angle de contact peut être due à de multiples facteurs : la vitesse de l'interface, son sens de déplacement, l'état de surface de la paroi solide, la présence de contaminants à la surface du solide ou à l'interface fluide-fluide, *etc.* [8]. Dans le cadre de cette thèse, nous considérons des fluides parfaitement mouillants pour lesquels il n'existe pas de ligne triple et donc pas de singularité hydrodynamique. Néanmoins, la méthodologie pour imposer un angle de contact statique est détaillée pour respecter la condition d'angle de contact nul à la paroi.

La condition aux limites sur la fonction level-set ϕ permet d'imposer l'angle de contact de l'interface fluide-fluide avec la frontière solide. Cet angle de contact, que nous considérons connu a priori, nous permet de lier les deux fonctions level-set au niveau du contact des deux interfaces,

$$\mathbf{n}_s \cdot \nabla \phi|_{\Gamma_s \cap \Gamma} = \cos \theta_s. \quad (2.3.28)$$

Afin que la valeur de l'angle de contact θ_s soit imposée lorsqu'une ligne de contact apparaît, la relation précédente doit être respectée tout le long de l'interface Γ_s . Ceci revient à imposer la condition de Neumann suivante : $\mathbf{n}_s \cdot \nabla \phi|_{\Gamma_s} = \cos \theta_s$.

Pour cela, la fonction level-set ϕ est extrapolée suivant la normale \mathbf{n}_s dans la région solide Ω_s en suivant la méthode d'extrapolation constante de Aslam [1]. L'équation suivante est résolue sur un temps fictif τ jusqu'à

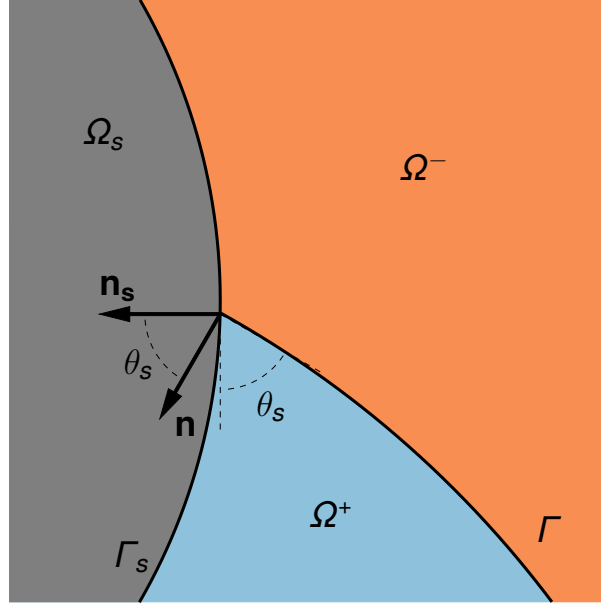


FIGURE 2.10 – Angle de contact formé par l'intersection des interfaces fluide-fluide et fluide-solide.

ce que la fonction ϕ respecte bien la condition de Neumann dans le domaine Ω_s ,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + H_{\Gamma_s}(\phi^s) (\mathbf{n}_s \cdot \nabla \phi - \cos \theta_s) = 0, \quad (2.3.29)$$

avec H_{Γ_s} la distribution de Heaviside définie par rapport à ϕ^s telle que

$$H_{\Gamma_s}(\phi^s) = \begin{cases} 1 & \text{si } \phi^s > 0, \\ 0 & \text{si } \phi^s < 0. \end{cases} \quad (2.3.30)$$

L'extrapolation de la fonction level-set dans le domaine solide (2.3.29) est discrétisée de la façon suivante

$$\phi^{\eta+1} = \phi^\eta - \Delta \tau (H_{\Gamma_s}(\phi_{i,j}^s) \mathbf{n}_s \cdot \nabla \phi - \cos(\theta)), \quad (2.3.31)$$

avec $\Delta \tau$ le pas de temps fictif et $\mathbf{n}_s \cdot \nabla \phi$ discrétisé avec un schéma Upwind d'ordre 1. La gestion de l'angle de contact avec cette méthode numérique a été validée par Lepilliez *et al.* [20] sur des cas-tests de gouttes posées sur des parois horizontales et inclinées.

2.4 Conclusion

Les méthodes numériques présentées dans cette section permettent la modélisation du ballotement dans un réservoir de satellite sans membrane et sont directement utilisées pour les études des chapitres 3 et 4. La méthode level-set permet de définir la position de l'interface entre les deux fluides et celle de la paroi du réservoir. Le modèle d'écoulement diphasique permet la résolution des équations de Navier-Stokes avec une prise en compte discontinue des conditions de sauts à l'interface. Les effets de la paroi du réservoir sur les fluides sont intégrés sous la forme de conditions aux limites sur la vitesse et la pression .

Dans la seconde partie de cette thèse (*cf.* chapitres 5 et 6), la méthode level-set définit la position d'une membrane infiniment fine dans le domaine de calcul. Le modèle d'écoulement diphasique est conservé en remplaçant les effets de la tension de surface à l'interface par les effets hyperélastiques dus à la membrane.

Bibliographie

- [1] ASLAM, T. A partial differential equation approach to multidimensional extrapolation. *J. Comput. Phys.* 193 (2004), 349–355.
- [2] BORGES, R., CARMONA, M., COSTA, B., ET DON, W. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.* 227 (2008), 3191–3211.
- [3] BRACKBILL, J. U., KOTHE, D. B., ET ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.* 100 (1992), 335–354.
- [4] CHERN, I.-L., GLIMM, J., MCBRYAN, O., PLOHR, B., ET YANIV, S. Front tracking for gas dynamics. *J. Comput. Phys.* 62 (1986), 83–110.
- [5] CHORIN, A. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comput. Phys.* 2 (1967), 12–26.
- [6] DALY, B. J. Numerical study of two fluid rayleigh-taylor instability. *Phys. Fluids* 10, 2 (1967), 297–307.
- [7] DANDY, D. S., ET LEAL, L. G. Buoyancy-driven motion of a deformable drop through a quiescent liquid at intermediate reynolds numbers. *J. Fluid Mech.* 208 (1989), 161–192.
- [8] DE GENNES, P. G. Wetting : statics and dynamics. *Reviews of Modern Physics* 57, 3 (1985), 827–863.
- [9] DENDY, J. Black box multigrid. *J. Comput. Phys.* 48 (1982), 366–386.
- [10] FEDKIW, R., ASLAM, T., MERRIMAN, B., ET OSHER, S. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *J. Comput. Phys.* 152 (1999), 457–492.
- [11] GIBOU, F., FEDKIW, R., CHENG, L.-T., ET KANG, M. A second-order-accurate symmetric discretization of the poisson equation on irregular domains. *J. Comput. Phys.* 176 (2002), 205–227.
- [12] GLIMM, J., KLINGENBERG, C., MCBRYAN, O., PLOHR, B., SHARP, D., ET YANIV, S. Front tracking and two-dimensional riemann problems. *Advances in Applied Mathematics* 6 (1985), 256–290.
- [13] GUEYFFIER, D., LI, J., NADIM, A., SCARDOVELLI, R., ET ZALESKI, S. Volume-of-fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *J. Comput. Phys.* 152 (1999), 423–456.
- [14] HARLOW, F. H., ET WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids* 8, 12 (1965), 2182–2189.
- [15] HIRT, C. W., ET NICHOLS, B. D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.* 39 (1981), 201–225.
- [16] KANG, M., FEDKIW, R., ET LIU, X.-D. A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow. *J. Sci. Comput.* 15 (2000), 323–360.
- [17] LAFAURIE, B., NARDONE, C., SCARDOVELLI, R., ZALESKI, S., ET ZANETTI, G. Modelling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER. *J. Comput. Phys.* 113 (1994), 134–147.
- [18] LALANNE, B., VILLEGAS, L. R., TANGUY, S., ET RISSO, F. On the computation of viscous terms for incompressible two-phase flows with level set/ghost fluid method. *J. Comput. Phys.* 301 (2015), 289–307.
- [19] LEPILLIEZ, M. *Simulation numérique des ballotements d’ergols dans les réservoirs de satellites en microgravité et à faible nombre de Reynolds*. Thèse de doctorat, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, 2015.
- [20] LEPILLIEZ, M., POPESCU, E. R., GIBOU, F., ET TANGUY, S. On two-phase flow solvers in irregular domains with contact line. *J. Comput. Phys.* 321 (2016), 1217–1251.
- [21] LIU, X.-D., FEDKIW, R., ET KANG, M. A boundary condition capturing method for poisson’s equation on irregular domain. *J. Comput. Phys.* 160 (2000), 151–178.
- [22] MACLACHLAN, S., TANG, J., ET VUIK, C. Fast and robust solvers for pressure-correction in bubbly flow problems. *J. Comput. Phys.* 227, 23 (2008), 9742 – 9761.

- [23] NG, Y., MIN, C., ET GIBOU, F. An efficient fluid–solid coupling algorithm for single-phase flows. *J. Comput. Phys.* 228 (2009), 8807–8829.
- [24] NOH, W. F., ET WOODWARD, P. Slic (simple line interface calculation). *Lecture Notes in Physics Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics June 28 – July 2, 1976 Twente University, Enschede, Springer Berlin Heidelberg* (1976), 330–340.
- [25] OSHER, S., ET SETHIAN, J. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton–jacobi formulations. *J. Comput. Phys.* 79 (1988), 12–49.
- [26] POPINET, S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *J. Comput. Phys.* 228 (2009), 5838–5866.
- [27] PUCKETT, E. G., ALMGREN, A. S., BELL, J. B., MARCUS, D. L., ET RIDER, W. J. A high-order projection method for tracking fluid interfaces in variable density incompressible flows. *J. Comput. Phys.* 130 (1997), 269–282.
- [28] RIDER, W. J., ET KOTHE, D. B. Reconstructing volume tracking. *J. Comput. Phys.* 141 (1998), 112–152.
- [29] RYSKIN, G., ET LEAL, L. G. Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. part 1. the finite-difference technique. *J. Fluid Mech.* 148 (1984), 1–17.
- [30] SCARDOVELLI, R., ET ZALESKI, S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 31 (1999), 567–603.
- [31] SIKALO, S., WILHELM, H.-D., ROISMAN, I. V., JAKIRLIC, S., ET TROPEA, C. Dynamic contact angle of spreading droplet : Experiments and simulations. *Phys. Fluids* 17 (2005), 062103.
- [32] SNOEIJER, J. H., ET ANDREOTTI, B. Moving contact lines : scales, regimes and dynamical transitions. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 45 (2013), 269–292.
- [33] SUI, Y., DING, H., ET SPELT, P. D. M. Numerical simulations of flows with moving contact lines. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 46 (2014), 97–119.
- [34] SUSSMAN, M., SMEREKA, P., ET OSHER, S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.* 114 (1994), 146–159.
- [35] SUSSMAN, M., SMITH, K., HUSSAINI, M., OHTA, M., ET ZHI-WEI, R. A sharp interface method for incompressible two-phase flows. *J. Comput. Phys.* 221 (2007), 469–505.
- [36] UNVERDI, S. O., ET TRYGGVASON, G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *J. Comput. Phys.* 100 (1992), 25–37.
- [37] YOUNGS, D. L. *Numerical Method for Fluid Dynamics*. Academic Press, 1982, ch. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion, pp. 273–285.

Simulation numérique du ballottement dans un réservoir sphérique

Sommaire

3.1	Introduction	59
3.2	Formalism and description of the tank modelling	61
3.2.1	Dimensionless Navier-Stokes equations	61
3.2.2	Description of the tank and the manoeuvres	63
3.2.3	Assumptions of the physical model	64
3.3	Numerical methods	65
3.3.1	Interface tracking method	66
3.3.2	Projection method	67
3.3.3	Numerical methods for the fluid-solid boundary	67
3.4	Comparison with the FLUIDICS experiment data	68
3.4.1	Description of the FLUIDICS experiment	68
3.4.2	Space convergence	68
3.4.3	Study of the force exerted on the tank wall	69
3.4.4	Study of the torque exerted on the tank wall	70
3.5	Evolution of the centre of mass	71
3.5.1	Grid sensitivity study	72
3.5.2	An example of bubble motion	72
3.5.3	Trajectory of the centre of mass	74
3.5.4	Oscillations of the centre of mass of the fluids upon reaching equilibrium state	76
3.5.5	Equilibrium position of the centre of mass	77
3.5.6	Force generated on the tank wall at the equilibrium state	78
3.6	Evolution of the bubble shape	79
3.6.1	Capillary wave	79
3.6.2	First bounce of the bubble	80
3.6.3	Shape of the bubble at the equilibrium state	81
3.7	Summary	83
	Appendix	85
	References	85

Ce chapitre porte sur l'étude du ballonnement des fluides présents dans un réservoir sphérique en micro-gravité. On s'intéresse au cas d'une manœuvre de rotation imposée à un réservoir sphérique contenant du carburant liquide parfaitement mouillant et un gaz pressurant. Le code de calcul DIVA, présenté dans le chapitre précédent, est utilisé pour modéliser l'écoulement diphasique à l'intérieur du réservoir en l'absence de gravité pour un certain nombre de configurations. Une étude paramétrique est réalisée et permet d'identifier différents comportements des fluides en fonction de la manœuvre imposée, en terme de vitesse et d'accélération angulaire, ainsi que du taux de remplissage du réservoir. L'étude de la trajectoire du centre de masse, des forces et moments imposés sur la structure du satellite permettent d'extraire des lois semi-empiriques nécessaires aux industriels pour minimiser les perturbations de stabilité qui en découlent. Ces résultats ont fait l'objet d'un article paru dans le volume 849 de *Journal of Fluid Mechanics* en 2018. Cette publication constitue ce chapitre de thèse.

Direct Numerical Simulation of a bubble motion in a spherical tank under external forces and microgravity conditions

A. Dalmon^{123†}, M. Lepilliez², S. Tanguy¹, A. Pedrono¹, B. Busset²,
H. Bavestrello² and J. Mignot³

¹Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, IMFT, Université de Toulouse, CNRS, 2 allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France

²Airbus Defence & Space, 31 Avenue des Cosmonautes, 31402 Toulouse Cedex 4, France

³Centre National d'Études Spatiales, 18 Avenue Edouard Belin, 31401 Toulouse Cedex 9, France

We present, in this paper, numerical simulations of bubble sloshing in a spherical tank, resulting from a tank rotation around a fixed axis in microgravity conditions. This configuration is of great interest in space applications where sloshing can have harmful effects on the stability of satellites. Depending on the dimensionless numbers characterising this phenomenon, our study is focused on the motion and the deformation of a bubble, initially at rest, which is set in motion when the manoeuvre is starting until it reaches a constant rotation speed around the axis. It is shown in this article that, during the first stage of the manoeuvre, the motion of the bubble is essentially driven by the inertial force that depends on the angular acceleration. Next, when the angular velocity is increasing, the centrifugal force being dominant, the trajectory of the bubble is pushed towards the direction between the centre of the tank and the axis of rotation. Finally, when the angular velocity becomes constant, the bubble, reaching a quasi-steady position, is deformed and pressed against the solid boundary of the tank. A quantified description of these phenomena is proposed through a parametric study varying the essential dimensionless numbers, i.e; the Bond number based on the angular velocity, and another Bond number based on the angular acceleration. As the temporal evolution of the forces acting on the satellite wall is of utmost importance for designing satellites and manoeuvres, we also present an analysis characterising the latter. We also detail the first comparisons between the numerical simulations and the FLUIDICS experiment performed in the International Space Station (ISS) in microgravity conditions. Thanks to these comparisons, we can validate the simulations in configurations of interest.

Key words: bubble dynamics, computational methods, drops and bubbles

1. Introduction

The sloshing of a liquid phase contained in a tank under the effect of an external force is a topic of high interest in many applications. Several disruptions can affect the stability of a satellite. They may originate from the space environment, as solar winds,

† Email address for correspondence: alexis.dalmon@imft.fr

magnetic fields or atmospheric residues. Furthermore, they may come from the satellite itself such as inertial reactions due to propulsion or internal mechanisms, construction defects, sloshing generated by flexible components (solar panel or antenna) or fluids inside the tank. It is well known (Lepilliez 2015) that the magnitude of fluid sloshing disruption is one of the most important of all those cited. Indeed, during its lifetime in space, a satellite will execute a wide range of operational manoeuvres, such as reorientation of an Earth observation device or solar panels. During these manoeuvres, inertial forces acting on propellant tanks will induce sloshing of a helium bubble formed inside these tanks after the latter gas was injected to maintain a sufficient pressure. By generating forces and torques on the structure, this bubble sloshing can deteriorate the quality of satellite imaging. Substantial efforts are undertaken to predict this unexpected phenomenon in order to propose technical solutions to decrease the amplitude of bubble sloshing in microgravity conditions. Several previous studies have been conducted to predict slosh behaviour inside a satellite tank, as in Abramson (1967) and Dodge (2000), where analytical models were proposed, respectively based on a one-dimensional mass-spring system or a pendulum system. The motion of the centre of mass was deduced from a second-order linear equation which gives the sloshing frequency, the damping ratio and allows calculation of the sloshing forces. These models provide a correct order of magnitude of the sloshing parameters for high values of Bond number ($Bo > 10$) and are currently used in the space industry, in particular for high thrust manoeuvres. However, they become inefficient for applications involving lower values of the Bond number where surface tension effects cannot be neglected, leading to nonlinear equations. Several theoretical studies have also been proposed recently (Faltinsen & Timokha 2010; Faltinsen *et al.* 2011; Ikeda *et al.* 2012; Faltinsen & Timokha 2013) in configurations involving circular, spherical or rectangular tanks. Considering the complexity of these phenomena where a strongly perturbed interface can interact with a complex geometry in nonlinear regimes, numerical simulations, as the ones presented in Veldman *et al.* (2007); Liu & Lin (2008), are complementary to theoretical studies in order to push back the limits of our knowledge in the field of sloshing. However, none of the previous studies have considered the bubble motion in a spherical tank subjected to an external force, as can occur during the manoeuvring of a satellite in microgravity conditions. Little experimental data exist on bubble sloshing in microgravity conditions, significant advances are expected by using the Direct Numerical Simulation to investigate the low Bond number regimes which are of great interest for satellite station keeping, rather than high thrust manoeuvres. Consequently, the present study is focused on configurations involving external forces which have the same order of magnitude or a smaller magnitude than the capillary forces, i.e. for a low Bond number varying between 0.05 and 5.

The objectives of this paper are as follows; (i) first, by providing accurate comparisons between well-resolved three-dimensional numerical simulations and microgravity conditions experiments, a strong validation of the overall numerical methodology is given in the considered configurations, (ii) secondly, depending on the dimensionless numbers, a detailed numerical study of the bubble motion is presented both in the first unsteady phase and in the steady phase of the manoeuvring, finally (iii) a numerical investigation on the steady bubble deformation depending on the centrifugal Bond number is detailed. As this parameter is of utmost importance for the design of satellites, our study also includes an analysis on the forces acting on the tank wall during the manoeuvre.

In section 2, the tank configuration in microgravity conditions is presented. The dimensionless analysis of the governing equations highlights the dominating effects coming from the inertial forces which are expressed with two Bond numbers. Some of the physical hypotheses we make are also justified in this section, such as the incompressibility of both

phases and the perfectly wetting contact angle model. Section 3 details the formalism and the numerical methods we implement to model the fluids' behaviour inside the tank. Then the validation of our numerical code with experimental data collected in the International Space Station is presented in section 4. The evolution of the centre of mass of the fluids inside the tank is investigated in section 5. After presenting a space convergence study and an example of bubble behaviour during a manoeuvre, the trajectory of the centre of mass of the fluid medium is analysed depending on the dimensionless parameters. A focus on the oscillation regime and on the equilibrium position of the centre of mass is presented. The forces acting on the solid frontier at the steady state are also investigated in this section. Finally, section 6 depicts the bubble shape evolution through time. The capillary wave and the first bounces of the bubble against the tank wall are studied and the equilibrium shape of the bubble is described.

2. Formalism and description of the tank modelling

We propose in this section, a description of the satellite tank configuration and the manoeuvres we enforce. The analysis of the dimensionless Navier-Stokes equations emphasises the dominating effects and physical assumptions are justified.

2.1. Dimensionless Navier-Stokes equations

Consider a domain $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s$ with boundary $\partial\Omega$. The regions Ω_f and Ω_s represent the fluid and solid regions, respectively. The boundary between the fluid and the solid, denoted by Γ_s , is a sphere of diameter D_t which symbolises the tank wall. The incompressible Navier-Stokes equations for Newtonian single-phase flows can be written

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega_f, \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \mathbf{F}_{ext} \quad \text{in } \Omega_f, \quad (2.2)$$

where t is the time, ρ the fluid density, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ the velocity field, μ the fluid viscosity, p the pressure, \mathbf{F}_{ext} the volume forces induced by the motion of the satellite and \mathbf{D} is the rate-of-deformation tensor defined as

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}. \quad (2.3)$$

We now divide the fluid domain Ω_f into two parts, a liquid and a gas region denoted by Ω_l and Ω_g , respectively[†]. The interface between the two fluids is called Γ and \mathbf{n} is its outward normal. Likewise, \mathbf{n}_s corresponds to the outward normal of the solid's boundary Γ_s . Initially, the liquid-gas interface is a sphere, the liquid is in contact with the tank wall and the gas forms a spherical bubble of diameter D_0 in the centre (see figure 1). The density and viscosity fields are discontinuous at the interface and the effect of the surface tension σ must be considered.

In order to understand the prominent physical effects involved in this configuration, we present here the expressions of the external forces acting in the Navier-Stokes equations (2.1) and (2.2). The equations are solved in the frame of the tank which is a non-Galilean referential when the satellite is rotating. Figure 1 shows that satellite tanks are usually not aligned with the rotation axis. As a consequence, external forces, induced by the rotation

[†] We consider a liquid region and a gas region for the sake of presentation, but this work is equally applicable to two liquids.

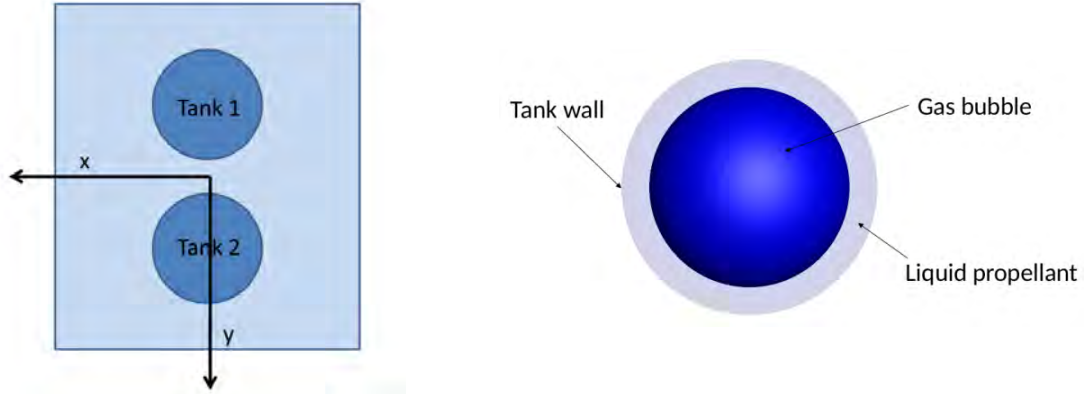


FIGURE 1. Typical positioning of tanks in a satellite and inside view of a tank.

of the tank around the rotation axis, such as inertial and Coriolis effects (although the latter forces are weak in the configurations discussed in this study), are taken into account. The Coriolis acceleration \mathbf{a}_1 is expressed as follows,

$$\mathbf{a}_1 = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (2.4)$$

where $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$ is the angular velocity vector of the satellite. The inertial acceleration \mathbf{a}_{ce} is the sum of the Euler acceleration \mathbf{a}_2 , the centrifugal acceleration \mathbf{a}_3 and the acceleration \mathbf{a}_R between the centre of mass of the satellite and the tank.

$$\mathbf{a}_{ce} = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_R \quad \text{with} \quad \mathbf{a}_2 = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{OM} \quad \text{and} \quad \mathbf{a}_3 = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OM}), \quad (2.5)$$

where $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\Omega} \mathbf{e}_z$ the angular acceleration vector, \mathbf{OM} the position vector of the fluid particle, defined as $\mathbf{OM} = x\mathbf{e}_x + (L+y)\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ with L the lever arm (distance between the centre of the tank and the axis of rotation). As the tank is fixed to the satellite, \mathbf{a}_R is null. After defining the forces induced by the change of referential, we give now the expression of the Navier-Stokes equations in the frame of a rotating tank,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) + \rho(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_{ce}). \quad (2.7)$$

To define dimensionless Navier-Stokes equations in our configuration, the latter two expressions can be specified with the dimensionless variables,

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_l}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_l}, \quad p^* = \frac{pD_0}{\sigma}, \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} \sqrt{\frac{\rho_l D_0}{\sigma}}, \quad t^* = t \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_l D_0^3}}, \quad (2.8)$$

$$\nabla^* = D_0 \nabla, \quad \mathbf{a}_1^* = \frac{\mathbf{a}_1}{\gamma}, \quad \mathbf{a}_2^* = \frac{\mathbf{a}_2}{\gamma_a}, \quad \mathbf{a}_3^* = \frac{\mathbf{a}_3}{\gamma}, \quad (2.9)$$

with γ and γ_a characteristic accelerations of the flow that are defined below. Then the Navier-Stokes equations become

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (2.10)$$

Bo_i	0.116	0.58	1.16	2.32	5.8
$\dot{\Omega}$ (10^{-3} rad.s $^{-2}$)	0.045	0.223	0.445	0.892	2.229

TABLE 1. Inertial parameters used for this study for $\tau_{fill} = 50\%$: Bo_i and $\dot{\Omega}$.

$$\rho^* \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right) = -\nabla^* p^* + Oh \nabla^* \cdot (2\mu^* \mathbf{D}^*) + Bo_i \rho^* \mathbf{a}_2^* + Bo_c \rho^* (\mathbf{a}_1^* + \mathbf{a}_3^*), \quad (2.11)$$

with Oh the Ohnesorge number and two Bond numbers, defined as

$$Oh = \left(\frac{\mu_l^2}{\rho_l \sigma D_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad Bo_c = \frac{\rho_l \gamma D_0^2}{\sigma}, \quad Bo_i = \frac{\rho_l \gamma_a D_0^2}{\sigma}. \quad (2.12)$$

The Bond numbers compare the inertial effects induced by the satellite motion to surface tension effects, and the Ohnesorge number compares viscosity to surface tension effects. The two different accelerations, γ and γ_a , are respectively based on the angular velocity Ω , such as $\gamma = \Omega^2 L$, and the angular acceleration $\gamma_a = \dot{\Omega} L$. As a result, the following two Bond numbers can be defined to characterise our physical system,

$$Bo_c = \frac{\rho_l \Omega^2 L D_0^2}{\sigma}, \quad Bo_i = \frac{\rho_l \dot{\Omega} L D_0^2}{\sigma}, \quad (2.13)$$

where Bo_c is the Bond number related to the angular velocity responsible of centrifugal forces, and Bo_i the Bond number depending on the angular acceleration.

2.2. Description of the tank and the manoeuvres

The spherical tank has a diameter of $D_t = 0.585$ m and is not aligned with the rotation axis of the satellite. The lever arm, for which the value is $L = 0.4$ m, is the distance between the centre of the tank and the axis of rotation. The properties of the fluids included in the tank (close to the actual properties of fluids used in space applications) are $\rho_l = 1004$ kg.m $^{-3}$, $\mu_l = 9.13 \times 10^{-4}$ kg.m $^{-1}$.s $^{-1}$ for the liquid phase, and $\rho_g = 2.41$ kg.m $^{-3}$, $\mu_g = 1.99 \times 10^{-5}$ kg.m $^{-1}$.s $^{-1}$ for the gas phase. The surface tension is equal to $\sigma = 0.03325$ N.m $^{-1}$. The bubble is initially located at the centre of the tank. As the wall of the tank is perfectly wet, the static contact angle is set to $\theta_s = 0^\circ$, preventing the formation of a contact line on the solid frontier. This assumption is justified in section 2.3.

The manoeuvres consist in a rotation of the satellite around its vertical axis \mathbf{e}_z . They can be split in two steps, first a constant acceleration phase, $\dot{\Omega} = Cste \neq 0$ and $\Omega(t) = \dot{\Omega} t$ until the final angular velocity Ω is reached. In the second step, the angular acceleration is stopped $\dot{\Omega} = 0$, and the final angular velocity is maintained to its final value Ω . These angular acceleration and final velocity are respectively related to the impulsional and centrifugal Bond numbers defined in (2.13). Figure 2 illustrates the evolution of Bo_c and Bo_i throughout the manoeuvre. The figure on the left presents two configurations with the same Bo_i to reach different values of the final Bo_c , whereas the figure on the right shows two different Bo_i to obtain the same Bo_c in the final step of the manoeuvre.

The range of the Bond numbers are described in table 1 and table 2 in the case of a half-filled tank. The corresponding angular accelerations and velocities are low values, which correspond to low inertial manoeuvres.

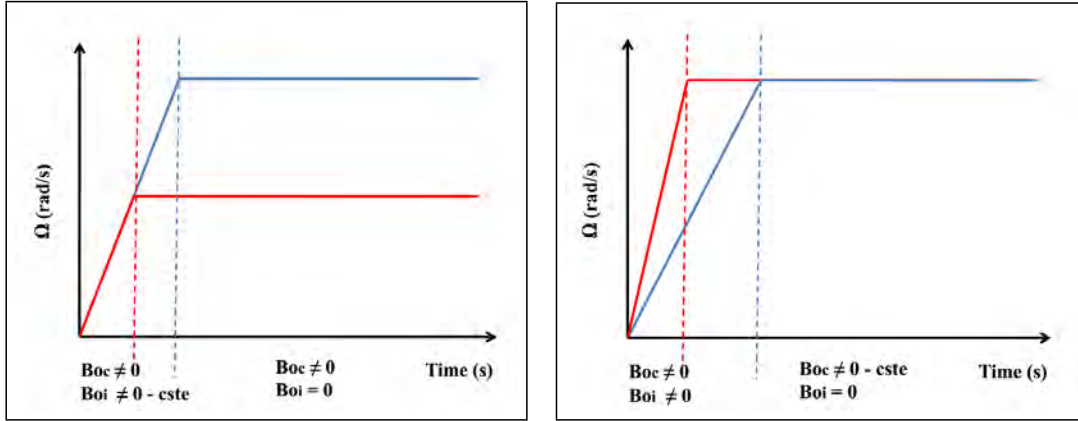


FIGURE 2. Examples of different velocity profiles, with the evolution of Ω throughout the manoeuvre.

Bo_c	0.058	0.116	0.29	0.58	1.16	2.90	5.80
Ω (10^{-2} rad.s $^{-1}$)	0.472	0.668	1.055	1.493	2.111	3.338	4.721

TABLE 2. Inertial parameters used for this study for $\tau_{fill} = 50\%$: Bo_c and Ω .

2.3. Assumptions of the physical model

In this section, we justify two important assumptions that have been made in our physical model, i.e. the fluids' incompressibility and the zero contact angle condition. First, the effect of gas compressibility is investigated through the Mach number. We define two characteristic velocities v_1 and v_2 which depend on the angular velocity Ω and the angular acceleration $\dot{\Omega}$ imposed during the manoeuvre of the tank,

$$v_1 = \Omega L \quad \text{and} \quad v_2 = \sqrt{\dot{\Omega} L}. \quad (2.14)$$

Considering helium gas, the velocity of sound c_{he} is computed using the ideal gas law $c_{he} = \sqrt{\gamma RT/M}$ with $\gamma = 1.4$ the adiabatic index, $R = 8.31$ J.mol $^{-1}$.K $^{-1}$ the molar gas constant, $M = 4$ g.mol $^{-1}$ the molar mass of the helium and $T \approx 300$ K the absolute temperature. Finally, the following two Mach numbers can be considered

$$Ma_1 = \frac{v_1}{c_{he}} = \Omega L \sqrt{\frac{M}{\gamma RT}}, \quad (2.15)$$

$$Ma_2 = \frac{v_2}{c_{he}} = L \sqrt{\frac{\dot{\Omega} M}{\gamma RT}}. \quad (2.16)$$

Given the inertial parameters of table 1 and 2, the Mach numbers always respect $Ma_1 < 2.2 \times 10^{-5}$ and $Ma_2 < 2.2 \times 10^{-5}$. Therefore, we neglect the gas compressibility and consider the incompressible Navier-Stokes equations in the fluid phase.

We introduce now a discussion on the no contact angle assumption which is made in our simulations. A contact angle between a solid and a liquid-gas interface results from a force balance between the surface tension forces between the liquid-gas, the liquid-solid and the solid-gas interfaces. If the surface tension characterising the solid-fluid interactions is not always well known (Langbein 2002), indirect measurements of the difference between

these two surface tension coefficients can be obtained by measuring the contact angle of a bubble or a droplet on a substrate.

As usual propellants are perfectly wetting fluids, we impose in our simulations a perfectly wetting condition, i.e. the contact angle is set equal to zero, when the liquid-gas interface will be close to the tank wall. This condition prevents the formation of a contact line at the frontier between the liquid, the gas and the solid phase. As a result a thin liquid film is still entrapped between the solid wall and the liquid-gas interface. Consequently, there is no hydrodynamical singularity on the viscous dissipation in this specific configuration since there is no contact line, and thus no contact line velocity. This no contact line assumption seems reasonable within the limits of low Bond numbers which is consistent with the present study. Indeed, it is clear that even if a perfectly wetting fluid is considered, in high Bond number configurations, the thin liquid film can be disrupted by strong external forces, such as gravity in ground applications. However, to the best of our knowledge, the critical Bond number for which the liquid film disruption will be observed is not known. In fact, an indirect validation of the no contact line assumption is presented in the rest of the paper by comparing our numerical simulations with experimental results from the FLUIDICS experiment both on the force acting on the tank wall and more specifically on the torque exerted by the fluid motion on the tank.

Finally, it should be noticed here that an apparent contact angle can also result from boiling phenomena, even if perfectly wetting fluids are involved, see for instance Stephan & Busse (1992); Huber *et al.* (2017); Urbano *et al.* (2018). However as we consider here isothermal conditions, this physical effect is not relevant in the present study.

3. Numerical methods

Our numerical simulations have been performed by using the home-made code DIVA (Dynamics of Interface for Vaporization and Atomization) which is based on a wide range of numerical methods specifically dedicated to the computation of two-phase flows. In particular, the level set method (Sussman *et al.* 1994) and the ghost fluid method (Fedkiw *et al.* 1999; Liu *et al.* 2000; Kang *et al.* 2000; Sussman *et al.* 2007) are used jointly to ensure a sharp and accurate representation of the liquid-gas interface. Computations in complex geometry can be performed by using the numerical scheme proposed in Ng *et al.* (2009) for single-phase flows and for which an extension to two-phase flows is proposed in Lepilliez *et al.* (2016). This numerical scheme is based on a second-order numerical scheme to impose the Neumann boundary condition on the pressure field at the solid frontier while maintaining a sharp representation of the solid-fluid interface. Our numerical tool also allows computations of liquid-vapour phase change following the numerical methods described in Gibou *et al.* (2002); Gibou *et al.* (2007); Tanguy *et al.* (2007); Tanguy *et al.* (2014); Papac *et al.* (2010); Rueda Villegas *et al.* (2016) and interaction of acoustic waves with bubbles (Huber *et al.* 2015). It has been validated by direct comparisons with a wide range of theoretical studies (Tanguy *et al.* 2014; Lalanne *et al.* 2015b; Huber *et al.* 2015; Rueda Villegas *et al.* 2016) and experimental data (Tanguy & Berlemont 2005; Lalanne *et al.* 2015a; Rueda Villegas *et al.* 2017; Huber *et al.* 2017) both for isothermal two-phase flows and configurations involving liquid-vapour phase change. This section describe briefly the formalism and the numerical methods used to perform multiphase flows simulations by solving the Navier-Stokes equations, and imposing the suitable boundary conditions on the solid frontier when an irregular domain is involved.

3.1. Interface tracking method

In this work, the level set method of Osher & Sethian (1988) and Sussman *et al.* (1994) is used, both to capture the interface motion between the two fluids and to impose the static boundary condition between the fluids and the solid. Signed and continuous level set functions ϕ and ϕ_s are defined in the domain Ω respectively such as $\Omega_g = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) < 0\}$, $\Omega_l = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) > 0\}$ and $\Gamma = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) = 0\}$ where Γ represents the fluid-fluid interface and $\Omega_s = \{\mathbf{x} : \phi_s(\mathbf{x}) > 0\}$, $\Omega_f = \{\mathbf{x} : \phi_s(\mathbf{x}) < 0\}$ and $\Gamma_s = \{\mathbf{x} : \phi_s(\mathbf{x}) = 0\}$, the fluid-solid interface. The fluid-solid interface does not move because the simulation is done in the referential of the tank. The motion of the liquid-gas interface Γ is captured by solving the following transport equation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (3.1)$$

The level set method benefits from attractive regularity properties in the whole domain that allow a simple, stable and efficient computation of the interface curvature. In particular, the signed distance function property can be imposed at the initial step of the computation and maintained all along the temporal integration process by applying the reinitialisation algorithm proposed in Sussman *et al.* (1994) at the end of every physical time step. It consists in solving the following Partial Differential Equation over a fictitious time τ ,

$$\frac{\partial d}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi)(1 - \|\nabla d\|) = 0. \quad (3.2)$$

Next, geometrical properties such as \mathbf{n} the outward unit normal vector to the interface and κ the local mean curvature can be computed by a simple differencing of the level set function ϕ . Spatial derivatives in the transport equation and the reinitialisation equation are computed with the Weighted Essentially Non-Oscillatory scheme (WENO-Z) (Borges *et al.* 2008), and the temporal derivatives with a third-order Total Variation Diminishing (TVD) Runge-Kutta scheme. Inside the solid domain, the following boundary condition is imposed on the level set function,

$$\mathbf{n}_s \cdot \nabla \phi|_{\Gamma} = \cos \theta_s, \quad (3.3)$$

where θ_s is the contact angle formed on the triple line between the liquid, the gas and the solid. Let us note here that $\theta_s = 0^\circ$ and thus, the right-hand side is equal to 1. Based on the previous works of Fedkiw *et al.* (1999), this boundary condition can be imposed by extending the level set function ϕ inside the solid domain, following the approach proposed in Lepilliez *et al.* (2016).

The motion of the liquid-gas interface occurs at the beginning of each time step and allows us to update the viscosity and density fields $\{\mu^{n+1}; \rho^{n+1}\}$. They can be expressed with the following expressions

$$\rho(\phi) = \rho_l \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} + \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_l} \right) H(\phi) \right), \quad (3.4)$$

$$\mu(\phi) = \mu_l \left(\frac{\mu_g}{\mu_l} + \left(1 - \frac{\mu_g}{\mu_l} \right) H(\phi) \right), \quad (3.5)$$

where $H(\phi)$ is the Heaviside function, defined as $H(\phi) = 0$ in the gas and $H(\phi) = 1$ in the liquid. For cells crossed by the interface, a sharp interpolation of the density and the

viscosity is used following the general guidelines proposed in Liu *et al.* (2000); Sussman *et al.* (2007).

3.2. Projection method

The incompressible Navier-Stokes equations for Newtonian two-phase flows can be described in different ways, whether the jump conditions between the two fluids are imposed as smoothed singular functions, or as sharp jump conditions locally applied to the density, viscosity and pressure field. In what follows, we briefly present one of the formulations for two-phase flows, adapted from the projection method of Chorin (1967) and first introduced by Sussman *et al.* (2007). Some other formulations are thoroughly detailed and compared by Lalanne *et al.* (2015b) and Lepilliez (2015). The authors demonstrate that the following formulation is best suited for our study. The implicit temporal discretisation, referred to as the Ghost Fluid Conservative Method with an Implicit scheme (GFCMI) in Lepilliez (2015) is used in this study. First, given a velocity \mathbf{u}^n at time $t^n = n\Delta t$, an auxiliary field \mathbf{u}^* can be computed for a time step Δt without considering the pressure component

$$\rho^{n+1}\mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \cdot (2\mu^{n+1}\mathbf{D}^*) = \rho^{n+1} \left(\mathbf{u}^n - \Delta t \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{\mathbf{F}_{ext}}{\rho^{n+1}} \right) \right), \quad (3.6)$$

which leads to a large linear system where the three velocity components are coupled. As it is a diagonally dominant linear system, it can be simply and quickly solved (about 10 iterations or less in most configurations) by using a Gauss-Seidel algorithm.

Then the pressure field p^{n+1} serves as the scalar potential function of the Hodge decomposition, satisfying a Poisson equation with homogeneous Neumann boundary conditions on $\partial\Omega$ and non-homogeneous Neumann boundary condition on Γ_s

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \nabla \cdot \left(\frac{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma}{\rho^{n+1}} \right), \quad (3.7)$$

where κ and δ_Γ are respectively the local curvature of the interface and a multidimensional Dirac distribution located at the interface. It is well known that the resolution of the Poisson equation is the most expensive step in numerical simulations of two-phase flows. Consequently, to speed up our simulations, we have implemented the Black Box MultiGrid method (BBMG) from Dendy (1982); MacLachlan *et al.* (2008) which allows a fast resolution of pseudo-Poisson equations that contain irregular terms either in the matrix coefficients (density jump) or on the right hand side (pressure jump) of the linear system. These singular source terms are approximated using the general schemes developed in Liu *et al.* (2000) for maintaining a sharp representation of the liquid-gas interface.

Finally, the fluid velocity \mathbf{u}^{n+1} is defined at the new time step t^{n+1} as the projection of \mathbf{u}^* onto the divergence-free space

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} (\nabla p^{n+1} - \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma). \quad (3.8)$$

3.3. Numerical methods for the fluid-solid boundary

As our simulations imply a solid irregular frontier immersed in the computational domain, the velocity field must respect the impermeability and no-slip conditions at the tank wall. A subcell resolution of a Dirichlet boundary condition has to be imposed on the

velocity field. For numerical stability consideration, the latter condition can be imposed by applying the second-order numerical scheme from Gibou *et al.* (2002) that requires the implicit temporal discretisation of the viscous terms (Ng *et al.* 2009; Lepilliez *et al.* 2016) when solving Navier-Stokes equations.

The pressure field is computed with the formulation proposed in Lepilliez *et al.* (2016). This formulation, based on the previous works of Ng *et al.* (2009) for single-phase flows, enables taking into account the surface tension forces in a grid cell that contains both a liquid-gas interface and a solid-fluid interface. A Neumann boundary condition on the immersed solid boundary Γ_s is imposed on the pressure field. If a contact line is formed on the solid frontier, the surface tension effect must be taken into account on the Neumann pressure boundary condition

$$\mathbf{n}_s \cdot \frac{\nabla p}{\rho} \Big|_{\Gamma_s} = \mathbf{n}_s \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_s + \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma) \Big|_{\Gamma_s}, \quad (3.9)$$

with \mathbf{u}_s the solid velocity.

4. Comparison with the FLUIDICS experiment data

Very few experimental data exist for the study of low Bond number manoeuvres in microgravity environment because of the long time period required that cannot be achieved with drop tower or parabolic flight experiments. In 2017, the FLUIDICS experiment has been sent by the CNES, the French national space agency, to the International Space Station (ISS) to quantify the sloshing phenomenon inside a spherical tank (Mignot *et al.* 2017). To validate the numerical code, we implement the case of the FLUIDICS experiment and compare our numerical results with the experimental data.

4.1. Description of the FLUIDICS experiment

The experiment, represented in figure 3, consists of a spherical transparent tank containing a safe substitute of propellant and helium, connected by an arm to a motor in the centre. The global system is integrated into a metallic housing and fixed on the seat rack rails of the ISS. The tank is subjected to angular velocity profiles similar to figure 2 followed by a deceleration and a zero velocity phase. Forces and torques generated on the tank are measured by sensors and bubble deformations are observed thanks to cameras. Two tanks have been sent to the ISS with a filling ratio of respectively 50% and 75%. The same angular acceleration $\dot{\Omega}$ and velocity Ω are enforced on the tanks. Equation (2.13) returns the Bond numbers of each tank as $Bo_i = 23$ and $Bo_c = 76$ for the half filled tank and $Bo_i = 15$ and $Bo_c = 48$ for the tank with a filling ratio of 75%. The values of the Bond numbers are higher than those of section 2.2 because of the noise of the experimental data. Indeed, the data from the force and torque sensor contain an important level of noise which prevents the data recovery from low Bond numbers manoeuvres.

4.2. Space convergence

The simulations of the FLUIDICS case are computed with a mesh of 128 cells in the 3 directions. To prove the space convergence, we consider the half-filled tank because the Bond numbers, $Bo_i = 23$ and $Bo_c = 76$, are higher than those of the tank with $\tau_{fill} = 75\%$. The evolution of the force in the y-direction and the torque in the z-direction through time are shown in figure 4, for three different meshes, 64, 128 and 256 nodes in each direction. We observe that the global evolution of the force through time is well

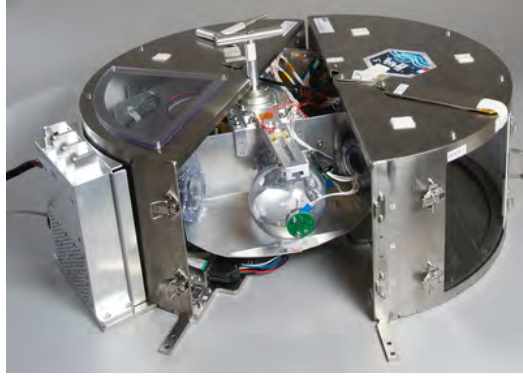
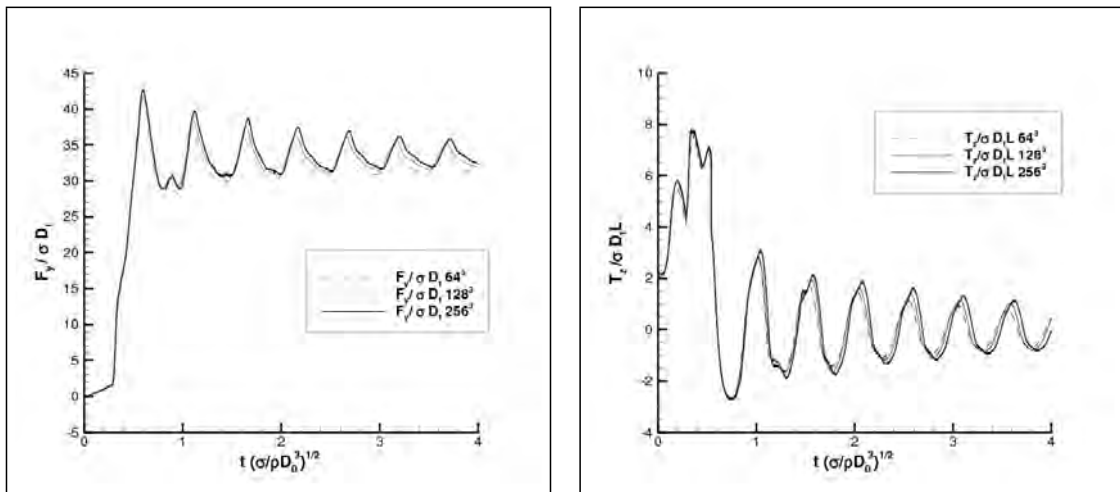


FIGURE 3. The FLUIDICS experiment.

FIGURE 4. Evolution of the y -direction force and z -direction torque generated by the fluids in the half filled tank for $Bo_c = 76$ and $Bo_i = 23$ and three different meshes: 64^3 , 128^3 and 256^3 .

predicted by the three meshes. The average force during the constant angular velocity phase remains identical but the magnitude and the frequency of the oscillations depend on the mesh size. A finer grid leads to stronger oscillations around the mean value. The same behaviour appears for the evolution of the z -direction torque. Finally, we can say that the two finer grids give results that are close enough to allow us to compare the experimental data with the results from the mesh with 128 cells in each direction.

4.3. Study of the force exerted on the tank wall

First, the force exerted on the tank wall by the fluids during the manoeuvre is investigated. The results from the sensor are compared to the computed force defined as

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_f} (\nabla p - \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma) dV. \quad (4.1)$$

Figure 5 confronts the dimensionless force in the y -direction measured by the sensor with the one obtained by computation during the manoeuvre on the two tanks. The force in the y -direction, denoted by F_y , increases quickly at the beginning because of the angular acceleration. When the constant angular velocity phase is reached, the force oscillates around a constant value. This value corresponds to the centrifugal force exerted by the liquid on the tank wall. The average value of the dimensionless force is higher for the tank with $\tau_{fill} = 75\%$ because more liquid is subjected to the centrifugal acceleration.

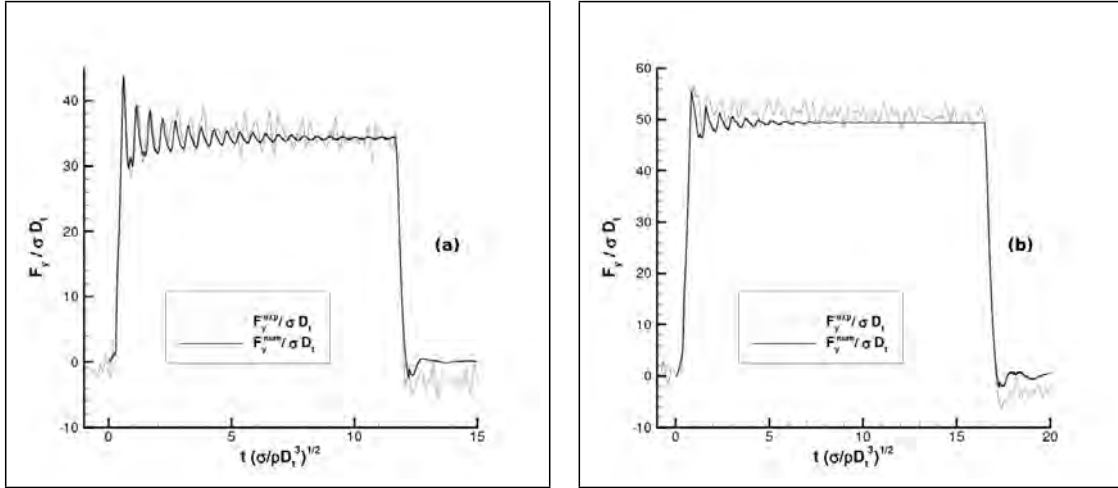


FIGURE 5. Comparison of the y -direction force from the experimental data and our numerical simulations with (a) $\tau_{fill} = 50\%$ and (b) $\tau_{fill} = 75\%$.

τ_{fill}	$F_y^{exp}/\sigma D_t$	$F_y^{num}/\sigma D_t$
50%	33.80	33.19
75%	49.82	47.91

TABLE 3. Comparison of the mean y -direction forces in both cases of the FLUIDICS experiment.

The force evolution with the filling ratio is discussed in section 5.6. Moreover, the damping of the oscillations of the force is more important in the $\tau_{fill} = 75\%$ tank. Indeed, the gas bubble is smaller in this tank and more constrained by the liquid against the tank wall. Finally, the angular velocity decreases until it reaches zero leading to the cancellation of the force on the tank wall.

The global evolution of the force achieved with our simulations is similar to the force measured under microgravity conditions despite the important noise that remains in the experimental signal. Table 3 lists the average values of the dimensionless force during the constant angular velocity phase obtained with the experimental data, $F_y^{exp}/\sigma D_t$, and our simulations, $F_y^{num}/\sigma D_t$, for both filling ratio cases. These values are close together with an error of 1.8% for the half-filled tank and 3.8% for $\tau_{fill} = 75\%$ which consolidates the validity of the numerical simulations. The oscillations are difficult to compare because of the noise of the experimental data. Nevertheless, the first oscillations of the half-filled tank case, which magnitudes are higher than the level noise, are well predicted by the numerical simulations.

4.4. Study of the torque exerted on the tank wall

The torque data are also compared to our numerical results. The sensor is located at the interface between the rotating arm and the tank. The torque data allow us to validate the force exerted by the fluids on the tank wall and the position of the centre of mass. The torque \mathbf{T} is integrated in our simulations as

$$\mathbf{T} = \int_{\Omega_f} \mathbf{SM} \times (\nabla p - \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma) dV. \quad (4.2)$$

with \mathbf{SM} the vector between the sensor position and the fluid particle.

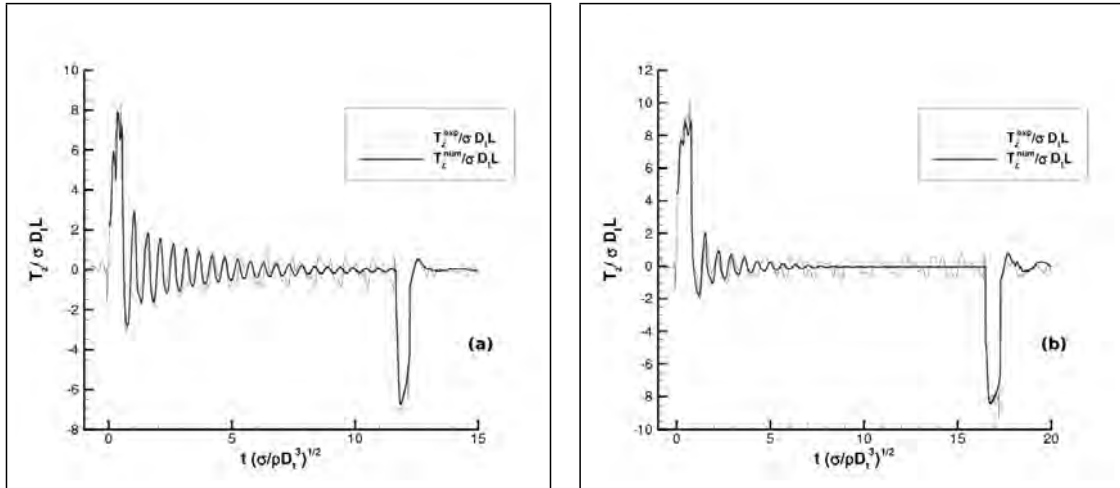


FIGURE 6. Comparison of the z-direction torque from the experimental data and our numerical simulations with (a) $\tau_{fill} = 50\%$ and (b) $\tau_{fill} = 75\%$.

Figure 6 compares the torque in the z-direction from the FLUIDICS data to our numerical results for the two tanks cases. During the acceleration phase, we observe a positive peak of the z-direction torque which is due to the component of the acceleration in the x-direction depending on Bo_i in equation (2.7). We observe the same peak with the opposite sign during the deceleration phase, at $t^* = 11.5$ for the half-filled tank and at $t^* = 16$ for the tank with $\tau_{fill} = 75\%$. During the constant velocity phase, the z-direction torque oscillates around zero. It represents the oscillation of the bubble around its equilibrium position against the tank wall. This bubble behaviour generates forces in the x-direction which appear in the z-direction torque. The numerical simulation reproduces well the torque oscillations until the damping brings their magnitudes around the noise level. The damping of the oscillation is more important with the higher filling ratio because more liquid is subjected to the centrifugal acceleration. Finally, during the zero velocity phase at the end, the torque remains zero. The peaks and the oscillations for which the magnitude is higher than the noise level are well predicted by the numerical simulations.

As the torque depends both on the force exerted on the tank wall and on the centre of mass of the liquid, these results provide a strong validation for these variables. As a result, an indirect validation of the zero contact angle hypothesis is obtained here since the centre of mass depends mainly on the bubble volume and on the interface shape and thus on the contact angle value.

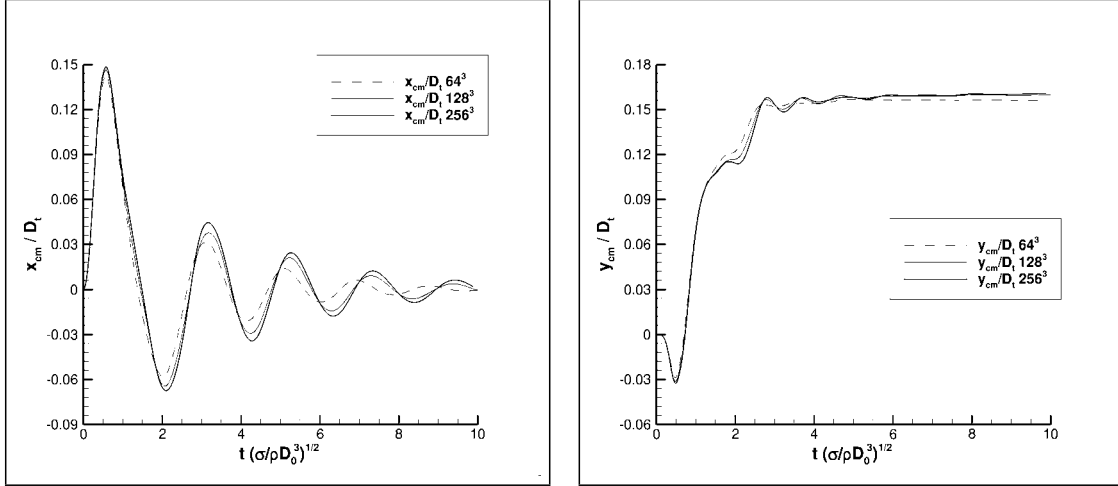
5. Evolution of the centre of mass

This section investigates the evolution of the centre of mass of the fluid medium under the effect of the inertial forces. First, a grid sensitivity study is presented. Then, an overview of the physical phenomena is given through an example of the fluids behaviour during a manoeuvre. The temporal evolution of the centre of mass is described for a wide range of the Bond numbers. For some of the higher values of the dimensionless parameters, an oscillatory phenomenon of the centre of mass around its equilibrium position is observed and discussed. Finally, the position of the centre of mass and the force exerted on the tank wall at the steady state are described and fitted by semi-empirical laws.

The subsections focusing on the transient regime consider the filling ratio of 50% and

$\tau_{fill} = V_i/V_{tank}$	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70
D_0 (m)	0.519	0.507	0.493	0.479	0.464	0.448	0.431	0.412	0.392

TABLE 4. Filling ratios of liquid in the tank and the corresponding initial bubble diameters.

FIGURE 7. Evolution of the coordinates of the centre of mass of the fluids for $Bo_c = 5.80$, $Bo_i = 5.80$, $\tau_{fill} = 50\%$ and three different meshes: 64^3 , 128^3 and 256^3 .

the Bond numbers summarised in table 1 and table 2. The two last subsections aim the steady state, which does not depend on Bo_i , and investigate the influence of the filling ratio. The filling ratios considered in the steady state are listed in table 4.

5.1. Grid sensitivity study

We present here numerical evidence about the grid sensitivity of the numerical simulations. All the simulations presented in this study have been computed with a mesh of 128 cells in each direction. In figure 7, the evolution of the coordinates of the centre of mass of the fluids throughout time has been plotted for three different meshes containing respectively 64, 128 and 256 nodes in each direction. The z-coordinate of the centre of mass does not appear in figure 7 because no external acceleration happens in the z-direction and therefore, the bubble stays centred in the z-direction. The z-coordinate of the centre of mass obtained in our numerical results is always lower than the mesh size. These results correspond to the case with $Bo_c = 5.80$, $Bo_i = 5.80$ and $\tau_{fill} = 50\%$ implying the highest velocity of the centre of mass and the highest deformation of the bubble. These comparisons show a good agreement between the solutions on the latter two grids, from which we assume that the intermediate grid 128^3 is thin enough considering the spatial convergence of our computations.

5.2. An example of bubble motion

This section describes the motion of the fluids inside the tank in a specific case. It illustrates the global behaviour of the bubble gas, and consequently the centre of mass evolution, during a manoeuvre. We consider the half-filled tank case with $Bo_i = 1.16$ and $Bo_c = 0.116$.

The first plot in figure 8 shows the trajectory of the centre of mass in the xy -plane. The other plots in figure 8 are pictures of the position of the fluids inside the tank at 6 specific times and are described below. The dark blue interface represents the gas-liquid

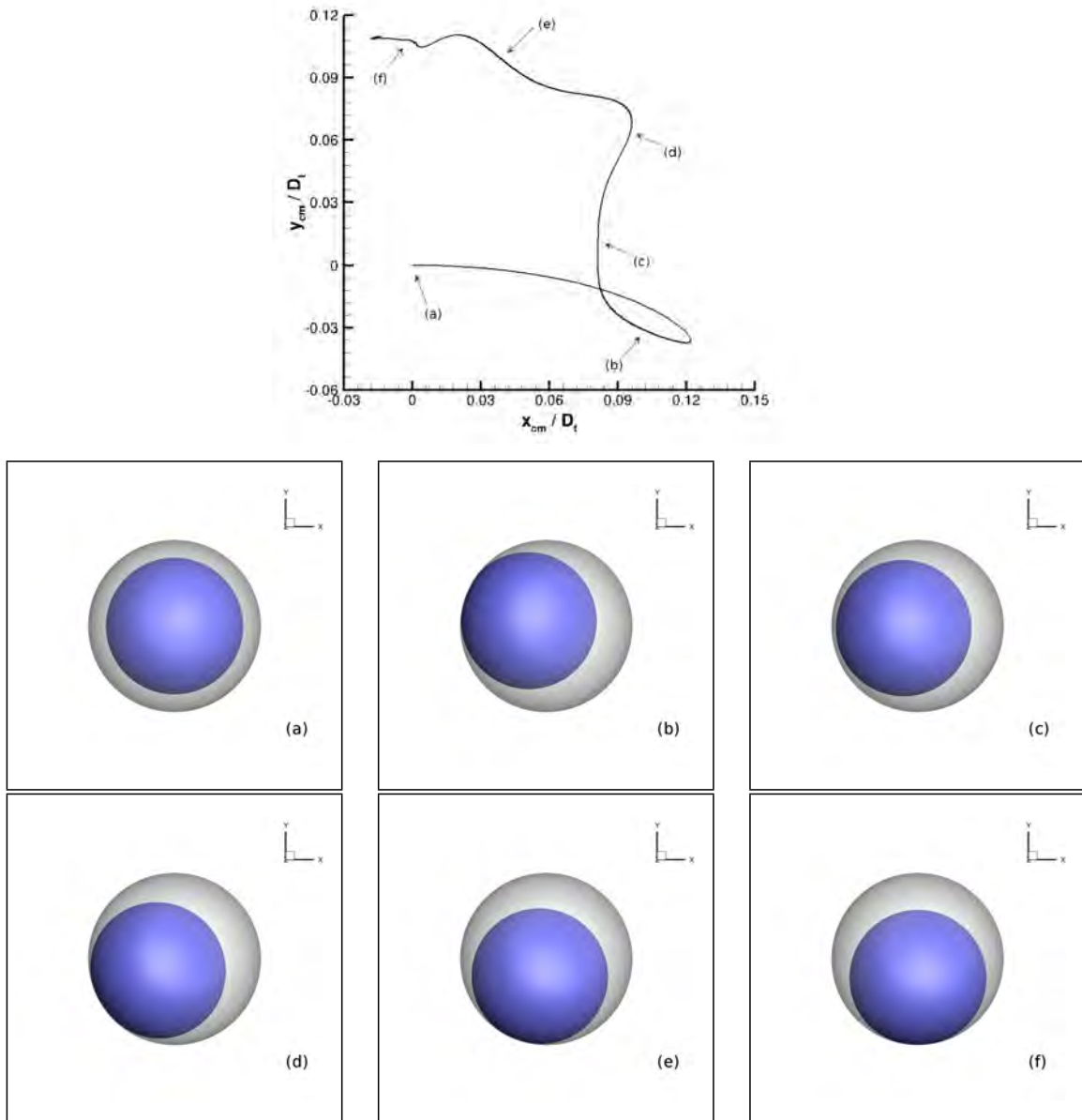


FIGURE 8. Trajectory of the centre of mass of the tank in the xy -plane and bubble positions at 6 different times with $Bo_i = 1.16$, $Bo_c = 0.116$ and $\tau_{fill} = 50\%$.

interface and the grey represents the fluid-solid interface. In addition, movie 1 displays the accelerated motion of the bubble during the manoeuvre.

Initially, the bubble is spherical and located in the centre of the tank (a). At the beginning of the manoeuvre, the bubble goes toward the axis $-\mathbf{e}_x$ until it reaches the tank wall (b). The bubble spreads and bounces (c), moves in the direction $-\mathbf{e}_y$ and spreads on the wall a second time (d). Finally, the bubble follows the tank wall (e) until it reaches its final position around the x -axis (f). The motion of the centre of mass is the opposite of the global motion of the bubble. The first bouncing of the bubble leads to the loop in the trajectory of the centre of mass. In all the pictures in figure 8, a thin film of liquid is always trapped between the gas bubble and the tank wall because of the perfectly wetting condition.

The detailed analysis of the trajectories for different Bond numbers is the aim of the next subsection.

5.3. Trajectory of the centre of mass

The trajectory of the centre of mass of the fluids depends on the temporal evolution of the inertial acceleration $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$, expressed here as a function of the two main dimensionless numbers Bo_i and Bo_c characterising our physical system,

$$\mathbf{a}_i = \frac{\sigma}{\rho_l D_0^2 L} [Bo_i (-(L+y)\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y) - Bo_c (x\mathbf{e}_x + (L+y)\mathbf{e}_y)]. \quad (5.1)$$

The trajectories are presented in figure 9. The evolution of each coordinate of the centre of mass throughout time is given in the appendix A.

At early flow times, Bo_i dominates the flow, regardless of the final value of the Bo_c . As predicted by (5.1), the centre of mass moves along the opposite direction to the acceleration as $L \gg x$,

$$\mathbf{a}_i \simeq -\frac{\sigma}{\rho_l D_0^2 L} Bo_i (L+y)\mathbf{e}_x. \quad (5.2)$$

In the case where the rotational acceleration and the rotational velocity are small, the acceleration is stopped before the bubble reaches the tank wall. The rest of the flow entirely relies on Bo_c . This can be observed in figures 9a and 9b, where for a given Bo_c , there is no distinction between the different values of Bo_i . After the end of the acceleration phase, the rest of the trajectory can be predicted by

$$\mathbf{a}_i = -\frac{\sigma}{\rho_l D_0^2 L} Bo_c (x\mathbf{e}_x + (L+y)\mathbf{e}_y). \quad (5.3)$$

The deformation of the bubble during the first contact is described in section 6.2. Then the bubble stays close to the tank wall due to the $x\mathbf{e}_x$ term, to finally reach its final equilibrium value (where $x_{cm}(t_{eq}) = 0$, and $y_{cm}(t_{eq})$ is discussed in section 5.5).

In figure 9c, the trajectories are similar, except for the lowest value of Bo_i . In this case, the final value of Bo_c is not reached before the bubble touches the tank wall. After the bounce, the terms corresponding to the angular acceleration are still not equal to zero and the centrifugal acceleration is more important in the direction $-\mathbf{e}_x$. The bubble tends to move faster to the tank wall in this direction. The parameter $\gamma = Bo_i/Bo_c$ is defined to determine if the angular acceleration phase is ended before the bubble first spreads on the wall. We report that the bubble is not subjected to any Bo_i contribution after the spreading of the bubble against the tank wall for $\gamma > \gamma_{lim} = 2L/D_t$. This limiting value γ_{lim} is obtained geometrically considering the simplified motion of the centre of mass at early flow time. This result predicts that all trajectories are similar if $\gamma > \gamma_{lim}$. Actually, if the acceleration phase ends before the bubble reaches the tank wall, the angular velocity during the spreading is constant and identical for a given Bo_c . This means that the resulting trajectory of the bubble remains similar. Yet, another phenomenon can disrupt the accuracy of this predictive parameter: when the acceleration is stopped, a capillary wave on the bubble interface is observed. This is discussed in section 6.1 on the early motion of the bubble.

In figures 9d, 9e, 9f, and 9g, it is shown, for a given Bo_c , that the trajectories evolve depending on the Bo_i . For higher values of Bo_c , more potential energy is transmitted through the centrifugal acceleration to the system. As a result, for $Bo_c > 0.58$, the centre of mass of the fluids goes beyond the equilibrium point in the x -direction. Indeed, the formulation of the inertial acceleration at this time of the flow is given by (5.3). If the

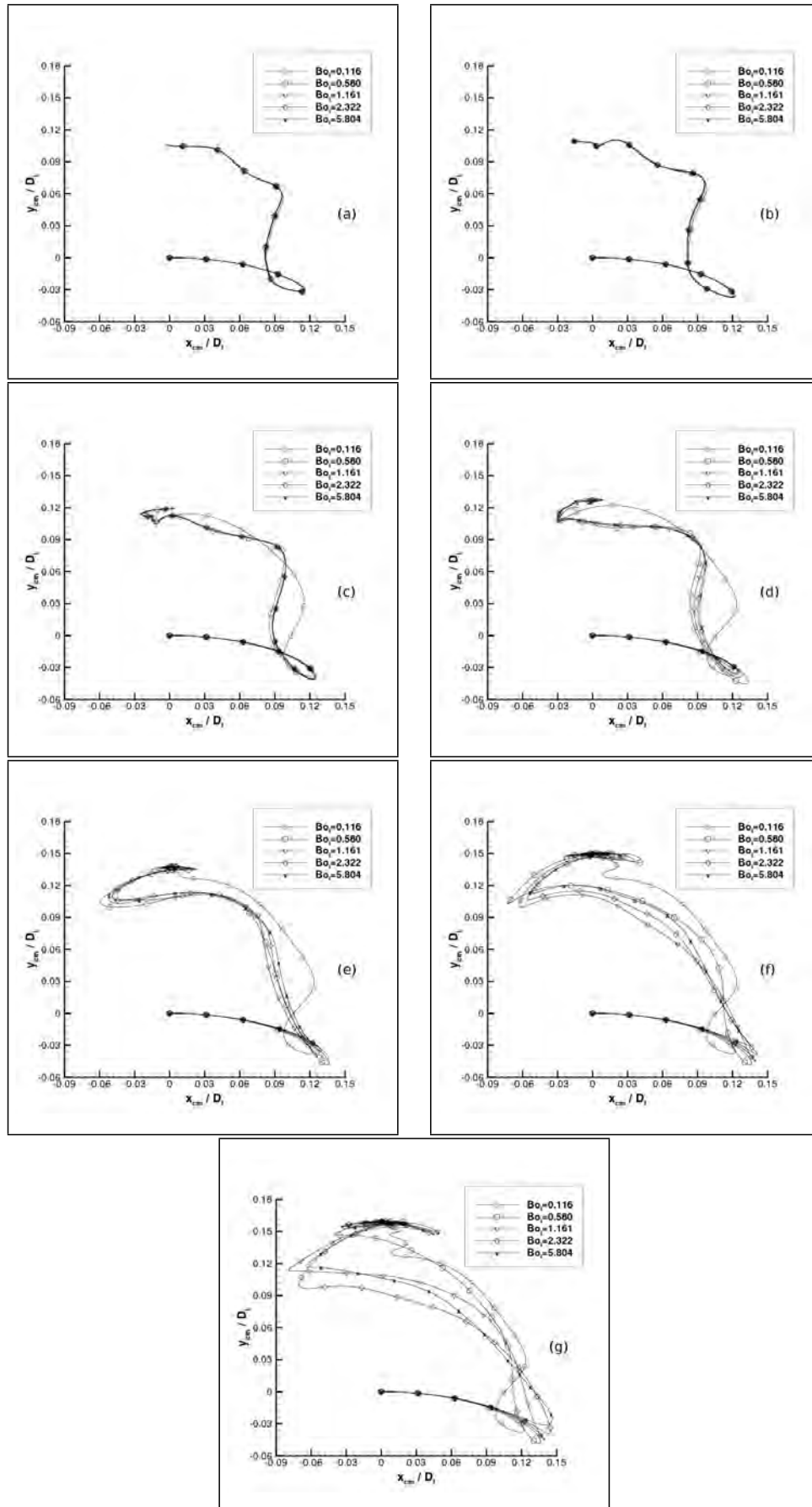


FIGURE 9. Trajectories of the centre of mass of the fluids in the xy -plane with $\tau_{fill} = 50\%$, for different Bo_i and $Bo_c = [0.058; 0.116; 0.290; 0.580; 1.16; 2.90; 5.80]$ from (a) to (g).

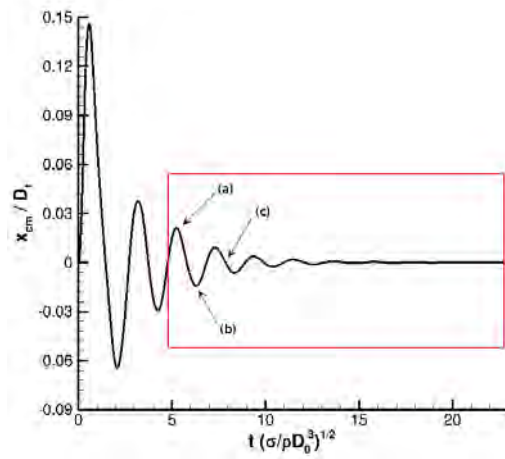


FIGURE 10. Position of the centre of mass of the fluids in the x -direction for $Bo_c = 5.8$ and $Bo_i = 5.8$. The oscillation phase is circled in red.

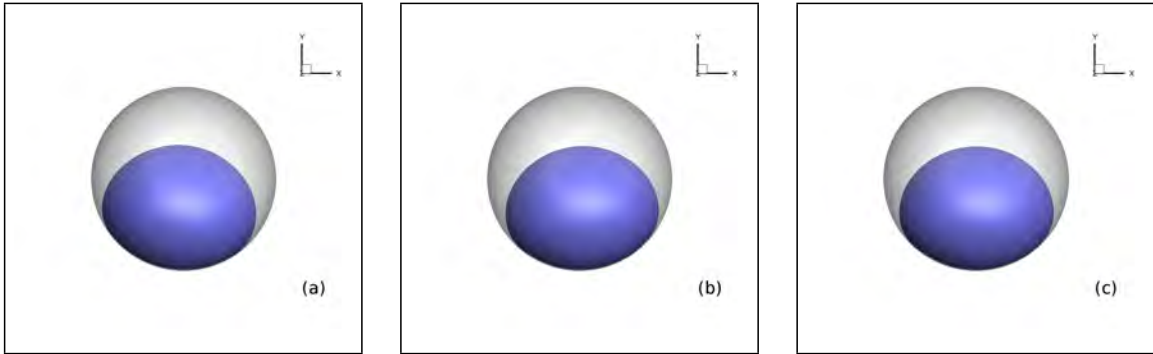


FIGURE 11. Bubble position in the tank at three different times of the oscillation phase defined in figure 10.

centre of mass goes beyond $x = 0$, the inertial acceleration tends to correct it by forcing the centre of mass in the opposite direction (if $x_{cm} < 0$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_x > 0$, and if $x_{cm} > 0$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_x < 0$). This correction of the inertial acceleration is the source of an oscillatory phenomenon, discussed in section 5.4.

5.4. Oscillations of the centre of mass of the fluids upon reaching equilibrium state

Figure 9 exhibits that for high Bo_c and for all the values of Bo_i , an oscillatory motion appears around the x -axis before the system stabilises. Upon reaching its equilibrium state, when the bubble goes beyond $x = 0$, the inertial acceleration corrects the trajectory: if $x_{cm} < 0$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_x > 0$ and if $x_{cm} > 0$, $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{e}_x < 0$. This results in an oscillatory motion of the centre of mass, as observed in figure 10. Features of the bubble inside the tank at three different times are shown in figure 11.

The oscillatory phenomenon can be approached by the analytical model of a one-dimensional mass-spring system with a damping term described by

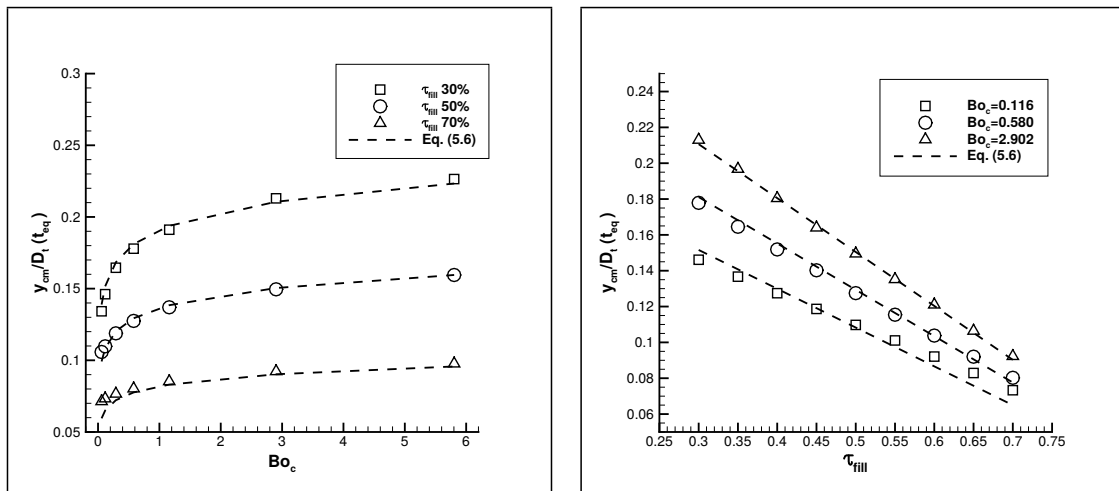
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 2\xi\omega_0 \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5.4)$$

with ω_0 the natural pulsation of the mass-spring system, and ξ a damping coefficient. The solution of this equation is

$$x(t) = A_0 \exp(-\xi\omega_0 t) \sin(\omega t + \Phi), \quad (5.5)$$

Bo_i	$Bo_c = 1.16$		$Bo_c = 2.90$		$Bo_c = 5.80$	
	$\omega_0(\text{rad.s}^{-1})$	ξ	$\omega_0(\text{rad.s}^{-1})$	ξ	$\omega_0(\text{rad.s}^{-1})$	ξ
1.16	0.0277	0.1161	0.0402	0.1286	0.0555	0.1312
2.32	0.0272	0.1241	0.0404	0.1268	0.0553	0.1257
5.80	0.0290	0.1062	0.0403	0.1265	0.0555	0.1302

TABLE 5. Characteristics of the oscillatory phenomenon.

FIGURE 12. Position of the centre of mass of the fluids in the y -direction for different Bo_c and filling ratios.

with $\omega = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0$, A_0 the initial value of the amplitude of the oscillation, and Φ the phase. Only the results for high Bo_c are presented because periods are very long and are not entirely captured in the simulations with $Bo_c < 1$. Moreover, the study is limited to cases for $Bo_i > 1$ because the observed oscillations are not related to the angular acceleration phase.

The parameters ξ and ω_0 are deduced from the fitting of our numerical results with equation (5.5) using a nonlinear least squares method and are reported in table 5. An example of the oscillation phase is circled in red in figure 10. The oscillations produced during manoeuvres with other Bond numbers are shown in figures 19e to 19g of the appendix A. It corresponds to the trajectory of the centre of mass of the fluids at the final stage of the manoeuvre when it oscillates around an equilibrium state. The two first periods of oscillations are not considered in the comparison between the theoretical model and the numerical results, because it corresponds to the early time of the manoeuvre when the bubble motion, the bouncing and the capillary waves participate in the motion.

Table 5 shows that when Bo_c increases, the natural pulsation and the damping ratio also increase. Indeed, when the centrifugal acceleration is important, the bubble spreads on the wall with a high magnitude and is maintained against the wall. We observe that Bo_i does not affect ω_0 . In the same way, the damping ratio stays relatively close to the same value regardless of Bo_i . This value depends essentially on the Bo_c .

5.5. Equilibrium position of the centre of mass

As the equilibrium state is reached, the resulting position of the centre of mass of the fluids corresponds to $x_{cm} = 0$ and differs in the y -direction for different Bo_c and filling

ratios, as illustrated by the markers in figure 12 and plots of appendix A. The impulsional Bond number Bo_i become irrelevant in the steady state.

The y -position of the centre of mass increases with the angular velocity until it approaches an asymptotic value because of the tank wall. The evolution of y -position with the Bond number has been fitted with several functions : polynomial, exponential and logarithmic functions. We show that the best candidate is the logarithmic law. Indeed, at low Bond number, the evolution of the centre of mass is highly impacted by the Bond number because the inertial effects are lower than the surface tension effects. At higher Bond numbers, we are close to a saturation phenomenon due to the tank geometry and this leads to a weaker effect of the Bond number on the bubble shape. It is more complicated to spread an already deformed bubble. This saturation phenomenon is well depicted by the logarithmic function. On the contrary, the linear dependency on the filling ratio is clear in figure 12. It reveals that for each Bond number, the amount of liquid affects proportionally the position of the centre of mass. The position of the centre of mass in the y -direction is denoted by y_{cm} and estimated by

$$\frac{y_{cm}}{D_t}(t_{eq}) = C_1 (1 - \tau_{fill}) \ln (C_2 Bo_c + 1), \quad (5.6)$$

where $\tau_{fill} = V_{liq}/V_{tank}$ is the filling ratio of the tank, C_1 and C_2 correspond to constants obtained with a least squares method: $C_1 = 2.62 \times 10^{-2}$ and $C_2 = 3.35 \times 10^4$ in our cases. The law is plotted with dashed lines in figure 12 and gives a good approximation of the numerical results.

5.6. Force generated on the tank wall at the equilibrium state

The theoretical force $\mathbf{F}_{th}(t_{eq})$ corresponds to the reaction to the centrifugal acceleration at the equilibrium state,

$$\mathbf{F}_{th}(t_{eq}) = - \int_{V_l} \rho \mathbf{a}_i(t_{eq}) dV \simeq \rho_l \Omega^2 (L + y_{cm}(t_{eq})) V_l \mathbf{e}_y, \quad (5.7)$$

with \mathbf{a}_i the sum of all the external accelerations, V_l the volume of liquid inside the tank by neglecting ρ_g against ρ_l . The volume of liquid is deduced from the filling ratio and the tank diameter as $V_l = \tau_{fill} V_t = \tau_{fill} \frac{\pi}{6} D_t^3$.

We can write the dimensionless force with the parameters Bo_c and τ_{fill} ,

$$\frac{\mathbf{F}_{th}}{\sigma D_t}(t_{eq}) \simeq \frac{\pi}{6} Bo_c \left(1 + \frac{y_{cm}(t_{eq})}{L} \right) \frac{\tau_{fill}}{(1 - \tau_{fill})^{2/3}} \mathbf{e}_y, \quad (5.8)$$

with $D_0 = D_t (1 - \tau_{fill})^{1/3}$.

Section 5.5 exhibits that the final position of the centre of mass of the fluids $y_{cm}(t_{eq})$ depends on Bo_c and τ_{fill} . We must consider the data in figure 12 or the approximation of (5.6) to obtain the force generated on the tank wall. In our numerical simulations, the integration of the pressure inside the tank (see equation (4.1)), allows deducing the value of the force in the y -direction at the equilibrium state. This computed force and the theoretical force of (5.8) are plotted, respectively with symbols and dashed lines, in figure 13.

We observe that the force evolves linearly with the Bond number and as a power law with the filling ratio. Indeed, the centrifugal force depends directly on the square of the angular velocity and the mass of the fluid inside the tank. Finally, the approximations given by (5.6) and (5.8) give really close results with the computed force.

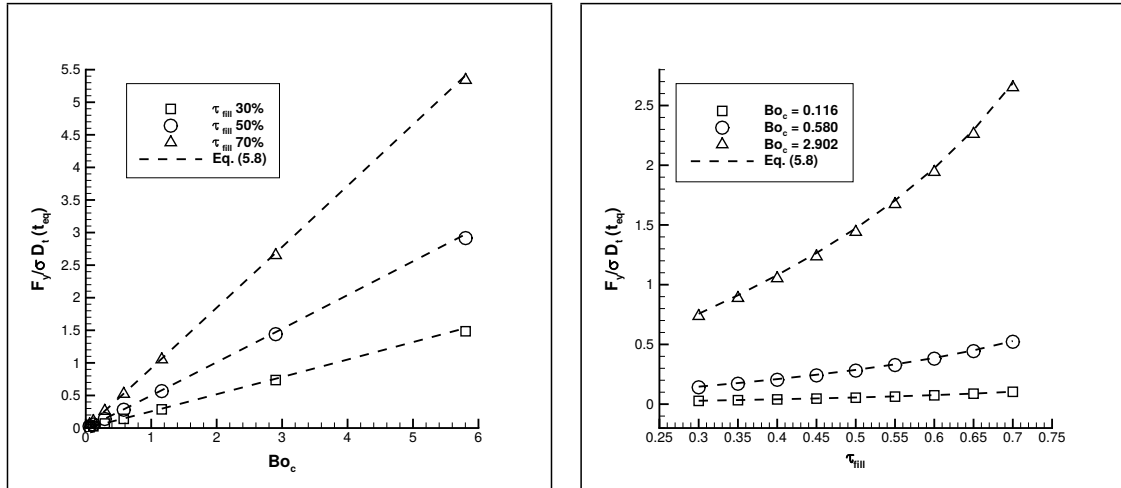


FIGURE 13. Evolution of the y -direction generated force, for different Bo_c and filling ratios.

6. Evolution of the bubble shape

This section is focused on the bubble shape, from the initial sphere located at the centre of the tank until its equilibrium shape spread against the tank wall. First, the capillary wave, observed for some configurations, is described through the variation of the bubble surface. Then, the bubble behaviour is analysed during the first contact with the tank wall for several pairs of Bond number. Finally, the description of the equilibrium shape of the bubble, as its spreading diameter and its thickness, is done for different values of Bo_c and τ_{fill} .

Similarly than section 5, the two first subsections consider a filling ratio of 50% and the Bond numbers summarised in table 1 and table 2. The last subsection does not deal with Bo_i and investigates the influence of the filling ratios listed in table 4.

6.1. Capillary wave

During the transient regime, different phenomena can be observed, such as a capillary wave on the liquid-gas interface when the angular acceleration $\dot{\Omega}$ stops, or when the bubble reaches the tank wall and spreads on it. The deformation of the bubble is analysed by considering the temporal evolution of the dimensionless surface energy variation $\Delta E_s(t)$ defined by

$$\Delta E_s(t) = \frac{E_s(t) - E_s(t_0)}{E_s(t_0)}. \quad (6.1)$$

For low values of Bo_c and Bo_i , a first variation of the surface energy is observed before the bubble reaches the tank wall, as depicted in figure 14a, whereas it does not appear for higher Bo_c values, as in figure 14b. This variation is generated by Bo_i evolving from its original value to zero as the final centrifugal velocity is reached. This time is denoted by t_{cw} thereafter. The frequency of this capillary wave is equal to the Rayleigh frequency f_R , defined by

$$f_R = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_l D_0^3}}. \quad (6.2)$$

Table 6 contains the amplitude of the variation of the surface energy due to capillary waves for different Bo_c and Bo_i , when measurable. From these data, we can conclude that Bo_c has a great influence on the amplitude of the capillary wave. Moreover, increasing Bo_i tends to approach $\Delta E_s(t_{cw})$ to an asymptotic value depending on Bo_c . For the lower

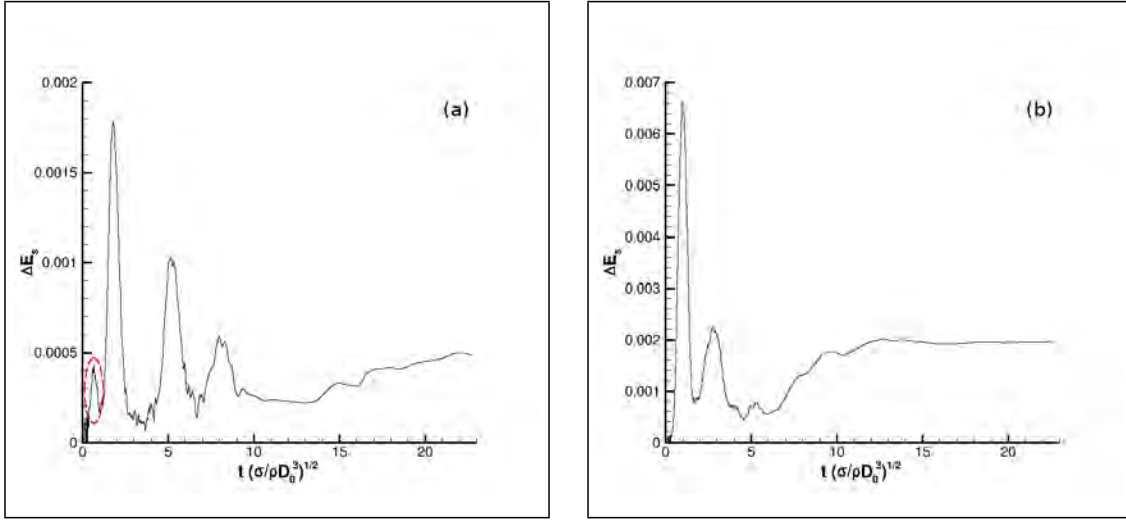


FIGURE 14. Evolution of the surface energy of the interface of the bubble for $Bo_i = 1.16$, (a) $Bo_c = 0.116$ with the capillary deformation circled in red and (b) $Bo_c = 0.58$.

Bo_c	0.058	0.116	0.29	0.58	1.16	2.90	5.80
$Bo_i = 0.116$	-	-	-	-	-	-	-
$Bo_i = 0.58$	5.08×10^{-5}	1.75×10^{-4}	-	-	-	-	-
$Bo_i = 1.16$	6.46×10^{-5}	2.52×10^{-4}	1.81×10^{-3}	-	-	-	-
$Bo_i = 2.32$	8.51×10^{-5}	2.88×10^{-4}	1.85×10^{-3}	-	-	-	-
$Bo_i = 5.80$	9.12×10^{-5}	3.05×10^{-4}	1.88×10^{-3}	-	-	-	-

TABLE 6. Variation of the dimensionless surface energy at the capillary wave $\Delta E_s(t_{cw})$ when measurable, and - otherwise.

value of Bo_i , the amplitude is too low to be measurable. This phenomenon also occurs for higher values of Bo_c , probably with a stronger amplitude, but as the bubble has already reached the tank wall it cannot be accurately measured when $\gamma < \gamma_{lim}$.

6.2. First bounce of the bubble

When the bubble reaches the tank wall, its deformation leads to a sharp increase of the variation of the dimensionless surface energy of the bubble. The highest peaks in figure 14 correspond to several spreading of the bubble on the tank wall. The first spreading on the wall has the greatest magnitude and, for all cases, the maximum of the surface energy variation at that time are presented in figure 15.

The dimensionless surface energy variation follows a linear evolution in cases for which the acceleration phase ends before the bubble reaches the tank wall for the first time. These configurations correspond to $\gamma > \gamma_{lim}$ and it can be approximated by

$$\Delta E_s(t_b) = 0.0145 Bo_c, \quad (6.3)$$

with t_b is the time of the bouncing defined as $\max(E_s(t)) = E_s(t_b)$.

In the same way as for the trajectories, Bo_i does not seem to influence the spreading of the bubble on the tank wall when $\gamma > \gamma_{lim}$. The constant velocity phase remains similar for a given Bo_c which leads to a similar deformation on the wall. In the case where $\gamma \leq \gamma_{lim}$, figure 15 shows that the maximum of the dimensionless surface energy variation reaches a limiting value for each Bo_i . Indeed, for a given centrifugal acceleration,

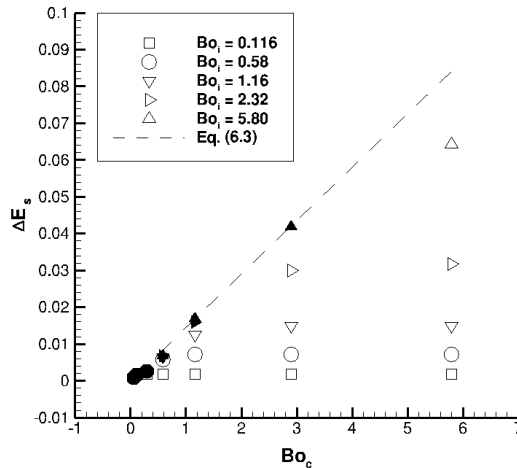


FIGURE 15. Maximum variation of the surface energy of the bubble interface at the first bounce. Filled markers correspond to $\gamma > \gamma_{lim}$ and empty markers to $\gamma \leq \gamma_{lim}$.

Bo_c	0.058	0.116	0.29	0.58	1.16	2.90	5.80
$Bo_i = 0.116$		+	+	+	+	+	+
$Bo_i = 0.58$	o	o		+	+	+	+
$Bo_i = 1.16$	o	o	o		+	+	+
$Bo_i = 2.32$	o	o	o			+	+
$Bo_i = 5.80$	o	o	o				+

TABLE 7. Summary of early flow time phenomena: o for configurations when the capillary wave is clearly observed, + for $\gamma < \gamma_{lim}$.

the same angular velocity is reached during the spreading of the bubble and thus the same amount of momentum is introduced into the system. This explains that Bo_c does not influence the spreading as long as the acceleration phase is in progress. A summary of the phenomena observed at early flow time is proposed in table 7.

6.3. Shape of the bubble at the equilibrium state

In this section, the final shape of the bubble is described and analysed, with the spreading diameter D_b and the thickness of the bubble y_b . Depending on the centrifugal Bond number Bo_c and the filling ratio τ_{fill} , the shape of the bubble can change, as observed in figure 16. We note that the third parameter Bo_i has no influence in the equilibrium state. An increase of Bo_c leads to an important spreading of the bubble on the tank wall and a shrinking of its thickness. Because of the variation of the filling ratio in our numerical simulations, these parameters are divided by the initial diameter of the bubble to become dimensionless $D_0 = D_t (1 - \tau_{fill})^{1/3}$.

The dimensionless thickness of the bubble is represented with symbols in figure 17 for different values of the filling ratio and the Bond number. First, for $Bo_c < 0.58$, the thickness decreases with the Bond number linearly and is not modified by the filling ratio. This corresponds to the first regime when the surface tension is dominant and the deformation of the bubble is small. For $Bo_c > 0.58$, the thickness of the bubble keeps decreasing with the Bond number but with a slower magnitude. This case, where the inertial effects must be considered, corresponds to the second regime. As already seen

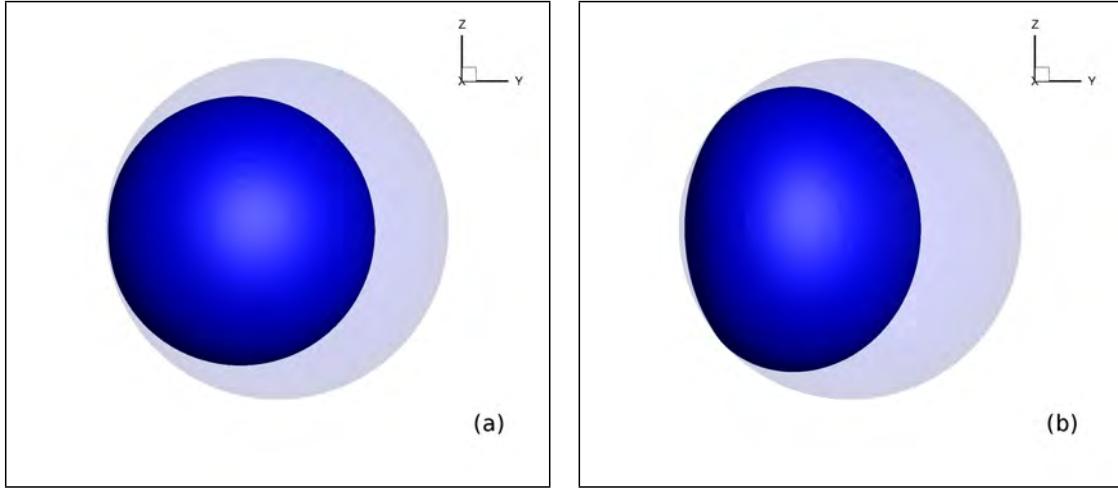


FIGURE 16. Final shape of the bubble for (a) $Bo_c = 0.116$ and (b) $Bo_c = 5.8$, with $\tau_{fill} = 50\%$.

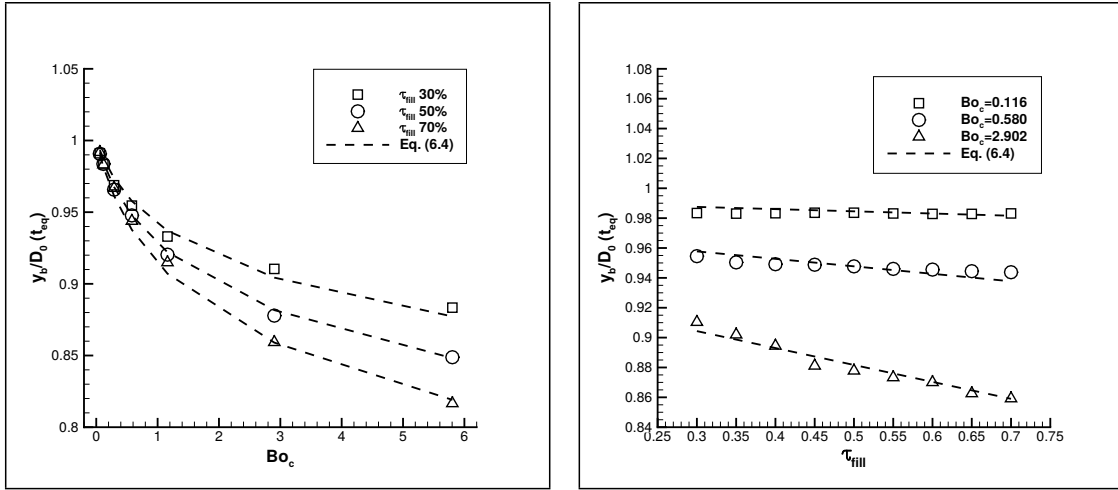


FIGURE 17. Evolution of the thickness of the bubble, for different Bo_c and filling ratios.

in section 5.5, the thickness evolution has been approached with several functions and the logarithmic function has given the best to fit the data. The same saturation effect, like the position of the centre of mass, limits the influence of the Bond number on the bubble shape. The thickness tends toward an asymptotic value for high Bo_c because of the size of the tank. This limit depends on the filling ratio as we can see on the left plot of figure 17. Indeed, when $\tau_{fill} < 0.5$, the bubble equilibrium thickness approaches its initial value. For $\tau_{fill} > 0.5$, the bubble is small compared to the tank and spreads with a higher magnitude on the wall. For each Bond number, the thickness of the bubble evolves linearly with the filling ratio. The dimensionless bubble thickness is approached by

$$\frac{y_b}{D_0}(t_{eq}) = 1 + (C_3 + C_4\tau_{fill}) \ln(C_5Bo_c + 1), \quad (6.4)$$

with $C_3 = -2.73 \times 10^{-2}$, $C_4 = -5.02 \times 10^{-2}$ and $C_5 = 2.95$ in our simulations.

This equation allows us to predict the behaviour of the bubble thickness with the Bond number and filling ratio for the two regimes. Equation (6.4) is plotted with dashed lines in figure 17.

Figure 18 presents the evolution of the dimensionless spreading diameter of the bubble

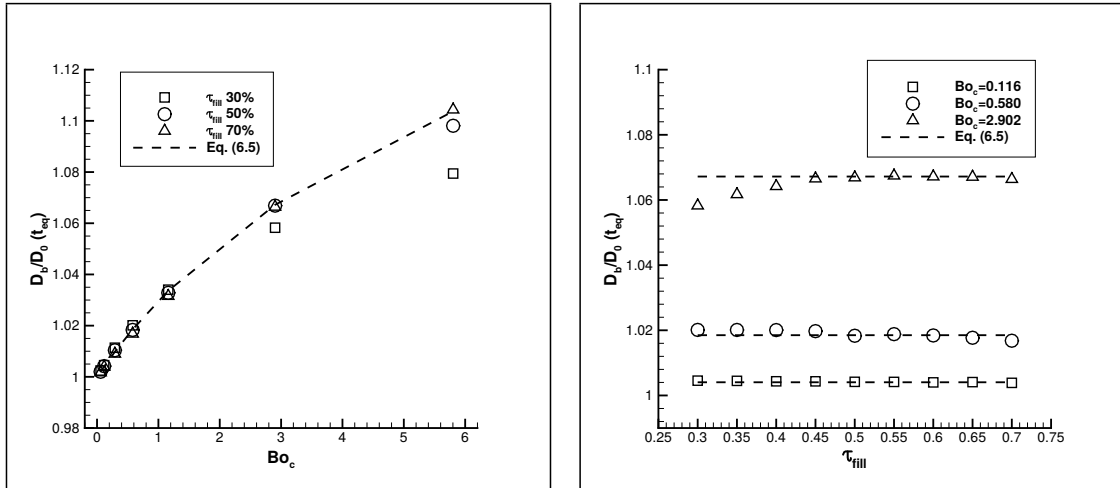


FIGURE 18. Evolution of the thickness of the bubble, for different Bo_c and filling ratios

against the tank, for different filling ratios and different Bo_c . As for the bubble thickness, the variation of the spreading diameter D_b/D_0 can be divided into two regimes depending on the Bond number. When $Bo_c < 1.16$, the spreading diameter evolves linearly with the Bond number and remains independent from the filling ratio. For higher Bond numbers, the spreading diameter increases with a slower magnitude and we assume that it will reach an asymptotic value depending on the tank diameter and the filling ratio. This dependency on the Bond number, like that of the bubble thickness, is well predicted by the logarithmic function. The same low impact of the filling ratio is noticeable for $Bo_c = 2.902$ but a local increase of the spreading diameter is observed for $\tau_{fill} < 0.5$. As for the bubble thickness, the limiting value is closer to the initial spreading diameter for a low filling ratio. By considering the regime independent of the filling ratio, the spreading diameter can be approached by

$$\frac{D_b}{D_0}(t_{eq}) = 1 + C_6 \ln(C_7 Bo_c + 1), \quad (6.5)$$

with $C_6 = 8.25 \times 10^{-2}$ and $C_7 = 4.34 \times 10^{-1}$ in our simulations and is depicted with dashed lines in figure 18.

7. Summary

We have discussed the motion and deformation of a bubble in a spherical tank rotating around a fixed axis in microgravity conditions. Based on three-dimensional Direct Numerical Simulations, our analysis is focused on low Bond number configurations for which theoretical models are not available due to the prominence of nonlinear surface tension effects. Very few experiments exist to predict the fluids behaviour because of the long time required in microgravity conditions. The Direct Numerical Simulation is one of the promising ways to understand the fluid behaviour during low Bond number manoeuvres. Because of the low inertial accelerations we enforce on the tank, the gas compressibility has been neglected. We considered the perfectly wetting condition in our model because of the properties of the typical propellants used in the space industry. This assumption is reasonable for low inertial manoeuvres for which the Bond numbers stay lower than a critical value. Further experiments are required to determine this value. Nevertheless, the comparison with experimental data showed that considering the no contact line assumption predicts well the fluids' behaviour for higher values

of the Bond numbers. Our numerical model have been validated through a detailed spatial convergence study. The data from the FLUIDICS experiment, carried out in the International Space Station, have been presented in a high Bond number case and compared to our results. The experiment is a low rate centrifuge which applies a rotation around the motor axis of a spherical tank containing a safe substitute of propellant and helium gas. Sensors measure the force and torque exerted by the fluids on the tank wall in microgravity conditions. We showed that the space convergence is still valid in the FLUIDICS experiment cases. The comparison of the force and torque showed that we predict well the different phases of the manoeuvre. The centrifugal force exerted during the constant angular velocity phase is obtained with an error lower than 4% for two different tanks. The torque peaks corresponding to the acceleration and deceleration phases are similar in both cases. The oscillations of the bubble around its equilibrium position have been investigated through the torque evolution. The magnitude and the frequency of the torque oscillations measured in the ISS comply with our numerical simulations and the same damping of the oscillations throughout time is observed. This shows that the simulations predict well the phenomena observed in space and validates the assumptions made. The evolution of the centre of mass has been investigated through a parametric study on two dimensionless Bond numbers respectively based on the angular velocity and the angular acceleration. We showed that the trajectory of the centre of mass is quite different depending on the final angular velocity. For low values of Bo_c , the bubble goes toward the tank wall, bounces and follows the tank wall until it reaches its final position. We observed in this case that the trajectory does not depend on the angular acceleration. We defined a criterion $\gamma = Bo_i/Bo_c > \gamma_{lim} = 2L/D_t$ which quantifies that there is no influence of Bo_i on the trajectory of the centre of mass. For higher values of Bo_c , the spreading and bouncing of the bubble against the tank wall is more important. Several bounces against the tank wall may happen and we observed a clear influence of the second Bond number Bo_i . In this case, the bubble oscillates around its equilibrium position before reaching it. We approached the oscillations phase with the solution of a one-dimensional mass-spring system with a damping term. We obtained the natural pulsation of the oscillation and the damping coefficient for different values of the Bond numbers. We showed that the natural pulsation and the damping of the oscillations increase with Bo_c . The equilibrium position of the centre of mass was investigated with Bo_c and the filling ratio τ_{fill} . Its position corresponds to $x = 0$ and the value y depends linearly on the filling ratio and follows a logarithmic law with the Bond number. Indeed, the amount of liquid affects linearly the position of the centre of mass and increasing the angular velocity tends to spread the bubble against the tank wall with a higher magnitude. As a consequence, spreading an already deformed bubble against a tank wall is more complicated. This saturation phenomenon is well predicted by a logarithmic law. We deduced the force generated on the tank wall from the position of the centre of mass. It evolves linearly with the Bond number and follows a power law with the filling ratio. In a last part, we were interested in the shape of the bubble throughout time. We observed at early flow time capillary waves for specific cases. This happens when the angular acceleration stops because the final angular velocity is reached. We observed a variation of the surface energy before the bubble reaches the tank wall for the first time in the case of low values of Bo_c and Bo_i . The amplitude of the variation increases greatly with Bo_c and raising Bo_i leads the amplitude to reach an asymptotic value. We also focused on the first spreading of the bubble because it corresponds to the higher deformation of the bubble throughout time. The surface variation increases with Bo_c and we observed that this evolution follows a linear evolution with Bo_c in the case $\gamma > \gamma_{lim}$. For the other cases, the surface energy variation reaches a limiting value for each Bo_i . The equilibrium

shape of the bubble was investigated through its thickness and spreading diameter. We divided the range of Bo_c in two regimes, the first one where the surface tension dominates and the deformation of the bubble is quite small and the second one where the inertial effects become more important. In the first regime, the bubble thickness decreases linearly with the Bond number and does not vary with the filling ratio. We observed the opposite effect on the spreading diameter which increases linearly with the Bond number and stays constant with the filling ratio. During the second regime, the bubble thickness decreases with a lower magnitude because the spreading becomes more important and the bubble comes closer to its asymptotic shape. This evolution is well predicted by a logarithmic law for both the influence of the spreading diameter and the bubble thickness with the Bond number.

Acknowledgements

The authors thank Airbus Defence & Space and CNES (French national space agency) for their funding. The authors gratefully acknowledge the French National Agency (ANR) for financial support of the postdoctoral study of Mathieu Lepilliez for the development of a massively parallel version of the Black-Box multigrid method to solve linear systems in the frame of the COALA project ANR-15-CE06-0013. The authors gratefully acknowledge the CNRS (Centre National pour la Recherche Scientifique) for funding compensation of teaching hours to Sébastien Tanguy during the year 2017-2018. Some of the computational time was provided by the scientific group CALMIP (Project No. P17035), the contribution of which is greatly appreciated.

Appendix A

This appendix contains the evolution of the x-coordinate (figure 19) and y-coordinate (figure 20) of the centre of mass of the fluids throughout time, for different values of Bo_i and Bo_c , and for a filling ratio of 50%.

In figure 19 and 20, we observe distinctly that for the lower values of Bo_c and Bo_i , the coordinates of the centre of mass and their evolution through time are identical (see section 5.3). By increasing the centrifugal Bond number, the differences between the trajectories become more important. In figures 19e to 19g, the oscillations of the centre of mass around the x-axis are clearly visible for the higher values of Bo_i . As in section 5.4, we observe that the time period of one oscillation decreases with Bo_c and does not seem to vary with Bo_i for its three higher values. Moreover, the oscillations disappear sooner in time with a higher value of Bo_c . This is shown in section 5.4 with the computation of the damping ratio. Finally, we notice that the final position of the centre of mass does not depend on Bo_i . In the plots of figure 19, the final x-coordinate approaches zero and figure 19 shows that the final y-coordinate increases with Bo_c . The summary of the final position for different Bo_c and τ_{fill} are presented in section 5.5.

REFERENCES

- ABRAMSON, N. H. 1967 The dynamic behaviour of liquids in moving containers, with applications to space vehicle technology. *Tech. Rep.*. NASA SP 106.
- BORGES, R., CARMONA, M., COSTA, B. & DON, W.S. 2008 An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.* **227**, 3191–3211.
- CHORIN, A. 1967 A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comput. Phys.* **2**, 12–26.

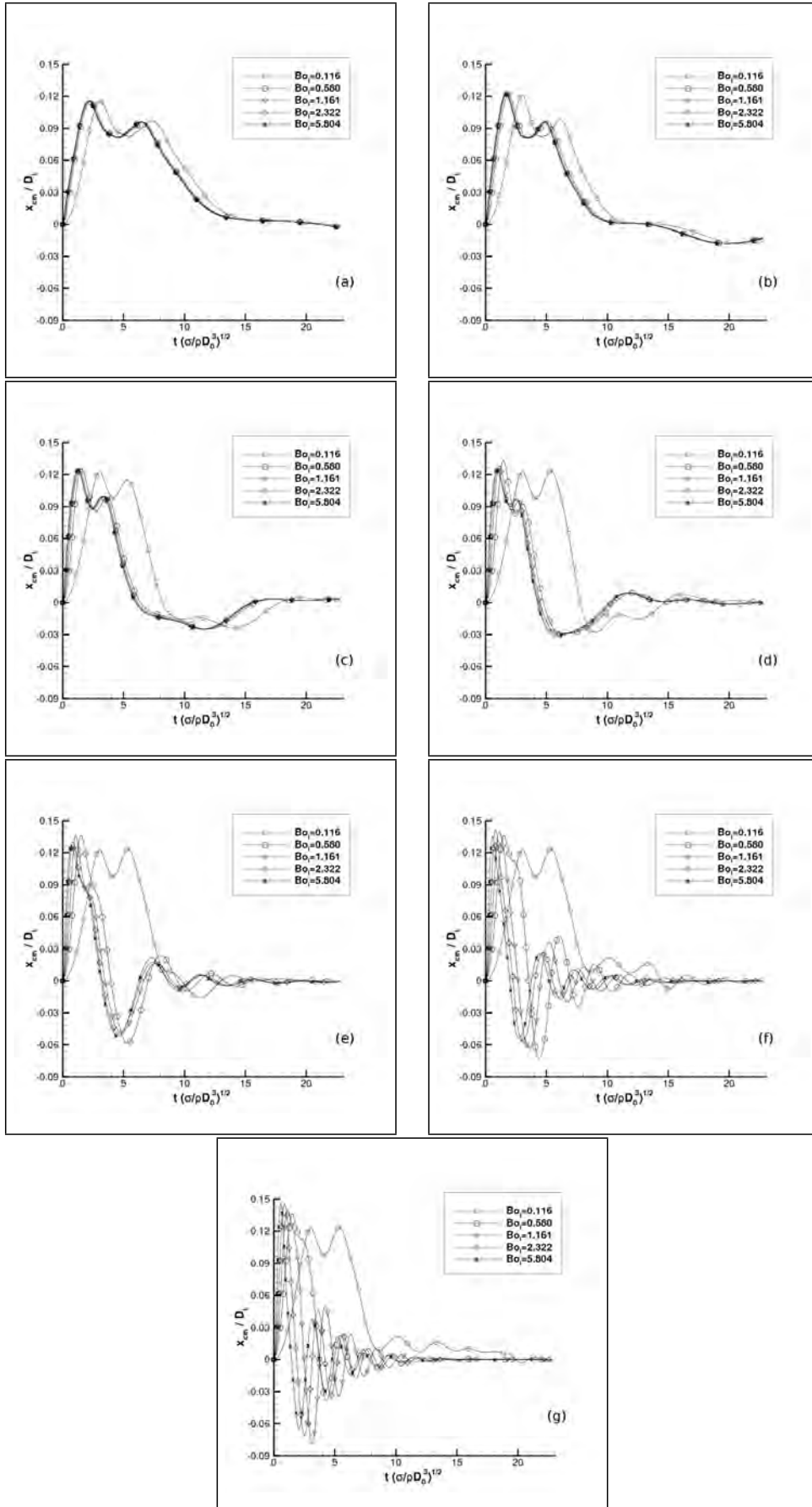


FIGURE 19. X-coordinate of the centre of mass of the fluids throughout time with $\tau_{fill} = 50\%$, for different Bo_i and $Bo_c = [0.058; 0.116; 0.290; 0.580; 1.16; 2.90; 5.80]$ from (a) to (g).

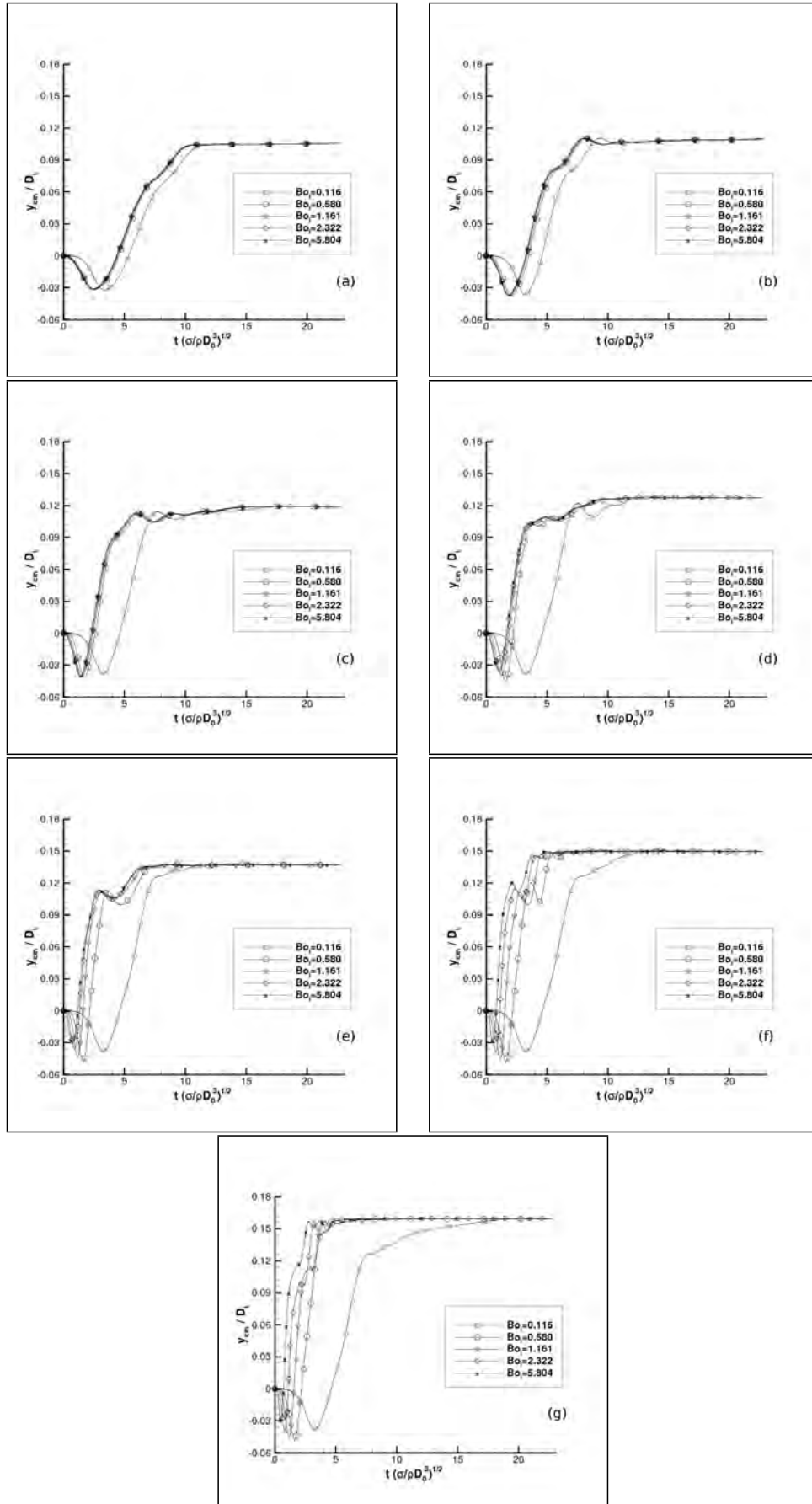


FIGURE 20. Y-coordinate of the centre of mass of the fluids throughout time with $\tau_{fill} = 50\%$, for different Bo_i and $Bo_c = [0.058; 0.116; 0.290; 0.580; 1.16; 2.90; 5.80]$ from (a) to (g).

- DENDY, J.E. 1982 Black box multigrid. *J. Comput. Phys.* **48**, 366–386.
- DODGE, F. T. 2000 The new dynamic behaviour of liquids in moving containers. *Tech. Rep.*. Southwest Reaserch Institute, Texas.
- FALTINSEN, O.M., FIROOZKOOHI, R. & TIMOKHA, A.N. 2011 Steady-state liquid sloshing in a rectangular tank with a slat-type screen in the middle: Quasilinear modal analysis and experiments. *Phys. Fluids* **23**, 042101–1,042101–19.
- FALTINSEN, O.M. & TIMOKHA, A.N. 2010 A multimodal method for liquid sloshing in a two-dimensional circular tank. *J. Fluid Mech.* **665**, 457–479.
- FALTINSEN, O.M. & TIMOKHA, A.N. 2013 Multimodal analysis of weakly nonlinear sloshing in a spherical tank. *J. Fluid Mech.* **719**, 129–164.
- FEDKIW, R., ASLAM, T., MERRIMAN, B. & OSHER, S. 1999 A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *J. Comput. Phys.* **152**, 457–492.
- GIBOU, F., CHENG, L.-T., NGUYEN, D & BANERJEE, S 2007 A level set based sharp interface method for the multiphase incompressible navier-stokes equations with phase change. *J. Comput. Phys.* **222**, 536–555.
- GIBOU, F., FEDKIW, R., CHENG, L.-T. & KANG, M. 2002 A second-order-accurate symmetric discretization of the poisson equation on irregular domains. *J. Comput. Phys.* **176**, 205–227.
- HUBER, G., TANGUY, S., BERA, J. & GILLES, B. 2015 A time splitting projection scheme for compressible two-phase flows. application to the interaction of bubbles with ultrasound waves. *J. Comput. Phys.* **302**, 439–468.
- HUBER, G., TANGUY, S., SAGAN, M. & COLIN, C. 2017 Direct numerical simulation of nucleate pool boiling at large microscopic contact angle and moderate jakob number. *Int. J. Heat Mass Transfer* **113**, 662–682.
- IKEDA, T., IBRAHIM, R.A., HARATA, Y. & KURIYAMA, T. 2012 Nonlinear liquid sloshing in a square tank subjected to obliquely horizontal excitation. *J. Fluid Mech.* **700**, 304–328.
- KANG, M., FEDKIW, R. & LIU, X.-D. 2000 A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow. *J. Sci. Comput.* **15**, 323–360.
- LALANNE, B., CHEBEL, N. A., VEJRAZKA, J., TANGUY, S., MASBERNAT, O. & RISSO, F. 2015a Non-linear shape oscillations of rising drops and bubbles: Experiments and simulations. *Phys. of Fluids* **27** (123305).
- LALANNE, B., VILLEGAS, L. RUEDA, TANGUY, S. & RISSO, F. 2015b On the computation of viscous terms for incompressible two-phase flows with level set/ghost fluid method. *J. Comput. Phys.* **301**, 289–307.
- LANGBEIN, D. 2002 *Capillary surfaces: Shape Stability Dynamics, in Particular Under Weightlessness*, , vol. 178. Springer Tracts in Modern Physics.
- LEPILLIEZ, M. 2015 Simulation numérique des ballotements d’ergols dans les réservoirs de satellites en microgravité et à faible nombre de reynolds. PhD thesis, Université Toulouse 3 Paul Sabatier.
- LEPILLIEZ, M., POPESCU, E. R., GIBOU, F. & TANGUY, S. 2016 On two-phase flow solvers in irregular domains with contact line. *J. Comput. Phys.* **321**, 1217–1251.
- LIU, D. & LIN, P. 2008 A numerical study of three-dimensional liquid sloshing in tanks. *J. Comput. Phys.* **227**, 3921–3939.
- LIU, X.-D., FEDKIW, R. & KANG, M. 2000 A boundary condition capturing method for poissons equation on irregular domain. *J. Comput. Phys.* **160**, 151–178.
- MACLACHLAN, S.P., TANG, J.M. & VUIK, C. 2008 Fast and robust solvers for pressure-correction in bubbly flow problems. *J. Comput. Phys.* **227** (23), 9742 – 9761.
- MIGNOT, J., PIERRE, R., BERHANU, M., BUSSET, B., ROUMIGUIÉ, R., BAVESTRELLO, H., BONFANTI, S., MIQUEL, T., MAROT, L. O. & LLODRA-PEREZ, A. 2017 Fluid dynamic in space experiment. *68th International Astronautical Congress (IAC), Adelaide, Australia (IAC-17-A2.6.2)*.
- NG, Y.T., MIN, C. & GIBOU, F. 2009 An efficient fluidsolid coupling algorithm for single-phase flows. *J. Comput. Phys.* **228**, 8807–8829.
- OSHER, S. & SETHIAN, J.A. 1988 Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamiltonjacobi formulations. *J. Comput. Phys.* **79**, 12–49.
- PAPAC, J., GIBOU, F & RATSCH, C. 2010 Efficient symmetric discretization for the poisson,

- heat and stefan-type problems with robin boundary conditions. *J. Comput. Phys.* **229**, 875–889.
- RUEDA VILLEGAS, L., ALIS, R., LEPILLIEZ, M. & TANGUY, S. 2016 A ghost fluid/level set method for boiling flows and liquid evaporation: Application to the leidenfrost effect. *J. Comput. Phys.* **316**, 789–813.
- RUEDA VILLEGAS, L., TANGUY, S., CASTANET, G., CABALLINA, O. & LEMOINE, F. 2017 Direct numerical simulation of the impact of a droplet onto a hot surface above the leidenfrost temperature. *Int. J. Heat Mass Transfer* **104**, 1090–1109.
- STEPHAN, P.C. & BUSSE, C.A. 1992 Analysis of the heat transfer coefficient of grooved heat pipe evaporator walls. *Int. J. Heat Mass Transfer* **35** (2), 383–391.
- SUSSMAN, M., SMEREKA, P. & OSHER, S. 1994 A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.* **114**, 146–159.
- SUSSMAN, M., SMITH, K.M., HUSSAINI, M.Y., OHTA, M. & ZHI-WEI, R. 2007 A sharp interface method for incompressible two-phase flows. *J. Comput. Phys.* **221**, 469–505.
- TANGUY, S. & BERLEMONT, A. 2005 Application of a level set method for simulation of droplet collisions. *Int. J. Multiph. Flow* **31**, 1015–1035.
- TANGUY, S., MENARD, T. & BERLEMONT, A. 2007 A level set method for vaporizing two-phase flows. *J. Comput. Phys.* **221**, 837–853.
- TANGUY, S., SAGAN, M., LALANNE, B., COUDERC, F. & COLIN, C. 2014 Benchmarks and numerical methods for the simulation of boiling flows. *J. Comput. Phys.* **264**, 1–22.
- URBANO, A., TANGUY, S., HUBER, G. & COLIN, C. 2018 Direct numerical simulation of nucleate boiling in micro-layer regime. *Int. J. Heat Mass Transfer* **In press**.
- VELDMAN, A.E.P., GERRITS, J., LUPPES, R., HELDER, J.A. & VREEBURG, J.P.B. 2007 The numerical simulation of liquid sloshing on board spacecraft. *J. Comput. Phys.* **224**, 82–99.

Comparaison des données de l'expérience FLUIDICS avec la simulation numérique

Sommaire

4.1	Introduction	92
4.2	Tank modelling	93
4.2.1	Dimensionless Navier-Stokes equations	93
4.2.2	Configuration of the manoeuvres	94
4.3	The FLUIDICS experiment	95
4.4	Description of the numerical tool	96
4.4.1	Numerical methods	96
4.4.2	Mesh convergence	97
4.5	Comparisons	98
4.5.1	Force in the y-direction	98
4.5.2	Torque in the z-direction	100
4.5.3	Sloshing frequency	102
4.6	Conclusion	104
	References	105

Dans le cadre de la mission Proxima menée par le CNES, l'expérience FLUIDICS a été conçue et envoyée dans la Station Spatiale Internationale (ISS) en 2016. Cette expérience vise à reproduire le mouvement des fluides au sein d'un réservoir sphérique en micro-gravité. Comme expliqué dans la section 1.2.2, ce type de données expérimentales est très rare dans la littérature scientifique. Dans le cadre de cette thèse, nous avons mis en place des simulations numériques en amont du lancement pour quantifier les phénomènes dynamiques intéressants observables pour différentes valeurs des paramètres cinématiques de la manœuvre et du taux de remplissage du réservoir. Ces simulations ont permis de retenir des profils cinématiques qui ont été imposés à bord de l'ISS. En retour, les données expérimentales ont été renvoyées sur Terre et post-traitées par le service Fluid Structure Design d'Airbus Defence & Space. Ces données nous permettent de confronter directement les résultats de nos simulations numériques. Les résultats de cette comparaison font l'objet d'un article soumis au journal *Microgravity Science and Technology* en 2018 qui constitue ce chapitre de thèse.

Comparison between the FLUIDICS experiment and Direct Numerical Simulations of fluid sloshing in spherical tanks under microgravity conditions

Alexis Dalmon · Mathieu Lepilliez · Sébastien Tanguy · Romain Alis · Elena R. Popescu · Rémi Roumiguié · Thomas Miquel · Barbara Busset · Henri Bavestrello · Jean Mignot

Abstract The fluids behaviour within a spherical tank under microgravity conditions is investigated through a comparison between the original data from the FLUIDICS experiment carried out in the ISS and Direct Numerical Simulations for two-phase flows. The study case consists in the rotation of a spherical tank around a fixed axis. The tank is filled with a liquid with physical properties similar to those of liquid propellants and gases used in the space industry. Two tanks with different filling ratios have been tested in space. Cameras and sensors allow extracting the fluids dynamics and the temporal evolution of the force and torque exerted by the fluids on the tank wall. Several manoeuvres corresponding to different angular velocities and angular accelerations are submitted on both tanks. The velocity profile is divided into four phases: from zero, the angular velocity around the vertical axis increases linearly until it reaches the required constant value for which the fluids stabilise in the second phase, then the angular velocity decreases until it recovers zero. Numerical simulations are computed with the home-made code DIVA which is based on the Level Set method coupled with the Ghost Fluid Method. The force in the radial direction gives the value of the centrifugal force during the constant angular velocity phase. The average cen-

trifugal force is well predicted by the simulations, the comparison with the experimental data exhibits errors lower than 3% for the half-filled tank. Considering the vertical torque, the effect of the Euler acceleration is clearly visible through the important peaks of opposite sign observed during the acceleration and the deceleration phases. Moreover, the oscillations of the gas bubble during the second phase can be observed from the torque evolution. Their magnitude decreases throughout time until the steady state is reached. The measured and predicted temporal evolutions match together until the magnitude of the oscillations reaches the noise level of the data. The bubble oscillations are much more damped for the tank containing a larger amount of liquid (75%). The frequency of these oscillations are investigated applying the Fourier transform of the torque signals and by looking at the videos taken during the experiment. Similar oscillation frequencies are observed with the experimental setup and the numerical simulations, even for the manoeuvre with the lower Bond numbers. We verify that the oscillation frequency increases with the angular velocity. Finally, the comparison exhibits that the numerical simulations provide an accurate prediction of the fluids behaviours in microgravity conditions for this range of Bond numbers.

Keywords Fluid sloshing · Microgravity experiment · Direct Numerical Simulation

A. Dalmon (✉) · S. Tanguy · R. Alis · E. R. Popescu
Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, IMFT, Université
de Toulouse, CNRS, 2 Allée du Professeur Camille Soula, 31400
Toulouse, France
E-mail: alexis.dalmon@imft.fr

M. Lepilliez · R. Roumiguié · T. Miquel · B. Busset · H. Bavestrello
Airbus Defence & Space, 31 Avenue des Cosmonautes, 31402
Toulouse Cedex 4, France

J. Mignot
Centre National d'Études Spatiales, 18 Avenue Edouard Belin, 31401
Toulouse Cedex 9, France

1 Introduction

The sloshing of fluids inside tanks is one of the most important disruptions of satellite stability in microgravity conditions (Lepilliez 2015). A satellite tank is filled with liquid propellant and gas to maintain a sufficient pressure during the lifetime of the satellite. During a manoeuvre, the motion of the satellite leads to the motion of the fluids within the tanks. The centre of mass of the fluids evolves and this

generates forces and torques on the satellite structure which can deteriorate the pointing performances. For satellites requiring important accuracy on the attitude, the sloshing phenomenon have to be anticipated and technical solutions to limit its effects must be considered. Several studies have been conducted on the prediction of sloshing in microgravity conditions. Analytical models, based on a 1D mass spring system or a pendulum system have been introduced by Abramson (1967) and taken over by Dodge (2000). The parameters of the simplified systems are deduced from the tank geometry, the fluids properties and the accelerations exerted on the tank. Finally, the model allows to compute the sloshing frequencies, damping ratios and forces exerted on the tank wall for a given manoeuvre. However, these analytical models cannot be considered within the framework of low Bond numbers manoeuvres for which the non linear effects of the surface tension cannot be neglected. Very few experimental data exist because of the complexity to maintain microgravity conditions for a long period of time. Parabolic flights and drop towers enable to create several seconds of microgravity environment but low Bond numbers manoeuvres require several minutes for the fluids to stabilise. Finally, Direct Numerical Simulation is a promising candidate to investigate the fluids behaviour during station-keeping manoeuvres. The capillary effects and the microgravity conditions can be integrated in the numerical models without additional complexity compared to Earth gravity conditions. Numerical studies on the liquid sloshing in tanks have been performed (Veldman et al 2007; Liu and Lin 2008). Nevertheless, experimental data are still needed to validate the numerical results. To provide experimental data on this topic, the French national space agency (CNES) sent an experiment to the International Space Station (ISS) to quantify the sloshing phenomenon in microgravity conditions (Mignot et al 2017). Our objective in this paper is to carry out comparisons between numerical simulations and data collected in space to validate accurately the numerical methods predicting fluid sloshing. In section 2, the description of the study case will be presented and the dominating effects will be highlighted by using the dimensionless Navier-Stokes equations. We will consider the motion of the fluids inside a tank rotating around a staggered axis in microgravity conditions. Because satellite tanks are usually not aligned with the inertial axis of the satellite, this study aims at modelling the fluids behaviour during a typical rotational manoeuvre. Then, the experimental setup will be described in section 3 with the different measuring devices. Section 4 details the numerical methods implemented to predict the fluids behaviour inside the spherical tank. Finally, section 5 focuses on the comparisons between the experimental data and the numerical simulations. The temporal evolution of the force and torque exerted by the fluids on the tank wall will be investigated for different angular velocity profiles.

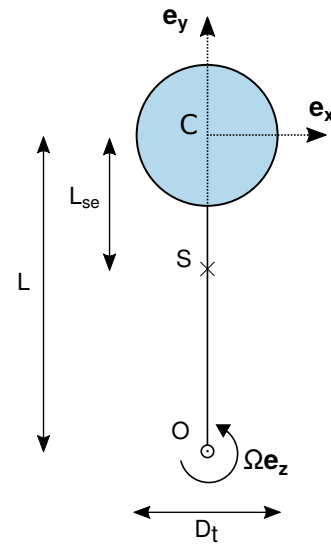


Fig. 1 Schematic of the study case.

2 Tank modelling

2.1 Dimensionless Navier-Stokes equations

In this study, we consider the rotation of a spherical tank around the z-axis in microgravity conditions. Figure 1 presents a schematic of the study case. The tank is a sphere of diameter D_t , the centre of which is labelled C . The fluid domain inside the tank is denoted by Ω_f and is displayed in blue in figure 1. The tank is linked to the rotation axis (located at point O) by a lever arm of length L . The direction of the lever arm defines the radial axis called \mathbf{e}_y in the tank referential. The rotation happens around the z-axis and is characterised by its angular velocity Ω and angular acceleration $\dot{\Omega}$.

To quantify the main effects of the manoeuvre on the fluids, we write the Navier-Stokes equations in the fluid domain

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}) + \mathbf{F}_{\text{ext}}, \quad (2)$$

where t is the time, ρ the fluid density, μ the fluid viscosity, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ the velocity field, p the pressure, \mathbf{F}_{ext} the volume forces induced by the motion of the satellite and $\bar{\bar{\mathbf{D}}}$ is the rate-of-deformation tensor defined as

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}. \quad (3)$$

The referential of the tank is non-Galilean. The inertial and Coriolis accelerations must be taken into account

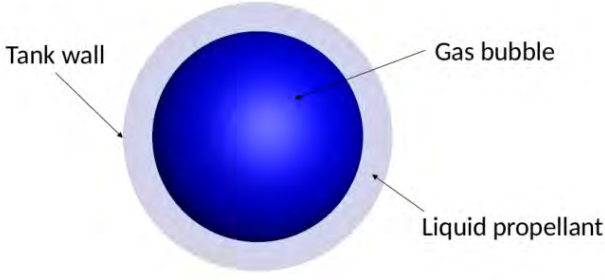


Fig. 2 Inside view of the tank at the initial time.

through the external volume force. The Coriolis acceleration corresponds to $\mathbf{a}_1 = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ and the inertial acceleration is the sum of the Euler acceleration $\mathbf{a}_2 = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{OM}$, the centrifugal acceleration $\mathbf{a}_3 = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{OM})$ and the relative acceleration \mathbf{a}_R between the tank and the rotating referential at point O . Here, the relative acceleration is zero and the position vector of the fluid particle with respect to the rotation axis is defined as

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OC} + \mathbf{CM} = x\mathbf{e}_x + (L+y)\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad (4)$$

with $\mathbf{CM} = (x, y, z)$ the coordinates of a fluid particle in the referential of the tank. The total volume force in the tank reference \mathbf{F}_{ext} is expressed as follows,

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = -\rho \sum_i \mathbf{a}_i = \rho \begin{pmatrix} 2\Omega v + (L+y)\dot{\Omega} + x\Omega^2 \\ -2\Omega u - x\dot{\Omega} + (L+y)\Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

The fluid domain Ω_f is now divided in two parts: Ω_l the liquid propellant region and Ω_g the gas region. The filling ratio τ_{fill} represents the volume of liquid divided by the total volume of the tank,

$$\tau_{fill} = \frac{V_l}{V_f}. \quad (6)$$

The physical properties of each fluid are respectively denoted by the subscript l or g . We call Γ the interface between the fluids regions (coloured in blue in figure 2) and \mathbf{n} its outward normal. From now on, the jump of the physical properties and the effect of surface tension σ are considered at the interface. Moreover, the liquid propellants used in the space industry are perfectly wetting fluids. This forces the liquid to stay in contact with the tank wall. Therefore we consider that the gas initially takes the form of a spherical bubble of diameter D_0 centred in the tank. In figure 2, the interface Γ between the fluids is represented in blue, the gas occupies the centre of the tank and the liquid is in contact with the tank wall.

Some dimensionless variables are used to extract characteristic numbers from the Navier-Stokes equations,

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_l}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_l}, \quad \nabla^* = D_0 \nabla, \quad t^* = t \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_l D_0^3}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} \sqrt{\frac{\rho_l D_0}{\sigma}}, \quad p^* = \frac{p D_0}{\sigma}, \quad \mathbf{a}_i^* = \frac{\mathbf{a}_i}{\gamma}, \quad (8)$$

with γ a characteristic acceleration.

Considering the Coriolis and the centrifugal accelerations, the characteristic acceleration is based on the angular velocity and is equal to $\Omega^2 L$. For the Euler acceleration, the characteristic acceleration is based on the angular acceleration, the value of which is $\dot{\Omega} L$. Finally, the dimensionless Navier-Stokes equations can be written as,

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (9)$$

$$\rho^* \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right) = -\nabla^* p^* + Oh \nabla^* \cdot (2\mu^* \bar{\mathbf{D}}^*) - Bo_i \rho^* \mathbf{a}_2^* - Bo_c \rho^* (\mathbf{a}_1^* + \mathbf{a}_3^*), \quad (10)$$

with Oh the Ohnesorge number and two Bond numbers defined as,

$$Oh = \sqrt{\frac{\mu_l^2}{\rho_l \sigma D_0}}, \quad Bo_c = \frac{\rho_l \Omega^2 L D_0^2}{\sigma}, \quad Bo_i = \frac{\rho_l \dot{\Omega} L D_0^2}{\sigma}. \quad (11)$$

The Ohnesorge number compares the viscosity to the surface tension effects and the Bond numbers compare the inertial effects induced by the manoeuvre to the surface tension effects. Bo_c is the Bond number that focuses on the inertial effects related to the angular velocity and Bo_i is the Bond number that depends on the angular acceleration.

2.2 Configuration of the manoeuvres

The manoeuvre we consider is the typical rotation manoeuvre of satellites in orbit. As defined previously, the rotation of the tank happens around the z -axis and the angular acceleration and velocity are defined as $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\Omega} \mathbf{e}_z$ and $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$. The typical angular velocity profiles we consider are shown in figure 3 with the corresponding Bond numbers. They consist in a first phase with a constant angular acceleration $\dot{\Omega}$ until the angular velocity reaches its required value Ω . From then on, the angular acceleration is set to zero and the velocity stays at its constant value. Finally, the opposite angular acceleration is enforced until the angular velocity comes back to zero and the tank remains fixed.

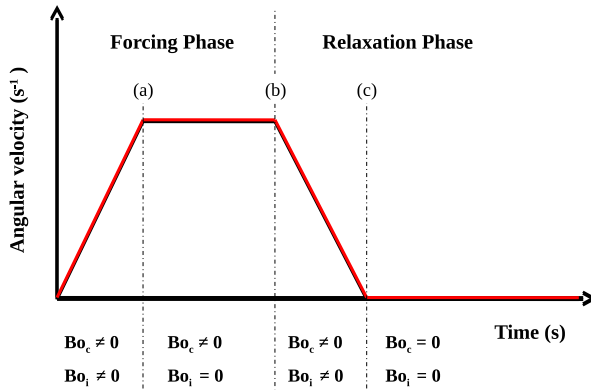


Fig. 3 Angular velocity profile of the manoeuvre.

Table 1 Study parameters of the manoeuvres considered.

N ^o	τ_{fill}	Ω/Ω^1	t_{acc}/t_{acc}^1	Bo_c	Bo_i
1	50%	1	1	76	24
2	75%	1	1	48	15
3	50%	$1/\sqrt{3}$	1	26	14
4	75%	$1/\sqrt{3}$	1	16	9
5	50%	$1/\sqrt{6}$	1	13	10
6	50%	$1/\sqrt{12}$	0.5	6	14

In this study, two different filling ratios are considered: 50% and 75%. Several constant angular velocities are enforced on the tanks. They are defined with respect to the angular velocity of the first manoeuvre, denoted by Ω^1 , and are summarised in table 1. The angular accelerations applied during the first and third phases with opposite signs are characterised by the duration of these phases denoted by t_{acc} with respect to the time of the first manoeuvre t_{acc}^1 . The corresponding Bond numbers, defined in section 2.1, are computed for the 6 manoeuvres of this study and are listed in table 1.

3 The FLUIDICS experiment

The FLUIDICS (FLUID DynamICS in Space) experiment was a part of the Proxima mission of the CNES, the French space agency, lead by the astronaut of the ESA (European Space Agency) Thomas Pesquet in the International Space Station (ISS). The FLUIDICS experiment, represented in figure 4, is basically a slow rate centrifuge able to reproduce the fluids motion inside a satellite tank in orbit. It consists of a spherical tank containing a safe substitute of propellant and air, connected by an arm to a motor.

Two spherical tanks with the same diameter D_t have been used in microgravity conditions. They are made of two polycarbonate half spheres glued together. These tanks are respectively filled with 50% and 75% of 3M Novec 2704 liquid. Figure 5 is a photograph taken on earth of the tank half

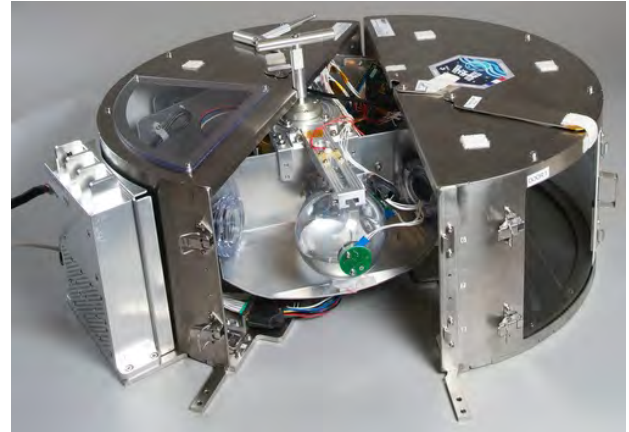


Fig. 4 View of the inside of the FLUIDICS experiment.

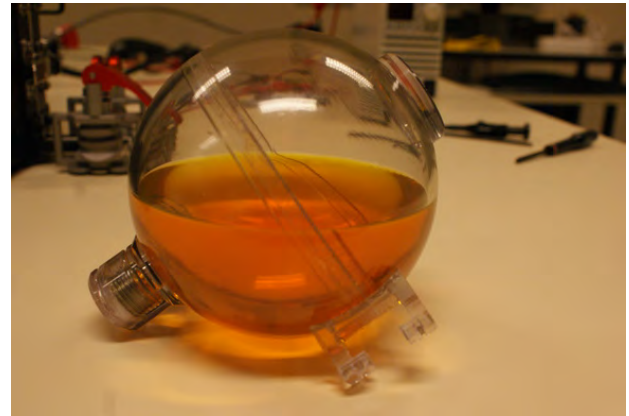


Fig. 5 Tank half filled with Novec liquid on earth.

filled with orange Novec liquid. The liquid is an electronic card coating which has the same range of physical properties (viscosity μ_l and density ρ_l) as propellants used in the space industry and comply with the ISS safety guidelines. The perfectly wetting property of these propellants is still respected with the Novec fluid. This will enable us to consider a zero contact angle condition in the simulations presented hereafter. The other fluid contained in these tanks is air, the physical properties of which are denoted by μ_g and ρ_g . The surface tension between the liquid and the gas is symbolised by σ .

Each tank can be plugged at the end of the rotating arm through an interface linked to a force sensor. This sensor gives the forces and torques exerted by the tank on the rotating arm in the three directions. The sensor is located at a distance L_{se} from the centre of the tank towards the rotating arm. The sensor location is depicted in figure 1 at point S. The rotating arm is linked to the motor located at the centre of the experiment. The lever arm L is the distance between the rotation axis and the centre of the tank. Beside the tank, the rotating arm supports two high resolution monochromatic cameras pointing at the tank location

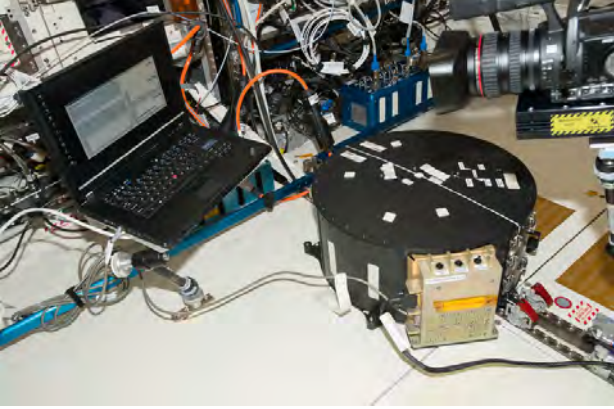


Fig. 6 The FLUIDICS experiment fixed to the ISS structure.

and, at the other end, the electronics needed to record data. Finally, the experiment is enclosed in a protection box to comply with safety rules and is fixed to the ISS seat tracks as shown in figure 6. A ventilation system cool down the inside of the protection box because of the heat released by the electronics. More details about the experiment are given in Mignot et al (2017).

The 6 manoeuvres described in table 1 have been executed in the ISS in 2017. The manoeuvres with the half-filled tank have been done twice to ensure repeatability. The data have been post-processed to be correlated with numerical simulations. The data from the force and torque sensor have been filtered and the solid contribution of the empty tank in the measured data has been removed to quantify only the effect of the fluids on the tank wall.

4 Description of the numerical tool

4.1 Numerical methods

In this section, the numerical solver considered in this study is presented. The home-made code DIVA (Dynamics of Interface for Vaporization and Atomization) is based on several numerical methods dedicated to the computation of two-phase flows.

The computational domain can be divided in two regions: a fluid region Ω_f corresponding to the inside of the tank and a solid region Ω_s which consists of the rest of the cubic computational domain. The interface between these regions is denoted by Γ_s and represents the tank wall. As seen in section 2.1, the fluid region is divided in two phases as well: the liquid region Ω_l and the gas region Ω_g separated by the interface denoted by Γ .

The level-set method of Osher and Sethian (1988) and Sussman et al (1994) is used to follow the interface motion of Γ through time and to define the static position of Γ_s . Two level-set functions are defined and represent first, the

signed distance function from the liquid gas interface ϕ and second, the signed distance from the solid fluid interface ϕ_s . The motion of the liquid-gas interface is captured by solving the following transport equation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (12)$$

coupled with the reinitialization algorithm of Sussman et al (1994) to maintain the distance property of the level-set function through time. Based on the work of Fedkiw et al (1999) and Aslam (2004), the following boundary condition on the level-set function ϕ must be considered within the solid domain to enforce the contact angle θ_s if a triple line exists

$$\mathbf{n}_s \cdot \nabla \phi|_{\Gamma} = -\cos \theta_s, \quad (13)$$

with \mathbf{n}_{sol} the outward normal vector of the fluid-solid interface. As previously stated, the simulations involved in this paper will still consider a zero contact angle condition since the spherical tanks are filled with a perfectly wetting fluid. The zero contact angle hypothesis will be further justified by comparing the numerical results with the experimental data, especially the torque signal which depends on the interface position.

The incompressible Navier-Stokes equations for Newtonian two-phase flows are solved using the Ghost Fluid Conservative viscous Method with an Implicit scheme (GFCMI) of Lepilliez et al (2016). This method is based on the projection method of Chorin (1967) first introduced by Sussman et al (2007). It consists in three steps: first, considering the velocity field \mathbf{u}^n at time $t^n = n\Delta t$, an intermediate velocity \mathbf{u}^* is computed without considering the pressure term by solving the following linear system,

$$\begin{aligned} \rho^{n+1} \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \cdot (2\mu^{n+1} \bar{\mathbf{D}}^*) \\ = \rho^{n+1} \left(\mathbf{u}^n - \Delta t \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{\mathbf{F}_{ext}}{\rho^{n+1}} \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

The rate-of-deformation tensor is solved implicitly to remove the time-step restriction due to the viscosity. The linear system which couples the three components of the velocity is solved using a Gauss-Seidel algorithm.

Then, the pressure field p^{n+1} is regarded as the scalar potential function of the Hodge decomposition and satisfies the Poisson equation with Neumann boundary conditions

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \nabla \cdot \left(\frac{\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_{\Gamma}}{\rho^{n+1}} \right), \quad (15)$$

with κ the local curvature of the liquid-gas interface and \mathbf{n} the outward normal vector of the interface and δ_Γ a multi-dimensional Dirac distribution at the interface. The density jump and the pressure jump due to the surface tension term are taken into account with the sharp representation of the interface from Liu et al (2000). The resolution of the linear system is performed using the Black Box MultiGrid method, see Dendy (1982) and MacLachlan et al (2008) for more details.

Finally, the velocity at the next time step \mathbf{u}^{n+1} is computed as the projection of the intermediate velocity onto the divergence-free space

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} (\nabla p^{n+1} - \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma). \quad (16)$$

The boundary conditions due to the tank wall must be considered within the computational domain. A subcell Dirichlet boundary condition on the velocity and a Neumann boundary condition on the pressure are enforced using the methodology of Gibou et al (2002), Ng et al (2009) and Lepilliez et al (2016).

Following the general guidelines of the Ghost Fluid Method, our home-made code DIVA can also consider phase change simulations, by imposing additional jump conditions to maintain mass conservation (Nguyen et al 2001), energy conservation (Gibou et al 2007; Tanguy et al 2014) and chemical species conservation (Papac et al 2010; Tanguy et al 2007; Rueda Villegas et al 2016), and compressible flows (Huber et al 2015). This solver has been extensively validated with other experimental data both for isothermal two-phase flows (Lalanne et al 2015; Tanguy and Berlemont 2005) and for two-phase flows with phase change for impacting droplets in the Leidenfrost regime (Rueda Villegas et al 2017) and for nucleate pool boiling (Huber et al 2017; Urbano et al 2018).

4.2 Mesh convergence

To ensure the numerical simulations are well defined, a mesh convergence study on a specific manoeuvre is presented. We consider manoeuvre n°1 (see table 1) which corresponds to the highest values of the Bond numbers: $Bo_c = 76$ and $Bo_i = 23$ with the half-filled tank. The maximum angular velocity is maintained during the second phase and the filling ratio of 50% ensures an important motion of the gas bubble within the tank. The simulations have been done on three different meshes with 64, 128 and 256 cells in each direction. The force \mathbf{F} and the torque at the sensor location \mathbf{T} exerted by the fluids on the tank wall are computed in the simulations as

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega_f} (\nabla p - \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma) dV, \quad (17)$$

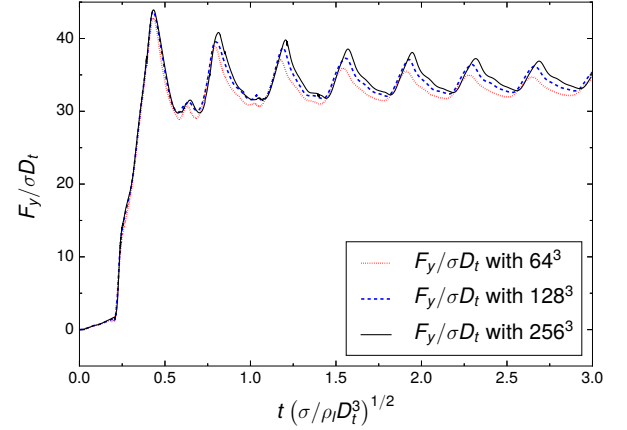


Fig. 7 Computed force in the y-direction throughout time for manoeuvre n°1 and for three different meshes: 64^3 , 128^3 and 256^3 .

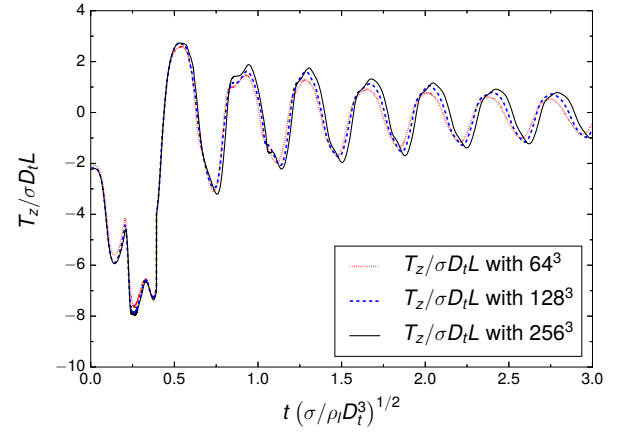


Fig. 8 Computed torque in the z-direction throughout time for manoeuvre n°1 and for three different meshes: 64^3 , 128^3 and 256^3 .

$$\mathbf{T} = \int_{\Omega_f} \mathbf{SM} \times (\nabla p - \sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma) dV. \quad (18)$$

with \mathbf{SM} the vector between the sensor and a fluid particle as $\mathbf{SM} = x\mathbf{e}_x + (L_{se} + y)\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$.

Figures 7 and 8 respectively show the evolution of the dimensionless force in the y-direction and the dimensionless torque in the z-direction until $t^* = 3$ for the three meshes. The physics corresponding to the temporal evolution of the force and the torque will be described in section 5, this section only takes interest in the grid sensitivity.

The temporal evolutions of the force and the torque are similar for the three meshes. At the beginning, the increase of the force toward the same peak is predicted by all the meshes. The same oscillatory behaviour is obtained with similar frequencies and magnitudes. The mean value of the force after $t^* = 0.5$ varies a little but stays close for the two

finest grids. Similarly, the frequency and the magnitude of the torque oscillations for the three meshes are really close to each other.

The meshes containing 128 and 258 cells in each directions are in good agreement and prove the spatial convergence. We will then consider the intermediate mesh 128^3 for all the simulations of this paper.

5 Comparisons

This section aims at comparing the data from the FLUIDICS experiment with the numerical results for the manoeuvres listed in table 1. The comparison deals with the y-direction force and the z-direction torque. Indeed, because the system is symmetrical to the plane $\{z = 0\}$, no external acceleration happens in the z direction leading to no force nor motion of the centre of mass toward \mathbf{e}_z . Thus, the relation between the force and the torque at the sensor location becomes

$$\mathbf{T} = \mathbf{SG} \times \mathbf{F} = (x_g F_y - (L_{se} + y_g) F_x) \mathbf{e}_z, \quad (19)$$

with $\mathbf{SG} = \mathbf{SC} + \mathbf{CG}$ and $\mathbf{CG} = (x_g, y_g, z_g \approx 0)$ the coordinates of the centre of mass in the tank referential. Because L_{se} is higher than the maximum coordinates of the centre of mass, the torque in the z-direction has the same temporal evolution than the x-component of the force. To avoid redundant comparisons and because the sensor has a greater sensitivity to the torque than to the force, the x-direction force is not investigated at the expense of the z-direction torque.

5.1 Force in the y-direction

The force in the y-direction corresponds to the highest component of the forces exerted by the fluids on the tank wall. During the constant angular velocity phase, the centrifugal acceleration is the only external force that remains after the fluids stabilisation. Its asymptotic value is thus a relevant criterion to compare the experimental data with the simulations. Figure 9 shows the dimensionless force evolution measured in the ISS (in solid black) and computed by the code (in dashed blue) for manoeuvre n°1.

First, the dimensionless force increases considerably during the acceleration phase. Once the first phase is over, the angular velocity remains constant and the angular acceleration is set to zero. The volume force is then dominated by the centrifugal force and becomes

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \rho \begin{pmatrix} 2\Omega v + x\Omega^2 \\ -2\Omega u + (L+y)\Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

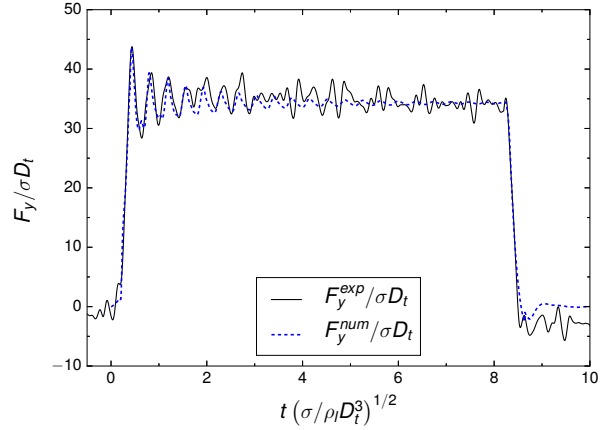


Fig. 9 Comparison of the measured and computed forces in the y-direction throughout time for manoeuvre n°1.

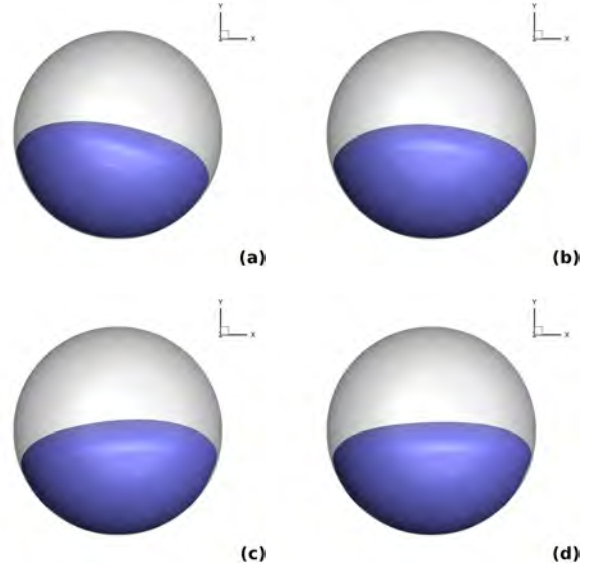


Fig. 10 Oscillation of a gas bubble (in blue) in the spherical tank predicted with $\tau_{fill} = 50\%$.

Consequently, in the second phase, the liquid moves to the direction $+\mathbf{e}_y$ because of the centrifugal force and the gas bubble spreads against the tank wall in the opposite direction. At the beginning of the second phase, the fluids are not stabilised and the gas bubble oscillates around the x-axis $\{x = 0\}$. This is due to the sign of the x-component of the centrifugal force which changes every time the centre of mass crosses the axis $\{x = 0\}$. Four pictures of an oscillation of the gas bubble predicted by the numerical code are shown in figure 10. These oscillations are damped with time until the bubble reaches its equilibrium position. At the steady state, the Coriolis contribution of equation (20) disappears and only the centrifugal force remains.

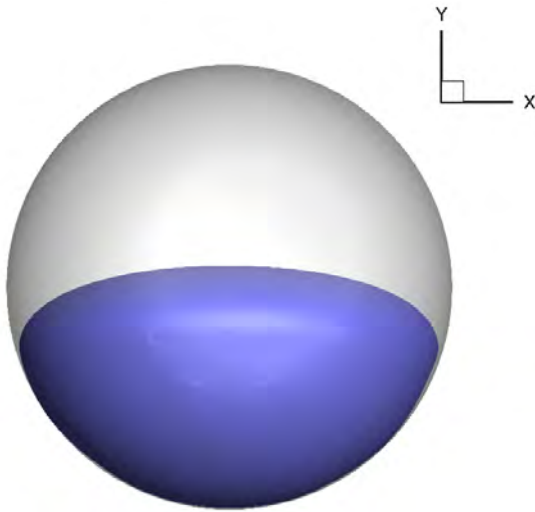


Fig. 11 Gas bubble at the steady state of the second phase of the first manoeuvre.

Similarly, we observe in figure 9 that after t_{acc} , the force oscillates around a constant value. The magnitude of the oscillations decreases throughout time until they disappear in the simulations (in dashed blue), and until the magnitude of the oscillations reaches the noise level in the experimental data (in solid black).

Figure 11 depicts the gas bubble (in dark blue) inside the spherical tank at the equilibrium state according to the simulations. The gas bubble is spread against the tank wall in the direction $-\mathbf{e}_y$ because of the centrifugal force. It is stabilised and symmetrical to the axis $\{x = 0\}$, leading to no force in the x-direction nor torque in the z-direction and the x-coordinate of the centre of mass equals zero. Because of the perfectly wetting condition, a thin film of liquid is trapped between the bubble and the tank wall, as can be observed in figure 11.

Finally, the angular velocity decreases during the deceleration phase, leading to the drop of the y-direction force until it reaches zero when no more external accelerations are enforced.

The two curves in figure 9 exhibit the same temporal evolution of the y-direction force. The mean values of the measured and computed forces during the second phase are close to each other. The measured mean value is 34.84 and the computed mean value is 34.16 leading to a difference lower than 2%. This manoeuvre has been enforced a second time in the ISS and the resulting mean value is 34.69 which gives a difference still lower than 2% between the numerical simulations and the experimental data. We observe as well that the first oscillations are well predicted by the simulations. The computed force coincides with the data for the three first oscillations. Over time, the magnitude of the oscillations decreases and the variation of the measured force

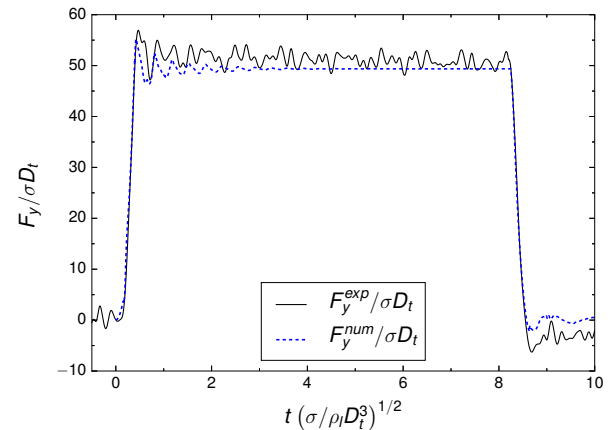


Fig. 12 Comparison of the measured and computed forces in the y-direction throughout time for manoeuvre n°2.

reaches the level of noise. In the numerical simulations, the oscillations carry on until the end of the second phase with an extremely low magnitude. The more detailed study of the oscillations is presented in the next subsection through the torque evolution.

Figure 12 shows the evolution of the measured and computed dimensionless force in the y-direction throughout time for manoeuvre n°2. It consists in the same velocity profile as the first manoeuvre with the tank containing 75% of liquid. The force evolution corresponds to the same behaviour but the force value during the second phase is more important. The filling ratio is higher, which means that more liquid is inside the tank and leads to a higher centrifugal acceleration. The computation of the mean forces shows a slightly larger difference between the data and the simulations compared to the previous manoeuvre. The mean value of the measured force is 51.29 and the mean value of the computed force is 49.31 which leads to an error of 3.85%.

The damping of the oscillations is stronger than in the previous case. They disappear in the numerical simulation after $t^* = 4$. This phenomenon is a consequence of the high filling ratio. The gas bubble is smaller and spreads with a higher magnitude on the tank wall. Because of the tank geometry, the gas bubble is highly deformed and its motion is more constrained. The low variation of the force at the beginning of the second phase prevents us from extracting more information about the oscillations.

Considering a lower angular velocity, the force evolution measured and predicted for manoeuvre n°3 is plotted in figure 13. The average values of the force during the second phase stay close for the two experimental runs between 11.35 and 11.72. The comparison with the computed value of 11.37 shows a difference lower than 3% for the two runs of manoeuvre n°3 carried out in the ISS. However, the oscillations of the bubble cannot be extracted from the experi-

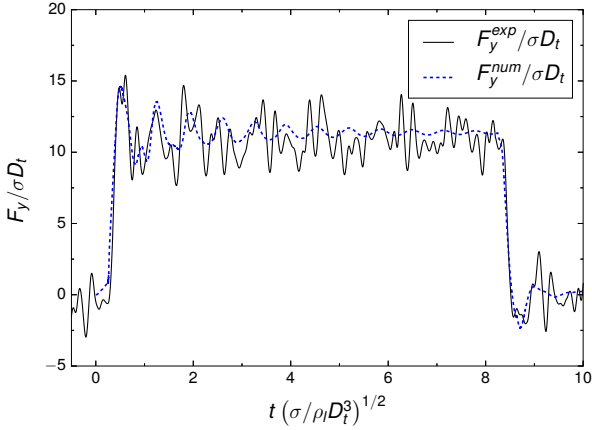


Fig. 13 Comparison of the measured and computed forces in the y-direction throughout time for manoeuvre n°3.

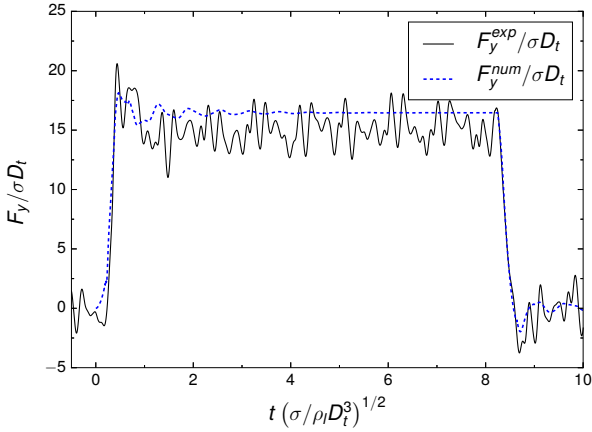


Fig. 14 Comparison of the measured and computed forces in the y-direction throughout time for manoeuvre n°4.

mental data because the noise level is too important with respect to the centrifugal force. With the simulation, the bubble oscillations are visible but their magnitudes do not exceed the experimental noise level.

The same velocity profile enforced on the 75%-filled tank gives the same observations. Figure 14 shows that the bubble oscillations are more damped because of the additional mass of liquid and their magnitudes are still lower than the noise level. The average value of the force increases from values around 11.5 to 16 between the two tanks. Finally, the comparison of the mean values of the force shows a relative difference of 6.08%, which is the highest error we observe in the manoeuvres.

Table 1 gathers all the average values of the measured and computed dimensionless forces for manoeuvres n°1 to 4. Manoeuvres n°1 and 3 have been executed twice in the ISS and are respectively denoted with the subscripts 'a' and 'b'. The angular velocities of manoeuvres n°5 and 6 are too

Table 2 Comparison of the mean force in the y-direction.

N°	$F_y^{exp}/\sigma D_t$	$F_y^{num}/\sigma D_t$	Error
1a	34.84	34.16	1.97%
1b	34.69	34.16	1.55%
2	51.29	49.31	3.85%
3a	11.35	11.37	0.16%
3b	11.72	11.37	2.99%
4	15.52	16.46	6.08%

low to extract reliable data from the force and torque sensor and are not considered in this section.

In brief, the level of force increases with the Bond number Bo_c and the filling ratio. This is explained by the centrifugal force which depends directly on the square of the angular velocity and on the volume of liquid inside the tank. For the highest Bond numbers manoeuvres, the temporal evolution of the force is well predicted by the simulations: the mean force in the second phase and the oscillations are in good agreement with the experimental data. For all the manoeuvres, the numerical simulations predict mean values of forces with a maximum difference of 6%, providing a strong validation of the proposed numerical approach.

5.2 Torque in the z-direction

The torque in the z direction allows us to extract other contributions of the fluids on the tank wall. In addition to the y-direction force, the z-component of the torque exhibits the effects of the angular acceleration on the fluids and emphasises the oscillations of the bubble around its equilibrium position. Considering manoeuvre n°1, the dimensionless torque obtained by the FLUIDICS experiment in a microgravity environment and predicted by the simulations are plotted in figure 15 in solid black and dashed blue, respectively.

During the acceleration phase, we observe an important negative peak of the torque. This is due to the Euler acceleration which dominates the flow at the beginning of the manoeuvre. At early flow time, the angular velocity is low but the angular acceleration is already enforced on the tank. By neglecting the angular velocity with respect to the angular acceleration, the volume force becomes

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \rho \dot{\Omega} \begin{pmatrix} L+y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Because the lever arm L is higher than the maximal centre of mass coordinates, the volume force is dominated by the contribution of the Euler acceleration in the x-direction. This contribution is recovered in the z-direction torque following equation (19) and explains the negative peak we have

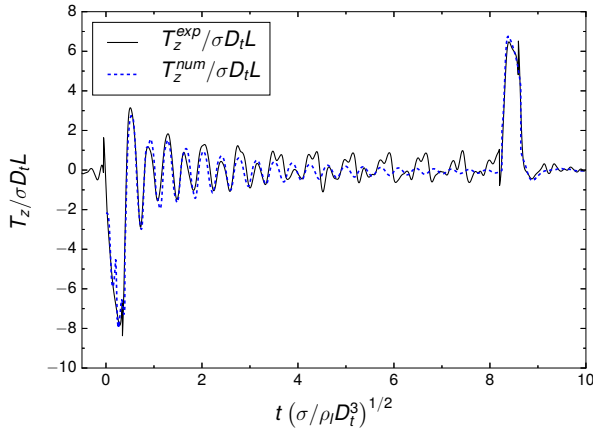


Fig. 15 Comparison of the measured and computed torques in the z-direction throughout time for manoeuvre n°1.

measured. The same phenomenon appears during the deceleration phase with a positive peak of the z-direction torque (visible at $t^* = 8.2$ in figure 15) because the angular acceleration is the opposite. During the constant angular velocity phase, the oscillations due to the bubble motion are clearly visible. The torque oscillates around zero and its magnitude decreases with time until the bubble reaches its equilibrium position, centred at the axis $\{x = 0\}$. Indeed, at the steady state, the x-coordinate of the centre of mass is zero and the volume force is only directed toward the y-direction (see equation (20)).

The comparison between the two curves of figure 15 shows a very good agreement on the temporal evolution of the torque measured in microgravity conditions and predicted by numerical simulations. The peaks corresponding to the acceleration and deceleration phases have the same magnitude in both cases and the sharp increase and decrease of the torque is well respected. The oscillations of the computed torque concur with the experimental data until the magnitude of the latter reaches the noise level. Both the magnitude and the frequency of the measured and predicted torque are in good agreement. The frequency of the oscillations is the aim of the next subsection.

Figure 16 represents the time evolution of the dimensionless torque for manoeuvre n°2. The same angular acceleration and velocity as for manoeuvre n°1 are enforced on the tank with $\tau_{fill} = 75\%$. Similarly, two peaks of opposite signs are observed during the first and third phases. Their magnitudes are increased with the filling ratio. During the constant angular velocity phase, the observed oscillations are more damped than for the half-filled tank. However, the first predicted oscillations have the same magnitude and frequency as the measured torque but the important damping and the data noise prevent us from going further.

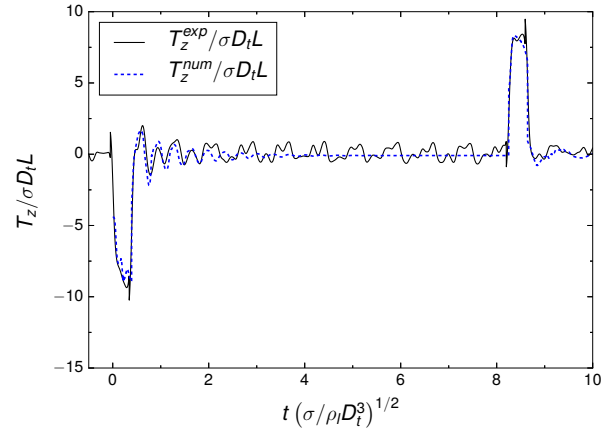


Fig. 16 Comparison of the measured and computed torques in the z-direction throughout time for manoeuvre n°2.

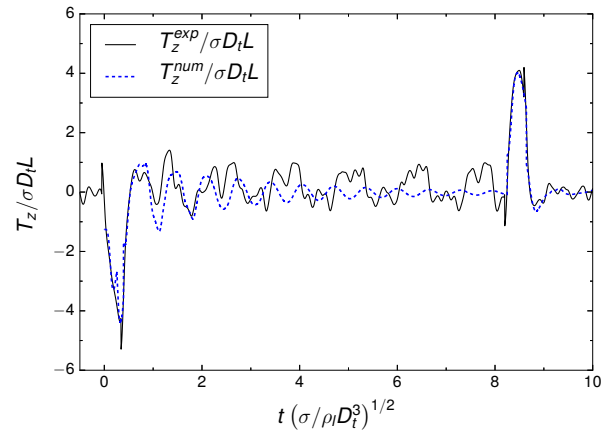


Fig. 17 Comparison of the measured and computed torques in the z-direction throughout time for manoeuvre n°3.

The temporal evolutions of the torque for manoeuvres n°3 and n°4 are depicted in figures 17 and 18, respectively. The magnitude of the torques decreases because of the lower angular velocity. The peaks corresponding to the contribution of the Euler acceleration are still visible and well predicted by the simulations but the angular acceleration being lower, the magnitudes of the peaks decrease. As the magnitude of the torque oscillations also decreases, the noise from the experimental setup becomes too large, preventing a possible comparison of the amplitude and the frequencies of the torque oscillations during the second phase.

These comparisons between the numerical and experimental torque signals provide also an indirect validation of the zero contact angle hypothesis. Indeed, as the torque depends both on the force and on the interface position, the good agreement reported previously confirms the relevance of this assumption, since the interface position depends strongly on the contact angle value.

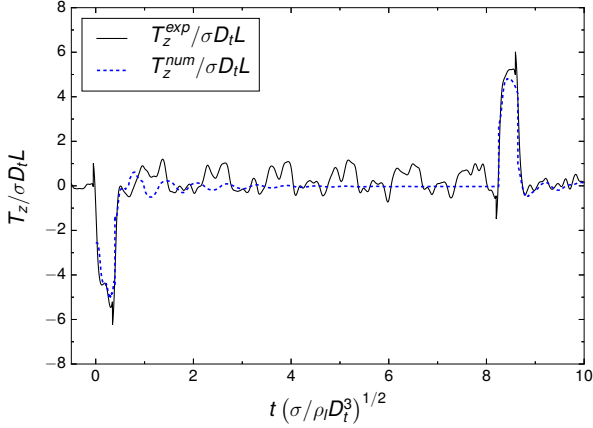


Fig. 18 Comparison of the measured and computed torques in the z -direction throughout time for manoeuvre n°4.

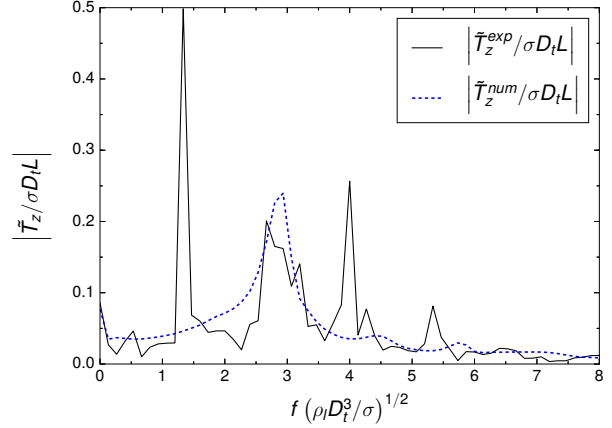


Fig. 20 Comparison of the measured and computed amplitude spectra of the z -direction torque for manoeuvre n°2.

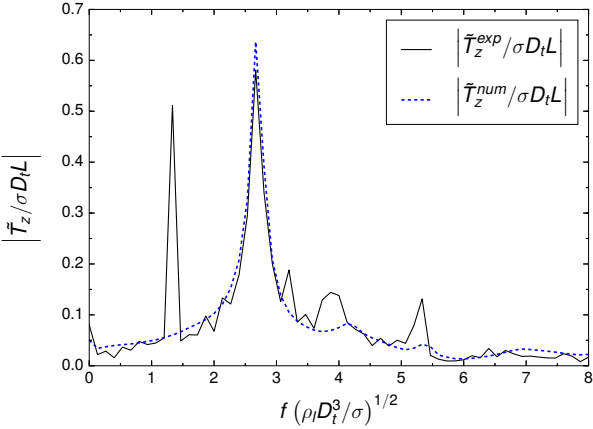


Fig. 19 Comparison of the measured and computed amplitude spectra of the z -direction torque for manoeuvre n°1.

5.3 Sloshing frequency

As previously stated, the oscillations observed at the beginning of the second phase are due to the motion of the gas bubble inside the tank before reaching its equilibrium shape and position depicted in figure 11. We consider the oscillations of the torque in the z -direction and apply a discrete Fourier transform to obtain the amplitude spectra of the signals. The transform is applied on the same time range $\Delta t^* = 7.5$ for all the manoeuvres. The objective of this section is to extract the frequencies of the oscillations for each manoeuvre and to compare the predicted value to the data from FLUIDICS.

Figure 19 depicts the amplitude spectra of the z -direction torque for manoeuvre n°1. In dashed blue, the amplitude spectrum of the torque from the simulation exhibits a main peak at $f^* = 2.67$. No other characteristic frequency appears in the simulation. In solid black, the amplitude spec-

trum from the experimental data is more complex. The same peak appears for the same frequency $f^* = 2.67$. These experimental and numerical frequencies match well within the frequency resolution $\Delta f^* = 0.133$. For this first manoeuvre, the simulation provides an accurate prediction of the sloshing frequency. A second important peak appears for a lower frequency in the experimental data. It corresponds to the rotation frequency denoted by $f_\Omega = \Omega/2\pi$. Knowing that $D_t/L = 0.57$, the dimensionless rotation frequency can be expressed as

$$f_\Omega^* = f_\Omega \sqrt{\frac{\rho_l D_t^3}{\sigma}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D_t Bo_c}{L(1 - \tau_{fill})^{2/3}}}. \quad (22)$$

For manoeuvres n°1 and 2, the dimensionless rotation frequency equals $f_\Omega^* = 1.322$ and corresponds to the lower frequency peak observed in figure 19. This parasitic frequency is likely due to an unbalance of the experiment and explains partly the spurious oscillations observed in the signal torque in figures 15 and 16. Other minor peaks appear for higher frequencies and can be attributed to the other kind of perturbations such as the electronic devices, the fans, the structural vibrations...

Figure 20 depicts the amplitude spectra of the vertical torque for manoeuvre n°2. In dashed blue, the spectrum of the simulation shows a main frequency around $f^* = 2.93$. In solid black, the range of frequencies $[2.64; 2.94]$ have important magnitudes. We assume that this interval contains the sloshing frequency and some disturbing frequencies. The rotation frequency is the most important peak and appears for the same value as in the previous manoeuvre. Finally, the same minor frequencies as in figure 19 appear around $f^* = 4$ and $f^* = 5.33$. As seen in figure 16, the torque oscillations are much more damped with the filling ratio of 75%.

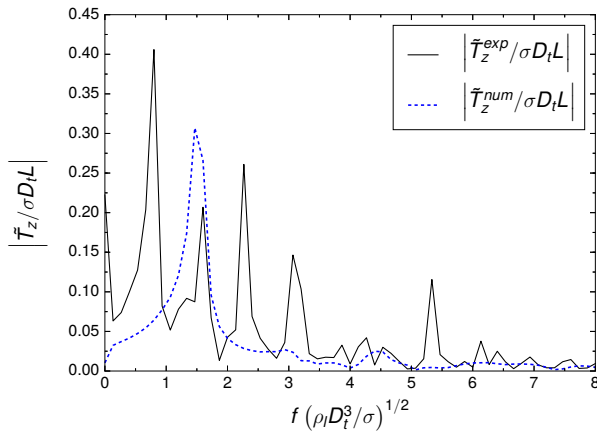


Fig. 21 Comparison of the measured and computed amplitude spectra of the z-direction torque for manoeuvre n°3.

The interval of time for which the bubble oscillations are noticeable is reduced and the noise due to the unbalance has a greater importance in the amplitude spectrum. This explains why the only frequency for which the amplitude spectrum decreases between the first and second manoeuvres is the sloshing frequency.

Figure 21 illustrates the amplitude spectra for the third manoeuvre. The oscillation frequency is clearly visible at $f^* = 1.47$ in the numerical results. In the experimental data, several peaks appear, represented in solid black. The lower frequency corresponds to the rotation frequency, which can be computed with equation (22) as $f_\Omega^* = 0.765$. The value of the predicted oscillation frequency is approached by an amplitude peak at $f^* = 1.6$. Then, several higher frequencies appear and correspond to the noise observed in figure 17. Finally, considering the most filled tank, the same amplitude spectrum as in manoeuvre n°3 is obtained with a decrease of the amplitude corresponding to the sloshing frequency. Despite the high level of noise involved in the signal in figure 18, the amplitude spectrum allows recovering the sloshing frequency even for this manoeuvre for which the highest perturbations are observed.

We observe that in the four amplitude spectra of figures 19 to 22, the same frequency $f^* = 5.33$ appears in the experimental data. The angular velocities and the filling ratios being different for each one of these cases, this disturbance frequency is independent from the manoeuvre enforced. This may come from electronic noises, the ventilation system of the experiment or the ISS environment.

Table 3 summarises the oscillation frequency extracted from the amplitude spectra. The predicted and measured frequencies are in close agreement for manoeuvres n°1 to 4. Moreover, the oscillation frequencies measured for the two runs of manoeuvres 1 and 3 are identical and listed in table 3. This demonstrates the repeatability of the experiment

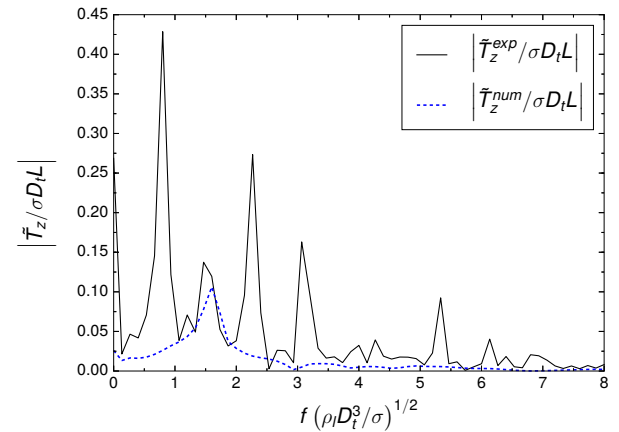


Fig. 22 Comparison of the measured and computed amplitude spectra of the z-direction torque for manoeuvre n°4.

Table 3 Comparison of the computed and measured frequencies of the oscillations with the amplitude spectra.

N°	$f^{exp} \sqrt{\rho_l D_t^3 / \sigma}$	$f^{num} \sqrt{\rho_l D_t^3 / \sigma}$
1a	2.67 ± 0.133	2.67 ± 0.133
1b	2.67 ± 0.133	2.67 ± 0.133
2	2.67 ± 0.133	2.93 ± 0.133
3a	1.60 ± 0.133	1.47 ± 0.133
3b	1.60 ± 0.133	1.47 ± 0.133
4	1.47 ± 0.133	1.60 ± 0.133

and provides a validation of the simulations for the bubble sloshing frequency observed in the second phase of the manoeuvre.

For the lower Bond numbers manoeuvres (n°5 and 6), the noise in the experimental data prevents us from extracting the force and torque temporal evolution. Nevertheless, the videos of the tank allow to observe the bubble motion throughout time. Considering the half-filled tank, the bubble oscillations are clearly visible during the constant velocity phase, even for Bo_c around 6. For these ranges of Bond numbers, several oscillations (between 3 for manoeuvre n°6 to 11 for manoeuvre n°1) are visible during the constant velocity phase and allow to extract the characteristic time of an oscillation. For the tank with $\tau_{fill} = 75\%$, the oscillations are quickly damped and we cannot extract the frequency from the video.

Figure 23 represents six snapshots of an oscillation of the gas bubble inside the half-filled tank. The spherical tank is centred in the pictures and the ring corresponding to the region where the two half-sphere of the tank are glued together is recognisable. The gas bubble is located towards the lever arm direction at the bottom of the pictures such as in figure 11. We observe that during the oscillation, the bubble approaches the tank wall in the camera direction and so, rises in the picture until it reaches its maximum (a to d).

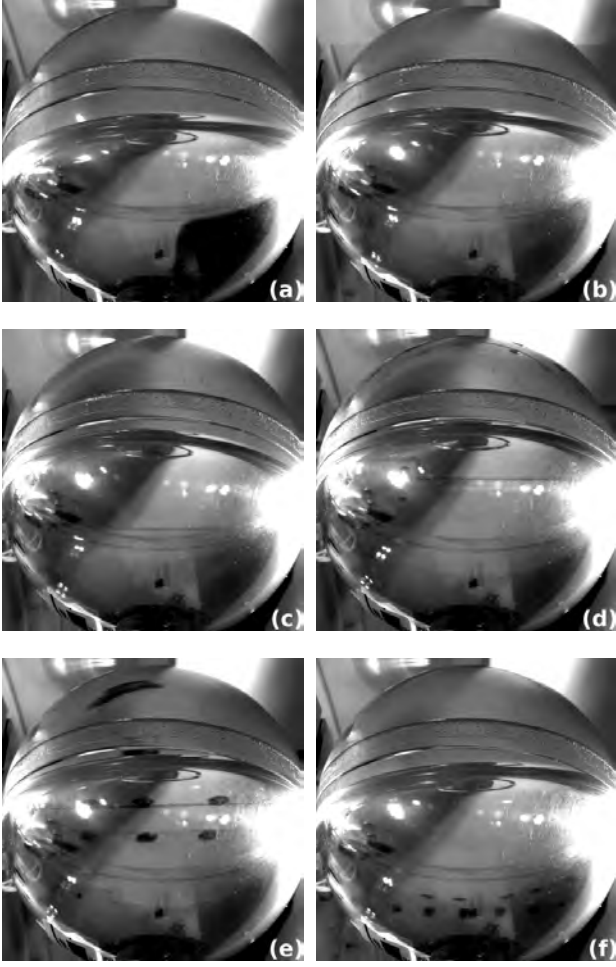


Fig. 23 Snapshots of a bubble oscillation with $\tau_{fill} = 50\%$.

Table 4 Comparison of computed and measured frequencies of the oscillations with the videos.

N°	$f^{exp} \sqrt{\rho_l D_t^3 / \sigma}$	$f^{num} \sqrt{\rho_l D_t^3 / \sigma}$
1	2.76 ± 0.136	2.67 ± 0.133
3	1.52 ± 0.065	1.47 ± 0.133
5	1.08 ± 0.057	1.07 ± 0.133
6	0.84 ± 0.046	0.80 ± 0.133

Then, the bubble goes to the opposite direction and the interface goes down until it reaches its minimum location (e and f).

Table 4 summarises the oscillation frequencies measured with the videos for all the Bond numbers exerted on the half-filled tank. They are compared with the values obtained with the Fast Fourier transform of the numerical simulations.

First, considering manoeuvres n°1 and 3, the frequencies measured with the videos are close to these from the torque signals (see table 3). Then, the frequencies of the simulations present a good agreement with the measured ones even

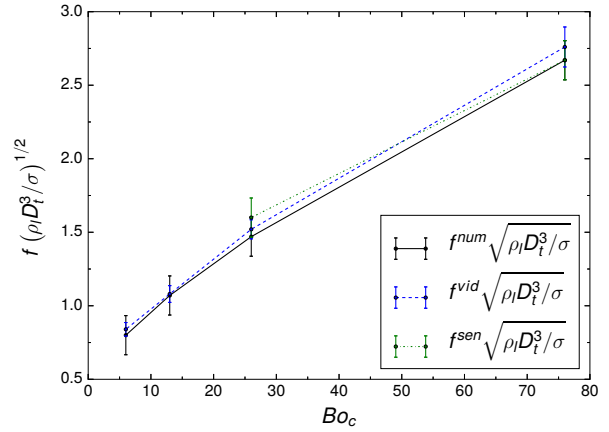


Fig. 24 Computed and mesured frequencies with the sensor and the video for different Bond numbers and $\tau_{fill} = 50\%$.

for the lower Bond numbers Bo_c of 6 and 13. The frequency resolution with the simulations is still equal to $\Delta f = 0.133$ and the accuracy when measuring the time period with the video depends on the manoeuvre. They are summarised in table 3. Despite the margin of error, the predicted frequencies are close to the measured ones in all cases with the half-filled tank. This extends the use of the numerical code for low Bond numbers manoeuvres.

Figure 24 summarises all the oscillation frequencies obtained with the half-filled tank. As we can assume that Bo_i influences weakly the oscillation phase, we take interest only in the centrifugal Bond number. For these four manoeuvres, we observe clearly that the oscillation frequency increases with Bo_c .

6 Conclusion

This paper presented the comparison between experimental data and numerical simulations of the fluids behaviour inside a spherical tank rotating around a fixed axis in micro-gravity conditions. The FLUIDICS experiment in the ISS allowed to measure the force and torque exerted by the fluids on the tank wall for different manoeuvres. These data have been compared to the numerical results from our homemade code DIVA. Preliminarily, the numerical simulations have been validated through a mesh convergence study on the manoeuvre with the highest Bond numbers. Then, results on six different manoeuvres corresponding to different angular velocities and filling ratio are presented both from numerical simulations and experimental data carried out in the ISS.

The comparison of the y-direction force shows a good agreement between the measured and predicted forces. The average value of the centrifugal force is well predicted with

an error lower than 6% for all the manoeuvres. This error decreases to 3% for the manoeuvres exerted on the half-filled tank. Moreover, the variations of the force at the beginning of the constant angular velocity phase are similar while their magnitudes are higher than the noise level. Considering the torque evolution, the peaks corresponding to the Euler acceleration contribution are clearly visible and their magnitudes are well predicted by the simulations. The oscillations of the gas bubble during the second phase of the manoeuvre have different magnitudes and damping ratios depending on the angular velocity and filling ratio. For the first two manoeuvres, the oscillations exceed the noise level and the measured and predicted temporal evolutions are in close agreement. By applying the discrete Fourier transform on the second phase of the torque signal, it has been possible to extract their main frequencies. The numerical simulations exhibit only one frequency corresponding to the bubble oscillation frequency. For the experimental data, further disturbing frequencies appear, such as the rotation frequency, which bring out some unbalance of the experimental setup. Higher frequencies may also come from vibrations of the structure, the electronic noises, the cooling system of the experiment or the ISS environment. However, the bubble oscillation frequencies are well predicted by the simulations within the frequency resolution of the data. In the case of the half-filled tank, the videos from the FLUIDICS experiment allowed us to extract the oscillation frequency even for the lower value of the Bond number manoeuvres for which the force and torque signals were too noisy to be used. Similarly, the comparisons with the predicted frequencies show a good agreement within a range of 4%.

The evolution of the force and torque with respect to the Bond numbers and filling ratios present a coherent set of data whether numerical or experimental results are considered. Increasing the angular velocity and the amount of liquid within the tank raises the centrifugal force exerted on the tank wall. Similarly, the damping of the bubble oscillations increases with the filling ratio, which is visible in both the force and torque evolutions. The magnitude of the torque peaks corresponding to the acceleration and deceleration phases depends on the angular acceleration and thus, on Bo_i . The frequency of the bubble oscillations increases with the angular velocity.

In conclusion, the FLUIDICS experiment provided original data on the fluid sloshing in spherical tanks submitted to rotation in micro-gravity conditions. The comparison with the numerical results validates the use of two-phase flows Direct Numerical Simulation to predict the fluids behaviour at low Bond numbers manoeuvres in microgravity conditions.

Acknowledgements The authors wish to thank Airbus Defence & Space and CNES (French national space agency) for their funding and

especially for the financial support of the PhD study of Alexis Dalmon. The successful collaboration between Airbus Defence & Space and CNES has provided original data by sending in the ISS the FLUIDICS experiment which achievement has represented a great challenge.

References

- Abramson NH (1967) The dynamic behaviour of liquids in moving containers, with applications to space vehicle technology. Tech. rep., NASA SP 106
- Aslam T (2004) A partial differential equation approach to multidimensional extrapolation. *J Comput Phys* 193:349–355
- Chorin A (1967) A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J Comput Phys* 2:12–26
- Dendy J (1982) Black box multigrid. *J Comput Phys* 48:366–386
- Dodge FT (2000) The new dynamic behaviour of liquids in moving containers. Tech. rep., Southwest Research Institute, Texas
- Fedkiw R, Aslam T, Merriman B, Osher S (1999) A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *J Comput Phys* 152:457–492
- Gibou F, Fedkiw R, Cheng LT, Kang M (2002) A second-order-accurate symmetric discretization of the poisson equation on irregular domains. *J Comput Phys* 176:205–227
- Gibou F, Cheng LT, Nguyen D, Banerjee S (2007) A level set based sharp interface method for the multiphase incompressible navier-stokes equations with phase change. *J Comput Phys* 222:536–555
- Huber G, Tanguy S, Bera J, Gilles B (2015) A time splitting projection scheme for compressible two-phase flows. application to the interaction of bubbles with ultrasound waves. *J Comput Phys* 302:439–468
- Huber G, Tanguy S, Sagan M, Colin C (2017) Direct numerical simulation of nucleate pool boiling at large microscopic contact angle and moderate jakob number. *Int J Heat Mass Transfer*
- Lalanne B, Chebel NA, Vejrazka J, Tanguy S, Masbernat O, Risso F (2015) Non-linear shape oscillations of rising drops and bubbles: Experiments and simulations. *Phys of Fluids* 27(12):3305
- Lepilliez M (2015) Simulation numérique des ballonnements d'ergols dans les réservoirs de satellites en microgravité et à faible nombre de reynolds. PhD thesis, Université Toulouse 3 Paul Sabatier
- Lepilliez M, Popescu ER, Gibou F, Tanguy S (2016) On two-phase flow solvers in irregular domains with contact line. *J Comput Phys* 321:1217–1251
- Liu D, Lin P (2008) A numerical study of three-dimensional liquid sloshing in tanks. *J Comput Phys* 227:3921–3939
- Liu XD, Fedkiw R, Kang M (2000) A boundary condition capturing method for poissons equation on irregular domain. *J Comput Phys* 160:151–178
- MacLachlan S, Tang J, Vuik C (2008) Fast and robust solvers for pressure-correction in bubbly flow problems. *Journal of Computational Physics* 227(23):9742 – 9761
- Mignot J, Pierre R, Berhanu M, Busset B, Roumigui R, Bavestrello H, Bonfanti S, Miquel T, Marot LO, Llodra-Perez A (2017) Fluid dynamic in space experiment. 68th International Astronautical Congress (IAC), Adelaide, Australia (IAC-17-A2.6.2)
- Ng Y, Min C, Gibou F (2009) An efficient fluid-solid coupling algorithm for single-phase flows. *J Comput Phys* 228:8807–8829
- Nguyen DQ, Fedkiw RP, Kang M (2001) A boundary condition capturing method for incompressible flame discontinuities. *J Comput Phys* 172:71–98
- Osher S, Sethian J (1988) Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamiltonjacobi formulations. *J Comput Phys* 79:12–49
- Papac J, Gibou F, Ratsch C (2010) Efficient symmetric discretization for the poisson, heat and stefan-type problems with robin boundary conditions. *J Comput Phys* 229:875–889

- Rueda Villegas L, Alis R, Lepilliez M, Tanguy S (2016) A ghost fluid/level set method for boiling flows and liquid evaporation: Application to the leidenfrost effect. *J Comput Phys* 316:789–813
- Rueda Villegas L, Tanguy S, Castanet G, Caballina O, Lemoine F (2017) Direct numerical simulation of the impact of a droplet onto a hot surface above the leidenfrost temperature. *Int J Heat Mass Transfer* 104:1090–1109
- Sussman M, Smereka P, Osher S (1994) A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J Comput Phys* 114:146–159
- Sussman M, Smith K, Hussaini M, Ohta M, Zhi-Wei R (2007) A sharp interface method for incompressible two-phase flows. *J Comput Phys* 221:469–505
- Tanguy S, Berlemont A (2005) Application of a level set method for simulation of droplet collisions. *Int J Multiph Flow* 31:1015–1035
- Tanguy S, Menard T, Berlemont A (2007) A level set method for vaporizing two-phase flows. *J Comput Phys* 221:837–853
- Tanguy S, Sagan M, Lalanne B, Couderc F, Colin C (2014) Benchmarks and numerical methods for the simulation of boiling flows. *J Comput Phys* 264:1–22
- Urbano A, Tanguy S, Huber G, Colin C (2018) Direct numerical simulation of nucleate boiling in micro-layer regime. *Int J Heat Mass Transfer* 123:1128–1137
- Veldman A, Gerrits J, Luppés R, Helder J, Vreeburg J (2007) The numerical simulation of liquid sloshing on board spacecraft. *J Comput Phys* 224:82–99

Modélisation d'une membrane hyperélastique immergée

Sommaire

5.1 Interaction fluide-membrane	108
5.1.1 Introduction	108
5.1.2 Immersed Boundary Method	109
5.1.3 Immersed Interface Method	110
5.1.4 Méthodes Eulériennes	111
5.2 Modélisation de la membrane	112
5.2.1 Déformation d'un milieu solide	112
5.2.2 Déformations d'une membrane	115
5.2.3 Lois de comportement hyperélastiques	117
5.2.4 Tenseurs des contraintes à la membrane	117
5.2.5 Force élastique locale	119
5.3 Modèle hydrodynamique diphasique avec membrane	120
5.3.1 Modèle hydrodynamique diphasique	120
5.3.2 Modèle de membrane lissé	121
5.3.3 Modèle de membrane discontinu	121
5.4 Méthodes numériques	122
5.4.1 Suivi Eulérien de la membrane et opérateur de projection	123
5.4.2 Discrétisation du modèle de membrane	123
5.4.3 Discrétisation des systèmes linéaires	127
5.4.4 Algorithme d'extension	129
5.4.5 Condition sur le pas de temps et condition de stabilité	132
5.5 Conclusion	133
Bibliographie	133

Le parallèle entre une interface entre deux fluides immiscibles et une membrane infiniment fine nous a amenés à développer des modèles et méthodes numériques dans la continuité du travail de la première partie de cette thèse pour répondre à la problématique des membranes immergées (*cf.* section 1.3.4). Le challenge est

de modéliser le comportement d'une membrane hyperélastique avec des outils numériques s'approchant de ceux présentés dans le chapitre 2.

Dans une première partie, les différentes méthodes existantes pour modéliser des interactions fluide-membrane sont présentées. Celles-ci sont basées sur un formalisme Eulérien pour résoudre les équations de l'écoulement et sur une méthode de suivi d'interface pour la membrane. Les forces exercées par la membrane sur les fluides environnants sont ainsi calculées et intégrées au maillage cartésien. Dans un second temps, la modélisation d'une membrane hyperélastique est détaillée. La définition des différents tenseurs de déformation et contraintes permet de lier le mouvement de la membrane à ces efforts internes avec la méthode inspirée des travaux de Ii *et al.* [14]. Le modèle couplé fluide-membrane est présenté dans une troisième partie avec deux façons de considérer les efforts dus à la membrane : par une méthode de lissage fictif ou avec une méthode discontinue de type Ghost Fluid. Finalement, les méthodes numériques utilisées pour discrétiser le modèle fluide-membrane sont expliquées avec une attention particulière pour l'algorithme d'extension développé afin d'améliorer la précision et la stabilité du modèle de membrane de Ii *et al.* [14].

5.1 Interaction fluide-membrane

5.1.1 Introduction

On parle d'interaction fluide-structure lorsque un solide, rigide ou déformable, interagit avec un fluide dans une même région. Le terme d'interaction implique que chacune des deux phases influence l'autre. Par exemple, on peut citer l'écoulement du vent sur un pont ou une tour d'immeuble, un écoulement d'eau autour d'une voile ou d'une coque de bateau, un écoulement de sang dans une artère, *etc.* Ce type de problème repose sur la combinaison de physiques différentes, solide et fluide, qui cohabitent et interagissent entre eux dans une même région. La difficulté de ce genre de problèmes est de modéliser le comportement de chacune des deux phases dans leurs domaines respectifs et de les coupler au niveau de leur interface. Ce couplage repose sur l'équilibre des forces et du déplacement des deux phases au niveau de l'interface. Du fait de cette complexité, la grande majorité des problèmes d'interaction fluide-structure ne présente pas de solutions analytiques [13]. L'expérimentation est un moyen pour observer et caractériser le comportement des interactions fluide-structure mais celle-ci peut s'avérer difficile à mettre en place, notamment pour les applications du domaine spatial pour lesquelles les contraintes environnementales sont critiques (*cf.* section 1.2.2). Avec le développement des performances des moyens informatiques et le travail de recherche sur les modèles et méthodes numériques, ces phénomènes couplés sont de plus en plus étudiés avec la simulation numérique. De nombreuses études numériques portent sur les interactions fluide-structure rencontrées dans de nombreux domaines d'application tels que l'aérospatial [8, 15], la biomécanique [2, 23], le génie civil [11], le nucléaire [24, 37], *etc.*

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons à l'interaction entre un ou plusieurs fluides et une membrane solide. Parce que son épaisseur est très faible par rapport à ses autres dimensions, nous considérerons que son épaisseur est infiniment fine. La membrane est d'une dimension inférieure à celle du domaine fluide, elle est représentée par une surface dans un domaine tridimensionnel ou par une courbe dans un domaine bidimensionnel. La membrane peut être vue comme une singularité solide entre deux régions fluides. Cette spécificité de l'interaction fluide-membrane nous a aiguillés vers l'approche monolithique pour laquelle un seul solveur gère la résolution de tout le système. Dans le cas d'interaction fluide-structure, l'approche partitionnée est généralement utilisée [13]. Elle se caractérise par l'utilisation de deux solveurs distincts résolvant chacun une physique particulière, fluide et solide, synchronisés en temps et en espace. Finalement, l'approche monolithique avec un formalisme Eulérien, à cause de la prédominance des régions fluides dans le domaine de calcul, nous paraît être la méthode la plus adaptée pour modéliser les interactions fluide-membrane.

Afin de connaître la position de la membrane avec le temps, les différentes méthodes détaillées dans la section 2.1 peuvent être utilisées puisque la membrane est une interface entre deux régions fluides dont les effets ne sont

pas dus à une tension de surface mais à ses propriétés élastiques.

Les premières études portant sur les membranes immergées utilisent des marqueurs Lagrangiens pour suivre l'évolution de la membrane [28, 32, 33]. Ces marqueurs donnent les déplacements des particules matérielles de la membrane dont on peut déduire par différenciation les déformations et, grâce aux lois de comportement des matériaux, les tensions en chaque point à chaque instant. On dispose alors de deux maillages différents : un maillage cartésien sur lequel les équations de Navier-Stokes sont résolues et un maillage constitué des marqueurs Lagrangiens sur lequel les forces élastiques sont déduites des déformations et des tensions de la membrane. En considérant l'équilibre des forces et la continuité des déplacements à la membrane, on peut déduire des tensions internes les efforts exercés sur les fluides environnants. Le modèle d'interaction fluide-membrane correspond alors aux équations de Navier-Stokes dans lesquelles est intégré un terme source correspondant aux efforts élastiques de la membrane. Cette intégration peut s'effectuer avec deux méthodes différentes : l'Immersed Boundary Method (IBM), détaillée dans la section 5.1.2, pour laquelle on utilise une distribution de Dirac lissée au niveau de la membrane pour passer du maillage Lagrangien au maillage cartésien et l'Immersed Interface Method (IIM), présentée dans la section 5.1.3, pour laquelle la force est intégrée sous la forme de conditions de saut dans les schémas numériques intersectés par la membrane. En utilisant une méthode Eulérienne pour capturer la position de la membrane avec le temps, les calculs portant sur la membrane et les fluides s'effectuent tous sur un même maillage cartésien. Néanmoins, l'obtention des déformations de la membrane solide n'est pas immédiate avec le formalisme Eulérien. La section 5.1.4 donne deux exemples de modèles d'interaction fluide-membrane permettant le calcul des déformations et des tensions de la membrane avec un formalisme purement Eulérien.

5.1.2 Immersed Boundary Method

Le principe des méthodes de frontière immergée est d'intégrer les effets de la structure solide au sein d'un solveur fluide Eulérien à travers l'application de termes sources de force. Le domaine de calcul global est discrétisé sans se conformer à l'interface entre le fluide et le solide. Peskin [32, 33] est le premier à développer une méthode de ce type, appelée Immersed Boundary Method (IBM), pour simuler un écoulement sanguin dans une valve cardiaque. La démarche consiste en l'ajout d'un terme de forçage \mathbf{f} aux équations de Navier-Stokes pour modéliser la contribution élastique des frontières solides. En considérant un fluide incompressible comprenant une fibre solide immergée, les équations de Navier-Stokes s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.1.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}. \quad (5.1.2)$$

En considérant un cas bidimensionnel, l'interface fluide-solide est repérée par $\mathbf{X}(s, t)$ dont les paramètres sont l'abscisse curviligne s et le temps t . La force élastique à l'instant t à l'interface est notée $\mathbf{F}(s, t)$. Le domaine fluide est, quant à lui, discrétisé par un maillage cartésien fixe \mathbf{x} sur lequel les variables Eulériennes de vitesse et pression sont définies.

Cette contribution élastique, définie le long de la fibre, est propagée dans le maillage cartésien sous forme de termes sources. Le transfert de la force vers le maillage cartésien s'effectue grâce à des distributions de Dirac δ tel que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \int_{\Gamma} \mathbf{F}(s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds. \quad (5.1.3)$$

Après intégration de ces efforts dans les équations de Navier-Stokes, celles-ci sont résolues sur le maillage cartésien pour obtenir les champs de vitesse et pression à l'itération temporelle suivante. La position de la fibre est alors mise à jour en fonction du nouveau champ de vitesse avec l'équation de transport suivante

$$\frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t), t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) dx dy, \quad (5.1.4)$$

avec $\mathbf{u}(\mathbf{X}(s, t), t)$ la vitesse du fluide interpolée à la position de la fibre $\mathbf{X}(s, t)$.

La densité de force $\mathbf{F}(s, t)$ peut prendre différentes formes en fonction des propriétés élastiques du matériau considéré. Peskin [33, 34] propose que la force de tension soit égale à la variation de la tension de la fibre selon sa direction tangente soit

$$\mathbf{F}(s, t) = \frac{\partial(T(s, t)\mathbf{e}_\tau)}{\partial s}, \quad (5.1.5)$$

avec $T(s, t)$ la tension de la fibre au point $\mathbf{X}(s, t)$ à l'instant t et \mathbf{e}_τ le vecteur tangent à la fibre défini par

$$\mathbf{e}_\tau = \frac{\frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial s}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial s} \right\|}. \quad (5.1.6)$$

Dans le cas d'une fibre respectant la loi de Hooke, la tension devient

$$T(s, t) = T_0 \left(\left| \frac{\partial \mathbf{X}(s, t)}{\partial s} \right| - 1 \right), \quad (5.1.7)$$

avec T_0 la raideur de la fibre. La généralisation aux lois de comportement de matériaux non-linéaires est possible avec cette méthode, tout comme l'intégration d'autres types de forces : réaction de type ressort, résistance à la flexion, *etc.*

Avec la méthode IBM, la fibre est discrétisée par un certain nombre de marqueurs Lagrangiens. Le calcul de la densité de force s'effectue aux points du maillage Lagrangien et le passage de ces valeurs au maillage cartésien s'effectue en remplaçant l'intégrale de l'équation 5.1.3 par une somme discrète en utilisant une distribution de Dirac lissée sur un certain nombre de mailles autour de la position de la fibre. Cet épaississement fictif de la fibre entraîne une perte de précision. La définition de la distribution de Dirac a fait l'objet de nombreuses études [17, 32, 35].

Ce type de méthode est simple à utiliser car il n'y a pas besoin de remailler à chaque itération temporelle. Le maillage cartésien est généré initialement et reste indépendant du mouvement de l'interface fluide-solide. La gestion des marqueurs Lagrangiens peut cependant s'avérer complexe dans le cas où de fortes déformations de la fibre sont observées et qu'une étape de redistribution des marqueurs est nécessaire (*cf.* section 2.1.1). Cette méthode a été utilisée pour différentes études sur la circulation sanguine dans le cœur et les artères [32, 33], la dynamique de cellules biologiques et de petits organismes vivants [7, 9], la dynamique de bulles [43], *etc.*

5.1.3 Immersed Interface Method

Afin d'améliorer la précision de la méthode IBM décrite précédemment, Leveque et Li [20] ont développé la méthode Immersed Interface Method (IIM) qui consiste à remplacer les termes sources dus à la contribution élastique par des conditions de saut imposées directement dans les schémas numériques. Développée initialement pour les équations elliptiques, cette méthode a été étendue aux écoulements de Stokes [21] et aux écoulements de Navier-Stokes [19, 22].

Les forces sont toujours déduites des lois de comportement des matériaux au niveau de l'interface fluide-solide et sont transformées en conditions de saut sur les variables fluides. Une densité de force appliquée le long d'une interface séparant un fluide en deux régions induit un saut de pression proportionnel à la composante normale de la force et un saut dans la dérivée normale de la vitesse proportionnel à la composante tangentielle de la force.

Ces conditions de saut ont été explicitées par Xu et Wang [44], puis étendues aux cas à viscosités continues par morceaux de chaque côté de l'interface par Tan *et al.* [40, 41]. En considérant qu'une interface sépare un fluide en deux régions distinctes, les conditions de saut primaires résultent de l'équilibre des forces à l'interface et s'écrivent

$$[p]_\Gamma = \mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{n}, \quad (5.1.8)$$

$$[\mathbf{u}]_{\Gamma} = \mathbf{0}, \quad (5.1.9)$$

$$\mu \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -(\mathbf{f}_{\Gamma} - (\mathbf{f}_{\Gamma} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}). \quad (5.1.10)$$

Les conditions de saut secondaires, dérivant de ces conditions de saut primaires, sont également extraites par [44] et permettent d'améliorer la précision des méthodes numériques. Ces conditions de saut sont par la suite intégrées aux équations de Navier-Stokes sous la forme de termes additionnels ajoutés aux schémas différences finies lorsque la maille considérée est traversée par l'interface. Lors de la résolution du système linéaire, la condition de saut est calculée explicitement et ajoutée au second membre. L'implémentation de ces termes sources peut s'effectuer avec la méthode Ghost Fluid présentée dans la section 2.2.3.

5.1.4 Méthodes Eulériennes

Dans cette partie, nous nous intéressons à deux méthodes numériques utilisant uniquement le formalisme Eulérien pour décrire le comportement élastique de la membrane et son interaction avec un fluide environnant.

La méthode développée par Cottet et Maitre [6] reprend la formulation IBM expliquée ci-dessus mais la capture de l'interface s'effectue avec la méthode level-set (*cf.* section 2.1.3). Les problèmes liés à la gestion des marqueurs Lagrangiens avec le temps disparaissent et un seul maillage cartésien est considéré pour tous les calculs. Afin d'obtenir les forces exercées par la membrane sur le fluide environnant, l'étirement de la membrane doit être calculée. Cottet et Maitre [6] démontrent qu'en présence d'un fluide incompressible et sans utiliser l'algorithme de réinitialisation de Sussman *et al.* [39], la fonction level-set contient implicitement la déformation de l'interface. En effet, ils montrent que l'étirement d'une membrane dans un espace bidimensionnel, ou sa variation d'aire dans un espace tridimensionnel, correspond au gradient de la fonction level-set à l'interface divisé par son gradient à l'état non contraint,

$$T(\mathbf{x} \in \Gamma, t) = \frac{\|\nabla \phi\|}{\|\nabla \phi_R\|}, \quad (5.1.11)$$

avec T l'étirement ou la variation d'aire de la membrane et ϕ_R correspondant à la fonction level-set représentant la membrane à l'état non contraint. En effet, l'étirement d'une portion de membrane par un fluide incompressible entraîne un resserrement des lignes de niveau de la fonction level-set vers l'interface ce qui augmente la dérivée normale à l'interface. A l'inverse, la décontraction d'une portion de membrane entraîne un éloignement des lignes de niveaux qui diminue le gradient de la fonction level-set.

Sans l'algorithme de réinitialisation de Sussman *et al.* [39], la fonction level-set ne respecte plus la propriété de distance signée à la membrane. Les auteurs utilisent alors la fonction renormalisée $\frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}$ pour définir les distributions lissées de Heaviside et Dirac à l'interface.

Cette méthode permet de conserver un formalisme Eulérien pour décrire l'écoulement et la membrane. Néanmoins, les forces élastiques calculées sont imposées sur toute une région proche de l'interface, ce qui induit une perte de précision similaire à celle de la méthode IBM. De plus, l'extension aux modèles élastiques dépendant d'autres paramètres que l'étirement et la position de la membrane est difficile avec cette méthode. On peut toutefois citer des travaux sur la déformation de solide de même dimension que le domaine fluide [5] et une extension aux effets de cisaillement de la membrane [26].

La seconde méthode Eulérienne pour décrire le comportement d'une membrane immergée dans un fluide provient des travaux de Ii *et al.* [14]. La position de la membrane est obtenue avec la méthode de capture d'interface VOF (*cf.* section 2.1.2) et ces déformations sont directement déduites du tenseur des dilatations $\bar{\mathbf{B}}_s$. Les composantes de ce tenseur sont définies en tant que champs scalaires sur tout le domaine de calcul et leurs valeurs sont calculées de façon Eulérienne par une équation d'évolution provenant de la théorie des milieux continus. Pour tout matériau suivant un modèle hyperélastique, le tenseur des contraintes peut être calculé au niveau de la membrane et l'on en déduit les forces exercées sur le fluide. Cette méthode permet de

considérer un grand nombre de modèles hyperélastiques différents. Finalement, ces forces élastiques sont ajoutées aux équations de Navier-Stokes avec des distributions de Dirac lissées. Le détail des définitions des différents tenseurs et des étapes de calcul sont explicitées en détail dans la section suivante (5.2). Cette méthode Eulérienne est dérivée des travaux de Sugiyama *et al.* [38] qui considèrent une interaction fluide-structure. L'adaptation à l'interaction fluide-membrane se fait en projetant les différents opérateurs de déformations et de contraintes dans le plan tangent à la membrane. Similairement à la méthode de Cottet et Maitre [6], l'épaississement fictif de la membrane induit des dissipations numériques à l'interface.

5.2 Modélisation de la membrane

Par la suite, nous considérerons pour base la méthode purement Eulérienne de Ii *et al.* [14] présentée dans la section 5.1.4. Dans la continuité de la première partie de la thèse, la méthode level-set est considérée pour suivre le mouvement de la membrane avec le temps. Dans cette section, les différents tenseurs des déformations et contraintes sont introduits à partir de la théorie des milieux continus. Ces opérateurs sont ensuite adaptés aux cas des membranes dont une dimension est considérée infiniment fine par rapport aux autres. Finalement, à travers le bilan des forces à la membrane, la relation entre les contraintes internes à la membrane et les contraintes dues aux fluides est établie.

5.2.1 Déformation d'un milieu solide

5.2.1.1 Description Lagrangienne et Eulérienne

En mécanique des milieux continus, il existe deux représentations possibles d'une même variable V [25]. La première est dite Lagrangienne et donne la valeur de la variable au point M à l'instant t de la particule qui se trouvait au point M_0 au temps t_0 . La variable est donnée en fonction de la position des particules au cours du temps, c'est à dire de leur trajectoires. La variable est donc une fonction f du temps t et de la position de référence \mathbf{X} de la particule considérée,

$$V = f(t, \mathbf{X}). \quad (5.2.1)$$

La seconde représentation est dite Eulérienne et correspond à la variable en un même point de l'espace à tout temps. Celle-ci ne dépend pas de la particule qui passe au point M à l'instant t . La variable est donc une fonction g du temps t et du point géométrique \mathbf{x} considéré,

$$V = g(t, \mathbf{x}). \quad (5.2.2)$$

En considérant que la variable V est la coordonnée Eulérienne de la particule placée en M à l'instant t , on peut lier les coordonnées Lagrangiennes et Eulériennes. Au temps de référence, ces deux représentations sont identiques

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}). \quad (5.2.3)$$

5.2.1.2 Tenseurs des dilatations et des déformations

Afin d'obtenir les déformations en un point d'un solide, il nous faut définir un outil mathématique permettant de lier le solide de son état actuel à son état de référence. Soit $d\mathbf{X}$ le vecteur élémentaire liant deux points d'un même solide très rapprochés à l'instant de référence. A l'instant actuel, après sollicitation mécanique du solide, ces deux points se sont déplacés et occupent de nouvelles positions dans l'espace géométrique. Le vecteur liant les deux nouvelles positions des points est appelé $d\mathbf{x}$. On définit alors $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$, le tenseur gradient de transformation qui transforme le vecteur $d\mathbf{X}$ au point matériel \mathbf{X} avec sa valeur à l'état actuel,

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}. \quad (5.2.4)$$

Ce tenseur est une application linéaire qui relie l'état de référence à l'état actuel au voisinage d'un point matériel. L'application $\bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-1}$ effectue l'opération inverse à partir d'un point de l'espace à la configuration actuelle. La variation de longueur d'un vecteur entre son état de référence et son état actuel peut être définie à partir du tenseur de Cauchy-Green droit ou tenseur des dilatations $\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}$,

$$dl^2 = d\mathbf{x}^T \cdot d\mathbf{x} = (\bar{\bar{\mathbf{F}}}d\mathbf{X})^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \bar{\bar{\mathbf{C}}}d\mathbf{X}. \quad (5.2.5)$$

Ce tenseur symétrique est dit Lagrangien car il s'applique à un vecteur dans la configuration de référence et donne la longueur du vecteur dans la configuration actuelle. On peut en déduire les dilatations du solide dans n'importe quelle direction. La dilatation du solide dans la direction $\frac{d\mathbf{X}}{\|d\mathbf{X}\|}$ est notée λ et représente le rapport entre la longueur du vecteur à l'état actuel par rapport à sa longueur à l'état de référence,

$$\lambda(d\mathbf{X}) = \frac{\|d\mathbf{x}\|}{\|d\mathbf{X}\|} = \frac{\sqrt{d\mathbf{X}^T \bar{\bar{\mathbf{C}}}d\mathbf{X}}}{\|d\mathbf{X}\|}. \quad (5.2.6)$$

Ce tenseur permet également de calculer le glissement entre deux directions initialement orthogonales. Soient $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$, deux vecteurs élémentaires orthogonaux, parallèles aux axes $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ dans la configuration de référence définis en un même point. L'angle de glissement α entre les deux directions après sollicitation du solide respecte

$$\cos(\alpha) = \frac{d\mathbf{x}_1^T \cdot d\mathbf{x}_2}{\|d\mathbf{x}_1\| \|d\mathbf{x}_2\|} = \frac{(\bar{\bar{\mathbf{F}}}d\mathbf{X}_1)^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}d\mathbf{X}_2}{\|d\mathbf{x}_1\| \|d\mathbf{x}_2\|} = \frac{d\mathbf{X}_1^T \bar{\bar{\mathbf{C}}}d\mathbf{X}_2}{\|d\mathbf{x}_1\| \|d\mathbf{x}_2\|} = \frac{C_{12}}{\lambda(\mathbf{e}_1)\lambda(\mathbf{e}_2)}, \quad (5.2.7)$$

avec C_{12} la composante (1,2) du tenseur de Cauchy-Green droit.

De la même façon, la variation de longueur d'un vecteur entre son état actuel et son état de référence peut être calculée à partir du tenseur de Cauchy-Green gauche $\bar{\bar{\mathbf{B}}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}\bar{\bar{\mathbf{F}}}^T$,

$$dL^2 = d\mathbf{X}^T \cdot d\mathbf{X} = (\bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-1}d\mathbf{x})^T \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-1}d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-T} \bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-1}d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \bar{\bar{\mathbf{B}}}^{-1}d\mathbf{x}. \quad (5.2.8)$$

L'inverse du tenseur de Cauchy-Green gauche permet de calculer les dilatations dans n'importe quelle direction définie dans la configuration actuelle. Il s'agit d'un tenseur Eulérien. Finalement, les tenseurs de Cauchy-Green gauche et droit sont symétriques, définis sur des configurations différentes mais sont liés par le tenseur des gradients de transformation

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-1} \bar{\bar{\mathbf{B}}} \bar{\bar{\mathbf{F}}} \text{ et } \bar{\bar{\mathbf{B}}} = \bar{\bar{\mathbf{F}}} \bar{\bar{\mathbf{C}}} \bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-1}. \quad (5.2.9)$$

Ces deux tenseurs sont deux matrices semblables et par conséquent leurs invariants de similitude (ou invariants scalaires) sont égaux. Par la suite, nous noterons les trois invariants scalaires des tenseurs de Cauchy-Green droit et gauche sous la forme suivante,

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{C}}}) = \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}}), \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{C}}})^2 - \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{C}}}^2) \right) = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}})^2 - \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}}^2) \right), \\ I_3 &= \det(\bar{\bar{\mathbf{C}}}) = \det(\bar{\bar{\mathbf{B}}}). \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Finalement, le tenseur de Green-Lagrange $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$ caractérise la déformation observée entre l'état de référence et l'état actuel. Soit $d\mathbf{X}_1$ et $d\mathbf{X}_2$, deux vecteurs élémentaires de la configuration de référence et $d\mathbf{x}_1$ et $d\mathbf{x}_2$, leurs équivalents dans la configuration actuelle, le tenseur des déformations $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$ est défini tel que,

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - d\mathbf{X}_1 \cdot d\mathbf{X}_2 = 2d\mathbf{X}_1 \bar{\bar{\mathbf{E}}}d\mathbf{X}_2. \quad (5.2.11)$$

En utilisant l'équation (5.2.4) caractérisant le passage d'une configuration à l'autre, on peut écrire

$$d\mathbf{X}_1 \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}d\mathbf{X}_2 - d\mathbf{X}_1 \bar{\bar{\mathbf{I}}}d\mathbf{X}_2 = 2d\mathbf{X}_1 \bar{\bar{\mathbf{E}}}d\mathbf{X}_2, \quad (5.2.12)$$

d'où l'on déduit l'expression du tenseur de Green-Lagrange,

$$\bar{\bar{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} (\bar{\bar{\mathbf{C}}} - \bar{\bar{\mathbf{I}}}). \quad (5.2.13)$$

Ce tenseur est symétrique, ses directions principales sont les mêmes que celles des tenseurs des dilatations et leurs valeurs propres sont directement liées. Dans le cas où $\mathbf{dX}_1 = \mathbf{dX}_2$, le tenseur des déformations $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$ permet de calculer la différence des carrés des longueurs du vecteur entre les deux configurations.

5.2.1.3 Vitesse de déformation

Dans la configuration actuelle, la différence de vitesse entre deux points rapprochés d'un même solide quelconque liés par le vecteur \mathbf{dx} est

$$\mathbf{du}_s = \frac{d\mathbf{u}_s}{d\mathbf{x}} \mathbf{dx} = \bar{\bar{\mathbf{L}}} \mathbf{dx}, \quad (5.2.14)$$

avec $\bar{\bar{\mathbf{L}}} = \nabla \mathbf{u}_s$ le tenseur gradient des vitesses dans la configuration actuelle.

En utilisant la relation (5.2.4) entre les configurations de référence et actuelle, la différence de vitesse entre les deux particules dans la configuration de référence s'écrit

$$\mathbf{du}_s = \bar{\bar{\mathbf{L}}} \bar{\bar{\mathbf{F}}} d\mathbf{X}. \quad (5.2.15)$$

Or, par définition, la différence de vitesse entre deux particules correspond à la dérivée temporelle du vecteur \mathbf{dx} soit

$$\mathbf{du}_s = \frac{d\mathbf{dx}}{dt} = \frac{d(\bar{\bar{\mathbf{F}}} d\mathbf{X})}{dt} = \frac{d\bar{\bar{\mathbf{F}}}}{dt} d\mathbf{X}, \quad (5.2.16)$$

car \mathbf{dX} appartient à la configuration de référence et n'évolue pas avec le temps. Ces deux dernières relations nous permettent d'obtenir la dérivée temporelle du tenseur gradient de transformation

$$\frac{d\bar{\bar{\mathbf{F}}}}{dt} = \bar{\bar{\mathbf{L}}} \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}. \quad (5.2.17)$$

5.2.1.4 Base principale

Soit $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$, le tenseur gradient de transformation reliant un vecteur entre son état actuel et son état de référence. Il existe une base pour laquelle les vecteurs alignés avec les axes de la base subissent uniquement une dilatation. Cette base est la base principale de la transformation, les axes de cette base correspondent aux directions principales de déformation du solide, notées $(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III})$ et les dilatations obtenues dans chaque direction sont les dilatations principales ou élongations principales, notées $(\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III})$. Le tenseur gradient de transformation dans cette base est une matrice diagonale dont les valeurs propres et vecteurs propres sont les dilatations et directions principales,

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \begin{pmatrix} \lambda_I & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{III} \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III})}. \quad (5.2.18)$$

On peut en déduire les tenseurs de Cauchy-Green droit et gauche dans la base principale,

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}} = \bar{\bar{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} \lambda_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{II}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{III}^2 \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III})}. \quad (5.2.19)$$

Les valeurs propres des tenseurs de Cauchy-Green correspondent aux carrés des élongations principales. Par invariance de similitude, les invariants scalaires des tenseurs de Cauchy-Green peuvent également s'écrire en

fonction des élongations principales,

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_I^2 + \lambda_{II}^2 + \lambda_{III}^2, \\ I_2 &= \lambda_I^2 \lambda_{II}^2 + \lambda_I^2 \lambda_{III}^2 + \lambda_{II}^2 \lambda_{III}^2, \\ I_3 &= \lambda_I^2 \lambda_{II}^2 \lambda_{III}^2. \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

5.2.2 Déformations d'une membrane

5.2.2.1 Définition de la membrane

Le rappel de mécanique des milieux continus de la section précédente porte sur un solide quelconque tridimensionnel se déformant dans l'espace. Dans le cadre de cette étude, nous nous intéressons à une membrane, c'est à dire à un solide dont une des dimensions est très petite par rapport aux autres. L'objectif de cette partie est de simplifier le problème précédent en réduisant le solide en une surface tridimensionnelle. Nous considérerons par la suite que la dimension selon l'épaisseur de la membrane est infiniment fine et l'on travaillera uniquement dans le plan tangent au solide. Cela implique de supprimer la dimension normale à la membrane et par conséquent de modifier les tenseurs de Cauchy-Green en conséquence. La méthodologie décrite ci-dessous provient des travaux de Barthes-Biesel et Rallison [1].

L'hypothèse simplificatrice que nous utilisons est l'incompressibilité de la membrane due aux propriétés de l'élastomère qui la constitue. En effet, les élastomères sont en général considérés comme étant incompressibles ou très peu compressibles grâce à leurs propriétés structurales. Cela revient à imposer que la variation relative de volume de notre membrane est nulle et donc que le déterminant du tenseur de gradient de transformation vaut l'unité : $\det(\bar{\mathbf{F}}) = 1$. Par conséquent, le déterminant des tenseurs de Cauchy-Green est lui aussi égal à 1,

$$\det(\bar{\mathbf{B}}) = \det(\bar{\mathbf{C}}) = I_3 = 1. \quad (5.2.21)$$

En considérant que la direction principale \mathbf{e}_{III} est la direction normale à la membrane $\mathbf{e}_{III} = \mathbf{n}$, on peut déduire la valeur de la dilatation dans la direction normale par rapport aux dilatations dans le plan de la membrane,

$$\lambda_{III} = \frac{1}{\lambda_I \lambda_{II}}. \quad (5.2.22)$$

L'épaisseur h de la membrane à l'état actuel s'obtient par rapport à son épaisseur à l'état non contraint h_0 telle que

$$h = h_0 \lambda_{III} = \frac{h_0}{\lambda_I \lambda_{II}}. \quad (5.2.23)$$

Finalement, en considérant l'incompressibilité de la membrane, on peut se séparer de la dimension normale à la membrane et travailler uniquement dans le plan tangent à celle-ci. Lorsque les déformations tangentes à la membrane sont connues, on déduit de l'équation (5.2.22) la déformation selon la normale.

5.2.2.2 Projection des opérateurs sur la membrane

Soit $\bar{\mathbf{P}}$ l'opérateur de projection orthogonale sur le plan tangent à la membrane défini par

$$\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{I}} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (5.2.24)$$

Ce tenseur symétrique permet de projeter tout vecteur de l'espace dans le plan tangent à la membrane. Dans la base principale, ce tenseur est diagonal et contient une valeur propre nulle dans la direction normale à la membrane et l'unité selon les directions appartenant au plan tangent

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}=\mathbf{n})}. \quad (5.2.25)$$

On peut alors simplifier les tenseurs caractéristiques définis précédemment en les projetant sur le plan tangent à la membrane. Le tenseur gradient de transformation surfacique $\bar{\bar{\mathbf{F}}}_S$ permet ainsi de relier la projection dans le plan tangent d'un vecteur élémentaire $d\mathbf{X}$ dans la configuration de référence à sa valeur après sollicitation $d\mathbf{x}$ tangent à la membrane dans la configuration actuelle. Son expression mathématique est

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{P}}}. \bar{\bar{\mathbf{F}}}. \bar{\bar{\mathbf{P}}}_r, \quad (5.2.26)$$

avec $\bar{\bar{\mathbf{P}}}$ et $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_r$ les tenseurs de projection surfaciques sur le plan tangent à la membrane aux configurations respectivement actuelle et de référence. Le tenseur projeté $\bar{\bar{\mathbf{F}}}_s$ est singulier et présente lui aussi une valeur propre nulle selon la normale à la membrane dans la configuration de référence \mathbf{n}_r . Ces deux autres valeurs propres correspondent aux élongations principales appartenant au plan tangent à la membrane notées λ_I et λ_{II} . On peut maintenant définir le tenseur de Cauchy-Green gauche surfacique $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s$ tel que

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s. \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s^T = \bar{\bar{\mathbf{P}}}. \bar{\bar{\mathbf{F}}}. \bar{\bar{\mathbf{P}}}_r. (\bar{\bar{\mathbf{P}}}. \bar{\bar{\mathbf{F}}}. \bar{\bar{\mathbf{P}}}_r)^T = \bar{\bar{\mathbf{P}}}. \bar{\bar{\mathbf{F}}}. \bar{\bar{\mathbf{P}}}_r. \bar{\bar{\mathbf{P}}}_r. \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T. \bar{\bar{\mathbf{P}}} = \bar{\bar{\mathbf{P}}}. \bar{\bar{\mathbf{F}}}. \bar{\bar{\mathbf{P}}}_r. \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T. \bar{\bar{\mathbf{P}}}, \quad (5.2.27)$$

en rappelant que l'opérateur de projection est symétrique et idempotent. Ce tenseur est lui aussi singulier avec une valeur propre nulle selon la direction normale due aux projections. Dans la base principale, le tenseur de Cauchy-Green surfacique s'écrit

$$\bar{\bar{\mathbf{C}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s = \begin{pmatrix} \lambda_I^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{II}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\mathbf{e}_I, \mathbf{e}_{II}, \mathbf{e}_{III}=\mathbf{n})}. \quad (5.2.28)$$

Les étirements principaux dans le plan tangent à la membrane s'obtiennent grâce aux invariants de $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s$, notés \bar{I} , dont les expressions sont

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{C}}}_s) = \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s) = \lambda_I^2 + \lambda_{II}^2, \\ \bar{I}_2 &= \frac{1}{2} [\text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{C}}}_s)^2 - \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{C}}}_s^2)] = \frac{1}{2} [\text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s)^2 - \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s^2)] = \lambda_I^2 \lambda_{II}^2, \\ \bar{I}_3 &= \det \bar{\bar{\mathbf{C}}}_s = \det \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s = 0. \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

Finalement, les invariants scalaires du tenseur de Cauchy-Green gauche $\bar{\bar{\mathbf{B}}}$ (*cf.* equations (5.2.20)) sont reliés à ceux du tenseur de Cauchy-Green gauche surfacique $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s$,

$$I_1 = \lambda_I^2 + \lambda_{II}^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} = \bar{I}_1 + \frac{1}{\bar{I}_2}, \quad (5.2.30)$$

$$I_2 = \lambda_I^2 \lambda_{II}^2 + \frac{1}{\lambda_{II}^2} + \frac{1}{\lambda_I^2} = \bar{I}_2 + \frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2}. \quad (5.2.31)$$

En reprenant l'expression du tenseur de Cauchy-Green gauche surfacique (*cf.* (5.2.27)), on peut définir un tenseur des dilatations intermédiaire $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$ tel que

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{P}}}. \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s. \bar{\bar{\mathbf{P}}} \quad \text{avec} \quad \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{F}}}. \bar{\bar{\mathbf{P}}}_r. \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T. \quad (5.2.32)$$

En sachant que le tenseur de projection dans la configuration de référence n'évolue pas avec le temps, les équations (5.2.17) et (5.2.32) permettent de déduire la dérivée temporelle du tenseur $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$,

$$\frac{d\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s}{dt} = \bar{\bar{\mathbf{L}}}. \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s + \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s. \bar{\bar{\mathbf{L}}}^T. \quad (5.2.33)$$

5.2.3 Lois de comportement hyperélastiques

Un matériau hyperélastique est défini à partir d'une énergie de déformation W qui ne dépend que de la déformation à l'état actuel du solide. La relation entre contraintes et déformations d'un solide hyperélastique s'obtient par dérivation de l'énergie de déformation. Dans le cas où le matériau constituant la membrane est isotrope, l'énergie de déformation peut s'écrire en fonction des invariants des tenseurs de Cauchy-Green.

Quelques exemples de modèles hyperélastiques utilisés classiquement pour les matériaux de type caoutchouc sont listés ci-dessous : le modèle néo-Hookéen [42] valable pour de faibles déformations, le modèle de Mooney-Rivlin [29] pouvant atteindre jusqu'à 100% d'étirement et ayant un comportement linéaire en cisaillement, le modèle de Yeoh d'ordre n [45] qui rassemble les modèles hyperélastiques ne dépendant que du premier invariant scalaire I_1 , le modèle de Gent-Thomas [12] valable jusqu'à 200% d'étirement et non-linéaire en cisaillement et le modèle d'Ogden [30], écrit en fonction des élongations principales, qui fonctionne pour les grandes déformations mais dont les paramètres sont difficiles à évaluer. Les énergies de déformation W correspondant respectivement à chacun de ces 5 modèles sont listées ci-dessous,

$$W = C_1(I_1 - 3), \quad (5.2.34)$$

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3), \quad (5.2.35)$$

$$W = \sum_{i=1}^n C_i (I_1 - 3)^i, \quad (5.2.36)$$

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2 \ln(I_2), \quad (5.2.37)$$

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_I^{\alpha_i} + \lambda_{II}^{\alpha_i} + \lambda_{III}^{\alpha_i}), \quad (5.2.38)$$

avec C_i, μ_i, α_i des constantes propres au modèle matériau considéré.

Le choix du modèle hyperélastique dépend d'un certain nombre de critères tels que le nombre de constantes matérielles déterminables par l'expérience en comparant les courbes de déformations du solide avec les courbes analytiques du modèle, l'amplitude de déformation subie par le solide car tous les modèles ne sont pas adaptés aux mêmes gammes de déformations et la compatibilité avec la théorie linéaire pour que le modèle soit consistant dans le cas de faibles sollicitations. Tous les modèles hyperélastiques dont la densité d'énergie élastique s'écrit en fonction des invariants scalaires de $\bar{\mathbf{B}}_s$ peuvent être utilisés avec le modèle de membrane décrit précédemment. Les formulations en élongations principales, comme le modèle d'Ogden [30], et les formulations en invariants scalaires sont équivalentes grâce aux équations (5.2.20) et peuvent également être utilisées.

Dans le cadre de cette étude, nous considérerons le modèle néo-Hookéen comme modèle hyperélastique du fait de sa simplicité. Le modèle néo-Hookéen est valable pour de faibles déformations de la membrane dans son plan tangent ($\lambda_I < 1.2$). Sa densité d'énergie élastique W s'écrit

$$W = C_1(I_1 - 3) = C_1 \left(\bar{I}_1 + \frac{1}{\bar{I}_2} - 3 \right), \quad (5.2.39)$$

avec C_1 une constante du matériau. En considérant de petites déformations, ce modèle doit être consistant avec la théorie linéaire de Hooke ce qui impose la condition suivante sur la constante matériau : $6C_1 = E_s$ avec E_s le module élastique de la membrane égal au module de Young du matériau incompressible E multiplié par l'épaisseur de la membrane à l'état de référence $E_s = Eh_0$ [1].

5.2.4 Tenseurs des contraintes à la membrane

Dans le cas d'un matériau élastique, les contraintes dérivent de l'énergie de déformation W . En grandes déformations, cette relation s'écrit directement entre le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\bar{\mathbf{S}}$ et

le tenseur des déformations de Green-Lagrange $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}} = \frac{\partial W}{\partial \bar{\bar{\mathbf{E}}}}, \quad (5.2.40)$$

soit en remplaçant $\bar{\bar{\mathbf{E}}}$ par le tenseur de Cauchy-Green droit $\bar{\bar{\mathbf{C}}}$

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\bar{\mathbf{C}}}}. \quad (5.2.41)$$

Le tenseur $\bar{\bar{\mathbf{S}}}$ correspond au tenseur des contraintes par rapport à la configuration de référence. Avec le formalisme Eulérien, c'est le tenseur des contraintes dans l'état actuel qui nous intéresse. Il est appelé tenseur des contraintes de Cauchy et est noté $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$. La relation entre les deux tenseurs correspond au passage d'une configuration à l'autre, défini précédemment par le tenseur $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$, tel que

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}} = J \bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-1} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \bar{\bar{\mathbf{F}}}^{-T}, \quad (5.2.42)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{1}{J} \bar{\bar{\mathbf{F}}} \bar{\bar{\mathbf{S}}} \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T, \quad (5.2.43)$$

avec $J = \det(\bar{\bar{\mathbf{F}}}) = \prod_{k=1}^3 \lambda_k$. Dans le cas où l'on considère que le solide est une membrane infiniment fine, on peut définir les équivalents surfaciques des tenseurs des contraintes : $\bar{\bar{\mathbf{S}}}_s$ et $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s$. L'équation (5.2.41) devient alors

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}_s = 2 \frac{\partial W}{\partial \bar{\bar{\mathbf{C}}}_s}. \quad (5.2.44)$$

En décomposant la dérivée en utilisant les invariants scalaires de C_s (qui sont les mêmes que ceux de B_s pour rappel), on obtient

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}_s = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\bar{\mathbf{C}}}_s} + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\bar{\mathbf{C}}}_s} \right). \quad (5.2.45)$$

Les dérivées des invariants scalaires s'obtiennent facilement grâce à leurs définitions

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\bar{\mathbf{C}}}_s} = \bar{\bar{\mathbf{P}}}, \quad (5.2.46)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\bar{\mathbf{C}}}_s} = \bar{I}_1 \bar{\bar{\mathbf{P}}} - \bar{\bar{\mathbf{C}}}_s. \quad (5.2.47)$$

Finalement, le second tenseur de Piola-Kirchhoff surfacique s'écrit

$$\bar{\bar{\mathbf{S}}}_s = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} \bar{\bar{\mathbf{P}}}_s + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} (\bar{I}_1 \bar{\bar{\mathbf{P}}} - \bar{\bar{\mathbf{C}}}_s) \right). \quad (5.2.48)$$

Le tenseur des contraintes surfacique dans la configuration actuelle $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s$ se déduit de l'équation (5.2.43),

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s = \frac{2}{J_s} \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s + \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} (\bar{I}_1 \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s - \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s) \right), \quad (5.2.49)$$

car $\bar{\bar{\mathbf{C}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s$ et avec $J_s = \prod_{k=1}^2 \lambda_k = \sqrt{\bar{I}_2}$. Le théorème de Cayley-Hamilton assure que toute application linéaire d'un espace vectoriel fini dans lui-même annule son propre polynôme caractéristique. Soit $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ une matrice carrée 2×2 , ce théorème assure que

$$\bar{\bar{\mathbf{A}}} \bar{\bar{\mathbf{A}}} - \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{A}}}) \bar{\bar{\mathbf{A}}} + \det(\bar{\bar{\mathbf{A}}}) \bar{\bar{\mathbf{I}}} = 0. \quad (5.2.50)$$

Rappelons ici que le tenseur de Cauchy-Green gauche $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s$ est défini uniquement dans le plan tangent à la membrane. En supprimant la composante normale à la membrane, on peut écrire ce tenseur sous la forme d'une matrice 2×2 dont les valeurs propres et les vecteurs propres correspondent aux élongations et directions

principales dans le plan tangent à la membrane. Le théorème de Cayley-Hamilton appliqué au tenseur de Cauchy-Green gauche surfacique, défini dans le plan tangent à la membrane, nous donne la relation suivante

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s - \bar{I}_1 \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s + \bar{I}_2 \bar{\bar{\mathbf{P}}} = 0. \quad (5.2.51)$$

Finalement, le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit,

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s = \frac{2}{\sqrt{\bar{I}_2}} \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s + \bar{I}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} \bar{\bar{\mathbf{P}}} \right). \quad (5.2.52)$$

En considérant le modèle néo-Hookéen dont la densité d'énergie est l'équation (5.2.39), le tenseur des contraintes devient

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s = \frac{E_s}{3\sqrt{\bar{I}_2}} \left(\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s - \frac{\bar{\bar{\mathbf{P}}}}{\bar{I}_2} \right). \quad (5.2.53)$$

5.2.5 Force élastique locale

Considérons maintenant que la membrane sépare deux fluides distincts. Soit $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f^+$ le tenseur des contraintes du fluide présent dans Ω^+ et $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f^-$ le tenseur des contraintes du fluide présent dans Ω^- . Au niveau de la membrane, une discontinuité des forces hydrodynamiques locales apparaît du fait de la contribution de la membrane notée \mathbf{f}_Γ ,

$$\mathbf{f}_\Gamma = [\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f \mathbf{n}]_\Gamma = \left(\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f^+ - \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f^- \right) \mathbf{n}. \quad (5.2.54)$$

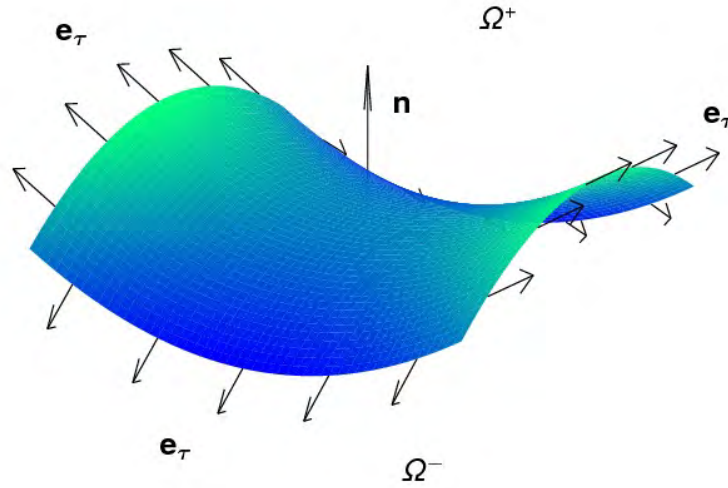


FIGURE 5.1 – Portion de surface de la membrane dS .

En négligeant la masse et par conséquent l'inertie de la membrane, l'équilibre des forces sur une portion de surface infinitésimale dS de la membrane donne

$$\iint_S \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f^+ (-\mathbf{n}) dS + \iint_S \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_f^- \mathbf{n} dS + \int_{\partial S} \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s \mathbf{e}_\tau dl = \mathbf{0}. \quad (5.2.55)$$

avec \mathbf{e}_τ , le vecteur unitaire, tangent et sortant à la membrane. La figure 5.1 illustre une portion de membrane avec les vecteurs tangents et normaux à sa surface. En utilisant le théorème de flux divergence, on transforme

l'intégrale sur le contour de la portion de membrane en une intégrale surfacique et l'équation d'équilibre devient

$$-\iint_S (\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f^+ - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f^-) \mathbf{n} dS + \iint_S \nabla^s \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s dS = \mathbf{0}, \quad (5.2.56)$$

avec $\nabla^s = \bar{\mathbf{P}}\nabla$ l'opérateur de divergence surfacique. La contribution locale de la membrane sur les forces hydrodynamiques correspond donc à la divergence surfacique du tenseur des contraintes solides telle que

$$\mathbf{f}_\Gamma = (\bar{\mathbf{P}}\nabla) \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s. \quad (5.2.57)$$

En reprenant la définition du tenseur de projection dans la configuration actuelle $\bar{\mathbf{P}}$ (5.2.24), la force élastique peut être décomposée en

$$\mathbf{f}_\Gamma = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s - ((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\nabla) \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s - (\mathbf{n} \cdot \nabla)(\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s) + \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s ((\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n}). \quad (5.2.58)$$

Or, le tenseur des contraintes est défini dans le plan tangent à la membrane, entraînant que $\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s = \mathbf{0}$. De plus, par la définition de \mathbf{n} qui dérive de la fonction distance signée ϕ , $(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{n} = \mathbf{0}$. Par conséquent, la force élastique peut directement s'exprimer par

$$\mathbf{f}_\Gamma = \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s. \quad (5.2.59)$$

Cette force peut se décomposer en une composante normale

$$f_n = \mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{n} = (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s) \cdot \mathbf{n} = \partial_k(\sigma_{kl})n_l = \partial_k(\sigma_{kl}n_l) - \sigma_{kl}\partial_k n_l = -\bar{\boldsymbol{\sigma}}_s : \nabla \mathbf{n}, \quad (5.2.60)$$

en utilisant la convention de sommation d'Einstein et en définissant la double contraction pour laquelle $\bar{\mathbf{a}} : \bar{\mathbf{b}} = a_{kl}b_{kl}$, et en une composante tangentielle

$$\mathbf{f}_\tau = \bar{\mathbf{P}}\mathbf{f}_\Gamma = \bar{\mathbf{P}}(\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_s). \quad (5.2.61)$$

5.3 Modèle hydrodynamique diphasique avec membrane

5.3.1 Modèle hydrodynamique diphasique

Soit un domaine d'étude Ω contenant deux fluides Ω^+ et Ω^- tels que $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$. Soit $\Gamma = \Omega^+ \cap \Omega^-$ l'interface entre les deux fluides et \mathbf{n} son vecteur unitaire normal. Chaque fluide est considéré incompressible et leurs masses volumiques et viscosités dynamiques sont respectivement (ρ^+, μ^+) et (ρ^-, μ^-) . A l'interface entre les deux fluides, les champs scalaires de masse volumique et de viscosité dynamique présentent des sauts de valeurs tels que

$$[\rho]_\Gamma = \rho^+ - \rho^-, \quad (5.3.1)$$

$$[\mu]_\Gamma = \mu^+ - \mu^-. \quad (5.3.2)$$

On peut alors définir les champs scalaires de masse volumique et de viscosité dynamique tels que

$$\rho = \rho^- + (\rho^+ - \rho^-)H(\mathbf{x}), \quad (5.3.3)$$

$$\mu = \mu^- + (\mu^+ - \mu^-)H(\mathbf{x}), \quad (5.3.4)$$

avec $H(\mathbf{x})$ la fonction Heaviside définie telle que $H(\mathbf{x} \in \Omega^-) = 0$ et $H(\mathbf{x} \in \Omega^+) = 1$.

De la même façon, le tenseur des contraintes fluides $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_f$ présente un saut qui, dans le cas général, est noté \mathbf{f}_Γ :

$$[\mathbf{n} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_f]_\Gamma = \mathbf{f}_\Gamma. \quad (5.3.5)$$

Les équations de Navier-Stokes dans le cas diphasique s'écrivent alors

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.3.6)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \bar{\mathbf{D}}) + \delta_\Gamma \mathbf{f}_\Gamma, \quad (5.3.7)$$

avec δ_Γ la distribution de Dirac à l'interface.

Dans le cas classique de deux fluides avec tension de surface, l'expression du terme source à l'interface correspond à $\mathbf{f}_\Gamma = \sigma \kappa \mathbf{n}$ avec σ la tension de surface et κ la courbure de l'interface comme détaillé précédemment dans la section 2.2.1. Dans le cas où une membrane sépare les deux fluides, la contribution élastique à intégrer aux équations de Navier-Stokes est déduite de la méthodologie présentée dans la section 5.2.5.

L'intégration des efforts de membrane peut s'effectuer de deux façons. La première consiste à intégrer la force élastique sous forme de termes sources lissés sur le maillage cartésien. La deuxième méthode transforme cette force en conditions de saut sur la pression et les dérivées de la vitesse. Ces deux méthodes font l'objet des parties 5.3.2 et 5.3.3 respectivement.

5.3.2 Modèle de membrane lissé

La méthode lissée repose sur la méthode Continuous Surface Force (CSF) [4, 36, 39], présentée dans la section 2.2.2.1, pour laquelle la membrane est épaissie artificiellement sur un certain nombre de mailles selon sa normale. Les efforts élastiques sont imposés sur la zone correspondant à la membrane et les propriétés physiques des fluides y sont réparties grâce aux distributions de Heaviside et de Dirac lissées (*cf.* équations (2.2.26) et (2.2.27)).

La méthode de résolution des équations de Navier-Stokes est identique à celle présentée dans la section 2.2.2.1. La seule différence avec le modèle de membrane est que les termes sources supplémentaires dus à la tension de surface $\sigma \kappa \mathbf{n} \delta_\Gamma$ dans les équations (2.2.16) à (2.2.30), sont remplacés par la force élastique $\mathbf{f}_\Gamma \delta_\Gamma$.

5.3.3 Modèle de membrane discontinu

Avec la méthodologie discontinue, la force élastique due à la membrane est transformée en conditions de saut sur la pression et les dérivées de la vitesse. Les relations entre forces locales et conditions de saut ont été démontrées par Xu et Wang [44] dans le cas d'un seul fluide et étendues au cas avec viscosités différentes de chaque côté de l'interface par Tan *et al.* [40, 41]. Ces conditions de saut proviennent de la continuité des vitesses à l'interface et de l'équilibre des forces à la membrane dans les directions normale et tangentielle,

$$[\mathbf{u}]_\Gamma = \mathbf{0}, \quad (5.3.8)$$

$$[p]_\Gamma = 2 \left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma \cdot \mathbf{n} + \mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{n}, \quad (5.3.9)$$

$$\left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma \cdot \mathbf{e}_\tau + \left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{e}_\tau} \right]_\Gamma \cdot \mathbf{n} + \mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_\tau = 0. \quad (5.3.10)$$

La condition de non glissement des deux côtés de la membrane induit que le saut de la variation tangentielle de la vitesse à la membrane est nul

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{e}_\tau} \right]_\Gamma = \mathbf{0}. \quad (5.3.11)$$

A ces trois conditions de sauts, il faut ajouter la propriété d'incompressibilité des fluides $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ valable dans tout le domaine. A l'interface, $[\nabla \cdot \mathbf{u}]_\Gamma = 0$ et par combinaison avec la condition de saut (5.3.11), on déduit que

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (5.3.12)$$

Ces méthodes numériques peuvent être améliorées en utilisant les conditions de saut des dérivées de la pression et dérivées secondes de la vitesse pour atteindre des précisions d'ordre supérieur [40, 41, 44]. Dans le cadre de cette étude, nous ne considérons que les trois conditions de saut primaires décrites ci-dessus.

En suivant la méthode Ghost Fluid [10, 16] présentée dans la section 2.2.3, Lalanne *et al.* [18] ont montré que seule la composante normale de la force à l'interface doit être considérée lors de l'étape de projection et de correction car la composante visqueuse est déjà prise en compte dans l'étape de prédiction. Cela revient à simplement considérer la condition de saut suivante lors de la résolution de l'équation de Poisson,

$$[p]_{\Gamma} = \mathbf{f}_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = f_n. \quad (5.3.13)$$

La condition de saut sur les contraintes tangentielles (5.3.10) peut s'écrire grâce à la propriété d'incompressibilité

$$\left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_{\tau} + [\mu]_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{e}_{\tau}} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{f}_{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_{\tau}. \quad (5.3.14)$$

De la même façon que dans les travaux de Lalanne *et al.* [18], le terme source correspondant à la composante tangentielle de la force élastique est imposé sur un seul des deux termes de l'expression, ici sur la composante tangentielle de la contrainte visqueuse. Ceci permet de simplifier l'implémentation numérique du terme source en une seule partie tout en respectant l'expression complète de la condition de saut. Le saut sur la dérivée normale de la vitesse devient alors

$$\left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -\bar{\bar{\mathbf{P}}} \mathbf{f}_{\Gamma} = -\mathbf{f}_{\tau}. \quad (5.3.15)$$

Une fois les conditions de saut déterminées, la méthode de projection utilisée pour résoudre les équations de Navier-Stokes correspond à la méthode GFCMI présentée dans la section 2.2.2.2. La première étape consiste à calculer un champ de vitesse intermédiaire \mathbf{u}^* comprenant les différents termes de l'équation de conservation de la quantité de mouvement excepté le terme de pression

$$\begin{cases} \rho^{n+1} \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \cdot (2\mu^{n+1} \bar{\bar{\mathbf{D}}}^*) = \rho^{n+1} \left(\mathbf{u}^n - \Delta t \left((\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{\mathbf{F}_{\text{ext}}}{\rho^{n+1}} \right) \right), \\ \left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -\mathbf{f}_{\tau}. \end{cases} \quad (5.3.16)$$

avec la condition de saut correspondant à la composante tangentielle de la force élastique prise en compte sous la forme d'un terme source sur la contrainte visqueuse. La considération et la discrétisation de cette condition de saut s'effectue grâce à la méthode Ghost Fluid et est présentée dans la section 5.4.3.1. Ensuite, le champ de pression est résolu en considérant le saut sur la pression dû à la composante normale de la force élastique et le saut sur la masse volumique

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \nabla \cdot \left(\frac{f_n \mathbf{n} \delta_{\Gamma}}{\rho^{n+1}} \right). \quad (5.3.17)$$

La discrétisation de cette étape est proche de celle sans membrane en considérant simplement la tension de surface entre deux fluides et est détaillée dans la section 5.4.3.2. Finalement, la vitesse intermédiaire est corrigée pour respecter la condition de divergence nulle,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} (\nabla p^{n+1} - f_n \mathbf{n} \delta_{\Gamma}). \quad (5.3.18)$$

5.4 Méthodes numériques

Dans cette section, nous nous intéressons à la discrétisation du modèle de membrane pour extraire la contribution hyperélastique de la membrane. Par la suite, les équations de Navier-Stokes diphasique sont discrétisées avec l'intégration des termes élastiques en utilisant deux méthodes différentes : une lissée et une discontinue. Finalement, l'algorithme d'extension permettant d'améliorer la stabilité et la précision du modèle de membrane de Ii *et al.* [14] est présenté.

5.4.1 Suivi Eulérien de la membrane et opérateur de projection

Dans la continuité de la première partie de cette thèse, la localisation de l'interface avec le temps s'effectue toujours avec la méthode level-set (*cf.* section 2.1.3) [31]. En considérant que l'épaisseur de la membrane est infiniment fine par rapport à ses autres dimensions, la ligne de niveau zéro de la fonction level-set est utilisée pour décrire la position de la membrane avec le temps. La même équation d'advection 2.1.6 est résolue à chaque itération temporelle et les mêmes méthodes numériques sont utilisées pour la discrétiser.

On note ici que nous ne tirons pas profit de la déformation des lignes de niveaux du champ level-set pour extraire des informations sur l'étirement de la membrane, comme cela est fait dans les travaux de Cottet et Maitre [6] décrits dans la section 5.1.4. Dans le cadre de cette étude, nous conservons la propriété de distance de la fonction level-set en imposant l'algorithme de réinitialisation de [39] détaillé dans la section 2.1.3.2.

Le vecteur unitaire normal à l'interface \mathbf{n} est défini dans tout le domaine de calcul grâce au gradient de la fonction distance, soit

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|}. \quad (5.4.1)$$

La discrétisation du calcul de la normale s'effectue au centre de la maille avec des schémas centrés d'ordre 2,

$$\mathbf{n}|_{i,j} = \frac{\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \mathbf{e}_x + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \mathbf{e}_y}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y}\right)^2}}. \quad (5.4.2)$$

Au sein du modèle de membrane [14], l'opérateur de projection $\bar{\mathbf{P}}$ dans le plan tangent à la membrane permet d'adapter la théorie hyperélastique à une configuration de type membrane où l'on néglige une dimension par rapport aux autres. Cet opérateur ne dépend que de la normale \mathbf{n} à la membrane en chaque point. Le calcul du tenseur de projection défini par l'équation (5.2.24) au centre d'une maille est

$$P_{kl} = \delta_{kl} - n_k n_l, \quad (5.4.3)$$

avec δ_{kl} le symbole de Kronecker et n_k la k^e composante de \mathbf{n} . Après chaque itération temporelle, le champ ϕ est transporté et le tenseur de projection dans la configuration actuelle $\bar{\mathbf{P}}$ est mis à jour.

5.4.2 Discrétisation du modèle de membrane

Dans la suite de cette thèse, les composantes des tenseurs propres à la membrane, définies précédemment avec l'indice s , seront notées sans indice afin d'alléger les équations.

5.4.2.1 Maillage

Dans un premier temps, les lieux où les variables propres à la membrane sont définies dans le maillage cartésien sont explicités. Comme illustré par la figure 5.2 sur un exemple bidimensionnel, le maillage considéré est de type MAC (Marker And Cell) avec décalage des composantes du champ de vitesse au centre des faces des cellules. Comme dans la première partie de cette thèse, la pression, la fonction level-set ϕ et la normale à la membrane sont localisées au centre des mailles.

Les efforts élastiques sont intégrés dans le maillage en adéquation avec les méthodes numériques propres à la résolution des équations de Navier-Stokes. Par conséquent, les composantes des termes sources apparaissant dans la méthode lissée sont décalées sur les faces des cellules de la même façon que dans la méthode Continuum Surface Force [4] présentée dans la section 2.2.2.1. Avec la méthode discontinue, la composante normale de la force élastique est calculée au centre de la maille et les composantes tangentielles sont décalées sur les faces des

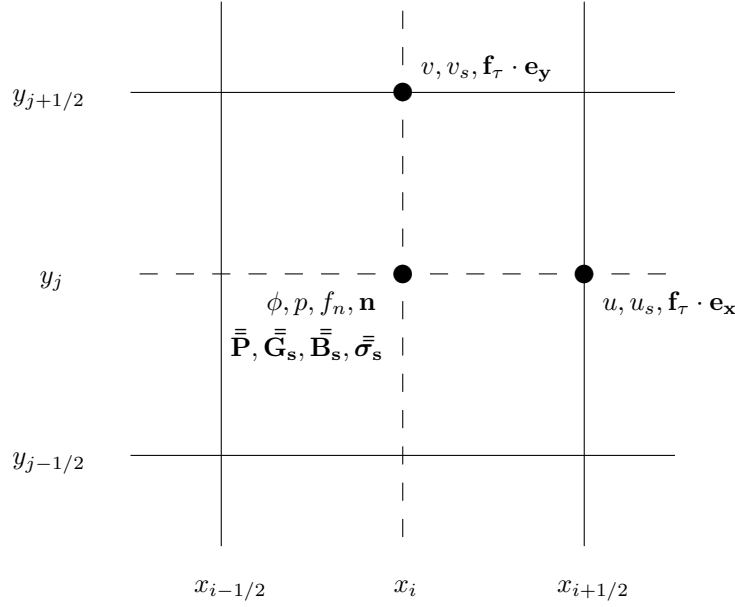


FIGURE 5.2 – Position des variables sur une maille.

cellules. Afin de conserver la cohérence, les composantes de la vitesse à la membrane \mathbf{u}_s sont définies aux mêmes endroits que le champ de vitesse principal \mathbf{u} .

Dans leurs travaux, Li *et al.* [14] définissent les composantes diagonales des tenseurs solides aux centres des mailles et les composantes extra-diagonales aux sommets des cellules du maillage (*cf.* figure 5.3). Dans un cas tridimensionnel, les composantes extra-diagonales sont situées aux milieux des arêtes de la maille. Avec une formulation lissée, cette répartition permet de simplifier le calcul des forces élastiques sur le maillage décalé. Le calcul de divergence de l'équation (5.2.59) est directement centré d'ordre 2 avec ce décalage des composantes :

$$\mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_x|_{i+1/2,j} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}|_{i+1/2,j} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}|_{i+1/2,j} = \frac{\sigma_{11}|_{i+1,j} - \sigma_{11}|_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{12}|_{i,j} - \sigma_{12}|_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (5.4.4)$$

$$\mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_y|_{i,j+1/2} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x}|_{i,j+1/2} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}|_{i,j+1/2} = \frac{\sigma_{21}|_{i,j} - \sigma_{21}|_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{22}|_{i,j+1} - \sigma_{22}|_{i,j}}{\Delta y} \quad (5.4.5)$$

Néanmoins, les calculs des composantes des tenseurs depuis le tenseur intermédiaire $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$ (5.2.32) jusqu'au tenseur des contraintes $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s$ (5.2.52) nécessitent des multiplications entre les différentes composantes. Celles-ci n'étant pas localisées aux mêmes endroits dans une maille, des interpolations des composantes sont effectuées à chaque calcul de tenseur pour chaque composante. Afin d'éviter ces nombreuses interpolations, les composantes de tous les tenseurs propres à la membrane sont localisées au centre de la maille dans cette étude, comme indiqué dans la figure 5.2. Le calcul des composantes des différents tenseurs s'effectue alors directement et seul le calcul de la force nécessite une interpolation, décrite dans la section 5.4.2.3. De plus, avec la méthodologie discontinue, le calcul de la composante normale de la force élastique s'effectue au centre de la maille et est simplifié avec cette disposition centrale des composantes.

5.4.2.2 Transport du tenseur des dilatations intermédiaire $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$

A partir d'un état de déformation initial connu, le tenseur intermédiaire $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$ évolue temporellement suivant l'équation de transport (5.2.33) appliquée successivement à chacune de ces composantes. En considérant une discrétisation temporelle explicite, l'équation d'évolution du tenseur $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$ devient

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s^{n+1} = \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s^n - \Delta t \left((\mathbf{u}_s^n \cdot \nabla) \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s^n - (\nabla \mathbf{u}_s^n) \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s^n - \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s^n (\nabla \mathbf{u}_s^n)^T \right), \quad (5.4.6)$$

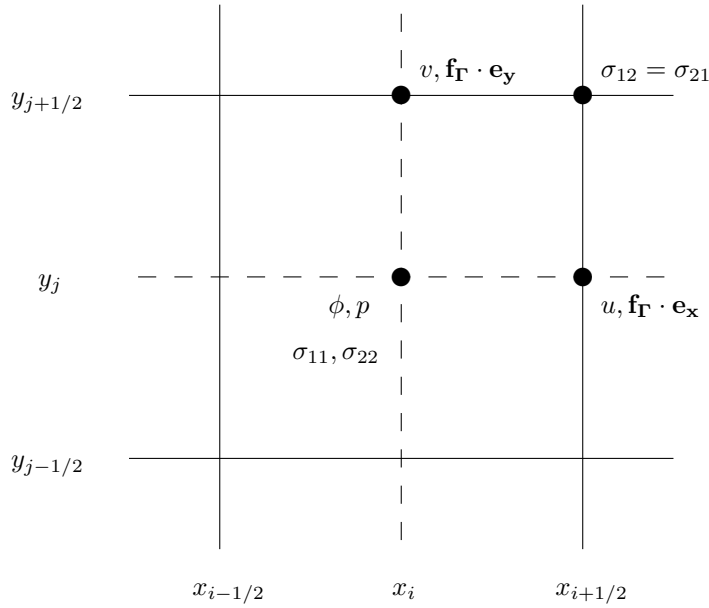


FIGURE 5.3 – Position des variables et des composantes des tenseurs solides (ici $\bar{\sigma}_s$) dans les travaux de Li *et al.* [14].

avec \mathbf{u}_s le vecteur vitesse des particules solides constituant la membrane. La détermination de ce vecteur vitesse en tout point du maillage se fait par extension constante du vecteur vitesse \mathbf{u} depuis la membrane vers le reste du domaine selon sa direction normale. L'algorithme d'extension fait l'objet de la section 5.4.4.

Le terme d'advection est calculé avec le schéma WENO-Z de Borges *et al.* [3], de la même façon que pour le transport de la fonction level-set (*cf.* équation (2.2.55)). Le calcul des gradients de vitesse des deux derniers termes de l'équation 5.4.6 utilise le schéma de différence finie centré d'ordre 2. A titre d'exemple, le calcul des dérivées de la vitesse dans un cas bidimensionnel donne

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_s|_{i+1/2,j} - u_s|_{i-1/2,j}}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_s}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{u_s|_{i,j+1/2} - u_s|_{i,j-1/2}}{\Delta y}, \quad (5.4.7)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{v_s|_{i+1/2,j} - v_s|_{i-1/2,j}}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_s}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{v_s|_{i,j+1/2} - v_s|_{i,j-1/2}}{\Delta y}, \quad (5.4.8)$$

avec une interpolation bilinéaire pour obtenir les composantes de la vitesse en dehors de leurs positions dans la maille de calcul

$$u_s|_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{4} \left(u_s|_{i-1/2,j} + u_s|_{i+1/2,j} + u_s|_{i-1/2,j\pm 1} + u_s|_{i+1/2,j\pm 1} \right), \quad (5.4.9)$$

$$v_s|_{i\pm 1/2,j} = \frac{1}{4} \left(v_s|_{i,j-1/2} + v_s|_{i,j+1/2} + v_s|_{i\pm 1,j-1/2} + v_s|_{i\pm 1,j+1/2} \right). \quad (5.4.10)$$

Les composantes des autres tenseurs solides sont toutes centrées dans les mailles de calcul. En suivant l'équation (5.2.32), le tenseur de Cauchy-Green gauche vaut au centre de chaque maille

$$B_{kl} = P_{km} G_{mn} P_{nl}, \quad (5.4.11)$$

en respectant la convention de sommation d'Einstein. Ses invariants scalaires \bar{I}_1 et \bar{I}_2 sont calculés d'après l'équation (5.2.29) au centre des mailles tels que

$$\bar{I}_1 = B_{kk}, \quad (5.4.12)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2} (B_{kk}^2 - B_{kl} B_{lk}). \quad (5.4.13)$$

Le calcul du tenseur des contraintes de Cauchy provient de l'équation (5.2.52) et donne

$$\sigma_{kl} = \frac{2}{\sqrt{\bar{I}_2}} \left(\frac{\partial W}{\partial \bar{I}_1} B_{kl} + \bar{I}_2 \frac{\partial W}{\partial \bar{I}_2} P_{kl} \right). \quad (5.4.14)$$

5.4.2.3 Discrétisation de la force élastique

En considérant la méthodologie lissée, chaque composante de la force élastique \mathbf{f}_Γ est calculée sur les faces des cellules du maillage. En considérant un cas 2D,

$$\mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_x|_{i+1/2,j} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}|_{i+1/2,j} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}|_{i+1/2,j} = \frac{\sigma_{11}|_{i+1,j} - \sigma_{11}|_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{12}|_{i+1/2,j+1/2} - \sigma_{12}|_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y}, \quad (5.4.15)$$

avec $\sigma_{12}|_{i+1/2,j\pm 1/2} = 1/4(\sigma_{12}|_{i,j} + \sigma_{12}|_{i,j\pm 1} + \sigma_{12}|_{i+1,j} + \sigma_{12}|_{i+1,j\pm 1})$, car les composantes des tenseurs solides sont définies aux centres des mailles. De la même façon, selon \mathbf{e}_y ,

$$\mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{e}_y|_{i,j+1/2} = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x}|_{i,j+1/2} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}|_{i,j+1/2} = \frac{\sigma_{21}|_{i+1/2,j+1/2} - \sigma_{21}|_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{22}|_{i,j+1} - \sigma_{22}|_{i,j}}{\Delta y}. \quad (5.4.16)$$

Dans le cadre de la résolution discontinue, la force élastique \mathbf{f}_Γ est décomposée en deux parties : f_n selon la direction normale à la membrane et \mathbf{f}_τ appartenant à son plan tangent. La discrétisation de la composante normale donne

$$\begin{aligned} f_n|_{i,j} &= \sigma_{11}|_{i,j} \frac{\partial n_x}{\partial x}|_{i,j} + \sigma_{12}|_{i,j} \frac{\partial n_x}{\partial y}|_{i,j} + \sigma_{21}|_{i,j} \frac{\partial n_y}{\partial x}|_{i,j} + \sigma_{22}|_{i,j} \frac{\partial n_y}{\partial y}|_{i,j}, \\ &= \sigma_{11}|_{i,j} \frac{n_x|_{i+1,j} - n_x|_{i-1,j}}{2\Delta x} + \sigma_{12}|_{i,j} \frac{n_x|_{i,j+1} - n_x|_{i,j-1}}{2\Delta y} + \sigma_{21}|_{i,j} \frac{n_y|_{i+1,j} - n_y|_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ &\quad + \sigma_{22}|_{i,j} \frac{n_y|_{i,j+1} - n_y|_{i,j-1}}{2\Delta y}. \end{aligned} \quad (5.4.17)$$

La discrétisation de la composante tangentielle projetée dans la direction \mathbf{e}_x donne

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\tau \cdot \mathbf{e}_x|_{i+1/2,j} &= P_{11}|_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}|_{i+1/2,j} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}|_{i+1/2,j} \right) + P_{12}|_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x}|_{i+1/2,j} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}|_{i+1/2,j} \right), \\ &= P_{11}|_{i+1/2,j} \left(\frac{\sigma_{11}|_{i+1,j} - \sigma_{11}|_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{12}|_{i+1/2,j+1/2} - \sigma_{12}|_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \right) \\ &\quad + P_{12}|_{i+1/2,j} \left(\frac{\sigma_{21}|_{i+1,j} - \sigma_{21}|_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{22}|_{i+1/2,j+1/2} - \sigma_{22}|_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \right), \end{aligned} \quad (5.4.18)$$

avec

$$P_{kl}|_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left(P_{kl}|_{i+1,j} + P_{kl}|_{i,j} \right), \quad (5.4.19)$$

$$\sigma_{kl}|_{i+1/2,j\pm 1/2} = \frac{1}{4} \left(\sigma_{kl}|_{i,j} + \sigma_{kl}|_{i+1,j} + \sigma_{kl}|_{i,j\pm 1} + \sigma_{kl}|_{i+1,j\pm 1} \right). \quad (5.4.20)$$

Selon \mathbf{e}_y , le calcul est similaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\tau \cdot \mathbf{e}_y|_{i,j+1/2} &= P_{21}|_{i,j+1/2} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x}|_{i,j+1/2} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y}|_{i,j+1/2} \right) + P_{22}|_{i,j+1/2} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x}|_{i,j+1/2} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y}|_{i,j+1/2} \right), \\ &= P_{21}|_{i,j+1/2} \left(\frac{\sigma_{11}|_{i+1/2,j+1/2} - \sigma_{11}|_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{12}|_{i,j+1} - \sigma_{12}|_{i,j}}{\Delta y} \right) \\ &\quad + P_{22}|_{i,j+1/2} \left(\frac{\sigma_{21}|_{i+1/2,j+1/2} - \sigma_{21}|_{i-1/2,j+1/2}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{22}|_{i,j+1} - \sigma_{22}|_{i,j}}{\Delta y} \right), \end{aligned} \quad (5.4.21)$$

avec

$$P_{kl}|_{i,j+1/2} = \frac{1}{2} \left(P_{kl}|_{i,j+1} + P_{kl}|_{i,j} \right), \quad (5.4.22)$$

$$\sigma_{kl}|_{i\pm 1/2,j+1/2} = \frac{1}{4} \left(\sigma_{kl}|_{i,j} + \sigma_{kl}|_{i\pm 1,j} + \sigma_{kl}|_{i,j+1} + \sigma_{kl}|_{i\pm 1,j+1} \right). \quad (5.4.23)$$

5.4.3 Discrétisation des systèmes linéaires

Dans le cadre de l'étude de l'interaction fluides-membrane avec la méthodologie discontinue, on utilise de nouveau la méthode Ghost Fluid présentée dans la section 2.2.3. Cette méthode est utilisée pour le saut de pression avec les mêmes méthodes que celles présentées dans la section 2.2.4.3 mais également lors du calcul du tenseur visqueux en traitant le saut du coefficient de diffusion et le saut du flux. Le traitement du saut des dérivées de vitesse est détaillé dans la prochaine partie.

5.4.3.1 Résolution du champ de vitesse intermédiaire

Les conditions de saut sur les dérivées de la vitesse sont prises en compte lors de la discrétisation du tenseur visqueux dans la première étape de prédiction (5.3.16). Nous considérerons, dans cette section, un cas bidimensionnel pour simplifier les équations mais l'extension dans une troisième direction est similaire. La divergence du tenseur visqueux s'écrit

$$\nabla \cdot (2\mu\bar{\mathbf{D}}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{pmatrix}. \quad (5.4.24)$$

Les conditions de saut sur chaque dérivée de la vitesse se trouvent, grâce à l'équation (5.3.15), sous la forme suivante

$$\left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\Gamma} = n_x \left[\mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -n_x (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_x), \quad \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{\Gamma} = n_y \left[\mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -n_y (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_x), \quad (5.4.25)$$

$$\left[\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{\Gamma} = n_x \left[\mu \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -n_x (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_y), \quad \left[\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{\Gamma} = n_y \left[\mu \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -n_y (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_y). \quad (5.4.26)$$

Il faut également prendre en compte la condition de saut sur la viscosité dynamique $[\mu]_{\Gamma} = \mu^+ - \mu^-$. La résolution de l'étape de prédiction avec la méthode GFCMI cumule deux types de conditions de saut avec le formalisme de la méthode Ghost Fluid : le saut sur le flux (cf. section 2.2.3.2) et le saut sur le coefficient de diffusion (cf. section 2.2.3.3).

On peut séparer les dérivées doubles présentes dans l'équation (5.4.24) en deux types : les dérivées doubles par rapport à une même variable directionnelle et les dérivées croisées. Les méthodes pour considérer ces deux cas de figure sont différentes et expliquées ci-dessous.

Tout d'abord, nous considérons le premier terme du tenseur visqueux dans (5.4.24). Soit $\beta = 2\mu$ le coefficient de diffusion et $b = -n_x(\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_x)$ la condition de saut sur la dérivée de la vitesse calculée au niveau des bords est et ouest des mailles, la discrétisation du premier terme du tenseur visqueux au point du maillage $(i + 1/2, j)$ donne

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j} \approx \frac{\beta_{i+1,j} \left(\frac{u_{i+3/2,j} - u_{i+1/2,j}}{\Delta x} \right) - \beta_{i,j} \left(\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} - h_{i+1/2,j}, \quad (5.4.27)$$

avec $\beta_{i+1,j}$ et $\beta_{i,j}$ les moyennes harmoniques du coefficient de diffusion aux centres des mailles. Ces moyennes harmoniques sont définies par rapport aux valeurs de la fonction level-set au voisinage du point de calcul. Sur

un exemple au point (k, l) , la moyenne harmonique de β par rapport à ses voisins est et ouest vaut

$$\beta_{k,l} = \begin{cases} \beta^+ & \text{si } \phi_{k-1/2,l} > 0 \text{ et } \phi_{k+1/2,l} > 0, \\ \beta^- & \text{si } \phi_{k-1/2,l} < 0 \text{ et } \phi_{k+1/2,l} < 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^- (|\phi_{k-1/2,l}| + |\phi_{k+1/2,l}|)}{\beta^- |\phi_{k+1/2,l}| + \beta^+ |\phi_{k-1/2,l}|} & \text{si } \phi_{k-1/2,l} < 0 \text{ et } \phi_{k+1/2,l} > 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^- (|\phi_{k-1/2,l}| + |\phi_{k+1/2,l}|)}{\beta^- |\phi_{k-1/2,l}| + \beta^+ |\phi_{k+1/2,l}|} & \text{si } \phi_{k-1/2,l} > 0 \text{ et } \phi_{k+1/2,l} < 0, \end{cases} \quad (5.4.28)$$

et de la même façon par rapport à ses voisins nord et sud,

$$\beta_{k,l} = \begin{cases} \beta^+ & \text{si } \phi_{k,l-1/2} > 0 \text{ et } \phi_{k,l+1/2} > 0, \\ \beta^- & \text{si } \phi_{k,l-1/2} < 0 \text{ et } \phi_{k,l+1/2} < 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^- (|\phi_{k,l-1/2}| + |\phi_{k,l+1/2}|)}{\beta^- |\phi_{k,l+1/2}| + \beta^+ |\phi_{k,l-1/2}|} & \text{si } \phi_{k,l-1/2} < 0 \text{ et } \phi_{k,l+1/2} > 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^- (|\phi_{k,l-1/2}| + |\phi_{k,l+1/2}|)}{\beta^- |\phi_{k,l-1/2}| + \beta^+ |\phi_{k,l+1/2}|} & \text{si } \phi_{k,l-1/2} > 0 \text{ et } \phi_{k,l+1/2} < 0. \end{cases} \quad (5.4.29)$$

Les conditions de saut apparaissent dans l'équation (5.4.25) à travers le terme $h_{i+1/2,j} = h_{i+1/2,j}^E + h_{i+1/2,j}^O$ qui comprend les conditions aux limites dans les cas où la membrane traverse les intervalles est et ouest,

$$h_{i+1/2,j}^E = \mp \frac{\beta_{i+1,j} b_{\Gamma}^E \theta^E}{\beta \mp \Delta x} \quad \text{et} \quad h_{i+1/2,j}^O = \pm \frac{\beta_{i,j} b_{\Gamma}^O \theta^O}{\beta \mp \Delta x}, \quad (5.4.30)$$

avec \pm le signe de $\phi_{i+1/2,j}$ et \mp le signe opposé de $\phi_{i+1/2,j}$,

$$b_{\Gamma}^E = b_{i+1/2,j} \theta^E + b_{i+3/2,j} (1 - \theta^E) \quad \text{et} \quad b_{\Gamma}^O = b_{i+1/2,j} \theta^O + b_{i-1/2,j} (1 - \theta^O), \quad (5.4.31)$$

et

$$\theta^E = \frac{|\phi_{i+3/2,j}|}{|\phi_{i+3/2,j}| + |\phi_{i+1/2,j}|} \quad \text{et} \quad \theta^O = \frac{|\phi_{i-1/2,j}|}{|\phi_{i-1/2,j}| + |\phi_{i+1/2,j}|}. \quad (5.4.32)$$

Cette méthode est la même pour toutes les dérivées doubles par rapport à la même variable. Pour ce qui est des dérivées croisées, la méthode diffère car les intervalles considérés ne sont plus alignés et contigus. On considère maintenant le dernier terme de la divergence du tenseur visqueux dans la direction \mathbf{e}_x . La discrétisation au point $(i + 1/2, j)$ donne

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j} \approx \frac{\beta_{i+1/2,j+1/2} \left(\frac{v_{i+1,j+1/2} - v_{i,j+1/2}}{\Delta x} \right) - \beta_{i+1/2,j-1/2} \left(\frac{v_{i+1,j-1/2} - v_{i,j-1/2}}{\Delta x} \right)}{\Delta y} - h_{i+1/2,j}. \quad (5.4.33)$$

Le coefficient de diffusion est maintenant $\beta = \mu$ et la condition de saut est $b = -n_x (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_y)$. Les moyennes harmoniques du coefficient de diffusion sont calculées avec les équations (5.4.28) et (5.4.29). Le terme correspondant aux conditions de saut dans l'équation discrétisée (5.4.33) est $h_{i+1/2,j} = h_{i+1/2,j}^N + h_{i+1/2,j}^S$ dans le cas où la membrane traverse l'intervalle nord $[x_{i+1,j+1/2}, x_{i,j+1/2}]$ noté avec l'exposant N et celui où la membrane traverse l'intervalle sud $[x_{i+1,j-1/2}, x_{i,j-1/2}]$ noté avec l'exposant S . Ces deux sauts, s'ils existent, se calculent avec la formule suivante

$$h_{i+1/2,j}^N = \mp \frac{\beta_{i+1/2,j+1/2} b_{\Gamma}^N \theta^N}{\beta \mp \Delta y} \quad \text{et} \quad h_{i+1/2,j}^S = \pm \frac{\beta_{i+1/2,j-1/2} b_{\Gamma}^S \theta^S}{\beta \mp \Delta y}, \quad (5.4.34)$$

avec \pm le signe de $\phi_{i+1/2,j}$ et \mp le signe opposé de $\phi_{i+1/2,j}$.

En considérant que la membrane traverse l'intervalle nord $[x_{i+1,j+1/2}, x_{i,j+1/2}]$, les expressions de b_{Γ}^N et θ^N dépendent du signe de la fonction level-set ϕ au point du calcul $(i+1/2, j)$. Si $\phi_{i+1/2,j}\phi_{i,j+1/2} < 0$, le calcul de la condition de saut devient

$$b_{\Gamma}^N = b_{i+1,j+1/2}\theta^N + b_{i,j+1/2}(1 - \theta^N) \quad \text{avec} \quad \theta^N = \frac{|\phi_{i,j+1/2}|}{|\phi_{i,j+1/2}| + |\phi_{i+1,j+1/2}|}, \quad (5.4.35)$$

et si $\phi_{i+1/2,j}\phi_{i,j+1/2} > 0$, la condition de saut devient

$$b_{\Gamma}^N = b_{i+1,j+1/2}(1 - \theta^N) + b_{i,j+1/2}\theta^N \quad \text{avec} \quad \theta^N = \frac{|\phi_{i+1,j+1/2}|}{|\phi_{i,j+1/2}| + |\phi_{i+1,j+1/2}|}. \quad (5.4.36)$$

En considérant que la membrane traverse l'intervalle sud $[x_{i+1,j-1/2}, x_{i,j-1/2}]$, la même méthodologie est appliquée. Si $\phi_{i+1/2,j}\phi_{i,j-1/2} < 0$, on obtient

$$b_{\Gamma}^S = b_{i+1,j-1/2}\theta^S + b_{i,j-1/2}(1 - \theta^S) \quad \text{avec} \quad \theta^S = \frac{|\phi_{i,j-1/2}|}{|\phi_{i,j-1/2}| + |\phi_{i+1,j-1/2}|}, \quad (5.4.37)$$

et si $\phi_{i+1/2,j}\phi_{i,j-1/2} > 0$, la condition de saut devient

$$b_{\Gamma}^S = b_{i+1,j-1/2}(1 - \theta^S) + b_{i,j-1/2}\theta^S \quad \text{avec} \quad \theta^S = \frac{|\phi_{i+1,j-1/2}|}{|\phi_{i,j-1/2}| + |\phi_{i+1,j-1/2}|}. \quad (5.4.38)$$

Les termes h correspondant aux conditions de saut sont ajoutés au second membre lors de la résolution de la première étape de la méthode de projection. Les coefficients du système linéaire à résoudre sont identiques à ceux de la section 2.2.4.2.

5.4.3.2 Résolution du champ de pression

La résolution du champ de pression avec la méthode Ghost Fluid est la même que celle présentée dans la section 2.2.4.3. La seule différence provient de la condition de saut sur la pression. Dans le cas d'un écoulement diphasique, le saut provient de la tension de surface $\sigma\kappa$ alors qu'elle provient de la composante normale de la force élastique f_n dans le cas de la membrane. La méthode présentée dans la partie 2.2.4.3 est utilisée de la même manière en remplaçant les équations 2.2.84 et 2.2.85 par

$$a_{\Gamma}^E = f_n|_{i,j}\theta^E + f_n|_{i+1,j}(1 - \theta^E), \quad a_{\Gamma}^O = f_n|_{i,j}\theta^O + f_n|_{i-1,j}(1 - \theta^O), \quad (5.4.39)$$

$$a_{\Gamma}^N = f_n|_{i,j}\theta^N + f_n|_{i,j+1}(1 - \theta^N), \quad a_{\Gamma}^S = f_n|_{i,j}\theta^S + f_n|_{i,j-1}(1 - \theta^S). \quad (5.4.40)$$

5.4.4 Algorithme d'extension

Avec un formalisme purement Eulérien, les variables propres à la membrane sont définies en tant que champs scalaires sur tout le domaine de calcul. Néanmoins, celles-ci n'ont une existence physique qu'à la position de la membrane, pour $\phi(\mathbf{x}) = 0$. Loin de la membrane, les champs scalaires correspondant aux composantes du tenseur de Cauchy-Green gauche peuvent évoluer de manière importante à travers l'équation (5.2.33) si l'écoulement est perturbé par des tourbillons, un cisaillement local, *etc.* Afin que ces évolutions parasites n'influencent pas les valeurs des champs scalaires proches de la membrane, il est nécessaire d'ajouter un traitement numérique spécifique.

Dans ces travaux, Li *et al.* [14] proposent de remplacer le tenseur de Cauchy-Green gauche par le tenseur de projection dans la configuration actuelle loin de la membrane. Cette méthode permet d'éviter l'apparition d'instabilités loin de la membrane mais perturbe les champs scalaires à la jonction entre les régions modifiées et non modifiées. En effet, dans cette zone intermédiaire, les variables sont lissées afin que les valeurs calculées avec l'équation de transport et celles provenant du tenseur de projection se succèdent spatialement sans discontinuité.

Cette transition peut induire une génération de valeurs parasites en fonction du lissage. De plus, l'épaisseur de la zone lissée est choisie arbitrairement et peut être source de dissipation ou d'instabilité numérique. Dans leurs travaux, Li *et al.* [14] expliquent que malgré cette méthode, leur modèle numérique devient instable sur de longues périodes de temps.

Nous proposons dans cette thèse un algorithme d'extension de variable dans la direction normale à une membrane. L'objectif est de supprimer la dérivée normale à la membrane d'une variable par un processus itératif sans modifier les valeurs du champ scalaire à la position exacte de la membrane. Cette méthode est inspirée des travaux de Min [27] sur l'algorithme de réinitialisation de la fonction level-set. Dans ses travaux, Min [27] reconstruit une fonction distance à partir d'une ligne de niveau zéro. Pour cela, il étend la valeur du champ scalaire à la position de l'interface dans la direction normale à celle-ci en imposant une dérivée normale unitaire. La méthodologie présentée ici reprend certaines des spécificités de ces travaux.

5.4.4.1 Discrétisation spatiale

L'extension d'un champ scalaire $h(x, y)$ défini sur tout le domaine de calcul revient à imposer une dérivée normale nulle, soit

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \nabla h = 0, \\ h(\phi = 0) \text{ constant,} \end{cases} \quad (5.4.41)$$

sur tout le domaine de calcul. Numériquement, l'algorithme d'extension permet de respecter cette propriété en résolvant à chaque pas de temps fictif τ l'équation suivante à partir d'un champ initial

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + (\text{signe}(\phi)\mathbf{n}) \cdot \nabla h = 0. \quad (5.4.42)$$

La propagation des valeurs de la variable depuis la membrane vers le reste du domaine de calcul s'effectue selon la normale sortante à la membrane définie par $\text{sign}(\phi)\mathbf{n}$. Une fois convergé, le gradient de h dans la direction normale est nul et la valeur de h correspond à sa valeur au point le plus proche appartenant à la membrane.

Le gradient de la variable est discrétisé en utilisant le schéma ENO d'ordre 2 décentré dans chaque direction. La dérivée dans la direction \mathbf{e}_x de la variable h avec le schéma ENO décentré à droite et à gauche donne

$$\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_d = \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \text{minmod} \left(\frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + h_i}{\Delta x^2} \right), \quad (5.4.43)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_g = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \text{minmod} \left(\frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{h_i - 2h_{i-1} + h_{i-2}}{\Delta x^2} \right), \quad (5.4.44)$$

avec $\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \min(|a|, |b|) & \text{si } ab > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Le choix du schéma décentré dépend du signe de la normale sortante à la membrane. La propagation s'effectuant de la membrane vers le reste du domaine,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_g & \text{si } (\text{signe}(\phi)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x > 0, \\ \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_d & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.4.45)$$

La même méthodologie s'applique dans les autres directions de l'espace. Cet algorithme d'extension seul présente des problèmes de conservation des valeurs du champ scalaire à l'interface, comme illustré dans la section 6.1. Afin d'y remédier, il est nécessaire d'introduire dans les schémas numériques une résolution en sous maille des cellules traversées par la membrane. Celle-ci permettra de déterminer les valeurs précises du champ scalaire à l'interface et de les étendre dans tout le domaine de calcul en limitant les erreurs d'interpolation. Cette méthode de résolution en sous maille est détaillée dans la section 5.4.4.2.

5.4.4.2 Résolution en sous maille à la membrane

Une attention particulière est portée sur les cellules du maillage traversées par la membrane. En effet, comme indiqué précédemment, les valeurs du champ scalaire à la membrane ne doivent pas être modifiées par l'algorithme d'extension. Parce que la membrane ne se conforme pas au maillage, le champ scalaire peut être dégradé du fait des erreurs d'interpolation. En conséquence, une méthode de résolution en sous maille est implémentée afin d'extraire la valeur exacte à la membrane et les schémas numériques dans les cellules proches de la membrane sont modifiés afin d'assurer que cette valeur exacte est bien celle étendue dans tout le domaine.

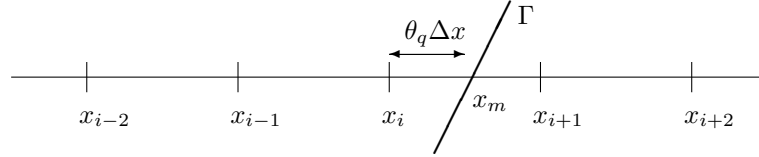


FIGURE 5.4 – Intersection de la grille par la membrane.

La première étape de la méthode de sous maille consiste à déterminer la position exacte où la membrane coupe le maillage. En considérant que la membrane traverse l'intervalle entre deux points d'un maillage monodimensionnel $[x_i, x_{i+1}]$, on définit $\theta_q \Delta x$ la distance entre le point x_i et la membrane. Cet exemple est illustré par la figure 5.4. En rappelant que la position de la membrane est caractérisée par $\phi(x_m) = 0$, un développement en série de Taylor donne

$$\phi(x_m) = 0 = \phi_i + \theta_q \Delta x \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i + \frac{(\theta_q \Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x^2). \quad (5.4.46)$$

Les dérivées premières et secondes de ϕ sont déterminées par différences finies centrées telles que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (5.4.47)$$

La distance relative θ_q se détermine par résolution de l'équation polynomiale de degré 2 (5.4.46) en remplaçant les dérivées par leurs approximations,

$$\theta_q = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{-(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \text{signe}(\phi_i) \sqrt{(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})^2 - 8\phi_i(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})}}{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}} \right) & \text{si } \left| \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i \right| > \epsilon, \\ -\frac{2\phi_i}{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}} \text{ sinon,} \end{cases} \quad (5.4.48)$$

avec $\epsilon = 10^{-8}$, la valeur limite de la dérivée seconde de ϕ en dessous de laquelle le terme quadratique de l'équation (5.4.46) est négligé et l'équation devient linéaire.

De la même façon, si la membrane coupe l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, θ_q devient

$$\theta_q = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \text{signe}(\phi_i) \sqrt{(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})^2 - 8\phi_i(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})}}{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}} \right) & \text{si } \left| \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i \right| > \epsilon, \\ \frac{2\phi_i}{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}} \text{ sinon.} \end{cases} \quad (5.4.49)$$

A partir de cette valeur θ_q quadratique, le même développement de Taylor de l'équation (5.4.46) appliqué à h permet d'extraire la valeur de la variable à la membrane notée h_m . Si la membrane coupe l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$,

$$h_m = \frac{1}{2}(-\theta_q + \theta_q^2)h_{i-1} + (1 - \theta_q^2)h_i + \frac{1}{2}(\theta_q + \theta_q^2)h_{i+1}, \quad (5.4.50)$$

et si la membrane coupe l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$,

$$h_m = \frac{1}{2}(\theta_q + \theta_q^2)h_{i-1} + (1 - \theta_q^2)h_i + \frac{1}{2}(-\theta_q + \theta_q^2)h_{i+1}. \quad (5.4.51)$$

La dernière étape de la résolution en sous maille consiste à modifier le schéma ENO d'ordre 2 en remplaçant la valeur au point du maillage situé de l'autre côté de la membrane par la valeur à la membrane h_m . Si la membrane coupe l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$,

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_d = \frac{h_m - h_i}{\theta_q \Delta x} - \frac{\theta_q \Delta x}{2} \min \text{mod} \left(\frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + h_i}{\Delta x^2} \right), \quad (5.4.52)$$

et si la membrane coupe l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$,

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_g = \frac{h_i - h_m}{\theta_q \Delta x} + \frac{\theta_q \Delta x}{2} \min \text{mod} \left(\frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{h_i - 2h_{i-1} + h_{i-2}}{\Delta x^2} \right). \quad (5.4.53)$$

Cette méthodologie est identique dans les autres directions de l'espace et est appliquée indépendamment car les dérivées spatiales de l'équation (5.4.42) sont découplées. L'étude présentée dans la section 6.1 justifie l'utilisation de la résolution en sous maille à travers la comparaison des résultats obtenus après extension d'un champ scalaire.

5.4.4.3 Discrétisation temporelle

Avec la résolution en sous maille présentée ci-dessus, le pas d'espace des schémas numériques vaut $\theta_q \Delta x$ dans les mailles intersectées par la membrane et Δx sinon. Avec une discrétisation temporelle explicite, la condition de Courant implique que le pas de temps soit inférieur au pas d'espace pour garantir la stabilité numérique,

$$\|\text{signe}(\phi)\mathbf{n}\| \Delta \tau = \Delta \tau < \theta_q \Delta x. \quad (5.4.54)$$

Or, dans les mailles traversées par la membrane, le pas d'espace $\theta_q \Delta x$ peut être très faible et induire une limitation importante de la valeur du pas de temps. Afin d'éviter cette restriction, l'algorithme d'extension est résolu de façon implicite en temps avec la méthode Gauss-Seidel. L'équation (5.4.42) est discrétisée comme tel

$$h_{i,j}^{n+1} + \Delta \tau \text{signe}(\phi) \left(n_x \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + n_y \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} + n_z \frac{\partial h^{n+1}}{\partial z} \right) \Big|_{i,j} = h_{i,j}^n, \quad (5.4.55)$$

avec $\Delta \tau$ le pas de temps fictif défini par

$$\Delta \tau = \alpha \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad (5.4.56)$$

avec $\alpha = 0.3$, un coefficient proportionnel minimisant le temps de calcul pour converger vers le champ étendu. La boucle temporelle est itérée jusqu'à que le champ scalaire soit étendu dans tout le domaine de calcul.

Dans le cadre de cette étude, l'algorithme d'extension de variable est appliqué à chaque itération temporelle sur les composantes du champ de vitesse \mathbf{u}_s sur lequel le tenseur intermédiaire $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$ est transporté. En effet, cette extension de \mathbf{u}_s induit une meilleure conservation de la propriété de dérivée normale nulle du tenseur intermédiaire. Néanmoins, l'algorithme est appliqué directement sur les composantes du tenseur $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$ toutes les 10 itérations temporelles. Cette fréquence des extensions permet de garantir le respect de la condition de dérivée normale nulle dans tout le domaine pour un temps de calcul raisonnable.

5.4.5 Condition sur le pas de temps et condition de stabilité

La discrétisation en temps pour le transport de la fonction level-set, des composantes du tenseur $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$ et de la résolution des équations de Navier-Stokes s'effectue avec un schéma Runge Kutta d'ordre 2. Le pas de temps est contraint par les conditions de stabilité dues à la convection et à l'élasticité de la membrane. En effet, les termes visqueux sont calculés de façon implicite avec la méthode GFCMI ce qui permet de ne pas avoir de restriction sur la viscosité. Le pas de temps convectif Δt_{conv} est défini par

$$\Delta t_{conv} = \frac{1}{\frac{\max(|u|)}{\Delta x} + \frac{\max(|v|)}{\Delta y} + \frac{\max(|w|)}{\Delta z}}. \quad (5.4.57)$$

Le pas de temps dû à l'élasticité de la membrane Δt_{elas} est déduit de la même façon que le pas de temps sur la tension de surface défini dans la section 2.2.4.4 de cette thèse :

$$\Delta t_{elas} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\max(\rho^+, \rho^-)}{E_s}} \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^{3/2}. \quad (5.4.58)$$

En définitive, le pas de temps global Δt doit respecter la condition suivante pour assurer la stabilité

$$\frac{1}{\Delta t} > \frac{1}{\Delta t_{conv}} + \frac{1}{\Delta t_{elas}}. \quad (5.4.59)$$

Afin d'être suffisamment précis au niveau de la membrane, le maillage cartésien doit être assez fin pour calculer la contribution élastique de la membrane et l'intégrer aux équations des fluides. Cela résulte en une condition de stabilité sur le nombre de Reynolds de maille $Re_{\Delta x}$. Ce dernier est défini en fonction de la vitesse caractéristique due à l'élasticité de la membrane U_{elas} , telle que

$$U_{elas} = \sqrt{\frac{E_s}{\max(\rho^+, \rho^-) L}}, \quad (5.4.60)$$

avec L une distance caractéristique du domaine de calcul, et de la taille d'une maille Δx tel que

$$Re_{\Delta x} = \frac{U_{elas} \Delta x}{\min(\nu^+, \nu^-)} = \frac{\Delta x}{\min(\nu^+, \nu^-)} \sqrt{\frac{E_s}{\max(\rho^+, \rho^-) L}}, \quad (5.4.61)$$

avec $\nu = \mu/\rho$ la viscosité cinématique. Les méthodes numériques présentées dans toute la section 5.4 sont stables pour un nombre de Reynolds de maille voisin de 1 ou inférieur à 1. Cette limitation a été observée pour les cas-tests présentés dans le chapitre 6. Cette condition impose d'atteindre une échelle caractéristique suffisamment fine pour que la diffusion visqueuse soit prédominante sur les autres effets et assure la stabilité numérique. Cette contrainte sur le pas d'espace, et par extension sur le pas de temps, est une restriction très importante de nos simulations.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle Eulérien pour prédire le comportement d'une membrane hyperélastique immergée dans un fluide ou séparant deux fluides différents. La méthode level-set permet de suivre le mouvement de la membrane sans utiliser de marqueurs Lagrangiens. Le suivi des déformations de la membrane s'effectue par la résolution d'une équation d'évolution des composantes des tenseurs de Cauchy-Green définies dans tout le domaine de calcul. La loi de comportement de la membrane permet de déduire le tenseur des contraintes et de calculer les efforts exercés par la membrane sur les fluides environnants. Cette méthodologie a été inspirée des travaux de Ii *et al.* [14] et améliorée par l'ajout d'un algorithme d'extension de variable avec résolution en sous maille et par la considération des forces élastiques sous la forme de sauts discontinus de pression et de dérivées de la vitesse. Ce modèle est évalué dans le chapitre 6 sur des cas-tests de la littérature.

Bibliographie

- [1] BARTHES-BIESEL, D., ET RALLISON, J. M. The time-dependent deformation of a capsule freely suspended in a linear shear flow. *J. Fluid Mech.* 113 (1981), 251–267.
- [2] BAZILEVS, Y., HSU, M.-C., ZHANG, Y., WANG, W., LIANG, X., KVAMSDAL, T., BREKKEN, R., ET ISAKSEN, J. G. A fully-coupled fluid-structure interaction simulation of cerebral aneurysms. *Comput. Mech.* 46 (2010), 3–16.

- [3] BORGES, R., CARMONA, M., COSTA, B., ET DON, W. An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.* 227 (2008), 3191–3211.
- [4] BRACKBILL, J. U., KOTHE, D. B., ET ZEMACH, C. A continuum method for modeling surface tension. *J. Comput. Phys.* 100 (1992), 335–354.
- [5] COTTET, G. H., E., M., ET T., M. Eulerian formulation and level set model for incompressible fluid-structure interaction. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 42, 3 (2008), 471–492.
- [6] COTTET, G. H., ET MAITRE, E. A level set method for fluid-structure interaction with immersed surfaces. *Math. Model. Meth. Appl. Sci.* 16, 3 (2006), 415–438.
- [7] EGGLETON, C. D., ET POPEL, A. S. Large deformation of red blood cell ghost in a simple shear flow. *Phys. Fluids* 10, 8 (August 1998), 1834–1845.
- [8] FARHAT, C., DER ZEE, K. G. V., ET GEUZAIN, P. Provably second-order time-accurate loosely-coupled solution algorithms for transient nonlinear computational aeroelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 195 (2006), 1973–2001.
- [9] FAUCI, L. J., ET PESKIN, C. S. A computational model of aquatic animal locomotion. *J. Comput. Phys.* 77 (1988), 85–108.
- [10] FEDKIW, R., ASLAM, T., MERRIMAN, B., ET OSHER, S. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method). *J. Comput. Phys.* 152 (1999), 457–492.
- [11] GE, Y. J., ET TANAKA, H. Aerodynamic flutter analysis of cable-supported bridges by multi-mode and full-mode approaches. *Journal of wind engineering and industrial aerodynamics* 86 (2000), 123–153.
- [12] GENT, A. N., ET THOMAS, A. G. Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber. *J. of Polym. Sci.* 28 (1958), 625–628.
- [13] HOU, G., WANG, J., ET LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction. *Commun Comput. Phys.* 12, 2 (2012), 337–377.
- [14] II, S., GONG, X., SUGIYAMA, K., WU, J., HUANG, H., ET TAKAGI, S. A full eulerian fluid-membrane coupling method with a smoothed volume-of-fluid approach. *Commun Comput. Phys.* 12, 2 (August 2012), 544–576.
- [15] KAMAKOTI, R., ET SHYY, W. Fluid-structure interaction for aeroelastic applications. *Progress in Aerospace Sciences* 40 (2004), 535–558.
- [16] KANG, M., FEDKIW, R., ET LIU, X.-D. A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow. *J. Sci. Comput.* 15 (2000), 323–360.
- [17] LAI, M. C., ET PESKIN, C. S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *J. Comput. Phys.* 160 (2000), 705–719.
- [18] LALANNE, B., VILLEGAS, L. R., TANGUY, S., ET RISSO, F. On the computation of viscous terms for incompressible two-phase flows with level set/ghost fluid method. *J. Comput. Phys.* 301 (2015), 289–307.
- [19] LEE, L., ET LEVEQUE, R. J. An immersed interface method for incompressible navier-stokes equations. *J. Sci. Comput.* 25, 3 (2003), 832–856.
- [20] LEVEQUE, R. J., ET LI, Z. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficient and singular sources. *SIAM J. Numer. Anal.* 31, 4 (August 1994), 1019–1044.
- [21] LEVEQUE, R. J., ET LI, Z. Immersed interface methods for stokes flow with elastic boundaries or surface tension. *J. Sci. Comput.* 18, 3 (May 1997), 709–735.
- [22] LI, Z., ET LAI, M. C. The immersed interface method for the navier-stokes equations with singular forces. *J. Comput. Phys.* 171 (2001), 822–842.

- [23] LIU, W. K., LIU, Y., FARELL, D., ZHANG, L., WANG, X. S., FUKUI, Y., PATANKAR, N., ZHANG, Y., BAJAJ, C., LEE, J., HONG, J., CHEN, X., ET HSU, H. Immersed finite element method and its applications to biological systems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 195 (2006), 1722–1749.
- [24] LONGATTE, E., BENDJEDDOU, Z., ET SOULI, M. Methods for numerical study of tube bundle vibrations in cross-flows. *Journal of Fluids and Structures* 18 (2003), 513–528.
- [25] MASE, G. T., ET MASE, G. E. *Continuum mechanics for engineers*. CRC Press, 1999.
- [26] MILCENT, T., ET MAITRE, E. Eulerian model of immersed elastic surfaces with full membrane elasticity. *Communications in Mathematical Sciences* 14, 3 (2016), 857–881.
- [27] MIN, C. On reinitializing level set functions. *J. Comput. Phys.* 229 (2010), 2764–2772.
- [28] MITTAL, R., ET IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 37 (2005), 239–261.
- [29] MOONEY, M. A theory of large elastic deformation. *J. Appl. Phys.* 11 (1940), 582–592.
- [30] OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proc. R. Soc. Lond.* 326 (1972), 565–584.
- [31] OSHER, S., ET SETHIAN, J. Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.* 79 (1988), 12–49.
- [32] PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves : a numerical method. *J. Comput. Phys.* 10 (1972), 252–271.
- [33] PESKIN, C. S. Numerical analysis of blood flow in the heart. *J. Comput. Phys.* 25 (1977), 220–252.
- [34] PESKIN, C. S. The immersed boundary method. *Acta Numerica* 11 (2002), 479–517.
- [35] SAIKI, E. M., ET BIRINGEN, S. Numerical simulation of a cylinder in uniform flow : application of a virtual boundary method. *J. C* 123 (1996), 450–465.
- [36] SCARDOVELLI, R., ET ZALESKI, S. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Annu. Rev. Fluid Mech.* 31 (1999), 567–603.
- [37] SIGRIST, J.-F., ET BROU, D. Dynamic analysis of a tube bundle with fluid–structure interaction modelling using a homogenisation method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg* 197 (2008), 1080–1099.
- [38] SUGIYAMA, K., II, S., TAKEUCHI, S., TAKAGI, S., ET MATSUMOTO, Y. A full eulerian finite difference approach for solving fluid-structure coupling problems. *Journal of Computational Physics* 230 (2011), 596–627.
- [39] SUSSMAN, M., SMEREKA, P., ET OSHER, S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.* 114 (1994), 146–159.
- [40] TAN, Z., LE, D. V., LI, Z., LIM, K. M., ET KHOO, B. C. An immersed interface method for solving incompressible viscous flows with piecewise constant viscosity across a moving elastic membrane. *J. Comput. Phys.* 227 (2008), 9955–9983.
- [41] TAN, Z., LE, D. V., LIM, K. M., ET KHOO, B. C. An immersed interface method for the incompressible navier-stokes equations with discontinuous viscosity across the interface. *J. Sci. Comput.* 31, 3 (2009), 1798–1819.
- [42] TRELOAR, L. R. G. The elasticity of a network of long chain molecules. *Trans. Faraday Soc* 39 (1943), 36–41.
- [43] UNVERDI, S. O., ET TRYGGVASON, G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *J. Comput. Phys.* 100 (1992), 25–37.
- [44] XU, S., ET WANG, Z. J. Systematic derivation of jump conditions for the immersed interface method in three-dimensional flow simulation. *J. Sci. Comput.* 27, 6 (2006), 1948–1980.
- [45] YEOH. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. *Rubber Chemistry and Technology* 63, 5 (1990), 792–805.

Validation du modèle d'interaction fluides-membrane

Sommaire

6.1	Algorithme d'extension	138
6.1.1	Extension sans résolution en sous maille	139
6.1.2	Extension avec résolution en sous maille	140
6.2	Membrane étirée dans un fluide	141
6.2.1	Description de l'étude	141
6.2.2	Évolutions des rayons principaux et étude de convergence	142
6.2.3	Distribution de pression et des vitesses	144
6.2.4	Apport de l'algorithme d'extension	145
6.3	Membrane étirée séparant deux fluides	148
6.3.1	Saut de viscosité à la membrane	148
6.3.2	Saut de masse volumique à la membrane	150
6.4	Capsule immergée dans un écoulement cisailant	151
6.4.1	Description de l'étude	151
6.4.2	Instabilité de flambage	152
6.4.3	Déformation de la membrane avec le temps	153
6.5	Conclusion	155
6.A	Annexe : Résultats de référence de Tan <i>et al.</i> (J. Comput. Phys., 2008)	155
	Bibliographie	157

Les différents modèles et méthodes numériques décrits dans le chapitre précédent sont évalués sur des cas-tests de la littérature. Dans un premier temps, l'algorithme d'extension est évalué pour montrer son efficacité à partir d'un champ scalaire quelconque avec et sans la résolution en sous maille. Ensuite, le cas-test de la membrane bidimensionnelle étirée et pressurisée est présenté. L'évolution des rayons principaux ainsi que les distributions de pression et vitesse sont évaluées et comparées aux résultats de la littérature. Ce cas-test est étendu, dans une troisième partie, aux cas où les fluides des deux côtés de la membrane sont différents, par leurs valeurs de viscosité puis de masse volumique. Finalement, le cas-test de la capsule tridimensionnelle immergée dans un écoulement cisailant permet d'étendre l'étude aux comportements élastiques non-linéaires. Notons ici que toutes les valeurs numériques de ce chapitre sont considérées dans le système d'unité international.

6.1 Algorithme d'extension

L'algorithme d'extension, présenté dans la partie 5.4.4, est évalué sur un cas-test provenant des travaux d'Aslam [1]. La fonction de l'algorithme d'extension est d'étendre les valeurs d'un champ scalaire depuis une interface vers le reste du domaine dans la direction normale à cette dernière. L'interface est représentée par la ligne de niveau zéro d'un champ scalaire level-set.

Pour ce cas-test, l'algorithme d'extension est appliqué à un champ scalaire initial et l'efficacité de l'extension est mesurée par rapport au résultat théorique. De plus, l'apport de la résolution en sous maille à la membrane est évalué. Le modèle de membrane et les équations de Navier-Stokes ne sont pas considérés dans cette section.

Soit un domaine carré $\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ sur lequel on définit une fonction level-set ϕ telle que

$$\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - R_0, \quad (6.1.1)$$

avec $R_0 = 2$, le rayon du cercle formé par la ligne de niveau zéro. Le champ scalaire d'étude est noté $h(x, y)$ et est initialisé par

$$h(x, y) = \cos(x) \sin(y). \quad (6.1.2)$$

La comparaison du champ scalaire obtenu après passage de l'algorithme avec la solution théorique permet d'évaluer la qualité de l'extension. La solution exacte du champ étendu est

$$h(x, y) = \cos\left(R_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \sin\left(R_0 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \quad (6.1.3)$$

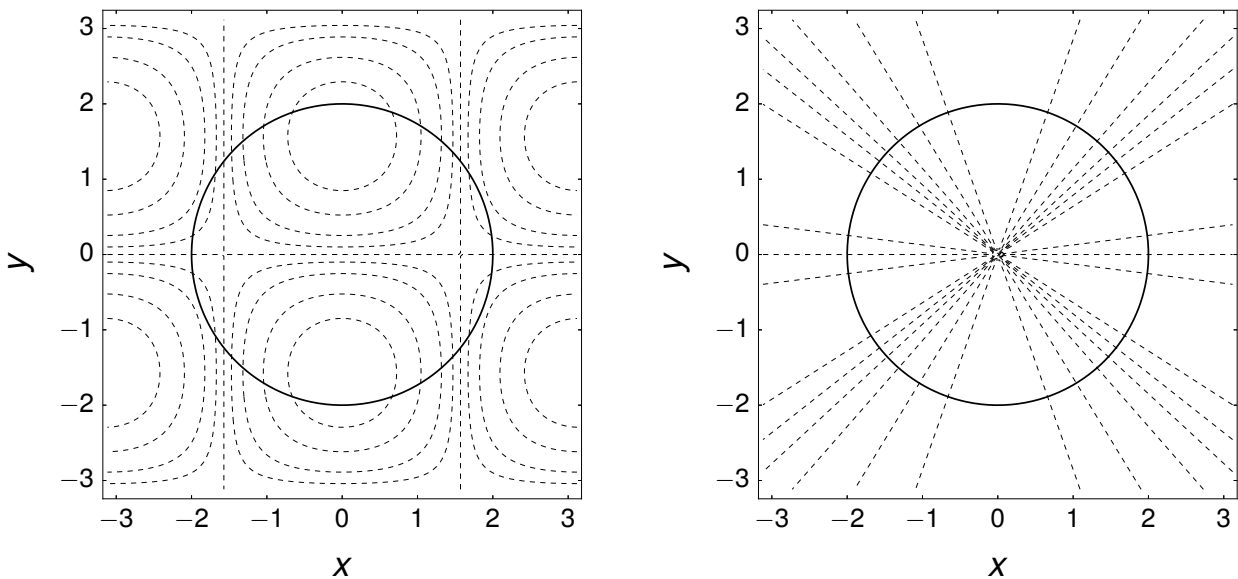


FIGURE 6.1 – Contours en pointillés du champ scalaire $h(x, y)$ initial à gauche et final à droite, avec la ligne de niveau zéro du champ level-set représentée par la ligne noire épaisse.

Les lignes de niveaux du champ $h(x, y)$ initial et final après extension sont représentées en pointillés sur la figure 6.1. L'interface circulaire correspond à la ligne noire épaisse. Le champ scalaire initial montre une succession de motifs alignés horizontalement et verticalement. La solution théorique après extension montre des contours perpendiculaires au cercle et passant par son centre. La condition de dérivée nulle selon la direction normale est respectée et les valeurs de $h(x, y)$ à l'interface n'ont pas été modifiées. Dans cette section, nous nous intéressons à l'apport de la résolution en sous maille pour l'algorithme d'extension.

6.1.1 Extension sans résolution en sous maille

L'algorithme d'extension, présenté dans la section 5.4.4, est appliqué au champ scalaire $h(x, y)$ initial sans la résolution en sous maille. La figure 6.2 à gauche représente le champ $h(x, y)$ après extension sans la résolution en sous maille avec un maillage constitué de 128 cellules dans chaque direction. On ne remarque pas de différence notable avec le champ étendu théorique (cf. figure 6.1 à droite). La figure 6.2 à droite représente les contours à l'état initial en traits continus, et final en traits pointillés de $h(x, y)$ dans la région $[0, 1.1] \times [1.3, 2.4]$. L'interface circulaire est représentée avec un trait continu épais. Le zoom sur cette partie du domaine montre un décalage des valeurs du champ $h(x, y)$ à l'interface. Les points d'intersection des contours avec l'interface circulaire ont changé après l'extension. Cette différence est d'autant plus importante que la variation d'inclinaison des lignes de contour après extension est importante. Sur la figure 6.2 à droite, les lignes de contours $h(x, y) = 0.9$ avant et après l'extension intersectent la ligne de niveau zéro $\phi(x, y) = 0$ en deux points distincts alors que les points d'intersections des lignes de contours $h(x, y) = 0.5$ sont plus rapprochés sans être confondus pour autant.

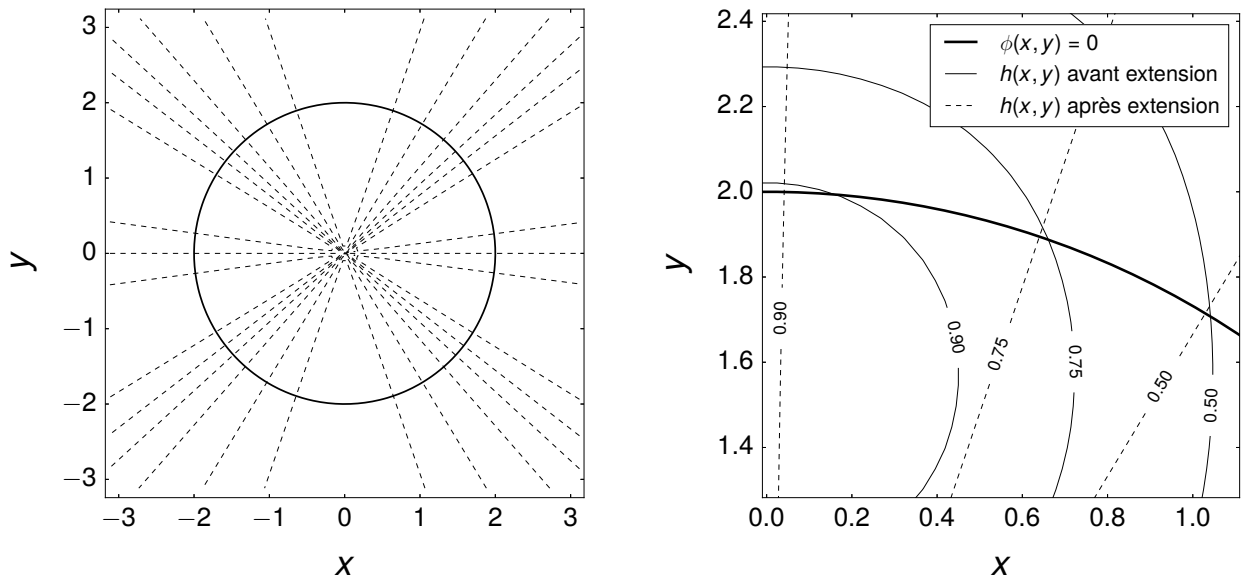


FIGURE 6.2 – Contours du champ scalaire $h(x, y)$ après l'extension sans résolution en sous maille à gauche et zoom des contours proche de l'interface avant et après l'extension à droite.

Maillage	Domaine total $\phi(x, y) > -1.6$				Proche de l'interface $ \phi(x, y) < 1.2\Delta x$			
	E_1	R_1	E_∞	R_∞	E_1	R_1	E_∞	R_∞
64^2	1.11×10^{-2}		6.12×10^{-2}		1.06×10^{-2}		2.82×10^{-2}	
128^2	3.47×10^{-3}	1.68	2.38×10^{-2}	1.36	3.50×10^{-3}	1.59	8.72×10^{-3}	1.69
256^2	1.66×10^{-3}	1.06	9.30×10^{-3}	1.35	1.68×10^{-3}	1.06	5.77×10^{-3}	0.60
512^2	6.93×10^{-4}	1.26	3.68×10^{-3}	1.34	6.91×10^{-4}	1.28	2.74×10^{-3}	1.07

TABLEAU 6.1 – Erreurs sur $h(x, y)$ obtenues après extension sans résolution en sous maille.

Les différences calculées entre les résultats numériques et la solution théorique de l'équation (6.1.3) sont rassemblées dans le tableau 6.1. Les erreurs obtenues avec deux normes sont rassemblées pour quatre maillages différents de 64 à 512 mailles dans chaque direction. Dans la partie gauche du tableau, les erreurs sont intégrées sur le domaine total défini par $\phi(x, y) > -1.6$ pour éviter la singularité au centre du cercle. Dans la partie droite

du tableau, on s'intéresse plus spécifiquement à l'erreur dans la zone proche de la ligne de niveau zéro définie par $|\phi(x, y)| < 1.2\Delta x$. On observe que pour les deux normes considérées, l'erreur mesurée après convergence des résultats est de l'ordre de 10^{-2} pour le maillage 64^2 et qu'elle diminue en raffinant le maillage. L'ordre de convergence oscille autour de 1.5 dans le domaine total comme dans la zone proche de l'interface.

6.1.2 Extension avec résolution en sous maille

L'algorithme d'extension est maintenant appliqué au même cas d'étude en considérant la résolution en sous maille, détaillée dans la section 5.4.4.2. La figure 6.3 à gauche montre les contours du champ scalaire après extension qui restent proches du cas théorique et des résultats obtenus sans la résolution en sous maille. Néanmoins, en effectuant le même zoom sur la partie supérieure droite du cercle (cf. figure 6.3 à droite), on observe que les points d'intersection des contours avant et après extension avec l'interface sont identiques. Ceci reste valable notamment pour le contour $h(x, y) = 0.9$ qui passe d'une orientation pratiquement tangente au cercle à une orientation normale au cercle après extension.

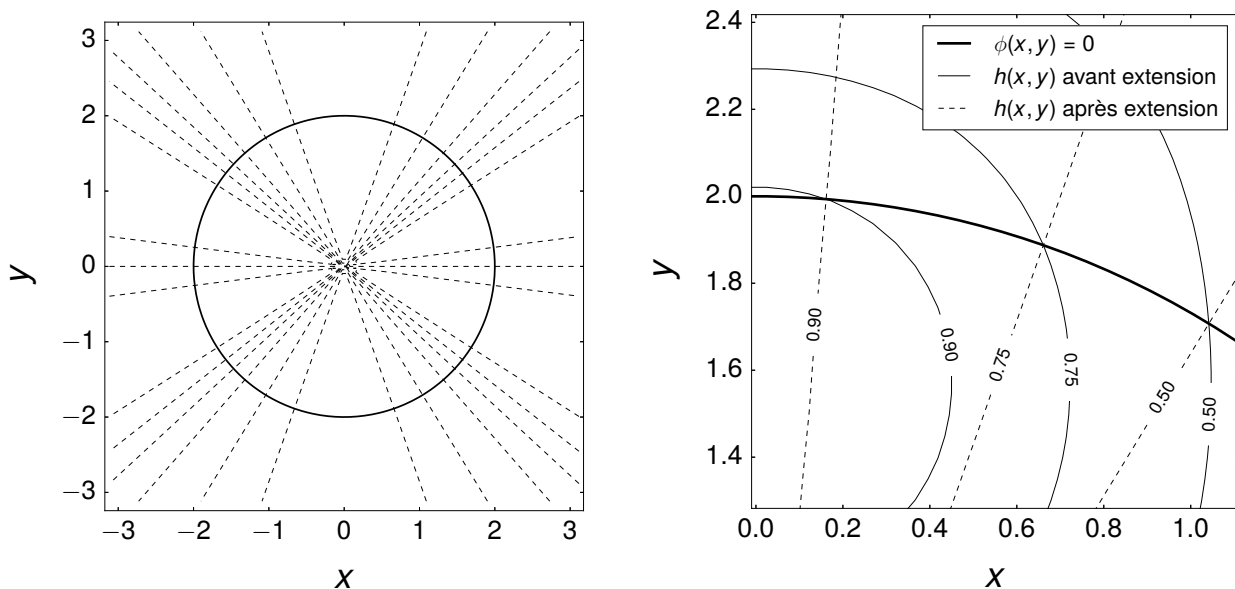


FIGURE 6.3 – Zoom sur les contours de $h(x, y)$ avant et après l'extension avec la résolution en sous maille.

La comparaison des résultats de l'extension avec la résolution en sous maille est elle aussi effectuée avec la solution théorique. Le tableau 6.2 contient les différences observées sur les mêmes configurations que dans le tableau 6.1. Tout d'abord, en comparant les deux tableaux, on observe que les erreurs dans le domaine total et proche de l'interface sont plus faibles dans le cas de l'extension avec résolution en sous maille. Cette différence de précision est plus marquée proche de l'interface où la résolution en sous maille est appliquée. On observe un écart des erreurs de deux ordres de grandeur au minimum. Cet écart augmente en raffinant le maillage du fait de l'augmentation de l'ordre de convergence avec la résolution en sous maille. L'ordre de convergence est légèrement inférieur à 2 sur l'ensemble du domaine et proche de 3 au niveau de l'interface.

En conclusion, l'algorithme d'extension présente des erreurs moins importantes avec la résolution en sous maille. Au sein du code de calcul, cet algorithme est utilisé sur différents champs scalaires et à chaque itération temporelle. Ce premier cas-test permet de mettre en lumière la nécessité d'utiliser la résolution en sous maille dans l'algorithme d'extension pour minimiser les erreurs d'interpolation à l'interface. L'ordre de grandeur de l'erreur en est considérablement réduit et l'ordre de convergence augmenté.

Maillage	Domaine total $\phi(x, y) > -1.6$				Proche de l'interface $ \phi(x, y) < 1.2\Delta x$			
	E_1	R_1	E_∞	R_∞	E_1	R_1	E_∞	R_∞
64^2	1.19×10^{-3}		4.17×10^{-2}		5.37×10^{-5}		3.18×10^{-4}	
128^2	3.38×10^{-4}	1.82	1.76×10^{-2}	1.25	6.56×10^{-6}	3.03	4.37×10^{-5}	2.87
256^2	9.01×10^{-5}	1.91	5.71×10^{-3}	1.62	8.24×10^{-7}	2.99	6.20×10^{-6}	2.82
512^2	2.30×10^{-5}	1.97	1.65×10^{-3}	1.79	1.01×10^{-7}	3.03	7.27×10^{-7}	3.09

TABLEAU 6.2 – Erreurs sur $h(x, y)$ obtenues après extension avec résolution en sous maille.

6.2 Membrane étirée dans un fluide

6.2.1 Description de l'étude

L'étude de la membrane étirée, pressurisée et immergée dans un fluide a été introduite pour la première fois par Tu et Peskin [11] pour évaluer la stabilité de la méthode de frontières immergées (IBM) avec un écoulement de Stokes. Ce cas-test a été étendu à la méthode d'interface immergée (IIM) par Leveque et Li [7] et aux écoulements de Navier-Stokes par Lee et Leveque [6]. Dans le cadre de cette thèse, nous considérerons la configuration de la membrane décrite dans [10].

Au sein d'un domaine bidimensionnel, une membrane initialement étirée sous la forme d'une ellipse de grand axe $a = 0.75$ et de petit axe $b = 0.5$ est relâchée dans un fluide à l'équilibre. Dans son état non contraint, correspondant à la configuration de référence, la membrane prend la forme d'un cercle de rayon $r_0 = 0.5$. Après relâchement de la membrane, la forme d'équilibre de la membrane est un cercle de rayon $r_e = \sqrt{ab} \approx 0.61237$, afin de respecter la conservation du volume à l'intérieur de la membrane. Les trois états de la membrane : non contraint, initial et final, sont représentés sur la figure 6.4.

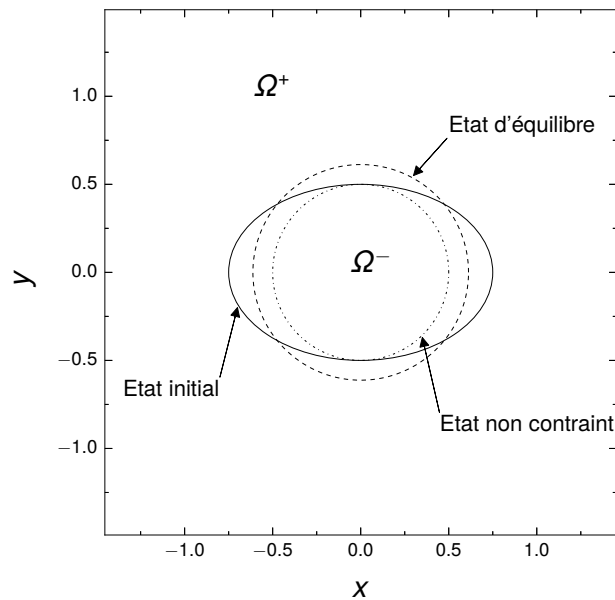


FIGURE 6.4 – Trois états caractéristiques de la membrane.

Le domaine de calcul Ω est un carré de côté $L = 3$ tel que $\Omega = [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ avec des conditions aux limites de type paroi fixe. La membrane est centrée dans le domaine de calcul. La viscosité dynamique du fluide dans lequel la membrane est immergée peut prendre l'une des valeurs suivantes $[0.01, 0.1, 1]$ et sa masse

volumique $[1, 10, 100]$. En fonction des propriétés physiques du fluide, la membrane se détendra différemment vers son état d'équilibre.

La membrane suit le comportement élastique linéaire de Hooke. Or, la méthodologie présentée dans la section 5.2 porte sur un comportement solide de type hyperélastique. Néanmoins, dans le cas bidimensionnel, on peut écrire la loi linéaire de Hooke avec le formalisme de la section 5.2 car seul l'étirement dans la direction tangente à la membrane existe. En effet, la loi de Hooke dans une fibre mono-dimensionnelle relie proportionnellement la tension σ_τ dans la direction tangente notée \mathbf{e}_τ , à son étirement λ_τ dans la direction tangente telle que

$$\sigma_\tau = E_s(\lambda_\tau - 1), \quad (6.2.1)$$

avec $E_s = 10$ le module élastique de la membrane.

Dans le cas 2D, les tenseurs caractéristiques à la membrane peuvent s'écrire en fonction du vecteur tangent à la membrane tel que

$$\bar{\bar{\mathbf{P}}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathbf{e}_\tau \otimes \mathbf{e}_\tau, \quad (6.2.2)$$

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s = \lambda_\tau^2 \mathbf{e}_\tau \otimes \mathbf{e}_\tau, \quad (6.2.3)$$

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s = \sigma_\tau \mathbf{e}_\tau \otimes \mathbf{e}_\tau, \quad (6.2.4)$$

car toutes les caractéristiques de la membrane sont projetées dans le plan tangent. On peut alors exprimer la loi de Hooke (6.2.1) avec les tenseurs à la membrane par

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_s = E_s(\sqrt{\bar{\bar{I}}_1} - 1)\bar{\bar{\mathbf{P}}}, \quad (6.2.5)$$

avec pour rappel, $\bar{\bar{I}}_1 = \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s)$.

Les méthodes numériques présentées dans la section 5.4 sont conservées mais le tenseur des contraintes surfaciques se déduit de la relation (6.2.5) dans le cas de la loi élastique linéaire. Il s'obtient directement du premier invariant du tenseur de Cauchy-Green gauche surfacique et du tenseur de projection.

À l'instant initial, la membrane est uniformément étirée pour atteindre la forme d'une ellipse. La valeur de sa tension initiale correspond au rapport des périmètres de la membrane entre son état initial P_0 et son état de référence non contraint P_r :

$$\lambda_\tau(t=0) = \frac{P_0}{P_r} \approx 1.262. \quad (6.2.6)$$

Le tenseur des dilatations intermédiaire $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$ et le tenseur de Cauchy-Green gauche $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s$ à l'état initial sont donc égaux à

$$\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{B}}}_s = \lambda_\tau^2 \bar{\bar{\mathbf{P}}} = \left(\frac{P_0}{P_r}\right)^2 \bar{\bar{\mathbf{P}}} \quad \text{à } t=0. \quad (6.2.7)$$

6.2.2 Évolutions des rayons principaux et étude de convergence

Dans cette section, les évolutions temporelles des rayons horizontaux et verticaux de la membrane sont étudiées. Dans un premier temps, la masse volumique du fluide est imposée à $\rho = 1$ et deux valeurs de viscosité dynamique sont considérées : $\mu = 0.1$ et $\mu = 0.01$. Dans ces deux cas, la convergence des résultats numériques est vérifiée en effectuant les simulations sur différents maillages. Ces évolutions temporelles sont représentées dans la figure 6.5.

Sur la figure de gauche, les rayons horizontaux et verticaux sont représentés pour une viscosité de $\mu = 0.1$ avec trois maillages : 128, 256 et 512 mailles dans chaque direction. On remarque que pour les trois maillages, les évolutions des rayons sont identiques. Après relâchement de la membrane dans le fluide, celle-ci se détend et oscille autour de sa forme circulaire pour laquelle les rayons horizontaux et verticaux sont égaux. Le rayon horizontal, initialement égal à a , diminue puis oscille autour d'une valeur d'équilibre avant de l'atteindre après $t = 5$. Inversement, le rayon vertical commence à b , augmente et oscille vers la même valeur d'équilibre. Cette

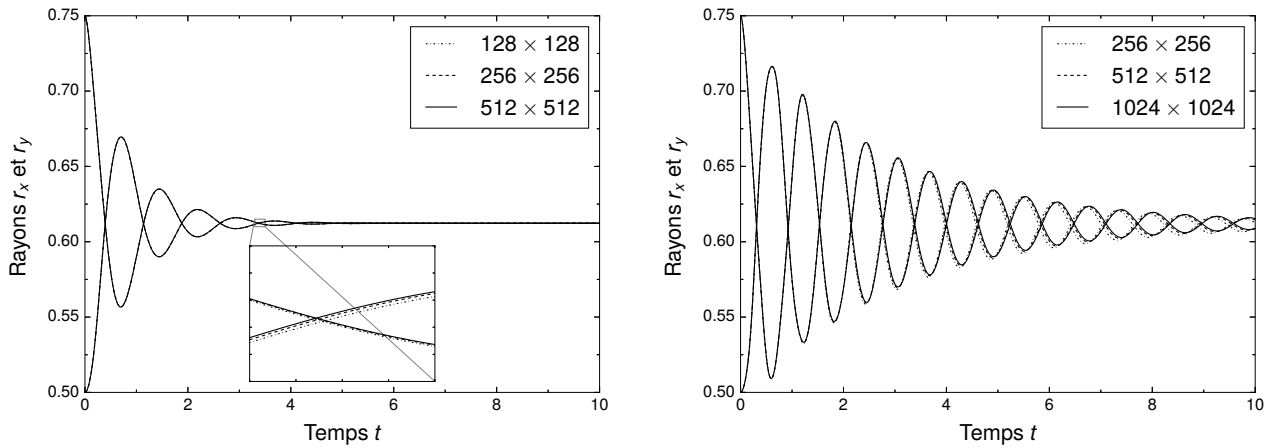


FIGURE 6.5 – Evolutions temporelles des rayons principaux avec $\mu = 0.1$ à gauche et $\mu = 0.01$ à droite pour différents maillages.

valeur asymptotique des rayons au temps long correspond bien à la valeur théorique r_e . Dans cette configuration, le maillage 128^2 est suffisamment raffiné pour atteindre la convergence.

Sur la figure 6.5 à droite, le même calcul est effectué avec $\mu = 0.01$ pour trois maillages : 256^2 , 512^2 et 1024^2 . Par rapport à $\mu = 0.1$, les amplitudes des oscillations des rayons principaux sont beaucoup plus importantes et leurs amortissements sont beaucoup plus faibles. L'ordre de grandeur de la fréquence d'oscillation est resté le même pour les deux valeurs de viscosité. La valeur d'équilibre des rayons n'est toujours pas atteinte après $t = 10$ du fait du plus faible frottement visqueux. Dans cette configuration, on observe une bonne concordance entre les résultats des trois maillages 256^2 à 1024^2 et ce, même au temps long. Nous considérerons par la suite le maillage intermédiaire 512^2 pour une viscosité de $\mu = 0.01$. Pour les plus fortes valeurs de viscosité, le maillage 128^2 suffit. Pour ces valeurs de viscosité, la condition sur le nombre de Reynolds de maille (5.4.61) est respectée mais celle-ci devient plus restrictive sur le pas d'espace en diminuant la viscosité. En effet, le nombre de Reynolds de maille évolue de façon inversement proportionnelle avec la viscosité, ce qui explique la nécessité d'affiner le maillage pour $\mu = 0.01$. A noter que pour $\mu = 0.1$, le nombre de Reynolds de maille est de 0.4 avec le maillage 128^2 et pour $\mu = 0.01$, celui-ci vaut 1 avec le maillage 512^2 .

L'annexe 6.A regroupe les résultats de référence provenant des travaux de Tan *et al.* [10] sur le cas-test de la membrane étirée. La figure 6.23 correspond à l'évolution temporelle des rayons principaux de la membrane pour le même cas que la figure 6.5. On remarque que les résultats obtenus avec le modèle de membrane se superposent correctement avec les résultats de la littérature. Les amplitudes et fréquences des oscillations des rayons sont fidèlement reproduits après convergence en maillage.

La même étude de l'évolution des rayons principaux est effectuée avec $\mu = 0.1$ et des masses volumiques plus importantes : $\rho = 10$ et $\rho = 100$. Les résultats sont illustrés dans la figure 6.6. On observe que la masse volumique du fluide influe de façon importante sur les temps de relaxation de la membrane. Avec $\rho = 10$, la forme circulaire est obtenue après $t = 20$ et avec $\rho = 100$, on observe encore des oscillations de la membrane après $t = 100$. La valeur théorique du rayon r_e est bien retrouvée dans ces deux cas au temps long. La fréquence des oscillations semble augmenter proportionnellement avec la racine carrée de la masse volumique. On observe également que le taux d'amortissement diminue avec la masse volumique pour une même viscosité $\mu = 0.1$.

Les résultats numériques sont convergés à partir du maillage 128^2 pour la masse volumique $\rho = 10$ puisque les courbes correspondant aux trois maillages testés sont confondues. Pour $\rho = 100$, les courbes présentent également une bonne concordance au temps long pour les trois maillages considérés et l'on considérera le maillage 512^2 pour les simulations avec cette valeur de la masse volumique. La taille du maillage pour ces différentes valeurs

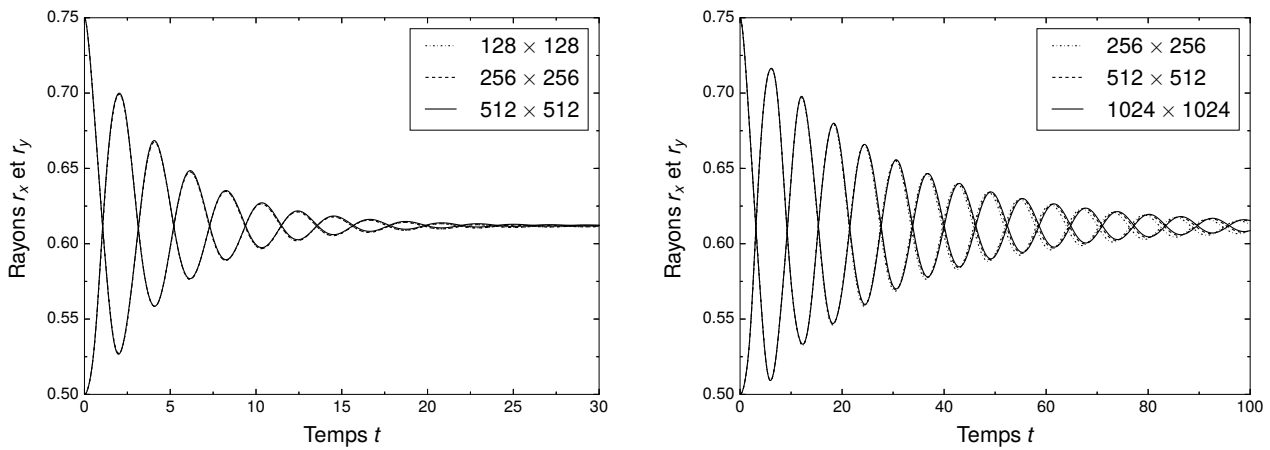


FIGURE 6.6 – Evolutions temporelles des rayons principaux avec $\rho = 10$ à gauche et $\rho = 100$ à droite pour différents maillages.

de masse volumique est conforme à la condition sur le nombre de Reynolds de maille.

6.2.3 Distribution de pression et des vitesses

Dans cette partie, les distributions de la pression comprenant les conditions de saut à la membrane et les champs de vitesse sont extraits et comparés aux résultats de la littérature.

Pour un fluide respectant $\mu = 0.1$ et $\rho = 1$, la figure 6.7 montre la distribution de pression sur le domaine total à trois instants : $t \in [0.2, 0.5, 2]$. On observe très clairement le saut discontinu au niveau de la membrane sur les trois graphes. Aux premiers instants, le champ de pression présente d'importantes variations dans les régions intérieure et extérieure à la membrane à cause de la forte dynamique du fluide. À $t = 2$, ces variations sont beaucoup plus faibles, la pression est pratiquement constante par morceaux. Ces distributions de pression sont directement comparables avec les résultats de Tan *et al.* [10], visibles dans la figure 6.24 de l'annexe 6.A. Les distributions de pression sont identiques et prouvent la très bonne concordance des résultats numériques. Cette comparaison participe à la validation de la méthodologie discontinue pour la prise en compte du saut de pression (*cf.* section 5.4.3.2).

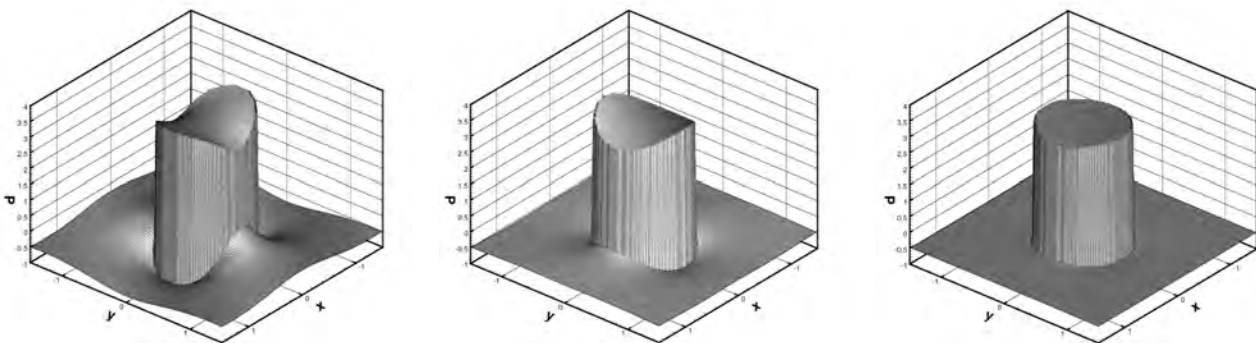


FIGURE 6.7 – Distributions de pression avec $\mu = 0.1$ et $\rho = 1$ à $t = 0.2$ à gauche, à $t = 0.5$ au milieu et à $t = 2$ à droite.

Les champs de vitesse obtenus à ces mêmes trois instants sont illustrés dans la figure 6.8. La position de la membrane est représentée par un trait continu noir. On observe quatre tourbillons principaux situés à l'extérieur

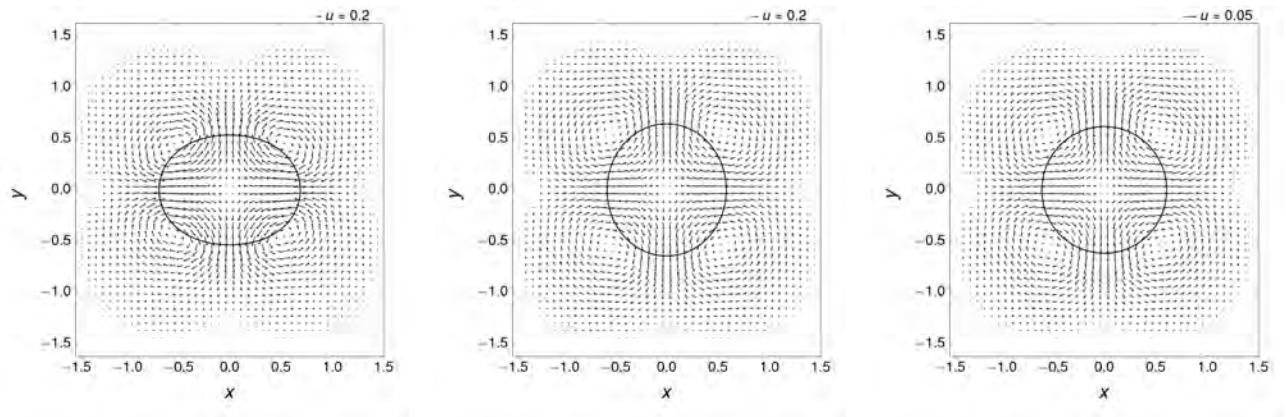


FIGURE 6.8 – Champs de vitesse avec $\mu = 0.1$ et $\rho = 1$ à $t = 0.2$ à gauche, à $t = 0.5$ au milieu et à $t = 2$ à droite.

de la membrane qui entraînent sa déformation. A ces trois instants, la membrane tend à s'étirer dans la direction verticale. De la même façon, la comparaison avec les champs de vitesse de Tan *et al.* [10], visibles dans la figure 6.25 de l'annexe 6.A, montre que nos simulations numériques prédisent le même comportement du fluide.

Pour les cas où les masses volumiques sont plus importantes, les sauts de pression sont toujours bien capturés. La figure 6.9 illustre la distribution de pression à $t = 1.5$ pour un fluide respectant $\mu = 0.1$ et $\rho = 10$ et à $t = 5$ pour un fluide respectant $\mu = 0.1$ et $\rho = 100$. On observe que même avec des variations de pression très importantes dans chacune des zones, le saut de pression est toujours discontinu et du même ordre de grandeur à la membrane.

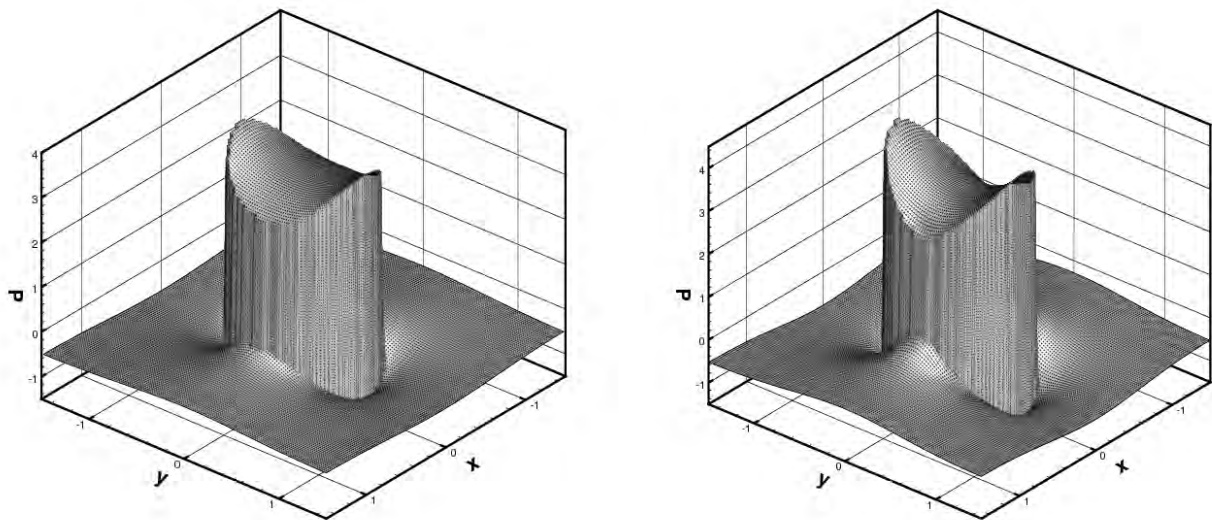


FIGURE 6.9 – Distributions de pression avec $\mu = 0.1$ et $\rho = 10$ à $t = 1.5$ à gauche et avec $\mu = 0.1$ et $\rho = 100$ à $t = 5$ à droite.

6.2.4 Apport de l'algorithme d'extension

Cette section montre sur un exemple la nécessité d'utiliser l'algorithme d'extension avec la résolution en sous maille pour obtenir des résultats numériques stables. La relaxation de la membrane dans le fluide de propriétés

physiques $\rho = 1$ et $\mu = 0.1$ est simulée avec le code de calcul sans aucun appel à l'algorithme d'extension. Le calcul diverge après quelques centaines d'itérations temporelles quel que soit le maillage considéré. La comparaison des résultats s'effectue avant la divergence des résultats à $t = 0.14$ pour le maillage 128^2 .

La figure 6.10 montre les champs scalaires $\bar{I}_1 = \lambda_r^2$ obtenus à $t = 0.14$ sans l'algorithme d'extension à gauche et avec à droite. Le premier invariant scalaire du tenseur $\bar{\mathbf{B}}_s$ représente le carré de la dilatation de la membrane. Cette variable n'a de signification physique qu'au niveau de la membrane. On observe sur la figure 6.10 à gauche que l'invariant scalaire \bar{I}_1 présente de très fortes variations dans tout le domaine de calcul. Sur la ligne $y = 0$, on observe un saut discontinu de fortes valeurs de \bar{I}_1 à l'intérieur de la membrane à de faibles valeurs à l'extérieur. Ce phénomène est reproduit à l'inverse le long de la ligne $x = 0$. Finalement, on observe de fortes variations de \bar{I}_1 le long de la membrane. Les successions de portions claires et sombres et la dégradation du contour de la membrane sont des marqueurs visibles d'instabilités numériques. Sur la figure 6.10 à droite, le champ de

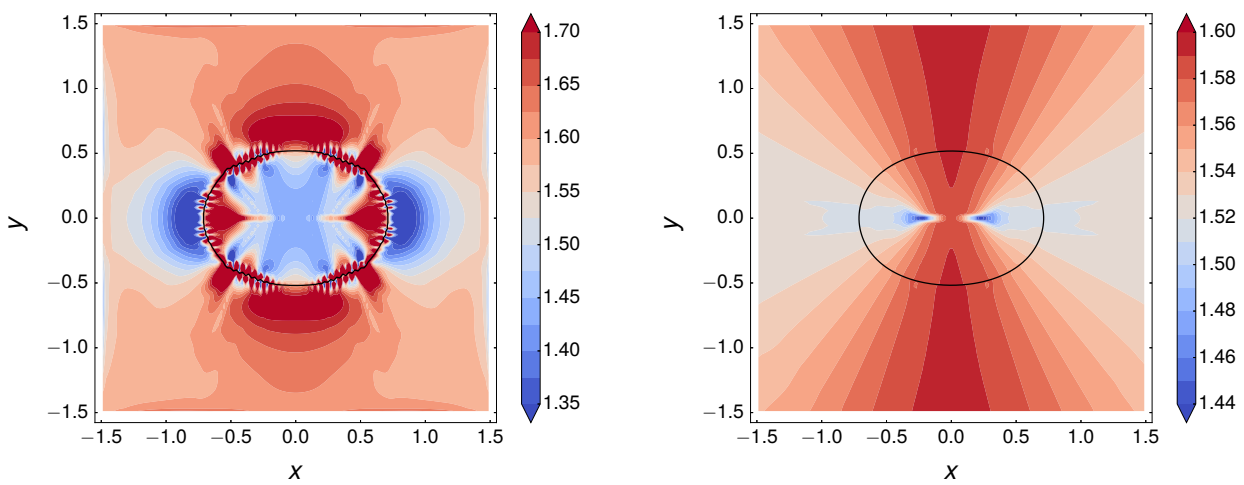


FIGURE 6.10 – Champs scalaires \bar{I}_1 obtenus sans l'algorithme d'extension à gauche et avec à droite, pour $\rho = 1$ et $\mu = 0.1$ à $t = 0.14$.

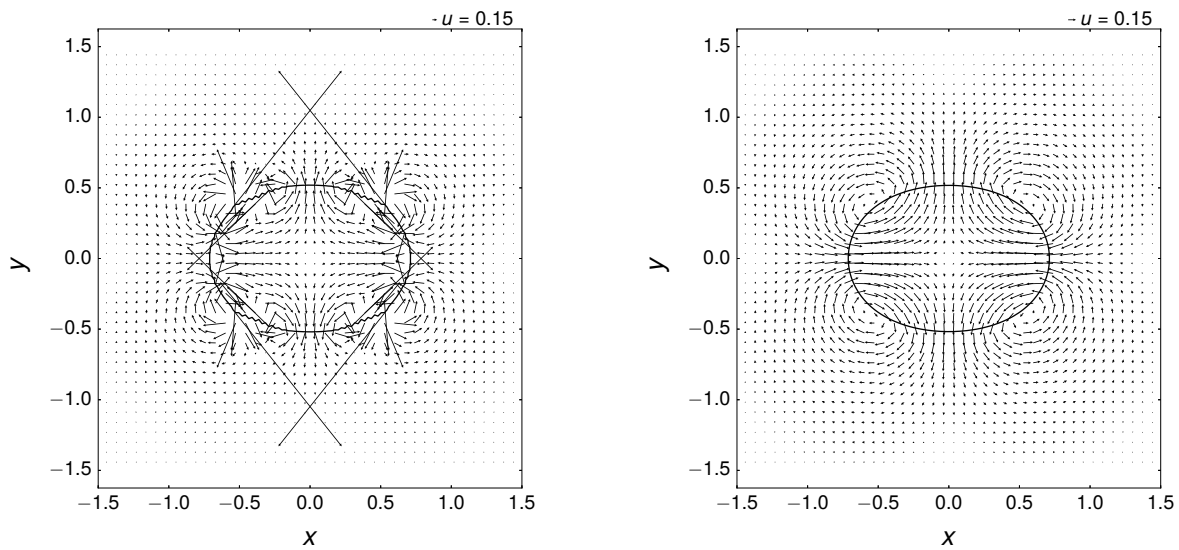


FIGURE 6.11 – Champs de vitesse obtenus sans l'algorithme d'extension à gauche et avec à droite, pour $\rho = 1$ et $\mu = 0.1$ à $t = 0.14$.

l'invariant ne présente pas de singularités dans le domaine de calcul, y compris le long de l'interface. Le champ scalaire ne présente pas de variation importante dans la direction normale à l'interface et la variation dans la direction tangente est régulière. L'algorithme d'extension a empêché la formation des instabilités observées dans la figure de gauche.

La figure 6.11 représente les champs de vitesse dans le domaine de calcul obtenus avec et sans l'algorithme d'extension dans la même configuration que celle de la figure 6.10. Le champ de vitesse est fortement perturbé dans la zone proche de la membrane dans le cas sans extension. On distingue les quatre tourbillons présents à l'extérieur de la membrane mais le champ de vitesse obtenu sans l'extension présente des sauts de valeurs au niveau des mailles proches de la membrane. La continuité de la vitesse à la membrane n'est pas respectée sans l'algorithme d'extension. Les phénomènes d'instabilités présents dans les figures 6.10 et 6.11 se retrouvent pour toutes les configurations testées dans la section 6.2 sans considérer l'algorithme d'extension. On peut conclure de cet exemple que l'algorithme stabilise le calcul en supprimant les dérivées normales à l'interface des variables propres à la membrane seule. Il évite l'apparition d'instabilités dans les variables solides et évite le développement de courants parasites au niveau de la membrane.

Dans un second temps, l'effet de la résolution en sous maille est évalué sur ce même cas-test. Sans cette résolution, le calcul diverge également au bout de quelques itérations temporelles pour tous les maillages testés. La figure 6.12 représente les champs scalaires \bar{I}_1 obtenus à $t = 0.4$ sans et avec la résolution en sous maille pour un maillage 128^2 . On observe que dans les deux cas, les champs scalaires respectent globalement la condition de dérivée normale nulle, cependant les valeurs de \bar{I}_1 sont très différentes, notamment dans la région où la membrane croise l'axe $y = 0$. Les valeurs des composantes du tenseur intermédiaire à l'interface ont été fortement dégradées par l'algorithme d'extension sans la résolution en sous maille jusqu'à ce que, localement, la dilatation de la membrane devienne inférieure à un. Dans ce cas-là, la membrane n'est plus soumise à des contraintes de traction mais à des contraintes de compression qui induisent des instabilités de flambage (*cf.* section 6.4.2). Cet exemple montre que sans la résolution en sous maille, l'algorithme d'extension de variable ne conserve pas les valeurs des champs scalaires à l'interface et diverge très rapidement vers des valeurs aberrantes.

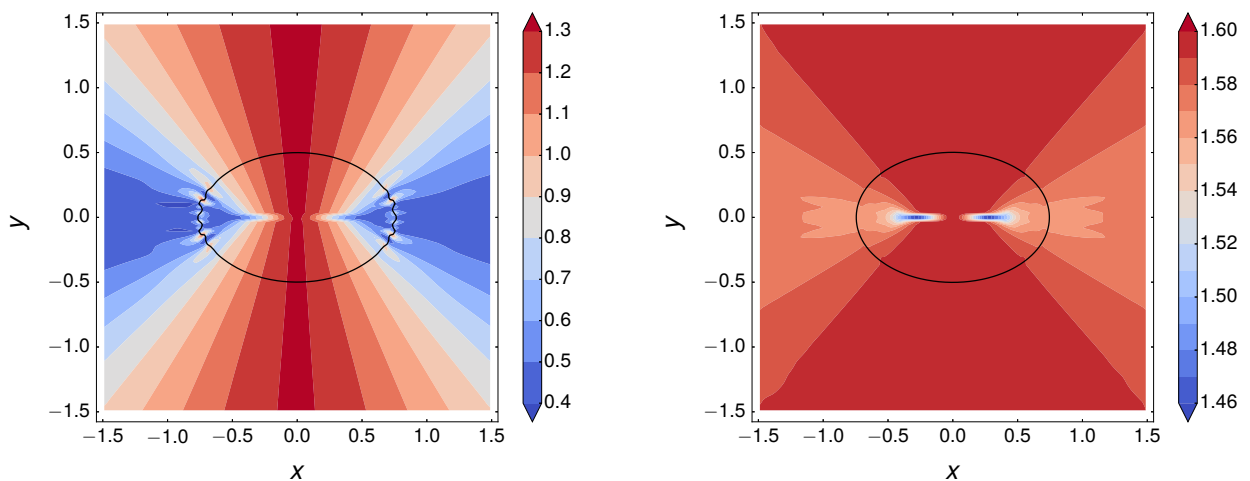


FIGURE 6.12 – Champs scalaires \bar{I}_1 obtenus avec l'algorithme d'extension sans résolution en sous maille à gauche et avec à droite, pour $\rho = 1$ et $\mu = 0.1$ à $t = 0.04$.

6.3 Membrane étirée séparant deux fluides

Dans cette section, la membrane sépare deux fluides de propriétés physiques différentes. Dans un premier temps, seule la viscosité varie entre les deux régions. Dans un second temps, la viscosité est constante dans tout le domaine et la masse volumique présente un saut de valeur à la membrane. La région du domaine à l'intérieur de la membrane est appelée Ω^- et celle à l'extérieur de la membrane Ω^+ comme illustré dans la figure 6.4. Les propriétés physiques des fluides sont alors notées avec l'exposant correspondant : (μ^-, ρ^-) à l'intérieur et (μ^+, ρ^+) à l'extérieur de la membrane.

6.3.1 Saut de viscosité à la membrane

Dans cette section, la viscosité présente un saut à la membrane et la masse volumique reste constante dans tout le domaine et vaut $\rho^+ = \rho^- = 1$. Tous les autres paramètres sont identiques à ceux de la section 6.2. Dans un premier temps, on considère les cas des deux valeurs de viscosité les plus importantes : $(\mu^+ = 1, \mu^- = 0.1)$ et $(\mu^+ = 0.1, \mu^- = 1)$. La figure 6.13 montre l'évolution temporelle des rayons principaux pour ces deux cas de figure.

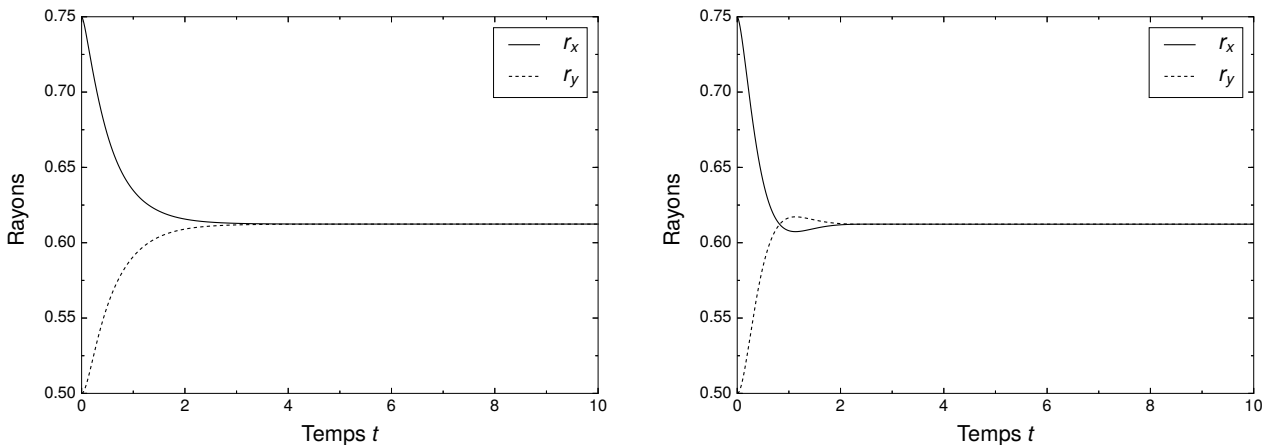


FIGURE 6.13 – Evolutions des rayons avec $\mu^+ = 1$ et $\mu^- = 0.1$ à gauche et $\mu^+ = 0.1$ et $\mu^- = 1$ à droite.

Avec $\mu^+ = 1$ et $\mu^- = 0.1$, la membrane n'oscille pas, elle se relâche progressivement jusqu'à atteindre la position d'équilibre circulaire après $t = 4$. Le rayon horizontal diminue et à l'inverse le rayon vertical augmente jusqu'à la même valeur asymptotique égale à la valeur théorique r_e . Dans le cas où $\mu^+ = 0.1$ et $\mu^- = 1$, la membrane se détend vers sa forme d'équilibre et la dépasse, ce qui nous permet d'observer une période d'oscillation des deux rayons principaux. La valeur d'équilibre correspond toujours à la valeur théorique r_e . On en déduit que lorsque le fluide avec la plus grande viscosité se trouve à l'intérieur de la membrane, cette dernière est moins contrainte, sa détente est plus rapide et entraîne une oscillation de sa forme contrairement au cas où le fluide le plus visqueux est à l'extérieur de la membrane.

Par la suite, on divise les viscosités par 10 dans tout le domaine d'étude. Les rapports des viscosités interne et externe à la membrane sont conservés et les évolutions temporelles des rayons principaux sont tracées dans la figure 6.14.

La membrane oscille autour de sa forme d'équilibre avec une fréquence de même ordre de grandeur entre les deux configurations de la figure 6.14. Similairement aux résultats de la figure 6.13, l'amortissement des oscillations est plus faible lorsque le fluide le plus visqueux se situe à l'intérieur de la membrane. Ces évolutions des rayons principaux sont en excellent accord avec les résultats de Tan *et al.* [10]. Ces derniers sont représentés

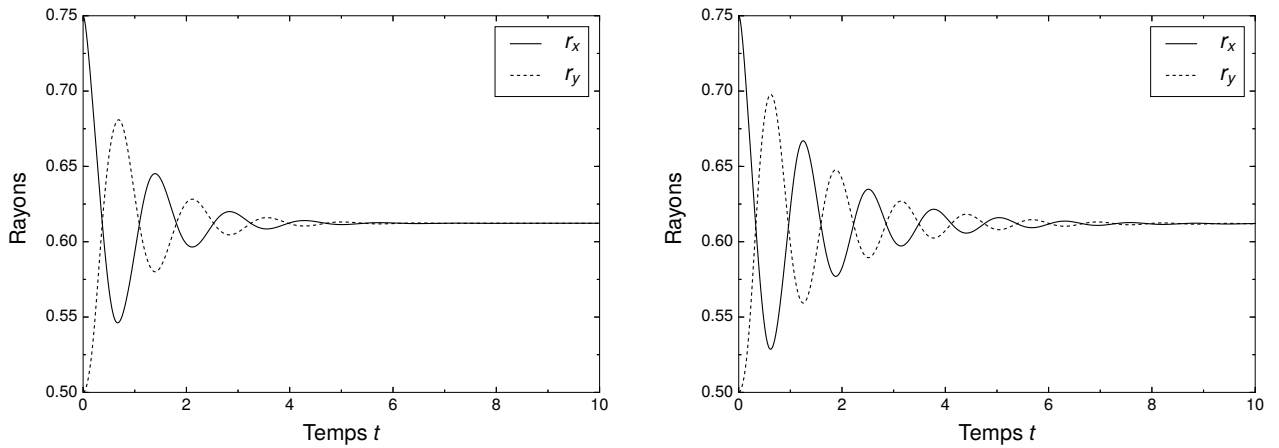


FIGURE 6.14 – Evolutions des rayons avec $\mu^+ = 0.1$ et $\mu^- = 0.01$ à gauche et $\mu^+ = 0.01$ et $\mu^- = 0.1$ à droite.

dans les figures 6.26 et 6.27 de l'annexe 6.A et décrivent les mêmes comportements de la membrane que ceux obtenus par le calcul dans les figures 6.13 et 6.14.

La prise en compte des sauts des dérivées de vitesse est illustrée sur un exemple dans la figure 6.15. En se plaçant le long de l'axe $y = 0.3$, on trace les composantes de la vitesse u et v dans les directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y respectivement, à $t = 1$ avec $\mu^+ = 0.1$ et $\mu^- = 1$.

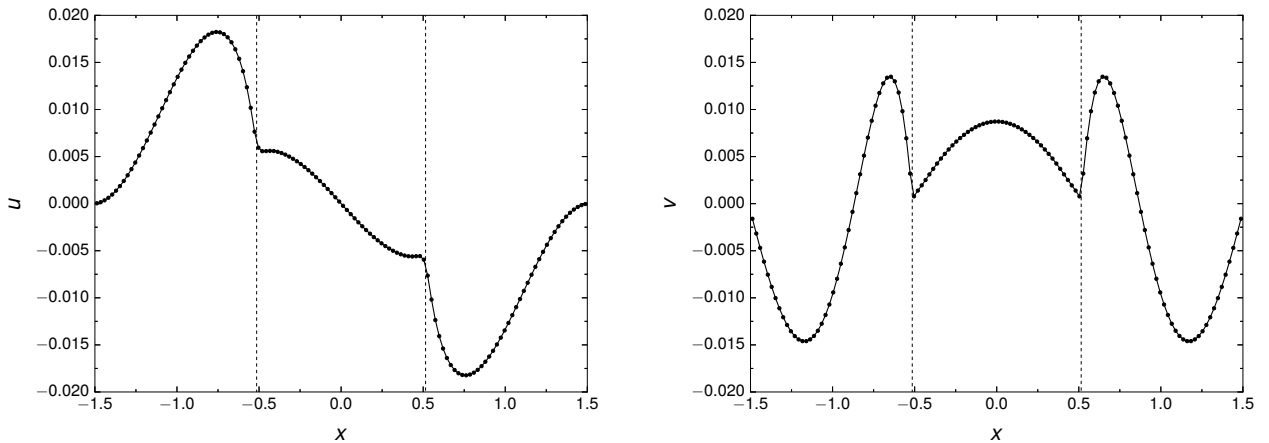


FIGURE 6.15 – Composantes de la vitesse $\mathbf{u} = (u, v)$ le long de l'axe $y = 0.3$ avec $\mu^+ = 0.1$ et $\mu^- = 1$ à $t = 1$.

On voit clairement, dans ces deux cas, les sauts de la dérivée de la vitesse lorsque la membrane est traversée (représentée ici avec les lignes verticales en pointillés). La vitesse est continue à la membrane mais la pente présente une discontinuité importante. On retrouve une vitesse nulle aux bords du domaine de calcul due aux conditions aux limites et en son centre par symétrie de la composante selon \mathbf{e}_x . On remarque que les maximums et minimums de vitesse se trouvent dans le fluide situé à l'extérieur de la membrane dont la viscosité est la plus faible. Ces ruptures de pente permettent de valider la méthodologie présentée dans la section 5.4.3.1 pour prendre en compte la composante tangentielle de la force élastique de façon discontinue.

6.3.2 Saut de masse volumique à la membrane

Dans cette section, les fluides considérés ont la même viscosité dynamique $\mu^+ = \mu^- = 0.1$ mais des masses volumiques différentes. Dans un premier temps, nous considérons des masses volumiques faibles de 1 et 10 de chaque côté de la membrane. Les évolutions temporelles des rayons principaux de la membrane sont illustrées dans la figure 6.16.

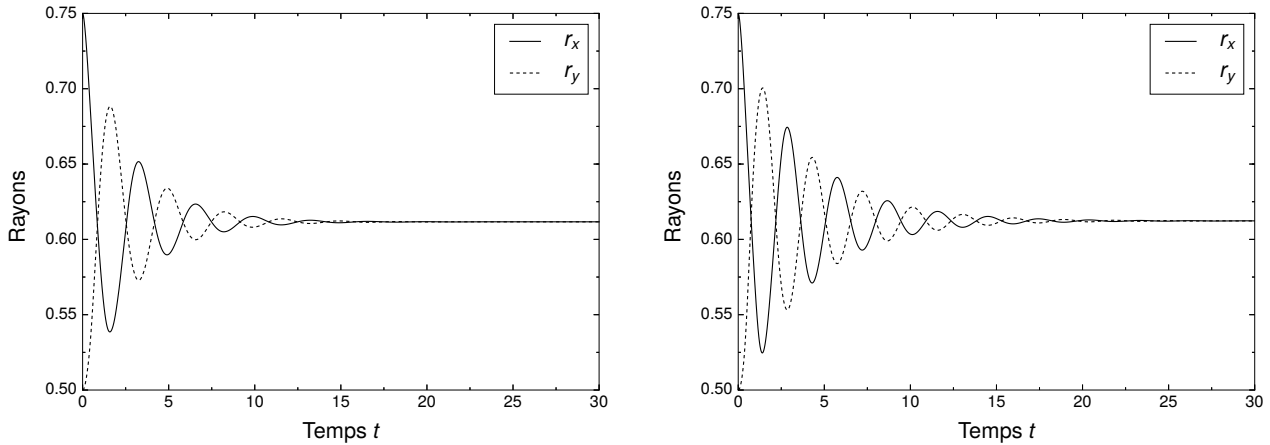


FIGURE 6.16 – Evolutions des rayons avec $\rho^+ = 10$ et $\rho^- = 1$ à gauche et $\rho^+ = 1$ et $\rho^- = 10$ à droite.

Plus la masse volumique est importante, plus le temps caractéristique d'une oscillation de la membrane augmente. Comme montré sur la figure 6.6, les simulations comprenant une masse volumique $\rho = 10$ sont exécutées jusqu'à $t = 30$. Pour les deux configurations de la figure 6.16, la membrane oscille autour de sa position d'équilibre correspondant toujours à des rayons principaux égaux à r_e . On observe que les oscillations sont plus nombreuses et moins amorties dans le cas où le fluide le plus dense se trouve à l'intérieur de la membrane. La fréquence d'oscillation conserve le même ordre de grandeur dans ces deux cas.

Les masses volumiques sont maintenant multipliées par 10 des deux côtés de la membrane et les rayons principaux de la membrane sont représentés sur la figure 6.17 en fonction du temps.

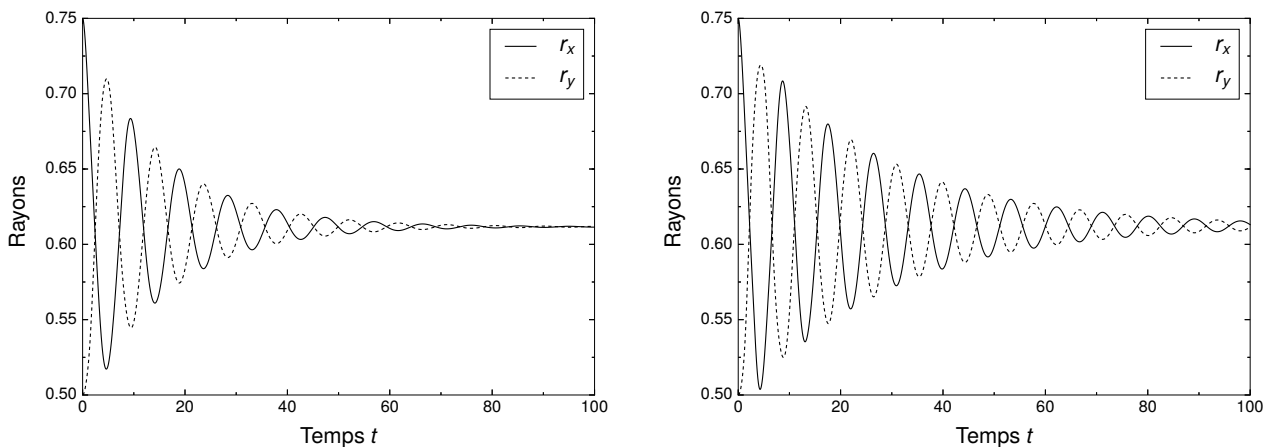


FIGURE 6.17 – Evolutions des rayons avec $\rho^+ = 100$ et $\rho^- = 10$ à gauche et $\rho^+ = 10$ et $\rho^- = 100$ à droite.

Les simulations sont effectuées jusqu'à $t = 100$ car la fréquence d'oscillation diminue avec la masse volumique. Néanmoins, celle-ci reste équivalente entre les deux configurations de la figure 6.17. De la même façon,

l'amortissement est moins important lorsque le fluide le plus dense est à l'intérieur de la membrane. On remarque également que les courbes obtenues avec $\rho^+ = 10$ et $\rho^- = 100$ sont très proches des résultats avec $\rho = 100$ dans tout le domaine (cf. figure 6.6 à droite).

Dans cette partie, les sauts des dérivées de la vitesse sont directement liés à la composante tangentielle de la force élastique car la viscosité est constante dans tout le domaine d'étude. La figure 6.18 montre l'évolution des deux composantes de la vitesse le long de l'axe $y = 0.3$ pour une configuration avec saut de masse volumique $\rho^+ = 10$ et $\rho^- = 1$.

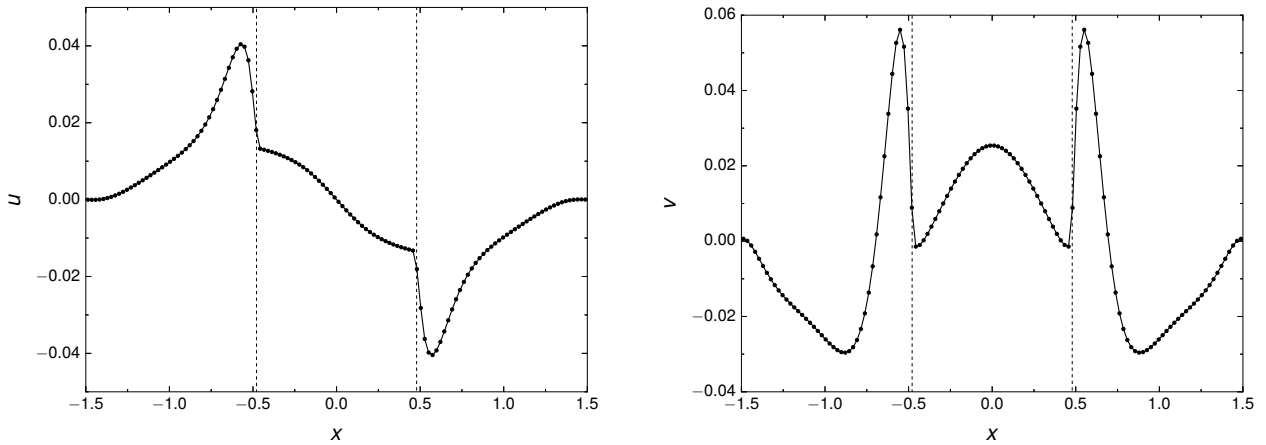


FIGURE 6.18 – Composantes de la vitesse $\mathbf{u} = (u, v)$ le long de l'axe $y = 0.3$ avec $\rho^+ = 10$ et $\rho^- = 1$ à $t = 1.5$.

On observe très clairement pour ces deux composantes le saut de dérivée de la vitesse au niveau de la membrane, représentée par les lignes verticales pointillées. La vitesse est continue à l'interface mais de très fortes ruptures de pente y sont visibles. On retrouve, comme pour les résultats à viscosité variable de la figure 6.15, une vitesse nulle aux bords du domaine ainsi qu'au milieu pour la composante selon \mathbf{e}_x . Les extremums de vitesse se situent dans le fluide le plus dense situé ici à l'extérieur de la membrane. Là aussi, les sauts de dérivées de la vitesse sont bien pris en compte de façon discontinue par le code de calcul.

6.4 Capsule immergée dans un écoulement cisailant

6.4.1 Description de l'étude

Dans cette section, l'étude d'une capsule tridimensionnelle constituée d'un matériau hyperélastique immergée dans un écoulement cisailant est effectuée. Cette dernière va se déformer jusqu'à atteindre un équilibre entre les efforts visqueux exercés par le fluide et les forces élastiques internes à la membrane. Ce cas-test a été introduit par Pozrikidis [8] et a été utilisé pour valider différentes méthodes de frontières immergées [4, 9]. L'objectif de ce cas-test est de valider les méthodes numériques d'interaction fluide-membrane dans un cas tridimensionnel avec une loi de comportement de matériaux non-linéaire.

La membrane est initialement une sphère de rayon a centrée dans le domaine de calcul, un cube de côté $4a$. La membrane est immergée dans un même fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique μ . Ce dernier est entraîné grâce aux conditions aux limites en vitesse sur les parois supérieure $y = 2a$ et inférieure $y = -2a$ telles que $\mathbf{u} = (ky, 0, 0)$ avec k le taux de cisaillement. Les quatre autres frontières du domaine de calcul respectent des conditions aux limites de type périodique. La membrane est composée d'un matériau hyperélastique suivant le modèle néo-Hookéen avec un module élastique surfacique E_s . La configuration initiale de la membrane correspond à sa configuration de référence non contrainte et est illustrée par la figure 6.19. Par

conséquent, les tenseurs des dilatations sont définis à l'instant initial égaux au tenseur de projection dans le plan tangent à la membrane,

$$\bar{\mathbf{B}}_s(t=0) = \bar{\mathbf{G}}_s(t=0) = \bar{\mathbf{P}}(t=0). \quad (6.4.1)$$

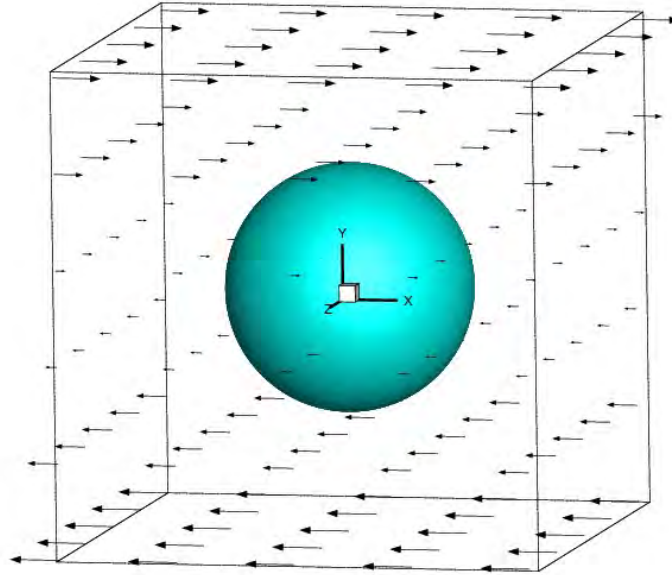


FIGURE 6.19 – Capsule immergée dans un écoulement cisailant à l'état initial.

La membrane soumise à l'écoulement cisailant va plus ou moins se déformer en fonction de sa raideur élastique et de la viscosité du fluide. Le paramètre adimensionnel G est défini pour quantifier le rapport entre les effets visqueux dus au fluide et les effets élastiques de la membrane tel que

$$G = \frac{\mu k a}{E_s}. \quad (6.4.2)$$

Cinq valeurs du paramètre G sont considérées dans cette étude : $G \in [0.0125, 0.025, 0.05, 0.1, 0.2]$. Dans les cas où G est faible, la membrane se déforme peu car le matériau est très raide et le fluide peu visqueux. Pour G grand, la membrane se déforme significativement car le frottement visqueux est important et le module élastique de la membrane est faible. La déformation de la membrane est quantifiée par le paramètre de déformation de Taylor D_{xy} tel que

$$D_{xy} = \frac{L - l}{L + l}, \quad (6.4.3)$$

avec L et l les rayons maximum et minimum de l'ellipse définis par l'intersection de la membrane avec le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. L'équation de cette ellipse est calculée par la méthode des moindres carrés non-linéaire avec les points d'intersection de la membrane avec le maillage cartésien.

6.4.2 Instabilité de flambage

Pour ce cas-test, la méthode Ghost Fluid, permettant de prendre en compte les conditions de saut à la membrane de façon discontinue, ne peut pas être utilisée. En effet, durant la déformation de la capsule, certaines zones de la membrane présentent des contraintes de compression. Le modèle de membrane introduit dans la section 5.2 ne permet pas de prendre en compte ces contraintes négatives et entraîne la formation d'une instabilité

de flambage. Cette dernière se manifeste par la formation de plis de la membrane, notamment dans la zone équatoriale, comme représentée sur la figure 6.20.

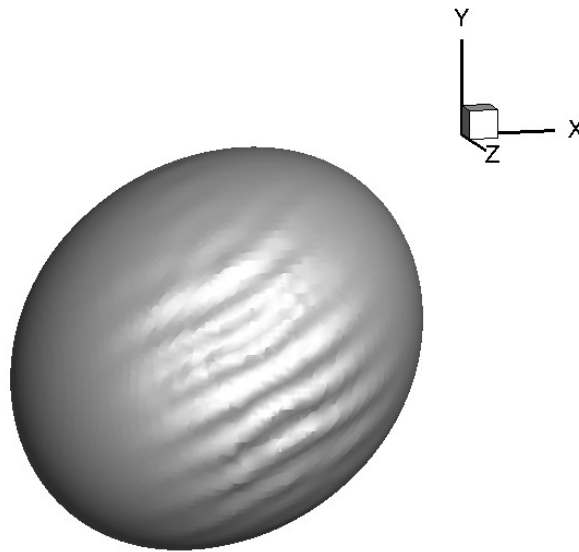


FIGURE 6.20 – Plis de la membrane dus à l’instabilité de flambage pour $G = 0.0125$ et $kt > 0.8$.

Ce phénomène a été observé lors de nombreuses études portant sur ce cas-test [2, 5, 9]. Lac *et al.* [5] ont montré que lorsqu’au moins une des deux contraintes principales de la membrane devient négative, une instabilité de flambage peut apparaître. En l’absence de résistance à la flexion, la zone de la membrane en compression peut fléchir localement et former des plis à sa surface. Ces derniers peuvent interagir entre eux, se chevaucher et finalement entraîner un arrêt prématuré du calcul.

Les méthodes discontinues de type Ghost Fluid sont basées sur l’équilibre local aux nœuds du maillage traversés par la membrane. Barthes-Biesel [2] a montré que ces méthodes deviennent instables lorsqu’une zone de la membrane présente des contraintes de compression. L’utilisation de méthodes lissées à l’interface permet d’introduire de la dissipation numérique qui stabilise le calcul et permet au solveur de tolérer les contraintes négatives localement. Néanmoins, si celles-ci persistent pendant une période trop importante, l’instabilité de flambage apparaîtra au temps long.

Ceci justifie pourquoi les simulations, pour ce cas-test, sont réalisées avec la méthode lissée CSF présentée dans la section 5.3.2. Les résultats numériques pour les faibles valeurs de G sont limités à des temps $kt < 2$ car l’instabilité de flambage apparaît au temps long malgré la dissipation numérique des méthodes utilisées.

6.4.3 Déformation de la membrane avec le temps

A partir de sa forme initiale sphérique, la membrane se déforme dans la direction de l’écoulement avec une amplitude différente en fonction du paramètre G défini dans la section 6.4.1. La membrane atteint finalement une forme stationnaire correspondant à l’équilibre entre les forces hydrodynamiques et élastiques. La figure 6.21 montre les formes de la membrane à l’état initial et aux états d’équilibre pour les deux valeurs de G les plus faibles et à $kt = 2$ pour les trois plus importantes.

On observe que la déformation augmente avec G . Pour $G = 0.0125$ et $G = 0.025$, la déformation de la membrane est faible, sa forme d’équilibre reste proche de la forme sphérique initiale. Ce comportement élastique peut encore être approximé par la loi linéaire de Hooke. Pour les valeurs de G supérieures, la membrane s’étire fortement dans la direction cisailée et l’hypothèse de déformation linéaire ne peut pas être considérée. Le calcul

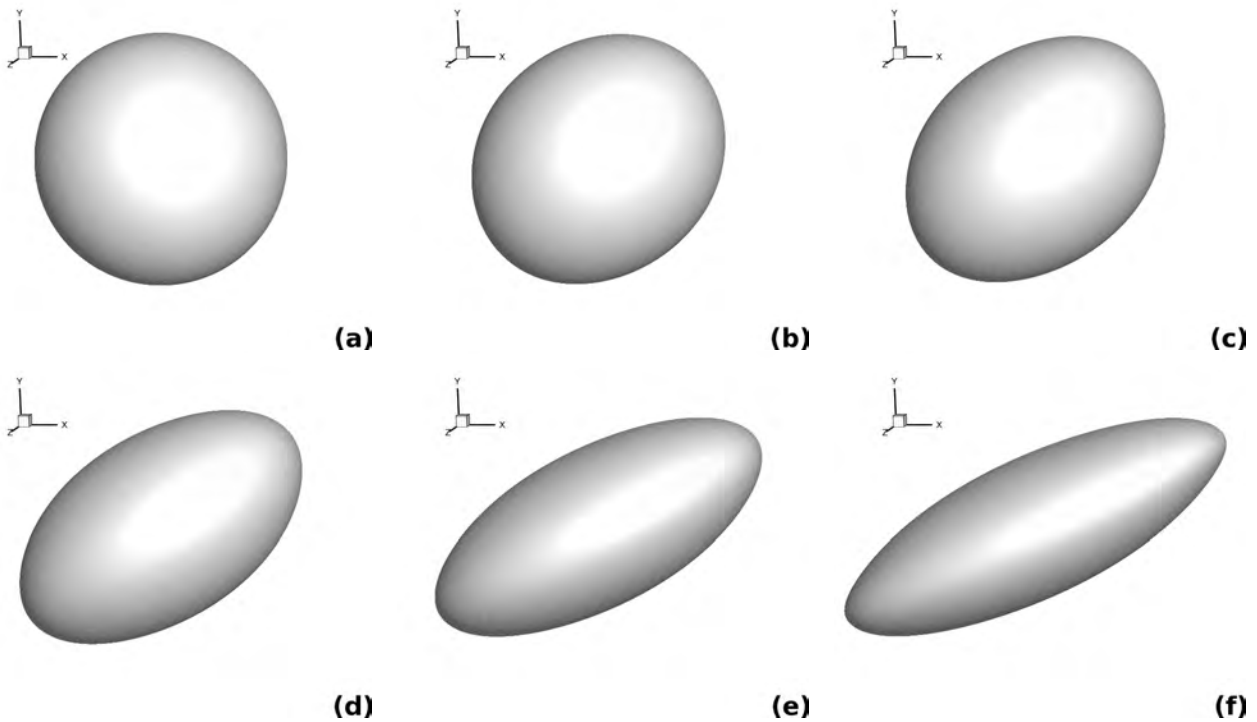


FIGURE 6.21 – Forme de la membrane a) à l'état initial et aux états d'équilibre ou finaux pour b) $G = 0.0125$, c) $G = 0.025$, d) $G = 0.05$, e) $G = 0.1$ et f) $G = 0.2$.

a été effectué sur trois maillages différents pour évaluer la convergence : 32, 64 et 128 mailles dans chaque direction. Les valeurs du paramètre de déformation de Taylor D_{xy} sont présentées sur la figure 6.22 pour toutes les valeurs de G et les trois maillages.

Tout d'abord, on remarque que les valeurs du paramètre de Taylor sont très proches pour les trois maillages considérés. La variation du paramètre est pratiquement indiscernable entre les deux maillages les plus fins quelle que soit la valeur de G . Ceci garantit la bonne convergence en maillage des simulations.

Pour $G = 0.0125$ et $G = 0.025$, la déformation reste faible et peut être approchée par la théorie linéaire de Hooke. Barthès-Biesel et Rallison [3] ont calculé la déformation théorique d'une membrane sphérique respectant la loi linéaire de Hooke pour ces deux configurations. Les valeurs du paramètre de Taylor obtenues analytiquement sont représentées sur la figure 6.22 avec les marqueurs triangulaires pointes en haut. Avec $G = 0.0125$, les simulations sont faites sur un temps court à cause de l'instabilité de flambage. A $kt = 0.8$, on obtient $D_{xy} = 0.086$ pour une valeur théorique avec la loi linéaire de Hooke de $D_{xy} = 0.078$. Avec $G = 0.025$, la valeur du paramètre de Taylor est de $D_{xy} = 0.164$ dans nos simulations contre $D_{xy} = 0.156$ théoriquement [3].

Pour les trois plus grandes valeurs de G , on ne peut pas comparer aux résultats provenant des lois élastiques linéaires car la déformation est trop importante et la non-linéarité du matériau ne peut plus être négligée. Nos résultats sont comparés avec ceux d'études numériques utilisant la méthode de frontière immergée IBM ou la méthode des éléments finis de frontière (Boundary Element Method BEM) [4, 8, 9]. Les paramètres de Taylor obtenus par Pozrikidis [8] sont représentés sur la figure 6.22 avec les marqueurs triangulaires pointes en bas. On retrouve des paramètres de déformation proche des résultats de la littérature avec une très bonne convergence en maillage. Néanmoins, pour chacune des cinq valeurs de G , on observe une légère surestimation du paramètre de déformation de Taylor.

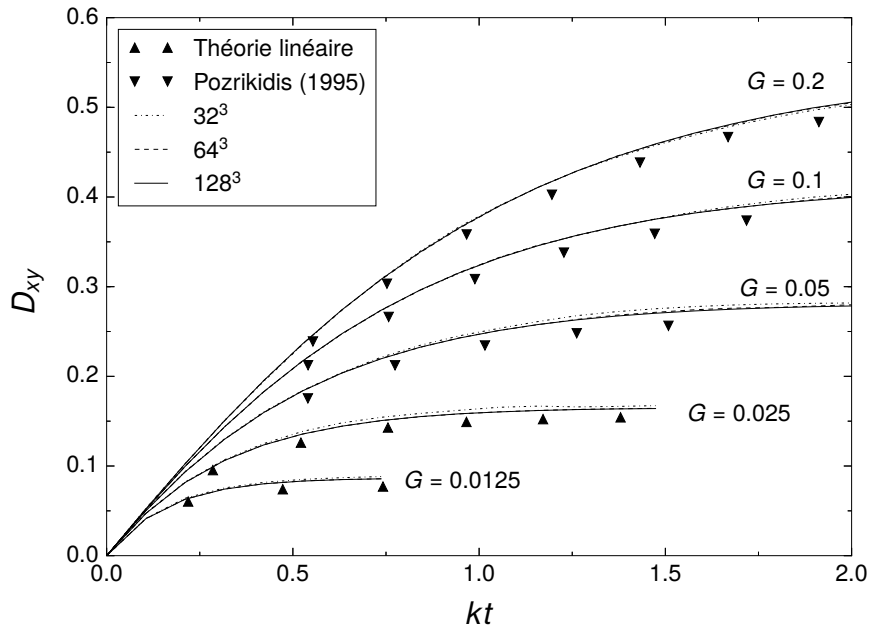


FIGURE 6.22 – Evolution temporelle du paramètre de déformation de Taylor pour les cinq valeurs de G et les trois maillages : 32^3 , 64^3 et 128^3 .

6.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, le modèle d'interaction fluides-membrane a été validé sur différents cas-tests de la littérature. La première étude porte sur l'évaluation des effets de l'algorithme d'extension qui, à partir d'un champ scalaire initial, étend la valeur à l'interface dans tout le domaine de calcul. On montre également que les erreurs d'interpolation à l'interface sont considérablement réduites avec la résolution en sous maille. Dans un second temps, le cas-test de la membrane étirée introduit initialement par Tu et Peskin [11] et validée en considérant son immersion dans un même fluide et dans deux fluides aux propriétés physiques différentes par comparaison aux résultats de Tan *et al.* [10]. Finalement, l'extension à un problème tridimensionnel avec un comportement hyperélastique de la membrane est présentée avec l'étude de la capsule immergée dans un écoulement cisailant dont la déformation est conforme aux résultats de la littérature.

6.A Annexe : Résultats de référence de Tan *et al.* (J. Comput. Phys., 2008)

Cette annexe regroupe les résultats du cas-test de la membrane étirée obtenus par Tan *et al.* [10]. Les trois premières figures de cette annexe correspondent au cas où le même fluide est présent des deux côtés de la membrane (*cf.* section 6.2). La figure 6.23 montre les évolutions temporelles des rayons principaux pour deux valeurs de viscosité différentes et une masse volumique unitaire. Puis, les figures 6.24 et 6.25 illustrent les champs de pression et de vitesse respectivement à trois instants pour la configuration où $\mu = 0.1$ et $\rho = 1$. Finalement, les figures 6.26 et 6.27 portent sur l'évolution temporelle des rayons principaux dans le cas où les fluides des deux côtés de la membrane ont une viscosité différente (*cf.* section 6.3.1). La figure 6.26 correspond au saut de viscosité avec $\mu^\pm = 1$ et $\mu^\mp = 0.1$ et la figure 6.27 trace l'évolution pour des viscosités 10 fois inférieures : $\mu^\pm = 0.1$ et $\mu^\mp = 0.01$.

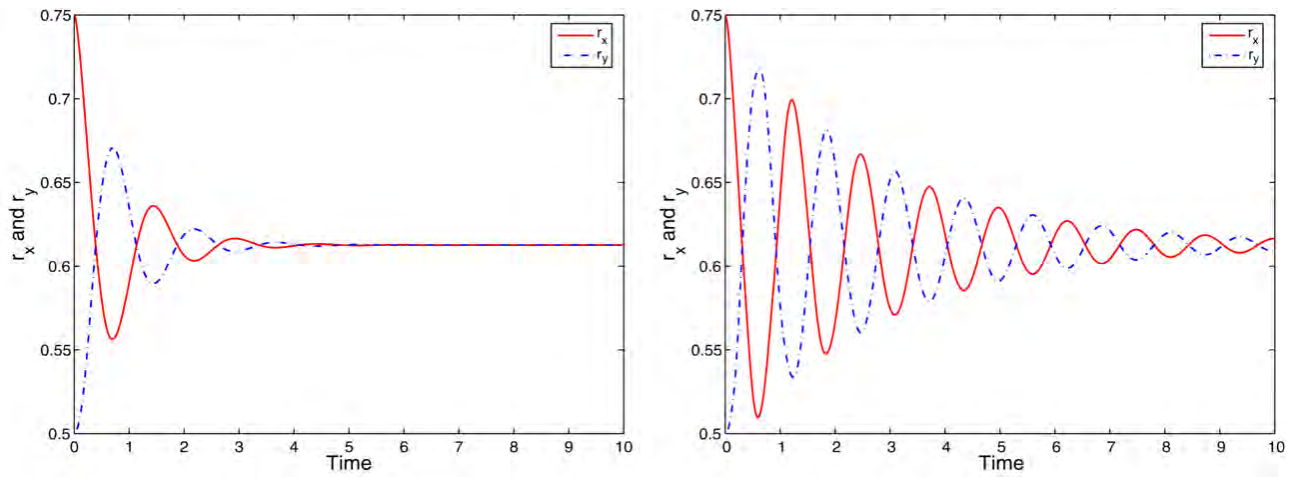


FIGURE 6.23 – Evolutions temporelles des rayons principaux obtenues par Tan *et al.* [10] avec $\mu = 0.1$ à gauche et $\mu = 0.01$ à droite.

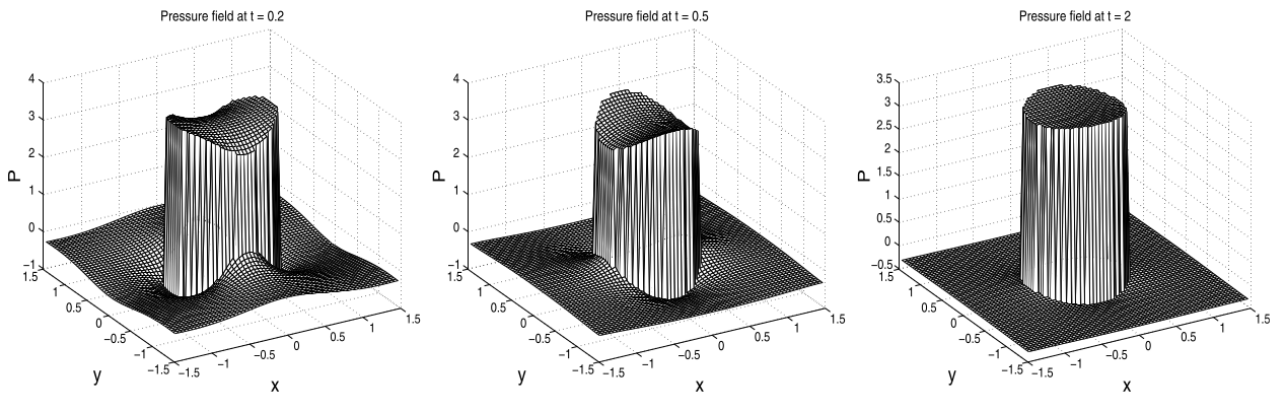


FIGURE 6.24 – Distributions de pression obtenus par Tan *et al.* [10] avec $\mu = 0.1$ et $\rho = 1$ à $t = 0.2$, $t = 0.5$ et $t = 2$ de gauche à droite.

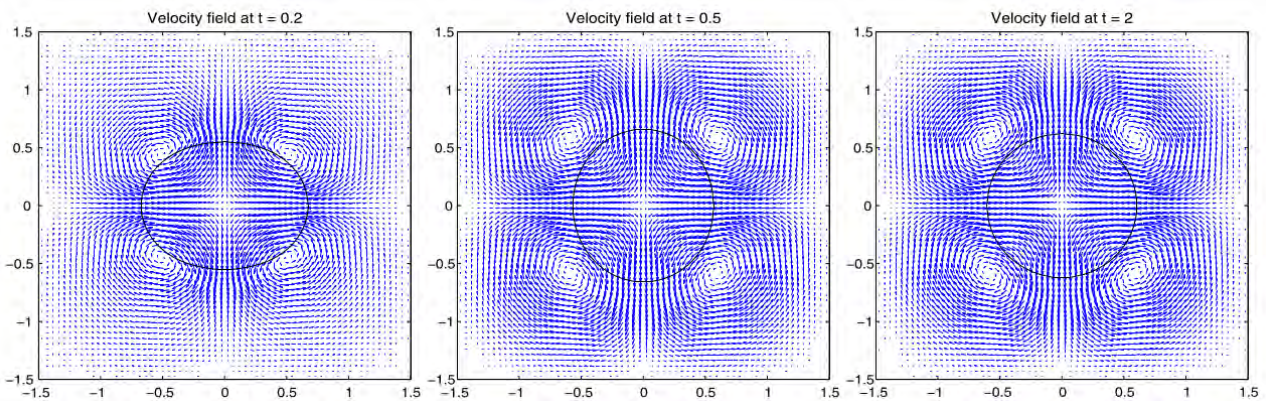


FIGURE 6.25 – Champs de vitesse obtenus par Tan *et al.* [10] avec $\mu = 0.1$ et $\rho = 1$ à $t = 0.2$, $t = 0.5$ et $t = 2$ de gauche à droite.

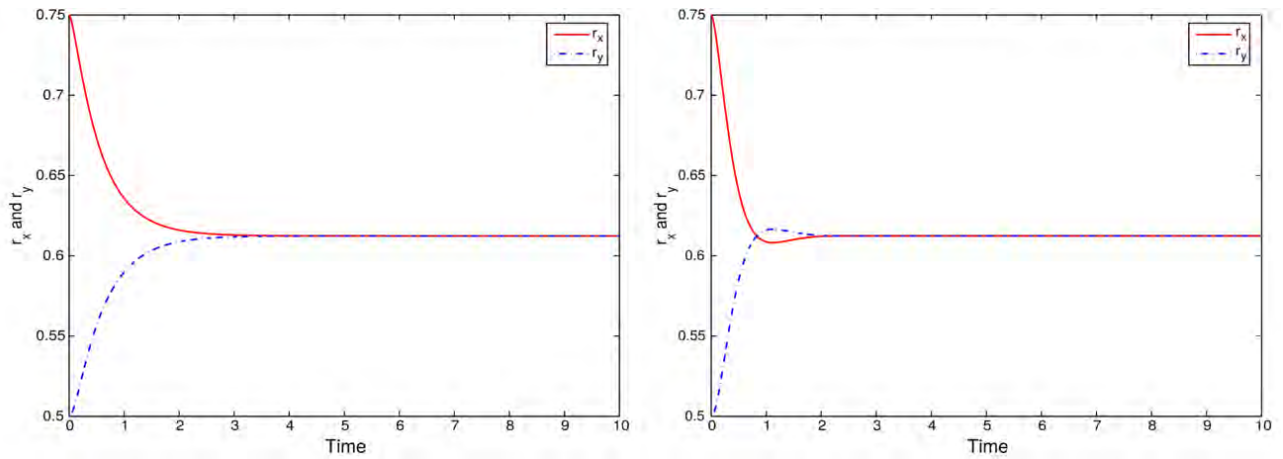


FIGURE 6.26 – Evolutions temporelles des rayons principaux obtenues par Tan *et al.* [10] avec $\mu^+ = 1$ et $\mu^- = 0.1$ à gauche et $\mu^+ = 0.1$ et $\mu^- = 1$ à droite.

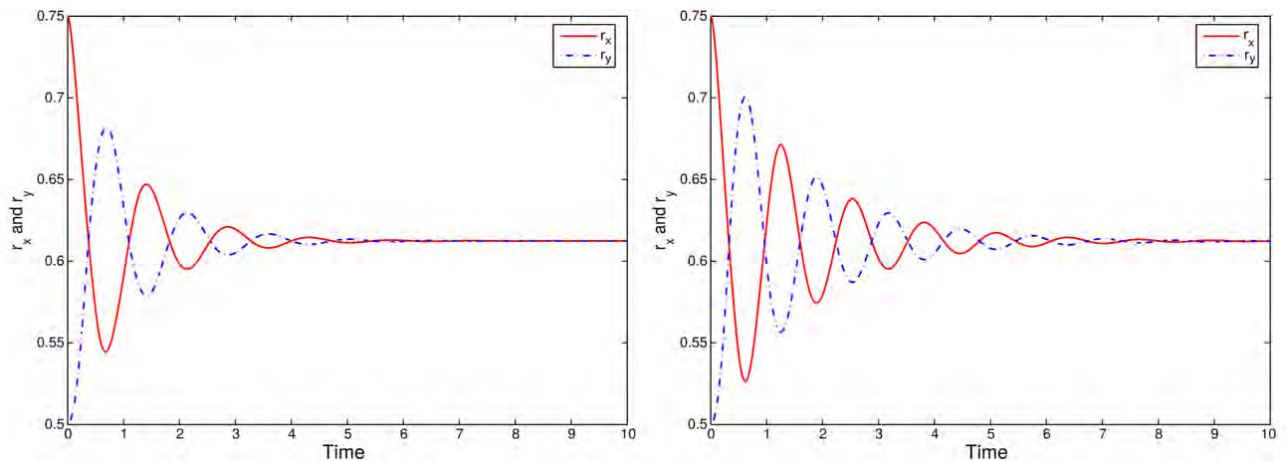


FIGURE 6.27 – Evolutions temporelles des rayons principaux obtenues par Tan *et al.* [10] avec $\mu^+ = 0.1$ et $\mu^- = 0.01$ à gauche et $\mu^+ = 0.01$ et $\mu^- = 0.1$ à droite.

La comparaison de ces résultats de la littérature avec les graphes 6.5, 6.7, 6.8, 6.13 et 6.14 obtenus avec le code de calcul DIVA montre une très bonne correspondance et participe à la validation des modèles et méthodes numériques présentés dans le chapitre 5 pour la description des interactions fluides-membrane.

Bibliographie

- [1] ASLAM, T. A partial differential equation approach to multidimensional extrapolation. *J. Comput. Phys.* 193 (2004), 349–355.
- [2] BARTHES-BIESEL, D. Capsule motion in flow : Deformation and membrane buckling. *C. R. Physique* 10 (2009), 764–774.
- [3] BARTHES-BIESEL, D., ET RALLISON, J. M. The time-dependent deformation of a capsule freely suspended in a linear shear flow. *J. Fluid Mech.* 113 (1981), 251–267.
- [4] EGGLETON, C. D., ET POPEL, A. S. Large deformation of red blood cell ghost in a simple shear flow. *Phys. Fluids* 10, 8 (August 1998), 1834–1845.

- [5] LAC, L., BARTHES-BIESEL, D., PELEKASIS, N. A., ET TSAMOPOULOS, J. Spherical capsules in three-dimensional unbounded stokes flows : effect of the membrane constitutive law and onset of buckling. *J. Fluid Mech.* 516 (2004), 303–334.
- [6] LEE, L., ET LEVEQUE, R. J. An immersed interface method for incompressible navier-stokes equations. *J. Sci. Comput.* 25, 3 (2003), 832–856.
- [7] LEVEQUE, R. J., ET LI, Z. Immersed interface methods for stokes flow with elastic boundaries or surface tension. *J. Sci. Comput.* 18, 3 (May 1997), 709–735.
- [8] POZRIKIDIS, C. Finite deformation of liquid capsules enclosed by elastic membranes in simple shear flow. *J. Fluid Mech.* 297 (1995), 123–152.
- [9] RAMANUJAN, S., ET POZRIKIDIS, C. Deformation of liquid capsule enclosed by elastic membranes in simple shear flow : large deformation and the effect of fluid viscosities. *J. Fluid Mech.* 361 (1998), 117–143.
- [10] TAN, Z., LE, D. V., LI, Z., LIM, K. M., ET KHOO, B. C. An immersed interface method for solving incompressible viscous flows with piecewise constant viscosity accross a moving elastic membrane. *J. Comput. Phys.* 227 (2008), 9955–9983.
- [11] TU, C., ET PESKIN, C. S. Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries : a comparison of three methods. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 13, 6 (November 1992), 1361–1376.

Conclusion et perspectives

Cette étude menée en collaboration avec le CNES et Airbus Defence & Space a porté, dans un premier temps, sur l'étude du ballonnement dans un réservoir de satellite spatial sans dispositif d'expulsion de liquide et, dans un second temps, sur la modélisation de l'interaction entre des fluides et une membrane souple hyperélastique. L'état de l'art des modèles existants pour la prédiction des phénomènes à l'intérieur d'un réservoir en micro-gravité a montré que peu d'études portent sur les manœuvres à faibles nombres de Bond à cause des effets non-linéaires de la tension de surface. Lorsque l'on considère un réservoir à membrane, l'interaction entre cette dernière et les fluides complexifie encore davantage la modélisation analytique. Les expérimentations sont limitées par la difficulté de reproduire un environnement micro-gravitaire pour un temps supérieur à la minute. La simulation numérique semble alors la meilleure solution pour quantifier les effets du ballonnement d'ergol mais ses résultats nécessitent tout de même une comparaison à des données expérimentales pour être validés.

La simulation du ballonnement d'ergol sans dispositif d'expulsion du liquide repose sur les modèles numériques développés et implémentés par Mathieu Lepilliez durant sa thèse soutenue en 2015. A la suite de ses travaux, une étude paramétrique complète a été effectuée sur une manœuvre de rotation d'un satellite. Les paramètres de l'étude sont le taux de remplissage du réservoir et deux nombres de Bond, définis respectivement par rapport à la vitesse angulaire et à l'accélération angulaire. L'étude des trajectoires du centre de masse a permis de mettre en avant deux régimes d'écoulement pour lesquels l'accélération angulaire a une influence sur le comportement des fluides ou n'en a pas. Les oscillations de la bulle de gaz lors de la phase de rotation constante sont approchées par analogie avec un système masse-ressort, ce qui nous permet de déterminer les fréquences d'oscillation et les taux d'amortissement en fonction des paramètres d'études. La position du centre de masse ainsi que la force exercée par les fluides sur la paroi du réservoir ont été déduites des simulations et leurs évolutions par rapport aux paramètres d'études ont été approchées par des lois semi-empiriques. Il en est de même pour la forme de la bulle de gaz dont l'épaisseur et le diamètre évoluent de façon logarithmique avec le nombre de Bond centrifuge. Cette étude montre que le code de calcul DIVA est notamment capable d'estimer les fréquences de ballonnement d'ergol et de déduire des lois semi-empiriques sur les forces générées sur la paroi. Ces informations peuvent alors servir de données d'entrée aux lois de commande du Système de Contrôle d'Attitude et d'Orbite (SCAO) pour diminuer les perturbations de ballonnement. Les données engrangées lors de cette étude paramétrique ont notamment été transmises à une équipe en collaboration entre le CNES et l'ONERA pour évaluer des modèles simplifiés permettant de limiter les effets du ballonnement directement par l'ordinateur de bord du satellite.

La validation du code de calcul a été opérée grâce aux données de l'expérience FLUIDICS menée dans la Station Spatiale Internationale (ISS) en 2017 dans le cadre de la mission Proxima du CNES. Ces données inédites sur les efforts générés par les fluides contenus dans un réservoir sphérique soumis à une manœuvre de rotation en micro-gravité ont permis d'évaluer la pertinence de nos résultats numériques. Malgré le niveau de bruit important des signaux provenant des capteurs, les manœuvres correspondant aux nombres de Bond les plus élevés ont permis de comparer les forces et moments exercés sur la paroi du réservoir. Lors des phases de rotation à vitesse angulaire constante, les valeurs moyennes de la force centrifuge calculée avec la simulation numérique correspondent avec une erreur inférieure à 3% aux mesures du capteur de force pour le réservoir rempli à 50%

de liquide. L'évolution temporelle du moment selon l'axe de rotation est bien retrouvée numériquement avec les pics de valeurs correspondant aux phases d'accélération et de décélération angulaire et les oscillations autour de zéro durant la phase de rotation constante qui correspondent au ballonnement des fluides. En appliquant une transformée de Fourier aux signaux de moments, les fréquences de ballonnement sont extraites et correspondent elles aussi aux valeurs prédites par la simulation. Pour de plus faibles nombres de Bond, le bruit mesuré par les capteurs d'effort est trop important pour que les signaux soient exploitables mais les vidéos enregistrées à bord de l'ISS permettent tout de même de déterminer les fréquences de ballonnement. En définitive, les fréquences calculées correspondent aux fréquences mesurées avec une erreur de 4% maximum. Cette étude comparative montre que le code de calcul DIVA prédit un comportement similaire aux mesures en micro-gravité et permet la validation des modèles le composant. Cette validation du code de calcul DIVA sur les problématiques de ballonnement a entraîné son installation chez Airbus Defence & Space en juin 2018. Le code est maintenant intégré à leurs moyens de calcul et est utilisé pour leurs études de ballonnement en interne. La confiance dans les résultats de ces simulations permettra d'obtenir des scénarii opérationnels plus optimisés limitant le temps de tranquillisation nécessaire à la stabilisation des fluides.

L'état de l'art sur le ballonnement dans les réservoirs à membrane montre qu'il n'existe pas aujourd'hui de modèle simple et efficace pour appréhender l'interaction fluides-membrane hyperélastique. Les deux principales approches numériques consistent soit à utiliser deux codes de calcul, pour chaque phase fluide et solide, et de les synchroniser, soit de faire des hypothèses simplificatrices sur une phase et résoudre les équations régissant le comportement de l'autre. Dans le premier cas, la synchronisation entre les deux codes est complexe à mettre en place, le temps de calcul et les ressources nécessaires sont trop importants pour que cette approche soit utilisée dans l'industrie. Dans le second cas, les résultats numériques sont peu probants et montrent des différences significatives avec les données expérimentales mesurées en laboratoire avec la gravité. Dans le cadre de cette thèse, nous avons utilisé une approche monolithique avec un formalisme purement Eulérien inspirée de travaux de bio-ingénierie. La position de la membrane, supposée infiniment fine, est capturée avec la méthode level-set. Les déformations de la membrane sont calculées, à chaque itération temporelle, avec une équation de transport sur les composantes du tenseur de Cauchy-Green gauche et les lois de comportement hyperélastiques permettent d'en déduire le tenseur des contraintes. Finalement, le bilan des forces appliquées à la membrane permet de déduire les efforts exercés par la membrane sur les fluides l'environnant. Ces derniers sont, par la suite, intégrés aux équations de Navier-Stokes selon deux manières possibles : avec une méthode lissée pour laquelle la membrane est artificiellement épaissie sur plusieurs mailles de calcul ou avec une méthode discontinue inspirée de la méthode Ghost Fluid. Afin d'assurer la stabilité du calcul, un algorithme d'extension a été développé afin de supprimer les dérivées normales des variables propres à la membrane. Celui-ci utilise une résolution en sous maille pour extraire avec précision la valeur des champs scalaires à la position de la membrane et l'étendre dans tout le domaine de calcul.

Ces méthodes numériques ont été validées sur des cas-tests de la littérature. Dans un premier temps, l'algorithme d'extension de variable est évalué avec et sans la résolution en sous maille. On montre que dans les deux cas, l'algorithme élimine efficacement la composante normale de la dérivée d'un champ scalaire mais l'ordre de convergence est considérablement amélioré avec la résolution en sous maille. En effet, ce dernier vaut 1.5 en moyenne sans la résolution en sous maille et passe à 2 sur l'ensemble du domaine et à 3 proche de la membrane en l'implémentant. Le cas-test de la membrane étirée dans un ou plusieurs fluides permet de valider le modèle d'interaction sur un cas bidimensionnel élastique linéaire. En considérant le même fluide des deux côtés de la membrane, on retrouve les mêmes résultats que dans la littérature scientifique en comparant notamment l'évolution des rayons principaux de la membrane, les distributions de pression et de vitesse. En considérant maintenant que la viscosité présente un saut de valeur à l'interface, on retrouve également des résultats conformes à la littérature et l'on observe logiquement les sauts discontinus des dérivées de la vitesse à la membrane. Pour les cas où la masse volumique présente un saut à l'interface, l'absence de données de la littérature ne nous permet

pas de confronter nos résultats mais la diminution de la fréquence d'oscillation de la membrane et les sauts de dérivées de la vitesse observés sont conformes à la physique. Le cas-test de la capsule immergée dans un écoulement cisailant permet d'étendre la validation de notre modèle à un cas tridimensionnel où la membrane suit une loi de comportement néo-Hookéenne. L'évolution temporelle du paramètre de Taylor, quantifiant la déformation de la capsule, converge efficacement avec le maillage et est en accord avec les résultats de la littérature.

L'expérience FLUIDICS restera présente dans l'ISS encore quelques années et pourra être opérée par les différents astronautes se succédant dans la station. De nouveaux profils de vitesse angulaire seront testés en micro-gravité pour quantifier leurs effets sur le ballonnement. Parmi ceux-ci, des profils similaires à ceux du chapitre 4 seront exécutés avec de nouvelles valeurs des nombres de Bond. Des profils d'accélération plus complexes, de forme exponentielle par exemple, seront expérimentés ainsi que des excitations sinusoïdales pour mesurer la réponse des fluides à une sollicitation périodique.



FIGURE 7.1 – Photo du réservoir à membrane à gauche et schéma du réservoir avec baffle anti-ballonnement à droite.

Le modèle d'interaction fluides-membrane développé dans cette thèse ne permet pas encore de reproduire le ballonnement dans un réservoir à membrane. La condition de stabilité sur le nombre de Reynolds local, présentée dans la section 5.4.5, induit une très forte limitation du pas d'espace au niveau de la membrane. En considérant les propriétés physiques des fluides et des membranes utilisés dans l'industrie spatiale, le nombre de mailles nécessaire est beaucoup trop important pour effectuer une simulation dans un contexte industriel avec les capacités de calcul actuelles. Une solution possible est d'utiliser un maillage adaptatif : très fin au niveau de la membrane et plus grossier dans les domaines fluides. Néanmoins, le développement de ce type de méthode numérique prend du temps et est complexe à mettre en place et à paralléliser. Pour répondre à la problématique du réservoir à membrane, il faut également implémenter la gestion de la liaison entre la membrane souple et la paroi rigide du réservoir. Celle-ci pourrait consister à coupler le modèle fluides-membrane avec la méthode de frontière immergée utilisée dans la première partie de la thèse en imposant des conditions aux limites adéquates au niveau de la liaison. Notons ici que le contact entre plusieurs parties d'une même membrane entraîne leur coalescence par définition de la méthode level-set. L'état de l'art montre que la probabilité d'un contact inter-membrane augmente avec le diamètre de la membrane. Ainsi, la modélisation de réservoirs de grande dimension contraindra nécessairement au développement d'un algorithme prévenant la coalescence des lignes de niveaux de la fonction level-set. Finalement, l'absence de données sur les déformations d'une membrane en micro-gravité ne nous permet pas de conclure quant à la nécessité de considérer des modèles physiques supplémentaires. Certains auteurs de la littérature considèrent par exemple la rigidité en flexion de la membrane. Afin d'appréhender les

phénomènes physiques pertinents, un nouveau réservoir sphérique va être envoyé début décembre 2018 à bord de l'ISS pour être intégré à l'expérience FLUIDICS. Celui-ci contient une fine membrane hyperélastique d'une épaisseur de 0.2mm fixée à son diamètre, comme représentée sur la figure 7.1 à gauche. Ce nouveau réservoir va permettre d'obtenir des données inédites sur le ballonnement dans les réservoirs à membrane. Les résultats nous permettront de choisir les modèles à implémenter au sein du code de calcul pour pouvoir approcher plus fidèlement le comportement des fluides et de la membrane.

Airbus DS et le CNES profitent du dispositif expérimental FLUIDICS pour tester de nouvelles technologies de réservoir et de systèmes capillaires en micro-gravité. Parmi ceux-ci, un réservoir contenant une baffle anti-ballonnement sera envoyé en même temps que le réservoir à membrane à bord de l'ISS. Cette baffle prend la forme d'un anneau circulaire rigide inséré dans le réservoir, comme représentée par transparence sur la figure 7.1 à droite. Ce dispositif est utilisé afin d'atténuer le ballonnement en servant d'obstacle solide à l'intérieur du réservoir. L'expérimentation en micro-gravité permettra de connaître plus en détail l'effet d'une baffle sur l'amortissement des fluides lors d'une manœuvre et apportera des données originales permettant la confrontation des travaux théoriques et numériques sur le sujet.

Annexe

Cette annexe est constituée de l'article soumis à Journal of Computational Physics en 2018. Celui-ci reprend les travaux portant sur l'interaction fluides-membrane détaillés dans cette thèse dans les chapitres [5](#) et [6](#).

Contents lists available at [ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com)

Journal of Computational Physics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jcp

Fluids-membrane interaction with a full Eulerian approach based on the level-set method

Alexis Dalmon^{a,b,*}, Sébastien Tanguy^a^a*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse, Université de Toulouse, CNRS, 2 allée du Professeur Camille Soula, 31400 Toulouse, France*^b*Centre National d'Études Spatiales, 18 Avenue Edouard Belin, 31401 Toulouse Cedex 9, France*

ARTICLE INFO

Article history:

Received -

Received in final form -

Accepted -

Available online -

Communicated by -

ABSTRACT

A fully Eulerian approach to predict fluids-membrane behaviours is presented in this paper. Based on the numerical model proposed by Ii *et al.* (2012), we present a sharp methodology to account for the jump conditions due to hyperelastic membranes. The membrane is considered infinitely thin and is represented by the level set method. Its deformations are obtained from the transport of the components of the left Cauchy-Green tensor throughout time. Considering the linear or a hyperelastic material law, the surface stress tensor is computed and gives the force exerted by the membrane on the surrounding fluids. The membrane force is taken into account in the Navier-Stokes equations as jump conditions on the pressure and on the velocity derivatives by modifying the finite differences approximations near the membrane. To prevent stability issues, an extension algorithm has been developed to remove the normal derivatives of the scalar fields specific to the membrane. In particular, a subcell resolution at the interface of the extrapolated variable is proposed for increasing the accuracy of the extension algorithm. These improvements are validated by comparing our numerical results with benchmarks from the literature. Moreover, a new benchmark is proposed for fluids with both different viscosities and different densities to target applications where a gas and a liquid phase are separated by a membrane.

© 2018 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

The fluids-membrane interaction study of this paper is part of a global project on propellant sloshing in satellite tanks. The latter phenomenon happens during a satellite manoeuvre and can be a major disturbance of the stability. The tanks contain liquid propellant and gas to maintain a sufficient pressure within the tank. During a manoeuvre,

*Corresponding author.

e-mail: alexis.dalmon@imft.fr (Alexis Dalmon)

inertial forces lead to a motion of the fluids and thus of the centre of mass. This generates disturbing forces and torques on the whole structure which may deteriorate the quality of satellite imaging. Considering simple tanks, numerical methods have been developed in our home-made code DIVA (Dynamics of Interface for Vaporisation and Atomisation) to model propellant sloshing in micro-gravity conditions [8, 23]. A parametric study has been done on typical rotational manoeuvres exerted by satellites in space and has been validated by comparisons with data from the FLUIDICS (FLUID DynamICS in Space) experiment, performed in the International Space Station (ISS) [8, 29]. The work presented in this paper is a first step towards the extension of the sloshing study to diaphragm tanks for which a hyperelastic membrane separates the liquid propellant and the gas. The modelling of the interaction between the membrane and the fluids within the tank is crucial. It must be predicted accurately and thus numerical developments are required to do so.

The fluid-membrane interaction is a challenging problem to solve numerically. Peskin [37] developed the Immersed Boundary Method (IBM) to predict incompressible flows with moving elastic boundaries. These first applications were the modelling of blood flows in the heart [36] and has been extended to many biological problems cited in [38]. With this method, the Navier-Stokes equations are solved on a Cartesian mesh and the membrane is described by Lagrangian markers. The force exerted by the membrane is deduced from the position of the markers and is interpolated onto the Cartesian mesh using Dirac delta functions. The Navier-Stokes equations are then solved with the forcing term corresponding to the elastic contribution from the membrane. Finally, the predicted fluid velocity is used to update the location of the marker points defining the membrane. This methodology is repeated for each time step. The smoothed Dirac functions induce a numerical smearing of the membrane in the fluid grid which may affect the accuracy of the method.

The Immersed Interface Method (IIM) of Leveque and Li [24] replaces the interpolated forcing term due to the elastic membrane with sharp jump conditions. This method has been introduced for elliptic equations and extended to Stokes flows [25] and incompressible viscous flows [26]. The artificial smearing of the elastic force in the fluid grid generates spurious velocities at the membrane and a smoothing of the pressure field where a discontinuous jump must appear. With the IIM, the normal component of the elastic force is enforced through a jump condition on the pressure when solving the Poisson equation. The tangential component of the force induces jumps in the derivatives of the velocity across the membrane.

Full Eulerian approaches do not use Lagrangian particles to follow the membrane motion and to compute the elastic forces. Cottet and Maitre [7] use the level set method to follow the motion of an elastic membrane immersed in a fluid. Without the reinitialisation algorithm of the level set function [44], the variation of the level set gradient can be directly related to the membrane stretching. The authors use this property to enforce the elastic material law on the zero level set and to integrate the resulting force in the Cartesian mesh using delta functions. However, this method only gives the surface variation of the membrane and limits the complexity of the membrane model. Moreover, the membrane is still artificially thickened by the delta functions.

Another full Eulerian method consists in defining the components of the deformation tensor of the membrane as scalar variables in the whole computational domain [18]. This approach is based on the work of Sugiyama [43] which developed a full Eulerian fluid-structure interaction model working with hyperelastic solid bodies. The position of each phase, fluid and solid, is described by the volume-of-fluid function (VOF) [15] and only one set of governing equations is solved in the whole domain. In the fluid region, the stress tensor contains the pressure term and the viscous tensor, in the solid region, the stress tensor is deduced from the solid deformation and the hyperelastic material law. The left Cauchy-Green deformation tensor is updated throughout time thanks to a transport equation in the whole computational domain. This allows to follow the deformation of the hyperelastic solid in a Eulerian manner. Then, the solid stress tensor can be computed following the hyperelastic material law and enforced in the Cartesian mesh. Li *et al.* [18] extend this method to fluid-membrane interactions, which means that the solid region is reduced to a codimension-one subspace. Following the methodology of Barthes-Biesel and Rallison [3], the deformation tensor of the membrane is defined as a solid deformation tensor projected onto the tangent plane of the membrane. The normal component of the membrane deformation tensor ensures the incompressibility of the material. The membrane stresses are computed thanks to the deformation tensor and the hyperelastic material law and the resulting force is integrated in the Navier-Stokes equations with delta functions. Nevertheless, this method presents losses of accuracy due to the numerical dissipation of the smoothed Dirac function. Moreover, instability issues may appear over long time periods because the values of the deformation tensor far from the membrane may evolve chaotically with the fluid velocity and may influence the computation at the membrane.

In this paper, we propose to improve the full Eulerian method of Li *et al.* [18] by adding some aspects of the sharp

methodology of the IIM. Moreover, we extend this model to handle different fluids on each side of the membrane. In section 2, the modelling of two-phase flows and the membrane model are described. The numerical methods implemented in the code are explained in section 3. More particularly, the discretisation of the jump conditions from the Ghost Fluid Method [11, 27] is detailed. Furthermore, an extension algorithm based on a subcell resolution has been developed to reduce the numerical instability by removing the spurious normal derivatives. The validation of the methodology is done in section 4 with benchmarks from the literature: the stretched membrane separating the same or different fluids and the capsule immersed in a shear flow. Finally, the paper is concluded by some remarks and perspectives in section 5.

2. Eulerian fluid membrane model

2.1. Two-phase flow model

We consider a domain Ω with a boundary $\partial\Omega$ which contains two different fluids defined by Ω^+ and Ω^- such as $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$. The interface between the two fluids regions is denoted Γ and its outward normal vector is \mathbf{n} . Each fluid is incompressible and Newtonian and follows the Navier-Stokes equations.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}), \quad (2)$$

with $\mathbf{u} = (u, v, w)$ the velocity field, t the time, ρ the fluid density, μ the fluid viscosity, p the pressure and $\bar{\bar{\mathbf{D}}}$ the rate of deformation tensor defined as

$$\bar{\bar{\mathbf{D}}} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}. \quad (3)$$

Considering the entire domain Ω , special care must be taken at the interface Γ between the two fluids regions. The following jump conditions must be accounted for,

$$[\rho]_{\Gamma} = \rho^+ - \rho^-, \quad (4)$$

$$[\mu]_{\Gamma} = \mu^+ - \mu^-, \quad (5)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}]_{\Gamma} = \mathbf{f}_{\Gamma}, \quad (6)$$

with $\bar{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ the stress tensor and \mathbf{f}_{Γ} the local force density at the interface. In the case of two-phase flows with surface tension, the local force density becomes $\mathbf{f}_{\Gamma} = \sigma \kappa \mathbf{n}$ with σ the surface tension and κ the mean curvature of the interface. When a membrane separates the two fluids, the local force is defined in section 2.2.

Considering the entire domain Ω , we define the density and viscosity field as

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho^- + (\rho^+ - \rho^-)H(\mathbf{x}), \quad (7)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu^- + (\mu^+ - \mu^-)H(\mathbf{x}), \quad (8)$$

with H the Heaviside function defined as $H(\mathbf{x}) = 0$ in Ω^- and $H(\mathbf{x}) = 1$ in Ω^+ .

The Navier-Stokes equations in the entire domain Ω can therefore be written as

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{\mathbf{D}}}) + \delta_{\Gamma} \mathbf{f}_{\Gamma}, \quad (10)$$

with δ_{Γ} the Dirac function located at the interface.

2.2. Membrane model

In this section, the large deformable membrane model of Barthes-Biesel and Rallison [3] is described. The local force density of the membrane on the fluids is computed with a full Eulerian formulation. This formulation is inspired by the work of Sugiyama *et al.* [43] for 3D solid problems and adapted to the membranes by Ii *et al.* [18].

In a stress-free state, each particle of a solid is defined by its coordinate vector \mathbf{X} . We denote by $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ the position, at time t , of a particle located in \mathbf{X} in the stress-free state. The link between the current state and the stress-free state is the deformation gradient tensor $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ defined as

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (11)$$

The material time derivative of the deformation gradient tensor $\bar{\bar{\mathbf{F}}}$ follows

$$\frac{d\bar{\bar{\mathbf{F}}}}{dt} = (\nabla \mathbf{u}_s) \bar{\bar{\mathbf{F}}}, \quad (12)$$

with \mathbf{u}_s the velocity of the membrane particles. This velocity vector is obtained by extending \mathbf{u} from its values at the membrane toward the normal direction. The extension method is defined in section 3.6.

Now, we consider the special case of a membrane which thickness is very small compared to its other dimensions. Therefore, we will neglect the thickness and represent the membrane as a surface in a 3D space. Each fibre $d\mathbf{X}$ of the membrane in the reference state belongs to the tangent plane of the membrane. Similarly, each deformed fibre $d\mathbf{x}$ belongs to the tangent plane of the membrane in the current state. This means that only the components perpendicular to the normal direction of the membrane must be considered by the deformation gradient tensor. Let \mathbf{n}_R be the outward normal of the membrane in the reference state and \mathbf{n} the outward normal in the current state, the previous condition can be expressed respectively as $\bar{\bar{\mathbf{F}}}_s \cdot \mathbf{n}_R = \mathbf{0}$ and $\mathbf{n} \cdot \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s = \mathbf{0}$ with $\bar{\bar{\mathbf{F}}}_s$ the surface deformation gradient tensor of the membrane. This tensor can then be written

$$\bar{\bar{\mathbf{F}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{P}}} \bar{\bar{\mathbf{F}}} \bar{\bar{\mathbf{P}}}_R, \quad (13)$$

with $\bar{\bar{\mathbf{P}}} = \bar{\bar{\mathbf{I}}} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ the surface projection tensor in the current state and $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_R = \bar{\bar{\mathbf{I}}} - \mathbf{n}_R \otimes \mathbf{n}_R$ in the reference state. The local deformation of the membrane can be obtained with the surface left Cauchy-Green tensor,

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s \bar{\bar{\mathbf{F}}}_s^T. \quad (14)$$

The Cauchy-Green tensor $\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s$ is symmetric and its eigenvalues λ_1^2 and λ_2^2 correspond to the square of the two principal strains of the membrane in its tangent plane and the third eigenvalue zero corresponds to the deformation in the normal direction which has no existence because of the projections performed previously. The scalar invariants of the surface left Cauchy-Green tensor are

$$I_1 = \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \quad (15)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(\text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s)^2 - \text{tr}(\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s^2) \right) = \lambda_1^2 \lambda_2^2, \quad (16)$$

$$I_3 = \det(\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s) = 0. \quad (17)$$

This strain tensor, considering (13) and (14), can be written thanks to an intermediate tensor $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$,

$$\bar{\bar{\mathbf{B}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{P}}} \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s \bar{\bar{\mathbf{P}}} \quad \text{with} \quad \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s = \bar{\bar{\mathbf{F}}} \bar{\bar{\mathbf{P}}}_R \bar{\bar{\mathbf{F}}}^T. \quad (18)$$

Considering (12) and (18), the material time derivative of $\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s$ is given by,

$$\frac{d\bar{\bar{\mathbf{G}}}_s}{dt} = (\nabla \mathbf{u}_s) \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s + \bar{\bar{\mathbf{G}}}_s (\nabla \mathbf{u}_s)^T. \quad (19)$$

In the case of hyperelastic materials, the stress tensor $\bar{\sigma}$ can be written according to the surface strain energy function $W(I_1, I_2, I_3)$ which depends on the left Cauchy-Green tensor and its scalar invariants. In the case of a membrane, Barthes-Biesel and Rallison [3] show that the surface stress tensor $\bar{\sigma}_s$ is,

$$\bar{\sigma}_s = \frac{2}{\sqrt{I_2}} \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} \bar{\mathbf{B}}_s + I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \bar{\mathbf{P}} \right). \quad (20)$$

Several strain energy functions [12, 32, 34, 53] exist to describe different hyperelastic behaviours. All functions depending on the scalar invariants of the Cauchy-Green tensor can be considered with this methodology. We will consider in this study the strain energy function of the neo-Hookean solid [50], adapted to the membrane case by considering the incompressibility of the membrane as,

$$W = \frac{E_s}{6} \left(I_1 + \frac{1}{I_2} - 3 \right), \quad (21)$$

with E_s the surface elastic modulus defined as $E_s = Eh_R$ with E the Young's modulus of the membrane and h_R the thickness of the membrane in the reference state. The surface stress tensor becomes for this material model,

$$\bar{\sigma}_s = \frac{E_s}{3\sqrt{I_2}} \left(\bar{\mathbf{B}}_s - \frac{\bar{\mathbf{P}}}{I_2} \right). \quad (22)$$

Finally, the local force density exerted by the membrane is given by the surface divergence of the membrane stress tensor,

$$\mathbf{f}_\Gamma = \nabla_s \cdot \bar{\sigma}_s, \quad (23)$$

with ∇_s the surface gradient operator defined by $\nabla_s = \bar{\mathbf{P}} \cdot \nabla$. Considering the geometric properties of the membrane, some simplifications can be made,

$$\bar{\mathbf{P}} \bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_s, \quad \mathbf{n} \cdot \bar{\sigma}_s = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (24)$$

and the local force becomes,

$$\mathbf{f}_\Gamma = \nabla \cdot \bar{\sigma}_s. \quad (25)$$

The local force density can be divided into two components, respectively toward the normal and the tangent directions of the membrane such as,

$$f_n = \mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{n} = -\bar{\sigma}_s : \nabla \mathbf{n}, \quad (26)$$

$$\mathbf{f}_\tau = \bar{\mathbf{P}} \mathbf{f}_\Gamma = \bar{\mathbf{P}} (\nabla \cdot \bar{\sigma}_s). \quad (27)$$

3. Numerical methods

This section describes specific numerical methods implemented to model the membrane behaviour and its interaction with the surrounding fluids. These developments have been integrated in the home-made code DIVA. This solver is based on several numerical methods dedicated to the computation of two-phase flows. The DIVA code can also consider liquid-vapour phase change [13, 41, 48, 49] and compressible flows [17]. Complex geometry can be accounted for by using the irregular domain method proposed in [33] for single phase flows and extended to two-phase flows in irregular domains in [23]. In this study, the interface between the two fluids corresponds to the membrane and is represented by the Level-Set method [35, 44]. The Ghost-Fluid method [11, 19, 27, 45] is used to consider the sharp jump conditions at the membrane. It should be pointed out here that Ghost Fluid Method is first order accurate for imposing jump conditions, but some recent works have proposed extensions to second order accuracy as in [6, 14, 16].

3.1. Interface tracking method

The level-set method [35, 44] is used to track the infinitely thin membrane throughout time. We define the scalar field ϕ which corresponds to the signed distance from the membrane Γ . Each fluid region corresponds to the sign of the level set function as $\Omega^+ = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) > 0\}$, $\Omega^- = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) < 0\}$ and the membrane corresponds to the zero level set $\Gamma = \{\mathbf{x} : \phi(\mathbf{x}) = 0\}$. The motion of the membrane is updated by solving the following transport equation

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0. \quad (28)$$

To keep the signed distance property of the level set function throughout time, we consider the reinitialisation algorithm [44]. The following equation is solved iteratively to correct the distance between each level set

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial \tau} + \text{sign}(\phi)(1 - \|\nabla d\|) = 0, \\ d(\tau = 0) = \phi. \end{cases} \quad (29)$$

with τ a fictitious time along which the reinitialised distance function d is corrected to maintain the distance property $\|\nabla d\| = 1$. The smoothed sign function $\text{sign}(\phi)$ is defined in [11, 44].

The level set method allows us to compute the geometric properties of the membrane such as its outward normal using simple differencing,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}, \quad (30)$$

and thus, the projection tensor $\bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{I}} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ can be computed in the whole domain.

The spatial derivatives of the transport equation and the reinitialisation algorithm are computed using the WENO-Z scheme [4]. The temporal scheme of the transport equation is the second order TVD Runge-Kutta scheme. The reinitialisation algorithm is solved at the end of each time step.

3.2. Two-phase flow solvers

In this section, we describe the methodology to solve the Navier-Stokes equations with two different ways to consider the membrane contribution. The first one is the "delta" formulation for which the elastic force is a source term in the right-hand side. The second method integrates the elastic force through sharp jump conditions on the pressure and on the velocity derivatives.

3.2.1. The "delta" formulation

The "delta" formulation [42, 44] solves the Navier-Stokes equations for two-phase flows by smoothing the interface on an artificial thickness. The method is based on a projection method inspired by Chorin [5] in the case of single phase flows. For two-phase flows, the method we use is derived from the Ghost-Fluid viscous Conservative Method with an Implicit scheme of Lepilliez *et al.* [23], inspired by the work of Sussman *et al.* [45]. First, given a velocity field \mathbf{u}^n at the time $t^n = n\Delta t$, an intermediate velocity \mathbf{u}^* is computed without considering the pressure term,

$$\rho^{n+1} \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \cdot (2\mu^{n+1} \bar{\mathbf{D}}^*) = \rho^{n+1} (\mathbf{u}^n - \Delta t (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n) + \Delta t \delta_\varepsilon \mathbf{f}_\Gamma^n, \quad (31)$$

The viscous term is considered implicitly to avoid the time step restriction. This leads to the resolution of a large linear system where the three components of the velocity are coupled. The advection term is computed with WENO-Z schemes [4] and the viscous term with central differencing schemes [23]. The local force \mathbf{f}_Γ^n is multiplied by the smoothed Dirac distribution δ_ε defined below and added to the right-hand side. As the resulting matrix is diagonally dominant, the system is solved using a few steps of the Gauss-Seidel algorithm.

Then, the pressure field p^{n+1} serves as the scalar potential function of the Hodge decomposition which satisfies the following Poisson equation

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t}, \quad (32)$$

with homogeneous Neumann boundary conditions on $\partial\Omega$. The resolution of this equation is done with the Black Box Multigrid method [9, 28] to reduce the computation time.

Finally, the velocity field \mathbf{u}^{n+1} is defined as the projection of the intermediate velocity \mathbf{u}^* onto the divergence-free space

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} \nabla p^{n+1}. \quad (33)$$

In the framework of the Whole Domain Formulation, the density and viscosity fields are updated with the level set function using a smoothed Heaviside distribution

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho^- + (\rho^+ - \rho^-)H_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (34)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \mu^- + (\mu^+ - \mu^-)H_\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (35)$$

with $H_\varepsilon(\mathbf{x})$ the smoothed Heaviside distribution defined as

$$H_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) < -\varepsilon, \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\phi(\mathbf{x})}{\varepsilon} + \frac{\sin(\pi\phi(\mathbf{x})/\varepsilon)}{\pi} \right) & \text{if } |\phi(\mathbf{x})| < \varepsilon, \\ 1 & \text{if } \phi(\mathbf{x}) > \varepsilon, \end{cases} \quad (36)$$

with ε the fictitious thickness of the membrane, which is equal to two or three times the size of a cell [21]. Similarly, the smoothed Dirac distribution $\delta_\varepsilon(\mathbf{x})$ is defined as the derivative of the smoothed Heaviside function,

$$\delta_\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } |\phi(\mathbf{x})| > \varepsilon, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi\phi(\mathbf{x})}{\varepsilon}\right) \right) & \text{if } |\phi(\mathbf{x})| < \varepsilon. \end{cases} \quad (37)$$

3.2.2. The sharp formulation

Let consider that \mathbf{n} and \mathbf{e}_τ are the normal and tangential vectors to the membrane, respectively. The density and viscosity fields are piecewise constant and their jumps at the membrane correspond to equations (4) and (5). With the sharp formulation, the local density force corresponding to the membrane contribution is expressed as two primary jump conditions:

$$[p]_\Gamma = 2 \left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma \cdot \mathbf{n} + \mathbf{f}_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 2[\mu]_\Gamma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{n} + f_n, \quad (38)$$

$$\left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma \cdot \mathbf{e}_\tau + \left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{e}_\tau} \right]_\Gamma \cdot \mathbf{n} = -(\bar{P}\mathbf{f}_\Gamma) \cdot \mathbf{e}_\tau = -\mathbf{f}_\tau \cdot \mathbf{e}_\tau. \quad (39)$$

Moreover, the no-slip condition on both sides of the membrane enforces $[\mathbf{u}]_\Gamma = 0$ and gives

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{e}_\tau} \right]_\Gamma = 0. \quad (40)$$

The incompressibility condition $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ in both fluids ensures that there is no jump at the membrane $[\nabla \cdot \mathbf{u}]_\Gamma = 0$ and gives the following relation from [47]

$$\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (41)$$

These jump conditions have been proven by Xu and Wang [52] in single phase flows and extended to piecewise constant viscosity by Tan *et al.* [46, 47]. In this study, we only consider these primary jump conditions which account

for all the physical phenomena of interest for this study. It is noticeable that higher accuracy numerical methods have been achieved in [46, 47, 52] in the simpler case of linear elasticity, by imposing further secondary jump conditions on the second order velocity derivatives and first order pressure derivatives. However, these numerical methods have not been generalised to more complex configurations such as hyperelastic membranes.

Following the Ghost-Fluid Conservative Method, Lalanne *et al.* [21] show that only the normal component of the force must be considered in the projection and the correction steps because the viscous component is already taken into account in the predictor step of the projection method. The remaining jump condition on the pressure in the prediction step is then

$$[p]_{\Gamma} = \mathbf{f}_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = f_n. \quad (42)$$

Because of the incompressibility condition, the jump condition (39) can be written as

$$\left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_{\tau} + [\mu]_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{e}_{\tau}} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_{\tau}. \quad (43)$$

Following the same methodology of Lalanne *et al.* [21], the source term due to the tangential component of the elastic force is considered as a jump that is only enforced on the first term: $\left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_{\tau}$. The splitting of the jump condition allows us to simplify the numerical implementation of the source term in the cells cut by the membrane. Finally, the jump condition on the tangent component of the viscosity-scaled velocity gradient in the first step of the GFCMI becomes

$$\left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} \cdot \mathbf{e}_{\tau} = -\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_{\tau}. \quad (44)$$

Because the jump of the normal component of the viscosity-scaled velocity gradient is only due to the jump on the viscosity, the following source term is considered in the first step of the algorithm

$$\left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -\bar{P} \mathbf{f}_{\Gamma} = -\mathbf{f}_{\tau}. \quad (45)$$

To solve the Navier-Stokes equations for two-phase flows with the Ghost Fluid viscous Conservative Method, the same projection method inspired by [5] is considered with jump conditions to describe the membrane force. First, the intermediate velocity is computed using the same implicit scheme for the viscous term,

$$\begin{cases} \rho^{n+1} \mathbf{u}^* - \Delta t \nabla \cdot (2\mu^{n+1} \bar{\mathbf{D}}^*) = \rho^{n+1} (\mathbf{u}^n - \Delta t (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n), \\ \left[\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -\mathbf{f}_{\tau}, \end{cases} \quad (46)$$

with the source term due to the tangent component of the singular force enforced as a jump on the viscous stress. It is noteworthy that, unlike the delta formulation, the prediction step of the projection method only contains this tangent component, since the normal component is accounted for in the projection and correction steps. The analogy between sharp methods using jump conditions and the "delta" formulation is thoroughly explained in [21]. The numerical implementation of the jump conditions on the viscous-stress tensor is detailed in section 3.5.

Then the Poisson equation is solved with the jump condition on the pressure,

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{n+1}}{\rho^{n+1}} \right) = \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} + \nabla \cdot \left(\frac{f_n \mathbf{n} \delta_{\Gamma}}{\rho^{n+1}} \right), \quad (47)$$

The numerical implementation of the pressure jump is detailed in section 3.4. Finally, the velocity is corrected,

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t}{\rho^{n+1}} (\nabla p^{n+1} - f_n \mathbf{n} \delta_{\Gamma}). \quad (48)$$

3.3. Discretisation of the membrane model

Considering the Cartesian mesh, the standard MAC grid is used: the scalar variables are located in the centre of the mesh cells and the components of the velocity field are staggered at the cell faces in each direction. Unlike in [18], all the components of the different solid tensors are located at the centre of the mesh cells in this study.

At each time step, the position of the interface is updated using (28). The six components of the intermediate strain tensor $\bar{\mathbf{G}}_s$ in 3D are then computed using equation (19)

$$\bar{\mathbf{G}}_s^{n+1} = \bar{\mathbf{G}}_s^n - \Delta t \left((\mathbf{u}_s^n \cdot \nabla) \bar{\mathbf{G}}_s^n - (\nabla \mathbf{u}_s^n) \bar{\mathbf{G}}_s^n - \bar{\mathbf{G}}_s^n (\nabla \mathbf{u}_s^n)^T \right). \quad (49)$$

The advection term is computed with the WENO-Z scheme [4] and the velocity derivatives are obtained with central differencing schemes. For example, in 2D, considering the derivatives of the x-component of the velocity,

$$\frac{\partial u_s}{\partial x} \Big|_{i,j} = \frac{u_s|_{i+1/2,j} - u_s|_{i-1/2,j}}{\Delta x} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u_s}{\partial y} \Big|_{i,j} = \frac{u_s|_{i,j+1/2} - u_s|_{i,j-1/2}}{\Delta y}, \quad (50)$$

with

$$u_s|_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{4} \left(u_s|_{i-1/2,j} + u_s|_{i+1/2,j} + u_s|_{i-1/2,j\pm 1} + u_s|_{i+1/2,j\pm 1} \right). \quad (51)$$

The computation of the components of the surface left Cauchy-Green tensor and the stress tensor at the cell centres follows equations (14) and (20).

The components of the surface density force \mathbf{f}_Γ are computed at the centre of the faces of the cells following (25). Considering the sharp methodology and its force decomposition (26, 27), the normal component of the force is computed at the centre of the cell and the tangent components are staggered at the cell faces. Considering a 2D example, the discretisation of the normal component of the force, following (26), is

$$\begin{aligned} f_n|_{i,j} &= \sigma_{11} \Big|_{i,j} \frac{\partial n_x}{\partial x} \Big|_{i,j} + \sigma_{12} \Big|_{i,j} \frac{\partial n_x}{\partial y} \Big|_{i,j} + \sigma_{21} \Big|_{i,j} \frac{\partial n_y}{\partial x} \Big|_{i,j} + \sigma_{22} \Big|_{i,j} \frac{\partial n_y}{\partial y} \Big|_{i,j}, \\ &= \sigma_{11} \Big|_{i,j} \frac{n_x|_{i+1,j} - n_x|_{i-1,j}}{2\Delta x} + \sigma_{12} \Big|_{i,j} \frac{n_x|_{i,j+1} - n_x|_{i,j-1}}{2\Delta y} + \sigma_{21} \Big|_{i,j} \frac{n_y|_{i+1,j} - n_y|_{i-1,j}}{2\Delta x} + \sigma_{22} \Big|_{i,j} \frac{n_y|_{i,j+1} - n_y|_{i,j-1}}{2\Delta y}. \end{aligned} \quad (52)$$

The tangent component of the force in the x-direction from (27) gives

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\tau \cdot \mathbf{e}_x \Big|_{i+1/2,j} &= P_{11} \Big|_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j} \right) + P_{12} \Big|_{i+1/2,j} \left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} \Big|_{i+1/2,j} \right), \\ &= P_{11} \Big|_{i+1/2,j} \left(\frac{\sigma_{11}|_{i+1,j} - \sigma_{11}|_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{12}|_{i+1/2,j+1/2} - \sigma_{12}|_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \right) \\ &\quad + P_{12} \Big|_{i+1/2,j} \left(\frac{\sigma_{12}|_{i+1,j} - \sigma_{12}|_{i,j}}{\Delta x} + \frac{\sigma_{22}|_{i+1/2,j+1/2} - \sigma_{22}|_{i+1/2,j-1/2}}{\Delta y} \right), \end{aligned} \quad (53)$$

with

$$P_{kl} \Big|_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left(P_{kl} \Big|_{i+1,j} + P_{kl} \Big|_{i,j} \right) \quad \text{and} \quad \sigma_{kl} \Big|_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{4} \left(\sigma_{kl} \Big|_{i,j} + \sigma_{kl} \Big|_{i+1,j} + \sigma_{kl} \Big|_{i,j+1} + \sigma_{kl} \Big|_{i+1,j+1} \right). \quad (54)$$

With the "delta" formulation, the discretisation of the elastic force corresponds to equation (53) with $\bar{\mathbf{I}}$ instead of $\bar{\mathbf{P}}$ to consider all the components of the force. This method is identical in the other directions and can easily be extrapolated in 3D.

3.4. Jump condition on the pressure

The pressure jump is taken into account following the Ghost Fluid Method [11, 27]. The Poisson equation on the pressure (47) can be written as

$$\nabla \cdot (\beta \nabla p) = RHS, \quad (55)$$

with $\beta = 1/\rho$ the diffusion coefficient. The equation contains jump conditions on the pressure denoted $a = f_n$ and on the diffusion coefficient $[\beta]_\Gamma$.

The discretisation of the 2D Poisson equation at point (i, j) gives

$$\frac{\beta_{i+1/2,j} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x} \right) - \beta_{i-1/2,j} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} + \frac{\beta_{i,j+1/2} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} \right) - \beta_{i,j-1/2} \left(\frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \right)}{\Delta y} = RHS_{i,j} + g_{i,j}, \quad (56)$$

with $(\beta_{i+1/2,j}, \beta_{i-1/2,j}, \beta_{i,j+1/2}, \beta_{i,j-1/2})$ the harmonic averages of the diffusion coefficient at the centre of the cell borders. If the interface crosses the right mesh segment $[x_{i,j}, x_{i+1,j}]$,

$$\beta_{i+1/2,j} = \begin{cases} \frac{\beta^+ \beta^-}{\beta^- \theta^R + \beta^+ (1 - \theta^R)} & \text{if } \phi_{i,j} < 0 \text{ and } \phi_{i+1,j} > 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^-}{\beta^+ \theta^R + \beta^- (1 - \theta^R)} & \text{if } \phi_{i,j} > 0 \text{ and } \phi_{i+1,j} < 0, \end{cases} \quad (57)$$

with

$$\theta^R = \frac{|\phi_{i+1,j}|}{|\phi_{i+1,j}| + |\phi_{i,j}|}. \quad (58)$$

Similarly, if the interface crosses the left mesh segment $[x_{i-1,j}, x_{i,j}]$,

$$\beta_{i-1/2,j} = \begin{cases} \frac{\beta^+ \beta^-}{\beta^- \theta^L + \beta^+ (1 - \theta^L)} & \text{if } \phi_{i,j} < 0 \text{ and } \phi_{i-1,j} > 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^-}{\beta^+ \theta^L + \beta^- (1 - \theta^L)} & \text{if } \phi_{i,j} > 0 \text{ and } \phi_{i-1,j} < 0, \end{cases} \quad (59)$$

with

$$\theta^L = \frac{|\phi_{i-1,j}|}{|\phi_{i-1,j}| + |\phi_{i,j}|}. \quad (60)$$

The $g_{i,j}$ term in (56) corresponds to the jumps enforced when the interface crosses at least one of the four neighbouring mesh segments. The latter are denoted by the superscripts R, L, T and B which correspond respectively to the right, left, top and bottom borders. As a general rule,

$$g_{i,j} = g_{i,j}^R + g_{i,j}^L + g_{i,j}^T + g_{i,j}^B. \quad (61)$$

Each one of these values exists only if the membrane crosses the mesh segments and then equals

$$g_{i,j}^R = \pm \frac{\beta_{i+1/2,j} a_\Gamma^R}{\Delta x^2}, \quad g_{i,j}^L = \pm \frac{\beta_{i-1/2,j} a_\Gamma^L}{\Delta x^2}, \quad g_{i,j}^T = \pm \frac{\beta_{i,j+1/2} a_\Gamma^T}{\Delta y^2}, \quad g_{i,j}^B = \pm \frac{\beta_{i,j-1/2} a_\Gamma^B}{\Delta y^2}, \quad (62)$$

with \pm corresponding to the opposite sign of $\phi_{i,j}$ and

$$a_\Gamma^R = a_{i,j} \theta^R + a_{i+1,j} (1 - \theta^R), \quad a_\Gamma^L = a_{i,j} \theta^L + a_{i-1,j} (1 - \theta^L), \quad (63)$$

$$a_\Gamma^T = a_{i,j} \theta^T + a_{i,j+1} (1 - \theta^T), \quad a_\Gamma^B = a_{i,j} \theta^B + a_{i,j-1} (1 - \theta^B). \quad (64)$$

3.5. Jump condition on the velocity derivatives

The discretisation of each component of the viscous-stress tensor is described in this section with a specific emphasis on how to enforce suitable jump conditions. Considering a 2D example, the divergence of the viscous-stress tensor gives

$$\nabla \cdot (2\mu \bar{\bar{D}}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right). \quad (65)$$

With (45), the jump condition of each velocity derivative can be expressed as

$$\left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{\Gamma} = n_x \left[\mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -n_x (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_x), \quad \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right]_{\Gamma} = n_y \left[\mu \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -n_y (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_x), \quad (66)$$

$$\left[\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right]_{\Gamma} = n_x \left[\mu \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -n_x (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_y), \quad \left[\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{\Gamma} = n_y \left[\mu \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\Gamma} = -n_y (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_y). \quad (67)$$

Considering the first term of the viscous-stress tensor in (65), let $\beta = 2\mu$ be the diffusion coefficient and $b = -n_x (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_x)$ be the jump condition on the velocity derivative computed at the right and left cell borders. The discretisation of this term at point $(i + 1/2, j)$ gives

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j} = \frac{\beta_{i+1,j} \left(\frac{u_{i+3/2,j} - u_{i+1/2,j}}{\Delta x} \right) - \beta_{i,j} \left(\frac{u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j}}{\Delta x} \right)}{\Delta x} - h_{i+1/2,j} \quad (68)$$

with $\beta_{i,j}$ and $\beta_{i+1,j}$ the harmonic averages of the diffusion coefficient at the centre of the cells.

The harmonic average of β is computed on an example: at the point (k, l) , considering the neighbouring points on the right $\phi_{k+1/2,l}$ and on the left $\phi_{k-1/2,l}$,

$$\beta_{k,l} = \begin{cases} \beta^+ & \text{if } \phi_{k-1/2,l} > 0 \text{ and } \phi_{k+1/2,l} > 0, \\ \beta^- & \text{if } \phi_{k-1/2,l} < 0 \text{ and } \phi_{k+1/2,l} < 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^- (|\phi_{k+1/2,l}| + |\phi_{k-1/2,l}|)}{\beta^- |\phi_{k+1/2,l}| + \beta^+ |\phi_{k-1/2,l}|} & \text{if } \phi_{k-1/2,l} < 0 \text{ and } \phi_{k+1/2,l} > 0, \\ \frac{\beta^+ \beta^- (|\phi_{k+1/2,l}| + |\phi_{k-1/2,l}|)}{\beta^- |\phi_{k-1/2,l}| + \beta^+ |\phi_{k+1/2,l}|} & \text{if } \phi_{k-1/2,l} > 0 \text{ and } \phi_{k+1/2,l} < 0. \end{cases} \quad (69)$$

The computation of the harmonic average is similar when considering the neighbouring points on the top and on the bottom.

The jump conditions to be enforced are $h_{i+1/2,j} = h_{i+1/2,j}^R + h_{i+1/2,j}^L$ if the membrane crosses respectively the interval $[x_{i+1/2,j}, x_{i+3/2,j}]$ or $[x_{i-1/2,j}, x_{i+1/2,j}]$ defined as

$$h_{i+1/2,j}^R = \pm \frac{\beta_{i+1,j} b_{\Gamma}^R \theta^R}{\beta^{\pm} \Delta x} \quad \text{and} \quad h_{i+1/2,j}^L = \mp \frac{\beta_{i,j} b_{\Gamma}^L \theta^L}{\beta^{\pm} \Delta x} \quad (70)$$

with \pm the opposite sign of $\phi_{i+1/2,j}$, \mp the sign of $\phi_{i+1/2,j}$,

$$b_{\Gamma}^R = b_{i+1/2,j} \theta^R + b_{i+3/2,j} (1 - \theta^R) \quad \text{and} \quad b_{\Gamma}^L = b_{i+1/2,j} \theta^L + b_{i-1/2,j} (1 - \theta^L), \quad (71)$$

with

$$\theta^R = \frac{|\phi_{i+3/2,j}|}{|\phi_{i+3/2,j}| + |\phi_{i+1/2,j}|} \quad \text{and} \quad \theta^L = \frac{|\phi_{i-1/2,j}|}{|\phi_{i-1/2,j}| + |\phi_{i+1/2,j}|}. \quad (72)$$

The same method is applied for all the second derivatives of the same variable. Special care must be taken in the case of mixed derivatives. Considering the last term of the divergence of the viscous-stress tensor in the x-direction, the discretisation at point $(i + 1/2, j)$ gives

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2,j} = \frac{\beta_{i+1/2,j+1/2} \left(\frac{v_{i+1,j+1/2} - v_{i,j+1/2}}{\Delta x} \right) - \beta_{i+1/2,j-1/2} \left(\frac{v_{i+1,j-1/2} - v_{i,j-1/2}}{\Delta x} \right)}{\Delta y} - h_{i+1/2,j}. \quad (73)$$

The diffusion coefficient is now $\beta = \mu$ and the jump condition on the mixed derivative is $b = -n_x (\mathbf{f}_{\tau} \cdot \mathbf{e}_y)$. The harmonic averages of the diffusion coefficient are similarly computed with equation (69). The jump conditions $h_{i+1/2,j} = h_{i+1/2,j}^T + h_{i+1/2,j}^B$ exist only if the membrane crosses respectively the interval $[x_{i+1,j+1/2}, x_{i,j+1/2}]$ or $[x_{i+1,j-1/2}, x_{i,j-1/2}]$ and are computed similarly as in equation (70),

$$h_{i+1/2,j}^T = \pm \frac{\beta_{i+1/2,j+1/2} b_{\Gamma}^T \theta^T}{\beta^{\pm} \Delta y} \quad \text{and} \quad h_{i+1/2,j}^B = \mp \frac{\beta_{i+1/2,j-1/2} b_{\Gamma}^B \theta^B}{\beta^{\pm} \Delta y}, \quad (74)$$

with \pm corresponding to the opposite sign of $\phi_{i+1/2,j}$ and \mp the same sign than $\phi_{i+1/2,j}$.

Considering that the membrane crosses the top mesh segment, the sign of the level set function at the calculation point $(i + 1/2, j)$ gives the expression of b_{Γ}^T and θ^T . If $\phi_{i+1/2,j}\phi_{i,j+1/2} < 0$, the computation of the jump condition becomes

$$b_{\Gamma}^T = b_{i+1,j+1/2}\theta^T + b_{i,j+1/2}(1 - \theta^T) \quad \text{with} \quad \theta^T = \frac{|\phi_{i,j+1/2}|}{|\phi_{i,j+1/2}| + |\phi_{i+1,j+1/2}|}. \quad (75)$$

Conversely, if $\phi_{i+1/2,j}\phi_{i,j+1/2} > 0$, the jump condition becomes

$$b_{\Gamma}^T = b_{i+1,j+1/2}(1 - \theta^T) + b_{i,j+1/2}\theta^T \quad \text{with} \quad \theta^T = \frac{|\phi_{i+1,j+1/2}|}{|\phi_{i,j+1/2}| + |\phi_{i+1,j+1/2}|}. \quad (76)$$

Considering that the membrane crosses the bottom mesh segment, the same methodology is applied: if $\phi_{i+1/2,j}\phi_{i,j-1/2} < 0$, the computation of the jump condition becomes

$$b_{\Gamma}^B = b_{i+1,j-1/2}\theta^B + b_{i,j-1/2}(1 - \theta^B) \quad \text{with} \quad \theta^B = \frac{|\phi_{i,j-1/2}|}{|\phi_{i,j-1/2}| + |\phi_{i+1,j-1/2}|}. \quad (77)$$

Conversely, if $\phi_{i+1/2,j}\phi_{i,j-1/2} > 0$, the jump condition becomes

$$b_{\Gamma}^B = b_{i+1,j-1/2}(1 - \theta^B) + b_{i,j-1/2}\theta^B \quad \text{with} \quad \theta^B = \frac{|\phi_{i+1,j-1/2}|}{|\phi_{i,j-1/2}| + |\phi_{i+1,j-1/2}|}. \quad (78)$$

The jump conditions of each term of the viscous tensor are added to the right-hand side of the first step of the projection method without changing the coefficients of the coupled linear system. More details about the linear system to solve the velocity are presented in [23].

3.6. Extension algorithm

The components of the solid tensors and the solid velocity \mathbf{u}_s are scalar fields defined in the whole computational domain. Nevertheless, they are only physically meaningful at the interface (where $\phi = 0$). The values of these scalar fields in the fluids domain are not physical and must not influence the computation at the membrane position. Through equation (19), shear flows or vortices, even far from the interface, may affect the solid tensors by generating parasitic strains. The tensors components may grow exponentially and lead to numerical instability [18]. To avoid this problem, the authors replace the surface left Cauchy-Green tensor by the current projection tensor in the regions remote from the membrane. This method improves the computation near the membrane but stability problems still occur in the long run [18].

In this paper, an extension algorithm has been developed to avoid these stability issues by extending the components of the velocity field and the solid tensor from the membrane toward its normal direction. Therefore, only the physical values are extended in the whole domain and the gradient of the scalar fields in the normal direction of the membrane equal zero. The methodology is inspired by the reinitialisation algorithm of level set functions [30, 31] where a subcell resolution has been proposed. The extension of a scalar function h is described by the following equation

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \tau} + (\text{sign}(\phi)\mathbf{n}) \cdot \nabla h = 0, \\ h(\phi = 0) \quad \text{constant}, \end{cases} \quad (79)$$

with τ a fictitious time. After the convergence, the normal derivative of the function tends toward zero in the whole domain and the scalar field h tends toward its value at the closer point of the membrane.

The spatial derivatives are discretised using second order ENO finite differences in each direction. In the x -direction, two one-sided ENO finite differences exist,

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_r = \frac{h_{i+1} - h_i}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \text{minmod} \left(\frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + h_i}{\Delta x^2} \right), \quad (80)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_l = \frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \text{minmod}\left(\frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{h_i - 2h_{i-1} + h_{i-2}}{\Delta x^2}\right), \quad (81)$$

with the minmod function defined as $\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \min(|a|, |b|) & \text{if } ab > 0, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$

The choice of the one-sided finite difference depends on the sign of $(\text{sign}(\phi)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x$ to propagate the function values from the membrane toward the fluid domain,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_l & \text{if } (\text{sign}(\phi)\mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_x > 0, \\ \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_r & \text{else.} \end{cases} \quad (82)$$

The method is identical in the other directions. The value of the function at the interface is of utmost importance because it will be extended to the whole domain. The interface does not conform with the mesh grid and special care is needed to compute the interface values within mesh cells. We propose in this paper a subcell method to improve the accuracy on the cells cut by the membrane.

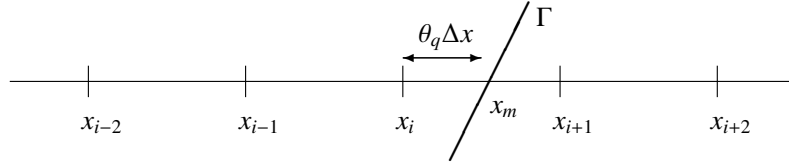


Fig. 1. The membrane Γ crossing the x-grid.

First, considering that the membrane cuts the interval $[x_i, x_{i+1}]$, we define $\theta_q \Delta x$ the distance between x_i and the membrane (cf. figure 1). This distance can be computed using the level-set function and second order Taylor expansions

$$\phi(x_m) = 0 = \phi_i + \theta_q \Delta x \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_i + \frac{(\theta_q \Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\Big|_i + O(\Delta x^2). \quad (83)$$

We construct the derivatives of ϕ using central finite differences and solve the quadratic polynomial to find θ_q ,

$$\theta_q = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{-(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \text{sign}(\phi_i) \sqrt{(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})^2 - 8\phi_i(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})}}{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}} \right) & \text{if } \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\Big|_i \right| > \epsilon, \\ -\frac{2\phi_i}{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}} & \text{else,} \end{cases} \quad (84)$$

with $\epsilon = 10^{-8}$, the limiting value below which we consider the quadratic polynomial linear.

Similarly, if the membrane cuts the interval $[x_{i-1}, x_i]$, θ_q becomes

$$\theta_q = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{(\phi_{i+1} - \phi_{i-1}) - \text{sign}(\phi_i) \sqrt{(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})^2 - 8\phi_i(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1})}}{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}} \right) & \text{if } \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\Big|_i \right| > \epsilon, \\ \frac{2\phi_i}{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}} & \text{else.} \end{cases} \quad (85)$$

The value of the scalar field h_m at the membrane location can then be computed. If the membrane cuts the interval $[x_i, x_{i+1}]$,

$$h_m = \frac{1}{2}(-\theta_q + \theta_q^2)h_{i-1} + (1 - \theta_q^2)h_i + \frac{1}{2}(\theta_q + \theta_q^2)h_{i+1}, \quad (86)$$

and, if the membrane cuts the interval $[x_{i-1}, x_i]$,

$$h_m = \frac{1}{2}(\theta_q + \theta_q^2)h_{i-1} + (1 - \theta_q^2)h_i + \frac{1}{2}(-\theta_q + \theta_q^2)h_{i+1}. \quad (87)$$

Finally, the gradient computation of the extension algorithm is modified so that the point located at the membrane is considered in the numerical scheme. For example, if the membrane cut the interval $[x_i, x_{i+1}]$,

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_r = \frac{h_m - h_i}{\theta_q \Delta x} - \frac{\theta_q \Delta x}{2} \text{minmod} \left(\frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{h_{i+2} - 2h_{i+1} + h_i}{\Delta x^2} \right), \quad (88)$$

and, if the membrane cut the interval $[x_{i-1}, x_i]$,

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_l = \frac{h_i - h_m}{\theta_q \Delta x} + \frac{\theta_q \Delta x}{2} \text{minmod} \left(\frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}, \frac{h_i - 2h_{i-1} + h_{i-2}}{\Delta x^2} \right). \quad (89)$$

This method is identical in the other directions. The example in section 4.1 justifies the use of the subcell method by comparing results from the extension algorithm with or without the subcell resolution.

To avoid the time step restriction due to the subcell method, the extension algorithm is solved implicitly with the Gauss-Seidel method. The extension algorithm can then be written as

$$h_{i,j}^{n+1} + \Delta\tau \text{sign}(\phi) \left(n_x \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + n_y \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} + n_z \frac{\partial h^{n+1}}{\partial z} \right) \Big|_{i,j} = h_{i,j}^n. \quad (90)$$

The fictitious time step $\Delta\tau$ is defined as,

$$\Delta\tau = \alpha \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad (91)$$

with $\alpha = 0.3$ which minimises the computation time to reach the fully extended field. Few iterations of the Gauss-Seidel algorithm are needed to reach the extended state because the scalar field at the membrane faintly evolves at each time step.

In our fluid-membrane solver, the extension algorithm is applied at each time step on the solid velocity field \mathbf{u}_s which allows to compute the components of the Cauchy-Green tensor (see section 3.3). The solid velocity field corresponds to the fluid velocity at the membrane extended in the whole domain. This algorithm is also applied directly on the components of $\bar{\mathbf{G}}_s$ every 10 temporal iteration. The execution of the extension algorithm on the tensor components at each time step would increase the computation time and decreasing the extension frequency would generate fictitious normal derivatives at the membrane location.

3.7. Time step constraints and stability condition

The effects of the convection and the membrane elasticity lead to time step restrictions to ensure the numerical stability:

$$\Delta t_{conv} = \frac{1}{\frac{\max(|u|)}{\Delta x} + \frac{\max(|v|)}{\Delta y} + \frac{\max(|w|)}{\Delta z}} \quad \text{and} \quad \Delta t_{elas} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\max(\rho^+, \rho^-)}{E_s}} \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)^{3/2}. \quad (92)$$

The restriction due to the elasticity is similar to the restriction due to the surface tension effects in two-phase flow cases [19]. There is no restriction due to viscosity because of the implicit computation of the viscous term. The global condition on the time step becomes

$$\frac{1}{\Delta t} > \frac{1}{\Delta t_{conv}} + \frac{1}{\Delta t_{elas}}. \quad (93)$$

All the numerical algorithms, from the transport of the level set function to the solving of the Navier-Stokes equations with the elastic contribution, are integrated in a second order TVD Runge-Kutta scheme.

To fully resolve the dynamics near the membrane, the mesh grid must be fine enough to compute accurately the elastic contribution on the flow field. This results in a stability condition depending on a mesh Reynolds number.

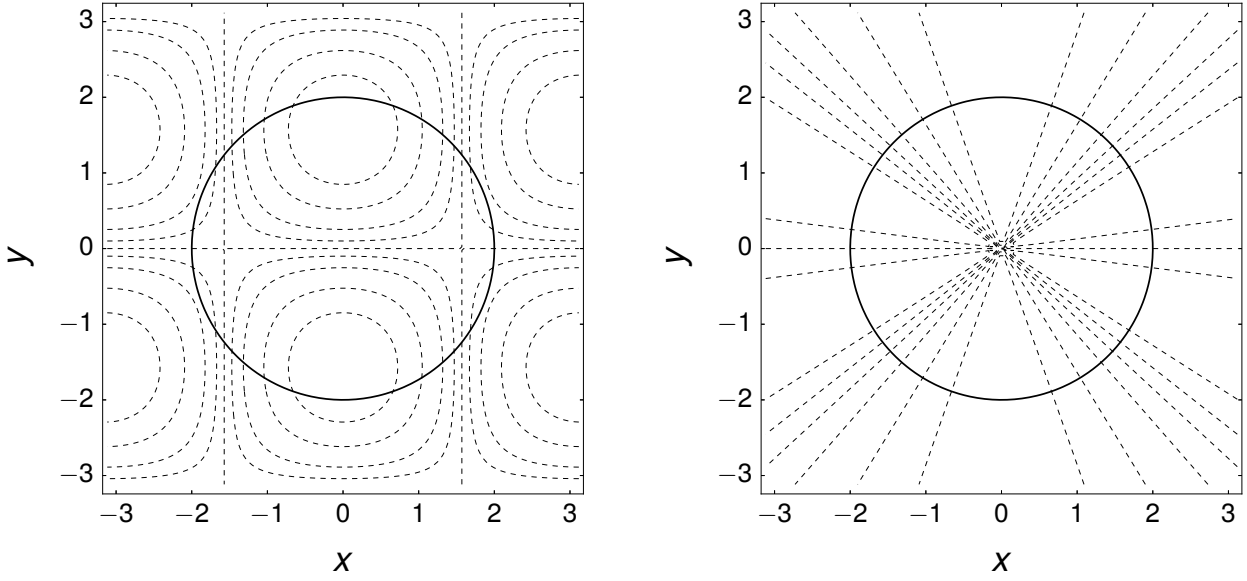


Fig. 2. Initial and final scalar fields $h(x, y)$ with the circular zero level set represented by the bold solid black line.

This mesh Reynolds number is based upon the characteristic velocity due to the membrane elasticity defined as $U_{elas} = \sqrt{E_s / \max(\rho^+, \rho^-) L}$ and on the mesh size Δx such as

$$Re_{\Delta x} = \frac{U_{elas} \Delta x}{\min(\nu^+, \nu^-)} = \frac{\Delta x}{\min(\nu^+, \nu^-)} \sqrt{\frac{E_s}{\max(\rho^+, \rho^-) L}}, \quad (94)$$

with $\nu = \mu / \rho$ the kinematic viscosity. The stability condition requires a mesh Reynolds number around one or less.

4. Numerical results

In this section, we compute some well-known benchmarks and compare our numerical results with those from the literature. First, the improved extension algorithm is implemented on the benchmark from [1] to highlight the efficiency of the method and its convergence rate. Then, the stretched and pressurized membrane immersed in a fluid, first introduced in [51], is considered with this new numerical method. After the grid sensitivity study, the results on the radii evolution, the pressure jump and the velocity fields are compared to the results from [46]. The test case is extended to different fluids in the computational domain. First, different viscosities, and then, different densities, are enforced on each side of the membrane. Finally, the capsule immersed in a shear flow from [39] is implemented and its deformation throughout time is compared to the results from the literature.

4.1. Extension algorithm

First, we implement the extension algorithm on an example inspired by [1]. Let us consider a 2D computational domain $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Initially, a level set function is defined as $\phi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - R_0$, the zero level set of which corresponds to a circle of radius $R_0 = 2$. A scalar field denoted by h is initialised as

$$h(x, y) = \cos(x) \sin(y), \quad (95)$$

and some contours are shown in the left plot of figure 2 with the zero level set line depicted in solid black.

The extension algorithm described in section 3.6 is enforced on the scalar field h and the result is plotted on the right plot of figure 2. We observe that the contours of the obtained scalar field respect well the condition of no normal derivative at the membrane. The exact solution of the extended field h is easily computable and equals

$$h(x, y) = \cos\left(R_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \sin\left(R_0 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \quad (96)$$

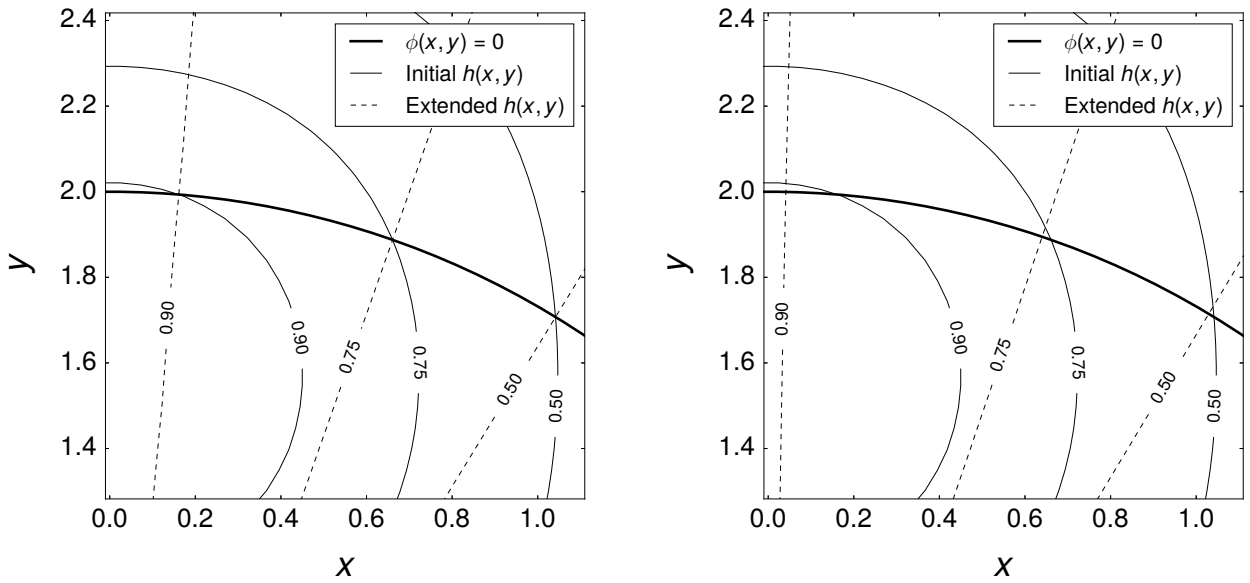


Fig. 3. Zoom on the scalar field $h(x, y)$ before and after the extension with the subcell resolution on the left and without on the right.

Table 1. Numerical accuracy of the extension method with the subcell resolution

Grid	Whole domain $\phi(x, y) > -1.6$				Near the membrane $ \phi(x, y) < 1.2\Delta x$			
	E_1	R_1	E_∞	R_∞	E_1	R_1	E_∞	R_∞
64^2	1.19×10^{-3}		4.17×10^{-2}		5.37×10^{-5}		3.18×10^{-4}	
128^2	3.38×10^{-4}	1.82	1.76×10^{-2}	1.25	6.56×10^{-6}	3.03	4.37×10^{-5}	2.87
256^2	9.01×10^{-5}	1.91	5.71×10^{-3}	1.62	8.24×10^{-7}	2.99	6.20×10^{-6}	2.82
512^2	2.30×10^{-5}	1.97	1.65×10^{-3}	1.79	1.01×10^{-7}	3.03	7.27×10^{-7}	3.09

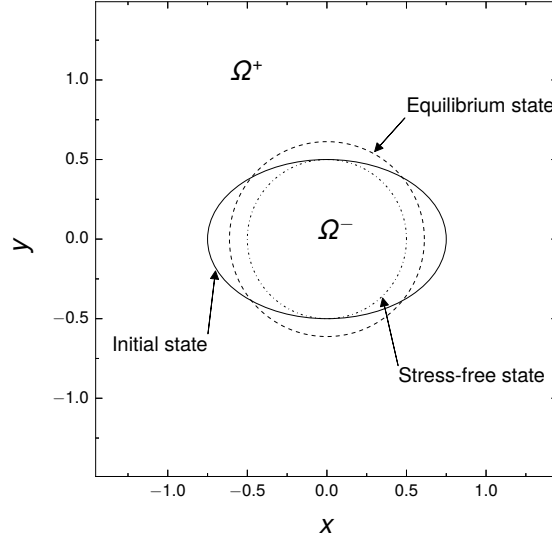
Figure 3 focuses on the scalar field h near the membrane, represented by a bold solid black line, in the specific region $[0, 1.1] \times [1.3, 2.4]$. The initial contours of h are plotted with solid black lines and the extended scalar field with dashed black lines. In the left plot of figure 3, we observe that the values of the scalar field h at the membrane do not change after the extension. The solid lines correspond exactly to the dashed lines at the membrane location. The same computation is done without the subcell method and the result is illustrated in the right plot of figure 3. We observe that the contours do not correspond as well. The zero normal derivative at the membrane is well respected but the values of the scalar field at the membrane have been modified. The scalar field variation is more important where the initial scalar field is tangent to the membrane. Indeed, the contour $h(x, y) = 0.9$ after the extension without the subcell method exhibits an important variation at the membrane position.

Table 1 summarises the errors of the extended scalar field with the subcell resolution compared to the exact solution of equation (96). Two errors are computed: in the whole domain, except from the centre of the circle where the normal directions to the membrane meet up, and in the region near the membrane. The extension algorithm with the subcell method is third order accurate near the zero level set and almost second order in the whole region.

Considering the extension algorithm without the subcell method, the accuracy decreases notably, as shown in table 2. Near the membrane, the order of magnitude of the error is at least two times higher than with the subcell resolution. The convergence rate of the method is around one in the whole domain and near the zero level set. The study of the accuracy and the contour plots of the scalar field h explains that the subcell method must be considered to extend the right value of the scalar field at the membrane toward its normal direction.

Table 2. Numerical accuracy of the extension method without the subcell resolution

Grid	Whole domain $\phi(x, y) > -1.6$				Near the interface $ \phi(x, y) < 1.2\Delta x$			
	E_1	R_1	E_∞	R_∞	E_1	R_1	E_∞	R_∞
64^2	1.11×10^{-2}		6.12×10^{-2}		1.06×10^{-2}		2.82×10^{-2}	
128^2	3.47×10^{-3}	1.68	2.38×10^{-2}	1.36	3.50×10^{-3}	1.59	8.72×10^{-3}	1.69
256^2	1.66×10^{-3}	1.06	9.30×10^{-3}	1.35	1.68×10^{-3}	1.06	5.77×10^{-3}	0.60
512^2	6.93×10^{-4}	1.26	3.68×10^{-3}	1.34	6.91×10^{-4}	1.28	2.74×10^{-3}	1.07

**Fig. 4. The membrane in different states.**

4.2. Stretched and pressurized membrane immersed in a fluid

The stretched and pressurized membrane immersed in a viscous fluid is implemented in this section. It has been used by several authors to test the immersed boundary method and the immersed interface method [22, 25, 51]. In this example, the elastic contribution will be implemented using the Ghost-Fluid viscous Conservative Method of section 3.2.2. It consists in a 2D membrane, the shape of which is an ellipse of major axis $a = 0.75$ and minor axis $b = 0.5$, relaxing in a fluid at rest. In its stress-free state, we consider that the membrane is a circle of radius $r_0 = 0.5$. The equilibrium shape of the initially stretched membrane is a circle with the same amount of liquid within. The equilibrium radius equals $r_e = \sqrt{ab} \approx 0.61237$. The domain is a closed square of length $L = 3$ and wall boundary conditions are considered. The ellipse is initially centred in the domain. The three different states of the membrane are depicted in figure 4. Different densities and viscosities of the fluid are considered: $\rho \in [1, 10, 100]$ and $\mu \in [0.01, 0.1, 1]$. Depending on the fluid properties, the membrane will relax toward its circular shape differently.

In this benchmark, the membrane follows the linear Hooke law. However, the numerical methods presented previously in this paper deal with hyperelastic material laws. Fortunately, in 2D cases, the linear Hooke law can be considered using the following methodology because the membrane is only stretched along its tangent direction denoted \mathbf{e}_τ . The first invariant of the Cauchy-Green tensor gives directly the square of the principal strain λ_τ . The linear Hooke law corresponds to the following surface stress tensor

$$\bar{\bar{\sigma}}_s = E_s(\sqrt{I_1} - 1)\bar{\bar{P}}, \quad (97)$$

with $I_1 = \lambda_\tau^2$, $\bar{\bar{P}} = \mathbf{e}_\tau \otimes \mathbf{e}_\tau$ and the value of the surface elastic modulus $E_s = 10$.

Therefore, the surface stress tensor can directly be computed with the projection tensor and the first invariant of the surface Cauchy-Green tensor. The latter tensor is initialised by the projection tensor multiplied by the initial stretching of the membrane. Considering a uniform stretching, it corresponds to the square of the ratio of the membrane

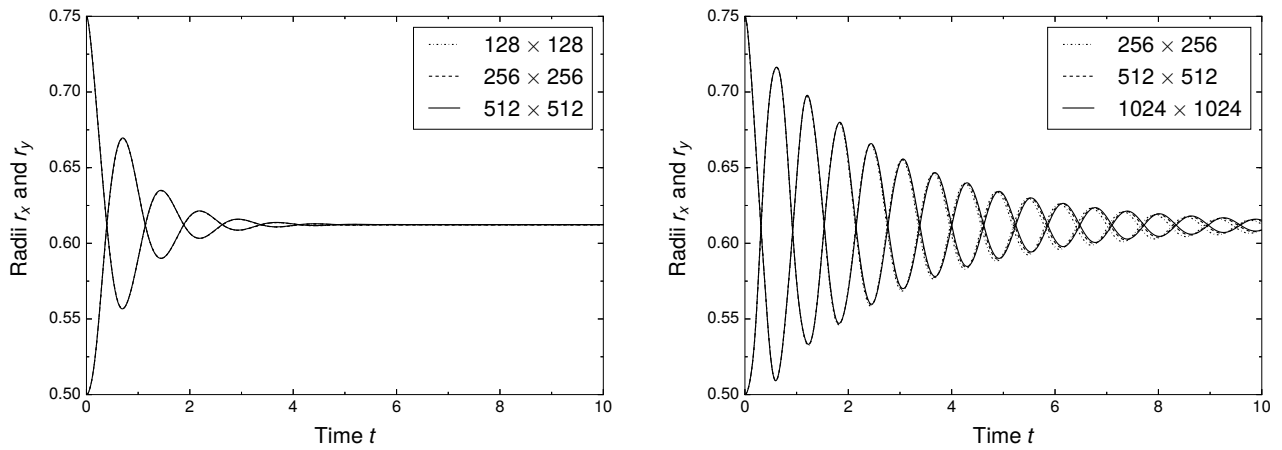


Fig. 5. Radii evolution with $\mu = 0.1$ on the left and $\mu = 0.01$ on the right for three different meshes.

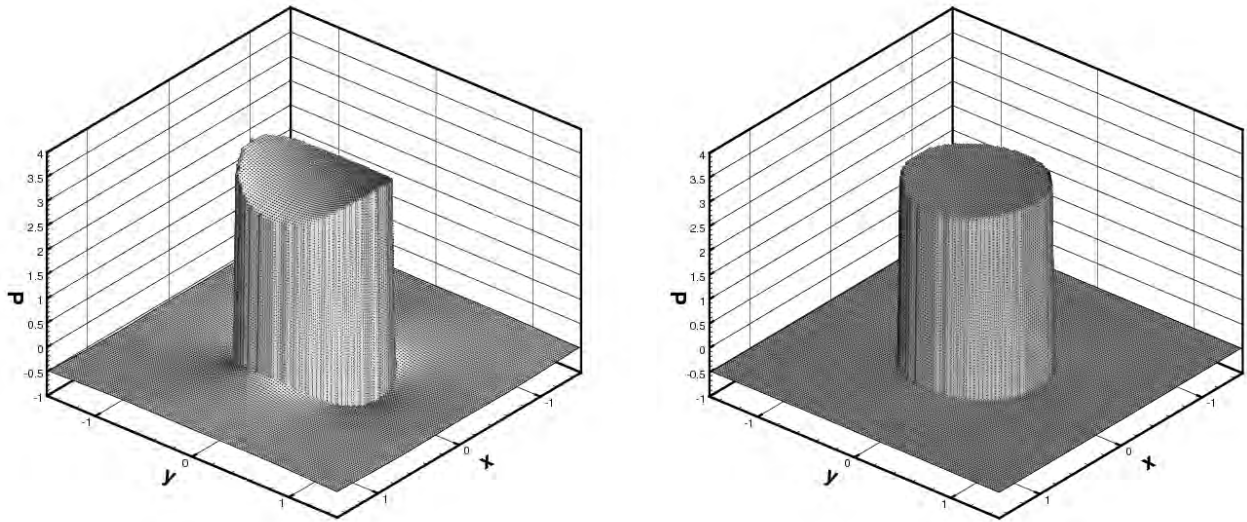


Fig. 6. Pressure distribution with $\mu = 0.1$ at $t = 0.5$ on the left and $t = 2$ on the right.

perimeter between its initial state P_0 and its stress-free state P_R ,

$$\bar{\mathbf{B}}_s(t=0) = \lambda_\tau^2(t=0) \bar{\mathbf{P}}(t=0) = \left(\frac{P_0}{P_R}\right)^2 \bar{\mathbf{P}}(t=0) \quad (98)$$

with $P_0/P_R \approx 1.262$.

The evolution of the radii is investigated and compared to the results from [46]. First, to ensure the validity of our computation, a grid sensitivity study has been performed for $\rho = 1$ and two different viscosities $\mu = 0.1$ and $\mu = 0.01$. The computations have been performed on three different meshes for each viscosity. Figure 5 shows that for $\mu = 0.1$, the three meshes, 128^2 , 256^2 and 512^2 , give the same radii evolution. In this case, the 128^2 mesh is fine enough to do the comparison. With $\mu = 0.01$, finer grids are needed to reach a steady radii evolution. The temporal evolutions are close to each other at early flow time but deflect with time. This deviation decreases when refining the mesh. For meshes containing more than 512 cells in each direction, the same solution is obtained and gives consistent results with [46]. In what follows, the 512^2 mesh will be considered in case of a viscosity of $\mu = 0.01$. For lower values of the viscosity, the 128^2 mesh is considered.

We observe in figure 5 that in both cases, the membrane oscillates around its equilibrium value. The magnitude of the oscillations decreases with time until the membrane reaches the circular shape. The theoretical radius r_e is

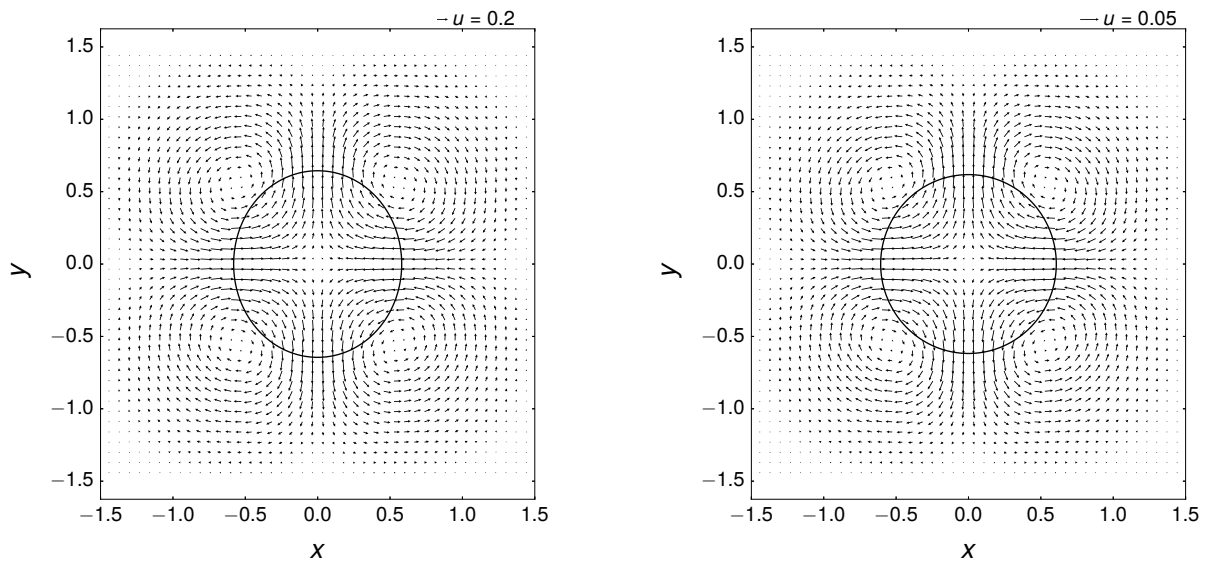


Fig. 7. Velocity field with $\mu = 0.1$ at $t = 0.5$ on the left and $t = 2$ on the right.

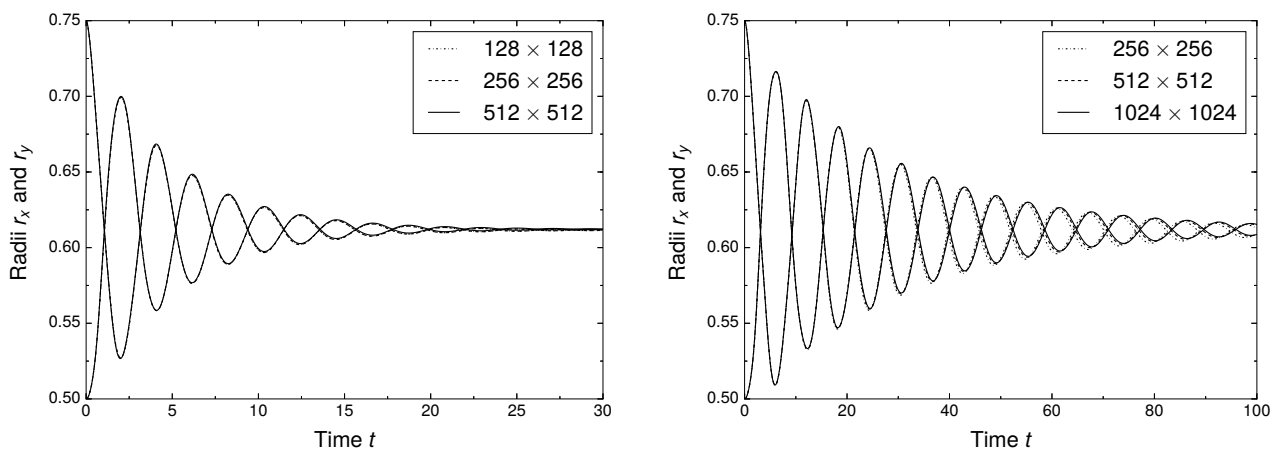


Fig. 8. Radii evolution with $\rho = 10$ on the left and $\rho = 100$ on the right for three different meshes.

obtained for the horizontal r_x and vertical r_y radii in the steady state. The damping of the oscillations increases with the viscosity but its frequency remains stable.

Figure 6 shows the pressure distribution in the computational domain at $t = 0.5$ and $t = 2$. The sharp jump on the pressure is clearly visible at the membrane location. At early flow time, the pressure field exhibits important variations in each fluid region because of the fluid motion. At $t = 2$, the pressure field is almost constant inside and outside the membrane. In the steady state, only the pressure jump remains with constant values of the pressure in each phase.

Figure 7 shows the velocity field at two different times with $\mu = 0.1$ in the whole domain. At $t = 0.5$ and $t = 2$, four main vortices are located in the fluid outside the membrane leading the membrane to deform in the vertical direction. The pressure and velocity fields of figures 6 and 7 are in good agreement with the results from [46].

These simulations have been implemented without the extension algorithm and the results are presented in Appendix A. This study shows that the extension algorithm is necessary to keep the computation stable throughout time by removing the normal derivatives of the solid scalar fields.

The membrane behaviour is investigated for higher values of the density. The viscosity is kept at $\mu = 0.1$ and the density is increased to $\rho = 10$ and $\rho = 100$. A grid sensitivity study is done on several meshes. We observe in figure 8 that the radii evolution reaches the same solution from 128 cells onwards in each direction with $\rho = 10$ and from 512

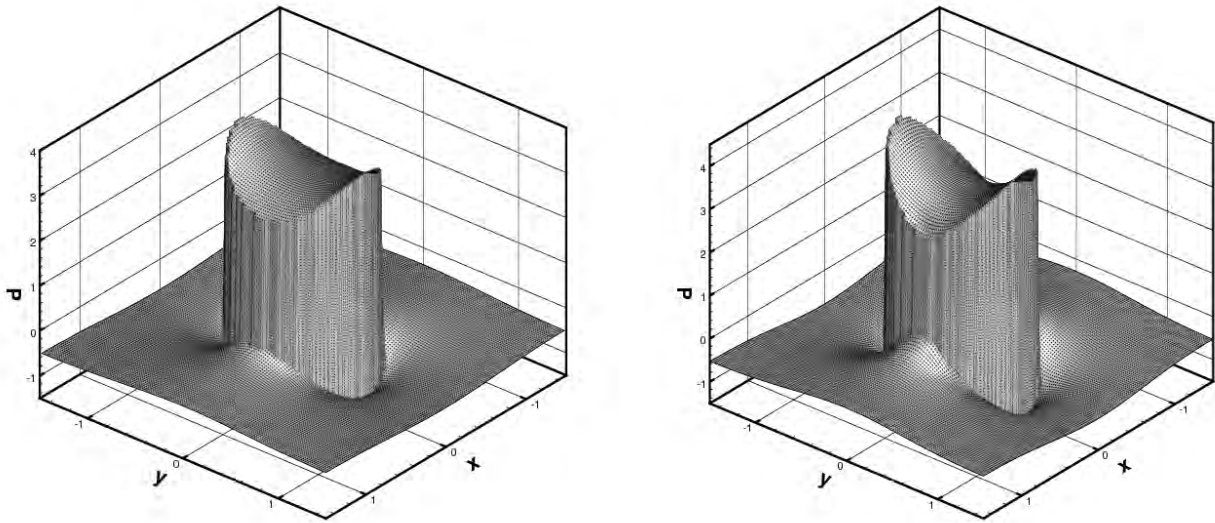


Fig. 9. Pressure distribution with $\rho = 10$ at $t = 1.5$ on the left and with $\rho = 100$ at $t = 5$ on the right.

cells onwards in each direction with $\rho = 100$. In what follows, the 512^2 mesh will be considered when the density reaches $\rho = 100$, the 128^2 mesh will be used otherwise.

We observe that the time to relax the membrane increases with the density. The frequency of the oscillations seems to increase with the square root of the density. Figure 9 exhibits two examples of the pressure field for the two higher densities. The sharp jump condition on the pressure is well predicted by the numerical simulations even in the right plot of figure 9 where the pressure variation is important in each region.

4.3. Stretched and pressurized membrane immersed in fluids with different viscosities

Now, we distinguish the fluids inside and outside the membrane. In this section, the two fluids have different viscosities μ^+ and μ^- . As depicted in figure 4, the superscript + corresponds to the fluid outside the membrane and the superscript - to the fluid inside the membrane. The same density $\rho^+ = \rho^- = 1$ is enforced and following the work of [46], the viscosity ratio takes the values of 0.1 and 10.

First, we consider two cases with large viscosities: $\mu^+ = 1, \mu^- = 0.1$ and $\mu^+ = 0.1, \mu^- = 1$. Figure 10 shows the radii evolution throughout time in both cases. The membrane does not oscillate in the first case, it relaxes gradually to its final position. When the fluid with the higher viscosity is inside the membrane, the latter performs only one small oscillation. The vertical and horizontal radii tend toward the theoretical value r_e in both cases.

Then, the same viscosity ratios are maintained but the fluid viscosities are divided by 10. Figure 11 shows the radii evolution for these two cases. The vertical and horizontal radii oscillate around the equilibrium value with frequencies of the same order of magnitude. Similarly to figure 10, the damping is more important when the fluid with the higher viscosity is outside the membrane. The two plots of figure 10 and 11 are really close to the results from [46].

An example of the jump on the velocity derivatives is shown in figure 12. The evolution of both components of the velocity at $y = 0.3$ is plotted at the same time $t = 1$ with $\mu^+ = 0.1$ and $\mu^- = 1$. We observe that in both cases, the velocity is continuous but its derivatives are discontinuous at the membrane location (represented by the vertical dashed lines). This validates the sharp methodology of the jump condition on the viscosity-scaled velocity gradient.

4.4. Stretched and pressurized membrane immersed in fluids with different densities

In this section, we consider that the fluids inside and outside the membrane have the same viscosity $\mu^+ = \mu^- = 0.1$ but different densities. First, we enforce densities of 1 and 10 on both sides of the membrane. The radii evolutions of these two cases are represented in figure 13. As observed in the left plot of figure 8, the relaxing time of the membrane increases with the density. The membrane oscillates around its circular shape, the radius of which corresponds to the theoretical value r_e at the end of the simulation. It takes longer to reach the equilibrium state when the heaviest fluid is inside the membrane. The frequency of the oscillations has the same order of magnitude in both cases.

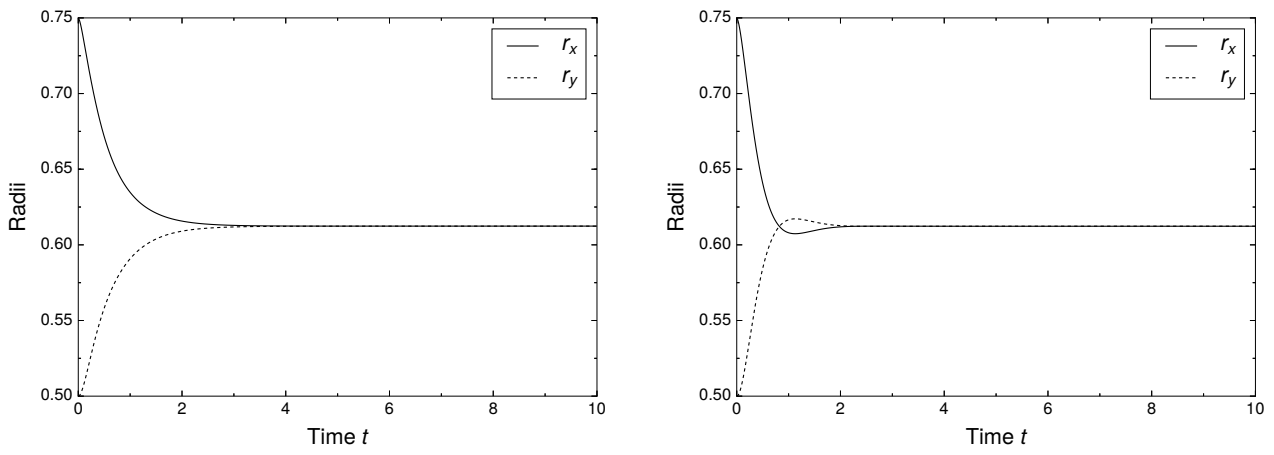


Fig. 10. Radii evolution with $\mu^+ = 1$ and $\mu^- = 0.1$ on the left and $\mu^+ = 0.1$ and $\mu^- = 1$ on the right.

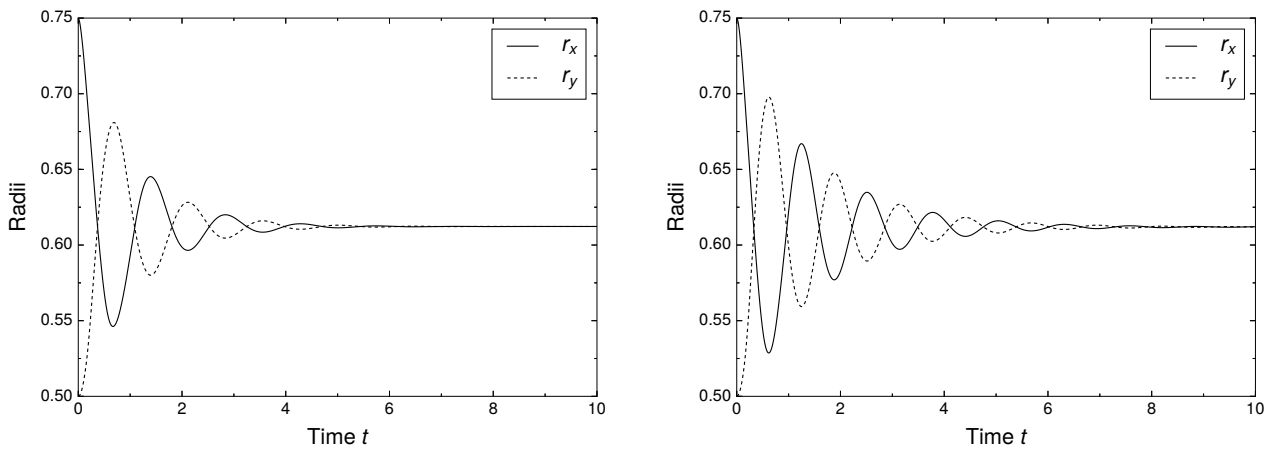


Fig. 11. Radii evolution with $\mu^+ = 0.1$ and $\mu^- = 0.01$ on the left and $\mu^+ = 0.01$ and $\mu^- = 0.1$ on the right.

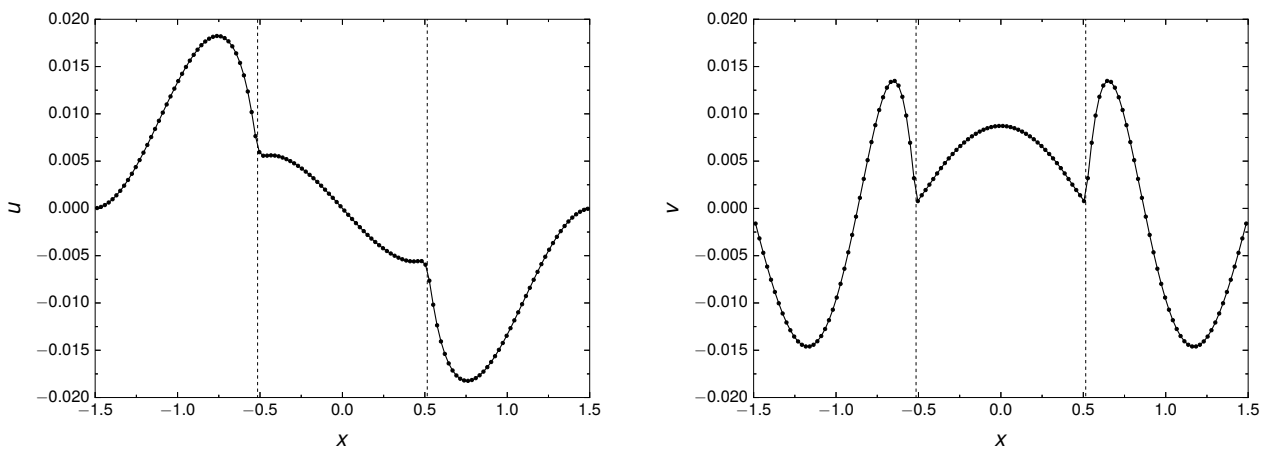


Fig. 12. Components of the velocity $u = (u, v)$ at $t = 1$ and $y = 0.3$ with $\mu^+ = 0.1$ and $\mu^- = 1$.

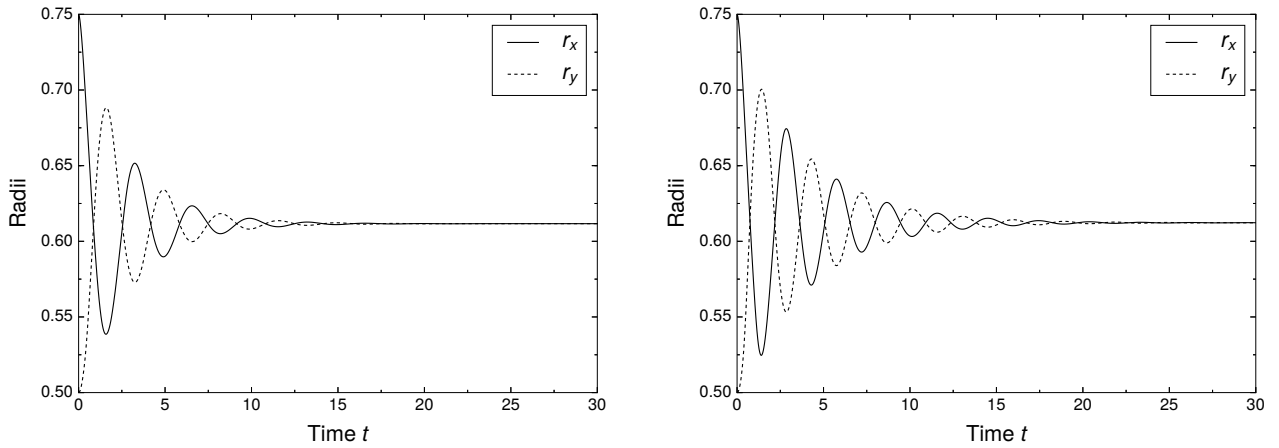


Fig. 13. Radii evolution with $\rho^+ = 10$ and $\rho^- = 1$ on the left and $\rho^+ = 1$ and $\rho^- = 10$ on the right.

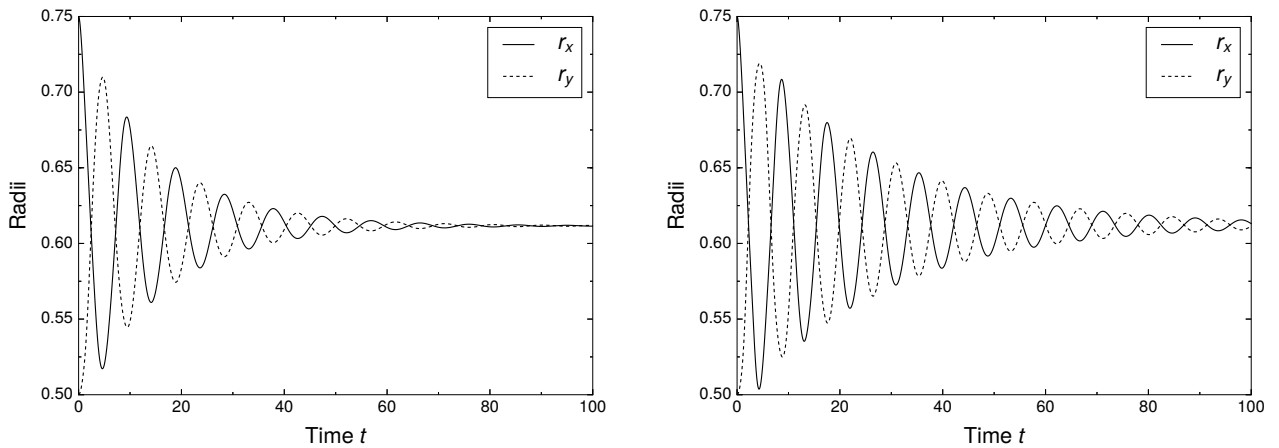


Fig. 14. Radii evolution with $\rho^+ = 100$ and $\rho^- = 10$ on the left and $\rho^+ = 10$ and $\rho^- = 100$ on the right.

Then, the fluids densities are multiplied by 10. Figure 14 exhibits the radii evolutions throughout time. We observe that the radii evolution with $\rho^+ = 10$ and $\rho^- = 100$ is close to the radii evolution with $\rho = 100$ in the whole domain (*cf.* figure 8). Similarly, the damping of the oscillations is less efficient when the heaviest fluid is inside the membrane. The oscillation frequency has the same order of magnitude in these two cases.

Because the viscosity stays constant in the whole domain, the jumps on the velocity derivatives are directly linked to the tangent component of the elastic force. Figure 15 shows the profiles of the two components of the velocity at $y = 0.3$ with $\rho^+ = 10$ and $\rho^- = 1$. The jump on the velocity derivatives is clearly visible at the membrane location.

4.5. Immersed capsule in a shear flow

In this section, we consider a 3D spherical membrane immersed in a shear flow. The membrane deforms until the equilibrium between the viscous and the elastic forces is reached. This study case has been first introduced by Pozrikidis [39] and has been used to validate several immersed boundary methods [10, 40]. This example aims at validating the use of hyperelastic laws with our model.

Initially, the membrane is a sphere of radius a . It is located in the centre of the computational domain, a cube with a side of $4a$. The shear flow enforced in the domain is characterised by the shear rate k such as $\mathbf{u} = (ky, 0, 0)$ at the top and bottom sides. On the others sides of the domain, periodic boundary conditions are imposed. We consider that the same fluid is inside and outside the membrane. Its physical properties are its density ρ and viscosity μ . The membrane is made of a hyperelastic material following the neo-Hookean model. The surface elastic modulus of the membrane

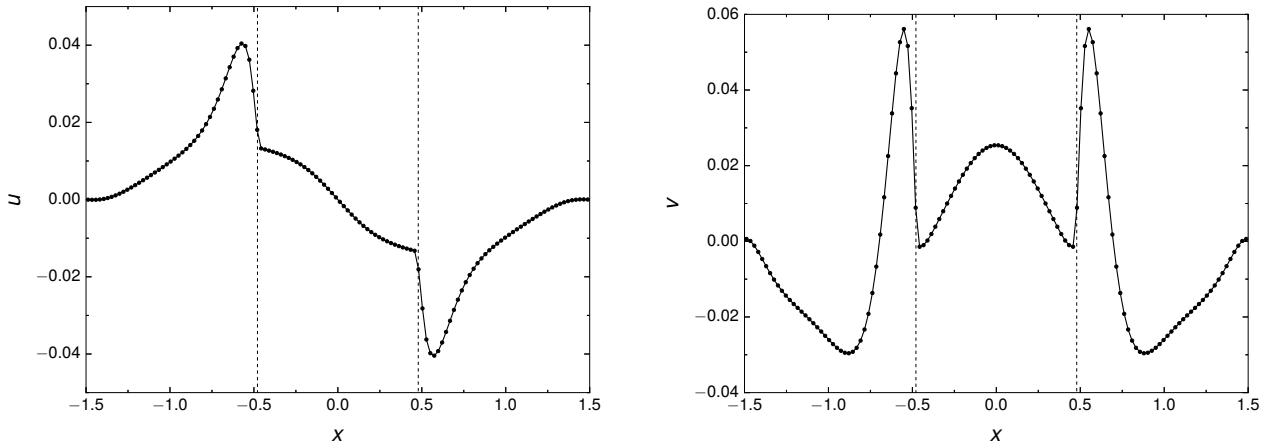


Fig. 15. Components of the velocity at $y = 0.3$ with $\rho^+ = 10$ and $\rho^- = 1$ at $t = 1.5$.

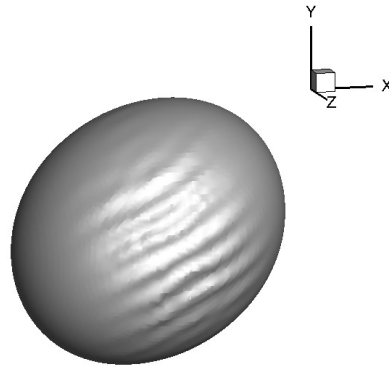


Fig. 16. Folds due to the buckling instability at the membrane surface with $G = 0.0125$ at $kt > 0.8$.

is denoted E_s . The membrane is initially at rest, leading to $\bar{\mathbf{B}}_s = \bar{\mathbf{G}}_s = \bar{\mathbf{P}}$ at $t = 0$. We define the dimensionless parameter G which compares the effect of the viscosity of the fluid over the elasticity of the membrane

$$G = \frac{\mu ka}{E_s}. \quad (99)$$

Five different values of G are considered: $G \in [0.0125, 0.025, 0.05, 0.1, 0.2]$. The deformation of the membrane is expressed through the Taylor deformation parameter

$$D_{xy} = \frac{L - l}{L + l}, \quad (100)$$

with L and l the maximum and minimum radii of the contour of the membrane with the (x, y) -plane computed with the non-linear least square method.

In this example, we use the "delta" formulation described in section 3.2.1. Sharp methods cannot be used in this example because of the compression zones on the membrane [2, 20, 40]. Indeed, where at least one of the two principal membrane stresses becomes negative, a buckling instability appears [20]. Because no bending stiffness is considered, a zone of the membrane which is not under tension may buckle and break down the computation. In this case, folds appear at the membrane surface which may overlap and lead to a stability issue. Figure 16 shows an example of folds which appear in the equatorial area in our computation with $G = 0.0125$ after $kt = 0.8$. Sharp methods, based on the local equilibrium at the nodes crossed by the membrane, become unstable when compression zones appear [2]. The use of the smoothed method introduces a numerical dissipation which stabilises the computation

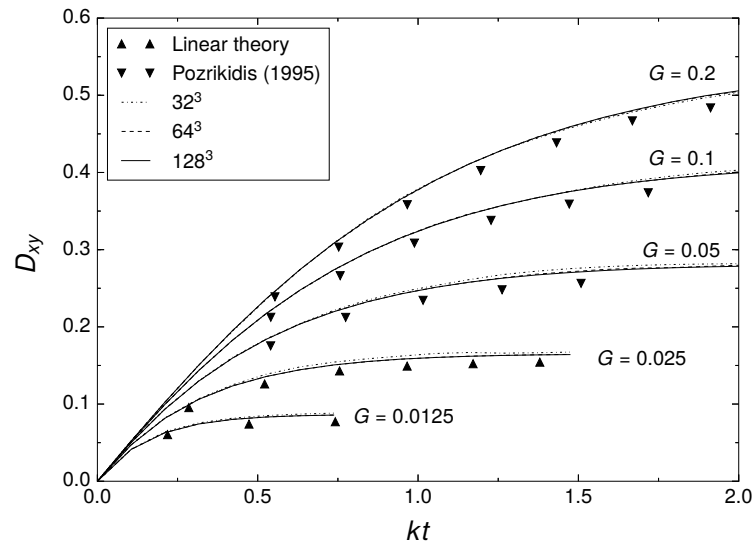


Fig. 17. Temporal evolution of the Taylor deformation parameter for the five values of G and three different meshes: 32^3 , 64^3 and 128^3 .

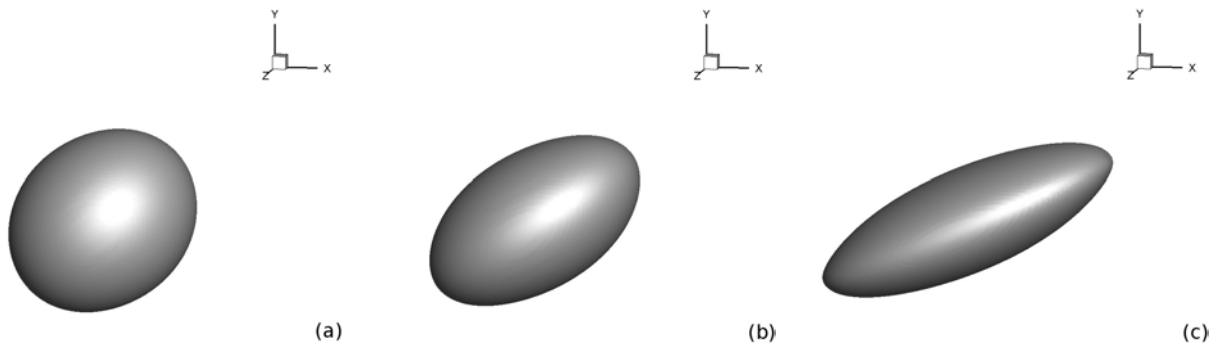


Fig. 18. Steady state or final state of the membrane for a) $G = 0.0125$, b) $G = 0.05$ and c) $G = 0.2$.

and allows the solver to tolerate negative stress locally. Nevertheless, in specific cases such as $G = 0.0125$, stability issues appear in the long run whatever the numerical methods used.

Figure 17 shows the evolution of the deformation parameter D_{xy} throughout time for 5 different values of G and three different meshes. We observe that the membrane deformation increases with G . At early flow time, the membrane loses its spherical shape and deforms with different magnitudes until it reaches a steady shape. The computations have been done on a maximum time of $kt = 2$ to be able to compare with the results from the literature. For the two lowest G , the buckling instability described below appears before $kt = 2$ and prevents us to compute the deformation parameter in the whole time period.

With $G = 0.0125$ and $G = 0.025$, the membrane deformation stays low and can be approached by the linear elasticity theory for which theoretical values of the membrane deformation have been computed in [3]. The evolution of the Taylor parameter with the linear theory is depicted by triangle markers in figure 17. The Taylor deformation parameter obtained at $kt = 0.8$ with $G = 0.0125$ is $D_{xy} = 0.086$ and the theoretical value is about $D_{xy} = 0.078$. With $G = 0.025$, the steady deformation parameter computed is $D_{xy} = 0.164$ and the theoretical value from [3] is $D_{xy} = 0.156$.

Considering higher values of G , the linear theory cannot be used because the non-linearity of the material cannot be neglected. Our numerical results are compared to simulations done with the Immersed Boundary method and the Boundary Element method [10, 39, 40]. The Taylor parameter obtained by Pozrikidis [39] for the highest values of G are plotted in figure 17 with filled triangles. Pictures of the steady state of the membrane for $G \in [0.0125, 0.05, 0.2]$ are depicted in figure 18 and show different deformations computed with our numerical methods.

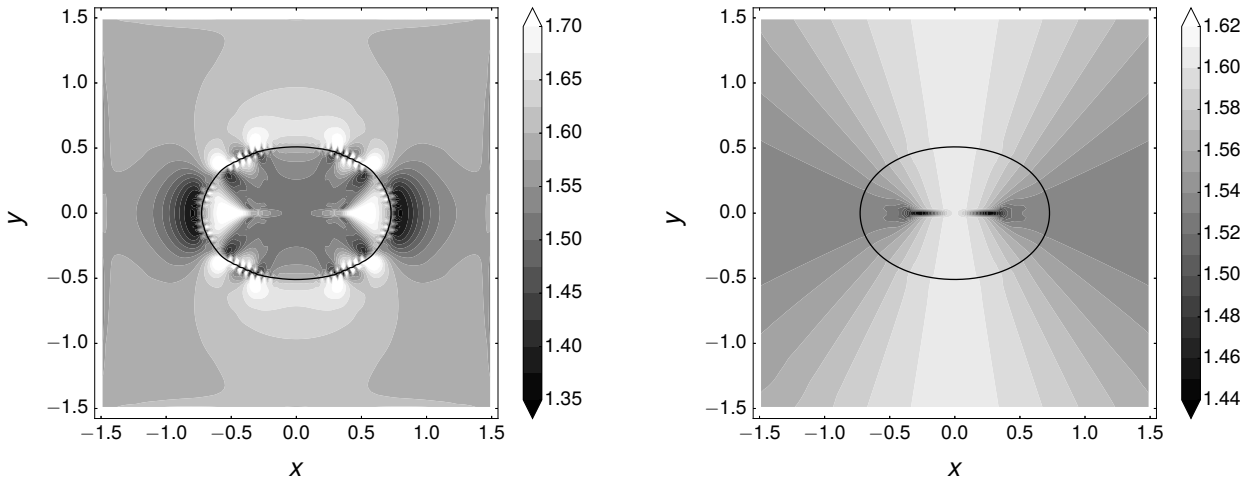


Fig. A.19. Contour fields of I_1 without the extension algorithm on the left and with it on the right, with $\rho = 1$ and $\mu = 0.1$ at $t = 0.1$.

We observe in figure 17 the good convergence of the proposed numerical methods since the solution depends weakly on the grid size. In particular, the Taylor deformation parameter is the same for both finest grids for all values of G . Our numerical results are in close agreement with the reference results presented in figure 17. However, we report a slight overestimation on the Taylor deformation parameter whatever the considered case.

5. Conclusion

In this paper, we propose a full Eulerian method to deal with fluids-membrane interaction inspired by the work in [18]. The main advantage of the Eulerian approach is to replace the use of Lagrangian markers to follow the membrane motion and deformations by scalar fields transported in the whole domain. Some improvements have been made to extend the method first introduced in [18]. A sharp methodology has been implemented to consider the elastic forces as jump conditions in the fluid equations. Specific developments have been done to be able to predict the behaviour of a membrane separating different fluids in the Eulerian framework. Because of important stability issues, an extension algorithm has been developed to remove the parasitic normal derivative of the scalar fields specific to the membrane. These achievements have been tested on benchmarks from the literature and ensure the suitable prediction of the proposed numerical methods. The jump conditions on the pressure and the velocity derivatives are well predicted, even in cases where the viscosity or the density are piecewise constant across the membrane.

Acknowledgments

The authors thank Airbus Defence & Space and the CNES (the French national space agency) for the funding of the PhD thesis of Alexis Dalmon. The authors gratefully acknowledge the CNRS (Centre National pour la Recherche Scientifique) for funding compensation of teaching hours to S. Tanguy during the year 2017-2018.

Appendix A. Stretched and pressurized membrane without the extension algorithm

The objective of this appendix is to show through an example that the extension algorithm is necessary. We consider the benchmark of section 4.2, the stretched and pressurized membrane immersed in a fluid with $\rho = 1$ and $\mu = 0.1$ in the whole computational domain. The computation breaks down after a few hundreds of temporal iterations without the extension algorithm, whatever the mesh. The comparison is done at early flow time, at $t = 0.1$.

Figure A.19 exhibits the scalar field I_1 obtained with the 128^2 mesh without the extension algorithm on the left and with it on the right at $t = 0.1$. The first invariant $I_1 = \lambda_r^2$ is the trace of the surface Cauchy-Green tensor, it represents the square of the principal strain of the membrane and has no physical meaning in the fluid regions.

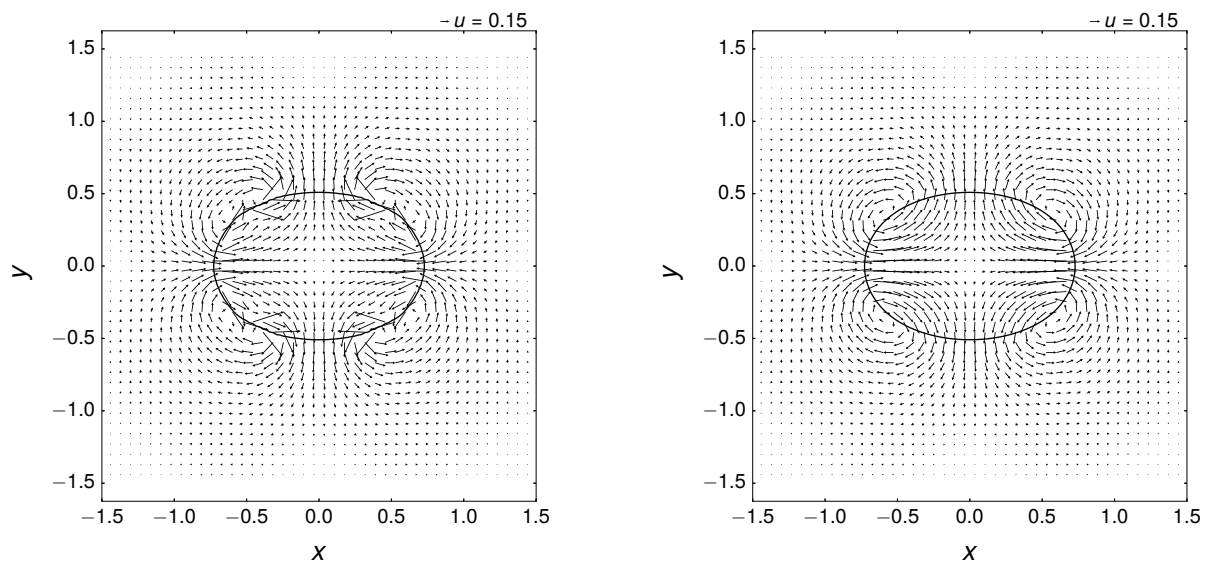


Fig. A.20. Velocity fields without the extension algorithm on the left and with it on the right, with $\rho = 1$ and $\mu = 0.1$ at $t = 0.1$.

We observe in the left plot that the first scalar invariant of the strain tensor exhibits important variations at the membrane. Where the membrane crosses the axis $y = 0$, the first invariant increases sharply between the outside and inside fluid regions. Moreover, strong tangential variations of the scalar invariant are visible at the membrane. In the right plot, the scalar field does not present variations in the normal direction and the tangential variation along the membrane is smooth and does not present singularities. Without the extension algorithm, nothing prevents the appearance of jumps in the solid variables.

Figure A.20 depicts the velocity fields for the same configurations as in figure A.19. We observe that the velocity field is disturbed at the membrane without the extension algorithm. Far from the zero level set, the two plots of figure A.20 are quite similar but some peaks of velocity appear in the left plot near the membrane.

This instability phenomenon appears for all the benchmarks tested in section 4 without the extension algorithm. To conclude, the extension algorithm stabilises the computation by cancelling the normal derivatives of the solid variables which enables improving the computations stability.

References

- [1] T. Aslam, A partial differential equation approach to multidimensional extrapolation, *J. Comput. Phys.* 193 (2004) 349–355.
- [2] D. Barthes-Biesel, Capsule motion in flow: Deformation and membrane buckling, *C. R. Physique* 10 (2009) 764–774.
- [3] D. Barthes-Biesel, J. M. Rallison, The time-dependent deformation of a capsule freely suspended in a linear shear flow, *J. Fluid Mech.* 113 (1981) 251–267.
- [4] R. Borges, M. Carmona, B. Costa, W. Don, An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.* 227 (2008) 3191–3211.
- [5] A. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *J. Comput. Phys.* 2 (1967) 12–26.
- [6] M. Cisternino, L. Weynans, A Parallel Second Order Cartesian Method for Elliptic Interface Problems, *Commun Comput. Phys.* 12(5) (2012) 1562–1587.
- [7] G. H. Cottet, E. Maitre, A level set method for fluid-structure interaction with immersed surfaces, *Math. Model. Meth. Appl. Sci.* 16 (3) (2006) 415–438.
- [8] A. Dalmon, M. Lepilliez, S. Tanguy, A. Pedrono, B. Busset, H. Bavestrrello, J. Mignot, Direct Numerical Simulation of a bubble motion in a spherical tank under external forces and microgravity conditions, *J. Fluid Mech.* 849 (2018) 467–497.
- [9] J. Dendy, Black box multigrid, *J. Comput. Phys.* 48 (1982) 366–386.
- [10] C. D. Eggleton, A. S. Popel, Large deformation of red blood cell ghost in a simple shear flow, *Phys. Fluids* 10 (8) (1998) 1834–1845.
- [11] R. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, S. Osher, A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (The Ghost Fluid Method), *J. Comput. Phys.* 152 (1999) 457–492.
- [12] A. N. Gent, A. G. Thomas, Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber, *J. of Polym. Sci.* 28 (1958) 625–628.
- [13] F. Gibou, R. Fedkiw, L.-T. Cheng, M. Kang, A second-order-accurate symmetric discretization of the Poisson equation on irregular domains, *J. Comput. Phys.* 176 (2002) 205–227.
- [14] A. Guittet, M. Lepilliez, S. Tanguy, F. Gibou, Solving elliptic problems with discontinuities on irregular domains - the Voronoi Interface Method, *J. Comput. Phys.* 298 (2015) 747–765.

- [15] C. W. Hirt, B. D. Nichols, Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, *J. Comput. Phys.* 39 (1981) 201–225.
- [16] S. Hou, X.-D. Liu, A numerical method for solving variable coefficient elliptic equation with interfaces, *J. Comput. Phys.* 202 (2005) 411–445.
- [17] G. Huber, S. Tanguy, J. Bera, B. Gilles, A time splitting projection scheme for compressible two-phase flows. Application to the interaction of bubbles with ultrasound waves, *J. Comput. Phys.* 302 (2015) 439–468.
- [18] S. Ii, X. Gong, K. Sugiyama, J. Wu, H. Huang, S. Takagi, A full eulerian fluid-membrane coupling method with a smoothed volume-of-fluid approach, *Commun Comput. Phys.* 12 (2) (2012) 544–576.
- [19] M. Kang, R. Fedkiw, X.-D. Liu, A boundary condition capturing method for multiphase incompressible flow, *J. Sci. Comput.* 15 (2000) 323–360.
- [20] L. Lac, D. Barthes-Biesel, N. A. Pelekasis, J. Tsamopoulos, Spherical capsules in three-dimensional unbounded Stokes flows: effect of the membrane constitutive law and onset of buckling, *J. Fluid Mech.* 516 (2004) 303–334.
- [21] B. Lalanne, L. R. Villegas, S. Tanguy, F. Risso, On the computation of viscous terms for incompressible two-phase flows with Level Set/Ghost Fluid Method, *J. Comput. Phys.* 301 (2015) 289–307.
- [22] L. Lee, R. J. Leveque, An immersed interface method for incompressible Navier-Stokes equations, *J. Sci. Comput.* 25 (3) (2003) 832–856.
- [23] M. Lepilliez, E. R. Popescu, F. Gibou, S. Tanguy, On two-phase flow solvers in irregular domains with contact line, *J. Comput. Phys.* 321 (2016) 1217–1251.
- [24] R. J. Leveque, Z. Li, The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficient and singular sources, *SIAM J. Numer. Anal.* 31 (4) (1994) 1019–1044.
- [25] R. J. Leveque, Z. Li, Immersed interface methods for Stokes flow with elastic boundaries or surface tension, *J. Sci. Comput.* 18 (3) (1997) 709–735.
- [26] Z. Li, M. C. Lai, The immersed interface method for the Navier-Stokes equations with singular forces, *J. Comput. Phys.* 171 (2001) 822–842.
- [27] X.-D. Liu, R. Fedkiw, M. Kang, A boundary condition capturing method for Poisson’s equation on irregular domain, *J. Comput. Phys.* 160 (2000) 151–178.
- [28] S. MacLachlan, J. Tang, C. Vuik, Fast and robust solvers for pressure-correction in bubbly flow problems, *Journal of Computational Physics* 227 (23) (2008) 9742 – 9761, ISSN 0021-9991.
- [29] J. Mignot, R. Pierre, M. Berhanu, B. Busset, R. Roumiguy, H. Bavestrello, S. Bonfanti, T. Miquel, L. O. Marot, A. Llodra-Perez, Fluid dynamic in space experiment, 68th International Astronautical Congress (IAC), Adelaide, Australia (IAC-17-A2.6.2).
- [30] C. Min, On reinitializing level set functions, *J. Comput. Phys.* 229 (2010) 2764–2772.
- [31] C. Min, F. Gibou, A second order accurate level set method on non-graded adaptive cartesian grids, *J. Comput. Phys.* 225 (2007) 300–321.
- [32] M. Mooney, A theory of large elastic deformation, *J. Appl. Phys.* 11 (1940) 582–592.
- [33] Y. Ng, C. Min, F. Gibou, An efficient fluid-solid coupling algorithm for single-phase flows, *J. Comput. Phys.* 228 (2009) 8807–8829.
- [34] R. W. Ogden, Large deformation isotropic elasticity - On the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids, *Proc. R. Soc. Lond.* 326 (1972) 565–584.
- [35] S. Osher, J. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comput. Phys.* 79 (1988) 12–49.
- [36] C. S. Peskin, Flow patterns around heart valves: a numerical method, *J. Comput. Phys.* 10 (1972) 252–271.
- [37] C. S. Peskin, Numerical analysis of blood flow in the heart, *J. Comput. Phys.* 25 (1977) 220–252.
- [38] C. S. Peskin, The immersed boundary method, *Acta Numerica* 11 (2002) 479–517.
- [39] C. Pozrikidis, Finite deformation of liquid capsules enclosed by elastic membranes in simple shear flow, *J. Fluid Mech.* 297 (1995) 123–152.
- [40] S. Ramanujan, C. Pozrikidis, Deformation of liquid capsule enclosed by elastic membranes in simple shear flow: large deformation and the effect of fluid viscosities, *J. Fluid Mech.* 361 (1998) 117–143.
- [41] L. Rueda Villegas, R. Alis, M. Lepilliez, S. Tanguy, A Ghost Fluid/Level Set Method for boiling flows and liquid evaporation: Application to the Leidenfrost effect, *J. Comput. Phys.* 316 (2016) 789–813.
- [42] R. Scardovelli, S. Zaleski, Direct Numerical Simulation of free-surface and interfacial flow, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 31 (1999) 567–603.
- [43] K. Sugiyama, S. Ii, S. Takeuchi, S. Takagi, Y. Matsumoto, A full Eulerian finite difference approach for solving fluid-structure coupling problems, *Journal of Computational Physics* 230 (2011) 596–627.
- [44] M. Sussman, P. Smereka, S. Osher, A Level Set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, *J. Comput. Phys.* 114 (1994) 146–159.
- [45] M. Sussman, K. Smith, M. Hussaini, M. Ohta, R. Zhi-Wei, A sharp interface method for incompressible two-phase flows, *J. Comput. Phys.* 221 (2007) 469–505.
- [46] Z. Tan, D. V. Le, Z. Li, K. M. Lim, B. C. Khoo, An immersed interface method for solving incompressible viscous flows with piecewise constant viscosity across a moving elastic membrane, *J. Comput. Phys.* 227 (2008) 9955–9983.
- [47] Z. Tan, D. V. Le, K. M. Lim, B. C. Khoo, An immersed interface method for the incompressible Navier-Stokes equations with discontinuous viscosity across the interface, *J. Sci. Comput.* 31 (3) (2009) 1798–1819.
- [48] S. Tanguy, T. Menard, A. Berlemont, A level set method for vaporizing two-phase flows, *J. Comput. Phys.* 221 (2007) 837–853.
- [49] S. Tanguy, M. Sagan, B. Lalanne, F. Couderc, C. Colin, Benchmarks and numerical methods for the simulation of boiling flows, *J. Comput. Phys.* 264 (2014) 1–22.
- [50] L. R. G. Treloar, The elasticity of a network of long chain molecules, *Trans. Faraday Soc* 39 (1943) 36–41.
- [51] C. Tu, C. S. Peskin, Stability and instability in the computation of flows with moving immersed boundaries: a comparison of three methods, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 13 (6) (1992) 1361–1376.
- [52] S. Xu, Z. J. Wang, Systematic derivation of jump conditions for the immersed interface method in three-dimensional flow simulation, *J. Sci. Comput.* 27 (6) (2006) 1948–1980.
- [53] Yeoh, Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates, *Rubber Chemistry and Technology* 63 (5) (1990) 792–805.

