



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Présentée et soutenue par :

ERIC MICHON

le 04 septembre 2018

Titre :

Dynamique de condensats de Bose Einstein dans un réseau
optique modulé en phase ou en amplitude

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED SDM : Chimie moléculaire - CO 046

Unité de recherche :

Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité (UMR5589)

Directeur/trice(s) de Thèse :

David Guéry-Odelin et Juliette Billy

Jury :

DAVID GUÉRY-ODELIN, Professeur d'Université, Directeur de Thèse

JULIETTE BILLY, Maître de conférence, Co-directrice de thèse

FRANK PEIRERA DOS, Directeur de Recherche, Rapporteur

SANTOS ISABELLE PHILIP, Directeur de Recherche, Rapporteur

LETICIA TARRUELL, Chargée de Recherche, Examineur

PIERRE PUJOL, Professeur d'Université, Examineur

REMERCIEMENTS

Quand tu arrive pour ta première année de thèse, tout frais après le stage qui n'a duré que 5 mois mais qui te semble avoir duré plusieurs années au regard de tout ce qui s'y est passé, et que quelqu'un qui est en fin de thèse te dit que ces trois années passent vite ... en générale tu reste sceptique. Tu ne comprends pas encore le soulagement teinté de nostalgie qui illumine alors le regard de celui ou celle qui prédit les prochaines années de ta vie. Puis, comme le disait un poète que j'ai eu la chance de rencontrer, il te faut gravir toutes les marches de la folie jusqu'au palier de la soutenance. Enfin, tu vois d'en haut le chemin parcouru et là, comme tes aînés avant toi, tu peux, non sans une certaine fierté qui démontre que tu n'as pas totalement grandi non plus, dire à tes cadets que trois ans ça passe vite quand même (en cachant dans ta poche ton petit sourire niais). Et bien que cela était apparent pendant ces années, c'est en arrivant en haut que tu prend pleinement conscience que de nombreuses personnes personnes ont participé à ta réussite et qu'il est alors temps de leur rendre hommage.

Tout d'abord, j'aimerais remercier les membres de mon jury : Isabelle Phillip, Franck Peirera Dos Santos, Leticia Taruell et Pierre Pujol. Merci pour vos conseils sur le manuscrit et la soutenance, pour la session de questions qui, bien qu'éprouvante à ce moment là, était très intéressante et pour vos encouragements.

Un grand merci à David Guéry-Odelin et à Juliette Billy, mes directeurs de thèse. David, je te remercie de m'avoir fait confiance et de m'avoir donné ma chance dans ton équipe et je crois qu'à travers ton encadrement, j'ai appris autant sur les aspects scientifique que sur d'autres aspects plus généraux. Juliette, je suis très reconnaissant que tu ais été ma co-directrice de thèse, toujours attentive et de bon conseils. Je crois que nos discussions sur la science (mais aussi sur des anecdotes marrantes) ont joué un rôle cruciale dans mon développement de futur docteur. C'était un grand plaisir de travailler avec vous et sous votre direction.

J'aimerais remercier le laboratoire Collisions Agrégats Réactivité dans lequel j'ai effectué tous mes stages et ma thèse. Tout d'abords merci au directeur, Jean-Marc L'Hermitte, de m'avoir accueilli pendant mes stages et ma thèse. Merci au service administratif du LCAR, Christine Soucasse et Carole Lecinana, pour leur gentillesse et leur efficacité. Merci au service technique et informatique pour leur aide, conseils, et bonne humeur : Stéphane Faure, Jean-Phillipe Loisel, Julien Mauchain, William Volondat, Laurent Polizzi, Phillipe Paquier, Emmanuelle Kierbel.

Alors, phrase cliché s'il en existe, mais : la thèse expérimentale s'est aussi un travail d'équipe et une aventure humaine. Vous souriez derrière ce manuscrit mais vous savez que c'est vrai, avouez-le ! Travailler des heures, parfois dans le noir de la salle d'expérience, en étant d'accord ou pas d'accord, dans une concentration extrême ou en dansant parce que la manip' à réussi ... ça créé des liens pardi ! Merci d'abord au plus anciens (désolé les gars) Gabriel Condon et François Damon que j'ai rencontrés à leur fin de thèse pendant mon stage. Quand je parlais plus haut des gens qui te disent "trois ans de thèse, ça passe vite ...", hein ! Vous vous rappelez, oui ! Gaby bon courage pour la suite, François accroche toi avec ces petits cancre ! Merci à Aéla Fortun : j'ai passé une belle année de thèse en ta compagnie, on a bien rigolé, on a eu de belles discussions et je te suis reconnaissant en tant que jeune loup. Et je lève mon cidre dans l'espoir de votre retour à Toulouse ! Merci Lucile Sanchez, parce que notre rencontre et le moment de celle-ci étaient particuliers mais je crois que l'amitié que nous avons tissé est ce qui me restera de tout ça. Bon courage et crois en toi parce que tu as de la valeur. Merci à Citlali Cabrera, tes conseils, ta bonne humeur, les tranches de rire en salle de manip' (et les quelques notions d'espagnole que j'emporte) sont les choses que je garderai de notre travail d'équipe. Je te souhaite une bonne continuation et bonne chance pour ton projet professionnel. Maintenant, c'est moi l'ainé alors : Merci à Marieke Berger, on a bien rigolé ensemble, c'était très agréable de partager la salle d'expérience avec toi. Maxime Arnal et Vincent Brunaud, merci pour l'année que nous avons passé ensemble. Votre apport à l'équipe est indéniable et je suis content de vous avoir rencontrés, même si on a pas eu l'occasion de se faire un jam. Bon courage Max pour ta thèse mais je te fais confiance. Bixente, je te souhaite la réussite dans le projet que tu entreprendra. Là, on arrive au moment où c'est moi qui dit "trois ans de thèse nianiania ...". Gabriel Chatelain, big up à toi ! Je sais qu'il n'y a pas qu'une seule chose que tu sais faire alors bon courage pour ton début de thèse. Il y a bien sûr un membre de l'équipe que j'omets ici, je ne l'oublie pas mais le moment n'est pas encore venu.

Quand je repense aux bureaux et couloirs que j'ai parcourus au laboratoire, je pense à des voix, des visages, des rires, l'odeur du café, des discussions, des cafards (un petit coup d'éponge à la cafet' les gens ...) entre autre. Mais je pense aussi à deux générations de doctorants que j'ai côtoyées ... et qui déchirent toutes les deux. La génération dans laquelle j'étais le petit nouveau et tous ces gens que je remercie et avec qui j'ai passé de bons moments au labo et d'excellentes soirées au Dub : Simon, Mina, Boris, Isabelle, Étienne, Guillaume, Lionel, Bertrand, Annaëlle, Giuseppe, Bastien plus quelques uns qui ne font pas parti du labo mais de cette génération : Morane, Camille, Florian et Aymeric. Entre les deux, ceux qui font le pont et avec lesquels j'ai passé le plus de temps dans ce labo : Julien, Eric, Benjamin (senior). Merci les gars, je savais sur qui compter quand il s'agissait de rire ou de se plaindre ou de tout ce qu'il y a entre. Puis ceux pour qui, au même titre que les précédemment cités, je faisais parti des meubles quand ils sont arrivés et qui ont apporté une fraîcheur et un renouveau. Que ce soit à midi, à la cafet', au babyfoot, au bar, pendant une brésilienne endiablée, ou tout simplement sur le balcon de mon bureau pendant une discussion de fin de journée, je vous remercie tous (mais pas toujours pour l'originalité de vos prénoms par contre) : Olivier (LCAR), Mickaël, Maxime (interféro), Julie (LCAR), François C., Evgeny, Lidice, Patricia, Ruben, Carles, Adrien, Clément, Wei-lin, Olivier (LPT), Benjamin (junior), Julie (LPT), non mais franchement, Charline, Hugo, Jordan et les stagiaires Etienne (LPT), Pierre, Celestin. Si j'en oublie, je m'en excuse ...

Pour reprendre les mots de l'artiste : "started from the bottom, now we're here". Tout simplement, une cass-ded pour ceux avec qui j'ai partagé mes études à Toulouse : Alex, Greg, Coco, Val, Yvan, Vicky Minaj, une sacré équipe, va ! Merci pour les sessions de travail, les bières et l'entraide, vous êtes beaux !

Une pensée pour les anciens de la Faculté des sciences de la Métare. Si un jour ce document vous parvient, je vous remercie aussi parce que sans vous je ne serai pas là où je suis et les souvenirs de ces soirées au Soggy Bottom, de la salle de l'ASUM et des parties de Playman Summer Games pendant un cours de Bouderbala m'accompagnent.

Et là, boum ! Une énorme bande de palois sauvages apparaît ! Ils ont l'air agressif ... mais j'ai réussi à intégrer leur troupeau. Ils me font maintenant confiance et me dévoilent certaines de leurs actions quotidiennes comme un des leurs. Les gens concernés se reconnaissent : merci pour tout ! J'ai une chance inouïe d'avoir rencontré des gens comme vous tous. Des projets plein la tête, des talents qui débordent de partout, des personnages, des caractères, des histoires, des souvenirs, des bières, des clopes, de longues discussions, de la musique, des films, des rires, des pleurs, des débats Brel ou Brassens qui finissent toujours en match nul, de la science, de la philo, du rap, du rock, des instants "psyché !" et surtout un "See you soon, you beautiful lot !" de rigueur, téh !

Alors moi, j viens d'Sainté b'lai ! Et du coup, hommage à la famille stéphanoise que je nommerais ici le CBC extended ! Vous voyez bien de qui je veux parler : le lycée, Ephata, Noisebreeder, the VEGS, le ribouldingue, le CBC etc ... Enfin toi lecteur qui te sens concerné(e) par ce paragraphe, tu comprends non ? Au moment d'écrire ces remerciements, il y a un grand nombre des gens que je n'ai pas vu depuis bien longtemps, même des gens auquel je pense ici que j'ai perdu de vu. Mais sachez que pour certains, on trouvera toujours un moment pour se retrouver parce qu'on a grandi ensemble. Pour les autres, je n'oublie pas d'où je viens. C'était bien l'adolescence et le début de la vie "d'adulte" avec vous.

Nous touchons au but, et au plus personnel. En effet, c'est vous que je veux remercier maintenant : ma famille. Ma mère, mon frère, mon père, ma grand-mère et plein d'autres gens que je considère comme ma famille et qui j'espère se reconnaîtront. Merci pour votre soutien, merci pour les coups de pieds aux fesses, merci pour l'éducation que j'ai reçu à travers vous. Je vous admire comme je vous embrasse comme je vous aime !

And finally, you get you're own paragraph Xiao QiQi. Thank you my darling for being you. You shone a warm light in my life when I didn't think such a thing existed and I'm willing to fight to keep it. I'm proud of you and looking at you gave me strength when I needed it the most. I'm ready to work alongside you to build a bright future. Wo ai ni, wo de gong zhu !

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	11
I Dispositif expérimental	17
1 Obtention et caractérisation du CBE	19
1.1 Considération théorique sur la condensation de Bose-Einstein	20
1.1.1 Statistique de Bose-Einstein et condensation dans un piège harmonique	21
1.1.2 Équation de Gross-Pitaevskii et régime de Thomas-Fermi	22
1.2 Dispositif expérimental	23
1.2.1 Piège magnéto-optique 3D et refroidissement laser	23
1.2.2 Refroidissement par évaporation : piège magnétique puis piège dipolaire	28
1.3 Imagerie et caractérisation du CBE	33
1.3.1 Imagerie par absorption dans le régime de faible saturation	34
1.3.2 Imagerie par absorption dans le régime de forte saturation	37
1.3.3 Estimation de la densité <i>in situ</i> d'un condensat de Bose-Einstein	37
1.4 Conclusion	42
2 Réseau optique : Dispositif et contrôle	43
2.1 Particule dans un potentiel périodique	44
2.1.1 Position du problème et théorème de Bloch	44
2.1.2 Description en fonction de Wannier et régime des liaisons fortes	45
2.2 Dispositif expérimental	46
2.2.1 Potentiel périodique	47
2.2.2 Montage optique et électronique	47
2.3 Contrôle et modulation	49
2.3.1 Contrôle de la phase relative θ_0	50
2.3.2 Modulation de l'amplitude du réseau	51
2.4 Calibration par diffraction Kapitza-Dirac	52
2.4.1 Régime de Raman-Nath	53
2.4.2 Résolution par utilisation des fonctions de Mathieu	54
2.5 Calibration par expansion soudaine de la chaîne de condensats	55
2.5.1 Interférences après temps de vol	56

2.5.2	Résultats expérimentaux et comparaison à un modèle tiré de la structure de bandes	58
-------	---	----

II Déplacement soudain de la phase 63

3 Déplacement soudain de la phase 65

3.1	Calibration par mesure de micro-oscillations	68
3.1.1	Étude expérimentale de l'oscillation	70
3.1.2	Simulation numérique	71
3.1.3	Analyse des états de Bloch et méthode de calibration	73
3.2	Mesure du temps de traversée tunnel dans un réseau optique	77
3.2.1	Présence d'effet tunnel	77
3.2.2	Étude de la structure de bande : effet tunnel et transport classique	79
3.2.3	Étude systématique de l'influence de l'angle sur le temps de traversée tunnel	80
3.2.4	Modèle semi-classique et comparaison avec l'expérience	80
3.3	Chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder microscopiques couplés	82
3.4	Test du microscope à rotation dans l'espace des phase	83

III Réseau modulé en phase et en amplitude 89

4 Dynamique de formation d'états alternés dans un réseau modulé 93

4.1	Description théorique du problème	94
4.1.1	Renormalisation du taux tunnel et émergence des états alternés	95
4.1.2	Au delà du modèle en champ moyen : la méthode Truncated Wigner	99
4.2	Résultats expérimentaux	105
4.2.1	Temps de nucléation en fonction du taux tunnel renormalisé	106
4.2.2	Temps de nucléation en fonction de la densité du CBE	107
4.2.3	Limite de l'approximation à une seule bande	109

5 Potentiel moyenné 115

5.1	Renormalisation de la profondeur	115
5.2	Résultats et calibration de la profondeur	116
5.3	Contrôle de la phase	118

6 Règles de sélection 121

6.1	Règles de sélection	121
6.2	Résultats préliminaires	123
6.2.1	Spectre et règles de sélection	123
6.2.2	Rôles des interactions et du confinement extérieur	125
6.3	Refroidissement dans le réseau	127

Conclusion 133

INTRODUCTION

Depuis les premières réalisations des techniques de piégeage et refroidissement laser [1, 2, 3] et des techniques de refroidissement par évaporation [4, 5], une des étapes majeures du développement du domaine des atomes froids a été l'observation expérimentale de la condensation de Bose Einstein avec un nuage atomique. En 1995, Carl Wieman et Eric Cornell produisent dans leur équipe pour la première fois un condensat de Bose-Einstein constitué d'environ 2000 atomes de rubidium [6]. Indépendamment, Wolfgang Ketterle observe lui aussi expérimentalement quelques mois après un condensat d'atomes de sodium [7]. Lorsque la température T diminue, la longueur d'onde de De Broglie thermique λ_T associée aux atomes d'un gaz sans interaction augmente [8] :

$$\lambda_T = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}} \quad (1)$$

La condensation apparaît lorsque la température est suffisamment basse et la densité suffisamment grande pour que les longueurs d'ondes atomiques se recouvrent. La réalisation expérimentale de ce phénomène collectif, prédit en 1925 par Albert Einstein en appliquant à un gaz d'atomes sans interaction les travaux de Satyendra Nath Bose sur les photons [9], est une conséquence directe du caractère ondulatoire de l'atome. L'obtention de condensat atomique a créé un très fort engouement au sein de la communauté. Les premières expériences utilisant les condensats ont surtout cherché à étudier les propriétés de cohérence et de superfluidité de ces gaz. Nous pouvons citer entre autres l'équipe de W. Ketterle qui en tirant profit des propriétés de superfluidité du condensat ont effectué des expériences de collisions de condensats qui permettent de voir soit le caractère superfluide du condensat soit d'observer des collisions thermiques entre particules [10, 11, 12], l'équipe de J. Dalibard qui a étudié la formation de vortex à l'intérieur d'un condensat [13, 14] ou encore l'équipe T. Esslinger et I. Bloch se servant du condensat comme une source cohérente d'atomes pour créer un laser à atomes [15]. Les équipes de A. Wilson et J. Walraven se sont également servi de condensats pour des expériences étudiant des collisions entre particules [16, 17]. Nous pouvons aussi citer l'utilisation par l'équipe de C. Salomon et Y. Castin du condensat de Bose-Einstein pour étudier les solitons [18].

Le domaine des atomes ultra-froids a atteint un niveau de maturité tel qu'il est aujourd'hui un outil de choix dans la réalisation d'expériences inspirées par des domaines variés de la physique. La possibilité de piéger, refroidir et d'imager un gaz d'atomes, de lui appliquer une

grande variété de potentiels électro-magnétiques et même de lui faire atteindre le régime de dégénérescence et obtenir un nuage cohérent offrent un fantastique choix de sujets qui peuvent être abordés. Il est possible grâce au domaine des atomes froids d'étudier des phénomènes relevant de la physique statistique, de la physique atomique, de la physique de la matière condensée, de la physique de hautes énergies et même d'effectuer des tests de la physique fondamentale. En effet, l'utilisation de nuages froids dans des expériences d'interférométrie atomique permet par exemple d'effectuer des mesures métrologiques de l'accélération de la pesanteur [19] et de vérifier le principe d'équivalence [20, 21].

Simuler un système quantique par un autre système quantique dont les propriétés sont plus accessibles et les paramètres mieux contrôlés, Richard Feynman en rêvait [22]. Le domaine des atomes froids offre depuis une quinzaine d'années une plateforme de plus en plus performante pour réaliser des simulations quantiques de phénomènes relevant le plus souvent comme nous l'avons dit d'autres domaines de la physique [23, 24].

Un certain nombre de ces simulations sont basées sur l'utilisation de réseaux optiques. Le réseau optique utilise l'interaction entre le moment dipolaire induit d'un atome et le champ électrique des lasers qui interfèrent au niveau du nuage [25, 26]. Cela crée un piège conservatif périodique. La physique des atomes froids placés dans de tels potentiels peut alors être décrite mathématiquement comme celle d'électrons piégés dans un cristal. Une des expériences fondatrices de ce nouveau domaine fût l'observation de la transition d'un état superfluide vers un état isolant de Mott [27]. En effet, en plaçant le condensat, au sein duquel résident des interactions répulsives entre atomes, dans un paysage de potentiel périodique dont les barrières sont suffisamment hautes, le transport entre site est inhibé et chaque atome se retrouve piégé sur un site du potentiel périodique : c'est la phase isolante. Cet état isolant, expliqué par Mott et Peierls par la présence d'interaction dans un système électronique, a été observé avec des atomes froids en 2002 dans l'équipe de M. Greiner et I. Bloch [28]. Comme indiqué, les simulations quantiques ne se limitent à l'utilisation de réseau optique, nous pouvons alors citer l'étude du transport quantique et en particulier l'effet du désordre dans un système : la localisation d'Anderson [29, 30].

Bien que cet thèse traite d'un système composé d'atomes bosoniques, il est important de mentionner que les simulations quantiques s'étendent aux atomes fermioniques. En effet, il est possible de réaliser des systèmes décrit par l'Hamiltonien de Fermi-Hubbard pour lesquels les interactions entre particules et le dopage peuvent être contrôlés [31, 32, 33]. En contrôlant les interactions au sein d'un gaz de fermions en utilisant les résonances de Feshbach [34], il est possible de passer continûment d'un régime où les atomes forment des condensats de molécules bosoniques à un régime où l'interaction entre atomes donne lieu à la formation de paires faiblement liées. Dans ce dernier régime, cet appariement, qui est au cœur du modèle BCS (Bardeen, Cooper, Schrieffer), explique la supraconductivité par la formation de paires d'électrons, les paires de Cooper [35]. Il est en pratique possible avec les atomes froids de passer continûment du régime de condensats de molécules au régime BCS et même d'étudier un régime intermédiaire [36].

Les expériences d'atomes froids piégés dans un réseau optique permettent d'obtenir des systèmes régis par l'Hamiltonien de Bose-Hubbard [37]. L'avantage de l'utilisation d'atomes froids réside dans le grand contrôle de tous les paramètres de l'Hamiltonien. En exploitant la grande variété de géométries atteignables, des expériences permettant d'étudier des systèmes

de spins frustrés, pour lesquels le niveau fondamental possède une grande dégénérescence, ont été réalisées à l'aide de réseaux triangulaires dont la phase est modulée temporellement [38, 39]. Plus généralement, l'application d'une force motrice telle que la modulation de la phase du réseau optique permet de créer des Hamiltoniens effectifs pour lesquels par exemple il est possible de renormaliser la profondeur ou le taux tunnel entre sites adjacents [40, 41]. La modulation de la phase permet même d'annuler complètement le transport quantique ou même de renormaliser le taux tunnel à une valeur effective négative [42, 43, 44]. Ce résultat a permis d'étudier des systèmes pouvant acquérir une phase topologique. En effet pour les systèmes à 2D et 3D, si le taux tunnel est renormalisé à une valeur négative, le transport d'un atome d'un puits à l'autre engendre l'acquisition d'une phase pour l'atome. Si l'atome effectue une boucle, il reviendra avec une phase qui peut-être assimilée à une phase de type Aharonov-Bohm [45, 46]. De cette manière ont également été réalisés expérimentalement avec des atomes froids les modèles de Hofstadter [47, 48, 49, 50] et de Haldane [51, 40]. Ces techniques ont également permis d'étudier des phénomènes à N-corps tel que la phase ferro et anti-ferromagnétique [52, 53].

Il est important de mentionner les progrès formidables des méthodes d'observation de ces systèmes pour comprendre certaines des avancées actuelles du domaine. En effet, il est maintenant possible grâce à l'imagerie par fluorescence et l'utilisation d'objectifs de microscope placés très proches de la chambre d'expérience de résoudre l'atome unique sur un site du réseau [54, 55, 56]. Des cartes du réseau sont maintenant réalisables sur lesquelles il est possible de voir le remplissage des différents sites ainsi que de déterminer les états de spins des atomes dans chaque site. La manipulation d'atomes est devenue également très performante. Il est maintenant possible à partir d'une carte d'un réseau optique 2D pour lequel les atomes sont immobiles de localement replacer les atomes initialement distribués dans le réseau [57].

Présentation du sujet

Le travail de l'équipe "Atomes Froids" du Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité dans laquelle j'ai effectué ma thèse s'inscrit en partie dans ce domaine de la simulation d'expériences de phénomènes de la physique de la matière condensée en utilisant un condensat de Bose-Einstein piégé dans un réseau optique à une dimension. Le projet à long terme de l'équipe vise à étudier l'influence du désordre dans le système sur le transport classique et quantique [58, 59]. En effet, l'équipe cherche à observer un effet tunnel assisté par le chaos. Lorsque la profondeur du réseau optique est fortement modulée, le système engendre des trajectoires classiques chaotiques. Dans une certaine gamme de paramètres, l'espace des phases devient mixte : le fond de chaque puits du réseau devient instable mais deux nouvelles zones de stabilités apparaissent sur les bords des puits [60, 61]. Il est alors possible d'observer un effet tunnel entre ces deux zones de stabilité ; le taux de passage par effet tunnel d'une zone à l'autre dépend fortement du désordre dans le système. Un portrait de la première étape de ce projet ainsi que le cahier des charges expérimentales nécessaire à la réalisation de ce dernier se trouvent dans l'introduction de la thèse de la doctorante qui m'a précédé [62]. En résumé, pour réaliser ce projet, il faut être en mesure de contrôler de manière statique et dynamique la phase du réseau ainsi que de pouvoir moduler son amplitude.

Au cours de ma thèse, après avoir participé à la fin de la construction du nouveau dispositif de l'équipe permettant de créer des condensats de Bose-Einstein de ^{87}Rb , nous avons mis en

place un réseau optique et le contrôle sur la phase et l'amplitude. Une fois ces implémentations terminées, nous avons alors pu nous servir de ce nouveau dispositif pour réaliser des expériences basées sur ce contrôle.

Tout d'abord, en nous servant du contrôle de la phase, nous pouvons induire des déplacements du potentiel du réseau, en déphasant un des bras du réseau par rapport à l'autre, et ce, de manière quasi-instantanée. Cette méthode permet, après avoir chargé un condensat adiabatiquement dans le réseau, de déplacer le potentiel de moins d'une période spatiale du réseau, i.e. de quelques dizaines de nm, plaçant alors les paquets initialement au repos au fond des puits sur une des pentes de leurs puits respectifs. Il s'ensuit une micro-oscillation des paquets dans leurs puits. Cette expérience nous a permis d'obtenir deux résultats intéressants : tout d'abord, la période de l'oscillation est directement liée à la structure de bande du réseau ; elle ne dépend ni des interactions, ni des anharmonicités du potentiel sinusoïdal ni du confinement extérieur. En somme, la période de cette oscillation ne dépend que de la profondeur du réseau. Elle en devient une candidate naturelle pour effectuer une calibration de la profondeur du réseau. Nous nous en sommes donc servis pour mettre au point une nouvelle méthode de calibration de la profondeur du réseau, précise sur une grande plage de profondeurs [63].

En partant de la même procédure expérimentale, nous avons observé que la dynamique de l'oscillation possède de l'effet tunnel. En effet, aux points de rebroussement de l'oscillation, i.e. lorsque les paquets arrivent à un point de l'oscillation où leur vitesse s'annule puis change de sens, ils rencontrent alors une barrière de potentiel et possèdent une probabilité non nulle de passage par effet tunnel à travers cette barrière. Expérimentalement, nous avons observé que lorsqu'une partie du paquet traverse la barrière, elle acquiert un retard dans son oscillation par rapport à la partie du paquet qui a continué son oscillation dans le même puits. En nous servant de la période de l'oscillation comme d'une horloge, nous avons pu effectuer une mesure directe de ce retard dû au passage à travers une barrière tunnel. Ceci constitue la première mesure avec des atomes ultra-froids du temps de traversée tunnel d'une barrière de potentiel. Nous avons également effectué des études systématiques des paramètres influençant ce temps tunnel [64]. Il est important de noter que la séparation du paquet dû au passage par effet tunnel d'une partie de celui-ci joue le rôle d'une lame séparatrice. Nous sommes en définitive dans notre expérience en présence d'une chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder microscopiques couplés. Nous montrons cet effet dans ce manuscrit. La séparation en deux des paquets dans chaque puits du réseau nous a également permis de tester expérimentalement une méthode développée dans l'équipe permettant grâce à une rotation dans l'espace des phases de résoudre la position de deux paquets espacés par quelques dizaines de nm

La deuxième partie de ma thèse s'est concentrée sur la réalisation d'expériences utilisant la modulation de la phase du réseau puis, en fin de thèse, la modulation de l'amplitude du réseau. En explorant différents régimes de fréquences de modulation, nous avons établi un spectre de phénomènes apparaissant dans différents régimes. Dans le régime des basses fréquences de modulation de phase, il est possible de renormaliser le taux tunnel entre sites adjacents du réseau. Pour un certain jeu de paramètres, le taux tunnel peut-être renormalisé à une valeur effective négative. Un atome effectuant un passage par effet tunnel dans un puits voisin acquiert une phase de π . Ceci entraîne une instabilité dynamique. Le système effectue alors une transition de phase d'un état périodique vers un état anti-périodique dit alterné. Ces états ont déjà été observés auparavant [42, 44]. Nous avons montré que cette transition

est déclenchée par les fluctuations quantiques lorsque que la température du nuage est faible. Lorsque la température augmente, les fluctuations thermiques prennent le relais [65].

Dans le régime des hautes fréquences de modulation de la phase, la vitesse de déplacement du potentiel sous l'effet de la modulation devient très grande devant la vitesse des atomes, ces derniers subissent alors l'action d'un potentiel moyenné dans le temps. Ceci a pour effet de renormaliser la profondeur du potentiel. Nous pouvons, en changeant l'amplitude de modulation, modifier continûment la profondeur du réseau. Il nous est également possible avec une grande précision grâce à cette technique de placer le condensat dans la position la plus hors équilibre atteignable, en haut des puits de potentiel du réseau.

Enfin, dans le régime où la fréquence de modulation de la phase, ou de l'amplitude, est de l'ordre de la fréquence séparant les deux premières bandes d'énergie du réseau, nous pouvons effectuer des transitions entre bandes. L'utilisation de la modulation d'amplitude et de phase, deux types d'excitations possédant des parités opposées, nous a permis de révéler des règles de sélection pour les transitions autorisées par l'une ou l'autre méthode de transfert d'énergie. En effet, certaines transitions ne sont autorisées à impulsion nulle, i.e. au centre de la zone de Brillouin, que pour la modulation de phase, et d'autres pour la modulation d'amplitude. Nous avons également étudié le rôle des interactions et du confinement extérieur sur ces transitions.

Plan du manuscrit

Mon manuscrit est organisé en trois parties :

- La première partie décrit l'ensemble du montage expérimental. Le premier chapitre se concentre sur le dispositif de production de condensats actuel en effectuant de brefs rappels sur les techniques de refroidissement et de piégeages utilisées. Le deuxième chapitre présente le système permettant de créer le réseau optique 1D, et décrit deux méthodes typiques de calibration de la profondeur.
- La deuxième partie est consacrée aux expériences utilisant un déplacement soudain de la phase. Nous verrons comment nous avons effectué la mesure du temps de traversée d'une barrière de potentiel d'un paquet d'atomes par effet tunnel. Je présente également la nouvelle méthode de calibration que nous avons développée. Je montre aussi la présence d'une chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder microscopiques sur nos expériences. Enfin, j'explique comment nous avons pu tester une nouvelle méthode d'observation permettant de résoudre la position de deux paquets d'atomes dans un même puits du réseau à l'aide d'une rotation dans l'espace des phases.
- La troisième partie contient les résultats de toutes les expériences que nous avons effectuées au cours de ma thèse autour du contrôle dynamique de la phase et de l'amplitude du réseau. Dans le premier chapitre de cette partie, je développe l'étude que nous avons menée autour d'une transition de phase dynamique déclenchée par les fluctuations quantiques. Je décrirai d'abord le modèle analytique et numérique sur lequel nous nous sommes appuyés pour interpréter nos résultats expérimentaux ainsi que le résultat des simulations numériques. Je présente ensuite les résultats expérimentaux et les conclusions issues de la comparaison entre expériences et simulations numériques. Le deuxième chapitre de cette partie présente les résultats que nous avons obtenus en modulant la phase du réseau à une grande fréquence. J'explique comment

la profondeur peut alors être renormalisée puis présente les résultats expérimentaux. Le dernier chapitre de ce manuscrit présente les résultats préliminaires d'une étude de modulation de phase et d'amplitude résonante. J'explique que lorsque la phase ou l'amplitude sont modulées à une fréquence de l'ordre de la fréquence séparant les deux premières bandes d'énergie du réseau, les atomes peuvent alors effectuer des transitions vers des bandes d'énergies supérieures. J'explique d'abord comment des règles de sélection apparaissent puis présente plusieurs études expérimentales que nous avons effectuées autour de ce sujet.

Première partie
Dispositif expérimental

CHAPITRE 1

OBTENTION ET CARACTÉRISATION DU CBE

Introduction

À mon arrivée en stage, le nouveau dispositif de production de condensats de rubidium 87 voyait l'une de ses dernières pierres se rajouter à l'édifice : la mise en place du piège dipolaire croisé. Ce nouveau dispositif a permis d'améliorer les performances par rapport à l'ancien. En effet, dû aux vieillissement des lasers de puissance et à une détérioration du vide, l'ancien dispositif ne permettait plus d'obtenir de condensat. Ce nouveau dispositif se compose tout d'abord d'un système maintenu sous ultra-vide grâce à trois pompes, nous permettant d'obtenir une pression inférieure à 10^{-10} mBar. Le système à vide se termine par une cellule en verre de longueur $L_{cell} = 10$ cm et de la largeur et hauteur $l_{cell} = 3$ cm. Les atomes de ^{87}Rb sont refroidis et canalisés d'un piège magnéto-optique (PMO) 2D fabriqué par le SYRTE vers un PMO 3D (figure 1.1). Ils sont ensuite transférés vers un piège magnétique dans lequel est effectué une première étape de refroidissement par évaporation micro-onde. Le nuage est ensuite chargé dans un piège hybride composé d'un gradient de champ magnétique et d'un piège dipolaire croisé. C'est dans ce piège et à l'aide d'une deuxième étape d'évaporation que le nuage se condense.

Pour permettre la caractérisation des différentes étapes de l'expérience ainsi que du condensat, nous avons exploité différentes techniques d'imagerie. Le dispositif comporte deux imageries par absorption de grandissements différents et selon des axes différents. Une imagerie nous permet d'observer les étapes où le nuage est très peuplé, du PMO à la fin de l'évaporation micro-onde. La deuxième imagerie ayant une meilleure résolution devient utile lorsque nous imageons le nuage au cours de la dernière phase d'évaporation dans le piège hybride ou pour le condensat. Ces deux imageries par absorption sont toujours effectuées après un temps de vol ou *TOF* (*time-of-flight*) pendant lequel le nuage s'étend. Une dernière technique mise en place nous permet de réaliser des images du condensat idéalement sans *TOF*, nous autorisant l'accès à la densité *in situ* du condensat dans le piège dans lequel il est créé.

Dans cette partie, j'effectue d'abord un rappel sur la condensation de Bose-Einstein, puis présente les étapes ainsi qu'une vision globale d'une séquence expérimentale. Je présente

succinctement le dispositif expérimental ainsi que les différentes étapes menant à la condensation puis les méthodes de caractérisations du condensat. En dernier, je décris les systèmes d'imageries utilisés et les mesures de densités *in situ* effectuées.

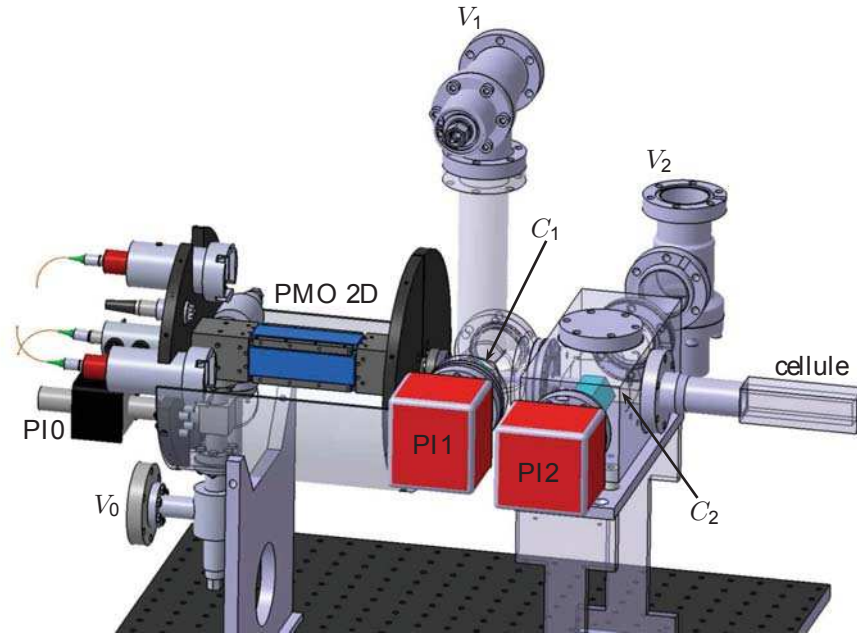


FIGURE 1.1 – Vue générale de la chambre à vide. La source d'atomes froids (PMO 2D) est connectée à la cellule en verre via les croix C_1 et C_2 . Trois pompes (PI0, PI1, PI2), chacune séparée par un étage de vide différentiel, assurent la qualité du vide.

1.1 Considération théorique sur la condensation de Bose-Einstein

La condensation de bosons à très faible température a été proposée par Albert Einstein en 1925, s'appuyant sur les travaux de Satyendranath Bose qui a développé en 1924 une description statistique des quanta de lumière. Einstein prédit alors l'existence d'une transition de phase dans un gaz parfait d'atomes. Cette transition s'associe avec la condensation d'une fraction macroscopique d'atomes dans le même état quantique. Elle se produit à une température pour laquelle la longueur d'onde de de Broglie, caractéristique de la nature ondulatoire des particules, devient de l'ordre de la distance interatomique. Les températures alors atteignables expérimentalement à cette époque classent cet effet dans la famille des résultats purement académiques. Le développement du refroidissement laser puis du refroidissement par évaporation ont permis l'obtention en 1995 des premiers condensats d'alcalins dans les équipes de E. Cornell, C. Wieman et W. Ketterle. Cette section sera consacrée à une description de la condensation de Bose-Einstein et à une définition des éléments théoriques liés à la condensation qui seront utilisés dans ce manuscrit. Je présente d'abord un bref développement statistique de la condensation et étudie la transition dans un piège harmonique pour un gaz dilué de Bose, puis j'introduis l'équation de Gross-Pitaevskii prenant en compte les interactions et enfin parle rapidement de la limite de Thomas-Fermi dans le cas d'un grand nombre d'atomes.

1.1.1 Statistique de Bose-Einstein et condensation dans un piège harmonique

Considérons un gaz parfait de Bose dans lequel il n'y a pas d'interaction entre particules. Le système est alors décrit par un Hamiltonien de particules indépendantes $\hat{H} = \sum_i \hat{H}_i^{(1)}$. Dans l'ensemble grand canonique, le nombre d'atomes total s'écrit :

$$N = \sum_i \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_i - \mu)] - 1} = \sum_i \bar{n}_i \quad (1.1)$$

avec ϵ_i les énergies propres de l'Hamiltonien à une particule, μ le potentiel chimique et $\beta = 1/k_B T$. On peut l'écrire comme la somme des nombres moyens d'occupations :

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_i - \mu)] - 1} \quad (1.2)$$

L'équation précédente nous donne alors la contrainte physique pour le potentiel chimique $\mu < \epsilon_0$ où ϵ_0 est l'énergie de l'état fondamental. On voit que lorsque $\mu \rightarrow \epsilon_0$, le nombre d'atomes dans cet état d'énergie minimum diverge. Ceci est le mécanisme à l'origine de la condensation de Bose-Einstein et la signature de cette dernière. La contrainte donnée ci-dessus implique également que le nombre de particules dans les états excités N^T est borné :

$$N^T = \sum_{i \neq 0} \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_i - \mu)] - 1} < N_{Max}^T = \sum_{i \neq 0} \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon_i - \epsilon_0)] - 1} \quad (1.3)$$

On comprend donc que si à une température fixée on place un nombre d'atomes supérieur à N_{Max}^T , l'excédent ira peupler l'état fondamental. Cela correspond à la saturation des niveaux excités.

Si maintenant, nous nous plaçons dans un piège harmonique isotrope, les énergies associées aux états propres de l'Hamiltonien s'écrivent :

$$\epsilon_n = \hbar\omega(n + 3/2) \quad (1.4)$$

avec ω la fréquence du piège, et $n = n_x + n_y + n_z$ le nombre quantique caractérisant l'état de vibration de l'oscillateur selon les trois axes. On écrit la dégénérescence de chaque niveau par :

$$g_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (1.5)$$

On peut alors calculer le nombre de saturation des niveaux excités, en définissant $\xi = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$:

$$N_{Max}^T = \sum_{(n_x, n_y, n_z) \neq (0,0,0)} \frac{1}{\exp(n\xi) - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\exp(n\xi) - 1} \quad (1.6)$$

Dans la limite semi-classique, nous pouvons remplacer la somme discrète ici par une intégrale et approximer alors le nombre de saturation

$$N_{Max}^T \simeq 1.202 \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 \quad (1.7)$$

En définissant la longueur d'onde de de Broglie thermique :

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (1.8)$$

avec m la masse d'un atome, nous pouvons établir une condition sur la densité en espace des phases D :

$$D \equiv \rho\lambda_{dB}^3 \simeq 2.612 \quad (1.9)$$

avec ρ la densité atomique spatiale.

Nous savons maintenant que pour atteindre la condensation, il nous faut réduire la température du nuage et augmenter sa densité pour atteindre un régime où la longueur d'onde de de Broglie est de l'ordre de la distance interatomique au sein du nuage. Cette description repose sur l'approximation d'un gaz dépourvu d'interaction entre particules. La prise en compte de ces interactions ne modifie que très légèrement la température critique de transition mais pour décrire la physique du condensat dans les expériences que je présenterai dans les chapitres suivants il est indispensables de les introduire.

1.1.2 Équation de Gross-Pitaevskii et régime de Thomas-Fermi

L'équation de Gross-Pitaevskii

Dans un gaz de bosons dilués, nous pouvons approximer l'interaction entre particules à un potentiel de champ moyen. La théorie de la diffusion nous permet alors de donner une constante qui définit les interactions entre particules en fonction de la longueur de diffusion en onde s a :

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (1.10)$$

nous pouvons alors décrire l'évolution d'un condensat composé de N particules et soumis à un potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$ par l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\psi_0(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \psi_0(\mathbf{r}, t) \quad (1.11)$$

nous choisissons alors la normalisation : $\int |\psi_0|^2 dV = 1$. Dans la cas d'une solution stationnaire pour laquelle la fonction d'onde du condensat évolue avec le temps par :

$$\psi_0(\mathbf{r}, t) = \psi_0(\mathbf{r}) \exp\left(-\frac{i\mu t}{\hbar}\right) \quad (1.12)$$

l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps s'écrit simplement :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) - \mu + g|\psi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \psi_0(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.13)$$

avec μ le potentiel chimique donné par $\mu = \partial E / \partial N$.

Régime de Thomas-Fermi

Dans le cas où le nombre d'atomes du condensat est très grand, nous pouvons alors faire l'approximation que l'énergie d'interaction devient très grande devant l'énergie cinétique. Cette approximation, dite de Thomas-Fermi, nous permet de simplifier l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$gn(\mathbf{r}) + V_{ext}(\mathbf{r}) = \mu \quad (1.14)$$

avec $n(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})|^2$. Nous pouvons alors réécrire la fonction d'onde du condensat telle que :

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\mu - V(\mathbf{r})}{g}} \quad (1.15)$$

Si le condensat est créé dans un piège harmonique de fréquences de piège ω_i selon chaque direction i , le profil en densité du condensat prend la forme d'une parabole inversée caractéristique du condensat et qui nous permet expérimentalement de le différencier d'un nuage thermique qui possède lui un profil gaussien. Le rayon caractéristique dit de Thomas-Fermi selon la direction i est définie par :

$$R_i = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_i^2}}. \quad (1.16)$$

1.2 Dispositif expérimental

Le nouveau dispositif étant extensivement décrit dans les thèses respectives de Gabriel Condon [66] et Aéla Fortun [62], mes prédécesseurs et principaux acteurs de la construction, je ne m'étends pas sur le dispositif expérimental plus que ce qui est nécessaire à la compréhension du reste de ce manuscrit. Je présente donc ici les différentes étapes du PMO 2D chargeant le PMO 3D jusqu'à la condensation en détaillant la séquence et les résultats à chaque étape. J'effectue également un résumé de la séquence complète pour une vision globale.

1.2.1 Piège magnéto-optique 3D et refroidissement laser

Après la compréhension de l'organisation des degrés de libertés internes de l'atome au début du siècle dernier, le laser a permis de développer des techniques de piégeage et de refroidissement d'un gaz. Ces techniques sont maintenant devenues des outils indispensables à la physique atomique et à la recherche fondamentale dans ce domaine [1]. Le laser a permis le développement expérimental de ce domaine jusqu'au piège magnéto-optique proposé par J. Dalibard, qui combine une mélasse optique et un gradient de champ magnétique permettant de rendre les forces de pression de radiation des lasers contra-propageants de la mélasse dépendants de la position des atomes dans le gradient. Ce piège a été réalisé pour la première fois par E.L. Raab, S. Chu et D. Pritchard en 1987 [67]. À l'époque de l'écriture de ce manuscrit, le PMO est le point de départ de la plupart des (voire de toutes les) expériences d'atomes froids. Je ne rappelle donc pas son fonctionnement mais me concentre plutôt sur une brève description de notre dispositif.

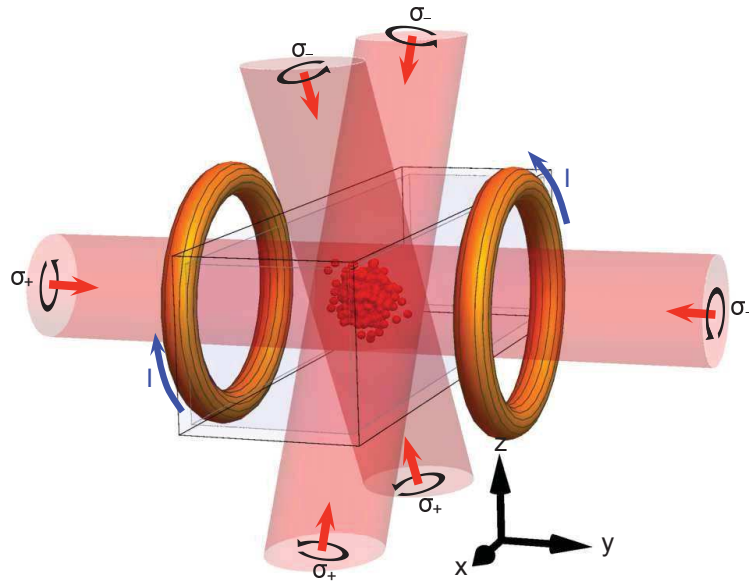


FIGURE 1.2 – *Schémas des faisceaux lasers refroidisseurs avec leur polarisation. ; sont également représentées les bobines de champ magnétique du PMO 3D.*

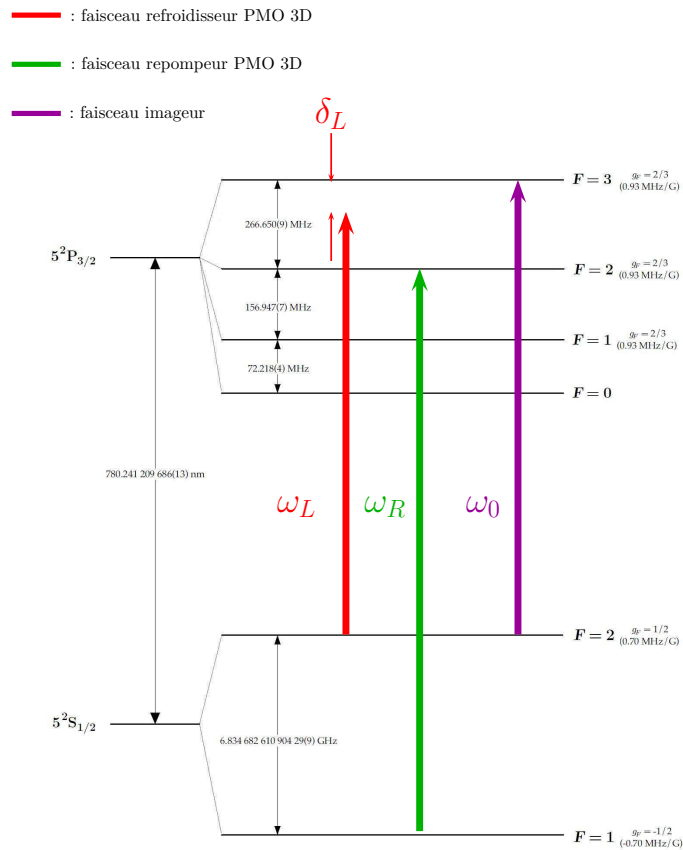


FIGURE 1.3 – *Structure du Rubidium 87. Les transitions laser qui sont utilisées pendant le refroidissement dans le PMO sont indiquées.*

Géométrie et fréquences des lasers

Un four à rubidium à une température de fonctionnement de 100°C alimente un PMO 2D. Le piège magnéto-optique 2D permet le refroidissement et la collimation du jet atomique de départ. Il a été fabriqué par le SYRTE. Lorsque le four est allumé, la pression dans la zone PMO 2D est d'environ 10^{-8} mbar. Les courants dans les bobines de ce piège sont d'environ 2A et nous connectons deux fibres, à la sortie desquelles nous avons environ 50mW, amenant les lasers refroidisseurs permettant de créer trois zones de refroidissement¹. Un faisceau résonant (faisceau pousseur) permet de pousser les atomes vers la cellule. Après passage dans deux zones de vide différentiel, les atomes sont capturés par le PMO 3D.

Les 3 paires de faisceaux laser de ce dernier sont créées par une même source, une diode Toptica 780 nm, sur une table séparée (figure 1.4). Le faisceau issu de la diode est alors séparé et amplifié par deux amplificateurs Sacher permettant de créer à partir de ces deux faisceaux d'environ 2W et 700mW les faisceaux refroidisseurs 2D et 3D, pousseur et imageur. La fréquence utilisée pour le refroidissement correspond à une transition entre le niveau fondamental $F = 2$ et le niveau excité $F' = 3$ (cf figure 1.3). La fréquence est asservie par absorption saturée à l'aide d'un EOM [66]. La diode Toptica possède un module intégré proportionnel-intégrateur-dérivateur qui nous permet de rétro-agir sur le courant de la diode directement. Après double passage dans un AOM nous permettant de contrôler la fréquence des lasers refroidisseurs durant les étapes de refroidissement dans le PMO, nous injectons une fibre qui permet d'acheminer le laser sur la table de l'expérience principale. Nous avons une puissance d'environ 600mW en entrée de fibre. En sortie de fibre, la puissance laser est d'environ 200mW. Nous prélevons alors une petite partie de la puissance grâce à un cube polariseur nous permettant de rétro-agir sur l'AOM avant la fibre pour asservir la puissance laser. Le faisceau est alors séparé en 6 grâce à un jeu de lames demi-onde et de cubes polariseurs pour créer les 3 paires de faisceaux (figure 1.6) : une paire de faisceaux arrive horizontalement sur la cellule, les deux autres arrivent avec un angle d'environ 30° avec l'axe vertical sur la cellule (figure 1.2). Sur la table des faisceaux refroidisseurs est également créé le faisceau imageur asservi sur la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$. Nous transportons également ce faisceau grâce à une fibre jusqu'à l'expérience.

Lors du cycle d'absorption-émission spontanée, il y a une probabilité que les atomes se désexcitent dans l'état fondamental $F = 1$. Cet état n'est pas résonant avec la fréquence laser utilisée pour le refroidissement, ce processus ne s'applique alors plus pour ces atomes et ils restent dans cet état dit noir. Pour éviter de perdre de l'efficacité ou bien de totalement stopper le refroidissement après que la plupart des atomes soient tombés dans l'état noir, nous rajoutons un faisceau *repompeur*, résonant avec la transition $F = 1$ vers $F' = 2$ (figure 1.3). Ce faisceau est également produit par une deuxième diode laser toptica placée sur une table séparée de l'expérience (figure 1.5). La puissance est séparée en deux : une partie de la puissance est acheminée par une fibre vers l'arrière du MOT 2D. Le faisceau est alors injecté dans le MOT 2D à travers un hublot le long de la propagation du nuage. L'autre partie de la puissance de la table *repompeur* est amenée sur la table principale grâce à une fibre. Le faisceau est ensuite divisé en deux par un cube polariseur et est superposé aux faisceaux horizontaux du PMO 3D. Sa puissance est asservie de la même manière que les faisceaux refroidisseurs et sa fréquence est asservie grâce à une deuxième absorption saturée. Le contrôle se fait l'aide d'un Lock-In amplifier fournissant à un proportionnel-intégrateur un signal d'erreur. La rétro-action se fait également sur le courant de la diode.

1. La laser repompeur est injecté directement à travers un hublot dans l'axe de transport du nuage

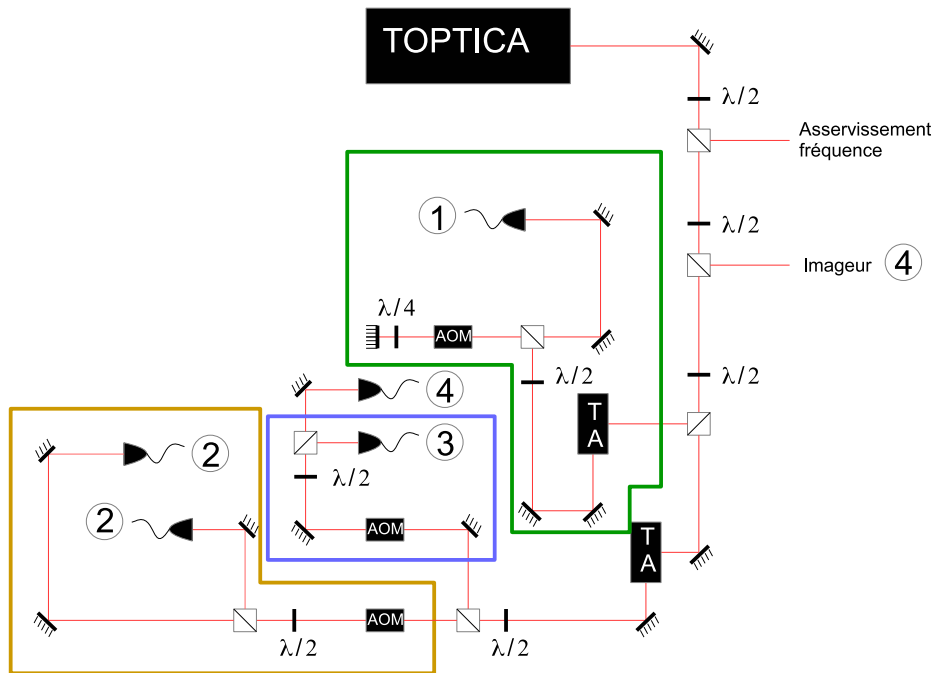


FIGURE 1.4 – *Schéma optique de principe de la préparation des faisceaux refroidisseurs 3D (1) et 2D (2), pousseur (3) et imageur (4).*

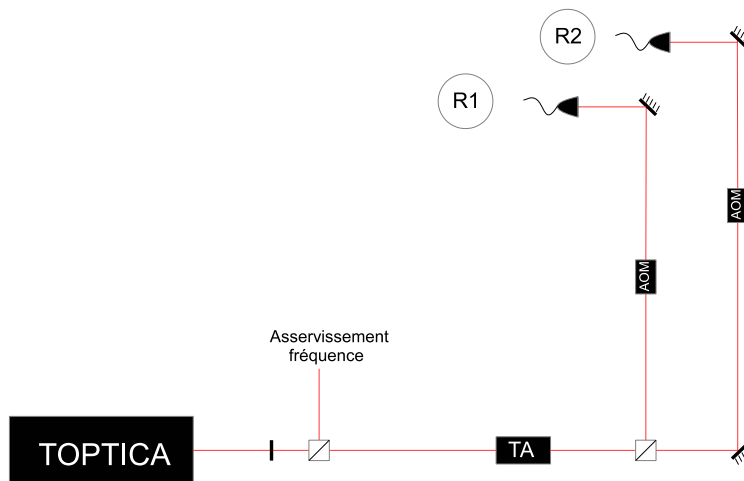


FIGURE 1.5 – *Schéma optique de principe de la préparation des faisceaux repompeurs 2D et 3D.*

augmentons donc linéairement le désaccord de -3Γ à -7.5Γ et diminuons corrélativement l'intensité. À cette étape, nous avons également coupé le gradient de champ magnétique et rallumé le repompeur. Nous atteignons alors des températures à l'issue de la mélasse de l'ordre de $30 \mu\text{K}$ pour un nuage d'environ 3.5×10^9 atomes (I). La dernière étape, que nous appelons *dépompage* nous permet de placer les atomes dans l'état qui sera piégé dans le gradient de champ magnétique (III). En effet, le piégeage d'atomes dans un piège magnétique dépend de leur sous-état magnétique. Je développerai ce point un peu plus loin lors de la description de ce piège. Nous choisissons de nous placer dans l'état fondamental $F = 1$; $m_F = -1$. Pour ce faire, dans l'étape de dépompage nous éteignons complètement le repompeur. Les atomes après quelques cycles tombent tous dans l'état $F = 1$. Un tiers de ces atomes est donc dans le sous état $m_F = -1$, et sera donc piégé dans le gradient de champ magnétique. Nous obtenons un gaz d'environ 3×10^9 atomes avant chargement. La séquence complète est résumée sur la figure 1.7.

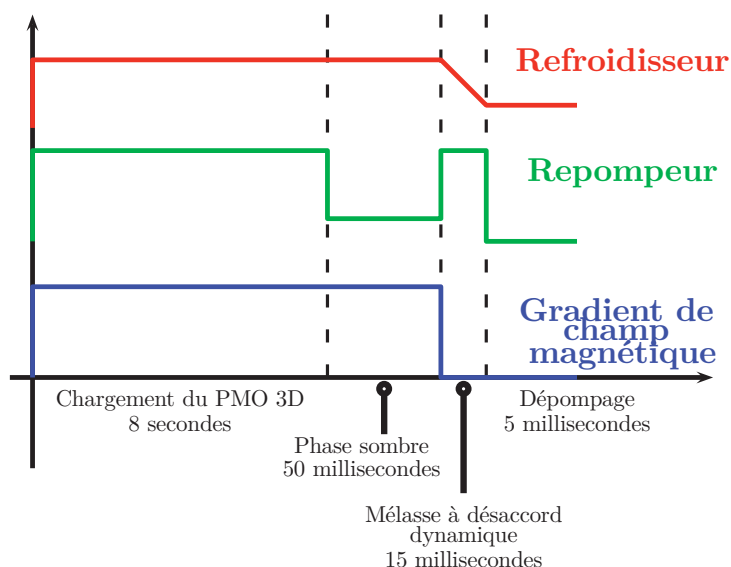


FIGURE 1.7 – *Résumé de la séquence expérimentale dans le PMO 3D. Puissances laser et champ magnétique en fonction de l'étape. Figure tirée de [62].*

1.2.2 Refroidissement par évaporation : piège magnétique puis piège dipolaire

Pour atteindre la condensation de Bose-Einstein, il nous faut gagner en densité dans l'espace des phases. Le refroidissement laser et la technique du piège magnéto-optique présentent une limite : la ré-absorption de photons spontanément émis lors du processus de refroidissement crée une diffusion dans l'espace des vitesses. Ceci limite le gain en température ainsi que la densité atteignable dans l'espace réel. Pour contourner ce problème, H. F. Hess [5] proposa en 1986 une technique de refroidissement impliquant un processus dissipatif assuré par les collisions élastiques et plus précisément par l'élimination des atomes les plus énergétiques puis de la rethermalisation du gaz. Nous réduisons alors la température du gaz nous permettant également un gain important en densité en espace des phases. Cette technique a permis la production des premiers condensats de Bose-Einstein [6]. Je rappelle simplement

1.2 Dispositif expérimental

le principe de l'évaporation puis je présente ci-après les deux pièges que nous utilisons, les techniques de refroidissement par évaporation employées ainsi que les résultats obtenus.

Principe du refroidissement par évaporation

Les figures 1.8, 1.9, 1.10 résument le principe et l'intérêt de la technique de refroidissement par évaporation en se plaçant dans l'espace des phases. Le refroidissement par évaporation repose sur un principe simple : les particules qui après collisions élastiques acquièrent une énergie suffisante sont évacuées du piège. Les collisions assurent également une rethermalisation continue du gaz. Ce processus refroidit le gaz et permet un gain en densité dans l'espace des phases. Si nous faisons simplement un filtrage des particules les plus énergétiques, excluant toutes les particules qui sont au-delà du cercle, la densité en espace des phases resterait inchangée (figure 1.8). Or lors d'une collision (figure 1.9), l'atome ayant gagné en énergie pourra alors atteindre des zones de plus fort potentiel dans le piège, il sortira donc du cercle. La particule ayant cédée de l'énergie ne pourra plus rester dans la zone dans laquelle elle se trouve, son énergie cinétique l'obligeant à se placer dans une zone de potentiel plus faible i.e. le centre du piège. De cette manière, non seulement la température moyenne diminue mais la densité au centre du piège augmente bien que le nombre d'atomes total diminue (figure 1.10).

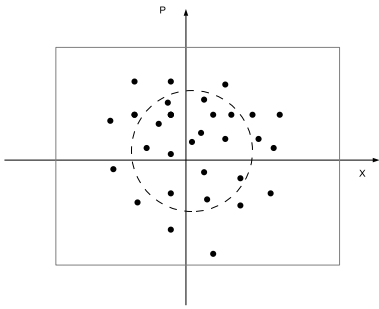


FIGURE 1.8 – *Distribution dans l'espace des phases. Lors de l'évaporation, les particules au delà du cercle seront expulsées du piège.*

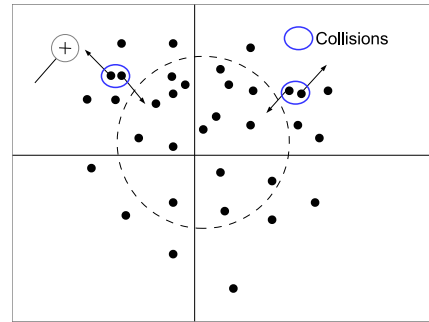


FIGURE 1.9 – *Zoom de la figure 1.8, importance des collisions dans le processus d'évaporation.*

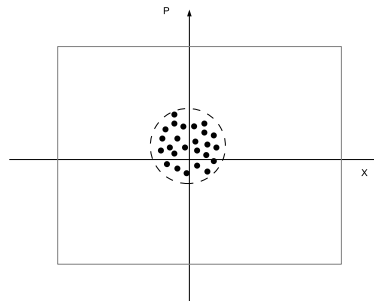


FIGURE 1.10 – *Distribution à la fin de l'évaporation. Le nuage est moins peuplé mais sa densité en espace des phases est plus élevée. La température moyenne est abaissée et la densité en espace réel est augmentée.*

Cette explication qualitative permet une compréhension intuitive du processus. Pour une étude plus quantitative et détaillée, on peut se référer aux thèses de mes prédécesseurs [66, 62] ou au cours du collège de France donné par Claude Cohen-Tannoudji de 1996 à 1997 [68] dans laquelle on peut suivre le développement d'un modèle simple en lois d'échelle.

Piège magnétique

La première étape de refroidissement par évaporation de notre expérience s'opère dans un piège magnétique quadrupolaire. Ce piège est créé par l'empilement de trois paires de bobines en configuration anti-Helmholtz (figure 1.12). Cette configuration crée un gradient de champ comportant un minimum au centre du piège. Le champ magnétique au voisinage du minimum est décrit par :

$$\vec{B}(x, y, z) \cong b' \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \\ z \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

avec b' le gradient de champ magnétique, qui peut valoir au maximum 300 G/cm sur notre dispositif.

Le potentiel perçu par les atomes dépend de leur sous-état magnétique :

$$V(r) = m_F g_F \mu_B \|\vec{B}\| \quad (1.18)$$

avec m_F le sous-état Zeeman de l'atome, g_F le facteur de Landé et μ_B le magnéton de Bohr. On voit que selon le sous-état, l'atome aura un comportement différent vis-à-vis du champ magnétique. Comme indiqué plus haut, à la fin de l'étape de *dépompage*, nos atomes se trouvent dans l'état fondamental $F = 1$ ($g_{F=1} = -1/2$), avec une quasi équi-répartition entre les sous-états. Seuls les atomes dans le sous-état $m_F = -1$ seront piégés puisque ses atomes associent au minimum de $\|\vec{B}\|$ un minimum de potentiel ($m_F g_F \mu_B > 0$). Nous chargeons environ un tiers de nos atomes dans le piège magnétique.

Le chargement est effectué en allumant une seule paire de bobines créant un gradient $b'_{capt} = 62$ G/cm. Une bobine supplémentaire d'axe horizontal perpendiculaire à l'axe des faisceaux PMO nous permet de modifier la position du minimum de champ, nous permettant de faire coïncider sa position avec le centre du nuage issu du PMO. Il nous est également possible de dissymétriser les courants dans les deux bobines du piège pour déplacer verticalement le centre du piège. Nous obtenons après chargement dans le piège quadrupolaire environ 1×10^9 atomes à une température de l'ordre de 100 μ K.

Avant de commencer la phase d'évaporation, nous augmentons le taux de collisions en allumant les deux autres paires de bobines lors d'une étape de compression adiabatique. La température du nuage augmente alors jusqu'à 300 μ K. L'évaporation peut alors commencer : dans ce piège nous utilisons une technique employant des micro-ondes pour tronquer le piège.

Évaporation micro-ondes

En utilisant un rayonnement micro-onde, les atomes effectuent une transition entre états hyperfins : $F = 1, m_F = -1 \rightarrow F = 2, m_F = -1$. Ce dernier est un état anti-piégeant.

1.2 Dispositif expérimental

Les atomes sont alors éjectés du piège. La résonance de retournement de spin devient par effet Zeeman dépendante de la position des atomes dans le gradient de champ. En faisant varier linéairement la fréquence du rayonnement micro-onde nous pouvons alors sélectionner un rayon d'évaporation de plus en plus petit. Seuls les atomes ayant une énergie suffisante peuvent atteindre les zones de champ magnétique pour lesquels le rayonnement micro-onde est résonnant avec la transition. Nous évacuons de cette manière les atomes les plus énergétiques. Le principe est résumé sur la figure 1.11.

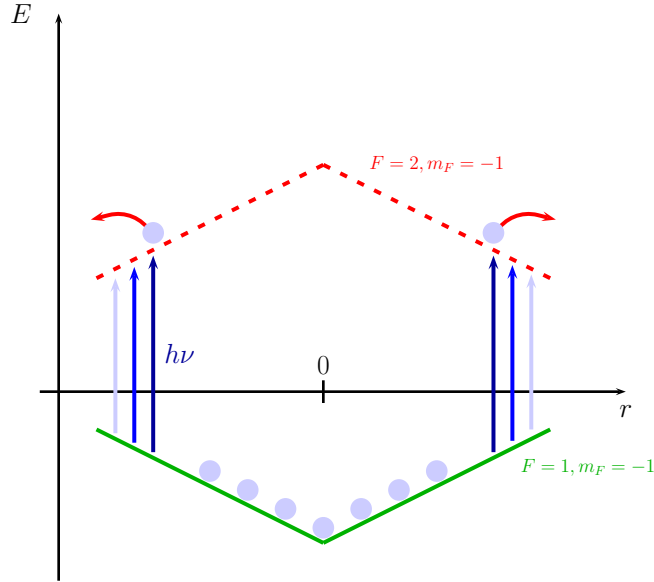


FIGURE 1.11 – *Principe de l'évaporation micro-ondes. Le couteau micro-onde ne permet la transition qu'aux atomes aillant une énergie suffisante pour atteindre des zones de fort champ magnétique.*

L'évaporation micro-onde dure 15s pendant lesquelles nous augmentons linéairement la fréquence des micro-ondes de $\nu_{début} = 6.65$ GHz à $\nu_{fin} = 6.82$ GHz. La température du nuage à la fin est alors de $30 \mu\text{K}$ et nous avons 7×10^7 atomes. La présence de pertes par effet Majorana au voisinage du zéro de champ magnétique limite la poursuite de cette technique. Ces pertes s'expliquent par un renversement du spin pour les atomes qui se déplacent à proximité du zéro de champ magnétique. En effet, si les variations de direction du champ sont plus rapides que ω_L^{-1} avec $\omega_L = \mu B / \hbar$ la fréquence de Larmor, le moment magnétique ne peut suivre adiabatiquement ces variations entraînant le renversement de spin et l'expulsion des atomes qui se trouvent alors dans un état anti-piégeant [69]. Pour parer cet effet, nous transférons les atomes dans un piège dipolaire électrique que nous plaçons en dessous du zéro de champ magnétique

Piège dipolaire

Lorsque la fréquence d'un laser est loin de résonance, les atomes illuminés subissent alors un autre type de force : la force dipolaire qui est créée par l'interaction du champ électrique du laser avec le moment dipolaire atomique induit par ce même champ. Le potentiel résultant s'écrit [70] :

$$U_{dip} = \chi I \quad (1.19)$$

où I est l'intensité et χ la polarisabilité de l'atome. Pour le rubidium 87 cette dernière s'écrit :

$$\chi = -\frac{\Gamma\lambda^3}{16\pi^2c} \left[\left(\frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_1 + 2\omega_L} \right) + 2 \left(\frac{1}{\Delta_2} + \frac{1}{\Delta_2 + 2\omega_L} \right) \right] \quad (1.20)$$

Ici, $\Delta_i = \omega_{D_i} - \omega_L$ correspond aux désaccords laser par rapport aux raies D_1 et D_2 du ^{87}Rb , Γ^{-1} est la durée de vie de l'état excité. Nous pouvons alors remarquer que selon le signe du désaccord laser, cette force va être répulsive ou attractive, ce qui signifie que les atomes vont minimiser leur énergie soit autour d'un maximum de champ soit autour d'un minimum. Dans notre cas, nous choisissons un laser à $\lambda_L = 1064$ nm, les atomes sont alors piégés au voisinage d'un maximum de champ.

La dépendance spatiale du champ électrique d'un laser focalisé est à la base du piège dipolaire laser. Le profil d'intensité d'un faisceau gaussien se propageant selon l'axe y s'écrit :

$$I(r) = \frac{2P}{\pi\omega^2(y)} \exp\left(-\frac{2(x^2 + z^2)}{\omega^2(y)}\right) \quad (1.21)$$

avec P la puissance laser et $w(y) = w_0\sqrt{1 + y^2/y_R^2}$, w_0 le waist du faisceau et y_R la longueur de Rayleigh. Le champ électrique au niveau du waist est le plus intense, c'est là où nos atomes seront piégés.

Notre dispositif se compose de deux faisceaux provenant d'un même laser à 1064 nm. Un premier faisceau de 3.7 W est focalisé avec un waist d'environ $100 \mu\text{m}$ juste en dessous du zéro de champ magnétique du piège quadrupolaire à une distance d'environ $100 \mu\text{m}$. L'absence de traitement anti-reflet sur la cellule nous oblige faire rentrer le faisceau avec un angle d'un

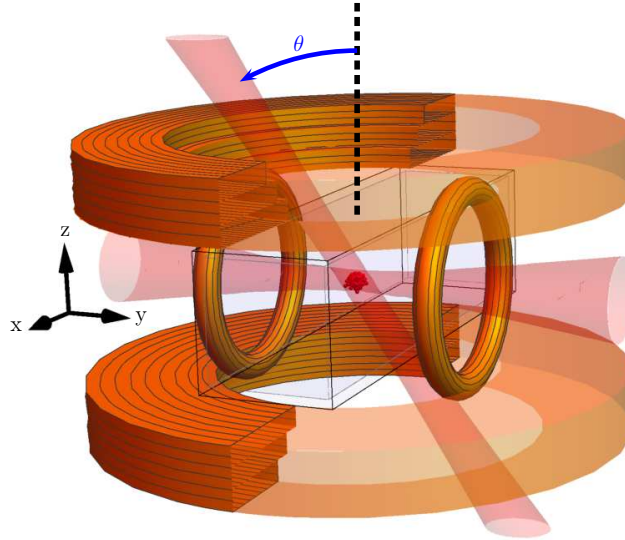


FIGURE 1.12 – *Configuration du piège hybride. Le faisceau dipolaire horizontal rentre avec un angle de 1° dans la cellule. Le faisceau croisé a un angle de $\theta=30^\circ$ par rapport à la verticale. Sur le schéma sont également représentés les 3 paires de bobines du piège quadrupolaire en haut et en bas de la cellule. On voit enfin les bobines de PMO 3D de part et d'autre de la cellule. Figure tirée de [66].*

1.2 Dispositif expérimental

degré par rapport à la normale de la cellule pour éviter les réflexions parasites. Ce faisceau, en ressortant de la cellule, est recyclé et est ensuite renvoyé avec une puissance de 2.2 W et un waist de $50 \mu\text{m}$ dans la cellule pour assurer un confinement fort selon l'axe longitudinal. Il croise le premier faisceau avec un angle de 30° par rapport à la verticale (cf. figure 1.12). Les deux faisceaux se croisent au niveau de leurs waists respectifs. Le montage optique est donné sur la figure 1.13.

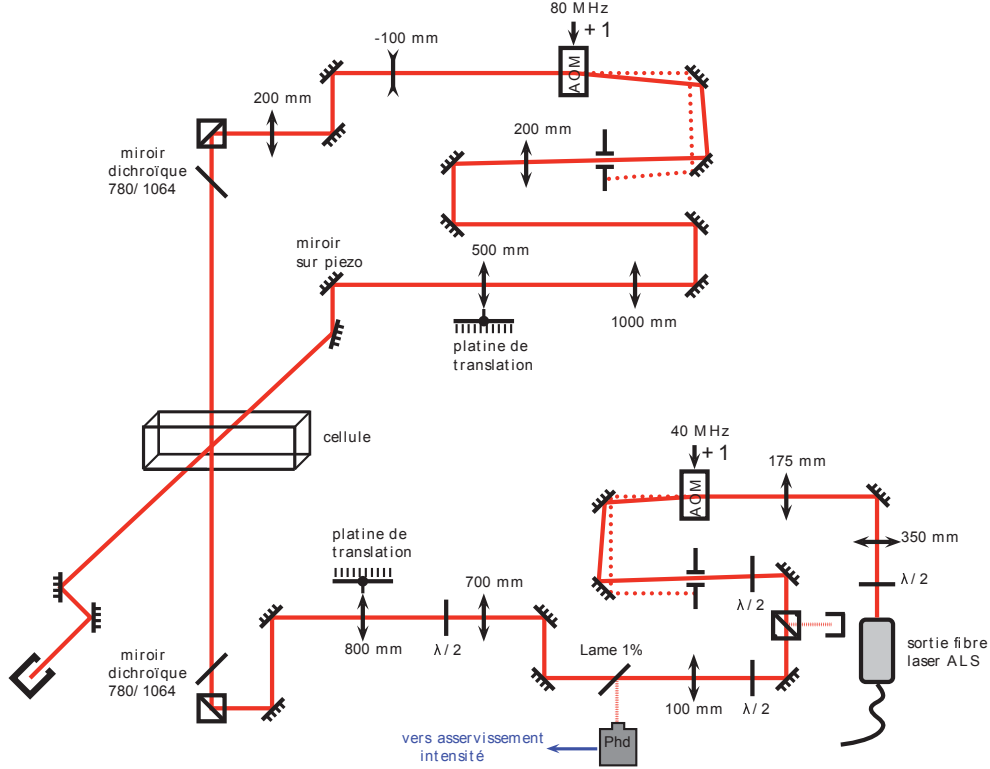


FIGURE 1.13 – Schéma optique des faisceaux dipolaires.

Transfert et évaporation dans le piège hybride

Une fois l'évaporation micro-onde terminée, nous transférons les atomes dans le piège hybride. Pour ce faire, nous réduisons progressivement le gradient de champ magnétique jusqu'à nous placer à $\mu b' = 0.9\text{mg}$. Les atomes tombent alors doucement dans le piège croisé, et nous chargeons environ 1×10^7 atomes. Une fois le chargement effectué, nous procédons à une deuxième étape de refroidissement par évaporation. Pour ce faire, nous abaïssons la puissance laser, ouvrant le piège progressivement et donc permettant à des atomes de moins en moins énergétiques de s'échapper pour réduire considérablement la température moyenne du nuage. Cette étape dure 17s, la puissance laser du faisceau horizontal est alors abaïssée à 66 mW. La moyenne géométrique des fréquences de piège, donnée par

$$\omega_{ho} = \prod_i \omega_i^{1/3}$$

avec ω_i la fréquence selon l'axe i , et qui à la fin de l'évaporation vaut $\omega_{ho} = 2\pi \times 72 \text{ Hz}$.

Lorsque nous atteignons des températures d'une centaine de nK grâce à cette technique apparaît alors le Condensat de Bose-Einstein (CBE). Nous estimons, par l'expérience, la

température critique à 200 nK [66]. Le CBE pur obtenu après les 17s d'évaporation dans le piège hybride est alors composé de 2×10^5 atomes (figure 1.14).

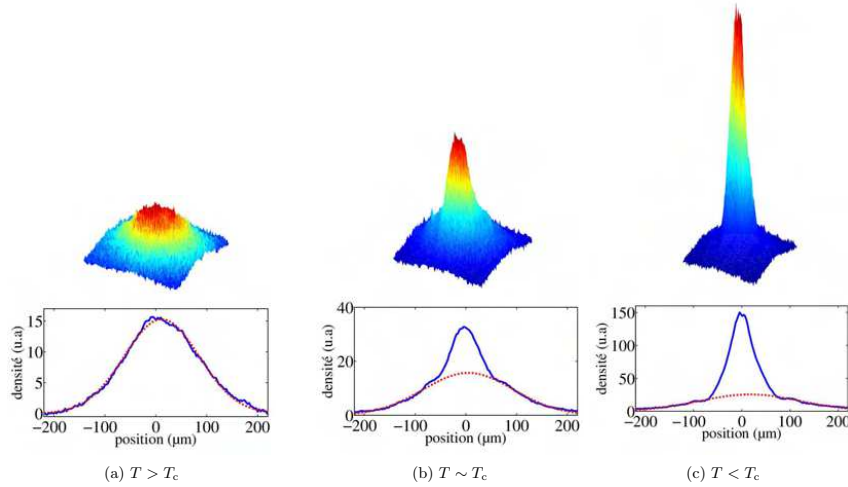


FIGURE 1.14 – *Partie haute : images par absorption après 25 ms de TOF de la formation du condensat pour différents temps d'évaporation. Partie basse : Profil de densité. La ligne bleue correspond à une coupe de la densité du nuage, les pointillés rouges l'ajustement gaussien correspondant. On peut clairement voir la transition de phase caractéristique du CBE.*

Notre condensat enfin obtenu, il nous faut maintenant des outils pour l'imager et le caractériser. Je présente dans le sous-chapitre suivant les systèmes d'imageries utilisés à cet effet sur notre expérience ainsi qu'une méthode de mesure de la densité *in situ* du condensat développée dans l'équipe.

1.3 Imagerie et caractérisation du CBE

Pour pouvoir caractériser le nuage atomique à toutes les étapes et notre condensat à la fin, nous devons avoir accès aux informations sur la température, le nombre d'atomes et le profil spatial du nuage. Pour cela, nous utilisons une imagerie par absorption. Le principe, que je développerai plus loin, repose sur l'absorption d'un faisceau laser résonant à travers un nuage d'atomes. En comparant l'intensité du laser en entrée et en sortie du nuage, nous pouvons reconstituer une image, comme un négatif, de nos atomes. Nous effectuons ces images dans deux régimes d'intensité laser différents. Je décris leurs principes ainsi que la motivation pour l'utilisation de l'une ou l'autre technique. Je présente en dernier la méthode que nous avons utilisée pour faire des mesures de densité du condensat *in situ*. En effet, ces mesures requièrent une imagerie et un traitement particuliers.

1.3.1 Imagerie par absorption dans le régime de faible saturation

Principe

Nous pouvons facilement comparer l'imagerie par absorption à une prise d'image sur pellicule d'un appareil photo argentique. En effet, sur de tels appareils, en fonction de l'intensité

1.3 Imagerie et caractérisation du CBE

lumineuse en chaque point est imprimée une image sur la pellicule en négatif. Ici, le principe est similaire : nous envoyons un faisceau laser résonant sur le nuage d'atomes. En traversant le nuage, le faisceau va être partiellement absorbé en fonction de la densité d'atomes qu'il aura traversé. Ce faisceau en sortie contient donc une image en négatif de la densité du nuage (figure 1.15).

Le régime de faible saturation est défini par une intensité laser faible devant l'intensité de saturation de l'atome considéré, $I_{sat} = 1.6 \text{ mW/cm}^2$ pour le ^{87}Rb . Nous considérons alors que les atomes ont une réponse linéaire à l'intensité laser. En considérant un laser imageur se propageant selon l'axe z , la variation d'intensité I laser selon cet axe au passage dans le nuage de densité $n(x, y, z)$ s'écrit :

$$\frac{dI(x, y, z)}{dz} = -\sigma_0 I(x, y, z) n(x, y, z) \quad (1.22)$$

avec σ_0 la section efficace à résonance, qui pour un système à deux niveaux s'écrit $\sigma_0 = 3\lambda^2/2\pi$ avec λ la longueur d'onde du laser. Résolvons 1.22, nous obtenons la loi de Beer-Lambert ; en notant l'intensité d'entrée I_{in} et celle de sortie I_{out} :

$$I_{out}(x, y) = I_{in}(x, y) e^{-\sigma_0 \rho_c(x, y)} \quad (1.23)$$

ρ_c représente la densité colonne du nuage intégrée sur l'axe z de propagation du faisceau imageur. Nous définissons alors la profondeur optique comme :

$$po(x, y) \equiv \sigma_0 \rho_c(x, y) \quad (1.24)$$

Elle est alors une caractéristique propre du nuage, et ne dépend donc pas de la méthode employée pour la mesurer. Retenons ce dernier point qui nous sera utile plus loin. Nous définissons également la densité optique :

$$OD(x, y) = \ln \left(\frac{I_{in}}{I_{out}} \right) = po(x, y) \quad (1.25)$$

Cette égalité n'est vraie que dans ce régime d'intensité ; nous verrons plus tard pourquoi.

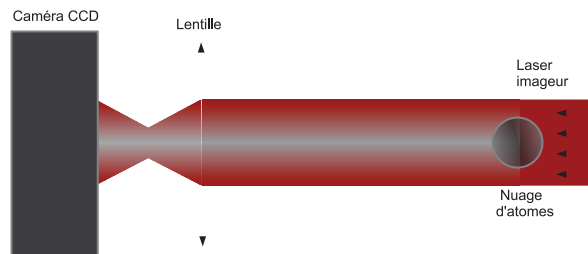


FIGURE 1.15 – Schéma simplifié de l'imagerie par absorption. Le laser est en partie absorbé après passage par le nuage. L'intensité comportant le négatif du nuage est ensuite récupérée sur un capteur CCD.

Mesure et dispositif

Dans ce régime, il est important de remarquer que la reconstitution de l'image ne demande pas une connaissance des caractéristiques de la transition (intensité de saturation, σ_0^2), ni la sensibilité de notre capteur CCD. La seule information nécessaire est le rapport entre intensité de sortie et d'entrée. Pour faire la mesure, nous prenons en pratique alors 3 images sur notre caméra CCD :

- Une image du laser après passage par le nuage, qui correspondra à l'intensité de sortie, I_w
- Une image sans nuage, l'intensité d'entrée I_{wo}
- Une image du fond sans faisceau laser permettant d'éliminer le bruit de nos images, I_{bkg}

Une fois ces trois images récupérées, nous reconstituons une image d'absorption, c'est-à-dire la profondeur optique dans ce régime par :

$$\sigma_0 \rho_c(x, y) = \ln \left(\frac{I_{wo}(x, y) - I_{bkg}(x, y)}{I_w(x, y) - I_{bkg}(x, y)} \right) \quad (1.26)$$

Notre dispositif possède deux axes d'imagerie ayant des grandissements différents, c'est-à-dire sur nos images une taille de pixels effective différente (voir figure 1.16). L'imagerie PMO, avec un grandissement plus petit, 0.23, nous permet d'imager le nuage du chargement du PMO jusqu'à la fin de l'évaporation dans le piège magnétique. Le faisceau imageur a un rayon collimaté de 1.25 cm. Les nuages que nous obtenons dans les étapes suivantes deviennent alors mal résolus et nous passons donc sur notre deuxième système d'imagerie CBE qui a un grandissement plus important, 2.5. Ce faisceau a un rayon de 1.5 mm.

Temps de vol (TOF)

Dans ces deux systèmes, nous prenons nos images après un temps de vol ou TOF (pour *time of flight* en anglais). Nous éteignons tous les pièges et laissons tomber nos atomes pendant des temps allant de 5 à 25 ms avant de prendre l'image. Pendant cette chute, le nuage s'étend et sa vitesse d'expansion se traduit alors en distribution spatiale après TOF opérant comme une transformée de Fourier. Nous avons donc accès à la distribution de vitesses de notre nuage, et donc à la température du nuage. Pour de long TOFs, nous négligeons la taille initiale du nuage et pouvons alors directement relier son expansion spatiale après chute à sa température :

$$T = \frac{m \Delta_x \Delta_y}{k_B t_{TOF}^2} \quad (1.27)$$

avec m la masse d'un atome, Δ_i la taille du nuage selon la direction i , k_B la constante de Boltzmann et t_{TOF} le temps de chute libre.

Ces temps de vol nous permettent également de diminuer la densité spatiale des nuages que nous observons pour en tirer une information précise sur le nombre d'atomes. En effet, l'imagerie par absorption dans le régime de faible saturation limite les densités optiques atteignables. Si la densité du nuage est grande, le faisceau d'entrée peut être complètement absorbé. Ceci entraîne des erreurs importantes dans le calcul de la densité colonne ρ_c .

2. Il est important de noter que cependant, ce paramètre devient utile lorsque que nous voulons calculer le nombre d'atomes

1.3 Imagerie et caractérisation du CBE

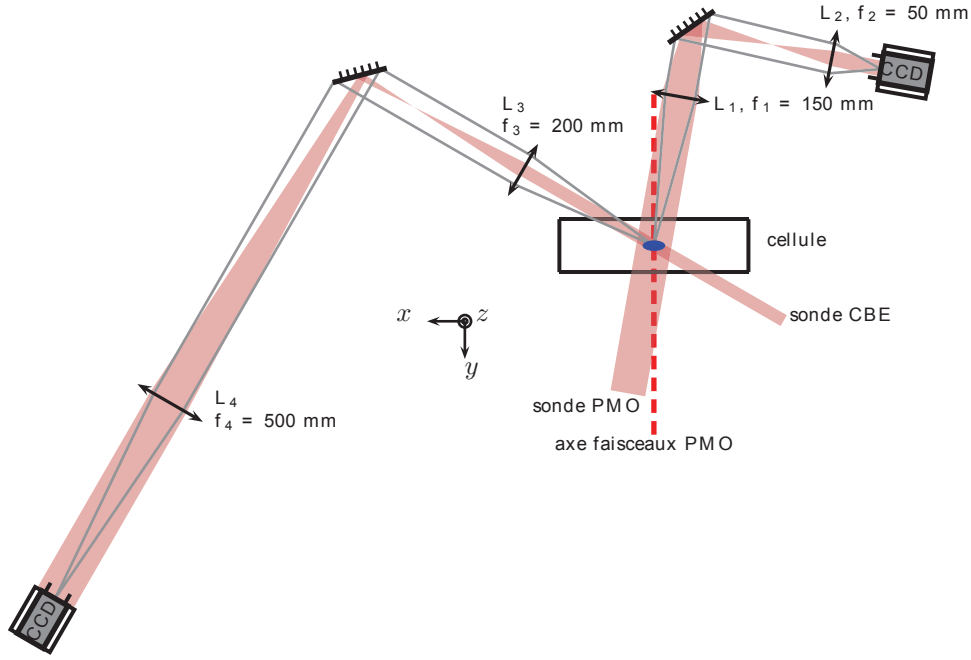


FIGURE 1.16 – Schéma des deux systèmes d'imagerie. Le laser imageur PMO a un rayon de 1.25 cm et fait un angle de 5° avec l'axe y . Il a un grandissement de 0.23. L'imageur CBE a un rayon de 1.5 mm et forme un angle de 60° avec l'axe y . Son grandissement est de 2.5 nous permettant d'imager des nuages petits.

Si nous voulons mesurer la densité de notre condensat dans le piège dans lequel il est créé, nous devons prendre des images avec un temps de vol idéalement nul. Il est alors nécessaire de contourner le problème posé par le régime de saturation faible. En augmentant l'intensité laser du faisceau imageur nous atteignons alors un nouveau régime dans lequel les approximations faites auparavant ne sont plus valables. Je présente dans la partie suivante une technique qui a été développée dans l'équipe par Gaël Reinaudi, qui a soutenu sa thèse en 2008, et qui dans cette dernière développe ce point en détails [71].

1.3.2 Imagerie par absorption dans le régime de forte saturation

Comme indiqué auparavant, pour pouvoir faire des images pour des nuages très denses, nous devons forcer la transparence du nuage en augmentant l'intensité laser du faisceau imageur. L'intensité que nous utilisons est alors bien supérieure à l'intensité de saturation, typiquement $I_{in} = 80I_0^{sat}$. Dans ce régime, l'approximation qui consistait à considérer une réponse linéaire des atomes en fonction de l'intensité laser et qui nous amenait à conclure $po(x, y) = OD(x, y)$ n'est plus valable. Il apparaît alors un terme non linéaire dans le calcul de la profondeur optique; nous introduisons également un paramètre empirique α^* :

$$po(x, y; \alpha^*) = \alpha^* \ln\left(\frac{I_{in}}{I_{out}}\right) + \frac{I_{in} - I_{out}}{I_0^{sat}} \quad (1.28)$$

Le facteur α^* permet de rendre compte empiriquement de l'influence de l'environnement sur la structure électronique (présence éventuelle de champ magnétique, polarisation de la

lumière ...). Il permet de définir une section efficace effective :

$$\sigma_{eff} = \frac{\sigma_0}{\alpha^*} \quad (1.29)$$

Lorsque $po(x, y)$ a été définie dans ce manuscrit, j'ai mentionné qu'il était important de garder à l'esprit que la profondeur optique est un paramètre intrinsèque au nuage. Elle ne dépend pas de l'intensité incidente du faisceau imageur. Nous devons alors choisir α^* pour qu'il minimise l'effet de l'intensité du laser sur la profondeur optique. Pour ce faire, nous prenons une série d'images pour laquelle nous faisons varier l'intensité de l'imageur. Puis nous calculons la profondeur optique suivant (1.28) en faisant varier α^* pour chaque intensité. Nous ajustons alors ce paramètre pour qu'il respecte la condition posée sur la nature intrinsèque au nuage de po . En suivant le protocole décrit dans [71], nous obtenons ce facteur empirique propre à notre système : $\alpha^* = 5.3$

Dans la prise des images pour la détermination de α^* et celles que nous avons prises pour déterminer la densité de notre condensat, l'intensité est très grande ; si nous gardons le même temps d'exposition de notre caméra CCD (100 μs auparavant), cette dernière sature. Nous réduisons donc le temps des pulses lasers. Nous adaptons le temps d'exposition à l'intensité laser reçue par le capteur CCD en utilisant un AOM nous permettant de contrôler la puissance du faisceau imageur et que nous déclenchons à l'aide de pulses générés par un synthétiseur.

Nous pouvons désormais faire des images de notre condensat sans avoir besoin de la dilution apportée par le temps de vol. Je vais dans la dernière partie de ce chapitre décrire comment nous avons effectué des mesures de densité *in situ* du condensat et comment nous avons résolu les problèmes liés à la mise en place de cette imagerie.

1.3.3 Estimation de la densité *in situ* d'un condensat de Bose-Einstein

Le calcul de la densité d'un nuage à partir d'une image obtenue par absorption nécessite deux étapes : nous devons obtenir le nombre d'atomes N et le volume du nuage V et en déduire la densité telle que :

$$\rho = \frac{N}{V} \quad (1.30)$$

Le calcul du nombre d'atomes à partir de nos images est assez direct, il suffit d'intégrer l'image sur tout l'espace :

$$N = \frac{P_{xy}^2}{\sigma_0} \int po(x, y) dx dy \quad (1.31)$$

avec P_{xy} la taille effective de nos pixel sur l'image.

La deuxième étape est la mesure de la taille du nuage sur nos images. Cette partie nécessite plus de travail : pour obtenir le volume du condensat dans son piège nous devons prendre une image sans temps de vol. Sur notre dispositif cependant, une limitation technique nous empêche de faire des temps de vol plus courts que 700 μs . Durant ce court temps de vol, le condensat s'étend, transformant l'énergie liée aux interactions répulsives en son sein, stockée sous forme d'énergie potentielle, en énergie cinétique. Il faut donc corriger la taille du nuage

1.3 Imagerie et caractérisation du CBE

sur l'image après temps de vol par rapport à celle qu'il avait initialement dans le piège . Mais en l'occurrence, cette expansion dépend elle-même de la densité initiale du nuage, et donc par extension du piège dans lequel le condensat a été créé. D'autre part, il est également nécessaire de rappeler qu'une image d'absorption est une densité spatiale intégrée selon un axe. Il nous faut récupérer l'information sur la taille du nuage selon la direction de l'axe de l'imagerie, information inaccessible sur l'image. Toutes les images que nous utilisons dans cette partie ont été prises selon l'axe de la sonde CBE (voir figure 1.16).

Le condensat est habituellement créé dans le piège hybride croisé. Dans cette partie cependant, je me place dans un cas plus simple en ne considérant qu'un seul faisceau laser créant le piège dipolaire. Ce cas est réalisable sur notre expérience puisque nous pouvons créer le condensat puis éteindre le faisceau dipolaire croisé qui provient du recyclage du faisceau horizontal. De ces mesures, nous avons pu obtenir une valeur de densité pour ce cas que nous pouvons extrapoler dans le cas du piège croisé en considérant l'évolution des fréquences de pièges et leur influence sur la densité initiale.

Correction de la taille du condensat avec la chute

Dans le cas considéré, le piège est très anisotrope. Utilisant cette anisotropie, il nous est alors possible de faire l'approximation que la fréquence longitudinale est très petite devant les fréquences transverses. Cette approximation mène aux équations introduites par Y. Castin et R. Dum [72] portant sur les facteurs d'expansion du condensat en chute libre :

$$b_{\perp}(\tau) = \sqrt{1 + \tau^2} \quad (1.32)$$

$$b_y(\tau) = 1 + \lambda^2(\tau \arctan \tau - \ln \sqrt{1 + \tau^2}) \quad (1.33)$$

avec b_{\perp} le facteur d'expansion selon les axes transverses, b_y celui selon l'axe longitudinal, $\tau = \omega_{\perp} t$ représente le temps adimensionné, et $\lambda = \omega_y / \omega_{\perp}$ le degré d'anisotropie avec ω_y et ω_{\perp} respectivement les fréquences de pièges longitudinale et transverse.

En réalité, pendant les 700 μs de chute libre, dans cette configuration le facteur d'expansion est quasiment constant selon les trois axes. On peut considérer que la densité mesurée après TOF est la même que celle dans le piège.

Considération géométrique et calcul de la taille en profondeur de l'image

La géométrie du piège est importante pour obtenir des informations sur le nuage selon l'axe de l'imagerie, inaccessible sur les images. Le potentiel créé par un piège hybride composé d'un piège dipolaire issu d'un faisceau laser gaussien et d'un gradient de champ magnétique dans un potentiel gravitationnelle s'écrit :

$$W(x, y, z) = -U_0 \frac{w_0^2}{w^2(y)} e^{-2(x^2+z^2)/w^2(y)} + mgz + \mu b' \sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2} \quad (1.34)$$

avec w_0 le rayon à $1/e^2$ du faisceau à son waist, $w(y)$ l'évolution du rayon selon l'axe y donnée par $w(y) = w_0 \sqrt{1 + (y/y_r)^2}$ avec y_r la longueur de Rayleigh ; g est l'accélération de la pesanteur et b' le gradient de champ magnétique. Les fréquences de piège transverses (selon x et z) du piège dipolaire sont beaucoup plus importantes que celles du piège magnétique selon ces mêmes axes. De plus, à cette étape de notre expérience, nous choisissons un gradient

de champ magnétique de sorte à ce qu'il compense à peine la gravité. Nous pouvons donc négliger l'influence des potentiels magnétique et gravitationnel dans le calcul des fréquences de piège transverse, selon x et z . Il faut dériver le potentiel pour obtenir ces fréquences :

$$\omega_{x,z} = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{\partial^2 W}{\partial (x,z)^2}} = \sqrt{\frac{4U_0}{mw_0^2}} \quad (1.35)$$

On en déduit que les fréquences de piège $\omega_{x,z}$ sont inversement proportionnelles au rayon au waist w_0 . Pour évaluer l'influence sur la taille selon un axe, prenons l'expression stationnaire du rayon de Thomas-Fermi du nuage atomique :

$$R_{x,z} = \sqrt{\frac{2\mu}{m\omega_{x,z}^2}} \propto w_{x,z} \quad (1.36)$$

avec μ le potentiel chimique. On peut donc en déduire que la taille selon un axe est proportionnelle au rayon du laser au waist selon cet axe. En mesurant la taille du nuage R_z qui nous est accessible sur l'image et en connaissant les caractéristiques de notre piège, nous pouvons en déduire la taille du nuage selon l'axe inaccessible R_x . La mesure du rayon au waist donne :

$$w_x = 68\mu m; w_z = 58\mu m \quad (1.37)$$

on calcul donc :

$$R_x = \frac{w_x}{w_z} R_z \quad (1.38)$$

Dans notre cas, le rapport entre les rayons au waist des deux directions du faisceau dipolaire horizontal nous permet de conclure que la taille R_x doit être multipliée par 1.2 par rapport à la taille R_z .

Il est important de noter que l'image n'est pas prise perpendiculairement par rapport à l'axe y , axe de propagation du faisceau dipolaire (figure 1.17). L'image que nous obtenons est donc une projection du condensat sur les axes propres du faisceau imageur. Le faisceau imageur arrive sur les atomes avec un angle de 30° par rapport à la normale au faisceau dipolaire horizontal. la taille du condensat selon l'axe y , Δy , s'écrit alors en fonction de $\Delta y'$ sa projection sur l'image telle que :

$$\Delta y = \frac{\Delta y'}{\cos 30^\circ} \quad (1.39)$$

Protocole complet

Prenons une image d'absorption correspondant à un CBE dans un piège hybride composé d'un gradient de champ magnétique et d'un seul faisceau dipolaire horizontal (figure 1.18).

Après intégration des pixels, nous obtenons le nombre d'atomes : $N = 2 \times 10^5$. Nous pouvons maintenant tracer le profil selon ces axes, puis ajuster une gaussienne sur chacun d'eux pour en tirer la taille du nuage (figure 1.19).

Nous avons conclu dans la partie précédente que la taille selon l'axe inaccessible x est la taille selon l'autre axe transverse z multipliée par un facteur 1.2. Nous prenons également en compte la projection due à l'angle du faisceau imageur sur la mesure de la taille selon l'axe y . Nous pouvons alors maintenant calculer le volume :

$$V = (2\pi)^{3/2} \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (1.40)$$

1.3 Imagerie et caractérisation du CBE

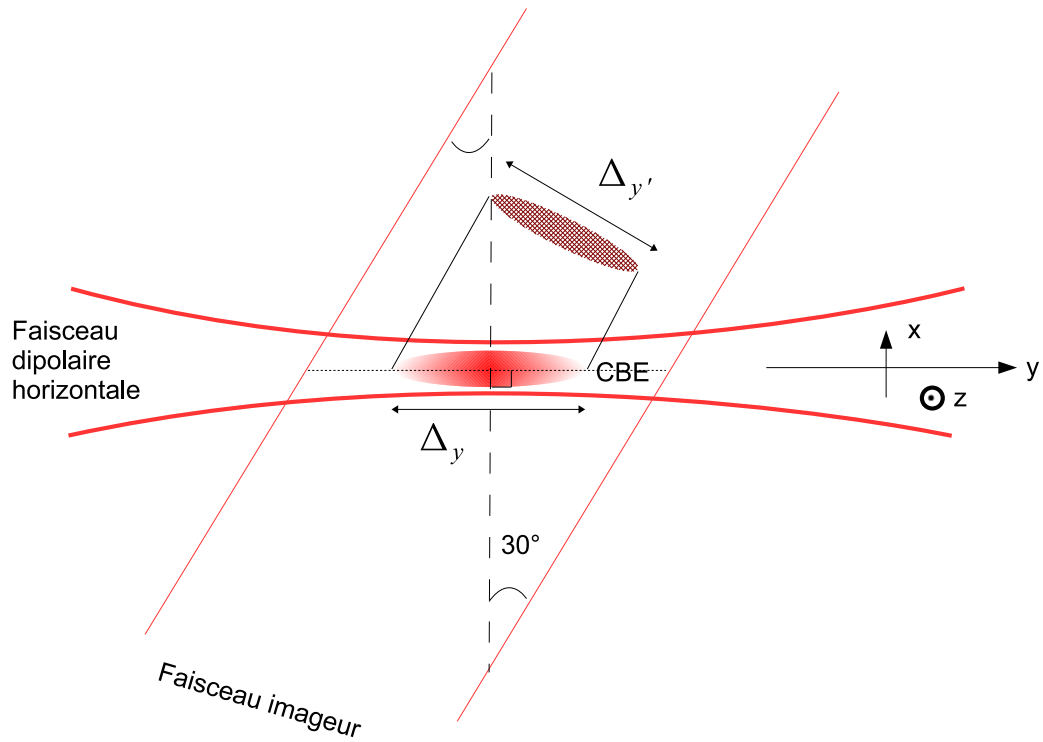


FIGURE 1.17 – Schéma de la géométrie du faisceau imageur par rapport au condensat dans le piège dipolaire horizontal.

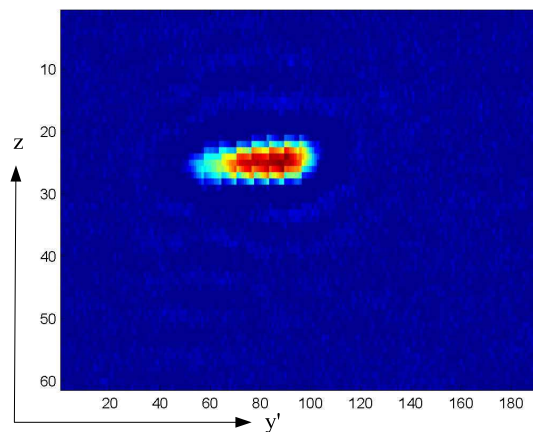


FIGURE 1.18 – Image d'absorption d'un condensat dans un piège hybride composé d'un piège magnétique et d'un faisceau dipolaire horizontal après un temps de vol de 700 μ s

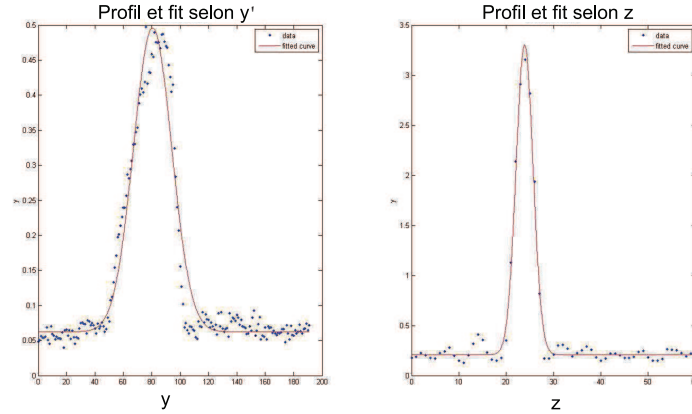


FIGURE 1.19 – *Profils de l’image d’absorption après intégration selon l’axe z et l’axe y . Les points représentent les données expérimentales ; la ligne rouge est l’ajustement gaussien*

Enfin, nous obtenons la valeur de la densité du CBE dans le piège hybride non-croisé en atomes par cm^3 : $\rho \approx 5 \times 10^{12} \text{ at./cm}^3$.

Piège hybride croisé

Je présente ici le cas plus général pour lequel il n’existe pas d’approximation. En effet pour notre piège hybride croisé, l’augmentation des fréquences de piège par rapport au cas précédent rend l’expansion non-négligeable pendant les $700 \mu\text{s}$ de TOF. Et bien que le piège soit anisotrope, il n’y a pas d’axe selon lequel la fréquence de piège est très inférieure à celles dans les autres directions. L’expansion de la taille d’un condensat selon un axe i est donnée par [8] :

$$\ddot{b}_i = \frac{\omega_i^2}{b_i^2 b_j b_k} \quad (1.41)$$

La résolution numérique de ce système d’équation différentielles couplées non-linéaires du second ordre nous donne alors l’expansion du nuage atomique selon chaque axe en fonction du temps.

Détermination de la densité dans un piège hybride croisé

La mesure de densité effectuée dans le cas simple présenté plus haut nous a permis d’extrapoler pour d’autres configuration de piège. En effet, en étudiant l’évolution de la taille en fonction des fréquences de pièges, nous pouvons déterminer la densité atomique d’un nuage piégé dans le piège hybride croisé.

Pour cela, il nous faut connaître les fréquences de piège. Pour ce faire, nous avons corrélé deux méthodes :

1.4 Conclusion

- L'analyse par composantes principales ou PCA d'une série d'image du condensat oscillant dans le piège
- Un calcul théorique des fréquences basé sur les caractéristiques du piège

La technique utilisant la PCA a été développée dans l'équipe d'Hélène Perrin et est décrite dans [73]. Gabriel Condon présente cette méthode en détail dans sa thèse [66], je ne l'explique donc pas dans ce manuscrit. Nous corrélons ces mesures aux prédictions théoriques. Ce calcul prend en compte la mesure expérimentale des rayons aux waists des faisceaux laser formant le piège dipolaire, de leurs puissances, le gradient de champ magnétique et la position relative du croisement des faisceaux dipolaires avec le centre du piège magnétique. Une fois nos fréquences obtenues, nous pouvons alors déterminer la densité pour ce piège. Ceci nous a permis d'étudier l'influence des interactions, i.e. de la densité du CBE, sur la formation des états alternés. Je présente ces résultats dans le chapitre 4.

1.4 Conclusion

Nous avons passé en revue dans ce chapitre les différentes étapes de la production du condensat de Bose-Einstein de ^{87}Rb sur notre dispositif. À partir du chargement du PMO 3D par un PMO 2D, nous effectuons différentes étapes pour refroidir et gagner en densité dans l'espace des phases. Nous transférons alors les atomes dans un piège quadrupolaire magnétique au sein duquel nous effectuons une étape de refroidissement par évaporation en utilisant un rayonnement micro-onde résonant avec une transition entre états de la structure hyperfine du rubidium 87. Puis le nuage est chargé dans un piège hybride comportant le gradient de champ du piège magnétique abaissé pour être juste en dessous de la compensation de la gravité et une paire de faisceaux laser loin de résonance qui se croisent en dessous du minimum de champ magnétique et créent un piège dipolaire. Dans ce piège hybride, nous effectuons une deuxième étape d'évaporation forcée à l'issue de laquelle nous obtenons notre CBE. J'ai également présenté comment nous imageons et caractérisons ce dernier. En utilisant deux systèmes d'imagerie par absorption, nous pouvons déterminer le nombre d'atomes et la température du nuage à chaque étape. Enfin, j'ai décrit le processus de calcul de la densité de notre condensat, qui sera mis à profit dans le chapitre 4. Une fois ce condensat créé et caractérisé, nous le chargeons dans un réseau optique au sein duquel seront faites toutes les expériences présentées dans la suite de ce manuscrit.

CHAPITRE 2

RÉSEAU OPTIQUE : DISPOSITIF ET CONTRÔLE

Introduction

"Nature isn't classical,[...] if you want to make a simulation of nature, you'd better make it quantum mechanical [...]". Richard Feynmann

Comme Richard Feynmann le disait, le problème de certains effets physiques demande en soit un système quantique pour reproduire les caractéristiques qu'un système classique serait incapable de faire apparaître. Les atomes froids ont permis de développer de formidables outils de simulation quantique [74] : En utilisant les résonances de Feshbach, il est possible de contrôler les interactions entre particules [75] ; le contrôle de la topologie dans lequel le gaz ultra-froid évolue en utilisant des champs de jauge a ouvert la possibilité entre autres d'étudier les isolants topologiques [76] ; enfin il est possible de simuler des expériences de physique du solide en étudiant la dynamique d'un CBE dans un réseau optique avec un large contrôle sur les paramètres du système [77] : profondeur du potentiel, renormalisation du taux tunnel, mise en mouvement du système etc ...

Les expériences impliquant des réseaux optiques sont devenues un des axes majeurs de la recherche en atomes froids. Le condensat de Bose-Einstein et ses propriétés de cohérence en font en effet un candidat idéal pour grand nombre d'expériences de ce domaine. Les expériences que je vais présenter au cours de ce manuscrit relèvent de cet axe de recherche. Notre condensat est placé dans un réseau optique dont nous pouvons contrôler dynamiquement la profondeur et la phase. Je présente dans ce chapitre le réseau optique qui est utilisé sur notre expérience et introduit les notions théoriques et techniques utiles à la compréhension des expériences qui seront présentées dans les chapitres suivants.

Dans ce chapitre, je commence par rappeler le problème d'une particule dans un potentiel périodique avec différentes approches. Je présente ensuite le dispositif expérimental nous permettant de créer le réseau et de contrôler ses paramètres. Je me focalise dans une troisième partie sur le contrôle et la modulation de deux paramètres en particulier : la phase du réseau θ et son amplitude. Enfin, j'explique comment nous calibrons la profondeur du réseau grâce

à deux méthodes. La première méthode repose sur la diffraction du CBE par le potentiel périodique. La deuxième méthode étudie la population relative dans les ordres de la figure d'interférence obtenue après temps de vol, du condensat initialement chargé adiabatiquement dans le réseau.

2.1 Particule dans un potentiel périodique

Dans cette partie, je présente quelques développements et équations qui nous seront utiles au cours de ce manuscrit. Ces développements concernent le cas d'une particule dans un potentiel périodique ([25, 26, 78, 79, 80]). Je rappelle l'Hamiltonien qui décrit ce type de système ainsi que le théorème de Bloch, puis décrit succinctement le développement qui mène aux équations centrales. Enfin je présente la description en fonction de Wannier et particulièrement le régime des liaisons fortes nous permettant de définir le taux tunnel J_0 .

2.1.1 Position du problème et théorème de Bloch

Une particule dans un réseau de pas d est soumise à un potentiel qui s'écrit :

$$V(x) = -V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right). \quad (2.1)$$

On peut alors écrire l'équation de Schrödinger stationnaire qui décrit la dynamique de cette particule :

$$\hat{H}\psi(x) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} - V_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right)\right) \psi(x) = E\psi(x). \quad (2.2)$$

Le théorème de Bloch [81] nous permet de déterminer les solutions de cette équation sous la forme :

$$\psi_{n,k}(x) = e^{ikx} u_{n,k}(x), \quad \text{avec} \quad u_{n,k}(x+d) = u_{n,k}(x). \quad (2.3)$$

Les fonctions $u_{n,k}(x)$ ont la même périodicité que le potentiel, l'indice de bande n est un entier naturel et k est homogène à un vecteur d'onde. Nous pouvons développer la fonction $u_{n,k}(x)$ en série de Fourier :

$$u_{n,k}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} v_{k,l} e^{i(2\pi l/d)x}. \quad (2.4)$$

On peut réécrire la fonction d'onde dans cette base :

$$\psi_{n,k}(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} v_{k,l} e^{i(k+2\pi l/d)x} \quad (2.5)$$

On voit alors que la fonction d'onde est une superposition linéaire d'ondes planes de moment nk_L avec $k_L = 2\pi/d$. On peut également remarquer la symétrie par translation $k \rightarrow k + k_L$ des solutions de Bloch. Nous pouvons alors nous limiter à la première zone de Brillouin $[-k_L/2, k_L/2]$. En injectant (2.5) dans (2.2), nous obtenons l'équation aux valeurs propres :

$$H_k u_{n,k}(x) = \left(\frac{(p + \hbar k)^2}{2m} + V(x)\right) u_{n,k}(x) = E_{n,k} u_{n,k}(x) \quad (2.6)$$

2.1 Particule dans un potentiel périodique

Nous pouvons décomposer le potentiel $V(x)$ en somme d'exponentielles complexes :

$$V(x) = -\frac{V_0}{2} - V_0 \frac{e^{ik_L x} - e^{-ik_L x}}{4} \quad (2.7)$$

de sorte que l'équation centrale portant sur $v_{k,l}$ s'écrive :

$$\left(\frac{k}{k_R} + l\right)^2 v_{k,l} - \frac{V_0}{4E_L} (v_{k,l-1} + v_{k,l+1}) = \frac{E_n(k)}{E_L} v_{k,l} \quad (2.8)$$

avec $E_L = \hbar^2/(2md^2)$. On peut résoudre ce système en la mettant sous forme de matrice. Si $V(x) = 0$, on retrouve la dispersion d'une particule libre $E_0 = \hbar^2 k^2/(2m)$. Si le potentiel est non-nul, on obtient en bord de zone de Brillouin une levée de dégénérescence. Les énergies $E(k)$ sont rangées en bandes autorisées ; la figure 2.1 montre cette structure de bande pour un réseau de profondeur $V_0 = 2E_L$. Il existe des bandes interdites correspondant à l'absence de solution à énergie réelle. Elles ont été étudiées en détail puis exploitées expérimentalement dans l'équipe pour réaliser un nouveau type de barrière tunnel (*Spatial Gaps*). [78][82][83]

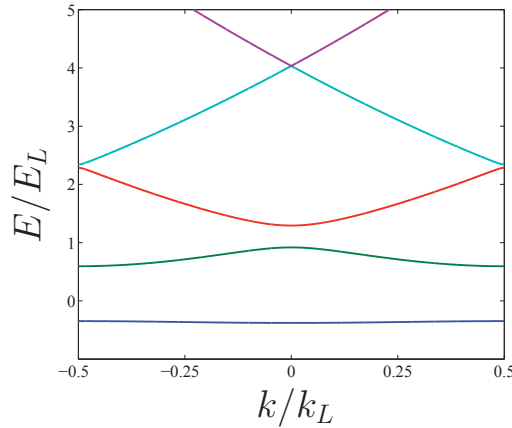


FIGURE 2.1 – Structure de bandes d'énergie pour un réseau de profondeur $V_0 = 2E_L$. Seule la première bande est liée.

2.1.2 Description en fonction de Wannier et régime des liaisons fortes

Fonctions de Wannier

À mesure que la profondeur du réseau augmente, la probabilité d'une particule de passer par effet tunnel d'un puits du réseau à l'autre diminue. On peut alors considérer que les paquets d'ondes dans chaque puits sont localisés dans ce que nous appelons maintenant les sites du réseau. Le système peut alors être décrit à l'aide des fonctions de Wannier. La fonction de Wannier pour la bande d'énergie n décrivant un paquet dans le site m s'écrit :

$$w_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{d}{2\pi}} \int e^{imd} \psi_{n,k}(x) dk \quad (2.9)$$

$\psi_{n,k}(x)$ étant ici les ondes de Bloch. On peut remarquer que la fonction de Wannier sur n'importe quel site m se traduit par une translation de la fonction du site $m = 0$, nous

permettant de noter alors $w_{n,0}(x) = w_n(x)$ et $w_{n,m}(x) = w_n(x - md)$. Si nous écrivons l'onde de Bloch $\psi_{n,k}(x)$ en fonction de la transformée de Fourier $\tilde{w}_n(k)$ de la fonction de Wannier $w_n(x)$, nous obtenons alors le développement suivant :

$$\psi_{n,k}(x) = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{w}(k + mk_L) e^{i(k + mk_L)x}. \quad (2.10)$$

Cette nouvelle base nous permet alors de définir un nouvel Hamiltonien \widehat{H} décrivant le saut d'une particule du site m au site m' avec une amplitude de probabilité notée $J_n(m - m')$:

$$\widehat{H} = \sum_n \sum_{m, m'} J_n(m - m') \hat{b}_{n, m'}^\dagger \hat{b}_{n, m}, \quad (2.11)$$

avec

$$J_n(m) = \int w_n(x - md) \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) w_n(x) dx \quad (2.12)$$

et $\hat{b}_{n, m'}^\dagger$ et $\hat{b}_{n, m}$ respectivement les opérateurs création et annihilation.

Régime des liaisons fortes

Dans le régime des liaisons fortes où $V_0 \gg E_L$, la probabilité pour une particule de se déplacer par effet tunnel dans les puits adjacents étant très faible, on peut alors ne considérer que la probabilité de passage entre sites voisins $J_n(1)$ noté J_n dans la suite de ce manuscrit. Dans ce cas là, le potentiel périodique peut être considéré comme une infinité d'oscillateurs harmoniques indépendants espacés périodiquement. On peut en développant le potentiel au deuxième ordre autour des minima des puits obtenir une fréquence harmonique :

$$\omega_0 = \frac{1}{2m} \left. \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = \frac{V_0 \pi^2}{2md^2}. \quad (2.13)$$

Les énergies propres sont alors celles de l'oscillateur harmonique équivalent à chaque puits :

$$E_n = \frac{-V_0}{2} + \hbar \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (2.14)$$

Dans ce régime, les fonctions de Wannier sont relativement bien approximées par des gaussiennes [26]. Dans ce régime, les états propres sont localisés sur chaque site du réseau, nous pouvons écrire l'Hamiltonien en utilisant un modèle de saut au premier voisin :

$$\widehat{H} = -J_0 (\widehat{T} + \widehat{T}^\dagger) \quad (2.15)$$

avec $\widehat{T} = \sum_j w_{j+1}^* w_j$ l'opérateur translation discret. Nous pouvons écrire le taux tunnel entre site en fonction de la profondeur du réseau s comme :

$$J_0 = \frac{4E_L}{\sqrt{\pi}} s^{3/4} e^{-2\sqrt{s}} \quad (2.16)$$

En calculant la valeur moyenne de \widehat{H} sur les états (2.10), la forme de la bande fondamentale $E_1(k)$ dans l'espace des k du réseau en fonction du taux tunnel J_0 s'écrit :

$$E_1(k) = -2J_0 \cos(kd). \quad (2.17)$$

2.2 Dispositif expérimental

Cette partie introduit d'abord comment nous créons le potentiel périodique dans lequel les atomes sont piégés à l'aide d'interférences entre deux faisceaux laser puissants non-résonnants. Je présente ensuite le dispositif optique et électronique qui nous permet de créer et de contrôler le réseau optique.

2.2.1 Potentiel périodique

Notre réseau optique est créé à l'aide de deux faisceaux laser à une longueur d'onde de $\lambda = 1064$ nm. En faisant interférer ces deux faisceaux au niveau des atomes, nous obtenons une intensité résultante de la forme :

$$I(x) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta_0\right) \quad (2.18)$$

avec $I_0 = 2P_0/\pi w_0^2$, P_0 la puissance commune aux deux lasers, w_0 le waist de deux faisceaux qui vaut $w_0 = 150$ μm et θ_0 la phase relative entre les deux faisceaux. Ces deux faisceaux étant loin de résonance, ils constituent deux pièges dipolaires qui interfèrent. Dans le chapitre précédent, nous avons établi que le potentiel créé par un piège dipolaire s'écrivait comme $U_{dip} = \chi I$. Le facteur χ est explicité dans l'équation (1.20) du chapitre 1. En reprenant cette équation, nous pouvons alors écrire le potentiel créé par ces deux faisceaux :

$$V(x) = -V_0 \cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \theta_0\right) \quad (2.19)$$

où $V_0 = -4\chi I_0$. Les atomes sont alors en présence d'un potentiel périodique de période spatiale $d = \lambda/2$. En modifiant la puissance laser pour les deux faisceaux, nous changeons la profondeur du réseau. Nous pouvons également modifier la position spatiale du réseau en changeant θ_0 . Le contrôle et la modulation de ces deux paramètres seront comme nous le verrons au centre des expériences que je présenterai dans les chapitres suivants. Pour définir la profondeur du réseau, nous écrivons le potentiel V_0 comme :

$$V_0 = sE_L, \quad (2.20)$$

nous nommons s , la profondeur du réseau en unité de E_L .

2.2.2 Montage optique et électronique

Cette partie présente le dispositif expérimental. Dans un premier temps j'explique le montage optique puis je décris comment nous contrôlons la puissance laser. Le contrôle de la phase et la modulation de la profondeur du réseau sont expliqués en détails dans la troisième partie de ce chapitre, je n'aborde donc pas cet aspect du dispositif ici.

Montage optique

Le schéma du montage optique est présenté sur la figure 2.2. Le laser que nous utilisons a été conçu par la société IPG¹. Sa longueur d'onde est de $\lambda = 1064$ nm avec une largeur spectrale d'environ 100 kHz. Il peut délivrer jusqu'à 15 W de puissance et est polarisé linéairement. Après passage dans un isolateur optique, le laser est envoyé dans un premier AOM

1. YR-15-1064-LP-SF.

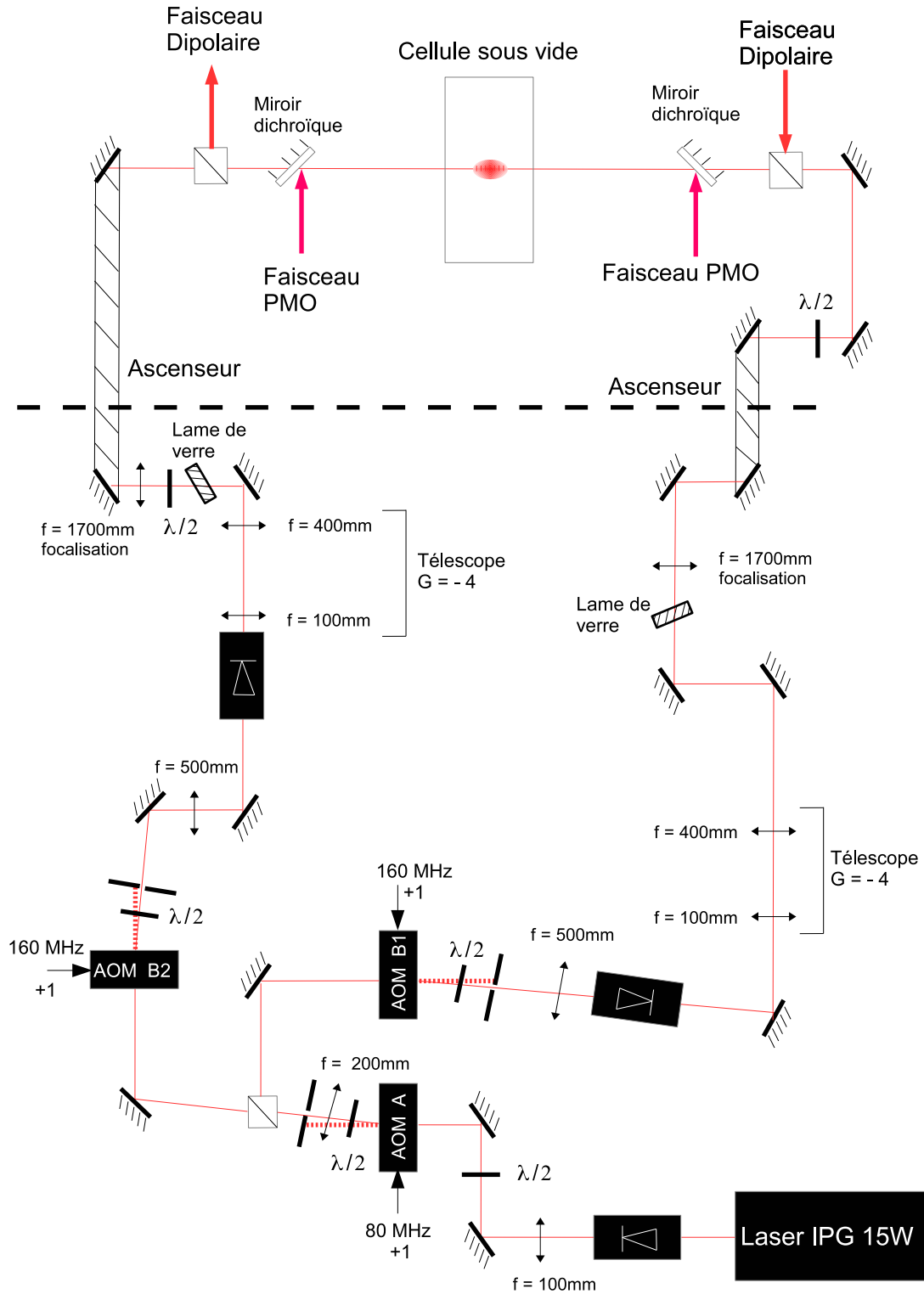


FIGURE 2.2 – Schéma du réseau optique. Sur la partie du bas sont présentés la mise en forme et le contrôle des faisceaux. La partie du haut montre l'injection dans la cellule en verre au centre de laquelle les faisceaux interfèrent.

A de fréquence de fonctionnement 80 MHz. Cet AOM nous permet de contrôler la puissance globale en sélectionnant l'ordre -1 en sortie et en contrôlant la diffraction de l'AOM. Une

2.2 Dispositif expérimental

lame $\lambda/2$ placée après ce dernier est réglée de manière à avoir en sortie des deux voies du cube polariseur qui suit la même puissance, créant ainsi les deux bras du réseau. Les deux chemins sont ensuite symétriques : un deuxième AOM B est placé sur chacun des deux bras. Ces deux AOMs nous autorisent un contrôle de la phase relative θ_0 entre les deux faisceaux lasers. Chacun des faisceaux passe ensuite dans un télescope possédant un grandissement $G = -4$ avant d'être focalisé dans la cellule avec un waist de $w_L = 150\mu\text{m}$. Une lame de verre placée sur les chemins nous permet, en utilisant la réfraction à travers la lame, de régler finement le croisement entre les faisceaux. On peut trouver une description de cette méthode et le gain en précision dans la thèse de C. M. Fabre [84]. Les cubes polariseurs avant la cellule nous permettent de combiner le faisceau dipolaire horizontal avec les deux faisceaux du réseau et d'assurer leur polarisation pour leur permettre d'interférer au centre de la cellule. La lame demi-onde placée avant chacun d'entre-eux assure une transmission optimale des faisceaux du réseau à travers le cube. Les miroirs dichroïques laissent passer les lasers à 1064 nm (dipolaire et réseau) et reflètent les lasers à 780nm (PMO).

Les lames de verre nous autorisant une grande précision, nous alignons les deux faisceaux sur le faisceau dipolaire horizontal puis plus précisément sur le condensat. Nous nous assurons de l'alignement grossier en piégeant le condensat dans un bras du réseau seul puis dans l'autre à pleine puissance laser et en regardant après un temps de maintien que le condensat reste bien à la position qu'il occupait dans le piège dipolaire. Pour aligner finement, nous cherchons, pour la puissance maximum des deux faisceaux lasers, à obtenir la plus grande profondeur possible en nous servant d'une méthode de calibration basée sur la diffraction du condensat sur le réseau. Cette méthode de calibration ainsi qu'une autre méthode de calibration typique de la profondeur sont expliquées ultérieurement dans ce chapitre. Ce dispositif nous permet de créer un réseau optique de pas $d = 532$ nm et ayant pour la puissance laser maximale une profondeur maximale de $s = 56$, soit de $224 E_R$ avec $E_R = \hbar^2 k_l^2 / (2m)$. Cette définition est également utilisée dans la littérature pour caractériser le réseau.

Contrôle électronique de la puissance laser

Nous contrôlons la puissance laser à l'aide de l'AOM A. La figure 2.3 représente le dispositif électronique qui crée le signal radio-fréquence alimentant l'AOM. L'oscillateur contrôlé en tension (VCO) en début de chaîne produit le signal à 80 MHz. Nous avons ensuite deux contrôles sur l'amplitude du signal. En sortie du VCO nous avons placé un atténuateur que nous pouvons contrôler durant une séquence expérimentale grâce à un programme LabView. La réponse en temps de cet atténuateur est trop longue pour pouvoir faire des pulses de quelques centaines de ns ou pour varier la puissance rapidement pour faire de la modulation d'amplitude. Nous mixons alors le signal issu de l'atténuateur avec le signal produit par un synthétiseur. Ce générateur nous permet de créer des pulses ou de moduler la puissance globale du signal RF et donc de contrôler rapidement et finement la puissance laser et donc la profondeur du réseau. Nous pouvons déclencher ce générateur grâce au même programme LabView. Après ce mixage, le signal passe à travers un interrupteur rapide contrôlé par LabView et est ensuite amplifié grâce à un amplificateur de 15 W avant d'être envoyé à l'AOM A. La réponse optique de l'AOM en fonction de la puissance RF délivrée par le synthétiseur n'est linéaire que sur une certaine plage de tension. Nous devons donc nous placer dans cette plage de sorte à avoir un contrôle clair de la puissance laser lors d'expérience de modulation de l'amplitude du réseau.

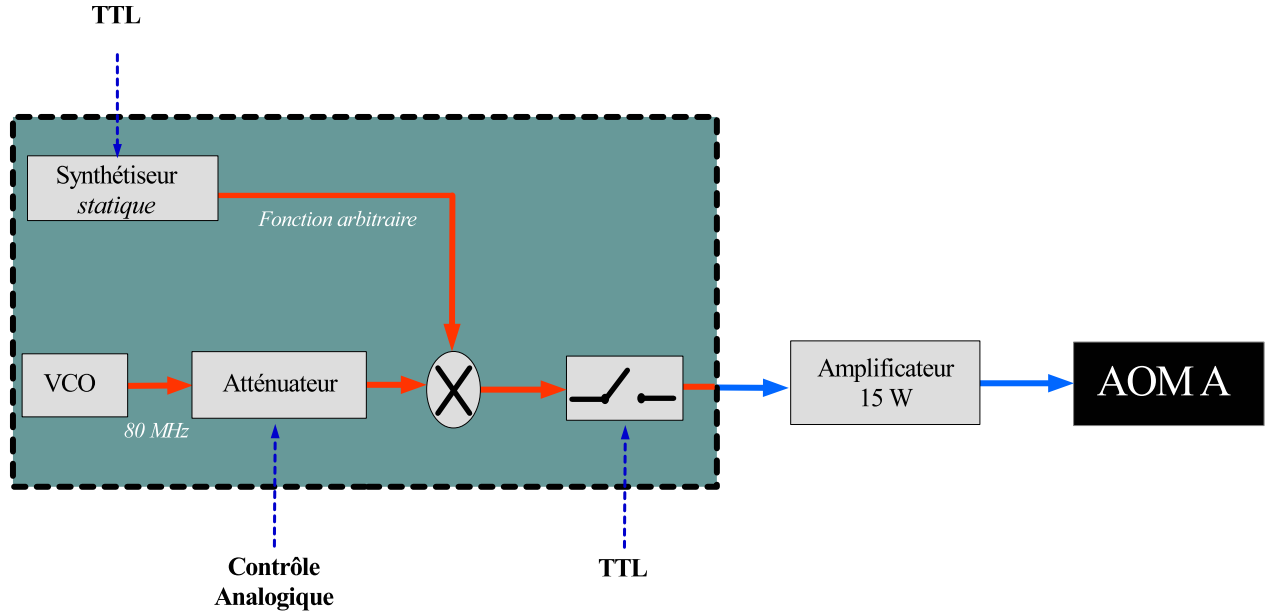


FIGURE 2.3 – Schéma du montage électronique du contrôle de la puissance RF envoyée à l'AOM A. Le signal RF créé par un VCO passe à travers un atténuateur géré par LabView puis est mélangé à un signal provenant d'un synthétiseur pour permettre un contrôle rapide grâce à ce dernier.

La prochaine partie décrit plus en détail le contrôle des paramètres du réseau essentiels à la réalisation des expériences présentées plus loin.

2.3 Contrôle et modulation

Les expériences présentées dans ce manuscrit reposent sur le contrôle de la phase et de l'amplitude du réseau. Elles sont classées par thème :

- le changement rapide de la phase du réseau
- la modulation sinusoïdale de la phase du réseau
- la modulation sinusoïdale de l'amplitude du réseau.

Je présente ici les trois techniques mises en place sur notre dispositif pour effectuer ces trois opérations. Elles reposent toutes sur l'utilisation de synthétiseur et d'interrupteurs rapides.

2.3.1 Contrôle de la phase relative θ_0

La figure 2.4 présente le montage électronique du contrôle de la phase relative entre les deux bras du réseau. Pour modifier la phase, nous modifions la phase relative θ_0 des signaux RF envoyés aux deux AOM B et imprimons donc la phase sur l'onde laser. La différence de phase déplace le réseau de $\Delta r = \theta_0/\pi \times \lambda_L/2$. Pour ce faire, nous synchronisons les horloges de 4 synthétiseurs. Le signal d'un de ces synthétiseurs, après doublage de fréquence et amplification, est envoyé à l'AOM B1. Pour le contrôle de l'AOM B2, nous utilisons un système comportant 3 synthétiseurs. À l'aide de deux interrupteurs rapides nous pouvons

2.3 Contrôle et modulation

sélectionner la sortie d'un des trois synthétiseur. Ceci nous permet, en changeant la phase relative entre les synthétiseur notés ' $\theta_0 = 0$ ' et ' $\pm\theta_0$ ' et en changeant brusquement d'une sortie à l'autre, de changer brusquement la phase du réseau. Un cinquième synthétiseur alimente l'entrée de modulation du synthétiseur ' $-\theta_0$ '. Nous pouvons alors charger le condensat dans le réseau à l'aide du synthétiseur ' $\theta_0 = 0$ ' puis passer sur la sortie modulée en phase du synthétiseur ' $-\theta_0$ ' pour moduler la phase du réseau. Les interrupteurs rapides que nous utilisons nous permettent d'assurer une quasi-instantanéité de ces changements aux regards des autres échelles de temps du système.

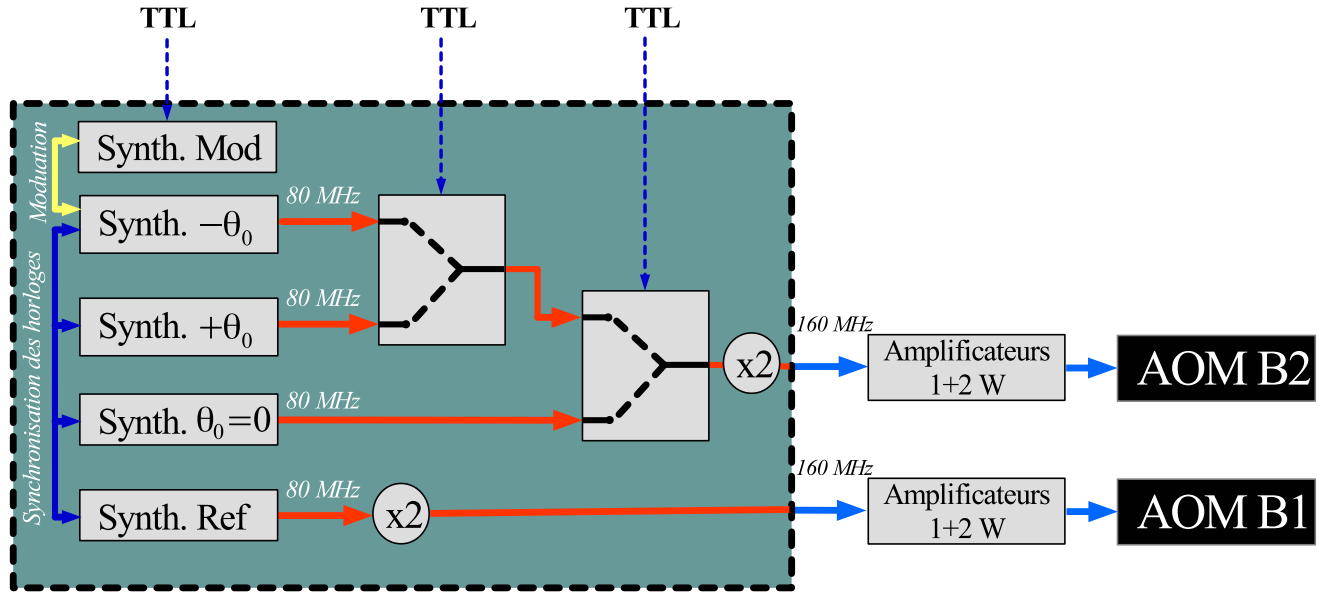


FIGURE 2.4 – Schéma électronique du contrôle de la phase relative θ_0 . L'AOM B1 est contrôlé par un seul synthétiseur. Ce synthétiseur est synchronisé en phase avec les 3 autres synthétiseur qui contrôlent l'AOM B2. Le système d'interrupteur rapide nous permet de sélectionner un des trois synthétiseur dont les phases sont différentes permettant d'imprimer une phase sur le réseau. Le dernier synthétiseur (synthétiseur mod) module la phase du synthétiseur ' $-\theta_0$ '.

2.3.2 Modulation de l'amplitude du réseau

Je présente ici comment nous modulons l'amplitude du réseau. Nous contrôlons directement le signal envoyé à l'AOM A. En envoyant un signal RF dont la puissance est modulée par une sinusoïde, la puissance laser sera alors aussi modulée en amplitude. Nous envoyons un signal sinusoïdale qui est mixé au signal RF créé par le VCO. Le signal RF modulé par la sinusoïde est ensuite envoyé à l'AOM A. Nous voulons pouvoir effectuer plusieurs types de modulations : une modulation de l'amplitude par une sinusoïde à fréquence donnée, une

modulation pendant laquelle nous faisons varier linéairement la fréquence (*sweep* fréquentiel) ou deux modulations avec des fréquences différentes (ou deux *sweep*) successives. Le montage électronique est résumé sur la figure 2.5. Nous choisissons d'abord grâce à l'interrupteur rapide contrôlé par le TTL 1 si nous voulons le synthétiseur *statique* ou un des deux synthétiseurs qui enverront des signaux sinusoïdaux. Le TTL 2 nous permet de choisir entre un des deux synthétiseurs *dynamiques*, nous permettant alors d'enchaîner deux modulations ou deux *sweep* avec des fréquences différentes. Si il est allumé, il déclenche aussi la sortie du synthétiseur sélectionné. Le dernier TTL déclenche le synthétiseur qui est choisi lorsque le TTL 2 est éteint.

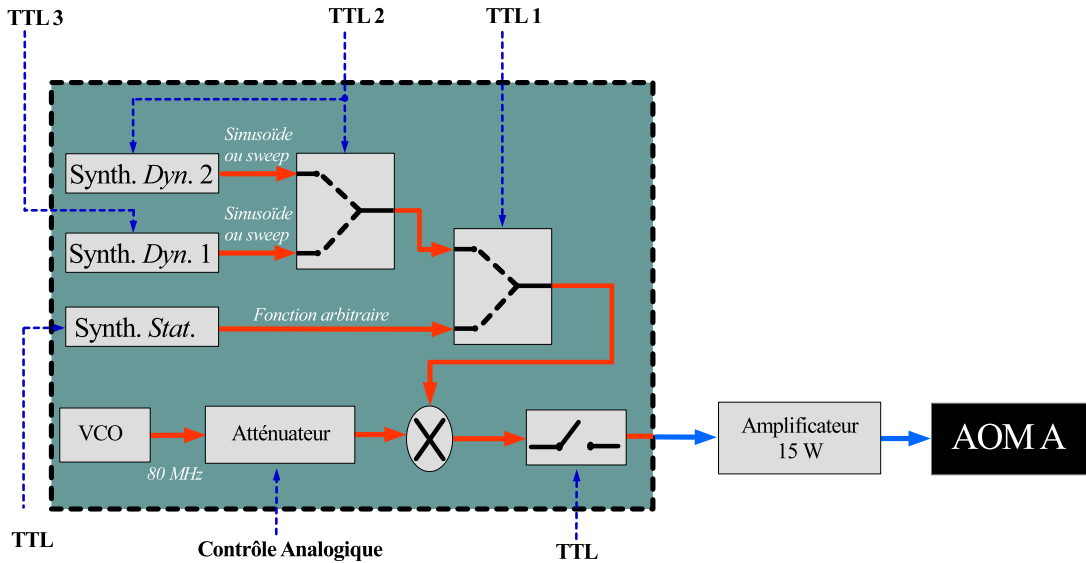


FIGURE 2.5 – Schéma du montage électronique permettant de moduler en amplitude le réseau optique. Nous avons gardé la même base que pour le contrôle de l'amplitude mais dans ce cas nous pouvons choisir de mixer le signal RF avec un créneau comme nous le faisons auparavant ou de choisir, en activant le TTL 1, de mixer un signal sinusoïdal. Si le TTL 2 est allumé, nous sélectionnons le synthétiseur 2 et le déclenchons. Si il est éteint c'est le synthétiseur 1 qui est sélectionné. Nous le déclenchons à l'aide du TTL 3.

2.4 Calibration par diffraction Kapitza-Dirac

La calibration de la profondeur du réseau optique est essentielle à une bonne compréhension de la physique mise en jeu lors des expériences que nous réalisons. Un calcul théorique dont le résultat est proche de la réalité expérimentale nécessitera le contrôle d'un grand nombre de paramètres : la puissance laser, la taille du waist, l'angle avec lequel les faisceaux se croisent et l'alignement global. Les propriétés du CBE nous permettent l'accès à des calibrations basées sur des résultats expérimentaux. La technique que nous utilisons est basée sur la diffraction Kapitza-Dirac du condensat sur le réseau optique. Cette idée provient des travaux de Piotr Kapitza et Paul Dirac qui en 1933 prédisent la diffraction d'un faisceau d'électrons par une onde lumineuse stationnaire [85]. La méthode de calibration se base alors

2.4 Calibration par diffraction Kapitza-Dirac

sur l'étude de l'évolution de la figure de diffraction du condensat en fonction du temps d'interaction τ pendant lequel le réseau est allumé [86]. En effet, après avoir pulsé le réseau sur le condensat pendant un temps très court, nous laissons le condensat chuter librement et pendant cette chute les ordres de diffraction se séparent. L'évolution de la population atomique dans les ordres de diffraction en fonction du temps de pulse du réseau est reliée à la profondeur de ce dernier. Le résumé de la séquence expérimentale permettant de faire une image de diffraction est donné sur la figure 2.6 En faisant une succession d'images avec des temps de pulses différents, nous pouvons étudier la dynamique du système. L'une de ces série d'images est donnée sur la figure 2.7

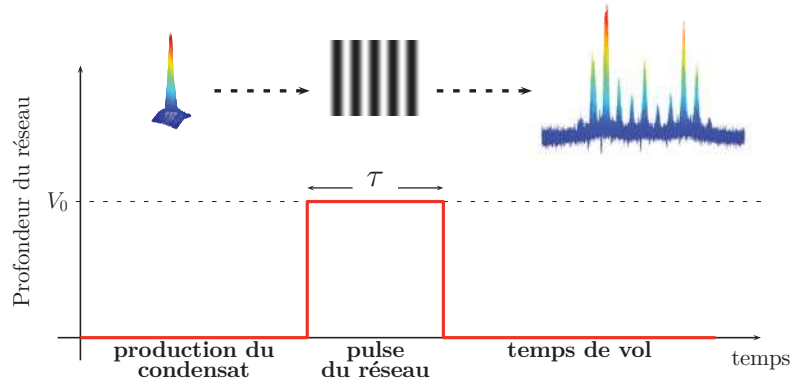


FIGURE 2.6 – Résumé de la séquence expérimentale de la diffraction du condensat sur le réseau optique.

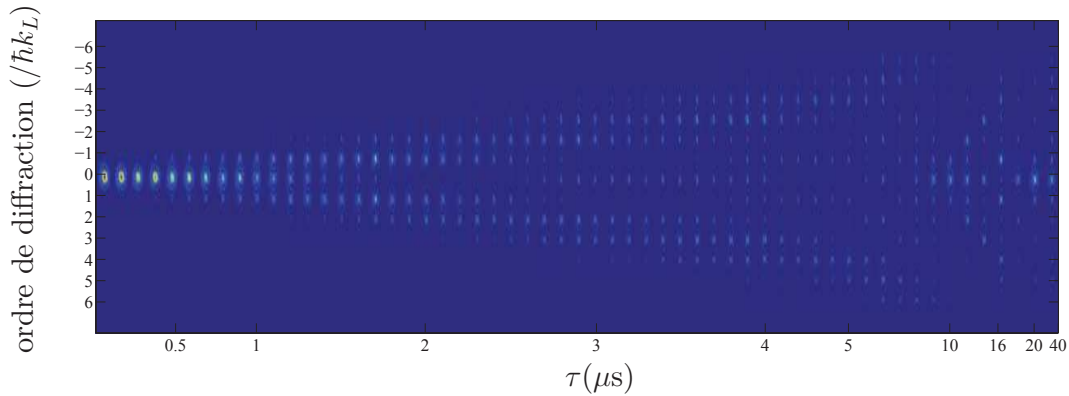


FIGURE 2.7 – Profil de diffraction en fonction de τ pour une puissance laser par faisceau de $2 W$. $s = 50E_r$

Nous pouvons traiter cette expérience de deux manières : Une méthode qui néglige l'énergie cinétique des atomes et nous place dans le régime de Raman-Nath et une méthode résolvant l'équation d'évolution au-delà du régime de Raman-Nath. Je présente ces deux régimes et montre quelques résultats expérimentaux nous permettant de calibrer la profondeur du réseau.

2.4.1 Régime de Raman-Nath

Commençons par poser le problème. Dans ce cas, l'équation de Schrödinger dépendante du temps s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \psi(x, t) \quad (2.21)$$

avec $V(x, t) = V_0 \cos^2(\pi x/d)$ pendant τ la durée du pulse et $V(x, t) = 0$ sinon. En résolvant cette équation, nous obtenons l'évolution de la population des ordres de diffraction en fonction de τ . L'approximation de Raman-Nath consiste à considérer court le temps de pulse τ devant la période associée à la fréquence de piège du réseau, $\omega_0 \tau \ll 1$, et donc à négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation ci-dessus. Cette approximation nous permet d'intégrer facilement l'opérateur d'évolution. La fonction d'onde après pulse s'écrit :

$$\psi(x, \tau) = e^{iV(x)\tau/\hbar} \psi(x, 0). \quad (2.22)$$

Nous voyons que pendant l'interaction avec le réseau est appliquée une phase sur la fonction d'onde qui est modulée spatialement avec une période π/d . Nous pouvons développer l'opérateur d'évolution par une somme de fonctions de Bessel :

$$\psi(x, \tau) = e^{iV_0\tau/2\hbar} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (i)^n J_n \left(\frac{V_0\tau}{2\hbar} \right) e^{ink_L x} \psi(x, 0) \quad (2.23)$$

On peut voir que la fonction d'onde est alors projetée sur une grille de pas $\hbar k_L$ dans l'espace des impulsions. L'évolution de la population de chaque ordre de diffraction n est proportionnelle à $|J_n(V_0\tau/2\hbar)|^2$. En regardant donc l'évolution de la population en fonction de τ , il nous est possible de remonter directement à la profondeur V_0 du réseau et donc effectuer une calibration. Pour étudier cette évolution, nous effectuons un temps de vol (TOF) qui nous permet de séparer spatialement les ordres, la séparation spatiale des ordres en fonction du temps de vol est donnée par :

$$\Delta x = \frac{\hbar k_L}{m} t_{TOF}. \quad (2.24)$$

L'approximation de Raman-Nath est valide dans le cas où la fréquence de piège est inférieure à l'inverse du temps de pulse, $\tau \ll T_{osc}$. Lorsque la profondeur du réseau diminue, le temps d'interaction avec le condensat pour échantillonner correctement l'évolution des ordres devient de plus en plus long. Nous sortons alors du régime de Raman-Nath et nous obtenons des erreurs importantes lorsque nous ajustons une fonction de Bessel sur l'évolution temporelle d'un ordre de diffraction (ces résultats sont donnés sur la figure 2.8). Il nous faut alors prendre en compte le terme d'énergie cinétique et faire un développement plus poussé. Ce développement implique l'utilisation de fonctions de Mathieu et est présenté dans la sous partie suivante.

2.4.2 Résolution par utilisation des fonctions de Mathieu

L'idée de traiter le problème actuel dans le formalisme de Mathieu vient des travaux de M. Horne *et al.* [87]. En injectant dans l'équation (2.21) des solutions de la forme :

2.4 Calibration par diffraction Kapitza-Dirac

$\psi(x, t) = \phi(x)e^{-iEt/\hbar}$ et effectuant le changement de variable $\tilde{x} = \pi x/d$, nous pouvons mettre l'équation sous la forme d'une équation de Mathieu :

$$\frac{d^2\phi}{d\tilde{x}^2} + [a + 2q \cos(2\tilde{x})] \phi = 0 \quad (2.25)$$

avec $a = 4E/E_L + 2s$ et $q = s$. Cette équation provient initialement de l'étude effectuée par Émile Mathieu des modes de vibrations d'une membrane elliptique [88]. Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Mathieu $M(a, q, \tilde{x})$ et ce formalisme se retrouve maintenant dans de nombreux domaines de la physique du fait de la forme très générale de cette équation.

Cherchons maintenant à contraindre ces fonctions de Mathieu. Grâce au théorème de Floquet-Bloch, nous pouvons écrire les solutions de l'équation (2.25) sous la forme :

$$M(a, q, \tilde{x}) = e^{ir\tilde{x}} f(a, q, \tilde{x}). \quad (2.26)$$

avec r un entier, appelé exposant caractéristique. La fonction $f(a, q, \tilde{x})$ est périodique de même période que le réseau. Pour un couple (q, r) donné, il n'existe qu'une valeur de a , notée a_r et appelée valeur caractéristique, qui permette de résoudre (2.25). Il est montré également dans [89] que les fonctions de Mathieu associées à une valeur caractéristique paire sont paires, et réciproquement pour les valeurs caractéristiques impaires. Choisissons la fonction d'onde initiale normalisée :

$$\phi(\tilde{x}, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.27)$$

En projetant cette fonction d'onde sur la base des fonctions de Mathieu, nous obtenons :

$$\phi(\tilde{x}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_r |M(a_r, q, \tilde{x})\rangle \quad (2.28)$$

avec

$$c_r = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} M(a_r, q, \tilde{x}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\tilde{x}. \quad (2.29)$$

Ici, le paramètre q correspond à la profondeur s . On peut alors voir avec l'équation (2.29) que les fonctions de Mathieu impaires, donc associées à une valeur caractéristique impaire, vont donner des coefficients de projection c_r nuls après intégration. Pour ne considérer que les fonctions paires, définissons j tel que $r = 2j$. Nous pouvons alors réécrire la fonction d'onde à $t = 0$:

$$\phi(\tilde{x}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_{2j} M(a_{2j}, q, \tilde{x}) \quad (2.30)$$

avec

$$c_{2j} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} M(a_{2j}, q, \tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (2.31)$$

L'évolution de chaque composante j durant le pulse du réseau est décrite par l'opérateur d'évolution correspondant à une énergie $E = E_L(a_{2j}/4 - q/2)$. On peut écrire alors la fonction d'onde au temps $t = \tau$:

$$\begin{aligned}
 \psi(\tilde{x}, \tau) &= \phi(\tilde{x}, 0)e^{-iE\tau/\hbar} \\
 &= e^{-iq\frac{E_L\tau}{2\hbar}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} c_{2j} M(a_{2j}, q, \tilde{x}) e^{-\frac{ia_{2j}}{4}\frac{E_L\tau}{\hbar}}
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Enfin, pour obtenir l'évolution de la population dans l'ordre n en fonction du temps de pulse nous prenons le module au carré de la transformée de Fourier de la fonction d'onde :

$$P_n(q, \tau) = \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\tilde{x}, \tau) e^{-2in\tilde{x}} d\tilde{x} \right|^2. \tag{2.33}$$

Il nous reste à évaluer les fonctions de Mathieu puis le nombre d'atomes dans les ordres de diffraction. Le logiciel de calcul Mathematica comporte maintenant les méthodes de calculs des valeurs caractéristiques a_{2j} et les fonctions de Mathieu correspondantes $M(a_{2j}, q, \tilde{x})$. Nous avons donc écrit un programme dans ce langage qui nous permet de calculer les populations des ordres en fonction de τ . Nous pouvons alors calculer la déviation standard avec les points expérimentaux et nous choisissons la valeur de la profondeur s qui minimise cette valeur. Sur la figure 2.8 est présenté un résultat typique de cette calibration avec les ajustements par cette méthode et par la méthode précédente dans l'approximation de Raman-Nath. Nous évaluons alors la profondeur à $s = 6.1 \pm 0.1$. On peut voir un meilleur accord avec cette méthode qu'avec la technique Raman-Nath justifiant le travail présenté ci-dessus.

2.5 Calibration par expansion soudaine de la chaîne de condensats

Présentons ici une autre méthode de calibration de la profondeur du réseau. Cette méthode introduite par l'équipe de E. Arimondo [90] se base sur l'étude de la figure d'interférences produite par une chaîne de condensats initialement chargés adiabatiquement dans le réseau (après temps de vol). La population relative des ordres d'interférences nous permet de remonter à la profondeur du réseau. Pour ce faire nous chargeons adiabatiquement un condensat dans le réseau optique à l'aide d'une courbe en forme de S de la montée de la puissance laser du réseau². Puis nous coupons brutalement le réseau ainsi que le piège dans lequel le condensat est maintenu. Après un certain temps de vol, nous prenons une image. La figure 2.9 montre des exemples d'images prises après temps de vol. Étudions dans un premier temps comment cette image nous permet de calibrer la profondeur. Je présenterai ensuite les résultats de cette calibration.

2.5.1 Interférences après temps de vol

Nous chargeons le condensat dans le réseau optique en 30 ms. Cette montée est grande devant \hbar/μ , avec μ le potentiel chimique du condensat. Ceci permet au condensat de se scinder et de créer une chaîne de plus petits condensats piégés dans les sites du réseau. Si le

2. $C \times [(k+1)(t/\tau)^k - k(t/\tau)^{k+1}]$ avec τ le temps de montée choisi, C la commande et k un paramètre que nous choisissons.

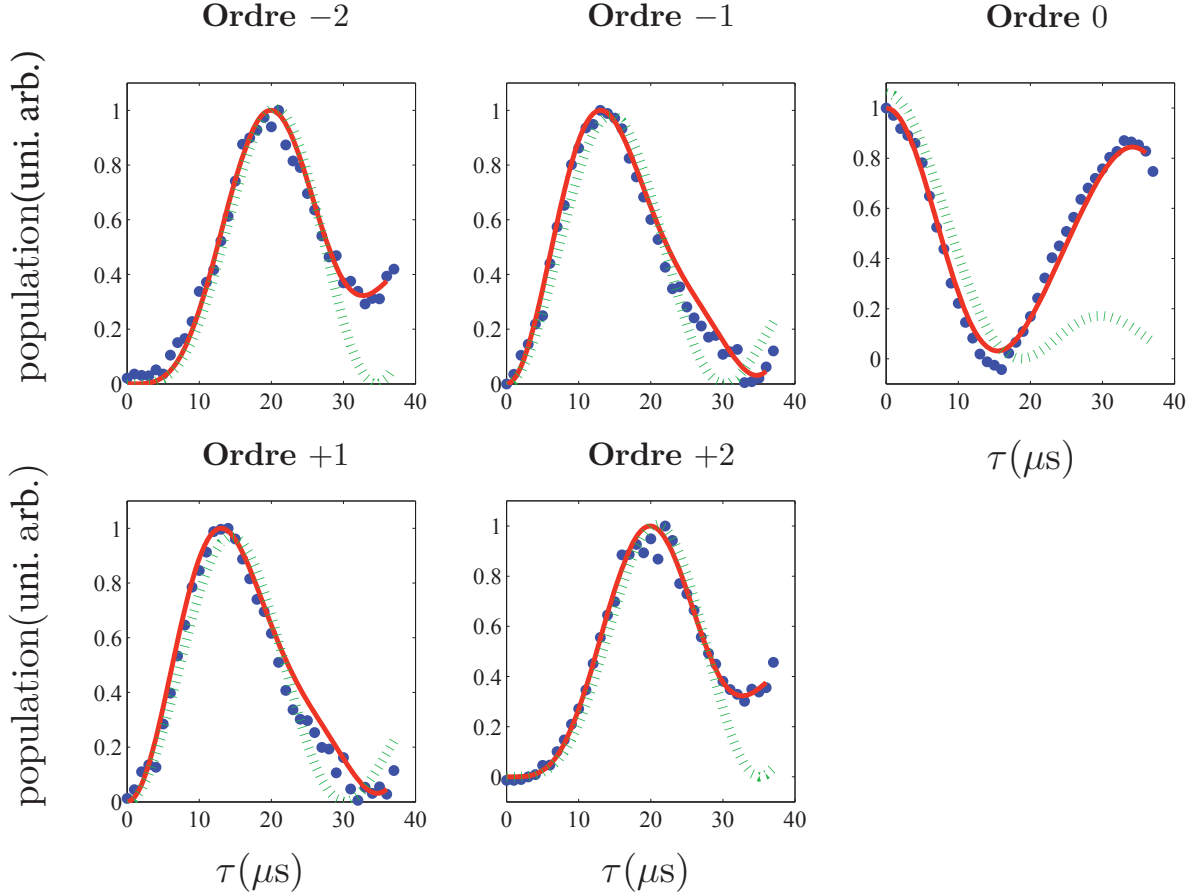


FIGURE 2.8 – Évolution des populations des différents ordres de diffraction pour une puissance laser dans chaque bras du réseau de 203 mW. Les données expérimentales sont représentées par les points bleus. La ligne pleine rouge est la fonction P_n optimale, eq. (2.33). L’ajustement correspondant à l’analyse dans l’approximation de Raman-Nath est représenté par les pointillés verts. L’ajustement par fonction de Mathieu donne ici une profondeur $s = 6.1 \pm 0.1$.

condensat est assez large, un grand nombre de sites se peuplent lors du chargement. Nous pouvons alors supposer la fonction d’onde périodique et l’écrire tel que :

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{N_S} f_0(x - md)e^{i\varphi_m} \quad (2.34)$$

avec N_S le nombre de sites occupés³, f_0 la fonction d’onde associée à un site du réseau et φ_m la phase relative entre les puits. Pour des grandes profondeurs, au dessus de $s = 15$, le taux tunnel diminue fortement réduisant l’échange de particules entre les puits adjacents. La phase φ_m étant proportionnelle au potentiel chimique μ cela entraîne un déphasage des fonctions d’ondes dans le réseau[91].

3. typiquement $N_S = 30$ sur notre dispositif

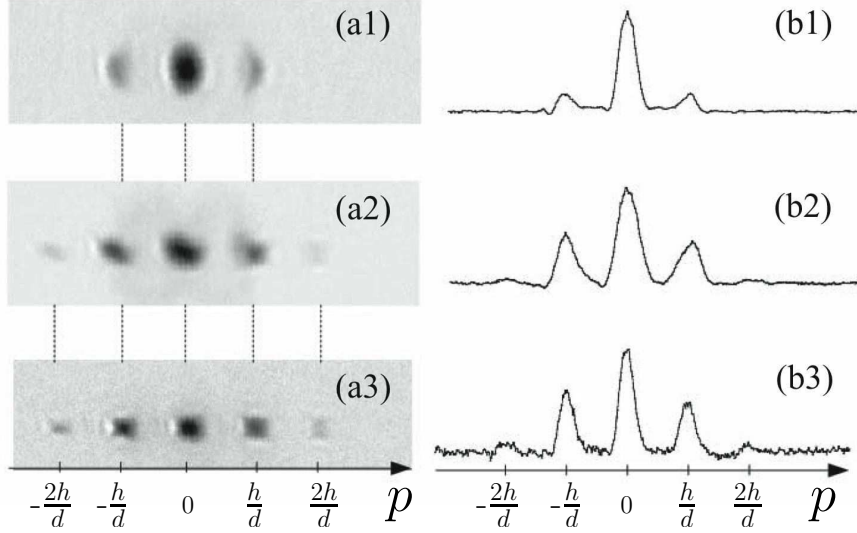


FIGURE 2.9 – (a) Figures d'interférences après temps de vol du condensat initialement chargé adiabatiquement dans un réseau pour différentes profondeurs $s = 1.9, 6.6, 11.4$. (b) Profil obtenu en sommant selon l'axe vertical des images.

Une image prise après un temps de vol nous permet d'obtenir le module au carré de la transformée de Fourier de la fonction d'onde :

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = |\tilde{f}_0(p)|^2 \left| \sum_{m=1}^{N_S} e^{i\varphi_m} e^{-ipmd/\hbar} \right|^2 \quad (2.35)$$

avec $\tilde{f}_0(p)$ la transformée de Fourier de $f_0(x)$. Le deuxième terme rend compte de la phase relative entre les sites. Pour des profondeurs faibles, l'effet tunnel tend à uniformiser le nombre d'atomes et donc la phase entre chaque puits, cela nous permet de faire l'approximation $\varphi_m = \varphi_0$. Nous pouvons alors sortir le terme de phase de la somme et simplifier l'expression tel que :

$$\left| e^{i\varphi_0} \sum_{m=1}^{N_S} e^{-ipmd/\hbar} \right|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{N_S p d}{2\hbar}\right)}{\sin^2\left(\frac{p d}{2\hbar}\right)}. \quad (2.36)$$

Nous voyons alors que la distribution en impulsion de la fonction d'onde est constituée de pics espacés de h/d . Pour étudier la population dans les différents ordres, nous devons étudier f_0 . Dans le début de ce chapitre, j'ai présenté la décomposition en fonction de Wannier de la fonction d'onde dans le cadre d'un réseau suffisamment profond. Dans ce cas, la fonction $f_0(x)$ peut être approximée à une gaussienne. Nous considérons alors notre réseau suffisamment profond pour utiliser l'approximation gaussienne mais nous considérons le taux tunnel suffisant pour assurer une phase homogène. Nous pouvons développer le potentiel V_L du réseau autour de ses minima et écrire sa pulsation harmonique telle que :

$$\omega_{\text{harm}} = \frac{\sqrt{s} E_L}{\hbar}, \quad (2.37)$$

2.5 Calibration par expansion soudaine de la chaîne de condensats

la longueur associé s'écrit :

$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{harm}}}. \quad (2.38)$$

La transformée de Fourier de $f_0(x)$ s'exprime alors :

$$\tilde{f}_0(p) \propto e^{-p^2 a_0^2 / 2\hbar} \quad (2.39)$$

avec $p = nh/d$ pour l'ordre n . En développant et simplifiant cette expression et en prenant le module au carré, nous écrivons la population Π_n de l'ordre n en fonction de celle l'ordre central (ordre 0) uniquement :

$$\Pi_n = \Pi_0 e^{-2n^2/s^{1/2}}. \quad (2.40)$$

La population relative de l'ordre n , $P_n = \Pi_n/\Pi_0$ dépend alors de la profondeur du réseau, nous permettant de remonter à cette dernière grâce à :

$$s_{gauss} = \left(\frac{2n^2}{\ln(P_n)} \right)^2. \quad (2.41)$$

Cette approximation est donc valable si la profondeur est suffisamment grande pour que les fonctions de Wannier soit approximées à des gaussiennes. En l'occurrence, pour les profondeurs plus faibles cette méthode n'est pas très précise, le taux tunnel favorisant une propagation de la fonction d'onde. Dans leur article [92], Pedri *et al* ont étudié numériquement une correction à apporter pour ce régime et une formule est donnée par l'équipe de E. Arimondo [90] pour les profondeurs inférieures à $s = 5$:

$$s \simeq s_{gauss} P_n^{-1/4}. \quad (2.42)$$

2.5.2 Résultats expérimentaux et comparaison à un modèle tiré de la structure de bandes

Nous avons étudié cette méthode de calibration expérimentalement. Pour ce faire, nous chargeons en 30 ms un condensat de Bose Einstein dans notre réseau optique, maintenons les atomes pendant 2 ms puis éteignons brutalement le réseau ainsi que tous les pièges et effectuons une image après 25 ms de temps de vol. Les résultats sont donnés sur la figure 2.10 pour des profondeurs allant entre $s = 1.9$ et $s = 11.4$. Pour chaque point rouge de la courbe, nous avons mesuré les populations des ordres $+1$ et -1 que nous avons moyennées. Nous avons calibré la profondeur du réseau à l'aide de la méthode basée sur la micro-oscillation de la chaîne de condensats dans les puits du réseau, méthode développée dans l'équipe [63] que je présente en détail dans le chapitre suivant de ce manuscrit. La courbe en tiret correspond à la formule (2.42) donnant la population des ordres ± 1 en fonction de la profondeur. La courbe grise correspond à la formule 2.41. La courbe noire provient d'une étude numérique de la structure de bande du réseau. Je rappelle qu'en développant la fonction d'onde initiale sur les états de Bloch pour un pseudo-moment nul, nous pouvons écrire :

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,0} u_{n,0}(x). \quad (2.43)$$

En diagonalisant la matrice de l'équation centrale et en calculant la transformée de Fourier, nous pouvons numériquement calculer la population dans les différents ordres pour une profondeur donnée. Ceci correspond à la courbe en trait plein (noir) sur la figure 2.10.

Les auteurs de [90] dans laquelle la formule (2.42) est tirée précise que cette formule permet de calibrer des réseaux de profondeur inférieure à $5 E_L$. Nous voyons malgré cela sur la figure 2.10 un meilleur accord avec nos données expérimentales pour des profondeurs comprises entre 4 et $12 E_L$. Dans le chapitre suivant, je présenterai comme mentionné plus haut une méthode de calibration développée dans l'équipe qui nous a permis de placer les points rouges sur cette courbe. De plus, notre méthode est précise sur une grande plage de profondeurs ($0.5 < s < 50$).

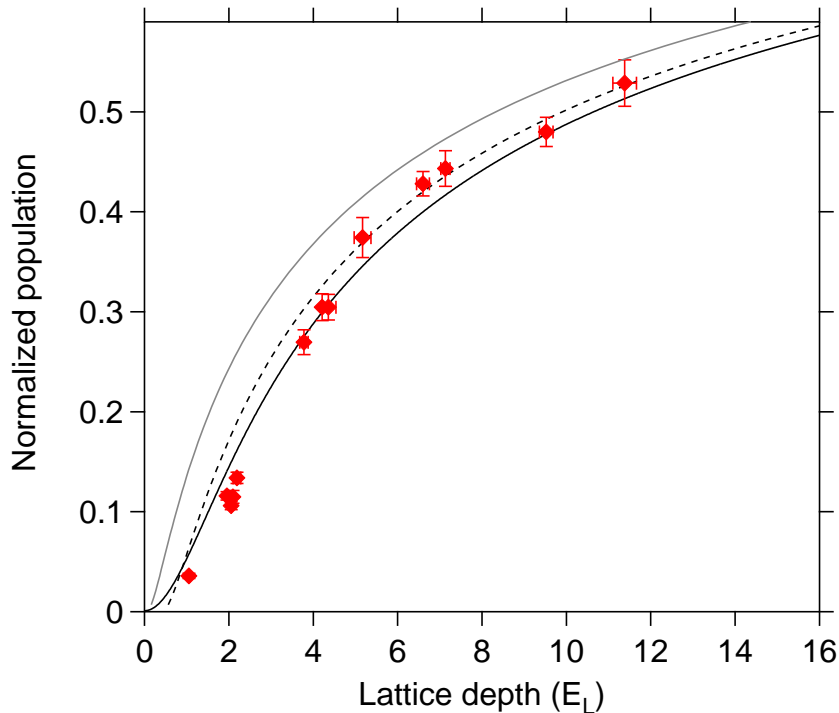


FIGURE 2.10 – Courbe de la population relative dans les ordres ± 1 en fonction de la profondeur. La courbe grise correspond à la formule s_{gauss} dans l'approximation gaussienne. La courbe en tiret est donnée par la formule analytique (2.42). La courbe noire provient d'une analyse de la structure de bande du réseau.

Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter les notions théoriques qui seront utilisées dans les expériences présentées dans ce manuscrit. Nous avons d'abord résolu le problème d'une fonction d'onde dans un potentiel théorique grâce au théorème de Bloch. La description en fonction de Wannier permet d'introduire un Hamiltonien décrivant le saut de particule d'un site du réseau à un autre et de définir le taux tunnel J_0 . J'ai également présenté comment nous réalisons notre réseau optique : du dispositif optique permettant de faire interférer deux faisceaux lasers loin de résonance au centre de la cellule afin de créer un potentiel périodique au

2.5 Calibration par expansion soudaine de la chaîne de condensats

contrôle des paramètres de ce dernier. Nous pouvons sur notre expérience changer de manière quasi-instantanée la phase du réseau ainsi que moduler cette dernière et l'amplitude du réseau sinusoidalement. Enfin, j'ai décrit deux méthodes de calibration de la profondeur du réseau. La première repose sur la diffraction du CBE. J'ai d'abord présenté le traitement utilisé dans l'approximation de Raman-Nath puis comment pousser plus loin ce traitement lorsque cette approximation n'est plus valide dans le cas de réseau peu profond. La deuxième consiste en l'analyse de la figure d'interférences après temps de vol de la chaîne de condensats initialement chargés adiabatiquement dans le réseau. Je présenterai dans le chapitre suivant une nouvelle méthode qui est très précise sur une large plage de profondeur. Les bases théoriques et techniques étant maintenant données, je décris dans les chapitres suivants les expériences que nous avons réalisées au cours de ma thèse à l'aide du dispositif qui a été décrit dans les deux chapitres précédents.

2.5 Calibration par expansion soudaine de la chaîne de condensats

Deuxième partie

Déplacement soudain de la phase

CHAPITRE 3

DÉPLACEMENT SOUDAIN DE LA PHASE

Introduction

En changeant quasi-instantanément la phase du réseau, nous pouvons déplacer de manière soudaine le réseau de quelques dizaines de nm. Nous pouvons alors placer le condensat initialement au repos dans une position hors équilibre. La chaîne de condensats couplés se met alors à osciller dans chaque puits occupé du réseau. La dynamique qui s'ensuit est très riche. Tout d'abord, nous avons remarqué que la période de l'oscillation correspondante ne dépendait que de la profondeur du réseau, nous permettant de l'utiliser comme une méthode de calibration de la profondeur, présentée dans la partie 3.1. Nos expériences sont ainsi auto-calibrées. Pour certaines profondeurs, nous avons également remarqué la présence d'effet tunnel entre les puits du réseau : au cours de l'oscillation, une partie des paquets atomiques dans chaque puits passe par effet tunnel dans le puits voisin et continue son oscillation dans celui-ci. Cet effet tunnel se produit lorsque les paquets atteignent un point de rebroussement dans l'oscillation, le point de rebroussement auquel se produit l'événement tunnel dépend de la profondeur du réseau. Le résultat remarquable est que le paquet ayant traversé la barrière par effet tunnel a un retard par rapport au paquet qui a été réfléchi sur le potentiel. Nous avons alors pu déterminer un temps de traversée de la barrière de potentiel par effet tunnel, et avons pu le caractériser par rapport aux différents paramètres du système. Je présente ces résultats dans la partie 3.2. La division en deux du paquet incident par la barrière tunnel réalise ainsi une lame séparatrice. Les paquets rencontrent une deuxième lame séparatrice au point de rebroussement suivant créant alors la configuration d'un interféromètre de Mach-Zehnder. En l'occurrence, c'est une chaîne de Mach-Zehnder microscopiques couplés. Les résultats concernant cet interféromètre sont présentés dans la partie 3.3.

En pratique, le traitement des données de ces expériences repose sur une analyse de la distribution en vitesses de la chaîne de condensats obtenue directement en réalisant un temps de vol. Avant de présenter ces expériences je commence par donner quelques éléments qui aideront à la compréhension des résultats présentés.

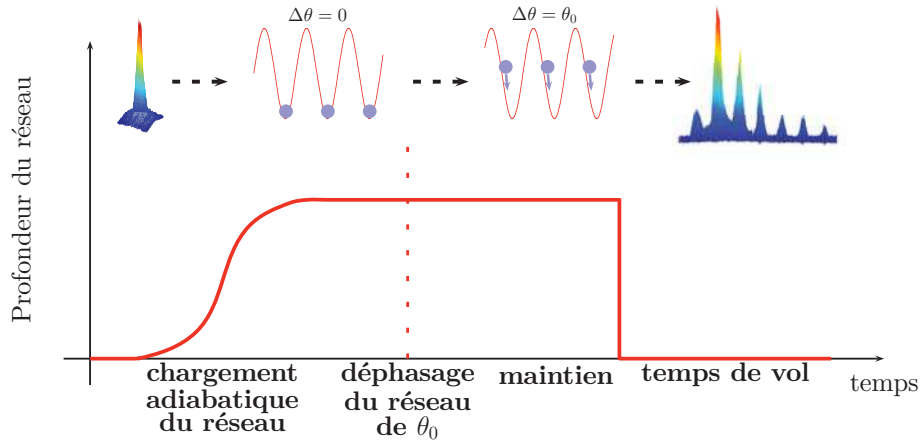
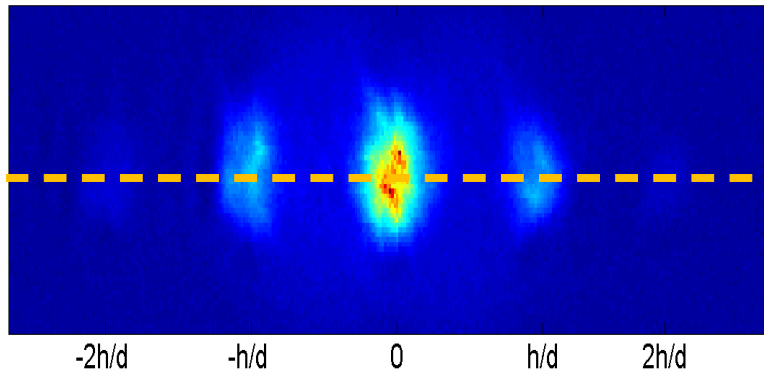

 FIGURE 3.1 – *Séquence expérimentale utilisée tout au long de ce chapitre*

 FIGURE 3.2 – *Figure d'interférence obtenue après un temps de vol de 25 ms.*

Figure d'interférences après temps de vol (TOF)

Pour comprendre les figures et résultats de ce chapitre ainsi que des chapitres suivants, il est important de commencer par expliquer ce que nous imageons lorsque nous observons un condensat provenant d'un réseau optique après un temps de vol. La procédure que nous utilisons est la suivante : nous coupons brutalement le réseau et le confinement extérieur, laissons le nuage chuter et entrer en expansion pendant 25 ms. Cette opération opère comme une transformée de Fourier et nous permet d'observer la distribution de vitesse du condensat. Dans le cas de réseaux peu profonds où l'échange d'atomes entre les puits du réseau joue un rôle important, le condensat garde une phase homogène et nous obtenons alors une figure d'interférences répétable d'expérience en expérience. Si le réseau est suffisamment profond pour que la phase ne soit plus homogène, nous obtiendrons toujours une figure d'interférences mais elle sera alors aléatoire d'expérience en expérience en fonction de l'évolution de la phase dans chaque puits. Lors de l'expansion après l'extinction du réseau optique, le condensat interfère avec lui-même. Le module au carré de la transformée de Fourier de la fonction

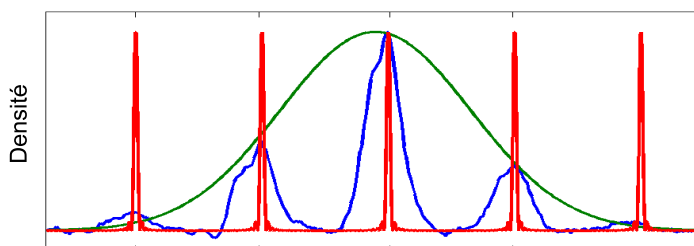


FIGURE 3.3 – Profil de la densité du condensat après temps de vol. La ligne verte correspond à une approximation gaussienne de la fonction $\tilde{f}_0(p)$. Les pics rouges correspondent au peigne de Dirac avec la périodicité du réseau. La ligne bleue est le profil de l'image intégrée selon un axe de la figure 3.2.

d'onde après temps de vol s'écrit :

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = |\tilde{f}_0(p)|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N_s pd}{2\hbar}\right)}{\sin^2\left(\frac{pd}{2\hbar}\right)} \quad (3.1)$$

où $\tilde{f}_0(p)$ correspond à la distribution en vitesse d'un condensat dans un puits du réseau, N_s est le nombre de puits occupés (typiquement $N_s = 30$ puits dans nos expériences). Le deuxième terme contient une empreinte de la périodicité du réseau. La figure d'interférences que nous obtenons est donc le produit de la distribution de vitesse des condensats dans chaque puits du réseau et d'un peigne de Dirac contenant la périodicité du réseau comme illustré sur la figure 3.3. La figure 3.2 est centrée sur l'ordre $p = 0$ car la distribution initiale de vitesse des condensats dans le réseau était centrée sur 0; chaque condensat était à l'équilibre au fond des puits. En revanche, si les condensats sont en mouvement dans le réseau, la figure d'interférences ne sera plus centrée autour de 0. De cette manière là, nous pouvons suivre la dynamique du centre de masse des mini-condensats de chaque puits. Comme mentionné, en déplaçant la phase nous pouvons placer les condensats, initialement dans les vallées de potentiel, sur les pentes de chaque puits, comme illustré sur la figure 3.4. La chaîne de condensats couplés commencera alors à osciller dans chacun des pièges. La mise en mouvement de la chaîne de condensats par cette méthode et l'analyse de la figure d'interférences après temps de vol nous ont permis de mettre au point une technique d'imagerie par rotation dans l'espace des phases.

Microscope par rotation dans l'espace des phases

Pour étudier la physique dans les réseaux optiques, posséder un système d'imagerie in-situ permettant de détecter jusqu'à l'atome unique et de résoudre les différents puits du réseau peut se révéler très utile voire essentiel. L'équipe de H. Ott en 2008 a mis au point une méthode de détection par ionisation du condensat grâce à un canon à électrons permettant de résoudre l'atome unique par détection de l'électron émis par ionisation [54]. D'autres méthodes optiques se basant sur l'utilisation d'objectifs de microscope de grande ouverture

numérique ont été développées peu de temps après, en autre, dans les équipes de M. Greiner [55], et I. Bloch et S. Kuhr [56]. Le microscope, placé très près de la chambre d'expérience, permet alors d'avoir une résolution en dessous du μm et de détecter l'atome unique par fluorescence. Notre dispositif expérimental ne disposant pas d'un tel système, nous avons développé une méthode permettant de différencier spatialement deux paquets atomiques au sein d'un même puits du réseau en effectuant une rotation dans l'espace des phases suivi d'un temps de vol. Nous transposons un problème de l'échelle sub-micronique dans l'espace des positions, que nous ne pouvons pas résoudre, à l'espace des impulsions. Un puits du réseau n'étant pas une zone de potentiel constant, une différence de position en son sein entrainera une différence en impulsion que nous exploitons. Cette technique est décrite en détail dans la dernière partie de ce chapitre.

Oscillation du condensat dans les puits du réseau

Comme expliqué dans le chapitre précédant, pour déplacer notre potentiel, nous appliquons une phase à un des bras du réseau, ce qui a pour conséquence de déplacer le réseau de quelques centaines de nm. Les condensats à l'intérieur des puits entament alors des micro-oscillations intra-site. En effectuant une série d'images avec différent temps de maintien dans le réseau après ce décalage initial et en mettant ses images sous forme de film temporel, nous obtenons la figure 3.4. Il est important de rappeler que c'est la distribution de vitesse du condensat dans le réseau que nous observons après temps de vol. Au début de l'oscillation, les condensats sont au repos sur les pentes de leurs puits respectifs. Après un temps de maintien correspondant à un quart de la période d'oscillation, ils arrivent au centre des puits avec une vitesse maximale. Le centre de la figure d'interférences se déplace donc : elle n'est plus centrée autour de l'ordre 0 correspondant aux atomes ayant initialement une vitesse nulle dans le réseau, mais autour d'une vitesse qui dépend de la profondeur du réseau et du déplacement initial. Puis, les condensats continuent leurs oscillations et atteignent le premier point de rebroussement pour lequel leur vitesse est à nouveau nulle. La figure d'interférences est de nouveau centrée autour de l'ordre 0. Cette évolution est résumée sur la figure 3.4.

Nous présentons ci-après les différents résultats que nous avons extraits de cette expérience et qui ont été publiés dans [64] et [63]. Tout d'abord je présente une méthode de calibration de la profondeur qui repose sur la période des micro-oscillations. Dans la deuxième partie, j'expose les résultats de la mesure de temps de traversée par effet tunnel des condensats à travers les barrières de potentiel entre puits du réseau. La troisième partie sera consacrée à une conséquence de la présence d'effet tunnel ; notre système constitue alors une chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder microscopiques pour lequel l'effet tunnel à travers les barrières de potentiel du réseau joue le rôle de lame séparatrice. Enfin, la présence de l'effet tunnel nous a également permis de tester le microscope par rotation dans l'espace des phases. La dernière partie présente les résultats de ce test.

3.1 Calibration par mesure de micro-oscillations

Nous étudions dans un premier temps la période de l'oscillation engendrée par le déplacement soudain de la phase du réseau. Il est important de noter que le mouvement dipolaire d'un condensat dans un réseau optique a déjà été étudié expérimentalement dans les équipes de M. Inguscio et W. Phillips [93, 94, 95]. Toutefois, dans ces expériences, le réseau est déplacé de quelques dizaines de μm , soit sur une distance supérieure à la taille du condensat.

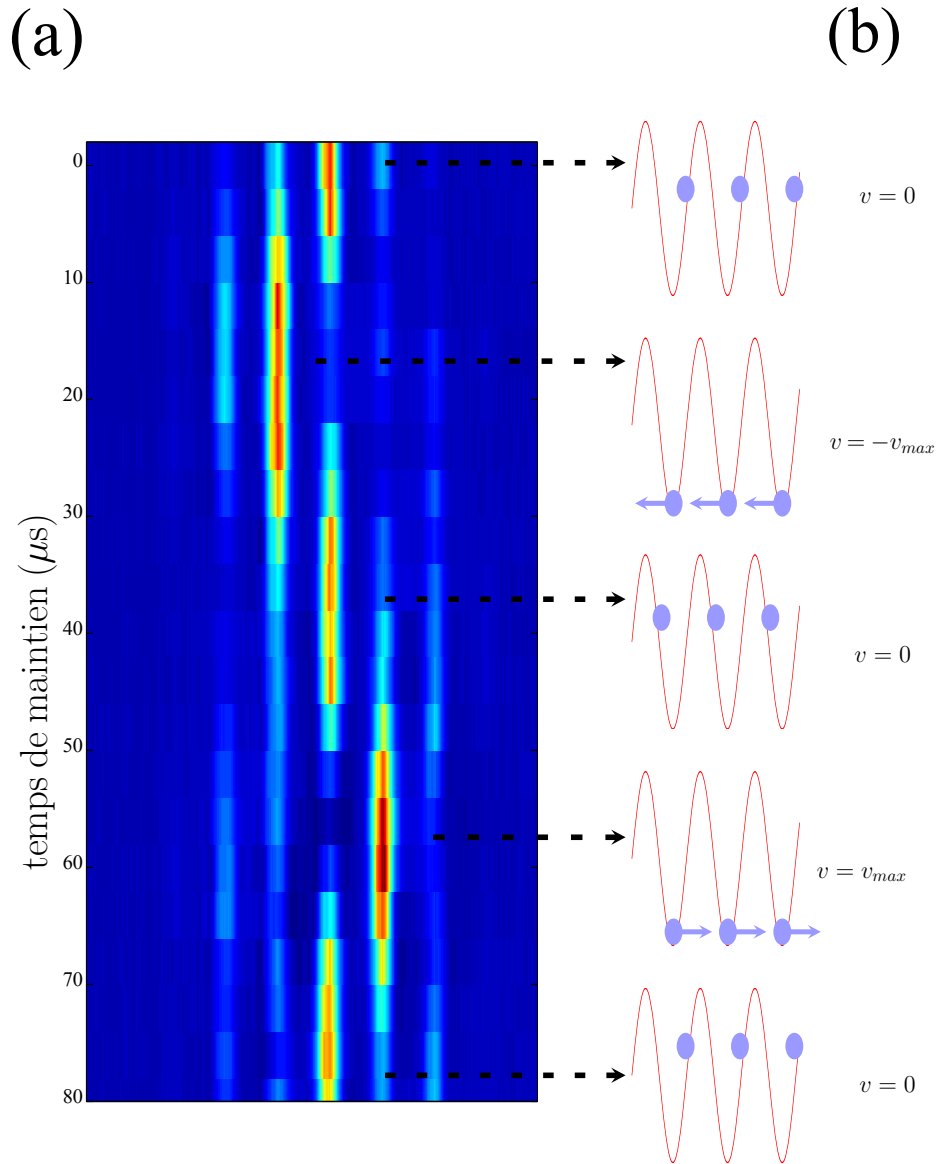


FIGURE 3.4 – Correspondance de la figure d’interférences avec l’oscillation de la chaîne de condensats dans les puits du réseau. (a) : image de la densité atomique en fonction de la position et du temps de maintien pour un décalage en phase de $\theta_0 = 45^\circ$. Chaque ligne correspond à une image prise pour un temps de maintien différents. Figure prise pour une profondeur $s=5$. (b) : représentation schématique de l’évolution du paquet d’atomes.

L’oscillation du centre de masse du condensat est alors étudiée grâce à un formalisme issu de l’hydrodynamique. La fréquence dipolaire est alors donnée par : $\omega_{dip} = (m/m^*)^{1/2}\omega_{ext}$ avec m^* la masse effective, et ω_{ext} la fréquence du potentiel extérieur. Dans ces expériences, le micro-mouvement des paquets d’ondes dans chaque puits n’a pas d’influence sur le mou-

vement du centre de masse. En revanche, l'expérience que nous avons réalisée est effectuée dans un régime très différent, avec un déplacement initial typiquement de quelques dizaines de nm soit 1000 fois plus petit. Dans notre cas, le micro-mouvement joue un rôle majeur et l'approche utilisée dans les expériences [93, 94, 95] n'est plus adaptée. De plus, la dynamique qui intervient dans chaque puits ne peut plus être décrite par une approche classique comme nous le verrons un peu plus loin.

Commençons par présenter les résultats de l'étude expérimentale de ces micro-mouvements et de leur période d'oscillation. Nous ferons ensuite la comparaison avec les simulations numériques effectuées au sein de l'équipe. Je pourrai à ce moment là expliquer comment nous pouvons nous servir de cette oscillation pour calibrer la profondeur du réseau.

3.1.1 Étude expérimentale de l'oscillation

Tout d'abord, pour déterminer la période d'oscillation sur une image comme celle de la figure 3.4, nous suivons l'évolution de la population dans l'ordre 0. La période associée à l'ordre 0 que nous obtenons est alors la moitié de la période de l'oscillation de la chaîne de condensats que nous notons T_{osc} . En effet, comme je le rappelle, l'image de la figure 3.4 correspond à l'évolution de la distribution de vitesse du condensat dans le réseau au cours de l'oscillation. Le passage par l'ordre 0 correspond donc à un moment de l'oscillation où le condensat a une distribution de vitesse centrée autour de 0, soit à un point de rebroussement de l'oscillation. Il faut donc passer deux fois par l'ordre 0 pour revenir au point initial. Dans l'expérience de la figure 3.4, nous mesurons une période d'oscillation de $T_{osc} = 76.6 \pm 1.6 \mu s$. Essayons de comprendre cette période.

En premier lieu, nous pouvons effectuer le raisonnement que les condensats évoluent indépendamment les uns des autres dans leurs puits respectifs ; nous pouvons alors assimiler le centre de masse de chaque paquet à une particule classique. Le potentiel non-harmonique dans lequel ils évoluent s'écrit :

$$V(x) = -sE_L \cos^2\left(\frac{\pi x}{d}\right). \quad (3.2)$$

Nous pouvons alors par une analyse de mécanique classique écrire la période d'oscillation théorique en fonction de la profondeur renormalisée s :

$$T_{th}(s) = \frac{T_{harm}(1)}{\sqrt{s}} f(\theta_0) \quad (3.3)$$

avec $T_{harm}(1) = 123.285 \mu s$ la période harmonique pour un potentiel de profondeur $s = 1$ en négligeant l'influence des anharmonicités. La fonction $f(\theta_0)$ rend compte de ces harmonicités en fonction du déphasage initial θ_0 . En effet, la correction à apporter à la période harmonique évolue avec le déphasage initial, qui place le paquet plus loin du centre du puits. La fonction $f(\theta_0)$ est donnée par :

$$f(\theta_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_0}}. \quad (3.4)$$

Maintenant, nous pouvons comparer cette période théorique classique à nos résultats expérimentaux. En calculant la valeur de $f(\theta_0)$ pour $\theta_0 = 45^\circ$ et en connaissant la valeur de la profondeur du réseau dans l'expérience de la figure 3.4, nous pouvons en déduire la

3.1 Calibration par mesure de micro-oscillations

période : $T_{th}(s = 5) = 64.9 \mu s$. On voit que l'écart avec la période $T_{osc} = 76.6 \pm 1.6 \mu s$ est important. Nous connaissons l'erreur que nous faisons sur le déphasage initial, il est de $\pm 2^\circ$ mais il ne suffit pas à expliquer comment nous obtenons un écart aussi grand par rapport à la prédiction théorique classique.

Pour comprendre cette différence, nous étudions expérimentalement l'influence du déphasage initial sur la période d'oscillation et la comparons au résultat (3.3). Le résultat de cette comparaison est donnée sur la figure 3.5 pour des expériences réalisées avec un réseau de profondeur $s = 3.2$.

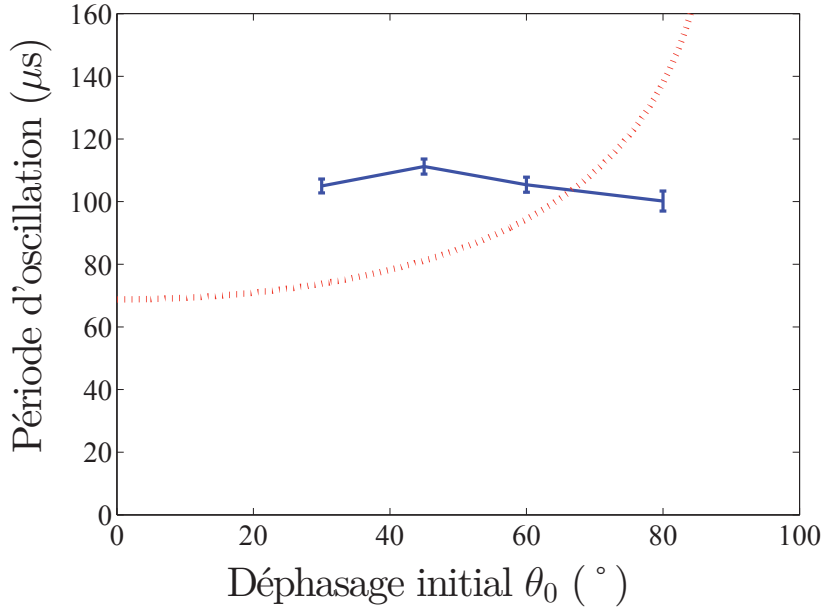


FIGURE 3.5 – Influence du déphasage initial sur la période d'oscillation. Les points bleus sont les données expérimentales, la courbe en pointillés rouge est la prédiction classique. Courbe réalisée pour un réseau de profondeur $s = 3.2$.

On remarque que non seulement la courbe expérimentale ne concorde pas du tout avec la prédiction théorique classique mais également que le déphasage initial et donc les anharmonicités du potentiel ne semblent avoir quasiment aucun impact sur la période d'oscillation. Cela laisse à penser que l'oscillation serait gouvernée par un phénomène quantique collectif de la chaîne de condensats dans le réseau. Pour pousser plus loin l'investigation de ce phénomène et de la dynamique dans cette expérience, nous nous sommes appuyés sur des simulations numériques se basant sur la résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii.

3.1.2 Simulation numérique

Les simulations numériques sont basées sur la résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(x, y, z) + gN|\psi(x, y, z)|^2 \right) \psi(x, y, z) \quad (3.5)$$

avec dans notre cas $V(x, y, z) = -sE_L \cos^2(\pi x/d) + V_{ext}(x, y, z)$ et V_{ext} le potentiel extérieur créé par le piège hybride dans lequel le condensat est créé que nous considérerons harmonique

de fréquence ω_{ext} dans la direction x du réseau et g la constante d'interaction. L'équation est adimensionnée et réduite à une dimension. L'équation à résoudre est alors :

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial \tilde{t}} = \left[\frac{(-\Delta + \tilde{\omega}_{ext}^2 X^2)}{2} - \gamma \cos^2 \left(\frac{\pi X}{4} + \varphi \right) + \beta |\psi(x)|^2 \right] \psi(x) \quad (3.6)$$

avec $\tilde{t} = \tilde{\omega} t$ le temps adimensionné, $\tilde{\omega} = 16\hbar/(md^2)$, $\tilde{\omega}_{ext} = \omega_{ext}/\tilde{\omega}$ et $\gamma = \pi s^2/8$. La force des interactions β est déterminée à l'aide d'un modèle de réduction effective de dimension et en prenant un profil de Thomas-Fermi pour les directions transverses [96]. Une description plus détaillée de cette méthode est développée dans la thèse d'Aéla Fortun [62]. La résolution a été effectuée à l'aide de la *toolbox* GPELab développée sous Matlab par R.Duboscq et X. Antoine [97, 98].

Intéressons nous maintenant aux résultats. Nous avons d'abord commencé par étudier le mouvement d'oscillation intrasite pour essayer de comprendre le quasi-isochronisme de l'oscillation de chaque condensat dans son puits, i.e. le fait que la période de l'oscillation ne dépende pas de l'angle du déphasage initial. Nous étudions alors l'influence du déphasage initial pour $\theta_0 = 20^\circ$ et $\theta_0 = 70^\circ$ pour un nombre différent de puits peuplés (2, 4, 8, réseau). Les résultats sont présentés dans la figure 3.6.

Nous pouvons alors voir que l'isochronisme commence déjà à se mettre en place pour deux puits peuplés. Dans le cas du réseau (environ 30 puits), les oscillations restent en phase sur environ 5 périodes avant de se déphaser légèrement. Il nous faut donc utiliser des temps d'oscillations relativement courts pour garder l'indépendance du déphasage initial θ_0 sur nos données. Les simulations de la figure 3.6 ont été réalisées en définissant une enveloppe au réseau quasi-rectangulaire. Expérimentalement l'enveloppe du réseau est gaussienne à cause des faisceaux laser, nous en déduisons que la forme précise de l'enveloppe n'a pas d'influence sur l'isochronisme des oscillations.

Les simulations numériques nous ont alors permis de faire une étude de l'influence de la profondeur du réseau sur la période d'oscillation, les résultats sont donnés sur la figure 3.7. Nous avons alors vu un résultat remarquable : la période d'oscillation pour une profondeur donnée ne dépend ni de la fréquence extérieure de piège ω_{ext} ni des interactions β dans la limite où la fréquence extérieure de piège est petite devant la fréquence de piège du réseau ; cette condition est toujours remplie sur notre dispositif. Cette période ne dépend donc que de la profondeur du réseau, ce qui en fait une bonne candidate pour une méthode de calibration robuste. Sur la figure 3.7, nous avons aussi vérifié avec les simulations le résultat expérimental qui montrait la robustesse initial de la période d'oscillation par rapport au déphasage pour une profondeur donnée.

3.1.3 Analyse des états de Bloch et méthode de calibration

Maintenant que nous avons vu que cette oscillation ne dépend ni des interactions, ni de la forme du potentiel extérieur, nous pouvons approfondir notre analyse et interpréter nos résultats grâce à la structure de bandes du réseau. Je le rappelle ici, en développant la fonction d'onde initiale après déphasage du système sur les états de Bloch d'impulsion nulle, nous obtenons :

$$\psi(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,0} u_{n,0}(x), \quad (3.7)$$

3.1 Calibration par mesure de micro-oscillations

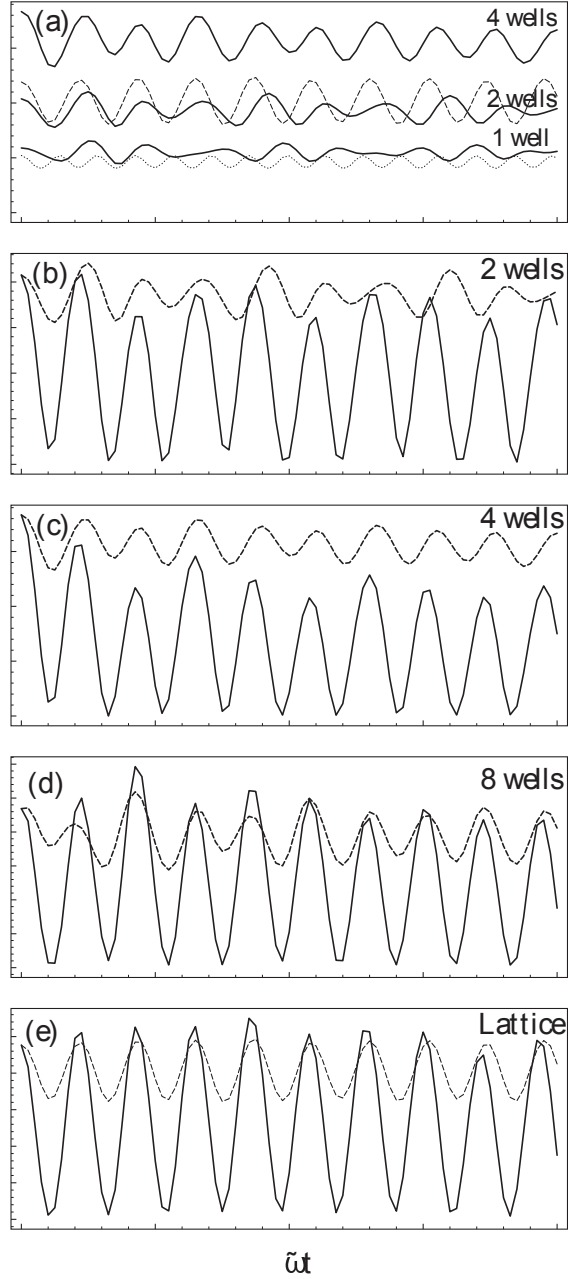


FIGURE 3.6 – Étude numérique de la quasi-synchronisation. La densité atomique sur la ligne centrale $p = 0$ est représentée en fonction du temps renormalisé $\tilde{t} = \tilde{\omega}t$ pour différentes conditions. (a) : déphasage initial $\theta_0 = 20^\circ$ pour 1, 2 et 4 puits (lignes pleines), pour le réseau (tiret) et pour le puits harmonique associé au fond des puits du réseau (ligne pointillée). (b), (c), (d) et (e) : Comparaison de la densité atomique sur la ligne centrale ($p=0$) pour $\theta_0 = 20^\circ$ (tirets) et $\theta_0 = 70^\circ$ (ligne pleine) pour 2, 4, 8 puits et pour le réseau.

avec $u_{n,q}(x)$ les fonctions de Bloch pour une profondeur du réseau V_0 donnée, associées à la bande n et au pseudo-moment q pour $-\pi/d \leq q \leq \pi/d$. L'évolution temporelle de la fonction

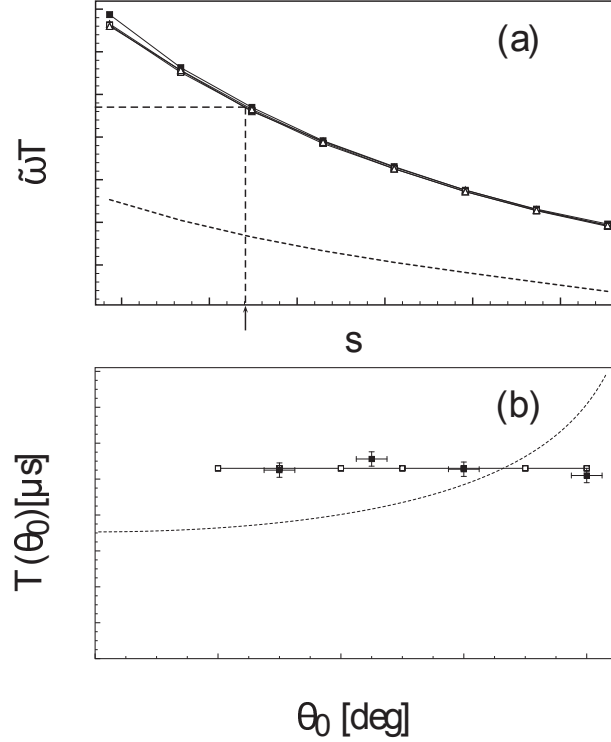


FIGURE 3.7 – Études numériques de l'influence de la profondeur et du déphasage initial sur la période de l'oscillation collective. (a) Période de l'oscillation collective en unités adimensionnées en fonction de la profondeur du réseau normalisée pour différentes valeurs de la fréquence du potentiel extérieur et différentes valeurs pour les interactions. Les triangles correspondent à $\tilde{\omega}_{ext} = 1/50$, les carrés pleins à $\tilde{\omega}_{ext} = 1/262$, les symboles vides à $\beta = 0.1$ et les symboles pleins à $\beta = 1$. La ligne en pointillé indique l'évolution de la période classique. (b) Période d'oscillation en fonction du déphasage initial θ_0 : points expérimentaux (carrés remplis), simulations numériques (carrés vides) utilisant la courbe (a) pour déterminer la profondeur du réseau dans l'expérience, prédiction classique (ligne en pointillé).

d'onde s'écrit alors :

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,0} e^{-i \frac{E_n(q=0)t}{\hbar}} u_{n,0}(x) \quad (3.8)$$

avec $E_n(q)$ sont les énergies de la bande n pour une profondeur donnée. Les images que nous observons expérimentalement sont prises après un temps de vol. Comme expliqué dans l'introduction, ces images correspondent au module carré de la transformée de Fourier de la fonction d'onde, soit :

$$P(p, t) = |\tilde{\psi}(p, t)|^2 \propto \left| \int \psi(x, t) e^{ipx/\hbar} dx \right|^2. \quad (3.9)$$

Pour caractériser l'oscillation, nous prenons la transformée de Fourier en temps de $P(p, t)$ des différents ordres et définissons la population dans chaque ordre n :

$$\Pi_n(\nu) \propto \int P(2\pi n/d, t) e^{i\nu t} dt. \quad (3.10)$$

3.1 Calibration par mesure de micro-oscillations

Comme dans la dernière partie du chapitre précédent, nous pouvons résoudre numériquement ce système et simuler l'évolution des différents ordres. La figure 3.8 présente les résultats de ces simulations. Nous traçons $\Pi_0(\nu)$ et $\Pi_{\pm 1}(\nu)$ pour différentes profondeurs s et différents angles initiaux θ_0 .

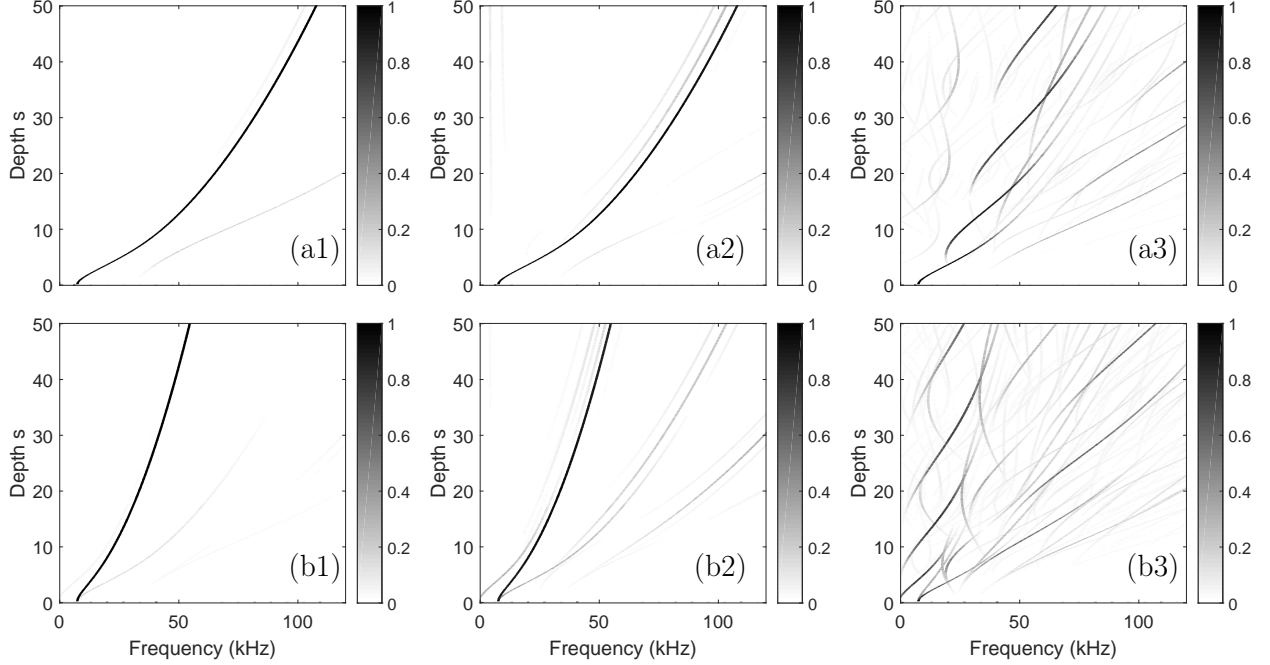


FIGURE 3.8 – Populations $\Pi_n(\nu)$ dans l'espace des impulsions pour les ordres $n = 0$ (a) et $n = \pm 1$ (b). Les populations sont définies comme la transformée de Fourier de l'évolution temporelle de la figure d'interférences. Les figures (a1) et (b1) sont tracées pour un angle de déphasage initial $\theta_0 = 10^\circ$, (a2) et (b2) pour $\theta_0 = 25^\circ$, et (a3) et (b3) pour $\theta_0 = 70^\circ$.

Un résultat remarquable ressort lorsque nous nous concentrons sur la courbe tracée pour l'ordre 0 et pour un angle de 10° . Pour une gamme de profondeur large, entre $s = 0.5$ et $s = 50$, nous ne voyons principalement la contribution que d'une seule fréquence. Une deuxième fréquence apparaît pour les profondeurs les plus grandes mais son poids dans la transformée de Fourier est bien plus faible que celui de la première fréquence. Nous avons alors une bijection entre fréquence d'oscillation et profondeur ce qui confirme que cette oscillation est une excellente candidate pour calibrer la profondeur du réseau. Nous pouvons alors mesurer la période d'oscillation de la population dans l'ordre 0, en effectuant un ajustement à l'aide d'une fonction sinusoidale, et lui faire correspondre une profondeur ; la figure 3.9 présente un exemple expérimental de cette pratique. On peut remarquer également que pour les petites profondeurs et l'angle le plus petit, les ordres ± 1 ne présentent qu'une seule fréquence, ce qui nous permet aussi de nous baser sur la fréquence mesurée avec l'évolution de ces ordres pour calibrer la profondeur. En effet, expérimentalement, pour les petites profondeurs et les petits angles, le contraste expérimental de l'oscillation de l'ordre 0 est parfois insuffisant pour effectuer un ajustement sinusoidal. En effet, dans ces cas, le déphasage initial apporte moins d'énergie et l'ordre 0 ne se dépeuple jamais complètement au cours de l'oscillation. Nous avons donc une alternative de confiance qui permet de palier à ce problème.

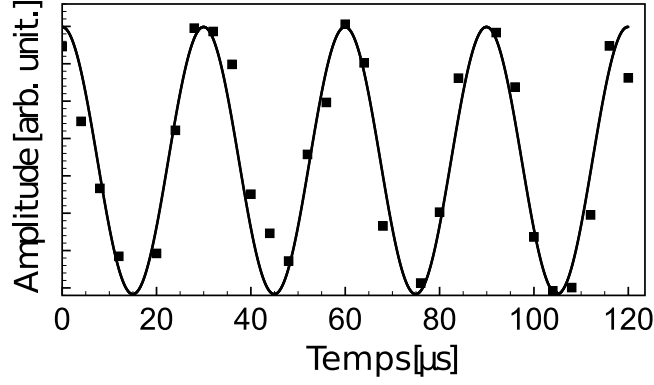


FIGURE 3.9 – Population dans l’ordre zéro en fonction du temps après un déphasage initial de $\theta_0 = 15^\circ$. Les points correspondent aux résultats expérimentaux, la ligne noire correspond à un ajustement effectué avec une fonction sinusoïdale. Nous obtenons dans ce cas une fréquence $\nu = 33.3$ kHz, soit une profondeur correspondante de $s = 6.66$.

Notre analyse en terme de structure de bande nous a permis de comprendre la raison de l’apparition de cette unique fréquence dans l’oscillation de l’ordre 0 pour les petits angles. Deux phénomènes travaillent de concert. Tout d’abord, le déphasage soudain du réseau projette la fonction d’onde initiale sur les bandes de Bloch pour $\theta_0 = 10^\circ$. Les petits déphasages limitent le nombre d’états sur lequel l’état initial est projeté, typiquement la projection de fait seulement les quatre premières bandes. De plus, l’intégrale (3.9) s’annule pour les états impaires lorsque $p = 0$, excluant la contribution de la deuxième et quatrième bande dans la dynamique d’oscillation à faible angle pour l’ordre 0. Grâce à cette règle de sélection, la fréquence de l’oscillation de la population dans l’ordre 0 est donnée par :

$$\nu_0 = \frac{E_3(q=0) - E_1(q=0)}{h}. \quad (3.11)$$

Pour les ordres ± 1 , il n’y a pas de règle de sélection, mais le faible angle limite toujours le nombre de bandes peuplées. Nous pouvons alors écrire la fréquence de ces ordres pour un petit angle de déphasage comme :

$$\nu_1 = \frac{E_2(q=0) - E_1(q=0)}{h}. \quad (3.12)$$

Nous comprenons alors avec cette analyse la raison pour laquelle la fréquence sur l’ordre 0 que nous mesurons ne dépend pas de l’angle initial de déphasage, cette fréquence dépend uniquement de la profondeur du réseau via l’écart en énergie entre bandes. Si l’angle initial est plus élevé la fonction d’onde est projetée sur un grand nombre de bandes, de nombreuses fréquences interviennent alors comme nous pouvons le voir sur la figure 3.8 (a3) et (b3). Nous avons exploré ce régime sur la figure 3.10 qui présente l’oscillation expérimentale des ordres -2, -1 et 0 pour un angle de déphasage initial de 70° . La profondeur du réseau a été calibrée par notre méthode en effectuant une oscillation pour un angle plus petit $\theta_0 = 15^\circ$, ici $s = 9.76$. Puis nous avons superposé les résultats des simulations numériques pour ce réseau et cet angle de déphasage aux données expérimentales. Les données correspondent parfaitement, sans paramètre ajustable, malgré la dynamique complexe et très hors équilibre.

Nous avons ainsi une bonne compréhension physique de la dynamique de ce phénomène et nous pouvons utiliser cette analyse pour déterminer avec précision la profondeur du réseau.

3.2 Mesure du temps de traversée tunnel dans un réseau optique

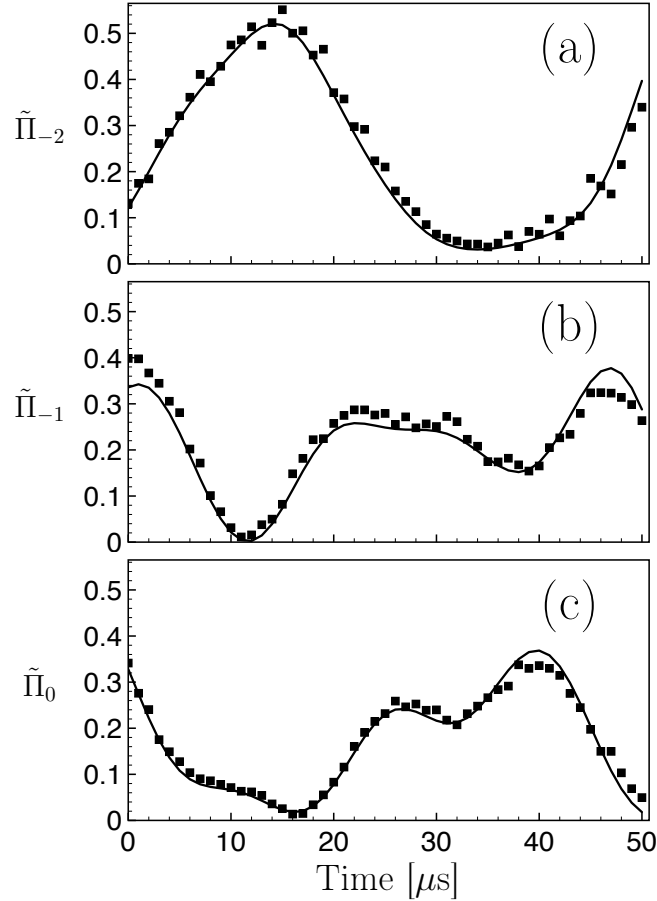


FIGURE 3.10 – Populations normalisées $\tilde{\Pi}_m(t)$ de l'ordre m pour $\theta_0 = 70^\circ$ tel que $\sum_m \tilde{\Pi}_m(t') = 1$ pour tout t' . (a) $m=-2$, (b) $m=-1$ et (c) $m=0$. La profondeur vaut $s = 9.76 \pm 0.2$.

Cette nouvelle méthode de calibration robuste sur une large plage de profondeur ne dépend ni des interactions, ni du potentiel extérieur, ni de l'angle initial de déphasage. Elle est également extrêmement pratique puisqu'elle nous permet d'auto-calibrer toutes les expériences présentées dans ce chapitre.

Dans la figure expérimentale 3.4 que j'ai présentée et étudiée, la dynamique d'oscillation ne présente pas d'effet tunnel pendant le temps de l'expérience, le taux tunnel étant faible. En l'occurrence, pour des profondeurs plus faibles, le taux tunnel augmente et la probabilité pour un atome de traverser la barrière de potentiel séparant les puits voisins devient plus importante. Nous avons alors vu la présence d'effet tunnel aux points de rebroussement, i.e. lorsque le condensat se trouve à vitesse nulle. Mais la propriété la plus remarquable est que l'effet tunnel semble induire un retard dans l'oscillation du paquet. La prochaine partie présente et explique ce résultat.

3.2 Mesure du temps de traversée tunnel dans un réseau optique

La mesure expérimentale du temps que met une particule à traverser une barrière de potentiel par effet tunnel a été réalisée dans d'autres domaines de la physique. Des expériences

dans des systèmes électroniques dans le cadre de la physique de la matière condensée ont donné des mesures du temps de traversée en dessous de la ns [99]. Dans le domaine de la physique des attosecondes, l'étude de l'émission d'électrons quittant leur potentiel atomique ont permis d'observer de l'effet tunnel sur une échelle de temps de quelques centaines d'attosecondes [100]. Notre expérience apporte la première mesure directe effectuée avec des atomes froids du temps de traversée tunnel.

Je commence d'abord par montrer l'effet tunnel dans nos données expérimentales, puis je présente les différentes études numériques que nous avons effectuées ainsi que les résultats obtenus d'études systématiques expérimentales. En dernier, je compare les résultats mesurés avec les prédictions d'un modèle semi-classique décrivant le temps de traversée tunnel.

3.2.1 Présence d'effet tunnel

Lorsque la profondeur du réseau diminue, la probabilité pour une particule de passer par effet tunnel dans un puits voisin augmente. Lorsque nous faisons l'expérience d'oscillation de la micro-chaîne de condensats pour une profondeur où l'inverse du taux tunnel est inférieur à une période d'oscillation, nous nous attendons à observer de l'effet tunnel sur la durée de notre prise de mesure. La figure 3.11 présente une expérience d'oscillation du condensat dans le réseau réalisée pour une profondeur de $s = 3.21$ et un angle initial de déphasage $\theta_0 = 45^\circ$. On remarque alors après le premier point de rebroussement, deux paquets d'atomes ayant des vitesses opposées. En effet au point de rebroussement, une partie du paquet, immobile sur une pente du réseau, traverse par effet tunnel la barrière de potentiel et se retrouve sur la pente du puits adjacent. Après un quart de période, ces deux paquets atteignent alors le centre de leur puits avec des vitesses opposées. L'analyse après temps de vol nous permet alors d'identifier les deux paquets dans des états d'impulsions opposés. Le paquet D1 a continué son oscillation dans le puits initial, tandis que le paquet D2 lui est passé par effet tunnel dans le puits voisin et a continué l'oscillation avec une vitesse opposée.

Si l'on regarde plus attentivement les paquets D1 et D2, on remarque alors que le paquet D2 semble atteindre sa vitesse maximale après le paquet D1. Le passage de la barrière de potentiel par effet tunnel a donc retardé le paquet D2. Le quasi-isochronisme de l'oscillation permet d'utiliser D1 comme une horloge pour effectuer nos mesures de retard et donc de déterminer directement le temps de traversée d'une barrière par effet tunnel.

3.2.2 Étude de la structure de bande : effet tunnel et transport classique

Pour pouvoir attribuer le passage d'une partie du paquet de chacun des puits aux puits voisins à l'effet tunnel, nous devons exclure la présence de transport classique dans nos expériences. Nous avons alors étudié la structure de bande du réseau pour lequel l'expérience a été menée, i.e. un réseau de profondeur $s = 3.21$; elle est représentée sur la figure 3.12. On remarque alors que seules les deux premières bandes sont complètement liées et donc inhibent le transport classique. Nous avons numériquement calculé la population d'atomes dans les différentes bandes pour des états initiaux différents, c'est-à-dire pour différents angles de déphasage initial θ_0 . La population d'atomes $\pi_n(\theta_0)$ dans une bande $|n, k = 0\rangle$ pour un angle de déphasage θ_0 est donnée sur la figure 3.13 pour les 6 premières bandes et pour les

3.2 Mesure du temps de traversée tunnel dans un réseau optique

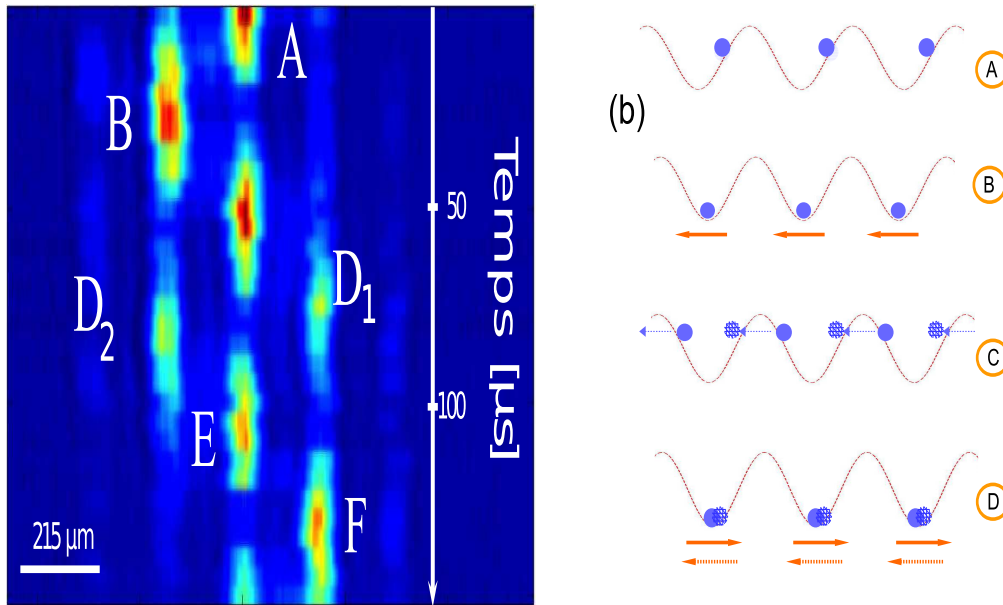


FIGURE 3.11 – Oscillation de la chaîne de condensats pour une profondeur $s = 3.21$ et un angle de déphasage initial de $\theta_0 = 45^\circ$. À l'étape notée C, les atomes sont au point de rebroussement de leur oscillation. Une partie du paquet traverse la barrière de potentiel par effet tunnel. À l'étape D, après un quart de période les atomes atteignent le centre de leur puits avec des moments opposés pour les paquets étant restés dans leur puits et ceux qui sont passés par effet tunnel dans le puits adjacent. On remarque que les paquets D1 et D2 sont décalés temporellement.

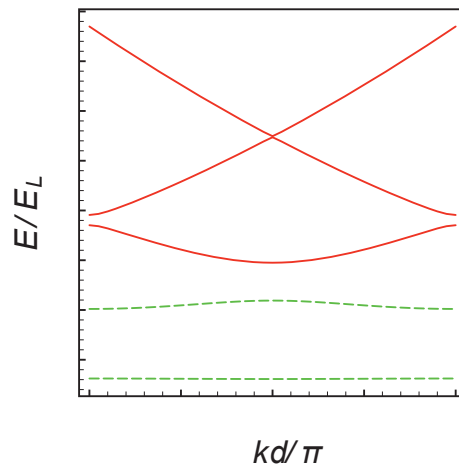


FIGURE 3.12 – Diagramme de bande pour un réseau de profondeur $s = 3.21$. Les lignes vertes représentent les bandes liées, les lignes rouges les bandes non-liées.

déphasages que nous avons étudiés expérimentalement. Nous voyons alors que pour les angles $\theta_0 = 20^\circ$ et $\theta_0 = 30^\circ$, la population dans les bandes complètement liées est de 98% et 93%. La dynamique est principalement gouvernée par les bandes liées; on peut alors négliger le transport classique et affirmer que le passage d'un puits à l'autre s'effectue par effet tunnel. Comme attendu, la population dans les bandes non-liées augmente avec l'angle de déphasage. Pour le plus grand angle étudié, $\theta_0 = 50^\circ$, la population dans les bandes non liées atteint 35%.

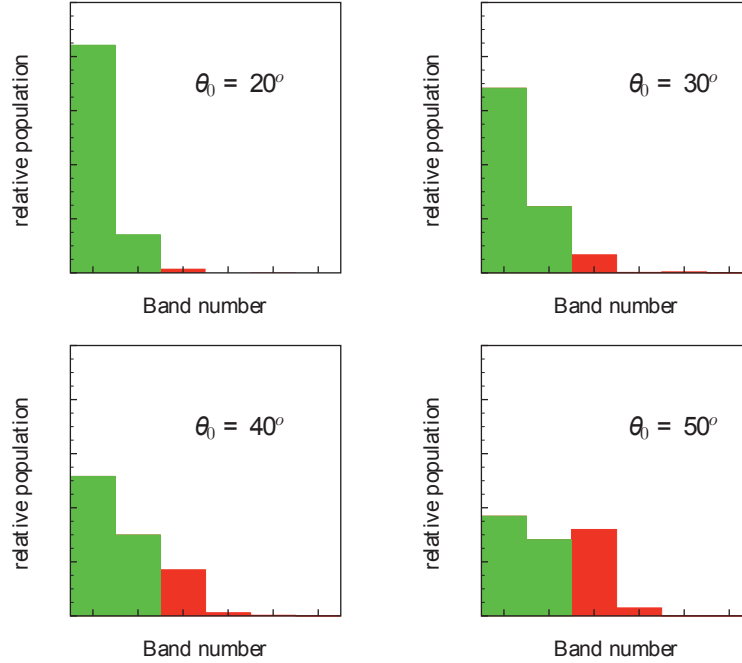


FIGURE 3.13 – *Proportion d'atomes par rapport à la population totale dans les 6 premières bandes du réseau de profondeur $s = 3.21$ pour différents angles de déphasage initiaux. Ce graphique est le résultat de la projection de la fonction d'onde initiale sur les 6 premières bandes d'énergie.*

3.2.3 Étude systématique de l'influence de l'angle sur le temps de traversée tunnel

Comme indiqué auparavant, la robustesse de la période d'oscillation par rapport aux anharmonicités du potentiel nous permet de mesurer le temps de traversée tunnel précisément en utilisant la période d'oscillation comme référence. Nous avons alors pu étudier l'influence de l'angle de déphasage initial sur ce temps tunnel. Pour effectuer ces mesures, nous répétons l'expérience en faisant varier le temps de maintien après déphasage par pas d'une μs . Nous nous centrons sur la partie où nous voyons la séparation des paquets D1 et D2. La mesure du temps est effectuée en traçant le profil temporel de la population des paquets D1 et D2 et en ajustant une gaussienne sur chaque paquet. Nous pouvons alors comparer les centres de chaque gaussienne et en déduire le retard du paquet D2 sur le paquet D1. Les résultats sont présentés sur la figure 3.14. Comme on s'y attend intuitivement avec une approche semi-classique, le temps de traversée tunnel augmente lorsque l'angle diminue, soit avec l'augmentation de la largeur et de la hauteur de la barrière de potentiel; je présente un

3.2 Mesure du temps de traversée tunnel dans un réseau optique

modèle semi-classique dans la sous-partie suivante. Les mesures présentées ont été effectuées pour des angles entre $\theta_0 = 20^\circ$ et $\theta_0 = 50^\circ$. En effet, pour des déphasages plus grand, la "fin" du paquet B et le "début" du paquet D2 se superposent rendant l'analyse difficile. De plus, pour ces déphasages, la contribution des états non-liés devient plus importante. Grâce à la méthode expliquée dans la partie précédente, nous avons également effectué des simulations numériques qui sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux. Ces simulations ont également montré que le temps de traversée tunnel est indépendant des interactions. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux sur la figure 3.14, l'aire grise représente l'incertitude sur la profondeur du réseau mesurée expérimentalement grâce à la période d'oscillation.

Il existe de multiple définitions du temps que met une particule à traverser une barrière tunnel. Dans notre étude, nous avons comparé nos résultats avec un modèle semi-classique. La prochaine sous-partie présente rapidement le modèle et le résultat de cette comparaison.

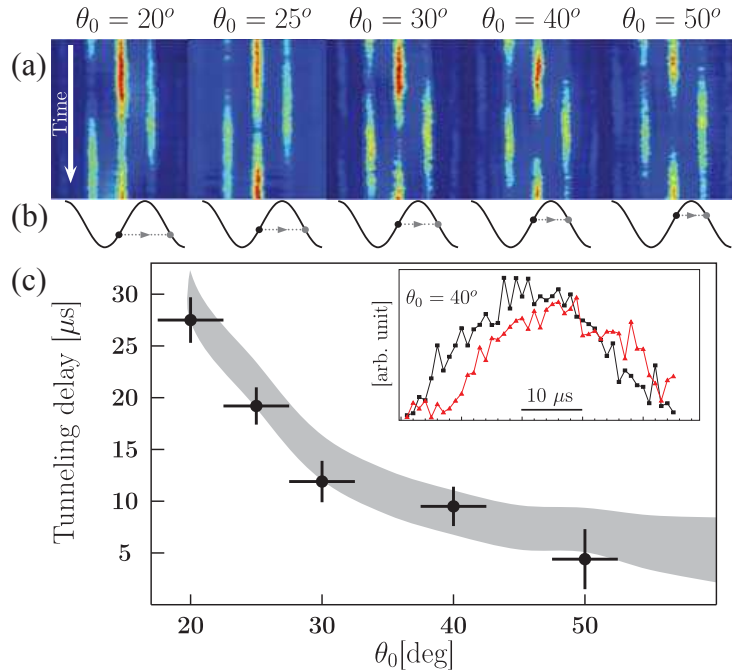


FIGURE 3.14 – Influence de l'angle de déphasage θ_0 sur le temps de traversée tunnel. (a) Images expérimentales centrées sur les paquets C, D1 et D2 pour différents angles de déphasage. (b) Schéma du passage par effet tunnel au premier point de rebroussement. (c) Mesures du temps de traversée tunnel en fonction de l'angle de déphasage. Les disques noirs sont les résultats expérimentaux tirés de (a). L'aire grise correspond aux résultats des simulations numériques pour lesquels ont été pris en compte les incertitudes sur la profondeur du réseau. Le cadre présente la distribution de densité intégrée selon un axe du paquet D1 (carrés noirs) et du paquet D2 (triangles rouges) pour un angle de $\theta_0 = 40^\circ$.

3.2.4 Modèle semi-classique et comparaison avec l'expérience

Posons le problème du temps de passage d'une particule à travers une barrière de potentiel par effet tunnel. Prenons le cas présenté dans la figure 3.15 : deux particules partent du point

a et atteignent le point b . Une des particules évolue en espace libre. L'autre atteint b par effet tunnel à travers le potentiel $V(x)$. Le potentiel n'étant défini qu'entre les points a et b , la question est de connaître le retard de la particule qui traverse par effet tunnel la barrière par rapport à la particule qui évolue en espace libre, ou le temps que la particule a mis pour traverser la barrière par effet tunnel. Plusieurs modèles ont été développés dans le but de décrire ce temps au cours de l'histoire de la mécanique quantique. Il n'existe pas de consensus sur cette question. Ici, je ne présente qu'un seul modèle basé sur une approche semi-classique. On peut trouver dans [101] la description de différentes approches dont je choisis de ne pas parler ici.

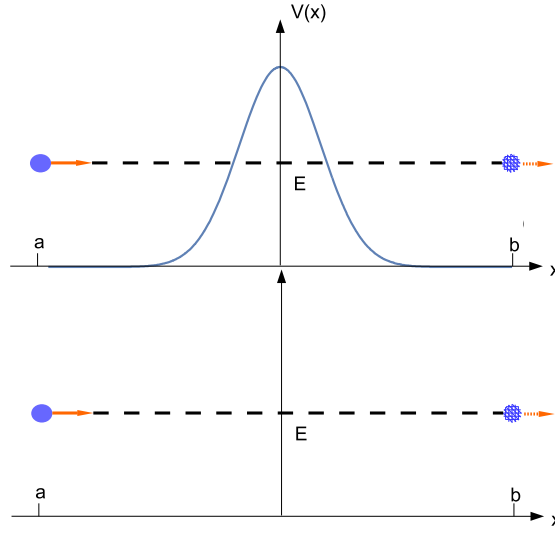


FIGURE 3.15 – *Deux particules vont de a à b . L'une évolue en espace libre, l'autre traverse le potentiel $V(x)$ par effet tunnel.*

Le temps de traversée semi-classique d'une particule de masse m ayant une énergie E à travers une barrière de potentiel $V(x)$ est donnée par [102] :

$$\tau_t = \frac{\partial}{\partial E} \left[- \int_a^b \sqrt{2m(V(x) - E)} dx \right] = \int_a^b \left(\frac{m}{2} \right)^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{V(x) - E}} \quad (3.13)$$

avec $E < V(x)$. Nous avons pris les conditions aux bords $V(a) = V(b) = E$. En appliquant cette formule à un seul puits du potentiel périodique, on obtient dans notre cas :

$$\tau_t(\theta_0) = T_c(0) \frac{1}{2\pi} \int_{-u_a}^{u_a} \frac{du}{\sqrt{\cos^2 u - a}} \quad (3.14)$$

avec $T_c(0) = (2md^2/h)s^{-1/2} = 69 \mu s$, la période d'oscillation classique autour du minimum de potentiel et $u_a = \cos^{-1}(\sqrt{1 - \cos^2(\theta_0)})$. Nous pouvons donc maintenant grâce à ce modèle calculer l'influence de l'angle de déphasage initial et comparer les résultats aux mesures expérimentales. Ces résultats sont donnés dans le tableau 3.1.

3.3 Chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder microscopiques couplés

$\theta_0[\text{deg}]$	20	30	40	50
$\tau_t(\theta_0)[\mu\text{s}]$	54	47	42	39
$\tau_{exp}(\theta_0)[\mu\text{s}]$	27.5 ± 2.2	11.9 ± 2	9.5 ± 1.6	4.4 ± 2.4

TABLE 3.1 – Influence de l'angle initial sur le temps tunnel. Comparaison entre le calcul du temps tunnel par l'approche semi-classique et les mesures expérimentales

On peut voir que le modèle ne permet pas de prédire le temps mesuré expérimentalement. L'approche semi-classique prédit également une décroissance en fonction de l'angle de déphasage beaucoup plus lente que ce que nous observons expérimentalement. On peut probablement attribuer cet effet à la plus grande contribution des états non-liés pour les grands angles. La différence importante nous permet d'exclure ce modèle simple pour la description de nos mesures.

Le problème de la description de nos mesures expérimentales réside en partie dans le fait que l'effet tunnel se produit dans un espace habillé par le réseau. Les modèles qui ont été jusqu'ici avancés dans la littérature ont été développés pour une particule faisant face à une barrière de potentiel dans l'espace libre, comme sur la figure 3.15. Nos résultats appellent ainsi à un travail théorique plus approfondi pour prendre en compte l'effet d'habillage par le réseau.

3.3 Chaîne d'interféromètres de Mach-Zehnder microscopiques couplés

Intéressons nous maintenant à la dernière partie de l'oscillation de la figure 3.11. Après avoir atteint leur vitesse maximale en D1 et D2, les deux paquets atteignent le point de rebroussement E. Mais si nous continuons à suivre l'oscillation, on remarque qu'au point F nous ne retrouvons qu'un seul paquet. De plus, il ne se trouve pas dans l'état d'impulsion attendu classiquement. En effet, il a une vitesse opposée au paquet B. Ce résultat est à première vue contre-intuitif, mais provient en réalité d'un phénomène bien connu. La géométrie de l'expérience correspond en effet à celle d'un interféromètre de Mach-Zehnder (MZI), comme on peut le voir sur la figure 3.16. En effet, il est bien connu qu'à la sortie d'un interféromètre de Mach-Zehnder équilibré, la voie de sortie est l'opposée de la voie d'entrée.

Pour bien comprendre cet effet, reprenons le résultat obtenu à la sortie d'un MZI. Définissons l'état d'impulsion d'entrée $|p_0\rangle$ correspondant au paquet B. L'effet tunnel au niveau du point de rebroussement C sépare le paquet en deux, jouant le rôle de la lame séparatrice dans l'interféromètre optique. L'état des paquets après séparation s'écrit :

$$|D\rangle = \cos \varphi |p_0\rangle + i \sin \varphi |-p_0\rangle \quad (3.15)$$

avec $\varphi = \pi/4$ dans le cas où le coefficient de la lame séparatrice est de 50%. Dans le cas où nous nous trouvons, environ la moitié des atomes passe par effet tunnel dans le puits adjacent donc on peut choisir $\varphi = \pi/4$. Les deux paquets évoluent maintenant jusqu'à atteindre le deuxième point de rebroussement en E. Celui-ci agit comme une deuxième lame séparatrice ;

les deux paquets se recombinent. On peut alors écrire l'état de sortie après recombinaison :

$$\begin{aligned} |F\rangle &= \cos \varphi (\cos \varphi |p_0\rangle + i \sin \varphi |-p_0\rangle) + i \sin \varphi (\cos \varphi |p_0\rangle + i \sin \varphi |-p_0\rangle) \\ &= \cos(2\varphi) |p_0\rangle + i \sin(2\varphi) |-p_0\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

Dans le cas $\varphi = \pi/4$, on retrouve donc bien :

$$F = i |-p_0\rangle, \quad (3.17)$$

F a bien l'état d'impulsion opposé à celui du paquet B en entrée de l'interféromètre.

Au cours de l'expérience d'oscillation, l'interférence que nous voyons en sortie de l'interféromètre est rendue possible par la conservation de la cohérence du condensat. En effet au point E chaque paquet dans chaque puits occupé du réseau interfère avec le paquet du puits voisin. Nous obtenons donc non pas un seul interféromètre, mais une chaîne de MZI à une échelle microscopique. Nous avons pu vérifier grâce aux simulations numériques que cet effet n'était pas influencé par les interactions. En revanche lorsque l'on augmente la profondeur du réseau, la proportion d'atomes qui passe au point C par effet tunnel diminue, changeant le coefficient de transmission de la lame séparatrice. Le paquet de sortie est alors une superposition des deux états d'impulsion. L'expérience présentée sur la figure 3.16 a été effectuée pour une profondeur de $s = 3.21$. Pour cette profondeur, la population dans l'état d'impulsion $|-p_0\rangle$ correspond à 91% de la population totale au point F . Cela correspond à une phase $\varphi \simeq \pi/5$.

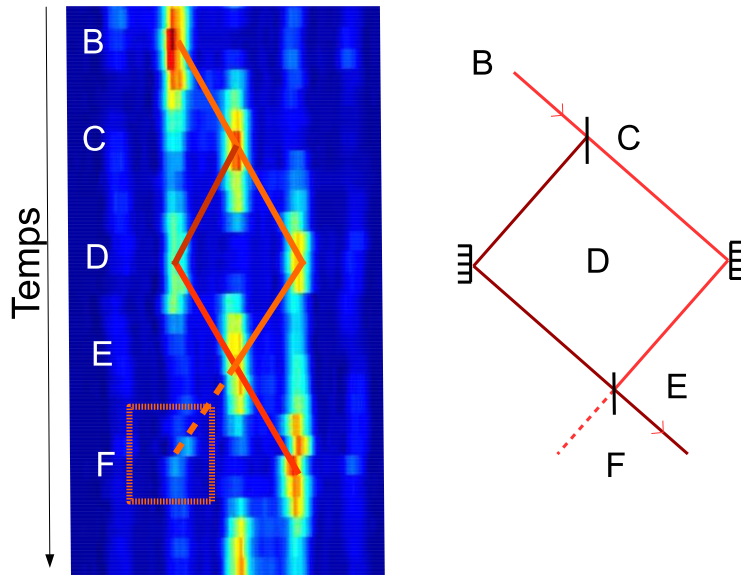


FIGURE 3.16 – À gauche : géométrie de l'interféromètre atomique présent dans nos expériences. À droite : schéma d'un interféromètre de Mach-Zehnder optique à bras symétriques. Dans nos expériences, les points de rebroussement pour lesquels s'effectue l'effet tunnel jouent le rôle de lame séparatrice. On remarque bien que le paquet de sortie se trouve dans l'état d'impulsion opposé de celui d'entrée, comme attendu dans ce type d'interféromètre.

3.4 Test du microscope à rotation dans l'espace des phase

J'ai présenté dans l'introduction de ce chapitre une technique nous permettant de résoudre la position de deux paquets d'atomes séparés par quelques centaines de nm : en effectuant une rotation dans l'espace des phases, nous pouvons transformer l'information de l'espace des positions à l'espace des impulsions, que nous pouvons résoudre facilement grâce à notre imagerie par temps de vol. La figure 3.17 décrit schématiquement le principe.

Prenons dans un premier temps un puits harmonique. Au départ de l'expérience, nous avons deux paquets, chacun situé symétriquement sur les pentes du potentiel. Nous effectuons tout d'abord une translation du potentiel de θ_0 de manière à placer le paquet B au centre du piège ; il est alors au repos. Le paquet A lui est déplacé sur la pente. Ensuite, nous laissons le système évoluer pendant un quart de période d'oscillation harmonique : le paquet A commence son oscillation et atteint le centre du piège avec sa vitesse maximale. Le paquet B lui est resté au centre du piège ; ils sont donc tout les deux au même endroit mais avec des impulsions différentes. À ce moment là, nous éteignons le potentiel et laissons chuter les atomes. Les paquets ayant des impulsions différentes, nous pouvons les distinguer après un temps de vol suffisamment long. Le paquet qui tombe verticalement est le paquet B initialement à droite sur le schéma (a) de la figure 3.17. Le paquet qui se sera déplacé au cours de la chute par rapport à la position centrale sera alors identifié comme le paquet A, initialement à gauche sur le schéma (a) de la figure 3.17. De cette manière, nous pouvons déterminer la position des deux paquets dans le puits. En effet, en utilisant un déphasage nous pouvons alors annuler l'impulsion d'un des paquets et fournir une plus grande impulsion pour l'autre paquet. En contrôlant le déphasage appliqué, nous pouvons alors déterminer la position initiale des deux paquets en étudiant, après un quart de période suivant le déphasage, l'image prise en temps de vol. Dans cette partie je présente un test de cette méthode qui nous a été permise par la présence d'effet tunnel dans notre système, nous permettant d'obtenir deux paquets d'atomes dans un même puits du réseau à des positions différentes.

La présence de l'effet tunnel dans nos données nous a alors permis d'être dans la configuration de départ de la figure 3.17. En effet au point de rebroussement C, dans chaque puits du réseau nous avons deux paquets, un sur chaque pente. Nous pouvons alors tester notre microscope par rotation dans l'espace des phases. La figure 3.18 résume le protocole que nous utilisons. Nous commençons de la même manière que l'expérience nous permettant de mesurer le temps tunnel. Nous chargeons un réseau de profondeur $s = 3.21$, puis nous effectuons un changement rapide de la phase pour placer les condensats sur les pentes de leurs puits. Dans l'expérience présentée ici, $\theta_0 = 60^\circ$. La chaîne de condensat commence son oscillation, jusqu'à arriver au premier point de rebroussement, moment de l'oscillation où le paquet se sépare en deux, une partie traversant la barrière de potentiel par effet tunnel. Nous pouvons ensuite effectuer deux manipulations, i.e. choisir l'un des deux paquets D1 ou D2 :

- Choix du paquet D2 : Lorsque nous sommes à l'étape C de l'oscillation, nous ramenons soudainement la phase à $\theta_0 = 0$. Le paquet D2 se retrouve alors au centre du piège sans vitesse. Cette manipulation stoppe son oscillation. Le paquet D1 lui est simplement placé plus haut dans le potentiel et continuera donc son oscillation, et ce avec la même période puisque la première partie de ce chapitre a montré que la période d'oscillation ne dépend pas de l'angle de déphasage. En continuant l'expérience, nous pouvons

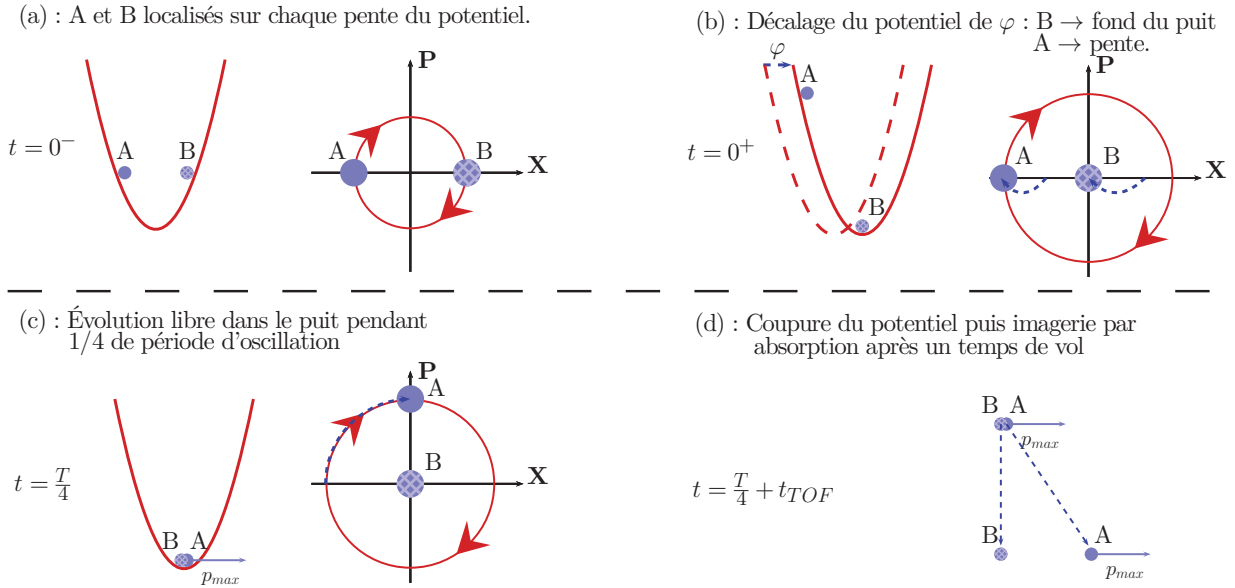


FIGURE 3.17 – Protocole d'imagerie par rotation dans l'espace des phases. L'exemple ici donné est celui de deux paquets dans un piège harmonique. Pour chaque étape sont représentés la position de chaque paquet ainsi que l'espace des phases à cette étape. (a) : Système de départ, les paquets sont immobiles sur les pentes du piège. (b) : Le potentiel est déplacé de φ de sorte à placer le paquet B au fond du puits. Le paquet A se retrouve plus haut dans le potentiel. Dans l'espace des phases, le paquet B est à la position centrale et n'a pas de vitesse. (c) : Le système évolue librement pendant un quart de période d'oscillation harmonique. Le paquet A atteint le centre du piège avec sa vitesse maximale. (d) : Nous effectuons un temps de vol pendant lequel le paquet A ayant une vitesse va se déplacer tandis que le paquet B tombera droit. Après un temps de vol suffisant nous pouvons alors résoudre les deux paquets.

alors voir sur la figure 3.18 (b) que le paquet D2 reste au centre, indiquant qu'il est maintenant immobile à l'équilibre. Le paquet D1 continue son oscillation, et lorsqu'il arrive au second point de rebroussement se produit un deuxième effet tunnel, comme au point C.

- Choix du paquet D1 : Au point C, nous doublons la valeur de la phase soudainement de sorte à avoir $\theta_0 = 120^\circ$. De cette manière, cette fois-ci c'est le paquet D1 qui se retrouve au centre du puits et qui voit son oscillation stoppée, comme on le voit sur la figure 3.18 (c). Le résultat pour le paquet D2 est le même : la modification de la phase l'amène à un point plus haut dans le potentiel. Il continue alors son oscillation. En arrivant au deuxième point de rebroussement, une partie du paquet effectue elle aussi un effet tunnel.

Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai présenté les résultats de notre expérience de micro-oscillation d'une chaîne de condensats qui a donné d'intéressants résultats physiques. Nous avons tout d'abord vu qu'après avoir mis chaque condensat sur une pente de son puits du réseau en effectuant un changement quasi-instantané de la phase, l'oscillation résultante avait des propriétés remarquables : la période de cette oscillation ne dépend ni des interactions ni des anharmonicités

3.4 Test du microscope à rotation dans l'espace des phase

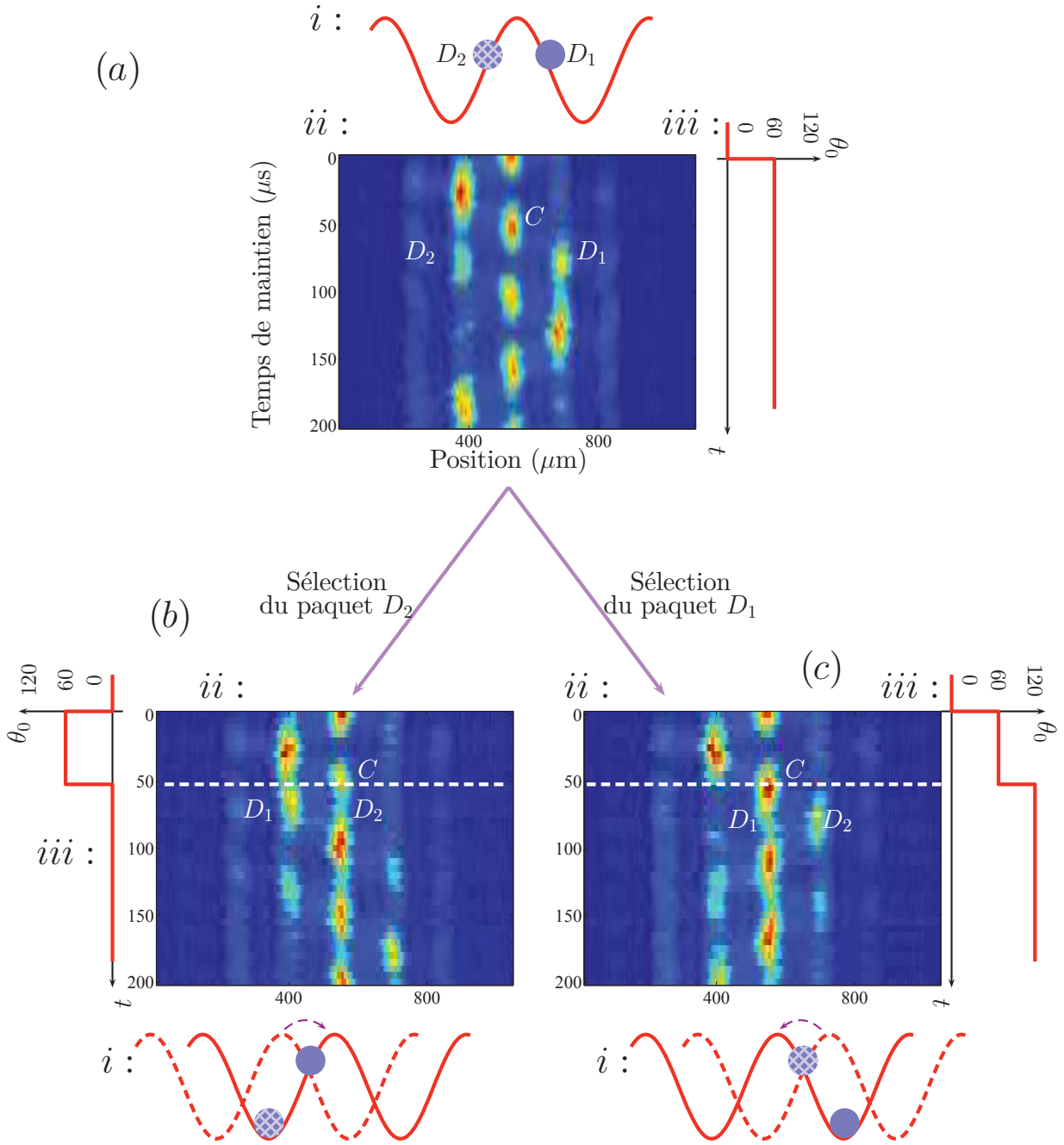


FIGURE 3.18 – Résumé du test du microscope à rotation en espace des phases. *i* : représentation schématique de la position des paquets; *ii* : film montrant l'évolution de la figure d'interférences en fonction du temps; *iii* : évolution de la phase. (a) : Après le premier déphasage, la phase reste inchangée; (b) : La phase est ramenée à zéro; (c) : la phase subit un saut de 60° à 120° .

du potentiel ni du potentiel extérieur (dans la mesure où plusieurs puits du réseau sont peuplés). Elle ne dépend que de la profondeur du réseau, ce qui nous a permis de mettre au point une technique de calibration in-situ de la profondeur du réseau qui nous permet une grande précision sur une plage importante de profondeur (de $s = 0.5$ à $s = 50$). Cette technique nous permet alors d'auto-calibrer toutes les expériences de micro-oscillation que j'ai

présentées dans ce chapitre.

Cette expérience nous réservait une autre belle surprise : pour un réseau de profondeur $s = 3.21$ au premier point de rebroussement, les paquets d'atomes immobiles sur leur pente se séparent en deux. Une partie de chaque paquet passe par effet tunnel sur la pente du puits adjacent. Après un quart de période, ces deux paquets ainsi séparés atteignent le centre de leur puits respectif avec des vitesses opposées. Nous avons alors pu remarquer que le paquet ayant subi l'effet tunnel arrive au centre du puits avec un retard sur celui qui est resté dans son puits initial. La robustesse de l'oscillation par rapport au potentiel extérieur, aux interactions et aux anharmonicités du potentiel, i.e. au déphasage initial, nous a permis de nous en servir comme d'une horloge pour mesurer le retard dû au passage à travers une barrière par effet tunnel. Ce retard peut atteindre $26 \mu\text{s}$ dans le cas d'un réseau de profondeur $s = 3.21$ et d'un déphasage initial de $\theta_0 = 20^\circ$, à mettre en regard de la période d'oscillation qui est pour cette profondeur de $T_{osc} = 106 \mu\text{s}$.

La présence de l'effet tunnel dans nos expériences a également fait surgir un phénomène d'interférences constructives que l'on retrouve dans un interféromètre de Mach-Zehnder. La séparation au premier point de rebroussement du paquet d'atomes par effet tunnel joue le rôle d'une lame séparatrice, pour un réseau de profondeur $s = 3.21$ son coefficient de transmission est d'environ 50% ce qui veut dire qu'environ la moitié du paquet d'atomes traverse la barrière de potentiel par effet tunnel. Au deuxième point de rebroussement, les deux paquets obtenus se recombinent et nous obtenons alors le résultat attendu d'un interféromètre de Mach-Zehnder à bras symétrique : l'état d'impulsion de sortie correspond à l'état opposé à celui d'entrée. Il serait intéressant d'imaginer mettre à profit ces interféromètres à échelle microscopique pour mesurer des forces de surface, comme la force de Casimir-Polder, à l'instar de ce qui a été fait dans l'équipe de M. Inguscio [103] avec les oscillations de Bloch de fermions ultra-froids piégés dans un potentiel périodique.

Enfin, l'effet tunnel nous permet de nous placer dans la configuration de départ pour tester la technique de microscope par rotation dans l'espace des phases, mis au point dans l'équipe, nous permettant d'imager deux paquets d'atomes séparés par quelques centaines de nm.

Ce chapitre regroupe donc les différentes expériences que nous avons effectuées qui avaient comme point de départ un contrôle statique de la phase du réseau. Dans le chapitre suivant, je présente les expériences que nous avons effectuées et qui reposent sur le contrôle dynamique de la phase, soit une modulation temporelle sinusoïdale de la phase.

Troisième partie

Réseau modulé en phase et en amplitude

Introduction de la partie

Comme nous l'avons vu jusqu'ici dans ce manuscrit, les états d'énergie d'un réseau s'organisent en structure de bandes. En modulant la phase ou l'amplitude du réseau, nous pouvons réaliser des transitions interbandes par absorption de phonons. Pour une profondeur donnée, il existe une fréquence minimum pour effectuer la transition de la bande fondamentale vers la première bande excitée, nous la noterons ω_m . Relativement à cette fréquence nous avons étudié trois régimes de modulation, comme présenté sur la figure 3.19 : $\omega < \omega_m$, $\omega \approx \omega_m$ et $\omega \gg \omega_m$.

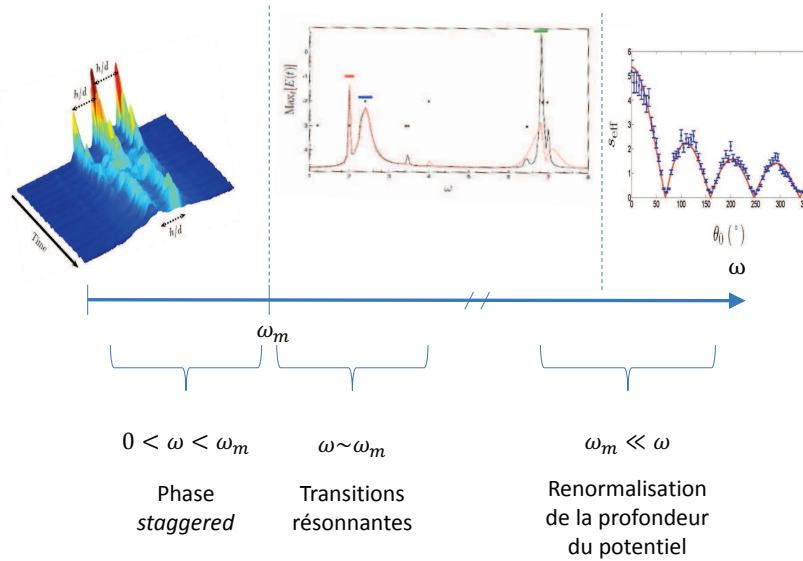


FIGURE 3.19 – *Frise des différents régimes en fonction de la fréquence de modulation. Cette frise est présentée dans le cas plus spécifique de la modulation en phase. Lorsque $\omega < \omega_m$, nous pouvons observer des états alternés. Lorsque ω est de l'ordre de ω_m , nous effectuons des transitions résonnantes, et lorsque $\omega \gg \omega_m$ la profondeur du potentiel périodique est renormalisé.*

Si nous nous plaçons dans le régime où nous choisissons la fréquence de modulation inférieure à ω_m , nous observons la nucléation de nouveaux états dynamiques (nous précisons le domaine de nucléation de ces états dans la partie 2 de ce chapitre). Nous étudions dans la première partie la cinétique de la transition de phase vers ces états [65]. Ces états sont dits alternés (ou *staggered* dans la littérature). Les phases des fonctions d'ondes localisées dans des puits voisins change de signe d'un puits au puits voisin.

Lorsque la fréquence de modulation est égale ou du même ordre de grandeur que ω_m , nous pouvons alors effectuer des transitions résonnantes entre les bandes d'énergies du réseau. En étudiant ces transitions, nous avons mis en lumière les règles de sélection due à la parité de l'excitation appliquée. Ces études spectrales nous ont également permis de montrer le rôle des interactions, du potentiel extérieur et de l'amplitude de modulation sur ces transitions. La deuxième partie présente les résultats de cette étude.

Dans la dernière partie, nous étudions le régime pour lequel la fréquence de modulation est très grande devant la fréquence ω_m . Dans ce cas, les atomes évoluent dans un potentiel périodique dans le temps dont l'amplitude est renormalisée. Nous pouvons alors pour un même réseau changer de manière dynamique la profondeur du potentiel piégeant les atomes en modifiant l'amplitude de modulation. Nous montrons également comment nous nous servons de cette renormalisation pour mesurer la phase de ce potentiel et placer les atomes dans un état très hors équilibre.

CHAPITRE 4

MODULATION BASSE FRÉQUENCE : DYNAMIQUE DE FORMATION D'ÉTATS ALTERNÉS DANS UN RÉSEAU MODULÉ

Introduction

Comme nous l'avons déjà mentionné dans les chapitres précédents, l'utilisation d'atomes froids dans un réseau optique offre une plateforme flexible pour la réalisation de simulation quantique avec un grand nombre de particules. Ce type d'expériences permet d'étudier en particulier les dynamiques fortement hors équilibre de ces systèmes. Le contrôle remarquable des paramètres qu'offre le domaine des atomes froids permet de créer des Hamiltoniens effectifs dans lesquels le taux tunnel intersite peut être renormalisé, donnant alors accès à des phases quantiques dynamiques. La présence d'interactions entre particules dans ces systèmes joue un rôle important puisque qu'elle peut être un élément déclencheur pour des transitions de phase quantique lorsque le réseau est modulé. L'étude de phases de type ferro- et antiferromagnétiques a été menée avec les mêmes techniques expérimentales [52][53]. Cependant, les interactions peuvent aussi être vecteur d'une perte de la cohérence à N-corps comme justifiée par nos études numériques [104][105].

Dans l'étude que je présente dans ce chapitre, nous modulons la phase du réseau dans lequel le condensat est piégé et choisissons la fréquence et l'amplitude de modulation pour nous placer dans un régime où le taux tunnel intersite est renormalisé à une valeur effective négative. Cela place le condensat dans un état métastable à partir duquel il va effectuer une transition de phase. La fonction d'onde initiale périodique du condensat dans le réseau ne comportant pas de nœuds va alors devenir antipériodique et posséder des nœuds périodiquement espacés; les phases de sites adjacents vont alors devenir antisymétrique et avoir des signes opposés [42, 44, 106, 107, 108]. Notre étude étant dynamique, elle repose sur la même présentation des données que dans la partie précédente : nous effectuons un film à partir d'images prises après temps de vol pour des temps de maintien différents après début de la modulation de phase. Nous pouvons alors observer la formation des états *staggered* en fonction des paramètres choisis. Expérimentalement, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.1 nous observons pour cette phase de nouveaux pics d'interférences aux bords de

la zone de Brillouin, c'est-à-dire entre les précédents pics d'un réseau non-modulé. D'autre part, les études numériques montrent qu'en dépit de la cohérence spatiale à l'origine des phénomènes d'interférences observés en temps de vol, il y a perte de la cohérence à N-corps au sens de Glauber[104][105]. Pour étudier ce système, une approche théorique reposant sur une description des interactions en terme de champ moyen est insuffisante pour permettre une comparaison quantitative. C'est dans ce cadre que nous avons initié une collaboration avec Peter Schlageck du laboratoire CESAM à Liège en Belgique. En effet, P. Schlageck est un expert de la méthode *Truncated Wigner*, méthode qui prend en compte les fluctuations thermiques et quantiques au sein du système. Grâce à cette méthode et cette collaboration, nous avons pu simuler numériquement et approfondir l'étude de notre expérience. Si ces états ont déjà été observés dans l'équipe de E. Arimondo [44] et S. Chu [42], nous cherchons ici à étudier les mécanismes provoquant cette transition de phase.

Je présente d'abord un modèle théorique 1D du réseau qui permet au prix d'une transformation de jauge de retrouver la renormalisation du taux tunnel. Grâce à une étude de type Bogoliubov nous observons l'émergence des états alternés. J'expliquerai également le principe de la méthode *Truncated Wigner* et comment elle a permis d'étudier l'influence des fluctuations quantiques sur la nucléation des états alternés. Dans la dernière partie, je présente les résultats expérimentaux en les comparant avec les simulations numériques.

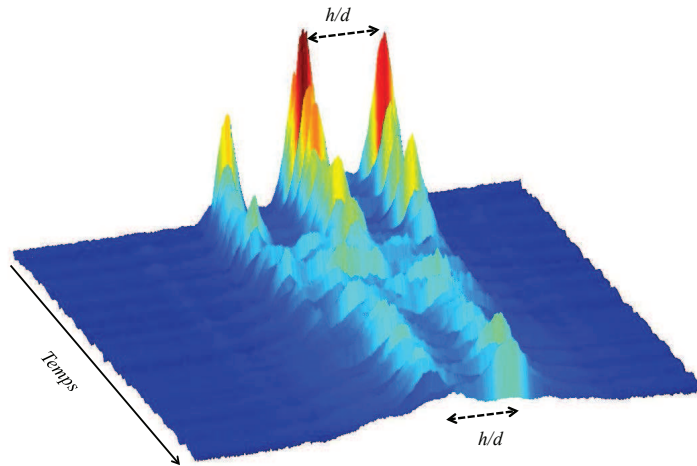


FIGURE 4.1 – *Film expérimental de l'évolution de la figure d'interférences après début de la modulation de phase. Nous observons l'apparition de nouveaux pics d'interférences entre les pics initiaux. Ceci est la signature expérimentale des états alternés.*

4.1 Description théorique du problème

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, la description des interactions au sein du condensat en terme de champ de moyen ne permet pas de rendre compte quantitativement de l'apparition des états alternés. Dans cette partie, nous utiliserons une approche en seconde quantification qui permet d'étudier les excitations élémentaires du condensat.

4.1 Description théorique du problème

4.1.1 Renormalisation du taux tunnel et émergence des états alternés

Dans notre étude, nous considérons un condensat de Bose-Einstein chargé dans un réseau à une dimension. Le réseau est sujet à une modulation de phase, nous écrivons donc l'Hamiltonien à une particule sous la forme :

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t) \quad (4.1)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_0 \cos^2 \left(\frac{\pi x}{d} + \varphi_0 \sin 2\pi\nu t \right) \quad (4.2)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{V_0}{2} [1 + \cos(k_L x + \varphi(t))] \quad (4.3)$$

avec $k_L = 2\pi/d$ et $\varphi(t) = 2\varphi_0 \sin(\omega t)h(t)$, $h(t)$ étant la fonction de Heaviside. Nous écrivons alors l'Hamiltonien à plusieurs particules associé à l'opérateur champ atomique $\hat{\Psi}(x, t)$:

$$\hat{H}(t) = \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x, t) H(t) \hat{\Psi}(x, t) + \frac{g}{2} \int dx \hat{\Psi}^\dagger(x, t) \hat{\Psi}^\dagger(x, t) \hat{\Psi}(x, t), \hat{\Psi}(x, t) \quad (4.4)$$

le deuxième terme correspond aux interactions atome-atome. Nous en déduisons l'équation de Gross-Pitaevskii pour l'opérateur champ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\Psi}(x, t) + V(x, t) \hat{\Psi}(x, t) + g \hat{\Psi}^\dagger(x, t) \hat{\Psi}(x, t) \hat{\Psi}(x, t). \quad (4.5)$$

avec $g = 2\hbar\omega_\perp a_s$ la constante à une dimension décrivant la force des interactions atome-atome, a_s est la longueur de diffusion en onde s et ω_\perp la fréquence de piégeage transverse.

Nous voulons décrire notre système à l'aide d'un Hamiltonien de type Bose-Hubbard. Nous effectuons d'abord une transformation de jauge $\hat{\Psi} \rightarrow \hat{\tilde{\Psi}} = T(t) \hat{\Psi}$ ce qui revient à se placer dans le référentiel du réseau. Définissons l'opérateur unitaire :

$$T(t) = \exp \left[\frac{im}{\hbar k_L} \dot{\varphi}(t)x \right] \exp \left[-\frac{\varphi(t)}{k} \frac{\partial}{\partial x} \right]. \quad (4.6)$$

Nous transformons l'Hamiltonien à une particule par :

$$H(t) \rightarrow \tilde{H}(t) = T H(t) T^{-1} + i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} T \right) T^{-1} \quad (4.7)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, 0) - \frac{m}{k_L} \dot{\varphi}(t)x + \frac{m}{2k_L^2} \dot{\varphi}^2(t) \quad (4.8)$$

Dans cette jauge, le potentiel du réseau est par définition stationnaire. La trace de la modulation réside dans le potentiel linéaire $-m\dot{\varphi}(t)x/k_L$. Développons ce terme (je rappelle que la phase s'écrit $\varphi(t) = 2\varphi_0 \sin(2\pi\nu t)$), nous obtenons alors :

$$\dot{\varphi}(t) = -8\pi\varphi_0\nu^2 \sin(2\pi\nu t), \quad (4.9)$$

et en prenant la valeur maximum du sinus et en écrivant $k_L = 2\pi/d$, nous obtenons :

$$-\frac{m}{k_L} \dot{\varphi}(0) = 4\pi\varphi_0\nu^2 m d \quad (4.10)$$

En comparant ce terme à la profondeur du réseau V_0 , nous pouvons limiter notre description à la première bande du réseau, en respectant la condition $V_0 > 4\pi\varphi_0 m\nu^2 d^2$. Nous développons alors l'opérateur champ sur la base des fonctions de Wannier localisées sur chaque site :

$$\hat{\Psi}(x, t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \phi(x - ld) \hat{a}_l(t) \quad (4.11)$$

avec $\phi(x - ld)$ la fonction de Wannier centrée sur le $l^{\text{ième}}$ puits et \hat{a}_l l'opérateur annihilation. En reprenant l'équation (4.4), nous pouvons écrire l'Hamiltonien effectif de Bose-Hubbard :

$$\hat{H}(t) = -J \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l+1} + \hat{a}_{l+1}^\dagger \hat{a}_l] - \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[l \frac{md}{k_L} \dot{\varphi}(t) + \frac{m}{2k_L^2} \dot{\varphi}^2(t) \right] \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{U}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_l. \quad (4.12)$$

Le premier terme correspond au passage par effet tunnel d'un puits à l'autre d'une particule avec J le taux tunnel. Le deuxième terme contient le terme $l \frac{md}{k_L} \dot{\varphi}(t)$ qui provient de la transformation de jauge et qui décrit la modulation de phase comme un potentiel linéaire dépendant de la position de la particule dans le réseau. Le terme $\frac{m}{2k_L^2} \dot{\varphi}(t)^2$ dans l'Hamiltonien effectif est proportionnel au nombre total d'atomes et correspond à une énergie ajoutée au système lors de l'allumage de la modulation de phase. Le dernier terme décrit l'interaction atome-atome sur site. Maintenant que nous avons un Hamiltonien de Bose-Hubbard, nous effectuons une nouvelle transformation de jauge $\hat{a}_l(t) \rightarrow \hat{b}_l = T_l(t) \hat{a}_l$ avec :

$$T_l(t) = \exp \left[-\frac{imld}{\hbar k_L} \dot{\varphi}(t) \right]. \quad (4.13)$$

Cette transformation a pour effet de faire apparaître la modulation comme une phase supplémentaire de Peierls, qui est différente si l'atome passe du site l au site $l + 1$ ou s'il saute du site l au site $l - 1$. Nous réécrivons l'Hamiltonien tel que :

$$\begin{aligned} \hat{H}(t) = -J \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\exp \left(-\frac{imld}{\hbar k_L} \dot{\varphi}(t) \right) \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_{l+1} + \exp \left(\frac{imld}{\hbar k_L} \dot{\varphi}(t) \right) \hat{b}_{l+1}^\dagger \hat{b}_l \right] \\ - \frac{m}{2k_L^2} \dot{\varphi}^2(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + \frac{U}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \hat{b}_l. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nous considérons la période de modulation très petite devant les autres échelles de temps du système, nous pouvons alors calculer la moyenne sur une période de l'Hamiltonien :

$$\hat{H} = -\bar{J} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_{l+1} + \hat{b}_{l+1}^\dagger \hat{b}_l \right) - \frac{m\pi^2 \nu^2 \varphi_0^2}{k_L^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + \frac{U}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \hat{b}_l. \quad (4.15)$$

De cette opération, un nouveau pré-facteur apparaît devant le premier terme :

$$\bar{J} = J J_0 \left(\frac{4\pi md \varphi_0 \nu}{\hbar k_L} \right) \quad (4.16)$$

avec $J_0(x) = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos(x \sin(u)) du$ la fonction de Bessel d'ordre zéro. Le taux tunnel est ainsi renormalisé. La fonction de Bessel peut prendre des valeurs négatives en fonction de son argument ; il existe donc des couples amplitude/fréquence de modulation pour lesquels le taux tunnel effectif \bar{J} devient négatif. Comme expliqué dans le chapitre II, la première bande

4.1 Description théorique du problème

du réseau peut s'écrire perturbativement en fonction du taux tunnel grâce à la substitution de Peierls. Si nous introduisons le taux tunnel effectif, nous obtenons :

$$E_0(k) = -2\bar{J} \cos(kd). \quad (4.17)$$

Nous voyons alors que si le signe du taux tunnel effectif change, la courbure de la première bande va être inversée. Les minima d'énergie initialement au centre de la zone de Brillouin sont déplacés sur les bords, comme illustré sur la figure 4.2. Les atomes initialement à l'équilibre au centre de la zone de Brillouin se retrouvent dans une situation instable (au maximum d'énergie) et vont effectuer une transition vers les nouveaux minima d'énergie.

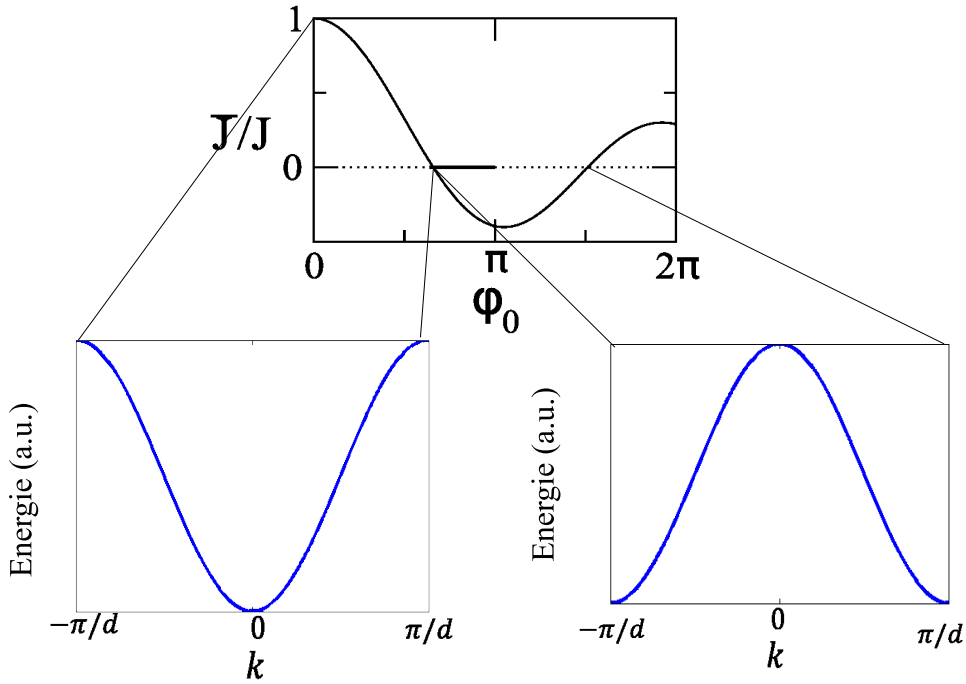


FIGURE 4.2 – La renormalisation du taux tunnel à une valeur négative entraîne un renversement de la courbure de la première bande d'énergie du réseau. Les minima d'énergie se situent maintenant en bord de la zone de Brillouin.

En supposant que le condensat initial peut être décrit comme un état cohérent, le grand nombre de particules nous permet de faire cette approximation, la moyenne de l'opérateur annihilation sur la fonction d'onde du condensat s'écrit :

$$\langle \hat{b}(t) \rangle = \sqrt{n} e^{-i\mu t/\hbar} \quad (4.18)$$

l'état cohérent étant état propre des opérateurs création/annihilation. Pour étudier l'évolution du condensat, nous faisons alors un développement de l'opérateur annihilation d'une particule sur le site l sous la forme [109] :

$$\hat{b}_l(t) = \left[\sqrt{n} + \sqrt{\frac{d}{2\pi}} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} \hat{\delta}(\kappa, t) e^{i d \kappa} d\kappa \right] e^{-i\mu t/\hbar} \quad (4.19)$$

pour un condensat qui contient initialement n atomes par sites et possède la potentiel chimique $\mu = -2\bar{J} - m(2\pi\nu)^2\varphi_0^2/(4k_L^2) + nU$. Le premier terme correspond à l'état stationnaire. Le deuxième terme rend compte du peuplement des modes d'impulsion κ . De cette manière, nous pouvons étudier les excitations élémentaires de notre système. Le deuxième terme correspond aux fluctuations quantiques du condensat [8]. L'opérateur $\hat{\delta}(\kappa, t)$ correspond à l'annihilation de l'excitation élémentaire en κ . En utilisant l'équation d'Heisenberg, nous pouvons écrire l'évolution de cette opérateur :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{b}_l(t) = \left[\hat{b}_l(t), \hat{H}(t) \right] \quad (4.20)$$

$$= -\bar{J} \left[\hat{b}_{l+1}(t) + \hat{b}_{l-1}(t) \right] - \frac{m\omega^2\varphi^2}{4k_L^2} \hat{b}_l(t) + U \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \hat{b}_l \quad (4.21)$$

et en déduire le système d'équation :

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\delta}(\kappa, t) = 2\bar{J}(1 - \cos \kappa d) \hat{\delta}(\kappa, t) + nU \left[\hat{\delta}(\kappa, t) + \hat{\delta}^\dagger(-\kappa, t) \right] \quad (4.22)$$

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\delta}^\dagger(-\kappa, t) = 2\bar{J}(1 - \cos \kappa d) \hat{\delta}^\dagger(-\kappa, t) + nU \left[\hat{\delta}(\kappa, t) + \hat{\delta}^\dagger(-\kappa, t) \right]. \quad (4.23)$$

Nous résolvons ce système grâce à la solution :

$$\hat{\delta}(\kappa, t) = \left[\cos \Omega_\kappa t - \frac{2i\bar{J}}{\Omega_\kappa} (1 - \cos \kappa d) \sin \Omega_\kappa t \right] \hat{\delta}(\kappa, 0) - \frac{inU}{\Omega_\kappa} \left[\hat{\delta}(\kappa, 0) + \hat{\delta}^\dagger(-\kappa, 0) \right] \sin \Omega_\kappa t \quad (4.24)$$

avec le spectre d'excitation de Bogoliubov :

$$\Omega_\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{4\bar{J}(1 - \cos \kappa d) \left[\bar{J}(1 - \cos \kappa d) + nU \right]}. \quad (4.25)$$

En reprenant (4.19) et sachant que $[\hat{b}_l(0), \hat{b}_{l'}^\dagger(0)] = \delta_{ll'}$ pour les opérateurs création/annihilation bosoniques, nous en déduisons :

$$\left[\hat{\delta}(\kappa, 0), \hat{\delta}^\dagger(\kappa', 0) \right] = \delta(\kappa - \kappa') \quad (4.26)$$

pour tout κ, κ' de la première zone de Brillouin i.e. $\kappa, \kappa' \in [-\pi/d, \pi/d]$. En considérant que le condensat initial est périodique, nous pouvons écrire $\langle \hat{\delta}^\dagger(\kappa, 0) \hat{\delta}(\kappa, 0) \rangle = 0$ pour tout $\kappa \in [-\pi/d, \pi/d]$. Il nous est alors possible d'étudier le peuplement de modes non-condensés par :

$$\langle \hat{\delta}^\dagger(\kappa, t) \hat{\delta}(\kappa', t) \rangle = (nU)^2 \left(\frac{\sin \Omega_\kappa t}{\Omega_\kappa} \right)^2 \delta(\kappa - \kappa'). \quad (4.27)$$

Dans le cas où \bar{J} est positif, les fréquences Ω_κ sont réelles et nous obtenons les modes d'oscillations d'excitations élémentaires du condensat. Dans les cas où ces fréquences deviennent complexes, une instabilité dynamique prend place et contribue au peuplement des modes κ . Lorsque nous choisissons la fréquence et l'amplitude de la modulation de phase de sorte à obtenir $\bar{J} < 0$, pour les excitations élémentaires qui respectent la condition :

$$\bar{J}(1 - \cos \kappa d) < 0 < \bar{J}(1 - \cos \kappa d) + nU \quad (4.28)$$

4.1 Description théorique du problème

les fréquences Ω_κ deviennent complexes, et l'amplitude de ces modes va alors croître exponentiellement avec l'exposant de Lyapunov :

$$\lambda_\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-4\bar{J}(1 - \cos \kappa d) [\bar{J}(1 - \cos \kappa d) + nU]}. \quad (4.29)$$

Lorsque nous étudions les modes de Bogoliubov correspondant à $\kappa = \pm\pi/d$ décrivant une fonction de Bloch antipériodique au sein du réseau, l'exposant de Lyapunov prend alors une valeur maximum :

$$\lambda_{\pm\pi/d} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-8\bar{J}(nU + 2\bar{J})}, \quad (4.30)$$

en respectant la condition $nU > -4\bar{J}$ provenant de (4.28). L'évolution exponentielle sera alors encore plus prononcée pour ces modes.

Nous voyons alors que la renormalisation du taux tunnel par la modulation de phase donne lieu à une instabilité dynamique engendrant de nouveaux modes correspondant aux états alternés. Grâce à l'exposant de Lyapunov associé, nous pouvons alors déduire l'influence du taux tunnel effectif \bar{J} et de la densité du condensat sur l'évolution temporelle de ces modes après allumage de la modulation. Pour effectuer une analyse numérique de notre problème, nous devons alors utiliser une méthode permettant de rendre compte de ces fluctuations initiales. C'est dans cette optique que nous avons débuté la collaboration avec l'équipe de P. Schlagheck et que nous avons choisi d'employer la méthode de Truncated Wigner pour les simulations numériques de notre expérience. La partie suivante décrit le principe de cette méthode ainsi que son implémentation et les résultats de l'analyse.

4.1.2 Au delà du modèle en champ moyen : la méthode Truncated Wigner

Principe de la méthode

Dans un premier temps, pour donner une explication très qualitative de la méthode de Truncated Wigner, représentons sur la figure 4.3 un billard chaotique au sein duquel réside un paquet d'ondes caractérisé par $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Nous faisons ensuite propager le paquet d'ondes. Nous voulons étudier le paquet après plusieurs diffusions sur le billard. Pour des conditions légèrement différentes de départ, après un certain nombre de réflexions les trajectoires vont s'éloigner ; le paquet va alors s'étendre.

Pour donner une explication très succincte du principe, la méthode de Truncated Wigner revient à faire un échantillonnage aléatoire du point de départ autour de la moyenne de l'état initial et de faire propager tous ces échantillons. Une propagation utilisant l'équation de Gross-Pitaevskii donnerait alors la trajectoire du centre de masse du paquet, trajectoire rouge sur le schéma. Regardons maintenant plus en détail comment cette méthode peut être mise en place concrètement.

Implémentation générale

La méthode de Truncated Wigner (TW) est une méthode se plaçant dans l'espace des phases qui permet de décrire des systèmes au-delà de la description en champ moyen utilisée dans l'équation de Gross-Pitavskii (GPE).¹

1. Il est important de noter que la méthode TW n'est pas la seule permettant de réaliser ce type de simulation en prenant des fluctuations de l'état initial ; nous pouvons citer entre autre la méthode Density

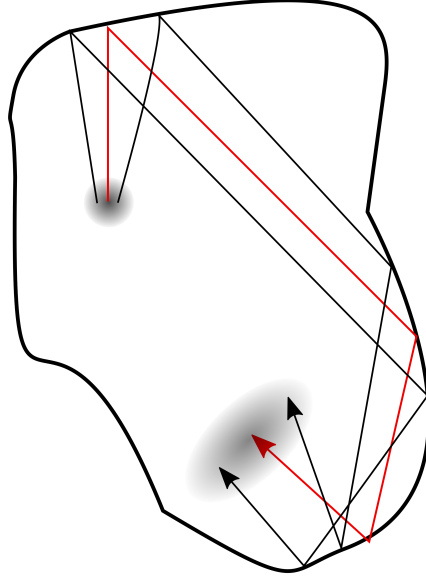


FIGURE 4.3 – *Schéma de principe de la méthode Truncated Wigner. Le but est d'échantillonner l'état initial puis de le propager. Une simulation Gross-Pitaevskii donnerait seulement la trajectoire rouge.*

Partons d'un système régi par l'Hamiltonien de Bose-Hubbard :

$$\hat{H}(t) = -J \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l+1} + \hat{a}_{l+1}^\dagger \hat{a}_l] + \sum_{l=-\infty}^{\infty} V_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l + \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \hat{a}_l. \quad (4.31)$$

L'idée de départ de la méthode est d'utiliser l'équation de von Neumann étudiant l'évolution de la matrice densité $\hat{\rho}(t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)] \quad (4.32)$$

et de l'appliquer pour étudier l'évolution de la fonction de Wigner $W \equiv W(\{\psi_l, \psi_l^*\}, t)$. La fonction de Wigner est définie dans l'espace des phases par les champs classiques ψ_l associés à chaque site du réseau. La fonction de Wigner est une distribution de quasi-probabilité définie par :

$$W(\{\psi_l, \psi_l^*\}, t) = \prod_l \frac{1}{\pi} \int \int d\lambda_l d\lambda_l^* e^{-\lambda_l \psi_l^* + \lambda_l^* \psi_l} \chi_W(\{\lambda_l, \lambda_l^*\}, t). \quad (4.33)$$

comme étant la transformée de Fourier de la fonction :

$$\chi_W(\{\lambda_l, \lambda_l^*\}, t) = \text{Tr} \left[\hat{\rho}(t) \prod_l e^{\lambda_l \hat{a}_l^\dagger - \lambda_l^* \hat{a}_l} \right]. \quad (4.34)$$

Les états quantiques sont définis ici, dans le cas d'un condensat pur possédant un grand nombre de particules, comme des états cohérents dans l'espace des phases constitué des

Matrix Renormalization Group (DMRG) ou la méthode Matrix Product State (MPS).

4.1 Description théorique du problème

coordonnées canoniques (q_l, p_l) :

$$\psi_l = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_l + ip_l) \quad (4.35)$$

$$\psi_l^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (q_l - ip_l) \quad (4.36)$$

Pour transformer l'équation de von Neumann décrivant l'évolution de la matrice pour pouvoir décrire l'évolution de la fonction de Wigner, nous utilisons une correspondance des opérateurs création-annihilation et leurs actions sur la matrice densité [110, 111, 112]. En effet, la fonction de Wigner dépend de manière paramétrique de la matrice densité $\hat{\rho}(t)$. En calculant l'équation d'évolution de la fonction de Wigner de la même façon que l'équation de von Neumann, nous allons alors faire intervenir des produits entre les opérateurs création-annihilation et la matrice densité dans le commutateur. Nous pouvons alors associer l'action des opérateurs sur la matrice densité au sein de la fonction de Wigner :

$$\hat{a}_l \hat{\rho} \leftrightarrow \left(\psi_l - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi_l^*} \right) W(\psi_l, \psi_l^*) \quad (4.37)$$

ce qui signifie

$$W_{\hat{a}_l \hat{\rho}(t)} = \left(\psi_l + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi_l^*} \right) W_{\hat{\rho}(t)}. \quad (4.38)$$

Suivant cette prescription, nous pouvons alors écrire les autres combinaisons d'opérateurs.

$$\hat{a}_l^\dagger \hat{\rho} \leftrightarrow \left(\psi_l^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi_l} \right) W(\psi_l, \psi_l^*) \quad (4.39)$$

$$\hat{\rho} \hat{a}_l \leftrightarrow \left(\psi_l - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi_l^*} \right) W(\psi_l, \psi_l^*) \quad (4.40)$$

$$\hat{\rho} \hat{a}_l^\dagger \leftrightarrow \left(\psi_l^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \psi_l} \right) W(\psi_l, \psi_l^*) \quad (4.41)$$

Nous pouvons écrire alors l'évolution de la fonction de Wigner après application de (4.38), (4.39), (4.40), (4.41) :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = \sum_l \left[-J \left(\frac{\partial}{\partial \psi_l} \psi_{l+1} - \frac{\partial}{\partial \psi_l^*} \psi_{l+1}^* \right) + V \left(\frac{\partial}{\partial \psi_l} \psi_l - \frac{\partial}{\partial \psi_l^*} \psi_l^* \right) \right. \\ \left. + U \left(\frac{\partial}{\partial \psi_l} \psi_l - \frac{\partial}{\partial \psi_l^*} \psi_l^* \right) (|\psi_l|^2 - 1) + \frac{U}{4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \psi_l^2} \frac{\partial}{\partial \psi_l^*} \psi_l - \frac{\partial}{\partial \psi_l} \frac{\partial^2}{\partial \psi_l^{*2}} \psi_l^* \right) \right] W. \quad (4.42) \end{aligned}$$

Même en définissant un nombre N fini de puits, l'équation est de dimension $2N$. L'implémentation numérique en devient extrêmement compliquée, voir même impossible dû au grand nombre de dimensions du système. La méthode Truncated Wigner (ou Wigner tronquée en français) consiste alors à tronquer l'équation (4.42) et négliger les termes de dérivation au troisième ordre. En effet, dans l'approximation d'un grand nombre de particules $|\psi_l|^2 \gg 1$ et d'une interaction U_l faible, comme celle que nous avons prise, nous comprenons que le dernier terme devient négligeable devant les autres termes. C'est cette équation tronquée que nous appelons l'équation de Truncated Wigner. Cette équation s'apparente à une équation

de Fokker-Planck [113]. Nous pouvons alors étudier l'évolution de la fonction de Wigner par une série d'équations de Langevin couplées, passant d'une équation aux dérivées partielles à plusieurs équations différentielles du premier ordre, qui décrivent l'évolution temporelle de chaque champ $\psi_l = \psi_l(t)$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_l(t) = -J [\psi_{l+1}(t) + \psi_{l-1}(t)] + V\psi_l(t) + U [|\psi_l(t)|^2 - 1] \psi_l(t). \quad (4.43)$$

En effet si nous écrivons formellement la dérivée par rapport au temps de la fonction de Wigner, nous obtenons :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} W(\{\psi_l, \psi_l^*\}, t) = \sum_l \frac{\partial W_l}{\partial \psi_l} i\hbar \frac{\partial \psi_l}{\partial t} + \frac{\partial W_l}{\partial \psi_l^*} i\hbar \frac{\partial \psi_l^*}{\partial t} \quad (4.44)$$

où nous voyons les équations de Langevin apparaitre. Nous pouvons alors étudier l'évolution de la fonction de Wigner grâce à ces équations couplées. Le but enfin est d'échantillonner les états de départ et de les propager par cette équation. Décrivons maintenant l'implémentation de cette méthode pour notre système.

Implémentation dans le cas de l'expérience de l'équipe

L'Hamiltonien que nous considérons s'écrit :

$$\hat{H}(t) = -J \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_{l+1} e^{-i\theta(t)} + \hat{b}_{l+1}^\dagger \hat{b}_l e^{i\theta(t)} \right] + \sum_{l=-\infty}^{\infty} V_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + \frac{1}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} U_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \hat{b}_l. \quad (4.45)$$

Cet Hamiltonien décrit la dynamique d'un condensat dans un réseau optique dont la phase est modulée sinusoidalement. Il est adapté pour prendre en compte les inhomogénéités de notre système. Comme dans la première partie de ce chapitre, nous retrouvons l'effet de la modulation de phase dans une phase de Peierls dépendante du temps :

$$\theta(t) = 2\pi\varphi_0 \frac{h\nu}{E_L} \cos(2\pi\nu t) \quad (4.46)$$

contenue dans les éléments de matrice décrivant le couplage par effet tunnel des sites adjacents. Maintenant, nous devons définir les différents paramètres de l'Hamiltonien. Nous pouvons définir l'énergie sur site :

$$V_l = \frac{1}{2} m\omega_{\parallel}^2 d^2 l^2 \quad (4.47)$$

avec ω_{\parallel} la fréquence de piège du confinement harmonique sous-jacent dans la direction du réseau. Lorsque la profondeur du réseau est suffisamment grande, typiquement $V_0 \geq 2E_L$, nous pouvons faire l'approximation que la fonction de Wannier $\Phi_l(x)$ du puits l est une gaussienne telle que :

$$\Phi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} a_0}} \exp \left[-\frac{(x - ld)^2}{2a_0^2} \right] \quad (4.48)$$

avec $a_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega_0)}$ la longueur de l'oscillateur harmonique associé à $\omega_0 = \sqrt{s}E_L/\hbar$ dans chaque puits du réseau. En utilisant une théorie des perturbations au premier ordre avec la

4.1 Description théorique du problème

définition (4.48) de la fonction de Wannier au site l , nous pouvons obtenir une approximation de l'expression de l'état fondamental dans chaque puits :

$$E_0 = (1 - \eta)s^{1/2}\hbar\omega_0/2 \quad (4.49)$$

avec le paramètre :

$$\eta = \exp\left(-\frac{1}{2s^{1/2}}\right) - \frac{1}{2s^{1/2}}. \quad (4.50)$$

Nous pouvons alors nous servir de cette expression pour déterminer le taux tunnel effectif entre puits adjacents à l'aide d'un ansatz semiclassique de type Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) [114, 115] :

$$J = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{e\pi}}e^{-\sigma} \quad (4.51)$$

avec l'action complexe :

$$\sigma = \sqrt{2s} \int_{\arccos(\eta)}^{\pi} \sqrt{\eta - \cos u} du. \quad (4.52)$$

Intéressons nous maintenant au paramètre effectif d'interaction sur site U_l . Nous devons d'abord considérer deux effets. Le premier vient du fait que le système n'est pas réellement à une dimension mais possède une géométrie en forme de *pancake*. La fréquence de piège longitudinale due au réseau est bien plus élevée que les fréquences transverses. Le deuxième problème réside dans le fait que la densité n'est pas homogène sur tout le réseau : le nombre d'atomes par puits varie. La densité dans la direction transverse, pour les atomes proches du centre du confinement extérieur i.e. dans la zone où les puits du réseau sont les plus peuplés, possède un profil de type Thomas-Fermi en parabole inversée.

L'énergie d'interaction par site pour un système purement 1D évolue comme $gn_l(n_l - 1)$ avec n_l le nombre d'atomes dans le site l . Nous ne pouvons pas décrire notre système comme 1D. Dans l'approximation Thomas-Fermi à deux dimension, le potentiel chimique assimilé à l'énergie d'interaction dans un puits est donné par :

$$\mu(n_l) = \sqrt{\frac{1}{\pi}n_l \frac{g}{\sqrt{2\pi}a_0} m\omega_{\perp}^2} = 2\sqrt{n_l \frac{a_s}{\sqrt{2\pi}a_0} \hbar\omega_{\perp}} \quad (4.53)$$

et évolue donc en $n_l^{1/2}$. Dans notre système *pancake shaped*, en rappelant que le potentiel chimique est défini par dE/dN , l'énergie d'interaction E évolue alors comme $n_l^{3/2}$. Il faut en tenir compte dans le paramètre d'interaction U_l du modèle de Bose-Hubbard 1D. Pour les sites les plus à l'extérieur du réseau, dans lesquels le nombre d'atomes est plus faible, nous pouvons utiliser une approche perturbative et écrire alors la constante d'interaction à une dimension :

$$g_{1D} \simeq 2\hbar\omega_{\perp}a_s \quad (4.54)$$

avec ω_{\perp} la fréquence de piège transverse et $a_s \simeq 5.3 \times 10^{-9}$ la longueur de diffusion du ^{87}Rb . Nous écrivons pour ces puits :

$$\mu = \hbar\omega_{\perp} \left(1 + \frac{2n_l a_s}{\sqrt{2\pi}a_0}\right). \quad (4.55)$$

Puisque nous voulons déterminer une formule pour le paramètre d'interaction qui permettent de rendre compte des puits fortement et faiblement peuplés, nous effectuons une interpolation

nous permettant d'écrire le potentiel chimique comme [116] :

$$\tilde{\mu} = \sqrt{1 + \frac{4Na_s}{\sqrt{2\pi}a_0}} \hbar\omega_{\perp}. \quad (4.56)$$

Nous pouvons maintenant développer le potentiel chimique :

$$\tilde{\mu}(n_l) = \tilde{\mu}(n_l^{(0)} + \delta n) = \tilde{\mu}(n_l^{(0)}) + U_l(n_l^{(0)})\delta n \quad (4.57)$$

avec $n_l^{(0)}$ le nombre d'atomes dans le puits l au début de l'expérience et δn une variation. Puisque nous avons effectué un développement limité, le terme dépendant de l'énergie d'interaction n'est rien d'autre que la dérivée du potentiel chimique par rapport à n_l pris pour $n_l = n_0$:

$$U_l = \left. \frac{\partial \tilde{\mu}(n_l)}{\partial n_l} \right|_{n_l=n_0} = \frac{2\hbar\omega_{\perp}a_s/(\sqrt{2\pi}a_0)}{\sqrt{1 + 4n_l a_s/(\sqrt{2\pi}a_0)}}. \quad (4.58)$$

Nous supposons également ici que le nombre d'atomes par site varie très peu au cours de l'expérience. Ceci reste raisonnablement valide, hormis dans le cas où le condensat opère une transition vers un état alterné pour lequel le nombre d'atomes par site varie significativement autour de la valeur d'équilibre, nous reverrons ça plus loin. La dépendance du paramètre d'interaction avec le nombre d'atomes par site permet tout de même de négliger ces effets de variation du nombre d'atomes par site autour de la valeur d'équilibre dans sa définition.

Les différents paramètres de l'Hamiltonien étant maintenant définis, nous pouvons appliquer la méthode TW. Comme dans l'exemple de principe donné dans la sous partie précédente, nous pouvons établir une série d'équation de Langevin couplées :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_l(t) = -J [\psi_{l+1}(t)e^{i\theta(t)} + \psi_{l-1}(t)e^{i\theta(t)}] + V_l \psi_l(t) + U_l [|\psi_l(t)|^2 - 1] \psi_l(t). \quad (4.59)$$

Nous supposons que le condensat à l'intérieur du réseau optique peut alors être décrit comme un état cohérent du fait du grand nombre de particules. L'état initial du condensat peut être déterminé par propagation de l'équation de Gross-Pitaevskii en temps imaginaire. Il faut alors résoudre l'équation :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \psi_l(t) = -J [\psi_{l+1}(t) + \psi_{l-1}(t)] + V_l \psi_l(t) + U_l |\psi_l(t)|^2 \psi_l(t) \quad (4.60)$$

et renormaliser par le nombre d'atomes à chaque itération de calcul. Cela s'apparente à simuler un processus de refroidissement. Le résultat donne alors l'état fondamental du système que nous notons ϕ_l . Ce calcul nous donne $n_l = |\phi_l|^2$. Nous définissons maintenant la fonction d'onde initial du condensat telle que :

$$\psi_l(0) = \phi_l + \chi_l \quad (4.61)$$

avec χ_l un nombre complexe tiré aléatoirement d'une distribution de probabilité gaussienne centrée autour de zéro et de variance : $|\chi_l|^2 = 1/2$. Ce terme décrit donc les variations autour de l'état initial. Il est important de noter que les simulations sont effectuées en négligeant la présence d'une température finie et d'un possible dépeuplement initial du condensat. Nous pouvons maintenant déterminer les différentes observables de notre système en utilisant :

$$\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_{l'} + \hat{b}_{l'} \hat{b}_l^\dagger \rangle = 2\overline{\psi_l^*(t)\psi_{l'}(t)} \quad (4.62)$$

4.2 Résultats expérimentaux

où $\overline{\psi_l^*(t)\psi_l(t)}$ qui représente la moyenne statistique sur toutes les simulations TW de $\psi_l^*(t)\psi_l(t)$. Nous pouvons alors en déduire le nombre moyen d'occupation par site l au temps t par :

$$\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \rangle_t = \overline{|\psi_l(t)|^2} - \frac{1}{2} \quad (4.63)$$

avec la soustraction d'une "demi-particule" liée à la définition des états cohérents et de la variance $|\chi_l|^2 = 1/2$. Nous pouvons également évaluer la population condensée au temps t en calculant la partie cohérente de l'opérateur à un corps $\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l$ par :

$$\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \rangle_t^{\text{coh}} = \left| \overline{\psi_l(t)} \right|^2 \quad (4.64)$$

La partie non cohérente est en conséquence définie comme le nombre total auquel est soustraite la partie cohérente :

$$\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \rangle_t - \langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \rangle_t^{\text{coh}} = \overline{|\psi_l(t)|^2} - \frac{1}{2} - \left| \overline{\psi_l(t)} \right|^2. \quad (4.65)$$

La figure 4.4 présente les résultats des simulations obtenues pour un réseau de profondeur $s = 2.6$, pour une modulation de phase à la fréquence $\nu = 1.5$ kHz, une amplitude de $\varphi_0 = 0.75\pi$ et après un temps de modulation de $t = 7.5$ ms. La figure 4.4(a) représente la densité moyenne dans l'espace des phases. Nous voyons alors apparaître la signature des états alternés avec les ordres S_- et S_+ . La figure 4.4(b) est le résultat d'une seule trajectoire TW dans l'espace des positions pour les mêmes paramètres. La ligne rouge correspond au nombre d'atomes par site. Nous voyons alors que la formation des états alternés s'accompagne de fluctuations du nombre moyen d'atomes par site. En effectuant une simulation similaire dans l'espace des impulsions, nous pouvons alors déterminer que dans les ordres alternés, en $k = \pm h/(2d)$, la cohérence à N-particules est entièrement perdue. La figure 4.5 présente les résultats de ces simulations. La ligne bleue représente la densité totale moyenne dans l'espace des impulsions calculée par la méthode TW ; la ligne en pointillé rouge correspond à la partie cohérente. Chaque image correspond à un temps de modulation différent. Nous voyons que pour le plus long temps 4.5(d), nous voyons que la partie cohérente est minoritaire dans la densité totale. Nous comprenons alors que la cohérence est perdue après formation des états alternés.

4.2 Résultats expérimentaux

Après avoir effectué le développement analytique et les simulations numériques prédisant l'émergence de ce nouvel état dynamique, je présente ici les résultats de notre étude expérimentale. La figure 4.6 montre un exemple d'expérience pour une profondeur de $2.6E_L$, une fréquence de modulation de $\nu = 1.5$ kHz et une amplitude de modulation de $\varphi_0 = 0.75\pi$. Dans ce cas, le taux tunnel est renormalisé à une valeur négative. Nous pouvons voir alors après quelques millisecondes de modulation que la figure d'interférence initiale se brouille puis nous obtenons deux nuages qui oscillent entre les états d'impulsions $-h/2d$ et $h/2d$. On peut également remarquer que les pics émergents sont plus larges que ne l'étaient les pics du condensat initial. Ceci est une signature directe de l'augmentation de la température due à l'instabilité dynamique.

Pour nos études dynamiques, nous avons besoin d'un critère définissant le temps pour lequel les états staggered sont peuplés ou temps de nucléation. En intégrant chaque image du

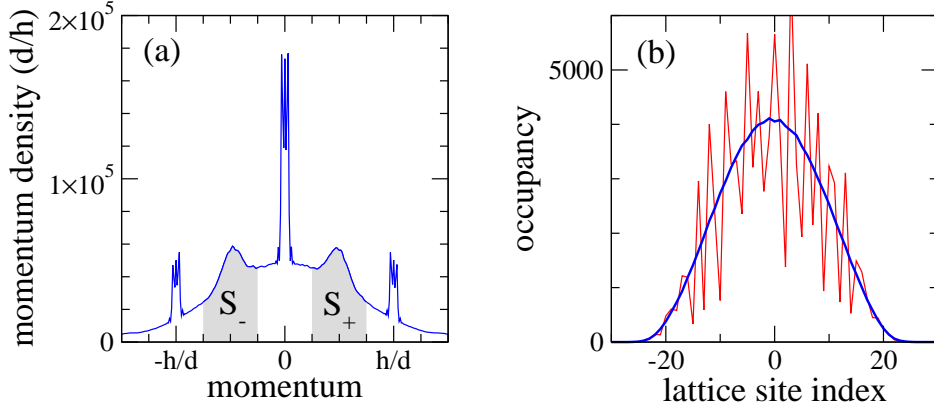


FIGURE 4.4 – Résultats des simulations numériques *Truncated Wigner* pour un condensat de 10^5 atomes dans un réseau de profondeur $s = 2.6$ dont la phase est modulée à une fréquence de $\nu = 1.5$ kHz avec une amplitude de $\varphi_0 = 0.75\pi$ pendant un temps de modulation $t = 7.5$ ms : (a) Densité moyenne dans l'espace des impulsions. Les zones grisées correspondent aux états alternés. (b) Nombre moyen d'atomes par site. La ligne rouge correspond au résultat d'une seule simulation TW. La formation des états alternés s'accompagne ainsi de fluctuations du nombre d'atomes moyen par site.

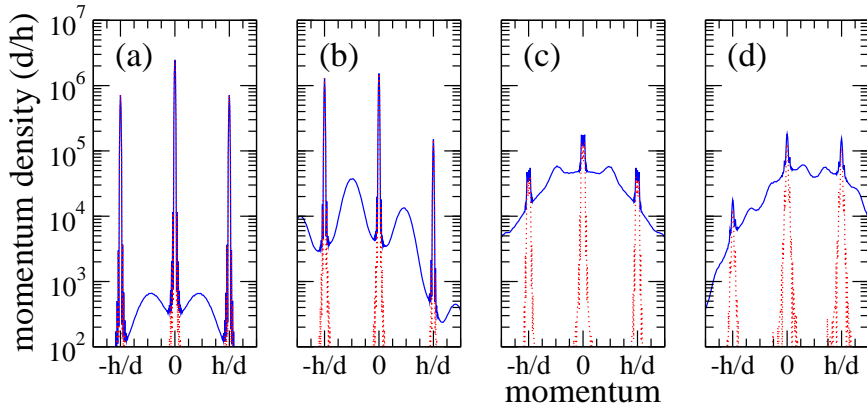


FIGURE 4.5 – Simulations numériques donnant la densité dans l'espace des impulsions calculées pour un réseau de profondeur $s = 2.6$, de fréquence de modulation $\nu = 1.5$ kHz et l'amplitude de modulation $\varphi_0 = 0.75\pi$ pour différents temps d'évolution (a) $t=2.5$ ms, (b) $t=5$ ms, (c) $t=7.5$ ms et (d) 10 ms. La ligne bleue représente la densité totale moyenne en espace des impulsions calculée par la méthode TW. La ligne en pointillés rouge montre la partie cohérente. Pour la figure (d), la partie cohérente représente la partie minoritaire de la densité totale : la formation d'états alternés entraîne une perte de la cohérence au sein du condensat.

film autour des ordres concernés et en regardant leur évolution temporelle, nous définissons que les états alternés sont formés lorsque le nombre d'atomes dans les ordres $\pm h/(2d)$ excède celui dans les ordres classiques $k = 0, \pm h/d$. Le temps de nucléation est $t_n \cong 5$ ms pour l'expérience de la figure 4.6.

Expérimentalement, nous avons étudié l'influence de plusieurs paramètres sur le temps et la dynamique de formation des états staggered. Dans un premier temps, nous avons fait varier l'amplitude de modulation de manière à faire varier le taux tunnel effectif. Puis nous

4.2 Résultats expérimentaux

nous sommes penchés sur l'influence de la densité du condensat initial. Enfin, nous avons étudié les limites de notre approximation à une seule bande.

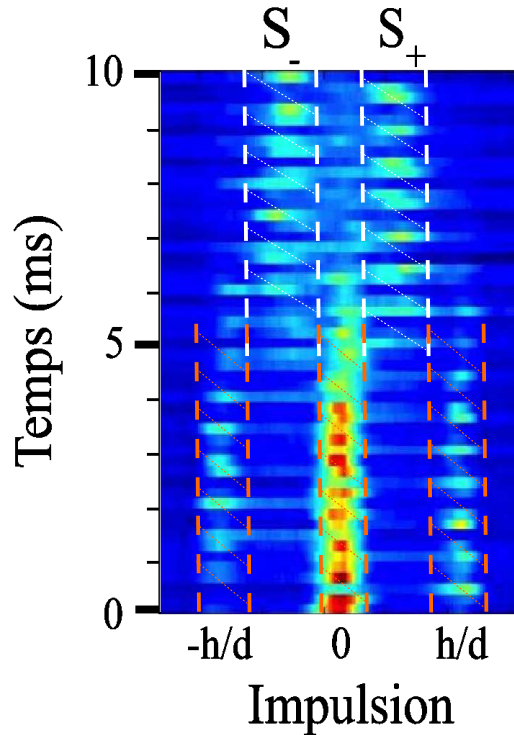


FIGURE 4.6 – Exemple d'une figure expérimentale de la dynamique de formation des états staggered. Chaque image est prise après un temps de vol de 25 ms pour différents temps de modulation. On voit apparaître les nouveaux états après un certain temps. Profondeur de $V_0 = 2.6E_L$, fréquence de modulation de $\nu = 1.5$ kHz et amplitude de modulation de $\varphi_0 = 0.75\pi$. Pour obtenir le temps de nucléation, nous comparons le nombre d'atomes dans les ordres initiaux (zones oranges) et la population dans les ordres alternés (zones blanches) et nous définissons que lorsque la population dans les zones blanches est plus importante que celle des ordres initiaux, les états staggered sont formés. Ici le temps de nucléation est estimée à 5ms.

4.2.1 Temps de nucléation en fonction du taux tunnel renormalisé

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la modulation entraîne une renormalisation du taux tunnel par une fonction de Bessel :

$$\bar{J} = JJ_0 \left(\frac{4\pi md\varphi_0\nu}{\hbar k_L} \right). \quad (4.66)$$

La première étude que nous avons fait consiste à changer l'amplitude de modulation φ_0 pour changer l'argument de la fonction de Bessel et donc le taux tunnel effectif \bar{J} . Nous avons alors observé l'évolution du temps de nucléation des états alternés en fonction de φ_0 . La figure 4.7 montre les résultats. La population théorique des états staggered évolue exponentiellement

avec l'exposant de Lyapunov :

$$\lambda = [-8\bar{J}(2\bar{J} + nU)]^{1/2} / \hbar. \quad (4.67)$$

Avec n le nombre d'atomes par site. La fonction de Bessel qui renormalise le taux tunnel possède des zéros, nous remarquons alors que l'exposant de Lyapunov prédit une divergence du temps de nucléation lorsque nous nous rapprochons de ces zéros. L'expérience confirme cette prédiction puisque nous obtenons des temps de nucléation de plus en plus longs pour des valeurs de l'amplitude de modulation associées à des valeurs de la fonction de Bessel de plus en plus proche de zéro. Nous traçons sur cette même figure les résultats des simulations numériques et voyons un bon accord avec les simulations effectuées grâce à la méthode Truncated Wigner. Les simulations numériques par Truncated Wigner sont effectuées à température nulle, nous pouvons alors conclure dans un premier temps que les fluctuations thermiques ne semblent pas jouer un rôle dans la dynamique. Nous verrons plus loin que lorsque la densité augmente, les fluctuations thermiques ont un plus grand effet sur le temps de nucléation.

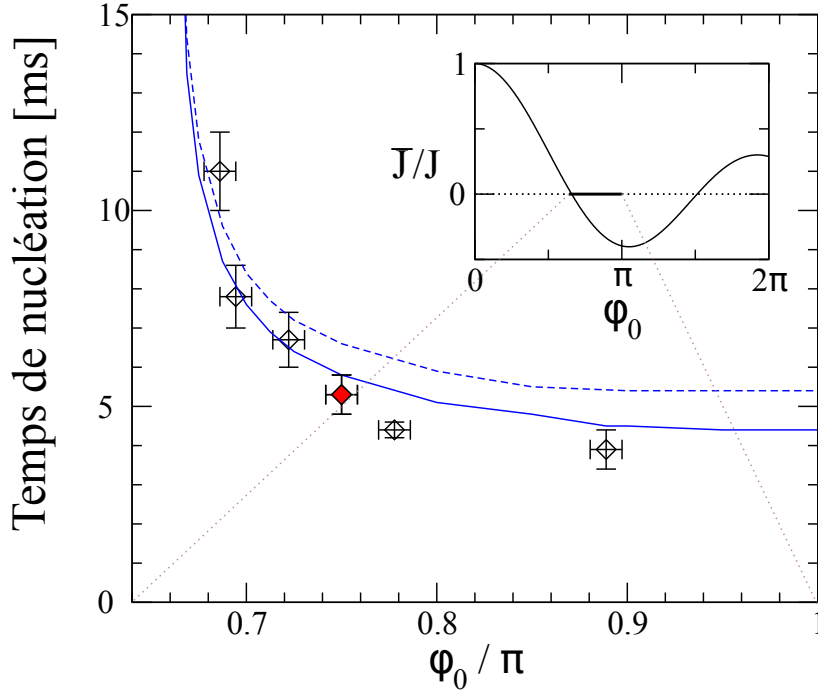


FIGURE 4.7 – *Temps de nucléation des états staggered pour plusieurs valeurs de l'amplitude de modulation pour lesquels le taux tunnel effectif est négatif. Ces mesures ont été faites pour un réseau de profondeur $V_0 = 2.6E_L$. La ligne pleine (pointillée) montre les résultats des simulations numériques en prenant un condensat de 10^5 (5×10^4) atomes. L'encadré montre la portion de la fonction de Bessel que nous étudions sur cette courbe. Le point expérimental rouge correspond à la figure 4.6 du paragraphe précédent.*

4.2.2 Temps de nucléation en fonction de la densité du CBE

Nous avons ensuite étudié l'influence de la densité atomique sur le temps de nucléation. On peut voir dans l'équation (4.67) que le modèle théorique prédit une diminution du temps de nucléation lorsque le nombre d'atomes par site augmente. En augmentant la densité, nous

4.2 Résultats expérimentaux

remplissons soit un nombre de puits plus petit avec le même nombre d'atomes soit le même nombre de puits avec un nombre d'atomes plus grand. Dans les deux cas, l'augmentation de la densité du condensat initial aura pour effet d'augmenter le nombre d'atomes par site. De fait, le modèle théorique prédit une diminution du temps de nucléation avec l'augmentation de la densité initiale. Pour vérifier expérimentalement ce phénomène, nous avons modifié les fréquences du piège hybride dans lequel le condensat est créé. De cette manière, nous diminuons le nombre de puits peuplés en gardant le nombre d'atomes fixés. Pour mesurer la densité, nous avons alors utilisé le protocole d'imagerie à haute intensité développé dans [71] et qui est redétaillé dans la partie (1.3) de ce manuscrit, en précisant la méthode de la mesure de la densité. En augmentant ou diminuant la puissance totale laser de notre piège dipolaire croisé ainsi qu'en éteignant le faisceau dipolaire vertical (cf chapitre I), nous avons pu obtenir des condensats de densité au centre du nuage avant chargement dans le réseau allant de 10^{13} atomes par cm^{-3} à 5.5×10^{13} atomes par cm^{-3} . Les résultats donnant la variation du temps de nucléation avec la densité atomique initiale sont donnés sur la figure 4.8. De la même manière que précédemment, nous comparons les résultats expérimentaux avec les simulations numériques.

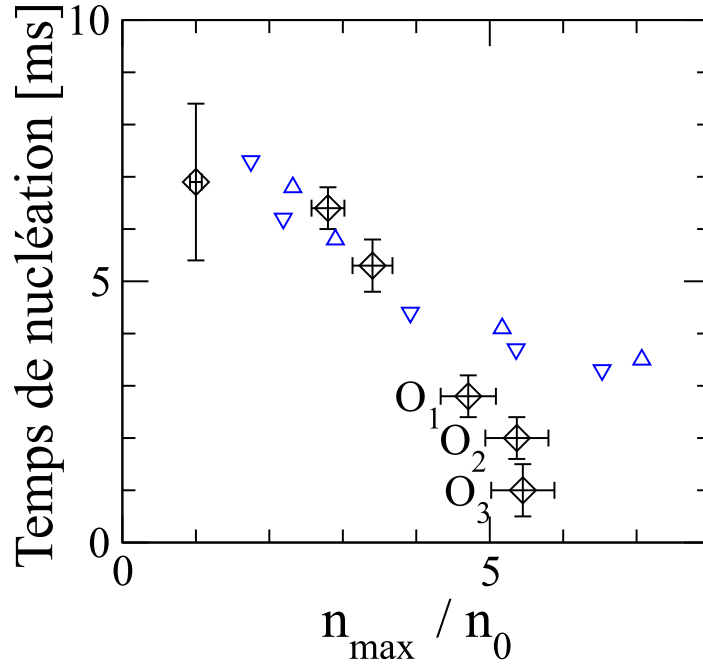


FIGURE 4.8 – Temps de nucléation en fonction de la densité atomique au centre du nuage avant chargement dans un réseau de profondeur de $2.6 E_L$, une fréquence de modulation de 1.5 kHz et une amplitude de modulation de $\varphi_0 = 0.75\pi$. La densité n_0 correspond à environ $10^{13} \text{ at.cm}^{-3}$. Les résultats des simulations numériques par Truncated Wigner sont représentés par les triangles pointant en haut pour $N = 10^5$ atomes et par les triangles pointant vers le bas pour $N = 5 \times 10^4$. Une estimation fiable a été faite des fréquences de piégeage longitudinales et transverses pour effectuer ces simulations.

Nous voyons alors que lorsque la densité augmente, le temps de nucléation diminue bien. Mais nous remarquons aussi que bien que les simulations numériques prédisent le comportement du temps de nucléation pour les densités faibles de notre jeu de mesures, l'évolution du temps de nucléation pour les hautes densités ne semble pas pouvoir être décrite seulement

par la méthode de Truncated Wigner. Ces simulations sont en effet réalisées à température nulle et ne prennent en compte que les fluctuations quantiques. Nous en concluons donc qu'à haute densité, les fluctuations thermiques jouent un rôle dans la dynamique de formation des états alternés. En effet, lorsque nous comprimons adiabatiquement le nuage et de fait augmentons la température. Entre le point O_1 et le point O_2 la température est deux fois plus grande, et entre le point O_2 et le point O_3 , la température augmente encore d'un facteur 1.6 pour atteindre $T_{O_3} \simeq 13$ nK.

4.2.3 Limite de l'approximation à une seule bande

Jusqu'alors, les prédictions théoriques ont été développées dans l'approximation d'un réseau suffisamment profond pour que les atomes soient fortement liés aux sites qu'ils occupent. Nous avons donc pu faire l'approximation que seule la bande fondamentale du réseau est peuplée. Cela a pour conséquence que nous ne décrivons pas de possibles transitions résonantes entre bandes du réseau. Pour étudier les limites de ce modèle, nous avons effectué une série de mesure du temps de nucléation en changeant la fréquence de modulation mais en gardant l'argument de la fonction de Bessel constant, en changeant alors corrélativement l'amplitude de modulation. Nous choisissons le taux tunnel effectif négatif. Dans un premier temps, le taux tunnel effectif restant constant nous ne nous attendons pas à voir l'influence du changement de fréquence de modulation sur le temps de nucléation des états alternés. Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure 4.9. Ces expériences ont été menées dans un réseau de $2.6 E_L$, pour lequel la fréquence d'oscillation du centre de masse est de $\nu_c = 8$ kHz. En faisant varier la fréquence jusqu'à 4 kHz, nous ne voyons pas de changement significatif du temps de nucléation.

Nous avons également refait une série de mesure du temps de nucléation en gardant le taux tunnel effectif négatif et constant et en changeant la fréquence jusqu'à nous rapprocher de la résonance avec la première bande excitée. Nous avons pris un réseau de profondeur $1.9 E_L$ pour lequel la fréquence d'oscillation du centre de masse est $\nu_c = 6.55$ kHz. Pour les fréquences basses, 2 et 3 kHz, nous obtenons des états staggered dont le temps de nucléation reste le même. En revanche, lorsque nous augmentons jusqu'à $\nu = 5$ kHz, nous n'observons plus la transition vers les états alternés, nous pouvons voir l'évolution du paquet atomique dans ce cas là sur la figure 4.10. Nous pouvons voir des états alternés se former jusqu'à une fréquence de l'ordre de $\nu = \nu_c/2$.

Il existe un autre régime en fréquence pour lequel nous observons une signature des états alternés, et qui ne peut pas être retrouvée par les simulations numériques que nous avons effectuées. En effet, nous pouvons promouvoir des atomes sur la première bande excitée en modulant la phase du réseau à la fréquence de résonance de la transition. En l'occurrence lorsque le taux tunnel effectif est positif, cette bande possède une courbure inverse à celle de la bande fondamentale. Ces minima d'énergie sont alors atteints pour des impulsions en bord de zone de Brillouin, c'est à dire pour $p = \pm h/2d$. En faisant cette expérience, en choisissant donc une fréquence de modulation $\nu = \nu_1$ et en déterminant une amplitude de modulation pour laquelle le taux tunnel effectif est alors positif, nous observons la signature d'états staggered. La figure 4.10 présente ce résultat pour un réseau de profondeur $3.7 E_L$.

Nous nous sommes en dernier intéressés à la plage de profondeur du réseau sur laquelle nous pouvons voir apparaître les états dynamiques. Pour les faibles profondeurs, les fréquences de résonance sont plus basses. En conséquence, nous devons abaisser la fréquence de modulation

4.2 Résultats expérimentaux

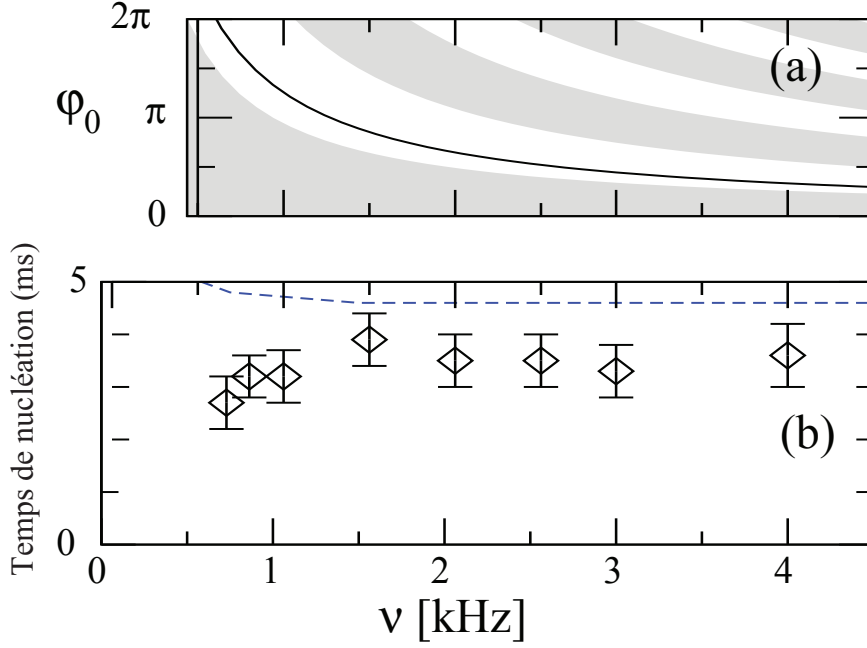


FIGURE 4.9 – (a) : Graphe montrant les zones où le taux tunnel effectif est négatif (zones blanches). La courbe montre la trajectoire que nous suivons dans l'espace (φ_0, ν) pour laquelle nous gardons un taux tunnel effectif constant. (b) : Temps de nucléation en fonction de la fréquence de modulation ν avec une adaptation de l'amplitude de modulation φ_0 , pour garder le produit $\nu\varphi_0$ constant et donc \bar{J} constant, profondeur de $2.6 E_L$.

pour respecter la règle empirique que nous avons établie plus haut, $\nu < \nu_c/2$ et pour garder le taux tunnel négatif, nous devons ajuster l'amplitude de modulation. Ceci nous amène à des situations où la fréquence de modulation est faible mais l'amplitude est grande pour les faibles profondeurs. Nous avons donc gardé l'argument de la fonction de Bessel constant et avons fait varier la profondeur tout en adaptant les paramètres de manière à moduler avec un taux tunnel effectif négatif et tel que $\nu < \nu_c$. La figure 4.11 présente les résultats de ces expériences. On peut déjà remarquer que les états alternés apparaissent dans les cas (b-d) et que la dynamique de formation est similaire à celle de la figure 4.6. Nous remarquons alors pour la plus faible profondeur une dynamique non trivial ayant une apparence discontinue.

Pour comprendre cette dynamique, nous avons tracé l'espace des phases stroboscopique des différents systèmes présentés dans la figure 4.11. Pour ce faire, nous échantillonons des couples de conditions initiales position-impulsion, puis nous faisons évoluer ces particules dans le potentiel du réseau modulé en phase. Puis nous relevons la nouvelle valeur du couple position-impulsion périodiquement. En prenant un grand nombre de périodes d'évolution et un nombre suffisant de conditions initiales, nous traçons alors l'espace des phases de notre système. Je présente trois exemples sur la figure 4.12. Le premier correspond à un réseau non-modulé, nous voyons alors les différents trajectoires correspondant aux modes dipolaires. La deuxième figure présente les résultats pour un réseau de profondeur $s = 3.2$ avec une amplitude de modulation de $\varphi_0 = 0.89\pi$ et une fréquence de modulation $\nu = 1.5$ kHz, système correspondant à la figure 4.11(d). On remarque des zones chaotiques mais également des trajectoires classique toujours présentes. La dernière figure est l'espace des phases de la

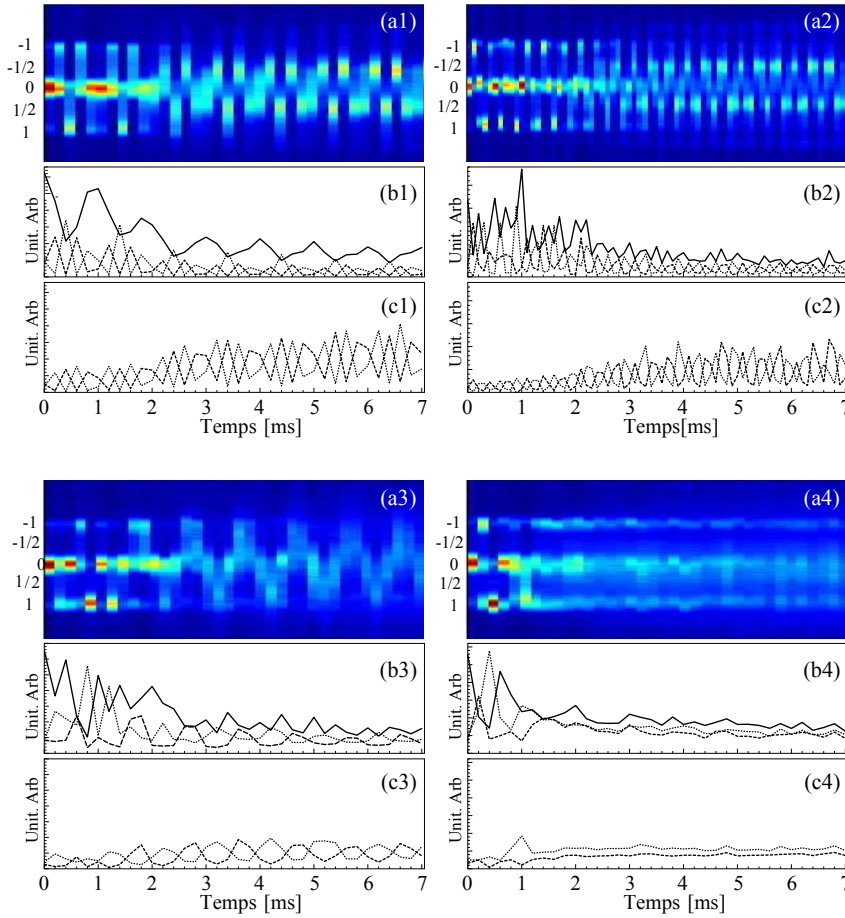


FIGURE 4.10 – *Film après temps de vol de l'évolution de la figure d'interférences pour un réseau de profondeur $s = 1.9E_L$, une fréquence de modulation $\nu = 5$ kHz et une amplitude de modulation $\varphi_0 = 0.27\pi$. Le taux tunnel effectif est alors négatif mais nous ne voyons pas apparaître d'états alternés.*

figure 4.11(a), i.e. $s = 1.2$, $\varphi_0 = 1.67\pi$ et $\nu = 800$ Hz. Cette fois, nous ne distinguons plus aucune trajectoire classique et l'espace des phases est purement chaotique. Cela explique la dynamique de nous observons.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié expérimentalement la cinétique d'une transition de phase quantique d'un condensat de Bose Einstein au sein d'un réseau modulé en phase ; la transition s'opère d'un état symétrique à un état anti-symétrique dit alterné.

Pour pouvoir comparer nos résultats expérimentaux avec des simulations numériques, nous avons entamé une collaboration avec l'équipe de Peter Schlagheck. La simulation numérique de nos expériences nécessitait une approche qui prenait en compte les fluctuations quantiques initiales du condensat, nous avons alors utilisé la méthode Truncated Wigner. Cette méthode repose sur l'échantillonnage de l'état initial et la propagation de ces différents états pour

4.2 Résultats expérimentaux

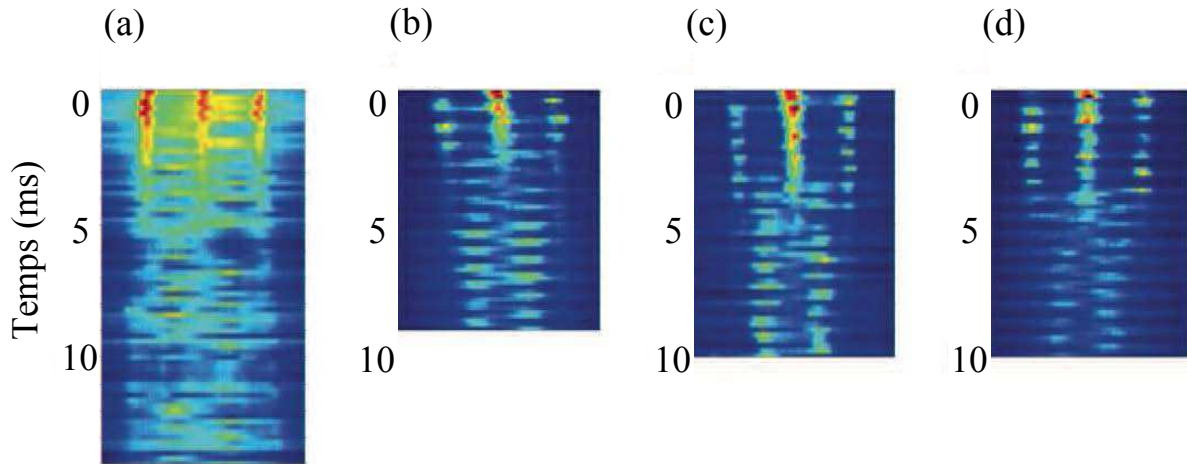


FIGURE 4.11 – *Film après temps de vol de l'évolution de la figure d'interférences.* (a) : $1.2 E_L$, $\varphi_0 = 1.67\pi$ et $\nu = 800$ Hz; (b) : $1.8 E_L$; (c) : $2.6 E_L$; (d) : $3.2 E_L$; (b-d) : $\varphi_0 = 0.89\pi$ et $\nu = 1.5$ kHz.

rendre compte de l'effet des fluctuations initiales sur la fonction d'onde finale. Les simulations numériques ont révélé la perte de cohérence à N-corps au cours de la transition, bien que l'interférabilité spatiale entre les différents sites du réseau est préservée. Nous avons déterminé que la transition est déclenchée par les fluctuations quantiques ou thermiques, dépendant de la température au sein du condensat.

La modulation de phase entraîne la renormalisation du taux tunnel à une valeur négative. Un des éléments clés de la transition vient de l'inversion de la courbure de la bande fondamentale du réseau induite par le taux tunnel effectif négatif. Les extremums d'énergie s'inversent et entraînent des fluctuations de la densité du condensat. Nous avons également étudié la formation d'états alternés pour une valeur renormalisée positive du taux tunnel lorsque la fréquence de la modulation de phase est proche de la fréquence résonante de la transition entre la bande fondamentale et la première bande excitée. Enfin, nous avons étudié le régime de profondeur pour lesquelles nous pouvons observer la nucléation d'états alternés.

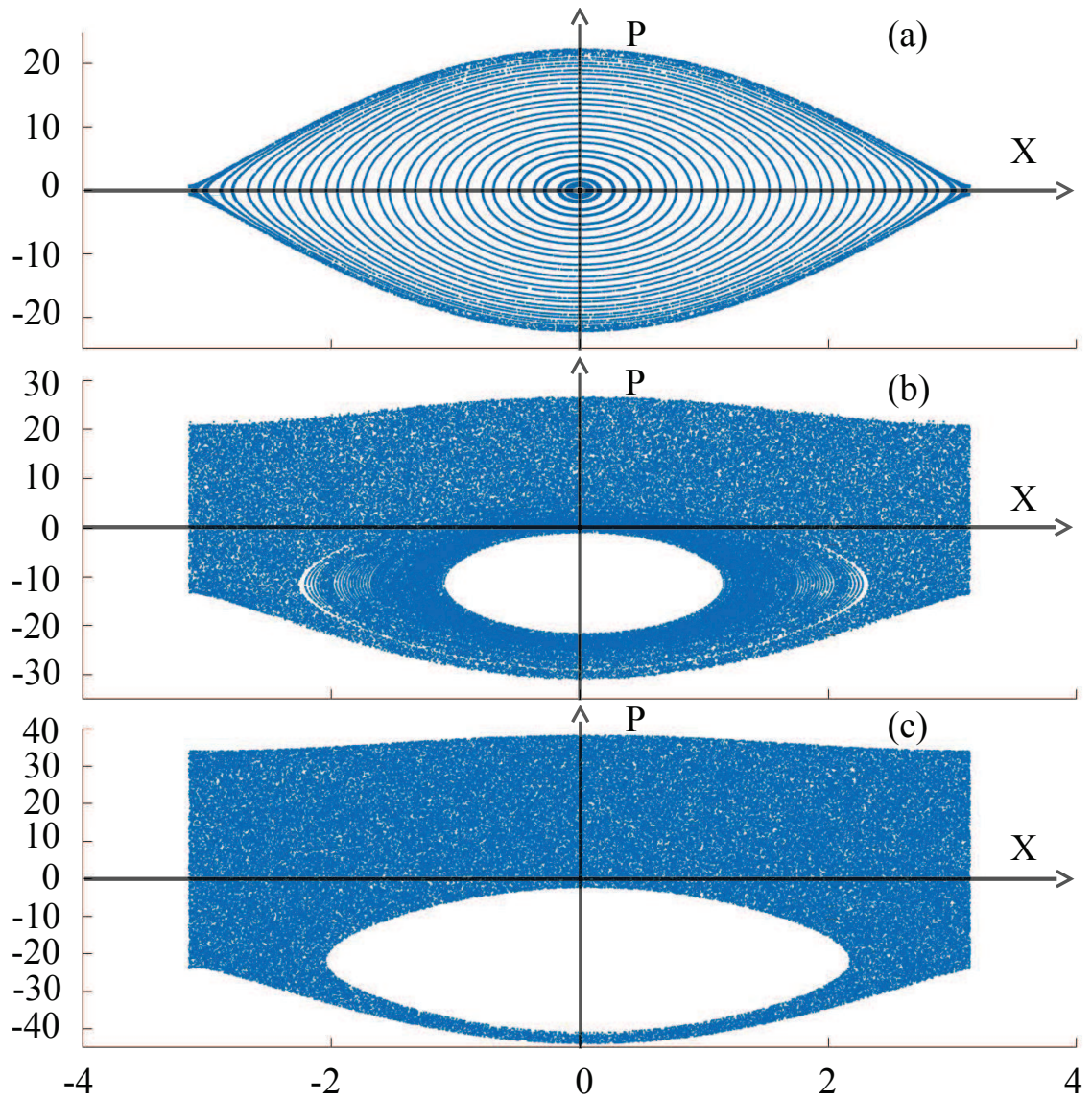


FIGURE 4.12 – Espace des phases stroboscopique classique. Il est construit en faisant varier le point de départ et effectuant ensuite une mesure du couple position-impulsion périodiquement. Dans ce cas, le système est une particule dans un réseau modulé en phase en une dimension. (a) : $s=1.2$, réseau non modulé; (b) $s=3.2$, $\varphi_0 = 0.89\pi$ et $\nu = 1.5$ kHz (conditions correspondant à la figure 4.11(d)); $s=1.2$, $\varphi_0 = 1.67\pi$ et $\nu = 0.8$ kHz (conditions correspondant à la figure 4.11(a))

CHAPITRE 5

MODULATION HAUTE FRÉQUENCE : POTENTIEL MOYENNÉ

Introduction

Dans nos expériences de modulation sinusoïdale de la phase du réseau, nous avons étudié jusqu'à présent le comportement de notre système pour des fréquences de modulation ω inférieures à la fréquence résonnante ω_m entre la bande fondamentale du réseau et la première bande excitée. Pour le cas étudié dans le premier chapitre, la modulation a pour effet de renormaliser le taux tunnel entre sites du réseau. Dans ce chapitre nous explorons le régime pour lequel la fréquence ω est très grande devant ω_m . Dans le régime de haute fréquence, nous considérons que le temps caractéristique associé à l'énergie cinétique des atomes est grand devant la période d'une modulation de la phase. Les atomes perçoivent alors le potentiel modulé en phase sous la forme d'un potentiel qui est moyenné sur une période de la modulation. Pour une grande amplitude de modulation, le potentiel moyenné s'annule. Nous verrons que pour une amplitude modérée, la modulation entraîne une renormalisation de la profondeur du réseau en une profondeur effective.

Dans ce chapitre j'explique et développe d'abord comment la modulation de la phase renormalise la profondeur effective du réseau. Puis, je présente l'expérience que nous avons effectuée et ses résultats. J'explique comment nous avons mesuré la profondeur effective expérimentalement. La dernière partie traitera d'un exemple d'utilisation de cette technique qui nous a permis d'étudier une dynamique hors équilibre au sein du réseau optique.

5.1 Renormalisation de la profondeur

Rappelons le potentiel périodique modulé en phase que nous considérons tout au long de cette partie :

$$V(x, t) = -\frac{s_0 E_L}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi x}{d} + 2\varphi_0 \sin(2\pi\nu t) \right) \right]. \quad (5.1)$$

Dans l'expérience que nous avons effectuée, nous avons choisi la fréquence de modulation $\nu = 500$ kHz. La profondeur s de notre réseau est de $6.40 E_L$. La fréquence correspondant à la

transition vers la première bande excitée vaut $\nu_1 = 18.32$ kHz, nous avons alors $\nu \gg \nu_0$. Nous pouvons considérer alors que le potentiel perçu par les atomes est moyenné sur une période de la modulation de phase. En développant notre potentiel nous écrivons la moyenne :

$$\langle V(x, t) \rangle = -\frac{s_0 E_L}{2} \times \frac{1}{T} \int_0^T [1 + \cos(k_L x) \cos(2\varphi_0 \sin(2\pi\nu t)) + \sin(k_L x) \sin(2\varphi_0 \sin(2\pi\nu t))] dt \quad (5.2)$$

avec $k_L = 2\pi/d$. Le terme en sinus s'annule sur une période, nous réécrivons notre potentiel à l'aide d'un changement de variable $\tau = 2\pi\nu t$:

$$\langle V(x, t) \rangle = -\frac{s_0 E_L}{2} \left(1 + \cos(k_L x) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(2\varphi_0 \sin(\tau)) d\tau \right). \quad (5.3)$$

Nous voyons alors apparaître la définition de la fonction de Bessel d'ordre zéro : $J_0(x) = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos(x \sin(u)) du$. Le potentiel que les atomes perçoivent est alors :

$$V(x) = -\frac{s_0 E_L}{2} (1 + \cos(k_L x) J_0(2\varphi_0)). \quad (5.4)$$

La modulation haute fréquence a alors pour effet de renormaliser la profondeur du potentiel périodique :

$$s_{\text{eff}} = s_0 J_0(2\varphi). \quad (5.5)$$

Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre précédent, la fonction de Bessel d'ordre 0 comporte des zéros. Nous comprenons alors que nous pouvons annuler le potentiel en choisissant les amplitudes de modulation correspondant à ces valeurs. Il est important de mentionner que la fonction de Bessel J_0 peut prendre de valeurs négatives. Cela aura pour conséquence d'inverser la position des maxima et des minima du réseau, i.e. le réseau pour les valeurs de s_{eff} négatives sera déphasé de π par rapport au réseau avant modulation, nous reviendrons sur ce point plus en détails dans la dernière partie de ce chapitre.

5.2 Résultats et calibration de la profondeur

Pour l'étude expérimentale de la renormalisation du potentiel, nous chargeons le condensat dans un réseau optique de profondeur $s_0 = 6.4 \pm 0.1 E_L$ modulé phase à une fréquence $\nu = 500$ kHz puis le maintenons pendant 2 ms. Enfin nous prenons une image de la figure d'interférence obtenu après 25ms de temps de vol. Nous avons répété cette expérience 73 fois en faisant varier l'amplitude de la modulation φ_0 . De cette manière nous parcourons la fonction de Bessel qui renormalise la profondeur. La figure 5.1 présente nos résultats. Nous avons superposé aux points expérimentaux les résultats théoriques (courbe pleine) obtenus grâce à (5.5). Il n'y pas de paramètres ajustables, la profondeur s_0 du réseau avant modulation ayant été mesurée par notre méthode de calibration basée sur le déplacement de la phase (cf. Chapitre 3), puis utilisée dans le calcul théorique. Nous avons alors un accord remarquable. Pour les valeurs de l'amplitude de modulation correspondant à un zéro de la fonction de Bessel, nous remarquons sur les images que les pics d'interférences disparaissent, montrant l'annulation du potentiel vu par les atomes par la modulation. En effet, les ordres d'impulsion $\pm h/d$ résultent de la périodicité du potentiel. Leur absence révèle la suppression de cette périodicité, le potentiel est donc devenu plat. On peut remarquer que lorsque l'amplitude est choisie de manière à atteindre un extremum local de la fonction de Bessel, le réseau optique de profondeur s_{eff} ainsi créé devient robuste face aux fluctuations de phase résiduels, la dérivée de s_{eff} par rapport à φ_0 étant nulle en ces points.

5.2 Résultats et calibration de la profondeur

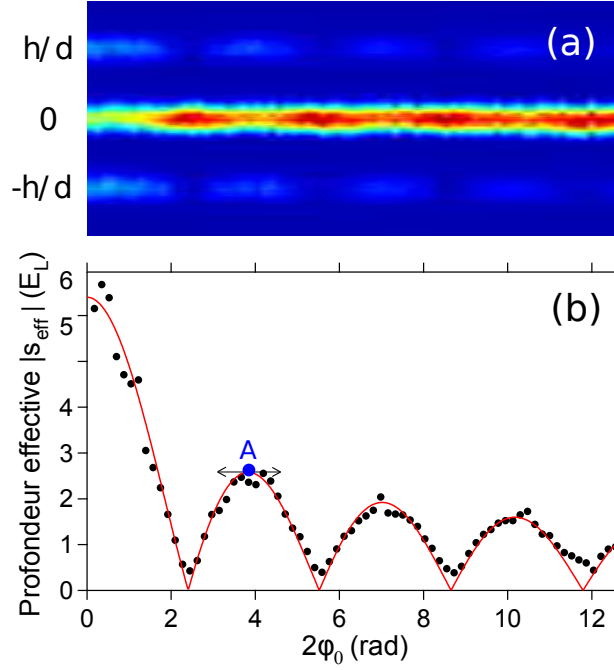


FIGURE 5.1 – (a) : Evolution de la figure d’interférences en fonction de l’amplitude de la modulation. La profondeur du réseau avant modulation est $s_0 = 6.40 \pm 0.1 E_L$. (b) : Profondeur s_{eff} en valeur absolue en fonction de l’amplitude de la modulation. Les points correspondent aux 73 mesures expérimentales effectuées sur les images en (a). La courbe continue est le résultat théorique tiré de (5.5). Aucun ajustement n’a été effectué, les points expérimentaux et théoriques ont seulement été superposés.

Pour obtenir cette courbe, nous avons utilisé deux méthodes de calibration de la profondeur du réseau. Comme indiqué plus haut, la profondeur initiale avant modulation s_0 a été calibrée grâce à la méthode utilisant un déplacement soudain de la phase (voir chapitre 3). Pour mesurer la profondeur effective $|s_{\text{eff}}|$ des différents points de la figure 5.1, nous utilisons une méthode plus rapide basée sur l’analyse de la figure d’interférence obtenue après temps de vol. En effet, la calibration de la profondeur par oscillation de la chaîne de microcondensats pour les 73 points prendrait un temps considérable. Dans la partie 5.2 du chapitre 2 de ce manuscrit, je décris une méthode de calibration développée dans l’équipe de E. Arimondo utilisant la population relative des ordres $+1$ et -1 , $\Pi_{\pm 1}$, par rapport à l’ordre zéro Π_0 : $\bar{\Pi}_1 = (\Pi_1 + \Pi_{-1}) / (2\Pi_0)$. Comme indiqué dans le chapitre 2, nous avons revisité cette méthode grâce à des simulations numériques nous donnant l’évolution de la fonction d’onde en effectuant un développement sur les fonctions de Bloch. Ces simulations nous donnent la correspondance entre la profondeur s du réseau et la population relative dans les premiers ordres $\bar{\Pi}_1$ après chargement adiabatique dans le réseau. Nous en avons extrait une fonction d’ajustement sur la gamme $s = 0.5$ à $50 E_L$:

$$s = \sqrt{K_0 \bar{\Pi}_1} + \sum_{n=1}^{n=11} K_n \bar{\Pi}_1^n \quad (5.6)$$

avec $K_0 = 14.302$, $K_1 = 1.8301$, $K_2 = 19.97$, $K_3 = -96.533$, $K_4 = 546.51$, $K_5 = -995.57$, $K_6 = 216.89$, $K_7 = 1222.1$, $K_8 = 486.29$, $K_9 = -1490.9$, $K_{10} = -2560.1$ et $K_{11} = 3486.3$. L’erreur relative sur l’estimation de la profondeur est en dessous de 1%.

5.3 Contrôle de la phase

Comme mentionné dans la première partie, la fonction de Bessel possède des valeurs négatives. Lorsque la fonction croise un zéro, elle change de signe et entraîne alors un changement de signe de la profondeur effective s_{eff} . Le changement de signe de la profondeur effective se traduit par l'inversion de la position des maxima et des minima du potentiel. Cela signifie que si l'amplitude de modulation est changée subitement de φ_1 à φ_2 de manière à garder la même valeur absolue de $|s_{\text{eff}}|$ mais à inverser le signe, cela revient à effectuer un déphasage d'exactement π du réseau. Les atomes alors au fond des puits de potentiels, aux minima, se retrouvent soudainement en haut des puits, aux maxima comme illustré par la figure 5.2

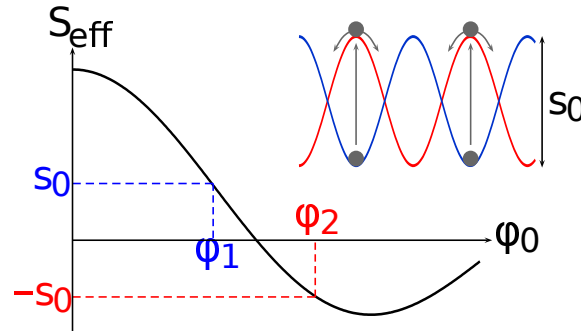


FIGURE 5.2 – *Lorsque nous changeons la valeur de l'amplitude de modulation de sorte à obtenir une profondeur effective de même valeur absolue mais de signe différents, nous inversons la position de maxima et des minima du potentiel périodique. Les atomes se retrouvent alors en haut des puits de potentiel et vont se scinder en deux paquets symétriques.*

Pour observer la dynamique qui suit le déphasage, nous effectuons un film de la figure d'interférences obtenue après temps de vol en fonction du temps de maintien dans le réseau après changement brusque du signe de la profondeur effective, comme lors de l'étude de la micro-oscillation de la chaîne de condensats dans le chapitre 3. Nous choisissons deux valeurs d'amplitude de modulation $\varphi_1 = 0.296\pi$ et $\varphi_2 = 0.5\pi$ qui correspondent toutes deux à la même valeur absolue de la profondeur effective $|s_{\text{eff}}| = 1.95$ mais de signes opposés. Nous commençons par charger le condensat dans un réseau optique modulé à 500 kHz avec une amplitude de modulation φ_1 puis nous changeons soudainement l'amplitude par φ_2 . Nous maintenons ensuite les atomes dans le réseau modulé pendant différents temps et prenons une image par absorption après 25 ms de temps de vol pour chaque temps pour observer la dynamique. Le résultat de cette expérience est présenté sur la figure 5.3.

Par souci de comparaison, nous avons effectué la même expérience mais sans changement brusque de l'amplitude de modulation de sorte à garder s_{eff} constant. Dans ce cas, nous ne voyons pas d'évolution en fonction du temps de maintien. Dans le cas où on effectue le saut de phase de φ_1 à φ_2 , nous voyons que l'inversion du signe de la profondeur effective entraîne la séparation du paquet initial en deux paquets cohérents symétriques d'impulsions opposées, le déplacement de la phase d'un angle π assurant la symétrie de la séparation.

Conclusion

Dans ce chapitre, j'ai présenté une autre utilisation de la modulation de phase. La modulation rapide est un nouvel outil permettant de façonner dynamiquement les propriétés d'un

5.3 Contrôle de la phase

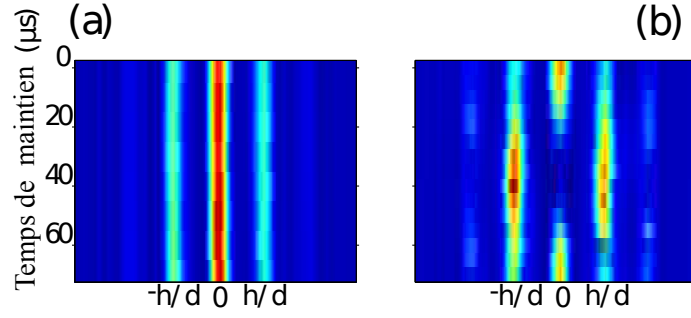


FIGURE 5.3 – Évolution de la figure d’interférence obtenue après un temps de vol. (a) : Condensat chargé puis maintenu dans le réseau modulé avec $\varphi_1 = 0.296\pi$. (b) : Évolution après le changement brusque de φ_1 à φ_2 . Les deux profondeurs effectives obtenues par φ_1 et φ_2 ont la même valeur absolue. Nous pouvons alors voir sur l’image (b) que le paquet initial se sépare en deux paquets ayant des impulsions opposées.

réseau optique. En effet, en l’utilisant sur des réseaux de plus d’une dimension il est possible de changer continument l’anisotropie du système. Nous avons également vu qu’en choisissant une profondeur effective correspondant à un extremum de la fonction de Bessel, le système devient robuste face au bruit de phase résiduel. Ce chapitre présente aussi une méthode de calibration qui revisite une méthode bien connue qui s’appuie sur la mesure de la population relative entre les ordres de la figure d’interférences obtenue après temps de vol. En effectuant un changement brusque de l’amplitude de modulation de sorte à changer le signe de la profondeur effective, nous avons vu que nous effectuons alors un déphasage d’exactement π . On peut remarquer que le déphasage produit de cette manière permet d’atteindre l’état le plus loin de l’équilibre d’un réseau optique pour une profondeur donnée. Le fait que la position atteinte entraîne une séparation en deux paquets cohérents et symétriques permet alors d’utiliser cette méthode pour créer des collisions entre atomes au sein du réseau. Les condensats restent piégés dans le potentiel du réseau et le potentiel extérieur, ce qui réduit l’extension de la fonction d’onde et permet alors d’étudier les collisions du régime de la superfluidité jusqu’au régime de collisions multiples, étude que nous menons actuellement dans l’équipe.

CHAPITRE 6

MODULATION RÉSONANTE : RÈGLES DE SÉLECTION

Introduction

Jusqu'ici, nous nous sommes placés dans des régimes de fréquences de modulation hors résonance. Dans ces régimes là, la modulation permet de façonner l'Hamiltonien qui régit la dynamique du système et d'en changer ses propriétés. Dans l'étude de la nucléation des états alternés, nous ne considérons par exemple que la bande fondamentale du réseau, négligeant l'effet des bandes supérieures d'énergie. Nous étudions dans ce chapitre un régime pour lequel la fréquence de modulation est du même ordre de grandeur que les fréquences résonantes avec les transitions entre la bande fondamentale du réseau et les premières bandes excitées. De cette manière, il est possible d'apporter de l'énergie de manière résonante et d'induire des transitions entre bandes du réseau. En accordant la fréquence de modulation, nous pouvons provoquer l'absorption d'un ou plusieurs phonons, correspondant à l'écart en énergie entre la bande fondamentale et la bande excitée choisie [117]. En étudiant la figure d'interférence obtenue après temps de vol des atomes initialement dans le réseau, nous pouvons voir l'effet de l'excitation résonante. Nous avons établi ainsi un spectre en fréquence. Cette étude nous a permis de mettre en lumière et de vérifier les règles de sélection de ces transitions. En effet, en fonction de la parité de la bande et de la parité de la modulation (la modulation de phase et la modulation d'amplitude sont de parités opposées) certaines transitions deviennent interdites pour les atomes au centre de la zone de Brillouin, pour $k = 0$. De plus, notre étude s'intéresse au rôle des interactions inter-atomiques et du confinement extérieur dans ces transitions.

Ce chapitre présente les résultats préliminaires de notre étude. Nous verrons tout d'abord comment les règles de sélections apparaissent dans notre système et comparerons les deux types de modulation, phase et amplitude. Je présenterai ensuite les résultats expérimentaux de notre étude. Enfin, j'expliquerai brièvement le principe d'une méthode de refroidissement qui repose sur ces règles de sélection ; nous sommes en train d'étudier cette méthode au moment de l'écriture de ce manuscrit.

6.1 Règles de sélection

En modulant la phase ou l'amplitude du réseau, nous pouvons induire des transitions entre bandes d'énergie. Le couplage induit par modulation revient à calculer l'élément de matrice :

$$C = |\langle u_{n,k} | V(x, t) | u_{n',k'} \rangle|, \quad (6.1)$$

avec $u_{n,k}$ les fonctions de Bloch de la bande n . Du fait de la symétrie du système, seules les excitations verticales sont autorisées, i.e. $k = k'$. Étudions les transitions à $k = 0$. Les fonctions de Bloch de deux bandes successives $u_{n,k=0}$ et $u_{n+1,k=0}$ sont de parités opposées. Cela signifie que pour les coupler, il faut une fonction impaire. De la même manière, pour coupler deux bandes de même parité (séparées par une bande), il faut une excitation paire. Voyons maintenant la différence entre la modulation d'amplitude et de phase.

Modulation d'amplitude

Le potentiel que nous considérons pour la modulation d'amplitude est le suivant :

$$V(x, t) = -\frac{V_0}{2} [1 + a \cos(\omega t)] [1 + \cos(k_L x)]. \quad (6.2)$$

avec $V_0 = sE_L$, a l'amplitude de la modulation et ω la fréquence de la modulation. Nous voyons alors que :

$$\langle u_{n,k=0} | V(x, t) | u_{n+1,k=0} \rangle = -\frac{aV_0}{2} \cos(\omega t) \langle u_{n,k=0} | \cos(k_L x) | u_{n+1,k=0} \rangle = 0 \quad (6.3)$$

$$\langle u_{n,k=0} | V(x, t) | u_{n+2,k=0} \rangle = -\frac{aV_0}{2} \cos(\omega t) \langle u_{n,k=0} | \cos(k_L x) | u_{n+2,k=0} \rangle \neq 0. \quad (6.4)$$

Seules les transitions pour lesquelles les parités des bandes sont identiques sont autorisées pour la modulation d'amplitude, $n - n' = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Modulation de phase

Ce potentiel est bien connu puisque nous l'avons utilisé tout au long de ce chapitre. Rappelons sa forme développée :

$$V(x, t) = -\frac{V_0}{2} [1 + \cos(k_L x) \cos(2\varphi_0 \sin(\omega t)) + \sin(k_L x) \sin(2\varphi_0 \sin(\omega t))]. \quad (6.5)$$

Nous voyons que ce potentiel contient deux termes qui peuvent induire des couplages. Développons les parties dépendantes du temps de ces termes :

$$\sin(k_L x) \sin(2\varphi_0 \sin(\omega t)) \approx 2\varphi_0 \sin(\omega t) \sin(k_L x) \quad (6.6)$$

et

$$\cos(k_L x) \cos(2\varphi_0 \sin(\omega t)) \approx \left(1 - \frac{\varphi_0(1 + \cos(2\omega t))}{2}\right) \cos(k_L x) \quad (6.7)$$

Si nous calculons les éléments de matrices pour le couplage entre deux bandes successives et deux bandes séparées par une autre bande nous obtenons :

$$\langle u_{n,k=0} | V(x, t) | u_{n+1,k=0} \rangle = -V_0 \varphi_0 \sin(\omega t) \langle u_{n,k=0} | \sin(k_L x) | u_{n+1,k=0} \rangle \neq 0 \quad (6.8)$$

6.2 Résultats préliminaires

$$\langle u_{n,k=0} | V(x, t) | u_{n+2,k=0} \rangle = -\frac{V_0}{2} \left(1 - \frac{\varphi_0(1 + \cos(2\omega t))}{2} \right) \langle u_{n,k=0} | \cos(k_L x) | u_{n+2,k=0} \rangle \neq 0. \quad (6.9)$$

L'équation (6.8) nous permet de conclure qu'au premier ordre, les transitions entre bandes de parités opposées sont autorisées pour la modulation de phase. Au premier ordre, ceci établit la règle de sélection pour la modulation de phase : $n - n' = 2p + 1$ avec $p \in \mathbb{N}$. En revanche, la deuxième équation (6.9) nous montre qu'au deuxième ordre, il est possible d'effectuer des transitions interdites au premier ordre. Nous voyons alors qu'elles sont rendues possibles par un processus à deux phonons. Ceci marque alors la différence majeure dans les règles de sélection : la modulation d'amplitude possède une règle de sélection stricte et n'autorise pas de processus à deux phonons. La règle de sélection pour la modulation de phase n'existe qu'au premier ordre de développement, le deuxième ordre permettant d'effectuer des transitions à deux phonons vers des bandes inaccessibles au premier ordre.

Il est important de souligner deux points : tout d'abord, ces règles de sélection ont été développées pour $k = 0$. Si nous sortons de cette approximation, nous verrons dans la dernière partie de ce chapitre qu'il est possible d'induire des transitions originellement interdites à $k = 0$ par les règles de sélection. De plus, lorsque le réseau est peu profond, expérimentalement l'effet d'enveloppe du potentiel extérieur devient plus prononcé ce qui à l'échelle du condensat brise la symétrie de translation. Les règles de sélection peuvent alors être violées.

6.2 Résultats préliminaires

6.2.1 Spectre et règles de sélection

Présentons maintenant les résultats de notre étude. Nous avons effectué deux séries d'expériences : en modulant la phase puis en modulant l'amplitude. Pour chacune de ces séries, nous effectuons un spectre de modulation : nous chargeons le réseau à une profondeur donnée puis nous enclenchons la modulation pendant un temps donné, typiquement quelques ms. Une fois la modulation terminée, nous prenons une image de la figure d'interférences obtenue après temps de vol. Puis nous répétons l'expérience en changeant la fréquence de modulation de sorte à parcourir toutes les résonances attendues. Nous recommençons la même étude complète pour des réseaux de différentes profondeurs.

La figure 6.1 présente un exemple de spectre pour un réseau de profondeur $s = 1.7$. Nous effectuons une modulation de phase pendant 5 ms avec une amplitude de 5° et refaisons l'expérience pour des fréquences de modulation variant de 0 à 45 kHz. La population des différents ordres est tracée en fonction de la fréquence de modulation. Nous pouvons alors observer les résonances sous la forme de déplétion de l'ordre 0 ou/et corrélativement d'une augmentation des populations dans les ordres supérieurs. Si la fréquence de modulation n'est pas résonante avec une transition, nous ne transférons pas d'énergie au nuage. La figure d'interférence reste alors inchangée pour ces valeurs. Je représente sur la figure 6.2 la structure de bande du réseau de l'expérience précédente. Les résonances observées correspondent à deux transitions autorisées de la bande 1 (fondamentale) vers la bande 2, et de 1 vers 4. Nous observons également une résonance étroite qui correspond à la transition de 1 vers 3. Cette transition est supposément interdite. L'effet d'enveloppe du potentiel extérieur sur le réseau peu profond permet de violer la règle de sélection car il brise l'invariance par translation.

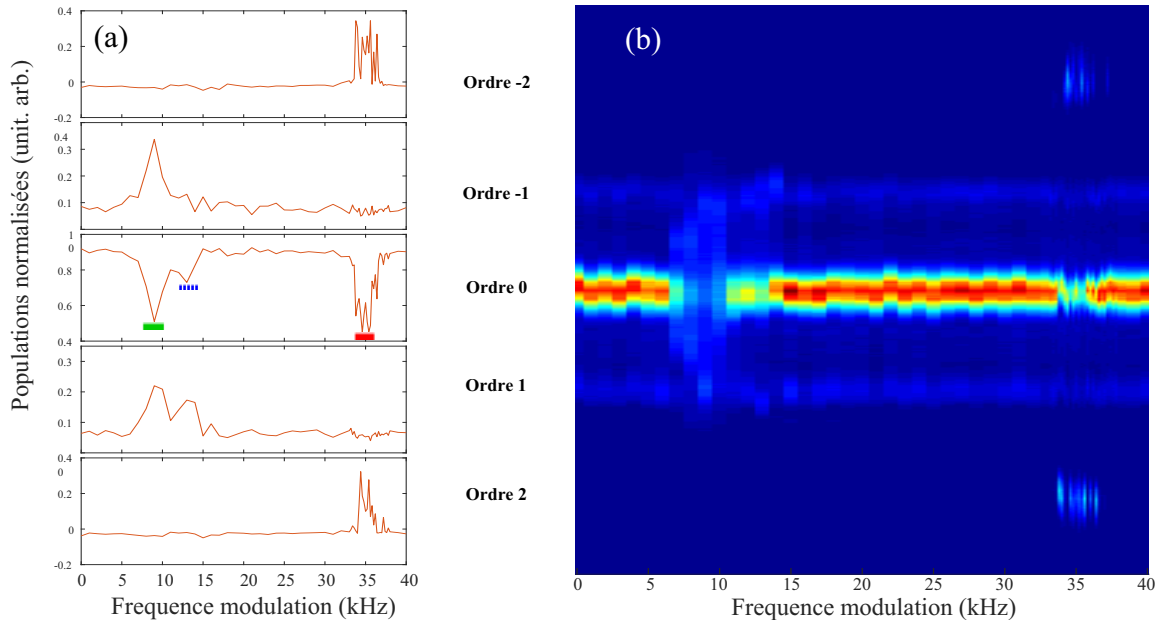


FIGURE 6.1 – Spectre en fréquence pour un réseau optique de profondeur $s = 1.7$ modulé en phase. Nous chargeons le réseau puis appliquons la modulation pendant 5ms avec une amplitude de 5° . (a) : Populations des ordres après temps de vol en fonction de la fréquence de modulation. (b) : Film des images d'absorption en fonction de la fréquence de modulation. Chaque colonne est une image prise après temps de vol. Nous relevons les résonances en cherchant les pics de déléctions dans la population de l'ordre 0.

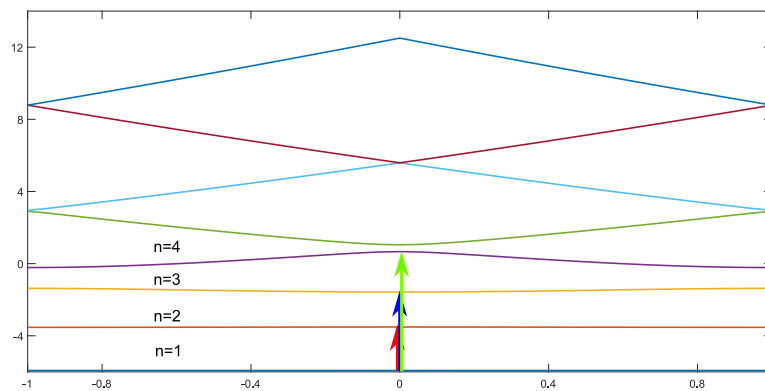


FIGURE 6.2 – Structure de bande du réseau de la figure 6.1, $s=1.7$. Les transitions obtenues dans l'expérience de modulation de phase sont représentées. Les transitions de 1 vers 2 (flèche rouge) et 1 vers 4 (flèche verte) sont autorisées. La résonance obtenue de 1 vers 3 (flèche bleue) est théoriquement interdite; nous supposons que le long temps de modulation et la profondeur faible peuvent permettre à cette transition d'exister.

Comme mentionné plus haut, nous avons fait pour chaque type de modulation (amplitude ou phase) une étude systématique de spectre comme celui présenté en exemple sur la figure 6.1 pour différentes profondeurs. Nous avons comparé les résonances que nous observons en

6.2 Résultats préliminaires

fonction de la profondeur à celles attendues théoriquement en utilisant les règles de sélection. Le résultat de cette étude est présenté sur la figure 6.3. Chaque point correspond à une résonance mesurée expérimentalement pour une profondeur donnée. Nous traçons sur le même graphe les courbes théoriques de l'évolution des résonances en fonction de la profondeur. Pour la modulation de phase, en plus des transitions à Δn impairs (autorisées à un phonon) tracées en ligne pleine, nous rajoutons une transition à Δn pair qui est autorisée à deux phonons. Les résonances des transitions autorisées par modulation de phase sont tracées en tirets. Les résonances des transitions autorisées par modulation d'amplitude sont tracées en tirets. Nous voyons un bon accord entre les prédictions théoriques qui se basent sur les règles de sélection pré-établies dans la première partie de ce chapitre et nos résultats expérimentaux. La modulation de phase permet bien d'induire des transitions à deux phonons, ces processus sont absents de nos résultats pour la modulation d'amplitude. Nous relevons tout de même pour deux profondeurs faibles dans les expériences de modulation de phase la présence de deux résonances théoriquement interdites.

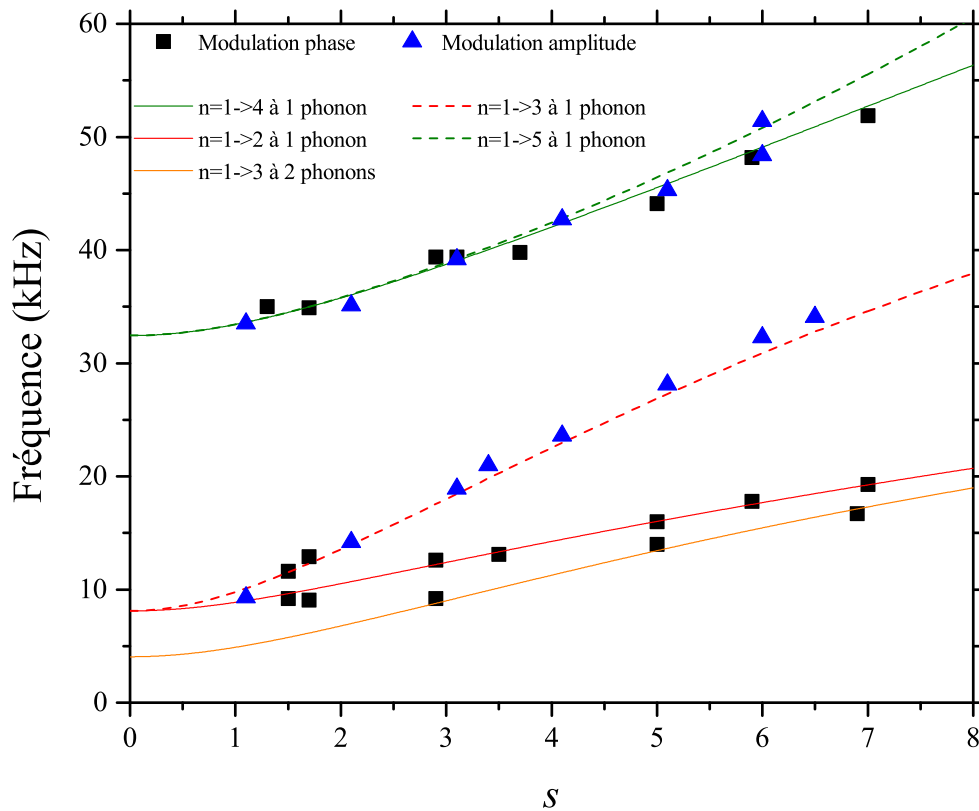


FIGURE 6.3 – Résumé de l'étude de modulation résonante : fréquences des résonances en fonction de la profondeur du réseau. Les carrés correspondent aux points expérimentaux mesurés par modulation de phase, les triangles pour la modulation d'amplitude. Les résonances théoriques des transitions autorisées par modulation de phase sont tracées en ligne pleine et celles autorisées par modulation d'amplitude en tirets.

6.2.2 Rôles des interactions et du confinement extérieur

Pour approfondir notre étude, nous avons cherché à connaître l'influence des interactions et du confinement extérieur sur les spectres de résonances. Pour ce faire, nous avons changé les fréquences de piège du confinement extérieur auquel le réseau est superposé, créant ainsi un confinement plus faible. Une fois le condensat créé, nous éteignons adiabatiquement le faisceau dipolaire verticale; dans la direction du réseau, nous réduisons alors la fréquence de piège environ par un facteur 25. Dans le régime de Thomas-Fermi, la densité atomique s'écrit :

$$n_{TF}(\mathbf{r}) = \frac{1}{g}(\mu_{TF} - V_{ext}(\mathbf{r})) \quad (6.10)$$

avec $V_{ext}(\mathbf{r})$ le potentiel extérieur, g la constante d'interaction et μ_{TF} le potentiel chimique qui dépend des fréquences de pièges ω_i selon :

$$\mu_{TF} \propto \omega^{6/5} \quad (6.11)$$

avec $\omega = (\sum_i \omega_i)^3$. Nous voyons que si nous diminuons la fréquence de piège dans la direction du réseau, la densité du condensat au centre du piège diminuera, la distribution atomique sera alors plus large. Le terme qui rend compte de l'énergie d'interaction dans l'équation de Gross-Pitaevskii dépend de la densité atomique, il sera alors moins important lorsque le piège dipolaire verticale sera éteint. L'ouverture du piège nous permet d'étudier alors l'influence des interactions et du confinement extérieur sur nos expériences de modulation résonantes. Nous avons alors fait deux expériences consécutivement avec les mêmes paramètres, i.e. dans un réseau de même profondeur; dans un cas nous éteignons le piège dipolaire vertical et dans l'autre cas nous le maintenons. Le résultat de cette étude est présenté sur la figure 6.4. Les expériences sont menées avec un réseau de profondeur $s = 3.4$ modulé en amplitude pendant 5 ms. Comme pour les expériences précédentes, nous représentons les populations dans les ordres en fonction de la fréquence de modulation. Nous observons alors que nous obtenons les mêmes résonances, mais dans le cas où le terme d'interaction est plus faible (dans le cas (a) de la figure 6.4) les résonances sont plus fines. Pour comprendre cet effet, nous pouvons étudier la distribution en impulsions du condensat dans le piège décomprimé. Pour ce faire nous prenons la transformée de Fourier de la fonction d'onde $\Psi_{TF} = \sqrt{n_{TF}}$:

$$n_{TF}(\mathbf{p}) = N \frac{15}{16\hbar^3} R^3 \left(\frac{J_2(\tilde{p})}{\tilde{p}^2} \right)^2 \quad (6.12)$$

avec N le nombre d'atomes, J_2 la fonction de Bessel du second ordre, $R = (R_x R_y R_z)^{1/3}$ et $\tilde{p} = \sqrt{p_x^2 R_x^2 + p_y^2 R_y^2 + p_z^2 R_z^2}$ avec :

$$R_i = \sqrt{\frac{2\mu_{TF}}{m\omega_i^2}}. \quad (6.13)$$

La largeur de $n_{TF}(\mathbf{p})$ évolue en $1/R_i$ dans la direction i . Nous comprenons alors que lorsque le piège est plus confinant, R_i diminue et la distribution en impulsions est plus large. Lorsque nous chargeons le réseau, nous remplissons alors plus la bande fondamentale, créant ainsi une zone plus large autour de $k = 0$ dans laquelle nous pouvons induire des transitions. Les résonances que nous obtenons expérimentalement semblent aller dans ce sens. Pour confirmer cet effet, nous avons effectué des simulations numériques basées sur la résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii. La fréquence de modulation ω est normalisée telle que : $\tilde{\omega} = \omega s^2 \pi / 8$.

6.2 Résultats préliminaires

Nous avons alors pu étudier indépendamment l'influence du confinement extérieur et celle des interactions sur le spectre de modulation d'amplitude. Les résultats de cette étude sont donnés sur la figure 6.5

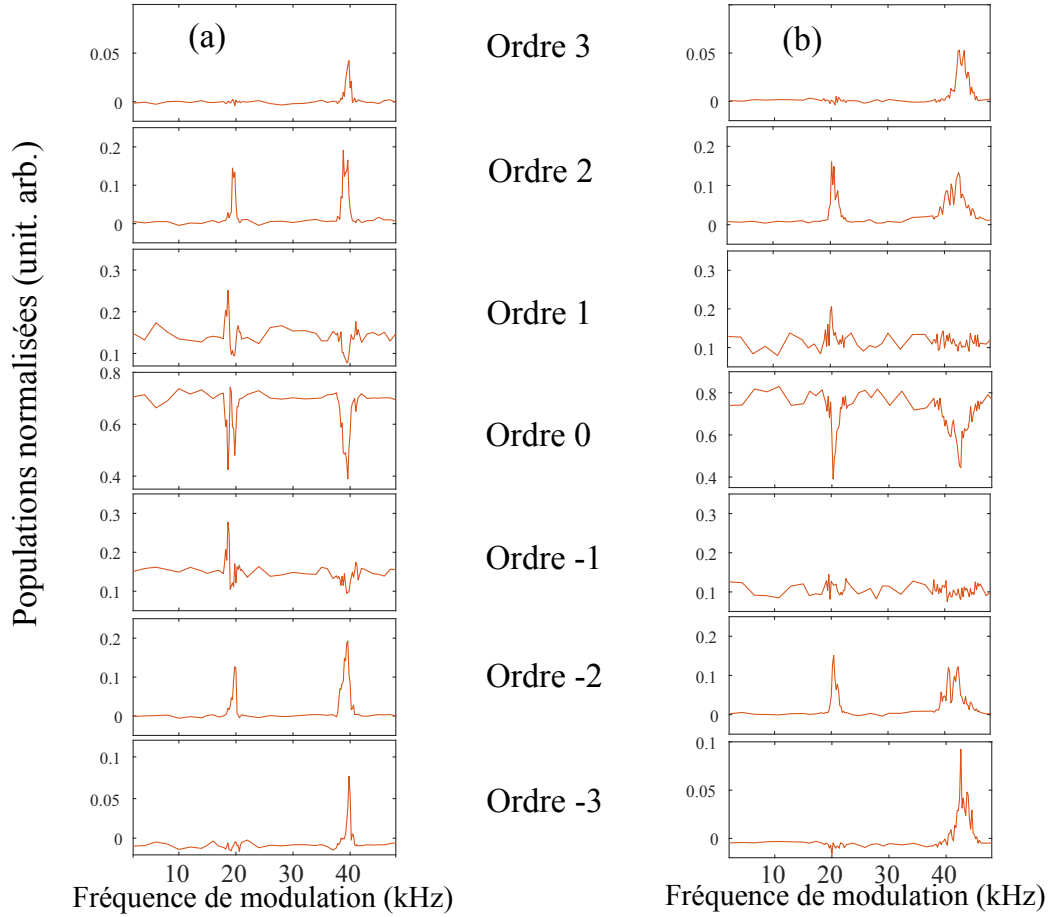


FIGURE 6.4 – *Spectre expérimental en fréquence pour un réseau optique de profondeur $s = 3.4$ modulé en amplitude. (a) : Le piège dipolaire vertical est éteint créant un confinement extérieur faible dans la direction du réseau. (b) : Confinement extérieur habituel, le confinement extérieur est plus important dans la direction du réseau pour ce spectre.*

Les simulations permettent alors de confirmer l'effet des interactions et du confinement extérieur. Nous voyons que l'augmentation du confinement extérieur a pour effet d'élargir les résonances. Nous voyons également qu'en absence d'interaction, une double structure apparaît sur la première résonance du spectre, elle disparaît totalement dans le cas avec interactions. Nous retrouvons donc les mêmes résultats que sur nos données expérimentales. En effet, le premier pic sur l'ordre 0 de la figure 6.4 possède dans le cas du piège le plus ouvert une double structure; cette double structure disparaît sur le spectre pour lequel le confinement extérieur est plus important. Le deuxième pic que nous voyons sur les données expérimentales est plus large dans le cas où les fréquences de pièges sont les plus grandes. Les simulation numériques nous permettent alors d'identifier l'effet des interactions sur le premier pic et l'effet du confinement extérieur sur le deuxième.

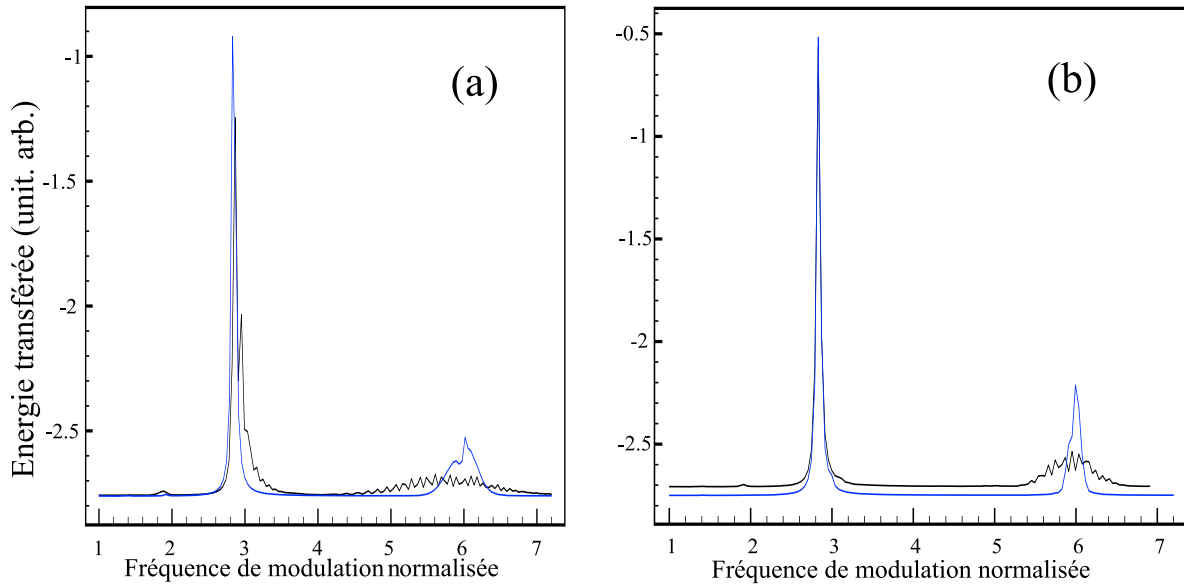


FIGURE 6.5 – Simulation numériques : Spectre en fréquence de modulation d’amplitude normalisée $\tilde{\omega}$, profondeur $s = 3.145$. (a) : Sans interaction. (b) : Avec interactions. Dans les deux cas, ligne bleu : confinement extérieur faible ; ligne noire : confinement extérieur fort.

6.3 Refroidissement dans le réseau

Cette partie est une ouverture sur un sujet que nous sommes en train d’étudier au moment de l’écriture de ce manuscrit à savoir l’utilisation des règles de sélection pour refroidir un nuage dans le réseau optique. Je présente ici l’idée et la méthode actuelle de réalisation. Un développement plus complet sera fait dans la thèse des deux doctorants (Maxime Arnal et Vincent Brunaud) actuellement en première année dans l’équipe.

Comme expliqué dans la première partie, les règles de sélection ont été définies pour des transitions à $k = 0$. Dans le cas de la modulation d’amplitude, cela sous-entend que lorsque nous nous écartons du centre de la bande, nous pouvons induire des transitions vers des états en violant la règle de sélection pré-établie pour $k = 0$. Nous sommes alors partis de cette idée pour développer une méthode de refroidissement du nuage au sein du réseau¹. Le processus est le suivant : nous balayons la fréquence de modulation de sorte à induire des transitions sur toute une bande. Les atomes au centre de la bande, par définition possédant le moins d’énergie, sont protégés par la règle de sélection. Seuls les atomes les plus énergétiques effectueront la transition. Une fois ces atomes excités, nous déchargeons le réseau optique. Les atomes qui ont effectués une transition transforment leur énergie potentielle en énergie cinétique et se déplacent dans le potentiel extérieur. Nous pouvons alors les évaporer du potentiel, du fait qu’ils aient une énergie très supérieure à l’énergie moyenne (en diminuant le potentiel extérieur de sorte à les laisser s’échapper) ou les sélectionner (en effectuant des transitions hyperfines à l’aide d’un couteau RF ou micro-ondes). Une fois ces atomes évaporés, nous pouvons alors remonter la fréquence de piège du potentiel extérieur de sorte à laisser le nuage thermaliser. Après ces opérations, le nuage a une énergie moyenne plus faible qu’avant modulation. Ces opérations constituent une itération du processus d’évaporation dans le

1. L’idée avait été étudiée initialement par Pierrick Cheiney à la fin de sa thèse dans notre équipe.

6.3 Refroidissement dans le réseau

réseau.

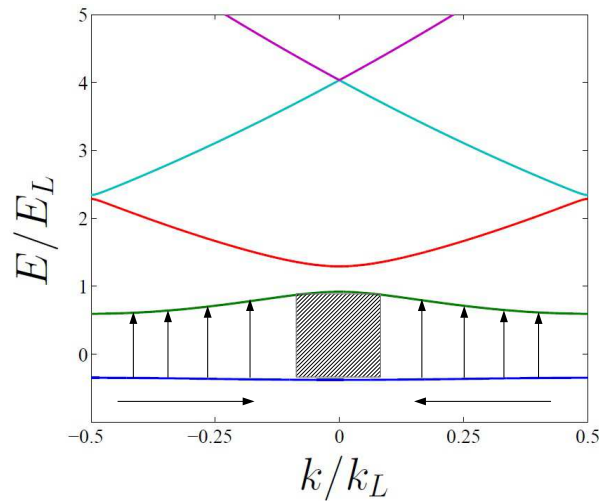


FIGURE 6.6 – Principe de base du refroidissement dans le réseau. En balayant la fréquence de modulation d'amplitude du bord de bande jusqu'au centre, nous pouvons induire des transitions. Les atomes au centre de la bande ne peuvent pas être promus sur la bande excitée grâce à la règle de sélection qui interdit cette transition.

Conclusion

Ce chapitre vient conclure notre étude sur la modulation du réseau. Nous avons vu alors qu'en choisissant la fréquence de modulation nous pouvons induire des transitions interbandes. L'utilisation de la modulation d'amplitude ou de phase nous permet d'accéder à différentes bandes. Comme nous l'avons vu, la modulation d'amplitude possède une règle de sélection stricte pour des transitions à $k = 0$. La modulation de phase ne possède pas de règle de sélection *stricto sensu* puisque seulement au premier ordre. Au deuxième ordre, un processus à deux phonons permet alors les transitions interdites au premier ordre. Nos expériences ont confirmé ces prédictions. Nous avons observé des transitions à un et deux phonons pour la modulation de phase qui couplent des bandes différentes dans les deux cas. Les expériences effectuées par modulation d'amplitude permettent d'observer les transitions attendues en respectant la règle de sélection. Nous avons également relevé expérimentalement que pour des réseaux peu profonds, la symétrie de translation est brisée par le confinement extérieur permettant d'effectuer des transitions théoriquement interdites.

Dans un des projet actuels de l'équipe, nous nous servons de la règle de sélection stricte de la modulation d'amplitude autour de $k = 0$ pour mettre au point une nouvelle technique de refroidissement dans le réseau. La règle de sélection ne s'appliquant pas pour les atomes loin du centre de la bande, nous pouvons balayer la fréquence de sorte à ne sélectionner que les atomes les plus énergétiques, les atomes les plus froids étant protégés par la règle de sélection.

Conclusion

CONCLUSION

Ce manuscrit de thèse résume les travaux que j'ai effectués au cours de mes trois ans de thèse au sein de l'équipe "atomes froids" du laboratoire Collisions Agrégats Réactivité. J'ai organisé mon manuscrit en trois parties : tout d'abord la description du dispositif général puis deux parties de résultats organisés thématiquement.

La première partie présente le dispositif de production de condensat de Bose Einstein de ^{87}Rb . Dans un premier temps, ce chapitre nous a permis d'effectuer un court rappel sur la condensation de Bose Einstein ainsi que d'introduire certains éléments théoriques dont nous nous sommes servis ensuite dans les chapitres suivants. Nous avons ensuite vu la structure générale des étapes de refroidissement laser, des étapes de piégeage magnétique et optique et de refroidissement par évaporation. Un rappel succinct sur le refroidissement par évaporation a été effectué. J'y ai présenté la séquence générale ainsi que des images de condensats typiques que nous obtenons sur notre expérience. Dans la dernière partie de ce chapitre, j'ai décrit la méthode et le dispositif d'imagerie par absorption que nous utilisons sur toutes les expériences, puis j'ai étendu la description à une méthode d'imagerie à haute intensité développée dans l'équipe qui nous a permis d'obtenir l'information sur la densité *in situ* du condensat. Ces résultats sur la densité ont été exploités dans l'étude présentée dans le quatrième chapitre de cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous avons vu le montage expérimental permettant de réaliser le réseau optique. Après avoir effectué un rappel sur la description théorique d'une particule quantique dans un potentiel périodique, ici encore j'ai introduit des notions théoriques générales de la physique des réseaux optiques dont nous avons besoin dans la suite du manuscrit. Ensuite, j'ai présenté le dispositif expérimental créant le réseau optique ainsi que les différents contrôles sur la phase et l'amplitude du réseau que nous avons installés. Enfin, la dernière partie du chapitre s'est concentrée sur la description de deux méthodes typiques de calibration de la profondeur du réseau. La première méthode repose sur la diffraction du condensat par le réseau optique. L'évolution de la figure de diffraction en fonction du temps d'interaction entre le réseau et le condensat permet d'établir une calibration de la profondeur. La deuxième méthode utilise la figure d'interférences obtenue par une coupure instantanée du potentiel de confinement périodique suivi d'une chute libre du condensat.

Dans la deuxième partie de ce manuscrit, nous avons vu les différents résultats que nous avons obtenus en utilisant un saut soudain de la phase du réseau après chargement adiabati-

tique du condensat dans le réseau. J'ai commencé par introduire différents éléments aidant à la compréhension et à la lecture de cette partie. La première partie de ce chapitre présente la nouvelle méthode de calibration que nous avons mise au point en nous servant de l'oscillation résultante du déplacement soudain de la phase. En effet, lorsque nous modifions brusquement la phase du réseau les condensats, initialement au fond des puits du réseau, se retrouvent sur une pente de leurs puits de potentiel respectifs. La chaîne de condensats entame alors une micro-oscillation. En étudiant la période de cette oscillation nous avons vu qu'elle ne dépendait ni des interactions inter-atomiques, ni du potentiel extérieur auquel le réseau est superposé, ni des anharmonicités des puits du réseau, i.e. de l'angle par lequel nous déphasons le réseau. En définitive, la période de cette oscillation est reliée à la structure de bandes d'énergie du réseau et par conséquent elle ne dépend que de la profondeur du réseau. Nous avons alors vu qu'il existe une bijection entre période d'oscillation et profondeur du réseau ; en mesurant cette période, nous pouvons calibrer la profondeur du réseau. Cette méthode est précise sur une plage de profondeurs large.

Nous avons vu dans la deuxième partie du chapitre que la dynamique de l'oscillation est accompagnée par de l'effet tunnel pour des profondeurs suffisamment faible. Lorsque les paquets d'atomes arrivent à un point de rebroussement de leur oscillation, il existe une probabilité non nulle pour une partie du paquet de traverser par effet tunnel la barrière de potentiel séparant deux puits adjacents du réseau. Ce passage par effet tunnel entraîne un retard dans l'oscillation de la partie du paquet d'atomes qui a traversé la barrière de potentiel, par rapport à la partie qui a continué son oscillation dans le puits initial. L'étude expérimentale systématique de la caractérisation de ce temps tunnel a été effectuée. Nous avons également vu dans ce chapitre deux effets dû à la présence d'effet : 1) La séparation du paquet en deux lors d'un événement tunnel joue le rôle d'une lame séparatrice. Après une oscillation complète, notre système possède la géométrie d'un interféromètre de Mach-Zehnder. Les propriétés de cohérence du condensat font que nous sommes en présence d'une chaîne couplée d'interféromètres microscopiques. 2) J'ai présenté une technique permettant de résoudre spatialement deux paquets d'atomes au sein d'un même puits et dont le test a été rendu possible par la présence de la séparation des paquets atomiques que génère l'effet tunnel. En effet, nous avons vu qu'en transposant un problème de l'espace des positions à l'espace des impulsions, il était possible de distinguer les deux paquets d'atomes initialement dans le même puits du réseau.

La dernière partie de ce manuscrit a été consacrée à l'étude de la dynamique du condensat dans des réseaux modulés en phase et en amplitude dans différents régimes de fréquences. En comparant la fréquence de modulation par rapport à la fréquence résonante de la transition entre la bande fondamentale du réseau et la première bande excitée, nous obtenons trois régimes répartis dans trois chapitres :

Dans le régime de basse fréquence de modulation de la phase du réseau, il est possible d'observer une transition de phase dynamique d'un état périodique vers un état anti-périodique. Ce chapitre présente l'étude expérimentale que nous avons menée sur la cinétique de la formation de ces états dit alternés. J'ai présenté d'abord le développement théorique qui permet de rendre compte qualitativement de l'effet de la modulation. La modulation de la phase entraîne en effet une renormalisation du taux tunnel entre sites adjacents du réseau, qui engendre une instabilité dynamique responsable de la transition de phase. Dans la deuxième partie, j'ai décrit la méthode numérique employée pour simuler les expériences. En effet, nous avons vu dans le développement théorique que la transition de phase provenait de la présence

Conclusion

de fluctuations quantiques dans le système ; la méthode Truncated Wigner permet de prendre en compte ces fluctuations sur l'état de départ. Ensuite, j'ai présenté les résultats de notre étude expérimentale en les comparant aux simulations numériques. Nous avons confirmé le rôle des fluctuations quantiques sur la cinétique de la formation. En étudiant la dynamique avec des nuages possédant une température plus élevée, nous avons vu apparaître le rôle des fluctuations thermiques dans le système. Dans la dernière partie, j'ai présenté des résultats qui ne sont pas expliqués pas le développement théorique effectué dans l'approximation à une seule bande qui avait été utilisée jusqu'alors.

Le deuxième chapitre de cette dernière partie présente un résultat obtenu dans le régime de hautes fréquences de modulation de la phase. Dans ce régime, le potentiel perçu par les atomes est moyenné sur une période de modulation : la profondeur du potentiel est renormalisée par une fonction de Bessel qui dépend de l'amplitude de la modulation. J'ai montré les résultats attestant cet effet et j'ai présenté une application de cette renormalisation : lorsque nous changeons subitement la profondeur en changeant l'amplitude de la modulation de sorte à passer d'une profondeur effective positive à une profondeur effective de même valeur absolue mais se retrouvant dans la partie négative de la fonction de Bessel, nous inversons le potentiel tel que les extrema s'inversent. Les atomes initialement au repos au fond du potentiel moyenné se retrouvent sur un maximum du potentiel périodique. Nous avons vu que cette technique permettant de placer les atomes le plus loin de l'équilibre possible pouvait être contrôlé avec une grande précision.

Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, nous avons vu que lorsque nous nous plaçons dans le régime où la fréquence de modulation est résonante avec l'écart en fréquence entre deux bandes d'énergie du réseau, nous pouvons induire des transitions entre ces bandes. J'ai montré que l'utilisation de la modulation de la phase ou de la modulation de l'amplitude entraînait des transitions entre les différentes bandes. En effet, nous avons vu qu'il existe des règles de sélections liées aux symétries alternées des bandes d'énergie. La modulation de phase et la modulation d'amplitude possédant des symétries opposées, nous pouvons induire en utilisant l'une des excitations des transitions interdites par l'autre excitation. Enfin, j'ai présenté une application de ces règles de sélection. En utilisant le fait que les transitions interdites le sont pour $k = 0$, soit à impulsion nulle, les atomes autour de cette zone sont protégés de toutes excitations. Si nous balayons la fréquence de modulation d'un bout à l'autre de la bande fondamentale, nous pouvons induire des transitions pour tous les atomes exceptés ceux qui sont suffisamment proches de la zone autour de $k = 0$, i.e. les atomes les moins énergétiques de la distribution. Nous pouvons mettre à profit cette sélectivité pour une technique de refroidissement d'un nuage atomique au sein d'un réseau optique.

Perspectives

Les perspectives à court terme de l'équipe sont claires : pour les expériences de refroidissement dans le réseau, nous cherchons essentiellement un jeu de paramètres permettant d'optimiser l'effet de refroidissement. Nous étudions l'influence de la profondeur et comparons l'efficacité du refroidissement avec différentes transitions entre bandes, par exemple en transférant les atomes vers des bandes liées ou non. Il est également important de minimiser l'effet des collisions entre le nuage et les particules les plus énergétiques ; en effet ces collisions induisent une augmentation de la température du nuage et peuvent annuler l'effet de refroidissement. Nous poursuivons l'investigation de ce sujet.

L'objectif à long terme de l'équipe est d'étudier un problème de transport quantique dans un système qui engendre des trajectoires classiques chaotiques. Lorsque l'amplitude du réseau est modulée fortement, l'espace des phases du système classique correspondant devient mixte ; il possède alors des trajectoires stables ainsi que des zones chaotiques comme représentée sur la figure 6.7 . En augmentant l'amplitude de la modulation, il est alors possible de rendre instable le fond des puits et de voir alors apparaître deux nouvelles zones de stabilité réparties symétriquement sur les côtés du puits. Maintenant que nous possédons et avons testé toutes les techniques permettant de contrôler et moduler la phase et l'amplitude du réseau, l'équipe a pour but dans un premier temps d'observer la bifurcation entre la zone de stabilité centrale et les deux nouvelles zones qui apparaissent. Le contrôle de la phase nous permet également de pouvoir placer, une fois la bifurcation réalisée, les atomes dans une des zones de stabilités. Il nous est possible de distinguer la position du paquet dans le puits grâce à la technique du microscope par rotation dans l'espace des phases présentée dans ce manuscrit. L'équipe aimerait étudier le transport quantique entre les deux zones de stabilités et le transport entre zones de stabilités de deux puits adjacents. La probabilité de transport dépend fortement des états de la mer chaotique, on parle alors d'effet tunnel assisté par le chaos. Lorsque que l'on change un paramètre du système, comme l'amplitude de la modulation, le taux tunnel varie de plusieurs ordres de grandeur. Ces études seront présentées dans les thèses de Maxime Arnal, Vincent Brunaud, étudiants en première année de thèse, et Gabriel Chatelain actuellement en stage de Master 2 et qui rejoindra l'équipe en tant que doctorant en octobre 2018.

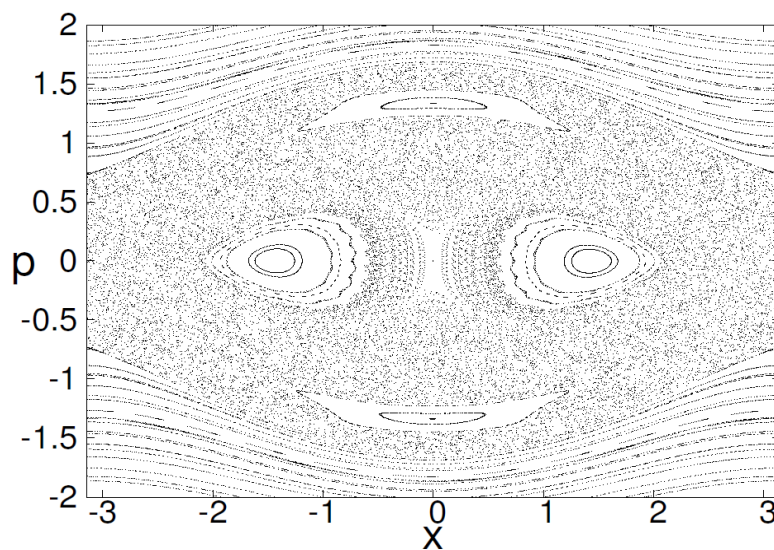


FIGURE 6.7 – *Espace des phases stroboscopiques mixtes. Nous voyons deux îlots de stabilités contenant des trajectoires stables de part et d'autre de l'origine pour des positions x symétriques. Le transport s'effectue alors entre ces deux îlots.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. COHEN-TANNOUDJI, *Nobel lecture : Manipulating atoms with photons*. Reviews of Modern Physics **70** (1998)p. 707.
- [2] S. CHU, *Nobel lecture : The manipulation of neutral particles*. Reviews of Modern Physics **70** (1998)p. 685.
- [3] W. D. PHILLIPS, *Nobel lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms*. Reviews of Modern Physics **70** (1998)p. 721.
- [4] C. COHEN-TANNOUDJI, *Atomes ultrafroids - piègeage non dissipatif et refroidissement évaporatif*. Cours du collège de France (1998).
- [5] H. F. HESS, *Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen*. Phys. Rev. B **34** (1986)pp. 3476–3479.
- [6] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN, AND E. A. CORNELL, *Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor*. Science **269** (1995)pp. 198–201.
- [7] K. B. DAVIS, M.-O. MEWES, M. R. ANDREWS, N. VAN DRUTEN, D. DURFEE, D. KURN, AND W. KETTERLE, *Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms*. Physical review letters **75** (1995)p. 3969.
- [8] L. PITAEVSKII AND S. STRINGARI, *Bose Einstein condensation and superfluidity*, Oxford science publications, 2016.
- [9] A. EINSTEIN, *Quantum theory of the monoatomic ideal gas*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss **1** (1925)p. 3.
- [10] A. CHIKKATUR, A. GÖRLITZ, D. STAMPER-KURN, S. INOUYE, S. GUPTA, AND W. KETTERLE, *Suppression and enhancement of impurity scattering in a bose-einstein condensate*. Physical review letters **85** (2000)p. 483.
- [11] C. RAMAN, M. KÖHL, R. ONOFRIO, D. DURFEE, C. KUKLEWICZ, Z. HADZIBABIC, AND W. KETTERLE, *Evidence for a critical velocity in a bose-einstein condensed gas*. Physical Review Letters **83** (1999)p. 2502.
- [12] R. ONOFRIO, C. RAMAN, J. VOGELS, J. ABO-SHAER, A. CHIKKATUR, AND W. KETTERLE, *Observation of superfluid flow in a bose-einstein condensed gas*. Physical Review Letters **85** (2000)p. 2228.

- [13] K. W. MADISON, F. CHEVY, V. BRETIN, AND J. DALIBARD, *Stationary states of a rotating bose-einstein condensate : Routes to vortex nucleation*. Phys. Rev. Lett. **86** (2001)pp. 4443–4446.
- [14] P. ROSENBUSCH, V. BRETIN, AND J. DALIBARD, *Dynamics of a single vortex line in a bose-einstein condensate*. Phys. Rev. Lett. **89** (2002)p. 200403.
- [15] I. BLOCH, T. W. HÄNSCH, AND T. ESSLINGER, *Atom laser with a cw output coupler*. Phys. Rev. Lett. **82** (1999)pp. 3008–3011.
- [16] N. R. THOMAS, N. KJÆRGAARD, P. S. JULIENNE, AND A. C. WILSON, *Imaging of s and d partial-wave interference in quantum scattering of identical bosonic atoms*. Physical review letters **93** (2004)p. 173201.
- [17] C. BUGGLE, J. LÉONARD, W. VON KLITZING, AND J. WALRAVEN, *Interferometric determination of the s and d-wave scattering amplitudes in r b 87*. Physical review letters **93** (2004)p. 173202.
- [18] L. KHAYKOVICH, F. SCHRECK, G. FERRARI, T. BOURDEL, J. CUBIZOLLES, L. D. CARR, Y. CASTIN, AND C. SALOMON, *Formation of a matter-wave bright soliton*. Science **296** (2002)pp. 1290–1293.
- [19] O. FRANCIS, H. BAUMANN, T. VOLARIK, C. ROTHLEITNER, G. KLEIN, M. SEIL, N. DANDO, R. TRACEY, C. ULLRICH, S. CASTELEIN, ET AL., *The european comparison of absolute gravimeters 2011 (eag-2011) in walferdange, luxembourg : results and recommendations*. Metrologia **50** (2013)p. 257.
- [20] B. BARRETT, L. ANTONI-MICOLLIER, L. CHICHET, B. BATTELIER, T. LEVEQUE, A. LANDRAGIN, AND P. BOUYER, *Dual matter-wave inertial sensors in weightlessness*. Nature communications **7** (2016)p. 13786.
- [21] L. ZHOU, S. LONG, B. TANG, X. CHEN, F. GAO, W. PENG, W. DUAN, J. ZHONG, Z. XIONG, J. WANG, ET AL., *Test of equivalence principle at 10⁻⁸ level by a dual-species double-diffraction raman atom interferometer*. Physical review letters **115** (2015)p. 013004.
- [22] R. P. FEYNMAN, *Simulating physics with computers*. International journal of theoretical physics **21** (1982)pp. 467–488.
- [23] C. GROSS AND I. BLOCH, *Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices*. Science **357** (2017)pp. 995–1001.
- [24] I. BLOCH, J. DALIBARD, AND S. NASCIMBENE, *Quantum simulations with ultracold quantum gases*. Nature Physics **8** (2012)p. 267.
- [25] J. DALIBARD, *Réseaux optiques : Principes de base*. Cours du collège de France (2013).
- [26] —, *Réseaux optiques dans le régime des liaisons fortes*. Cours du collège de France (2013).
- [27] K. LE HUR AND T. M. RICE, *Superconductivity close to the mott state : From condensed-matter systems to superfluidity in optical lattices*. Annals of Physics **324** (2009)pp. 1452–1515.
- [28] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH, AND I. BLOCH, *Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms*. nature **415** (2002)p. 39.
- [29] J. BILLY, V. JOSSE, Z. ZUO, A. BERNARD, B. HAMBRECHT, P. LUGAN, D. CLÉMENT, L. SANCHEZ-PALENCIA, P. BOUYER, AND A. ASPECT, *Direct observation of anderson localization of matter waves in a controlled disorder*. Nature **453** (2008)p. 891.

BIBLIOGRAPHIE

- [30] J. CHABÉ, G. LEMARIÉ, B. GRÉMAUD, D. DELANDE, P. SZRIFTGISER, AND J. C. GARREAU, *Experimental observation of the anderson metal-insulator transition with atomic matter waves*. Phys. Rev. Lett. **101** (2008)p. 255702.
- [31] R. JÖRDENS, N. STROHMAIER, K. GÜNTER, H. MORITZ, AND T. ESSLINGER, *A mott insulator of fermionic atoms in an optical lattice*. Nature **455** (2008)pp. 204 EP –.
- [32] U. SCHNEIDER, L. HACKERMÜLLER, S. WILL, T. BEST, I. BLOCH, T. A. COSTI, R. W. HELMES, D. RASCH, AND A. ROSCH, *Metallic and insulating phases of repulsively interacting fermions in a 3d optical lattice*. Science **322** (2008)pp. 1520–1525.
- [33] E. COCCHI, L. A. MILLER, J. H. DREWES, M. KOSCHORRECK, D. PERTOT, F. BRENNECKE, AND M. KÖHL, *Equation of state of the two-dimensional hubbard model*. Phys. Rev. Lett. **116** (2016)p. 175301.
- [34] C. CHIN, R. GRIMM, P. JULIENNE, AND E. TIESINGA, *Feshbach resonances in ultracold gases*. Reviews of Modern Physics **82** (2010)p. 1225.
- [35] E. FRAKIDIN, *Field theories of condensed matter physics*, Cambridge University Press, 2013.
- [36] A. E. FEIGUIN, F. HEIDRICH-MEISNER, G. ORSO, AND W. ZWERGER, *BCS–BEC Crossover and Unconventional Superfluid Order in One Dimension*, Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [37] T. FUKUHARA, S. HILD, J. ZEIHNER, P. SCHAUSS, I. BLOCH, M. ENDRES, AND C. GROSS, *Spatially resolved detection of a spin-entanglement wave in a bose-hubbard chain*. Physical review letters **115** (2015)p. 035302.
- [38] J. STRUCK, C. ÖLSCHLÄGER, R. LE TARGAT, P. SOLTAN-PANAHI, A. ECKARDT, M. LEWENSTEIN, P. WINDPASSINGER, AND K. SENGSTOCK, *Quantum simulation of frustrated classical magnetism in triangular optical lattices*. Science **333** (2011)pp. 996–999.
- [39] J. STRUCK, M. WEINBERG, C. ÖLSCHLÄGER, P. WINDPASSINGER, J. SIMONET, K. SENGSTOCK, R. HÖPPNER, P. HAUKE, A. ECKARDT, M. LEWENSTEIN, ET AL., *Engineering ising-xy spin-models in a triangular lattice using tunable artificial gauge fields*. Nature Physics **9** (2013)p. 738.
- [40] G. JOTZU, M. MESSER, R. DESBUQUOIS, M. LEBRAT, T. UEHLINGER, D. GREIF, AND T. ESSLINGER, *Experimental realization of the topological haldane model with ultracold fermions*. Nature (2014).
- [41] N. GOLDMAN AND J. DALIBARD, *Periodically driven quantum systems : Effective hamiltonians and engineered gauge fields*. Phys. Rev. X **4** (2014)p. 031027.
- [42] N. GEMELKE, E. SARAJLIC, Y. BIDEL, S. HONG, AND S. CHU, *Parametric amplification of matter waves in periodically translated optical lattices*. Phys. Rev. Lett. **95** (2005)p. 170404.
- [43] E. KIERIG, U. SCHNORRBERGER, A. SCHIETINGER, J. TOMKOVIC, AND M. K. OBERTHALER, *Single-particle tunneling in strongly driven double-well potentials*. Phys. Rev. Lett. **100** (2008)p. 190405.
- [44] H. LIGNIER, C. SIAS, D. CIAMPINI, Y. SINGH, A. ZENESINI, O. MORSCH, AND E. ARIMONDO, *Dynamical control of matter-wave tunneling in periodic potentials*. Phys. Rev. Lett. **99** (2007)p. 220403.

- [45] Y. AHARONOV AND D. BOHM, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*. Physical Review **115** (1959)p. 485.
- [46] L. DUCA, T. LI, M. REITTER, I. BLOCH, M. SCHLEIER-SMITH, AND U. SCHNEIDER, *An aharonov-bohm interferometer for determining bloch band topology*. Science (2014).
- [47] D. R. HOFSTADTER, *Energy levels and wave functions of bloch electrons in rational and irrational magnetic fields*. Physical Review B **14** (1976)p. 2239.
- [48] M. AIDELSBURGER, M. ATALA, M. LOHSE, J. T. BARREIRO, B. PAREDES, AND I. BLOCH, *Realization of the hofstadter hamiltonian with ultracold atoms in optical lattices*. Phys. Rev. Lett. **111** (2013)p. 185301.
- [49] H. MIYAKE, G. A. SIVILOGLOU, C. J. KENNEDY, W. C. BURTON, AND W. KETTERLE, *Realizing the harper hamiltonian with laser-assisted tunneling in optical lattices*. Phys. Rev. Lett. **111** (2013)p. 185302.
- [50] M. AIDELSBURGER, M. LOHSE, C. SCHWEIZER, M. ATALA, J. . T. BARREIRO, S. NASCIMBÈNE, N. . R. COOPER, I. BLOCH, AND N. GOLDMAN, *Measuring the chern number of hofstadter bands with ultracold bosonic atoms*. Nature Physics **11** (2014)pp. 162 EP –.
- [51] F. D. M. HALDANE, *Model for a quantum hall effect without landau levels : Condensed-matter realization of the "parity anomaly"*. Phys. Rev. Lett. **61** (1988)pp. 2015–2018.
- [52] C. V. PARKER, L.-C. HA, AND C. CHIN, *Direct observation of effective ferromagnetic domains of cold atoms in a shaken optical lattice*. Nature Physics **9** (2013)pp. 769 EP –.
- [53] F. GÖRG, M. MESSER, K. SANDHOLZER, G. JOTZU, R. DESBUQUOIS, AND T. ESSLINGER, *Enhancement and sign change of magnetic correlations in a driven quantum many-body system*. Nature **553** (2018)pp. 481 EP –.
- [54] T. GERICKE, P. WÜRTZ, D. REITZ, T. LANGEN, AND H. OTT, *High-resolution scanning electron microscopy of an ultracold quantum gas*. Nature Physics **4** (2008)p. 949.
- [55] W. S. BAKR, J. I. GILLEN, A. PENG, S. FÖLLING, AND M. GREINER, *A quantum gas microscope for detecting single atoms in a hubbard-regime optical lattice*. Nature **462** (2009)pp. 74 EP –.
- [56] J. F. SHERSON, C. WEITENBERG, M. ENDRES, M. CHENEAU, I. BLOCH, AND S. KUHR, *Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic mott insulator*. Nature **467** (2010)pp. 68 EP –.
- [57] D. BARREDO, S. DE LÉSÉLEUC, V. LIENHARD, T. LAHAYE, AND A. BROWAEYS, *An atom-by-atom assembler of defect-free arbitrary two-dimensional atomic arrays*. Science **354** (2016)pp. 1021–1023.
- [58] M. G. RAIZEN, F. L. MOORE, J. C. ROBINSON, C. F. BHARUCHA, AND B. SUNDARAM, *An experimental realization of the quantum-kicked rotor*. Quantum and Semi-classical Optics : Journal of the European Optical Society Part B **8** (1996)p. 687.
- [59] S. TOMSOVIC AND D. ULLMO, *Chaos-assisted tunneling*. Phys. Rev. E **50** (1994)pp. 145–162.
- [60] R. DUBERTRAND, J. BILLY, D. GUÉRY-ODELIN, B. GEORGEOT, AND G. LEMARIÉ, *Routes towards the experimental observation of the large fluctuations due to chaos-assisted tunneling effects with cold atoms*. Phys. Rev. A **94** (2016)p. 043621.

BIBLIOGRAPHIE

- [61] E. V. H. DOGGEN, B. GEORGEOT, AND G. LEMARIÉ, *Chaos-assisted tunneling in the presence of anderson localization*. Phys. Rev. E **96** (2017)p. 040201.
- [62] A. FORTUN, *Dynamique hors équilibre d'un condensat de Bose Einstein dans un réseau dépendant du temps*, PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse, 2016.
- [63] C. CABRERA-GUTIÉRREZ, E. MICHON, V. BRUNAUD, T. KAWALEC, A. FORTUN, M. ARNAL, J. BILLY, AND D. GUÉRY-ODELIN, *Robust calibration of an optical-lattice depth based on a phase shift*. Phys. Rev. A **97** (2018)p. 043617.
- [64] A. FORTUN, C. CABRERA-GUTIÉRREZ, G. CONDON, E. MICHON, J. BILLY, AND D. GUÉRY-ODELIN, *Direct tunneling delay time measurement in an optical lattice*. Phys. Rev. Lett. **117** (2016)p. 010401.
- [65] E. MICHON, C. CABRERA-GUTIÉRREZ, A. FORTUN, M. BERGER, M. ARNAL, V. BRUNAUD, J. BILLY, C. PETITJEAN, P. SCHLAGHECK, AND D. GUÉRY-ODELIN, *Phase transition kinetics for a bose einstein condensate in a periodically driven band system*. New Journal of Physics **20** (2018)p. 053035.
- [66] G. CONDON, *Condensation de Bose Einstein : des potentiels périodiques d'extension finie aux manipulation dans l'espace des phases*, PhD thesis, Université Paul Sabatier Toulouse, 2015.
- [67] E. L. RAAB, M. PRENTISS, A. CABLE, S. CHU, AND D. E. PRITCHARD, *Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure*. Phys. Rev. Lett. **59** (1987)pp. 2631–2634.
- [68] J.-F. CLÉMENT, *Production of a Bose-Einstein condensate in a 1565 nm optical-dipole trap*, theses, Université Paris Sud - Paris XI, Nov. 2008.
- [69] C. COHEN-TANNOUJDI AND D. GUÉRY-ODELIN, *Advances in Atomic Physics*, World Scientific.
- [70] R. GRIMM, M. WEIDEMÜLLER, AND Y. B. OVCHINNIKOV, *Optical dipole traps for neutral atoms* **42** (2000)pp. 95 – 170.
- [71] G. REINAUDI, *Manipulation and evaporative cooling of ultra cold atomic packets for the production of a continuous and intense beam in the degenerate regime : towards the "continuous atom laser"*, theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008.
- [72] Y. CASTIN AND R. DUM, *Bose-einstein condensates in time dependent traps*. Phys. Rev. Lett. **77** (1996)pp. 5315–5319.
- [73] R. DUBESSY, C. D. ROSSI, T. BADR, L. LONGCHAMBON, AND H. PERRIN, *Imaging the collective excitations of an ultracold gas using statistical correlations*. New Journal of Physics **16** (2014)p. 122001.
- [74] I. BLOCH, J. DALIBARD, AND S. NASCIMBÈNE, *Quantum simulations with ultracold quantum gases*. Nature Physics **8** (2012)pp. 267 EP –. Review Article.
- [75] T. BOURDEL, L. KHAYKOVICH, J. CUBIZOLLES, J. ZHANG, F. CHEVY, M. TEICHMANN, L. TARRUELL, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, AND C. SALOMON, *Experimental study of the bec-bcs crossover region in lithium 6*. Phys. Rev. Lett. **93** (2004)p. 050401.
- [76] Y.-J. LIN, R. L. COMPTON, K. JIMÉNEZ-GARCÍA, J. V. PORTO, AND I. B. SPIELMAN, *Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms*. Nature **462** (2009)pp. 628 EP –.
- [77] M. LEWENSTEIN, A. SANPERA, V. AHUFINGER, B. DAMSKI, A. SEN(De), AND U. SEN, *Ultracold atomic gases in optical lattices : mimicking condensed matter physics and beyond*. Advances in Physics **56** (2007)pp. 243–379.

- [78] F. DAMON, *Probing complex structures with matter waves*, theses, Université Paul Sabatier, Sept. 2015.
- [79] N. ASHCROFT AND N. MERMIN, *Solid state physics*, Holt, Rinehart and Winston, 1976.
- [80] O. MORSCH AND M. OBERTHALER, *Dynamics of bose-einstein condensates in optical lattices*. Rev. Mod. Phys. **78** (2006)pp. 179–215.
- [81] F. BLOCH, *Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern*. Zeitschrift für Physik **52** (1929)pp. 555–600.
- [82] P. CHEINEY, F. DAMON, G. CONDON, B. GEORGEOT, AND D. GUÉRY-ODELIN, *Realization of tunnel barriers for matter waves using spatial gaps*. EPL (Europhysics Letters) **103** (2013)p. 50006.
- [83] F. DAMON, G. CONDON, P. CHEINEY, A. FORTUN, B. GEORGEOT, J. BILLY, AND D. GUÉRY-ODELIN, *Band-gap structures for matter waves*. Phys. Rev. A **92** (2015)p. 033614.
- [84] F. CHARLOTTE, *Miroirs de Bragg pour ondes de matières et apport de la supersymétrie aux potentiels exponentiels*, theses, Université Paul Sabatier, Sept. 2012.
- [85] P. L. KAPITZA AND P. A. M. DIRAC, *The reflection of electrons from standing light waves*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **29** (1933)p. 297–300.
- [86] Y. B. OVCHINNIKOV, J. H. MÜLLER, M. R. DOERY, E. J. D. VREDENBREGT, K. HELMERSON, S. L. ROLSTON, AND W. D. PHILLIPS, *Diffraction of a released bose-einstein condensate by a pulsed standing light wave*. Phys. Rev. Lett. **83** (1999)pp. 284–287.
- [87] M. HORNE, I. JEX, AND A. ZEILINGER, *Schrödinger wave functions in strong periodic potentials with applications to atom optics*. Phys. Rev. A **59** (1999)pp. 2190–2202.
- [88] M. MATHIEU, *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **13** (1868)pp. 137–203.
- [89] N. W. MCLACHLAN, *Theory and application of Mathieu functions*, Clarendon Press, Oxford, 1951.
- [90] M. CRISTIANI, O. MORSCH, J. H. MÜLLER, D. CIAMPINI, AND E. ARIMONDO, *Experimental properties of bose-einstein condensates in one-dimensional optical lattices : Bloch oscillations, landau-zenner tunneling, and mean-field effects*. Phys. Rev. A **65** (2002)p. 063612.
- [91] Z. HADZIBABIC, S. STOCK, B. BATTELIER, V. BRETIN, AND J. DALIBARD, *Interference of an array of independent bose-einstein condensates*. Phys. Rev. Lett. **93** (2004)p. 180403.
- [92] P. PEDRI, L. PITAEVSKII, S. STRINGARI, C. FORT, S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, P. MADDALONI, F. MINARDI, AND M. INGUSCIO, *Expansion of a coherent array of bose-einstein condensates*. Phys. Rev. Lett. **87** (2001)p. 220401.
- [93] S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, C. FORT, F. MINARDI, M. INGUSCIO, M. L. CHIOFALO, AND M. P. TOSI, *Superfluid and dissipative dynamics of a bose-einstein condensate in a periodic optical potential*. Phys. Rev. Lett. **86** (2001)pp. 4447–4450.
- [94] F. S. CATALIOTTI, S. BURGER, C. FORT, P. MADDALONI, F. MINARDI, A. TROMBETTONI, A. SMERZI, AND M. INGUSCIO, *Josephson junction arrays with bose-einstein condensates*. Science **293** (2001)pp. 843–846.

BIBLIOGRAPHIE

- [95] C. D. FERTIG, K. M. O’HARA, J. H. HUCKANS, S. L. ROLSTON, W. D. PHILLIPS, AND J. V. PORTO, *Strongly inhibited transport of a degenerate 1d bose gas in a lattice*. Phys. Rev. Lett. **94** (2005)p. 120403.
- [96] A. D. JACKSON, G. M. KAVOULAKIS, AND C. J. PETHICK, *Solitary waves in clouds of bose-einstein condensed atoms*. Phys. Rev. A **58** (1998)pp. 2417–2422.
- [97] X. ANTOINE AND R. DUBOSCQ, *Gpelab, a matlab toolbox to solve gross-pitaevskii equations i : Computation of stationary solutions*. Computer Physics Communications **185** (2014)pp. 2969 – 2991.
- [98] ———, *Gpelab, a matlab toolbox to solve gross-pitaevskii equations ii : Dynamics and stochastic simulations*. Computer Physics Communications **193** (2015)pp. 95 – 117.
- [99] P. GUÉRET, A. BARATOFF, AND E. MARCLAY, *Effect of a transverse magnetic field on the tunnel current through thick and low semiconductor barriers*. EPL (Europhysics Letters) **3** (1987)p. 367.
- [100] A. S. LANDSMAN, M. WEGER, J. MAURER, R. BOGE, A. LUDWIG, S. HEUSER, C. CIRELLI, L. GALLMANN, AND U. KELLER, *Ultrafast resolution of tunneling delay time*. Optica **1** (2014)pp. 343–349.
- [101] M. RAZAVY, *Quantum theory of tunneling*, World Scientific, Oxford, 2003.
- [102] M. BÜTTIKER AND R. LANDAUER, *Traversal time for tunneling*. Phys. Rev. Lett. **49** (1982)pp. 1739–1742.
- [103] I. CARUSOTTO, L. PITAEVSKII, S. STRINGARI, G. MODUGNO, AND M. INGUSCIO, *Sensitive measurement of forces at the micron scale using bloch oscillations of ultracold atoms*. Phys. Rev. Lett. **95** (2005)p. 093202.
- [104] M. REITTER, J. NÄGER, K. WINTERSPERGER, C. STRÄTER, I. BLOCH, A. ECKARDT, AND U. SCHNEIDER, *Interaction dependent heating and atom loss in a periodically driven optical lattice*. Phys. Rev. Lett. **119** (2017)p. 200402.
- [105] R. J. GLAUBER, *Coherent and incoherent states of the radiation field*. Phys. Rev. **131** (1963)pp. 2766–2788.
- [106] K. M. HILLIGSØE AND K. MØLMER, *Phase-matched four wave mixing and quantum beam splitting of matter waves in a periodic potential*. Phys. Rev. A **71** (2005)p. 041602.
- [107] G. K. CAMPBELL, J. MUN, M. BOYD, E. W. STREED, W. KETTERLE, AND D. E. PRITCHARD, *Parametric amplification of scattered atom pairs*. Phys. Rev. Lett. **96** (2006)p. 020406.
- [108] S. LELLOUCH AND N. GOLDMAN, *Parametric instabilities in resonantly-driven bose-einstein condensates*. Quantum Science and Technology **3** (2018)p. 024011.
- [109] Y. CASTIN AND R. DUM, *Low-temperature bose-einstein condensates in time-dependent traps : Beyond the u(1) symmetry-breaking approach*. Phys. Rev. A **57** (1998)pp. 3008–3021.
- [110] C. GARDINER AND P. ZOLLER, *Quantum noise*, Springer, 2004.
- [111] J. DUJARDIN, A. ARGÜELLES, AND P. SCHLAGHECK, *Elastic and inelastic transmission in guided atom lasers : A truncated wigner approach*. Phys. Rev. A **91** (2015)p. 033614.
- [112] D. JULIEN, *Coherence and many-body effects in the transport of Bose-Einstein condensates*, theses, Université de Liège, 2016.

- [113] C. GARDINER, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry, and the Natural Sciences*, Springer, 2004.
- [114] L. LANDAU AND E. LIFSCHITZ, *Quantum mechanics*, Pergamon, Oxford, 1965.
- [115] A. GARG, *Topologically quenched tunnel splitting in spin systems without kramers' degeneracy*. EPL (Europhysics Letters) **22** (1993)p. 205.
- [116] T. PAUL, P. LEBOEUF, N. PAVLOFF, K. RICHTER, AND P. SCHLAGHECK, *Nonlinear transport of bose-einstein condensates through waveguides with disorder*. Phys. Rev. A **72** (2005)p. 063621.
- [117] M. WEINBERG, C. ÖLSCHLÄGER, C. STRÄTER, S. PRELLE, A. ECKARDT, K. SENGSTOCK, AND J. SIMONET, *Multiphoton interband excitations of quantum gases in driven optical lattices*. Phys. Rev. A **92** (2015)p. 043621.

Direct Tunneling Delay Time Measurement in an Optical Lattice

A. Fortun, C. Cabrera-Gutiérrez, G. Condon, E. Michon, J. Billy, and D. Guéry-Odelin
Laboratoire Collisions, Agrégats, Réactivité, IRSAMC, Université de Toulouse, CNRS, UPS, France
 (Received 11 March 2016; revised manuscript received 20 May 2016; published 27 June 2016)

We report on the measurement of the time required for a wave packet to tunnel through the potential barriers of an optical lattice. The experiment is carried out by loading adiabatically a Bose-Einstein condensate into a 1D optical lattice. A sudden displacement of the lattice by a few tens of nanometers excites the micromotion of the dipole mode. We then directly observe in momentum space the splitting of the wave packet at the turning points and measure the delay between the reflected and the tunneled packets for various initial displacements. Using this atomic beam splitter twice, we realize a chain of coherent micron-size Mach-Zehnder interferometers at the exit of which we get essentially a wave packet with a negative momentum, a result opposite to the prediction of classical physics.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.117.010401

The question of the time required for a particle to tunnel through a barrier was addressed in the early days of quantum mechanics [1]. The first quantitative study providing a finite tunneling time dates back to 1962 [2]. The difficulty to define such a time lies in the fact that time is not in general associated with an ordinary observable in quantum mechanics [3]. As a result there is not a unique definition of tunneling time (see the discussion in Ref. [4]).

Experimentally, this question was addressed in condensed matter, attosecond physics, and optics. In condensed matter physics, it has been investigated when performing time measurements in electronic systems on a subnanosecond time scale. Such studies have been carried out for instance in GaAs/GaAlAs heterostructures [5] and in biased Josephson junctions [6].

More recently, attosecond tunneling spectroscopy shed light on how electrons quit their atomic binding potential under the action of a strong optical field. Such experiments constitute a real-time observation of light-induced electron tunneling on a time scale of a few hundreds of attoseconds [7,8], and even a few tens of attoseconds with angular streaking techniques [9].

The tunnel problem in quantum mechanics can also be mapped on a wide number of situations in electromagnetism including frustrated total internal reflection [10,11], transmission in 1D photonic band gaps [12,13], or transmission through a waveguide beyond the cutoff [14]. The corresponding time scales are nanoseconds for microwaves and femtoseconds in the visible range. These experiments brought to the fore the question of superluminal motions.

The tunnel effect plays a key role in the dynamics of degenerate gases trapped in optical lattices [15,16]. The tunneling rate J can be directly measured *in situ* [17] and engineered by an appropriate shaking of the periodic potential to design effective Hamiltonians and produce synthetic gauge fields [18–20]. The interplay between the tunneling rate and interactions is at the heart of the many

body physics investigated with cold atoms in optical lattices [21–24], including in the presence of dissipation [25]. However, to date, no direct tunneling time measurement has been performed in this domain.

In this Letter, we propose a direct measurement of the tunneling time of massive particles by studying the out-of-equilibrium dynamics of a chain of coupled Bose-Einstein condensates (BECs) in an optical lattice. In contrast with the methods explored in other fields, we choose parameters so that roughly half the wave packet tunnels through the barrier at the first turning point. Using both the quasi-isochronism of oscillations in the lattice and the packet that has not tunneled as a reference, we infer precisely the duration of the tunneling process, which could be up to 27 μ s, i.e., 1/4 of the oscillation period.

Our experiment starts with a rubidium-87 BEC produced in a hybrid trap [26]. In short, 2×10^9 atoms from a magneto-optical trap are loaded into a magnetic quadrupole whose gradient is ramped up to 1.8 T/m. Microwave evaporation is then performed over 15 s to decrease the temperature from 300 to 30 μ K. Atoms are subsequently transferred to a crossed dipole trap, formed by two 1064 nm laser beams, which are respectively aligned along a horizontal axis and at 35° from the vertical, while maintaining a magnetic gradient that approximately compensates for the gravity. The evaporation in this latter trap yields a pure BEC of 10^5 atoms in the low field seeker state $F = 1$, $m_F = -1$.

We then superimpose to the horizontal guide a 1D optical lattice made of two counter-propagating laser beams at 1064 nm (lattice spacing $d = 532$ nm). The lattice is switched on adiabatically in 11 ms using an S -shape time variation of the intensity of the beams [27]. The relative phase 2θ of the two laser beams is controlled using two phase-locked synthesizers that drive the acousto-optic modulators placed on each beam before they enter the vacuum cell. The 1D potential experienced by the atoms reads

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_{\text{ext}}^2x^2 - sE_L\cos^2\left(\frac{\pi x}{d} + \theta(t)\right), \quad (1)$$

where the first term accounts for the weak external potential in which the BEC is produced. The external angular frequency ω_{ext} results from the combined trapping of the dipole trap and the magnetic gradient ($\omega_{\text{ext}} = 2\pi \times 25$ Hz). The second term accounts for the lattice potential with a tunable time-dependent phase $\theta(t)$. $E_L = \hbar^2/(2md^2)$ is the lattice characteristic energy and s is a dimensionless parameter characterizing the lattice depth.

The lattice can be suddenly spatially shifted by a phase $\theta(0^+) = \theta_0$ ($\theta_0 = 90^\circ$ corresponds to a shift of half a period). This phase jump is performed on a short time scale (a few nanoseconds) compared to all other time scales in the system. This shift triggers an oscillation of the BEC in the lattice. We analyze this oscillation by suddenly switching off all trapping potentials followed by a $t_{\text{TOF}} = 25$ ms time of flight. This provides a measurement of the in-trap atomic momentum distribution. The observed pattern results from an interference of the BECs located at each lattice site and is characterized by peaks associated with the momenta $p_n = nh/d$ with n an integer (positive or negative) and separated by a distance $\hbar t_{\text{TOF}}/(md) = 215 \mu\text{m}$ [28].

For the experimental data presented in Fig. 1, we used an initial shift of $d/4$ (i.e., $\theta_0 = 45^\circ$) and repeated the sequence for various holding times in the shifted lattice. In this way, we access the dynamics of the BEC inside the

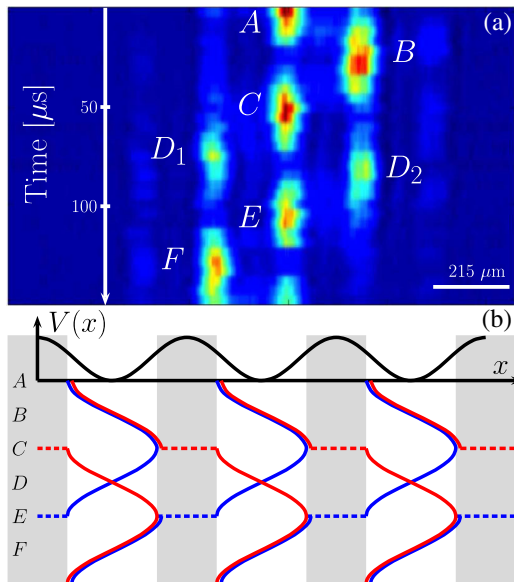


FIG. 1. (a) Time sequence showing the evolution of the wave packet in the lattice after a sudden displacement ($5 \mu\text{s}$ time interval between each picture). The data presented are averaged over two iterations. The images are taken after a 25 ms time of flight. (b) Sketch of the center-of-mass motion of the packets in each well. Their splitting by tunneling at the turning points is represented as dashed lines.

lattice. After $\sim 25 \mu\text{s}$ of evolution in the lattice, the atoms return to the bottom of the potential wells, acquiring their maximum momentum in the meantime. This results in a shift of the maximum peak towards the right (see point B in Fig. 1). Atoms then evolve towards the opposite turning point that is reached at C . A quarter of period later, we observe two peaks (D_1 and D_2) and not just one, revealing in momentum space the splitting of the wave packet that occurred at C : a part of the wave packet (D_1) continued its oscillatory motion and another part of the wave packet (D_2) tunneled through the barrier and kept as a consequence its positive momentum. The potential barrier therefore acts as a beam splitter. Interestingly, the second interaction with the beam splitter that occurs at the next turning point (E) generates, by constructive interference, only one packet with a negative momentum.

We start by investigating the oscillatory motion inside the lattice. The dipole motion of a condensate in an optical lattice has been studied experimentally in Refs. [29–31] for an initial displacement of the condensate by a few tens of micrometers, i.e., more than its size, and in the low depth limit $s < 1.2$ (with our notation). To compare the oscillations that result from such a large displacement, a hydrodynamic formalism was used, which substitutes a continuum formulation to the discretized formulation involving the wave functions in each site [32,33]. The frequency of the dipole mode in this model is given by $\omega_{\text{dip}} = (m/m^*)^{1/2}\omega_{\text{ext}}$, where m^* is the effective mass, a quantity that was extracted from the experimental data [29]. In such experiments, the micromotion of the wave packets inside each lattice site does not play any role on the center-of-mass motion. This is to be contrasted with the case studied in this Letter for which we have a small displacement (a few tens of nanometers) and a deeper optical potential ($s \sim 3.2$). Under those conditions, the micromotion plays a major role and the continuous approach of Ref. [32] is no more adapted. Furthermore, the quantum dynamics that takes place inside each well cannot be mapped on the classical dynamics [34]. Indeed, despite the relatively large lattice depth, the tunnel effect still plays an important role on the out-of-equilibrium dynamics that we investigate. For an initial shift of $d/4$, it increases the oscillation period compared to the classical case (see Fig. 2).

We investigated quantitatively the extra inertia provided by the lattice using numerical simulations of the 1D Gross-Pitaevskii equation [35]. For this purpose, we solve the dimensionless equation $i\partial_{\tilde{t}}\psi = [(-\Delta + \tilde{\omega}_{\text{ext}}^2 X^2)/2 - \gamma \cos^2(\pi X/4 + \varphi) + \beta|\psi|^2]\psi$, where the time is normalized to $\tilde{t} = \tilde{\omega}t$ with $\tilde{\omega}^{-1} = md^2/(16\hbar) = 24.3 \mu\text{s}$ for our parameters, $\tilde{\omega}_{\text{ext}} = \omega_{\text{ext}}/\tilde{\omega}$, and $\gamma = \pi^2 s/8$. The precise value of the interaction strength β requires a model for the effective reduction of dimension [36] and a precise knowledge of the number of atoms per site, which differs from site to site because of the external confinement. Assuming a transverse Thomas-Fermi profile, we find $\beta \lesssim 1$. The dipole oscillation period T normalized to $\tilde{\omega}^{-1}$ is plotted in

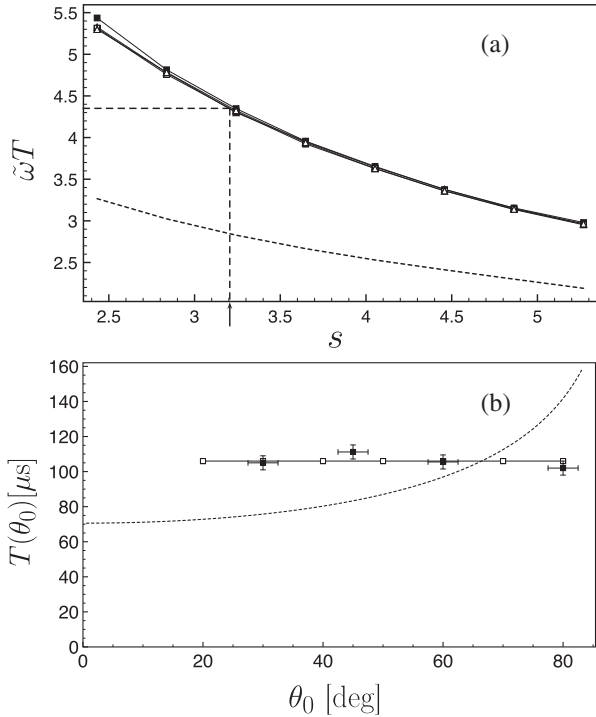


FIG. 2. (a) Collective dipole mode period measured in dimensionless units as a function of the lattice depth (normalized to the lattice characteristic energy E_L) for various values of the external potential and the interactions: $\tilde{\omega}_{\text{ext}} = 1/50$ (triangle), $\tilde{\omega}_{\text{ext}} = 1/262$ (square), $\beta = 0.1$ (open symbol), and $\beta = 1$ (filled symbol). The proximity of the curves enables one to extract precisely the optical lattice depth (dashed line). The dotted curve corresponds to the classical oscillation period [34]. (b) Oscillation period as a function of the initial angle θ_0 (which accounts for the initial sudden displacement of the lattice): experimental points (filled square), numerical simulation with the calibration presented in (a) (empty square), and classical prediction (dotted line).

Fig. 2(a) as a function of the depth parameter s for various values of the interaction parameter β and external confinement $\tilde{\omega}_{\text{ext}}$ ($\tilde{\omega}_{\text{ext}} = 1/262$ corresponds to the experimental situation). Remarkably, the curve that gives the renormalization of the dipole frequency appears to be independent of the external potential strength in the limit $\omega_{\text{ext}} \ll h/(md^2)$ (see Ref. [37]). This property differs from the low depth result [29,30,32]. Additionally, the dipole mode that we excite turns out to be independent of the strength of the interaction. This well-known feature for a single well remains valid for our chain of coupled wells. This was also pointed out in Ref. [32] for large amplitude oscillations in the low depth limit. We have numerically checked these two properties, and we can therefore precisely infer the potential depth from the first dipole oscillation period. We experimentally measure a period $T = 106 \pm 4 \mu\text{s}$ ($\tilde{\omega}T = 4.36 \pm 0.14$), which corresponds to $s_0 = 3.21 \pm 0.12$ according to Fig. 2(a) (arrow). For this depth, the potential

accommodates for two bound states [37]. An independent calibration based on Kapitza-Dirac diffraction has been performed on a large range of lattice depths and is in perfect agreement with our method that combines time period measurement and numerical simulation (see Ref. [37]).

Another consequence of the collective nature of the dipole oscillation is the quasi-independence of the oscillation period on the initial angle θ_0 (see Ref. [37]). This is illustrated in Fig. 2(b) where we compare for different initial angles θ_0 the period measured experimentally, the result of the numerical simulation in the same condition as in the experiment and with the calibration explained above, and the classical prediction. Within the error bars, the oscillation period of the dipole mode is constant in the wide range of angle that we studied ($30^\circ \leq \theta_0 \leq 80^\circ$), an observation confirmed by numerical simulations (see Ref. [37]). This is to be contrasted with the classical prediction where the nonharmonicities of the wells yield an oscillation period that strongly depends on the initial angle. Furthermore, the BEC being put in a far out-of-equilibrium state by the initial sudden displacement, we numerically checked that its relaxation towards equilibrium does not modify the oscillation dynamics studied above: the relaxation occurs on a time scale of a few milliseconds, thus much larger than the oscillation period.

Let us analyze further the experimental time sequence of Fig. 1. We observe that the centers of the packets D_1 and D_2 do not coincide in time. The packet D_2 that has tunneled through the potential barrier is delayed with respect to D_1 . The independence of the period on the initial angle θ_0 ensures that the time delay that we measure is not affected by anharmonicities. The analysis in momentum space facilitates the precise measurement of the time delay since the two packets that split on the barrier acquire an opposite momentum after a quarter of a period. We investigated systematically this delay through a set of experiments, with a $1 \mu\text{s}$ time step, for which the initial angle, and thus the initial sudden displacement of the lattice, is varied. The data are presented in Fig. 3(a). We observe that when increasing θ_0 , the relative delay between the reflected (D_1) and tunneled (D_2) wave packets decreases. Indeed, as intuitively expected from a semiclassical approach, for a larger shift angle, the thickness of the potential barrier at the turning point decreases and the turning point corresponds to a higher energy [see Fig. 3(b)]. To extract the time delay between the wave packets, we determine the maximum of the density distributions of the D_1 and D_2 wave packets (see the inset of Fig. 3) using as a guide a Gaussian fit of the density distributions. For $\theta_0 \geq 60^\circ$, the delay cannot be measured precisely because of the small thickness of the barrier, which yields a partial overlap of packets B and D_2 . The numerical simulations are in very good agreement with the experimental data without any adjustable parameter once the calibration has been carefully performed [see Fig. 3(c)]. The error bars on the numerical simulations

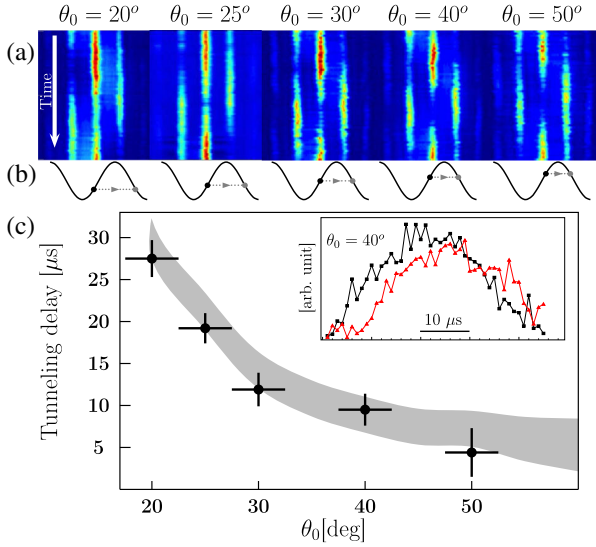


FIG. 3. (a) Experimental images: enlargements of C , D_1 , and D_2 packets for various values of the initial offset angle of the lattice θ_0 . (b) Sketch of the tunneling process for different θ_0 showing the thickness of the potential barrier at the first turning point (point C). (c) Quantitative tunneling time delay extracted from the experimental images (black disk), compared to the results of the numerical simulations without any adjustable parameter but including the uncertainty on the lattice depth (gray area). Inset: integrated density distribution of the reflected D_1 (black square) and tunneled D_2 (red triangles) packets for $\theta_0 = 40^\circ$.

are due to the uncertainty on the experimentally measured period. Remarkably, the numerical simulations show that interactions do not affect the value of the delay time. For the smallest displacements ($\theta_0 = 20^\circ$ and $\theta_0 = 30^\circ$), the dynamics is completely dominated by the bound Bloch states and the time delay that we measure is therefore exclusively due to the tunnel effect (see Ref. [37]). The contribution of the unbound states grows with θ_0 to reach 35% for $\theta_0 = 50^\circ$.

The tunnel effect occurs for a large range of depths (see Ref. [37]). The turning point at which it is observed depends on the depth. For $3 \lesssim s \lesssim 4$, the tunnel time directly measured at the first turning point strongly varies from 0 to $T/4$. For $s \gtrsim 4$ the interpretation of the measured delay is more involved since the interferometric detection method intrinsically provides a delay modulo $T/2$. For $s \lesssim 3$ the overlap between the unbound and tunnel packets renders more difficult an accurate determination of the tunnel time.

In the last part of the time evolution represented in Fig. 1, we observe that the packet F has a momentum opposed to that of packet B . Such a behavior may appear surprising at first sight: indeed, in the absence of tunneling (classical prediction), one would expect the packet F to have exactly the opposite momentum compared to what we observe. This counterintuitive behavior results from a well-known

interference effect occurring in a Mach-Zehnder interferometer (MZI) with symmetric beam paths and 50:50 beam splitters: the exit channel is the opposite to the entrance channel. The packet of atoms in B has positive momentum components centered about h/d . We define this state as $|B\rangle = |p_0\rangle$. The potential barrier at the turning point C plays the role of a coherent beam splitter: $|D\rangle = \cos\varphi|p_0\rangle + i\sin\varphi|-p_0\rangle$. The confinement driving the subsequent evolution plays the role of mirrors. At the turning point E the two packets that have been split are recombined on a second beam splitter. The result of this recombination is read-out in momentum space in F : $|F\rangle = (\cos\varphi|p_0\rangle + i\sin\varphi|-p_0\rangle)\cos\varphi + i\sin\varphi(\cos\varphi|-p_0\rangle + i\sin\varphi|p_0\rangle) = \cos 2\varphi|p_0\rangle + i\sin 2\varphi|-p_0\rangle$. We infer that the momentum in F is the exact opposite to that in B for a perfect 50:50 beam splitter ($\varphi = \pi/4$).

In our lattice configuration, the interfering packets originate from two adjacent sites [see Fig. 3(b)]. We therefore have multiple MZIs working simultaneously and addressing only the external degree of freedom. We analyze the exit of the interferometers by interference in momentum space. The constructive interference observed in Fig. 1 is thus due to the persistence of the global coherence of the BEC on the dipole micromotion period time scale. We numerically checked that this interference effect is immune to interactions. It however depends on the lattice depth, which changes the ratio between the tunneled and the reflected parts of the wave packet, and therefore the population that ends up with the same momentum as in the entrance channel B . The constructive interference observed in Fig. 1 corresponds to a ratio $\Pi_{-1}/(\Pi_1 + \Pi_{-1}) = 91\%$, where Π_n is the number of atoms with momentum nh/d (corresponding to $\varphi \approx \pi/5$). Finally, after an extra quarter of a period, the atoms from F are back in the initial state A . Therefore, when increasing the evolution time in the shifted lattice, the dynamics shown in Fig. 1 repeats again and the sensitivity of the coupled chain of MZIs increases.

In conclusion, we have performed a direct measurement of the tunneling delay time through the barriers of an optical lattice by studying the time evolution of a BEC after a sudden displacement of the lattice. The excitation of the BEC by a displacement of a few tens of nanometers provides a robust method to calibrate the lattice depth independently of the external potential, the interactions, and the value of the displacement. As a perspective, this experiment offers the possibility of controlling the tunneling delay time with time-dependent barriers in close analogy with the Landauer problem [38]. Additionally, we have observed the constructive interference in a MZI provided by two successive interactions with the barriers acting as a beam splitter. Such a micron-size interferometer could be of interest to measure locally the short-range force at the vicinity of a surface [42–46].

We are indebted to S. Faure and L. Polizzi for their precious technical assistance for the building up of our new experimental setup. We thank J. Dalibard, J. G. Muga, B. Georgeot, and J. Vigué for useful comments. We are grateful to C. Besse and R. Duboscq for the numerous fruitful discussions we had on the use of the numerical GPELab toolbox. This work was supported by Programme Investissements d’Avenir under Program No. ANR-11-IDEX-0002-02, Reference No. ANR-10-LABX-0037-NEXT.

-
- [1] L. A. MacColl, *Phys. Rev.* **40**, 621 (1932).
 [2] T. E. Hartman, *J. Appl. Phys.* **33**, 3427 (1962).
 [3] R. Landauer and Th. Martin, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 217 (1994).
 [4] *Time in Quantum Mechanics*, edited by J. G. Muga, R. Sala Mayato, and I. L. Egusquiza (Springer, Berlin, 2002).
 [5] P. Guéret, A. Baratoff, and E. Marclay, *Europhys. Lett.* **3**, 367 (1987).
 [6] D. Esteve, J. M. Martinis, C. Urbina, E. Turlot, M. H. Devoret, H. Grabert, and S. Linkwitz, *Phys. Scr.* **T29**, 121 (1989).
 [7] M. Uiberacker *et al.*, *Nature (London)* **446**, 627 (2007).
 [8] P. B. Corkum and F. Krausz, *Nat. Phys.* **3**, 381 (2007).
 [9] A. S. Landsman, M. Weger, J. Maurer, R. Boge, A. Ludwig, S. Heuser, C. Cirelli, L. Gallmann, and U. Keller, *Optica* **1**, 343 (2014).
 [10] M. Deutsch and J. E. Golub, *Phys. Rev. A* **53**, 434 (1996).
 [11] Ph. Balcou and L. Dutriaux, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 851 (1997).
 [12] Ch. Spielmann, R. Szipöcs, A. Stingl, and F. Krausz, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2308 (1994).
 [13] A. M. Steinberg, P. G. Kwiat, and R. Y. Chiao, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 708 (1993).
 [14] A. Ranfagni, R. Ruggeri, C. Susini, A. Agresti, and P. Sandri, *Phys. Rev. E* **63**, 025102(R) (2001).
 [15] I. Bloch, *Nat. Phys.* **1**, 23 (2005).
 [16] O. Morsch and M. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
 [17] C. E. Creffield, F. Sols, D. Ciampini, O. Morsch, and E. Arimondo, *Phys. Rev. A* **82**, 035601 (2010).
 [18] H. Lignier, C. Sias, D. Ciampini, Y. Singh, A. Zenesini, O. Morsch, and E. Arimondo, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 220403 (2007).
 [19] J. Struck, C. Ölschälgel, M. Weinberg, P. Hauke, J. Simonet, A. Eckardt, M. Lewenstein, K. Sengstock, and P. Windpassinger, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 225304 (2012).
 [20] N. Goldman and J. Dalibard, *Phys. Rev. X* **4**, 031027 (2014).
 [21] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, *Nature (London)* **415**, 39 (2002).
 [22] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
 [23] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani, and M. K. Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010402 (2005); S. Levy, E. Lahoud, I. Shomroni, and J. Steinhauer, *Nature (London)* **449**, 579 (2007).
 [24] F. Meinert, M. J. Mark, E. Kirilov, K. Lauber, P. Weinmann, M. Gröbner, A. J. Daley, and H.-C. Nägerl, *Science* **344**, 1259 (2014).
 [25] G. Barontini, R. Labouvie, F. Stubenrauch, A. Vogler, V. Guarrera, and H. Ott, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 035302 (2013).
 [26] Y.-J. Lin, A. R. Perry, R. L. Compton, I. B. Spielman, and J. V. Porto, *Phys. Rev. A* **79**, 063631 (2009).
 [27] $I(t) = I_0[(k+1)(t/\tau)^k - k(t/\tau)^{k+1}]$ with $\tau = 11$ ms and $k = 11$.
 [28] P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 220401 (2001).
 [29] S. Burger, F. S. Cataliotti, C. Fort, F. Minardi, M. Inguscio, M. L. Chiofalo, and M. P. Tosi, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 4447 (2001).
 [30] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, and M. Inguscio, *Science* **293**, 843 (2001).
 [31] C. D. Fertig, K. M. O’Hara, J. H. Huckans, S. L. Rolston, W. D. Phillips, and J. V. Porto, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 120403 (2005).
 [32] M. Krämer, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 180404 (2002).
 [33] J. Gea-Banacloche, A. M. Rey, G. Pupillo, C. J. Williams, and C. W. Clark, *Phys. Rev. A* **73**, 013605 (2006).
 [34] According to classical mechanics, the oscillation period T_c in the lattice wells depends on the initial shift angle θ_0 : $T_c(\theta_0) = (2md^2/h)s^{-1/2}f(\theta_0)$ with $f(\theta_0) = (2/\pi)\int_0^{\theta_0}(\cos^2\theta - \cos^2\theta_0)^{-1/2}d\theta$ since there is no initial velocity. T_c is marginally affected by the external confinement since $\omega_{\text{ext}} \ll h/(md^2)$.
 [35] X. Antoine and R. Duboscq, *Comput. Phys. Commun.* **185**, 2969 (2014); **193**, 95 (2015).
 [36] A. D. Jackson, G. M. Kavoulakis, and C. J. Pethick, *Phys. Rev. A* **58**, 2417 (1998).
 [37] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.117.010401>, which includes Refs. [38–41], for a band analysis of the experimental situation, numerical results on the observed quasi-isochronism oscillations, detail on lattice depth calibration, and an overview of the different parameter ranges.
 [38] M. Büttiker and R. Landauer, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1739 (1982).
 [39] M. Horne, I. Jex, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. A* **59**, 2190 (1999).
 [40] J. H. Huckans, I. B. Spielman, B. Laburthe Tolra, W. D. Phillips, and J. V. Porto, *Phys. Rev. A* **80**, 043609 (2009).
 [41] B. Gadway, D. Pertot, R. Reimann, M. G. Cohen, and D. Schneble, *Opt. Express* **17**, 19173 (2009).
 [42] P. Wolf, P. Lemonde, A. Lambrecht, S. Bize, A. Landragin, and A. Clairon, *Phys. Rev. A* **75**, 063608 (2007).
 [43] G. Ferrari, N. Poli, F. Sorrentino, and G. M. Tino, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 060402 (2006).
 [44] I. Carusotto, L. Pitaevskii, S. Stringari, G. Modugno, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 093202 (2005).
 [45] A. Derevianko, B. Obreshkov, and V. A. Dzuba, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 133201 (2009).
 [46] G. Tackmann, B. Pelle, A. Hilico, Q. Beaufiles, and F. Pereira dos Santos, *Phys. Rev. A* **84**, 063422 (2011).

Robust calibration of an optical-lattice depth based on a phase shiftC. Cabrera-Gutiérrez,¹ E. Michon,¹ V. Brunaud,¹ T. Kawalec,² A. Fortun,¹ M. Arnal,¹ J. Billy,¹ and D. Guéry-Odelin¹¹*Université de Toulouse, UPS, Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité, IRSAMC, F-31062 Toulouse, France and CNRS, UMR 5589, F-31062 Toulouse, France*²*Marian Smoluchowski Institute of Physics, Jagiellonian University, Łojasiewicza 11, PL-30348 Kraków, Poland*

(Received 26 January 2018; published 18 April 2018)

We report on a method to calibrate the depth of an optical lattice. It consists of triggering the intrasite dipole mode of the cloud by a sudden phase shift. The corresponding oscillatory motion is directly related to the interband frequencies on a large range of lattice depths. Remarkably, for a moderate displacement, a single frequency dominates the oscillation of the zeroth and first orders of the interference pattern observed after a sufficiently long time of flight. The method is robust against atom-atom interactions and the exact value of the extra weak external confinement superimposed to the optical lattice.

DOI: [10.1103/PhysRevA.97.043617](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.043617)

Optical lattices play a key role in quantum simulations performed with cold atoms [1,2]. They are produced by the interference of far-off resonance laser beams and the resulting spatially modulated intensity defines purely conservative and defect-free potentials in which atoms evolve. By an appropriate set of lasers interfering at various angles, any lattice geometry can be generated [3–8]. The band structure and topology can also be directly engineered by tuning the phase, intensity, or polarization of the interfering laser beams.

An important issue for experiments is to know, with high accuracy, the potential really experienced by the atoms. For instance, the tunneling rate depends exponentially on the potential depth for a sufficiently large depth. A large error on this quantity can therefore be made with a calibration method that is not precise enough. In principle, the lattice depth can be readily calculated once the characteristics of the laser beams (waist, detuning, polarization, and power) and of the atomic transition (atomic polarizability and saturation intensity) are known. However, the precise knowledge of the quantities that characterize the beam inside the vacuum chamber, where atoms are manipulated, turns out to be difficult to establish with an accuracy better than 10–20%. Indeed, the beam propagates through the windows of the vacuum chamber, yielding possible distortions of the beam profile combined with potential birefringence effects. The laser beam may have a M^2 factor larger than 1, etc.

To calibrate *in situ* the lattice depth, different methods have been developed including parametric heating [9], Rabi oscillations [10], Raman-Nath diffraction [11], and expansion from a lattice [12], to cite a few. Each method has a certain range of validity, and one shall be careful in the error bar estimations. The most accurate methods rely on the analysis of Bose-Einstein condensate diffraction pattern.

In this article, we propose a calibration method that has the advantage of being independent of the interaction strength and the quantum statistics, and is valid over a very large range of potential depths. This method simply consists of triggering, by a sudden phase shift, the intrasite dipole oscillations of the gas inside the optical lattice, and relating the frequency of the

observed oscillations to the appropriate interband transition. We stress that the method presented in this article does not depend on the beam geometry used to realize the lattice. Furthermore, we use dimensionless units to facilitate the transposition to other atoms or lattice spacing.

The paper is organized as follows. In Sec. I, we discuss the calibration method based on the diffraction pattern observed after exposing the quantum gas to a pulsed optical lattice. Section II addresses the technique which consists in analyzing the interference pattern observed once the lattice has been suddenly switched off. Our method is detailed in Sec. III. We then conclude the paper with some general comments on the method.

Our experiment produces nearly pure rubidium-87 BEC of 10^5 atoms in the lowest hyperfine level $F = 1, m_F = -1$. It relies on a hybrid trap made of a quadrupole magnetic field and a crossed dipole trap [13]. The one-dimensional (1D) optical lattice is created by superimposing two mutually coherent and far-of-resonance counterpropagating laser beams at $\lambda = 1064$ nm. The corresponding optical potential reads

$$V_L(x) = -U_0 \cos^2\left(\frac{\pi x}{d} + \theta_0\right) \quad (1)$$

and has a lattice spacing $d = \lambda/2 = 532$ nm. With our notations, a change of the phase θ_0 by 90° moves the minima to the positions of the maxima. In the following, the depth U_0 of the lattice is measured in units of the lattice characteristic energy, $E_L = \hbar^2/(2md^2)$ [14]: $U_0 = sE_L$, where s is a dimensionless parameter. In our experiment, the 1D optical lattice is superimposed to the horizontal optical guide of the hybrid trap [13].

The relative phase, θ_0 , between the two beams generating the optical lattice is controlled in time via synthesizers whose frequencies are imprinted on light with acousto-optic modulators (AOM). The phase θ_0 can therefore be modified on a very short timescale (on the order of a few nanoseconds) or can be modulated in time. The method presented in the article requires to move the lattice on a few hundreds of nanometers in 100 ns typically; this requirement probably makes our method

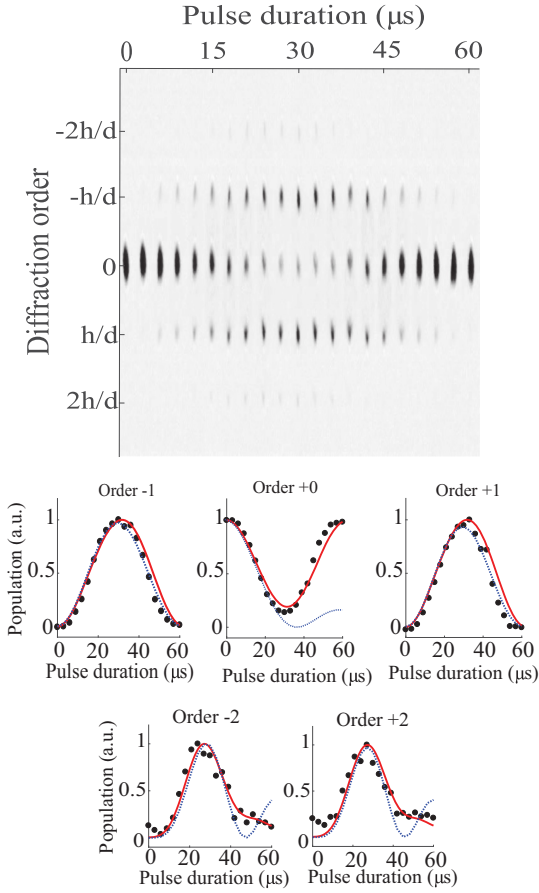


FIG. 1. (a) Diffraction of a rubidium-87 Bose-Einstein condensate from a pulsed one-dimensional optical lattice for $s \simeq 2.7$ (see text). The different images correspond to different pulse durations separated by $3 \mu\text{s}$. (b) Orders -2 , -1 , 0 , 1 , and 2 : Experimental data (dark points), Raman-Nath approximation (blue dotted lines), and Mathieu functions analysis (red solid lines).

unrealistic for a lattice generated by a retroreflected laser beam. A phase-modulation technique is quite standard and was recently used in quantum simulation with cold atoms in lattices to engineer the tunneling rate [15–24].

I. MATTER WAVE EXPOSED TO A PULSED OPTICAL LATTICE

The most common method used to calibrate the depth of an optical lattice consists in shining the light that generates the lattice for a short amount of time, τ , and to analyze the corresponding diffraction pattern observed after a sufficiently long time of flight. Examples of such diffraction patterns are shown in Fig. 1.

A. Analytical solution

The quantitative analysis of the diffraction patterns is based on the formalism of Mathieu functions [25,26]. Indeed, the stationary solutions $\Phi(x)$ of the one-dimensional Schrödinger equation associated with the periodic potential $V_L(x)$ obeys the

Mathieu's equation:

$$\frac{d^2\Phi}{d\tilde{x}^2} + [a + 2q \cos(2\tilde{x})]\Phi = 0, \quad (2)$$

with $\tilde{x} = \pi x/d$, $a = 4E/E_L + 2s$, and $q = s$. The solutions of Eq. (2) are the Mathieu's functions $M(a, q; \tilde{x})$. According to Bloch-Floquet's theorem, those solutions can be recast in the form $M(a, q; \tilde{x}) = e^{ir\tilde{x}} f(a, q, \tilde{x})$ for fixed values of (a, q) where r is an integer referred to as the characteristic exponent, and f is a periodic complex valued function having the same spatial period as that of the lattice. The Mathieu's functions have the same parity as their characteristic exponent. For fixed values of q and r , only one value of a provides a solution of Eq. (2). This specific value, a_r , is referred to as the characteristic value.

The Bose-Einstein condensate (BEC) has a size much larger than the spatial period d ; we can therefore assume that the initial wave function is constant. We choose a normalization to unity for one spatial period. The initial wave function therefore reads as $\psi(\tilde{x}, 0) = (2\pi)^{-1/2}$. To derive explicitly the diffraction pattern, we expand the initial wave function of the BEC on the Mathieu's basis:

$$\begin{aligned} |\psi(0)\rangle &= \sum_{r=0}^{\infty} \langle M(a_r, q) | \psi(0) \rangle |M(a_r, q)\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{2j}}{\sqrt{\pi}} |M(a_{2j}, q)\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

with $c_{2j} = (\sqrt{2}/\pi) \int_0^\pi M(a_{2j}, q; \tilde{x}) d\tilde{x}$. During the time over which the pulse is applied, each component $2j$ evolves freely according to its energy $E_{2j}/E_L = a_{2j}/4 - q/2$:

$$\psi(\tilde{x}, \tau) = e^{-iq \frac{E_L \tau}{2\hbar}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{2j}}{\sqrt{\pi}} M(a_{2j}, q; \tilde{x}) e^{-ia_{2j} \frac{E_L \tau}{4\hbar}}. \quad (4)$$

From this expression, we infer the population of the n th diffraction order:

$$P_n(U_0, \tau) = \left| \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \psi(\tilde{x}, \tau) e^{-2in\tilde{x}} d\tilde{x} \right|^2. \quad (5)$$

B. Raman-Nath approximation

The previous expression can be simplified in the limit of very short pulses. Indeed, in this case, atoms do not have enough time to change their velocity during the pulse and the kinetic energy can be neglected [11]. This approximation is commonly called the Raman-Nath approximation. More qualitatively, this criterium reads $\tau \ll 2\pi/\omega_0$ with $\omega_0 = (2\pi^2 U_0/md^2)^{1/2} = (E_L/\hbar)s^{1/2}$, where the angular frequency ω_0 is associated with the harmonic approximation of the minima of $V_L(x)$. Note that this criterium is all the more restrictive at low lattice depths. In practice, the Raman-Nath approximation allows us to calibrate accurately a lattice with sufficiently large depth s ($s > 5$ typically).

Under this approximation, the periodic potential is directly imprinted on the phase of the wave function:

$$\begin{aligned} \psi(x, \tau) &= e^{-iV_L(x)\tau/\hbar} \psi(x, 0), \\ \psi(x, \tau) &\propto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} i^n J_n \left(\frac{U_0 \tau}{2\hbar} \right) e^{ink_L x} \psi(x, 0), \end{aligned} \quad (6)$$

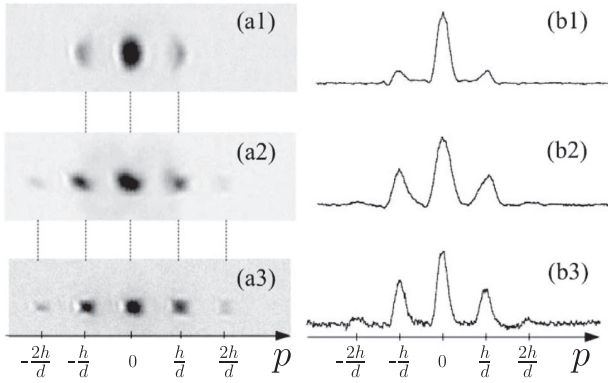


FIG. 2. (a) Time-of-flight pictures (expansion during 25 ms) obtained after a sudden release of an adiabatically loaded Bose-Einstein condensate into an optical lattice for different depths $U_0 = 1.65 \pm 0.3, 6.62 \pm 0.31, 10.92 \pm 2.4 E_L$. (b) Integrated profile corresponding to each image.

yielding

$$P_n(U_0, \tau) \propto \left| J_n \left(\frac{U_0 \tau}{2\hbar} \right) \right|^2. \quad (7)$$

In Fig. 1, we have represented a set of data at the breakdown edge of the Raman-Nath approximation. Fitting the data with the Bessel functions for the orders $-2, -1, 0, 1,$ and 2 of the diffraction pattern [see Eq. (7)] yields a depth of $2.78 \pm 0.52 E_L$. If we apply the Mathieu functions to the different orders, we get a much more accurate estimation $2.68 \pm 0.01 E_L$. In Fig. 1, we clearly see that this latter fit gives a much better account of the zeroth-order time evolution and of the wings observed on the orders ± 2 . The accuracy for this method in the low-depth regime therefore comes at the expense of a detailed fit procedure over many orders and involves the Mathieu functions. The breakdown of the Raman-Nath approximation also generates an envelope of the time-evolving diffraction pattern that is shaped by caustics [27].

II. SUDDEN EXPANSION METHOD

Another calibration method consists in studying the interference pattern obtained after a sudden switching off of the lattice and a subsequent long time of flight. For this purpose, one shall first load the BEC adiabatically in the optical lattice.

Once the BEC has been produced in our hybrid trap, the optical lattice is ramped up adiabatically in 30 ms using an S -shape variation in time of the intensity of the lattice beams. The time duration for the ramp is long compared to \hbar/μ , where μ is the BEC chemical potential [28]. As a result, the BEC reaches a steady state for which it is split in small BECs occupying the different lattice sites. The lattice is then abruptly switched off. The wave packets, initially located at the lattice sites, then expand freely and interfere with one another, yielding a series of regularly spaced peaks. Figure 2 provides three examples of such interference patterns for different lattice depths. The resulting spatial interference pattern is then analyzed to extract the value of the depth of the potential U_0 [12].

Assuming that the size of the condensate is large compared to the lattice spacing, we can assume that the wave function is

periodic and reads

$$\psi(x) = \sum_{m=1}^{N_s} f_0(x - md) e^{i\varphi_m}, \quad (8)$$

where N_s is the number of sites, f_0 corresponds to the wave function in a single lattice site, and φ_m accounts for the relative phase in the different lattice sites. For large lattice depths ($s > 15$), the tunneling between adjacent sites becomes negligible and the BEC in each site will be rapidly out of phase [29]. Indeed, the phase is proportional to the chemical potential of the clouds in each lattice site, which may differ from site to site due to the loading of a different number of atoms in the lattice sites.

An absorption image is then taken after a sufficiently long time of flight and reveals the initial density in momentum space,

$$|\tilde{\psi}(p)|^2 = |\tilde{f}_0(p)|^2 \left| \sum_{m=1}^{N_s} e^{i\varphi_m} e^{-ipmd/\hbar} \right|^2, \quad (9)$$

where $\tilde{f}_0(p)$ is the Fourier transform of $f_0(x)$. The expression of the second factor depends on the phase relation between the sites [29]. For low depth, the tunneling favors a uniform phase and we can assume $\varphi_m = \varphi_0$:

$$\left| e^{i\varphi_0} \sum_{m=1}^{N_s} e^{-ipmd/\hbar} \right|^2 = \frac{\sin^2 \left(\frac{N_s pd}{2\hbar} \right)}{\sin^2 \left(\frac{pd}{2\hbar} \right)}. \quad (10)$$

To get the population in each order, we need a model function for f_0 . As a first example, we assume a Gaussian function corresponding to the wave function of the harmonic oscillator obtained by expanding V_L about its minima [30]. This approximation is expected to be all the more valid as the magnitude of s is large. The Fourier transform then reads $\tilde{f}_0(p) \propto \exp(-p^2 a_0^2 / 2\hbar^2)$, where $a_0 = (\hbar/m\omega_0)^{1/2}$ is the harmonic oscillator length associated with ω_0 . The population Π_n for the order n is then readily obtained from Eq. (9) with $p_n = nh/d$:

$$\Pi_n = \Pi_0 e^{-n^2/s^{1/2}}. \quad (11)$$

Under this Gaussian approximation, the lattice depth can therefore be directly inferred from (11)

$$s_{\text{gauss}} = \left(\frac{n^2}{\ln(\Pi_n)} \right)^2, \quad (12)$$

where $P_n = \Pi_n/\Pi_0$. However, for relatively shallow lattice ($s < 15$), this approximation is not accurate since the tunneling favors a spreading of the wave function. A correction was numerically studied in Ref. [30], and an empirical formula was proposed in Ref. [12] for $s < 5$,

$$s \simeq 4s_{\text{gauss}} P_n^{-1/4}. \quad (13)$$

There is no available interpolation formula at intermediate depths ($5 < s < 15$). In this range of parameters, it is therefore difficult to infer with accuracy the correspondence between the population in the interference orders and the depth. In the following section, we propose another strategy to deduce the lattice depth accurately on a broad range of lattice depths ($0.5 < s < 50$).

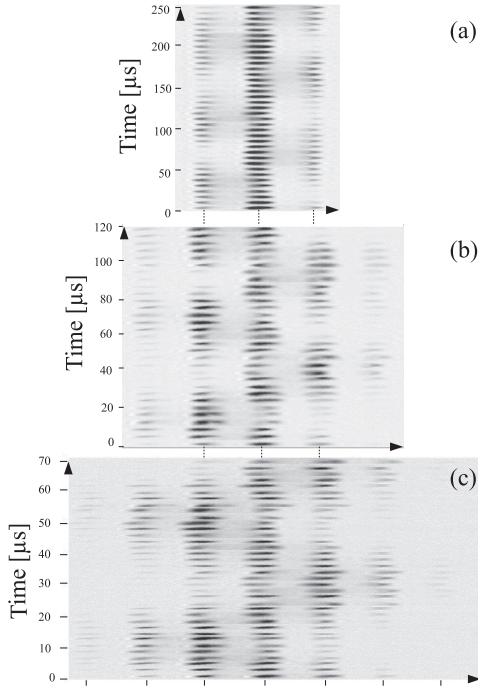


FIG. 3. Oscillation in momentum space (obtained after a 25 ms time of flight) triggered by an initial phase shift $\theta_0 = 25^\circ$ and for different depths $U_0 = 2 \pm 0.05$ (a), 6.66 ± 0.10 (b), and $11.38 \pm 0.15 E_L$ (c).

III. THE SUDDEN PHASE SHIFT METHOD

For the method that we propose, we start as in the previous method: A BEC is first adiabatically loaded into an optical lattice. We then perform a sudden phase shift of the optical lattice, $\theta(0^+) = \theta_0 < 90^\circ$. The analysis of the subsequent

motion of the wave function can be readily obtained by expanding the initial wave function onto the Bloch states with zero pseudomomentum,

$$\Psi(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,0} u_{n,0}(x), \quad (14)$$

where the functions $u_{n,q}(x)$ are the Bloch functions for a given depth U_0 associated with the band n and the pseudomomentum q such that $-\pi/d \leq q \leq \pi/d$. The time evolution reads

$$\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,0} e^{-i \frac{E_n(q=0)t}{\hbar}} u_{n,0}(x), \quad (15)$$

where $E_n(q)$ are the Bloch energies of the n th band for a lattice of depth U_0 . The evolution is observed after a long time of flight and for different holding times, t , in the lattice after the phase shift. Figure 3 provides three examples of such series of snapshots for different depths where the back and forth oscillation in the lattice potential wells can be clearly seen. The pattern observed in those images is nothing but the modulus of the Fourier transform of the wave function:

$$P(p, t) = |\tilde{\Psi}(p, t)|^2 \propto \left| \int \Psi(x, t) e^{ipx/\hbar} dx \right|^2. \quad (16)$$

To characterize the oscillatory behavior observed in momentum space, we take the time Fourier transform of $P(k, t)$ for the different orders and introduce the population for each order n :

$$\Pi_n(\nu) \propto \int P\left(\frac{n\hbar}{d}, t\right) e^{i\nu t} dt. \quad (17)$$

In Fig. 4, we plot $\Pi_0(\nu)$ and $\Pi_{\pm 1}(\nu)$ for different lattice depths s , and initial offset angle θ_0 . The main result of this article concerns the zeroth order for relatively small values of θ_0 (see Fig. 4 for $\theta_0 = 10^\circ$). Indeed, only one frequency essentially appears for a very broad range of potential depths from $s = 0.5$

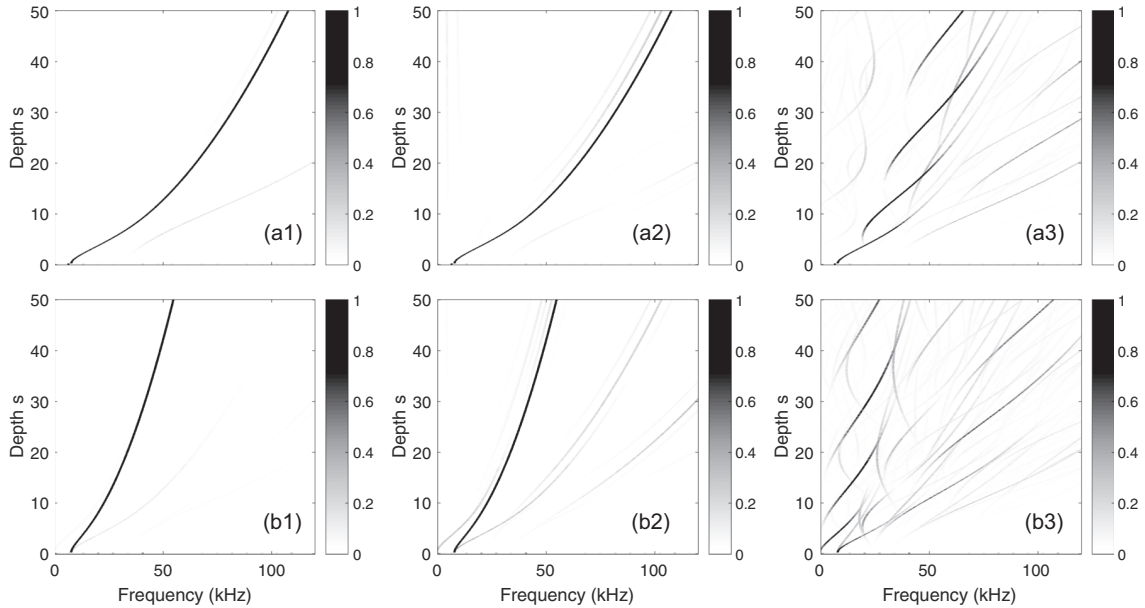


FIG. 4. Populations $\Pi_n(\nu)$ in momentum space vs frequency ν , for the orders $n = 0$ (a) and $n = \pm 1$ (b). The populations $\Pi_n(\nu)$ are defined as the Fourier transform of the oscillation pattern resulting from the initial quench. The quench corresponds to an offset of the initial potential by an angle $\theta_0 = 10^\circ$ (a_1 and b_1), $\theta_0 = 25^\circ$ (a_2 and b_2), and $\theta_0 = 70^\circ$ (a_3 and b_3). The grayscale corresponds to a decimal scale.

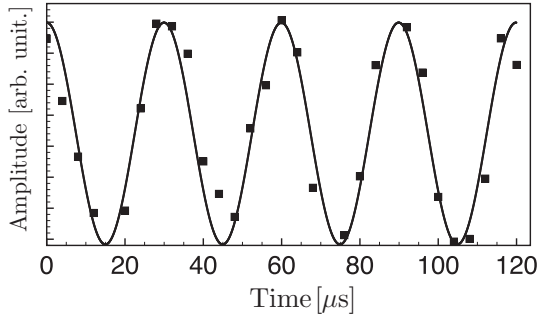


FIG. 5. Population of the zeroth order of the diffraction pattern of Fig. 3(b) as a function of time: Experimental data (black squares), fit (solid line). We find a frequency $\nu = 33.3$ kHz corresponding to a depth $U_0 = 6.66 \pm 0.10E_L$.

to 50. The one-to-one correspondence between the frequency and the depth provides an interesting calibration method valid over a very wide range of lattice depths. Furthermore, for low depth, the first order of the oscillating pattern in Fourier space has even a better contrast than the zeroth order, and therefore constitutes a reliable alternative to fit the data.

One may wonder why only one frequency dominates the zeroth-order population $\Pi_0(\nu)$ for relatively low offset angle θ_0 . Two main effects are responsible for this interesting behavior: First the small initial phase shift dramatically limits the number of Bloch states over which the initial state is projected (to typically 4), and second, the integral over space in Eq. (16) selects only the contribution of states that have an even parity when $k = 0$. As a result, the contributions of second and fourth Bloch bands are washed out. The frequency of oscillation of the zeroth-order population $\Pi_0(\nu)$ is therefore given by

$$\nu_0 = \frac{E_3(q=0) - E_1(q=0)}{h}. \quad (18)$$

In Fig. 5, we provide an analysis based on this relation between the depth and the measured frequency associated to the diffraction pattern of Fig. 3(b). In this case, we find a lattice depth equal to $6.66 \pm 0.10E_L$.

Similarly, at low offset angle, the first-order population $\Pi_{+1}(\nu)$ is dominated by one frequency ν_1 :

$$\nu_1 = \frac{E_2(q=0) - E_1(q=0)}{h}. \quad (19)$$

In this case, the small offset angle still limits the number of Bloch states on which the initial state is projected. However, no selection rule applies in this case, which explain the higher number of frequencies for the first-order population than for the zeroth order [compare Figs. 4(a2) and 4(b2)].

Interestingly, for a larger initial angle $\theta_0 = 25^\circ$, the dominant frequency in the spectrum of Π_0 and Π_{+1} remains unchanged (see Fig. 4). Our calibration method is therefore quite robust against the value of the initial angle. The comparison between the sudden phase shift method and the sudden expansion method is made explicitly in the captions of Figs. 2 and 3 that have been taken in the same conditions for three different depths.

We have also plotted the populations in the different orders for a very large initial offset angle $\theta_0 = 70^\circ$. As intuitively

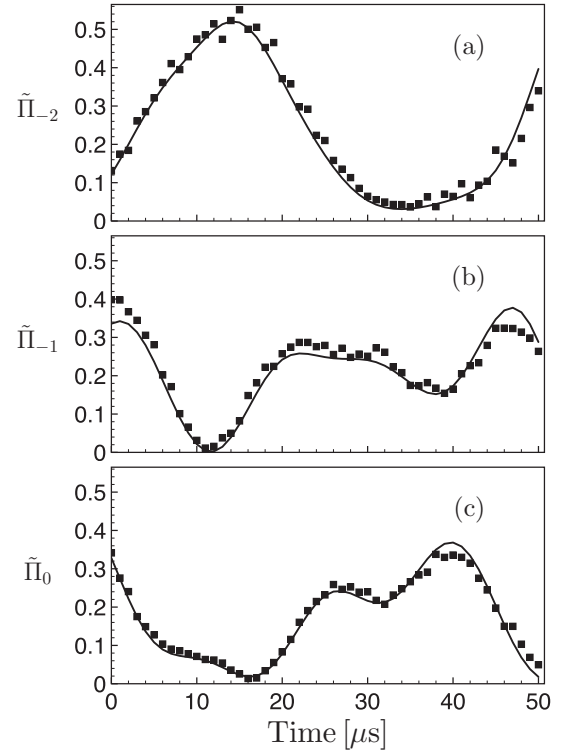


FIG. 6. Normalized populations $\tilde{\Pi}_m$ in the m^{th} order of the diffraction pattern as a function of time for $\theta_0 = 70^\circ$: (a) $m = -2$, (b) $m = -1$, and (c) $m = 0$. The depth of the optical potential is $U_0 = 9.76 \pm 0.2E_L$.

expected, for such a large initial angle the initial wave function is projected on many bands and many interband frequencies are involved in the subsequent oscillatory motion. In Fig. 6, we have plotted the normalized populations

$$\tilde{\Pi}_m(t) = \frac{P(mh/d, t)}{\sum_m P(mh/d, t)}, \quad (20)$$

in the m^{th} order (for $m = 0, -1$, and -2) of the diffraction pattern as a function of time for $\theta_0 = 70^\circ$ along with the prediction obtained from Bloch analysis. We find a perfect agreement between experiment and theory in this very far-off-equilibrium dynamics without any adjustable parameters and using the lattice depth previously determined with the sudden phase shift method involving a small angle. This confirms that our analysis is valid and robust even outside the single frequency regime.

A major advantage of our calibration method is that it is immune to both atom-atom interactions and the specific value of the extra external confinement provided by the initial trap. Note that even if the loading is not perfectly adiabatic, the method still holds. This result has been proved with extensive numerical simulations of the Gross-Pitaevskii equation [13]. The independence of the frequencies ν_0 and ν_1 with respect to interactions results from the fact that the motion triggered by the sudden initial phase shift corresponds to the so-called dipole mode. It corresponds to an oscillation of the intrasite center of mass which is not affected by the strength of the interactions.

IV. CONCLUSION

The dipole mode in ordinary traps, also referred to as the Kohn's mode, characterizes the center-of-mass oscillation and is consequently not affected by two-body interactions, the temperature, or the statistics. This is the reason why it is used to experimentally calibrate the value of the trap frequencies. In this article, we have shown its interest for *in situ* determination of lattice depths. For this purpose, we apply a sudden change in position of the lattice, small compared to the lattice spacing period (less than 100 nm), and observe the subsequent motion of the wave packets after a time of flight. Besides the well-known advantages of dipole oscillations mentioned above,

this method provides a simple mapping between the single frequency observed in the motion and the lattice depth, and turns out to be robust against the precise value of the position shift because of selection rule for interband transition.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Programme Investissements d'Avenir under the program ANR-11-IDEX-0002-02, reference ANR-10-LABX-0037-NEXT, and research funding Grant No. ANR-17-CE30-0024-01. M.A. acknowledges support from the DGA (Direction Générale de l'Armement).

-
- [1] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbène, *Nat. Phys.* **8**, 267 (2012).
- [2] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [3] K. I. Petsas, A. B. Coates, and G. Grynberg, *Phys. Rev. A* **50**, 5173 (1994).
- [4] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160405 (2001).
- [5] O. Morsch and M. Oberthaler, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 179 (2006).
- [6] C. Becker, P. Soltan-Panahi, J. Kronjäger, S. Dörscher, K. Bongs, and K. Sengstock, *New J. Phys.* **12**, 065025 (2010).
- [7] G.-B. Jo, J. Guzman, C. K. Thomas, P. Hosur, A. Vishwanath, and D. M. Stamper-Kurn, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 045305 (2012).
- [8] L. Tarruell, D. Greif, T. Uehlinger, G. Jotzu, and T. Esslinger, *Nature (London)* **483**, 302 (2012).
- [9] S. Friebe, C. D'Andrea, J. Walz, M. Weitz, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. A* **57**, R20 (1998).
- [10] Yu. B. Ovchinnikov, J. H. Müller, M. R. Doery, E. J. D. Vredenburg, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 284 (1999).
- [11] P. L. Gould, G. A. Ruff, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 827 (1986).
- [12] M. Cristiani, O. Morsch, J. H. Müller, D. Ciampini, and E. Arimondo, *Phys. Rev. A* **65**, 063612 (2002).
- [13] A. Fortun, C. Cabrera-Gutiérrez, G. Condon, E. Michon, J. Billy, and D. Guéry-Odelin, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 010401 (2016).
- [14] The characteristic energy $E_L = 4E_{\text{rec}}$, where $E_{\text{rec}} = \hbar^2 k^2 / 2m$ with $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ is the recoil energy associated with the absorption of one photon of one of the laser that generates the lattice beam.
- [15] N. Gemelke, E. Sarajlic, Y. Bidet, S. Hong, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170404 (2005).
- [16] H. Lignier, C. Sias, D. Ciampini, Y. Singh, A. Zenesini, O. Morsch, and E. Arimondo, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 220403 (2007).
- [17] E. Kierig, U. Schnorrberger, A. Schietinger, J. Tomkovic, and M. K. Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 190405 (2008).
- [18] N. Goldman and J. Dalibard, *Phys. Rev. X* **4**, 031027 (2014).
- [19] D. R. Hofstadter, *Phys. Rev. B* **14**, 2239 (1976); M. Aidelsburger, M. Atala, S. Nascimbène, S. Trotzky, Y.-A. Chen, and I. Bloch, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 255301 (2011); M. Aidelsburger, M. Atala, M. Lohse, J. T. Barreiro, B. Paredes, and I. Bloch, *ibid.* **111**, 185301 (2013); H. Miyake, G. A. Siviloglou, C. J. Kennedy, W. C. Burton, and W. Ketterle, *ibid.* **111**, 185302 (2013); M. Aidelsburger, M. Lohse, C. Schweizer, M. Atala, J. T. Barreiro, S. Nascimbène, N. R. Cooper, I. Bloch, and N. Goldman, *Nat. Phys.* **11**, 162 (2015).
- [20] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2015 (1988); G. Jotzu, M. Messer, R. Desbuquois, M. Lebrat, T. Uehlinger, D. Greif, and T. Esslinger, *Nature (London)* **515**, 237 (2014).
- [21] J. Struck, C. Ölschläger, R. Le Targat, P. Soltan-Panahi, A. Eckardt, M. Lewenstein, P. Windpassinger, and K. Sengstock, *Science* **333**, 996 (2011); J. Struck, M. Weinberg, C. Ölschläger, P. Windpassinger, J. Simonet, K. Sengstock, R. Höppner, P. Hauke, A. Eckardt, M. Lewenstein, and L. Mathey, *Nat. Phys.* **9**, 738 (2013).
- [22] C. V. Parker, L.-C. Ha, and C. Chin, *Nat. Phys.* **9**, 769 (2013); L. W. Clark, L. Feng, and C. Chin, *Science* **354**, 606 (2016); L. Feng, L. W. Clark, A. Gaj, and C. Chin, *Nat. Phys.* **14**, 269 (2017).
- [23] M. Reitter, J. Näger, K. Wintersperger, C. Sträter, I. Bloch, A. Eckardt, and U. Schneider, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 200402 (2017).
- [24] F. Görg, M. Messer, K. Sandholzer, G. Jotzu, R. Desbuquois, and T. Esslinger, *Nature (London)* **553**, 481 (2018).
- [25] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions* (Dover, New York, 1964).
- [26] M. Horne, I. Jex, and A. Zeilinger, *Phys. Rev. A* **59**, 2190 (1999).
- [27] J. H. Huckans, I. B. Spielman, B. L. Tolra, W. D. Phillips, and J. V. Porto, *Phys. Rev. A* **80**, 043609 (2009).
- [28] Strictly speaking, the adiabatic loading of the lattice is even more difficult to reach as the lattice depth is large since the tunneling rate decreases exponentially with the lattice depth.
- [29] Z. Hadzibabic, S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 180403 (2004).
- [30] P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 220401 (2001).

PAPER • OPEN ACCESS

Phase transition kinetics for a Bose Einstein condensate in a periodically driven band system

To cite this article: E Michon *et al* 2018 *New J. Phys.* **20** 053035

View the [article online](#) for updates and enhancements.

Related content

- [Parametric instabilities in resonantly-driven Bose–Einstein condensates](#)
S Lellouch and N Goldman
- [Quantum simulation of strongly correlated condensed matter systems](#)
W Hofstetter and T Qin
- [Floquet engineering with quasienergy bands of periodically driven optical lattices](#)
Martin Holthaus



PAPER

Phase transition kinetics for a Bose Einstein condensate in a periodically driven band system

OPEN ACCESS

RECEIVED

18 January 2018

REVISED

22 March 2018

ACCEPTED FOR PUBLICATION

6 April 2018

PUBLISHED

11 May 2018

Original content from this work may be used under the terms of the [Creative Commons Attribution 3.0 licence](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Any further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the title of the work, journal citation and DOI.



E Michon¹, C Cabrera-Gutiérrez¹, A Fortun¹, M Berger¹, M Arnal¹, V Brunaud¹, J Billy¹, C Petitjean², P Schlagheck² and D Guéry-Odelin¹

¹ Université de Toulouse; UPS; Laboratoire Collisions Agrégats Réactivité, IRSAMC; F-31062 Toulouse, France

² Département de Physique, CESAM research unit, University of Liege, B-4000 Liège, Belgium

E-mail: dgo@irsamc.ups-tlse.fr

Keywords: quantum gas, optical lattice, phase transition

Abstract

The dynamical transition of an atomic Bose–Einstein condensate from a spatially periodic state to a staggered state with alternating sign in its wavefunction is experimentally studied using a one-dimensional phase modulated optical lattice. We observe the crossover from quantum to thermal fluctuations as the triggering mechanism for the nucleation of staggered states. In good quantitative agreement with numerical simulations based on the truncated Wigner method, we experimentally investigate how the nucleation time varies with the renormalized tunneling rate, the atomic density, and the driving frequency. The effective inverted energy band in the driven lattice is identified as the key ingredient which explains the emergence of gap solitons as observed in numerics and the possibility to nucleate staggered states from interband excitations as reported experimentally.

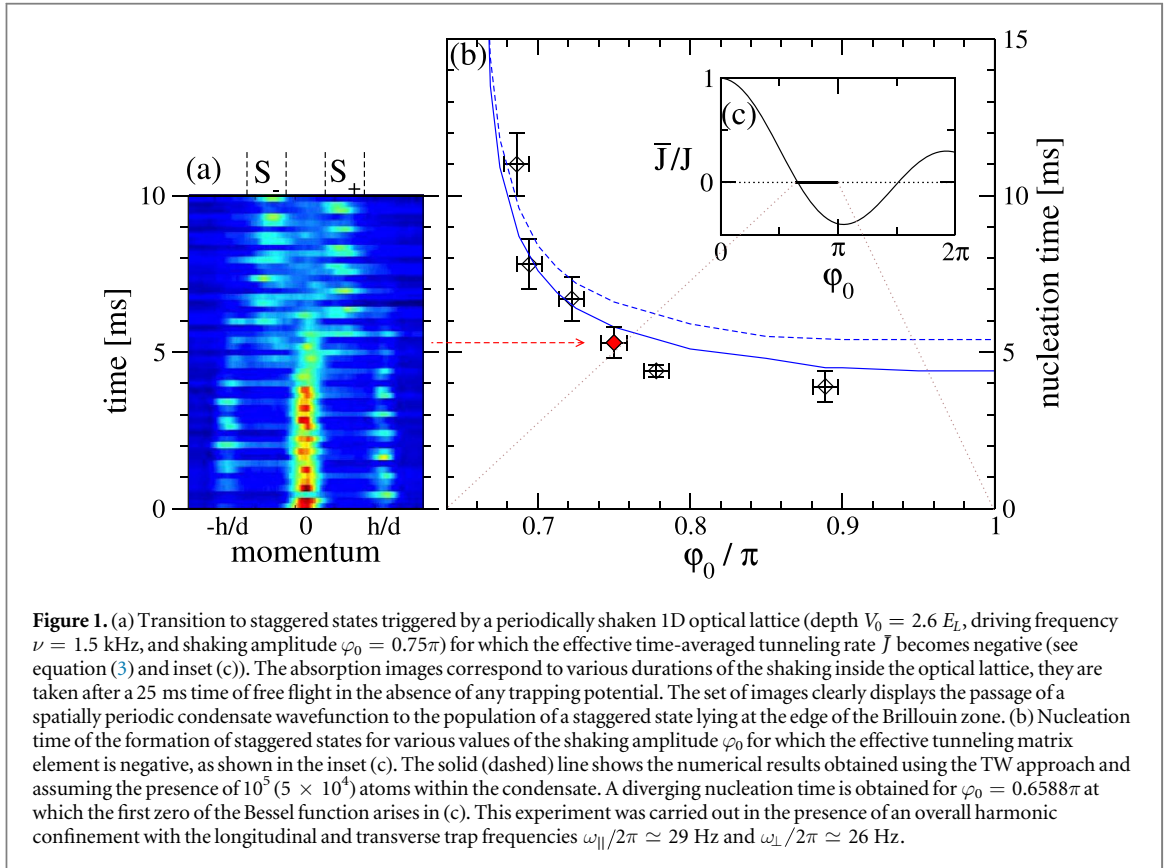
1. Introduction

Cold atoms in optical lattices provide powerful and versatile platforms for quantum simulators of many-body systems [1–4], and give access to the rich out-of-equilibrium dynamics of such systems. A remarkable progress for tunability was achieved by exposing lattice potentials to a time-periodic driving, whereby an effective renormalization of the tunneling rate between adjacent sites can be induced [5–7]. This opened many new perspectives for quantum simulations with the possibility to engineer effective Hamiltonians and study topological phases [8]. Recent examples include the realization of the Hofstadter [9] and Haldane models [10] as well as the investigation of frustrated magnetism [11].

While the single-particle physics appears to be well explored in this context, present-day state-of-the-art experiments focus on the investigation of many-body effects in driven lattices [12, 14, 15]. Indeed, interactions between the atoms in the gas are of particular interest as they may trigger dynamical quantum phase transitions in the presence of the driving, e.g., to a ferro- or antiferromagnetic state of the gas [12, 15]. This opens new avenues for engineering topological properties of many-body states. However, enhancing the role of interactions within a cold Bose gas can also give rise to a loss of spatial and many-body coherence [13, 14]³, which poses additional challenges for the controllability of the resulting state.

To explore the interplay of such interaction-induced transitions with the potential loss of coherence properties in an elementary context, we focus on a Bose–Einstein condensate (BEC) that is prepared in a one-dimensional (1D) optical lattice. A periodic shaking of the lattice is switched on with an amplitude for which the renormalized tunneling matrix element becomes negative. The quantum gas is thereby put in a metastable situation inside the 1D optical lattice. The presence of interactions will then trigger a dynamical instability which changes the nodal structure of the underlying wavefunction by inducing a transition from a periodic state (without nodes) to an antiperiodic or *staggered* state (with regularly spaced nodes) for which neighboring sites acquire opposite phases [5, 6, 17–19]. This phase transition can be readily observed in momentum space after a

³ The term *many-body coherence* refers here to Glauber's notion of coherence [16] applied to the Fock space of identical bosonic atoms. For instance, a BEC can be represented by a perfectly coherent state, while a thermal or Fock state is incoherent in this sense.



time of flight expansion [20], where it manifests itself in form of new interference peaks at the edge of the Brillouin zone that arise in between the ordinary static peaks (see figure 1(a)), as observed for instance in [5, 6, 11]. Interestingly, despite its spatial interferability the resulting staggered state does no longer exhibit many-body coherence (see footnote 4), which implies that this transition is not quantitatively accounted for with a standard mean-field approach.

In this article, we experimentally investigate the nucleation of such states in a 1D shaken optical lattice and compare our result with Bogoliubov and truncated Wigner (TW) calculations. Our experiments are complementary to nucleation studies of vortices in a rotating BEC [21–23], which provides another example of phase transition triggered by a dynamical instability [24, 25]. In those latter experiments, however, the kinetics of the transition could not be studied as a function of the density since the rotation weakens the transverse 2D confinement. We report hereafter a variation by one order of magnitude of the nucleation time of staggered states with the atomic density, and investigate experimentally and numerically the role of the renormalized tunneling rate and the modulation frequency on the out-of-equilibrium dynamics. We clearly identify the triggering mechanism through quantum or thermal fluctuations. We finally determine the range of frequency over which this nucleation can be observed and report on an accelerated transition to staggered states near interband resonances within the lattice.

2. Dynamical instability in a driven Bose–Hubbard system

Our experiments were realized on our rubidium-87 BEC machine that relies on a hybrid (magnetic and optical) trap [26]. The pure BEC of 10^5 atoms in the $F = 1$, $m_F = -1$ state is loaded in a horizontal 1D optical lattice (lattice spacing $d = 532$ nm) by superposing two counterpropagating lasers. The lattice modulation of the intensity occurs along the x axis referred to as the longitudinal axis in the following. The relative phase between the two lasers is modulated so that the atoms experience the potential

$$V(x, y, z, t) = \frac{1}{2}m(\omega_{\parallel}^2 x^2 + \omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2)) - \frac{V_0}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{d} + 2\varphi_0 \sin(2\pi\nu t)\right) \right], \quad (1)$$

where ω_{\parallel} (resp. ω_{\perp}) accounts for the longitudinal (resp. transverse) confinement of the hybrid trap and m is the mass of the atoms.

To obtain a first theoretical understanding, we perform a gauge transformation to the comoving frame in which the lattice is periodically tilted instead of shaken. This gauge transformation can be explicitly expressed in terms of the unitary operator

$$T(t) = \exp\left(\frac{2i}{\hbar} \nu m d \varphi_0 \cos(2\pi \nu t) x\right) \exp\left(-\frac{d}{\pi} \varphi_0 \sin(2\pi \nu t) \frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (2)$$

to be applied to the bosonic field operator of the many-body system. The single-particle Hamiltonian describing an atom in the above time-periodic potential is then transformed according to $H(t) \mapsto T(t)H(t)T^{-1}(t) + i\hbar\dot{T}(t)T^{-1}(t)$. In this new representation, we limit ourselves to the single-band approximation, which is valid for $V_0 < 4\pi\varphi_0 m\nu^2 d^2$. The motion of the atoms along the lattice is first modeled by a 1D tight-binding Hamiltonian in which each well of the lattice is represented by one site. This Hamiltonian is constituted by site-dependent on-site energies given by the longitudinal confinement of the trap, as well as by an approximately site-independent inter-site hopping matrix element J that depends on the strength of the lattice.

As a result of the modulation, this inter-well tunneling rate J is renormalized by a Bessel function

$$\bar{J} = J \times J_0(2\pi\varphi_0 h\nu/E_L), \quad (3)$$

where $E_L = \hbar^2/(2md^2)$ is the lattice characteristic energy⁴. This result is readily derived from a one-body analysis [27–29] but turns out to remain valid in the presence of two-body interactions [19]. A qualitative picture of the impact of this renormalization can be worked out perturbatively with the expression for the energy of the lowest band using the Peierls substitution: $E_0(k) = -2\bar{J} \cos(kd)$. For $\bar{J} > 0$ the minimum of the band is located at $k = 0$, and the Fourier transform of the wave function consists in a comb of peaks centered about $k = 0$ with a spacing $2\pi/d$. For $\bar{J} < 0$, the minima are located on the border of the Brillouin zone at $k = \pm\pi/d$.

When the sign of \bar{J} is suddenly changed through phase modulation, the system is therefore put in a metastable state. While this would not affect the mean-field dynamics of a BEC in the presence of a translationally invariant lattice, any deviation from perfect homogeneity in the condensate wavefunction or the lattice will give rise to a shrinking amplitude of the periodic condensate mode and to an exponentially increasing population of staggered modes at $k = \pm\pi/d$. This mechanism, through which two atoms starting with zero momentum acquire finite momenta of opposite sign, is an example of spontaneous four-wave mixing [5, 6, 17–19]. This elementary process occurs similarly in a condensate of 10^5 atoms where it can apply to any pair of atoms.

A qualitative understanding of this dynamical instability can be obtained from the homogeneous Bose–Hubbard Hamiltonian

$$\hat{H} = -\bar{J} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_{l+1} + \hat{b}_{l+1}^\dagger \hat{b}_l) + \frac{U}{2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \hat{b}_l, \quad (4)$$

where \hat{b}_l denotes the annihilation operator associated with the Wannier function centered on the l th well of the lattice and U accounts for a site-independent two-body interaction strength. Assuming the presence of a perfectly homogeneous condensate at $t = 0$ exhibiting n atoms per site, we make the Bogoliubov ansatz

$$\hat{b}_l(t) = \left[\sqrt{n} + \sqrt{\frac{d}{2\pi}} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} \hat{\Lambda}(k, t) e^{ikd} dk \right] e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (5)$$

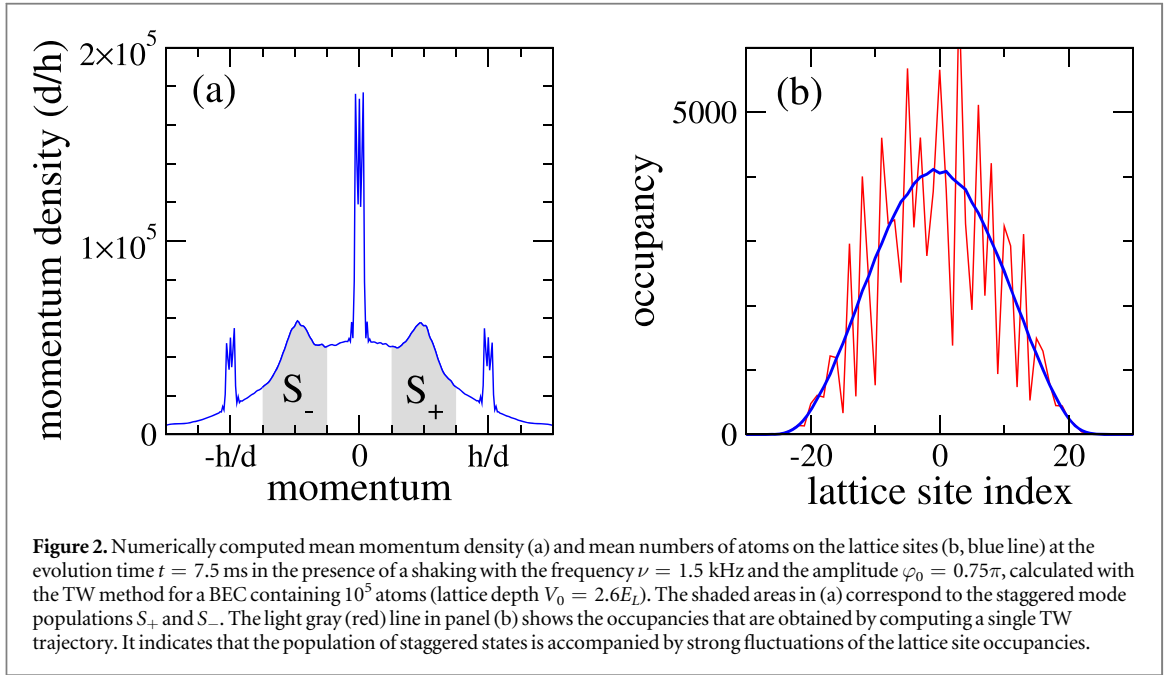
where $\mu = -2\bar{J} + nU$ is the chemical potential of the condensate. Following [30], we hereby introduce the (number-conserving) de-excitation operator $\hat{\Lambda}(k, t)$ which transfers an atom from an excited state with finite quasimomentum $kd \neq 0$ back to the condensate characterized by $k = 0$, while its adjoint operator $\hat{\Lambda}^\dagger(k, t)$ would revert this process. Linearizing the resulting equation for $\hat{\Lambda}(k, t)$ yields

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Lambda}(k, t) = 2\bar{J}(1 - \cos kd) \hat{\Lambda}(k, t) + nU [\hat{\Lambda}(k, t) + \hat{\Lambda}^\dagger(-k, t)] \quad (6)$$

whose solution evolves sinusoidally in time according to

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}(k, t) = & \left[\cos\Omega_k t - \frac{2i\bar{J}}{\Omega_k} (1 - \cos kd) \sin\Omega_k t \right] \hat{\Lambda}(k, 0) \\ & - \frac{i n U}{\Omega_k} [\hat{\Lambda}(k, 0) + \hat{\Lambda}^\dagger(-k, 0)] \sin\Omega_k t \end{aligned} \quad (7)$$

⁴The characteristic energy is given by $E_L = 4E_{\text{rec}}$ where $E_{\text{rec}} = \hbar^2/(2m\lambda^2)$ is the recoil energy associated with the absorption of one photon with wavelength $\lambda = 2d$ from one of the laser beams that generate the lattice.



with the Bogoliubov phonon frequencies

$$\Omega_k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{4\bar{J}(1 - \cos kd)[\bar{J}(1 - \cos kd) + nU]}. \quad (8)$$

The time-dependent population of non-condensed modes can then be directly evaluated in the Heisenberg representation using the commutator $[\hat{\Lambda}(k, 0), \hat{\Lambda}^\dagger(k', 0)] = \delta(k - k')$ as well as the fact that excited modes with $k \neq 0$ are unpopulated in the initial state. This straightforwardly yields

$$\langle \hat{\Lambda}^\dagger(k, t) \hat{\Lambda}(k', t) \rangle = (nU)^2 \left(\frac{\sin \Omega_k t}{\Omega_k} \right)^2 \delta(k - k'). \quad (9)$$

A dynamical instability occurs when \bar{J} becomes negative. In that case, Ω_k becomes imaginary for each quasiparticle mode that satisfies the relation $\bar{J}(1 - \cos kd) < 0 < \bar{J}(1 - \cos kd) + nU$, which according to equation (9) implies that tiny initial populations of such modes experience an exponential growth with time. For $nU > -4\bar{J}$, this growth is most pronounced for the staggered Bogoliubov modes defined by $kd = \pm\pi$, which describe an antiperiodic Bloch function within the lattice; the population of these staggered modes grows with the Lyapunov exponent $\lambda = [-8\bar{J}(2\bar{J} + nU)]^{1/2}/\hbar$.

In practice, the dominant deviations from translational invariance required to trigger the instability are provided by quantum or thermal fluctuations⁵. This can be verified by numerical simulations of the time evolution of the condensate using the TW method [31]. This method, implemented here within the single-band approximation at zero temperature, accounts for the effect of quantum fluctuations about the initial coherent state of the condensate, and is adapted to take into account the inhomogeneities of the confinement and the finite size of the BEC (see appendix A). Applied to the Bose–Hubbard Hamiltonian (4), it essentially amounts to sampling the time evolution of the quantum bosonic many-body state in terms of classical trajectories that evolve according to a discrete Gross–Pitaevskii equation.

The transition to staggered states is quantitatively characterized by the *nucleation time* representing the instance at which the population of a periodic condensate state within the shaken lattice becomes less significant than the population of a staggered state with antiperiodic nature. To this end, we define by P_0 the population of the central condensate peak located at $k = 0$, and by S_\pm the staggered states population about $\pm h/(2d)$ in momentum space. In the numerical simulations, P_0 and S_\pm are determined by integrating the momentum-space density $\rho(k) = n(k)a_{\parallel} \exp(-k^2 a_{\parallel}^2) / (\pi^{1/2} d)$ within the intervals $-\pi/2d < k < \pi/2d$ and $-\pi/2d < k \mp \pi/d < \pi/2d$, respectively, where $n(k)$ is the $2\pi/d$ -periodic momentum density that results from the TW simulation of the Bose–Hubbard dynamics (see shaded areas in figure 2(a)). The nucleation time is defined by

⁵ We should note that a *qualitatively* similar transition from a periodic to a staggered state can also arise on the level of the mean-field dynamics of the condensate described by the Gross–Pitaevskii equation, namely if the spatial homogeneity of the lattice is perturbed by the presence of an additional confinement. For the experimental parameters at hand, however, this perfectly coherent effect is entirely overshadowed by the depletion of the condensate arising due to the presence of quantum or thermal fluctuations.

the time beyond which $S_+ + S_-$ exceeds P_0 . It corresponds to the instance at which the peaks at $k = \pm\pi/d$ have the same accumulated contrast as the peak at $k = 0$ in the experimental absorption images.

3. Experimental findings and comparison with numerical simulations

The first experimental study that we performed deals with the nucleation time of staggered states for different values of the renormalized tunneling rate \bar{J} in the regime where it acquires negative values. As predicted by the expression for the Lyapunov exponent, we indeed observed a strong increase of the nucleation time when we approach an amplitude of modulation that corresponds to the zero of the Bessel function (see figure 1(c)). Good agreement is obtained with TW computations of the nucleation time indicated by the solid (dashed) lines in figure 1(b), which were conducted according to the above prescriptions assuming the presence of 10^5 (5×10^4) atoms in the condensate⁶. As these simulations were performed at zero temperature, thermal fluctuations seem to play a minor role in this set of data. This is indeed consistent with time-of-flight measurements that we carried out for this parameter regime, which could only yield an upper value estimation $T < 5$ nK for the temperature.

The evolution of the atomic gas in momentum space is illustrated in figure 1(a) which shows a sequence of time-of-flight absorption images taken after various evolution times. We clearly see the transition from an initially coherent BEC, characterized by a sharp central peak at $k = 0$ and by two side peaks at $k = \pm 2\pi/d$, to a cloud that oscillates between two maxima at $k = \pm\pi/d$. These latter peaks are significantly broader than the initial condensate peaks, which is indicative of an effective increase of the temperature as a consequence of the dynamical instability mechanism [14, 19, 32, 33]. As shown in figure 2(a), this is also observed in the TW simulations, which also reveal that many-body coherence is lost in those side peaks (see appendix A). The sharp coherent BEC peaks at $k = 0$ and $\pm 2\pi/d$ are still present in the numerical simulations, in contrast to the experiment where they are nearly completely washed out after the nucleation. We attribute this to the single-band approximation that we apply in our TW approach and to the effect of quantum fluctuations in the transverse degrees of freedom within the lattice [34], which are not accounted for in the numerical simulations.

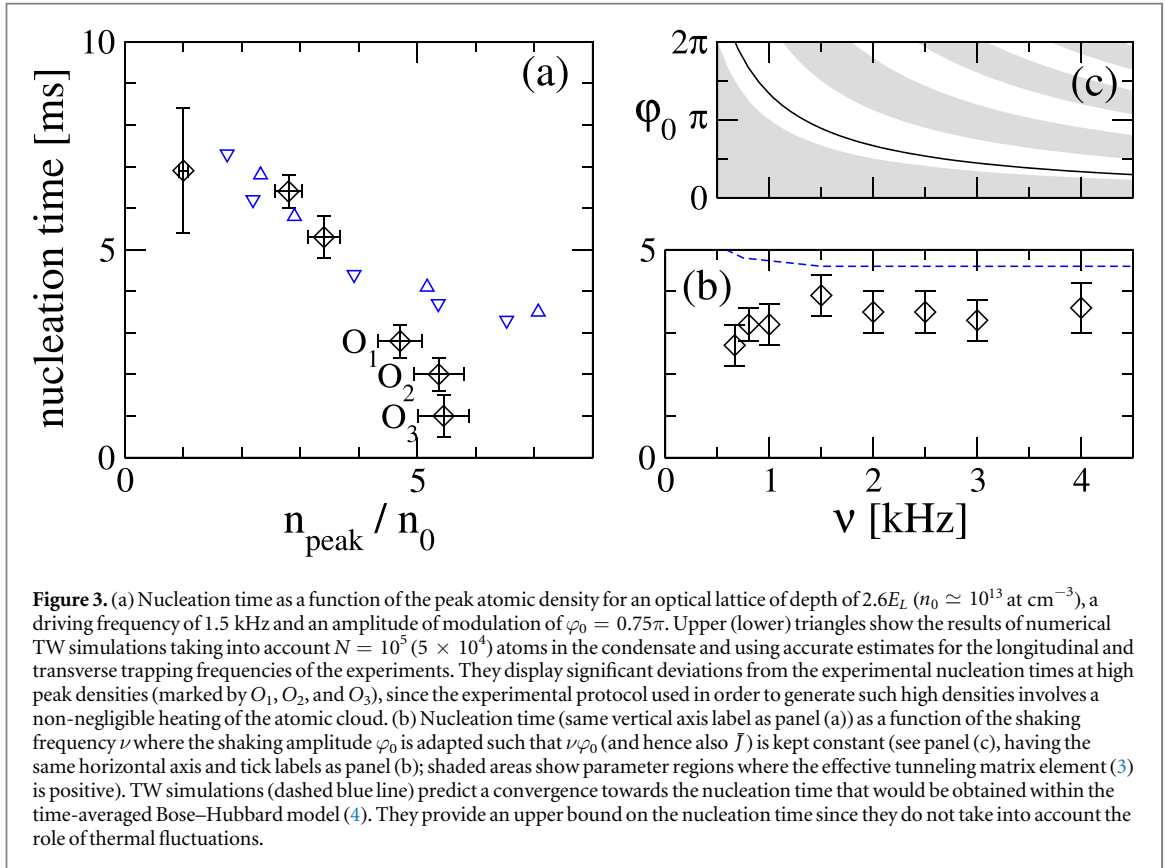
The TW approach allows one to obtain complementary insight into the nature of the staggered states that would not be easily accessible in the experiment. This concerns, in particular, the behavior of lattice site occupancies. While their mean values $\langle \hat{n}_i \rangle = \langle \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_i \rangle$ do not display any notable feature in the course of the time evolution, their rms widths $(\langle \hat{n}_i^2 \rangle - \langle \hat{n}_i \rangle^2)^{1/2}$ dramatically increase as soon as staggered states become significantly populated. This is illustrated in figure 2(b) where the mean lattice site occupancies (averaged over 10 000 trajectories) are plotted together with the occupancies that were obtained from a single trajectory (shown in red), at an evolution time $t = 7.5$ ms that exceeds the nucleation process. We see pronounced spatial fluctuations of the lattice site occupancies. They give rise to an enhancement of the interaction energy contained within the atomic gas, which compensates for the loss of kinetic energy that is entailed by the transition to staggered states in the presence of the driving.

The occurrence of such spatial fluctuations is strongly reminiscent of *gap solitons* [35] and indicates that the formation of staggered states in momentum space is accompanied by the generation of solitons. This interpretation is consistent with the Bogoliubov mode analysis in a 1D shaken optical lattice of [19]. It is further confirmed by the fact that the spatial extension of the density peaks is indeed on the order of the theoretical prediction $\sigma \simeq 2.6d [2|\bar{J}|/(n_{\max} U)]^{1/2} \simeq 0.7d$ for the full width at half maximum (FWHM) of a gap soliton according to [35] with $n_{\max} \simeq 5000$ the maximal occupancy within a lattice site (see appendix B for a more detailed account on such gap solitons). In our specific (three-dimensional) experimental context, these gap solitons are expected to quickly disintegrate into vortices and vortex rings through the snake instability [36]. By preparing the condensate in highly elongated (cigar-shaped) trapping potentials, they can be stabilized. However, their observation would require an *in situ* imaging with an optical resolution on the order of 500 nm.

To explore the dependence of the nucleation time on the atomic density, we performed experiments where we changed the intensity of the vertical beam of the crossed dipole trap after the BEC production. In this manner, we could vary the atomic peak density between 5.5×10^{13} at cm^{-3} and 10^{13} at cm^{-3} and⁷ observe a large variation of the nucleation time. As shown in figure 3(a), the experimental results are in good agreement with TW simulations, except for high peak densities $n_{\text{peak}} \gtrsim 5 \times 10^{13}$ at cm^{-3} . Indeed, to induce such high densities we compress adiabatically the trap and therefore increase the temperature. From the data point O_1 to the data point O_2 in figure 3(a) the temperature is doubled, and it is further enhanced by a factor 1.6 from O_2 to the data point O_3 yielding $T_{O_3} \simeq 13$ nK. Thanks to this protocol, we clearly observe the onset of the role of thermal fluctuations in the nucleation process. This is to be contrasted with the low density regime where the nucleation is consistently explained by quantum fluctuations solely. Such a quantitative comparison of

⁶ We estimate to have between 5×10^4 and 10^5 atoms in our experimentally prepared Bose–Einstein condensates.

⁷ The calibration of the density was confirmed by an *in situ* on-resonance strong intensity absorption imaging as described in [37].

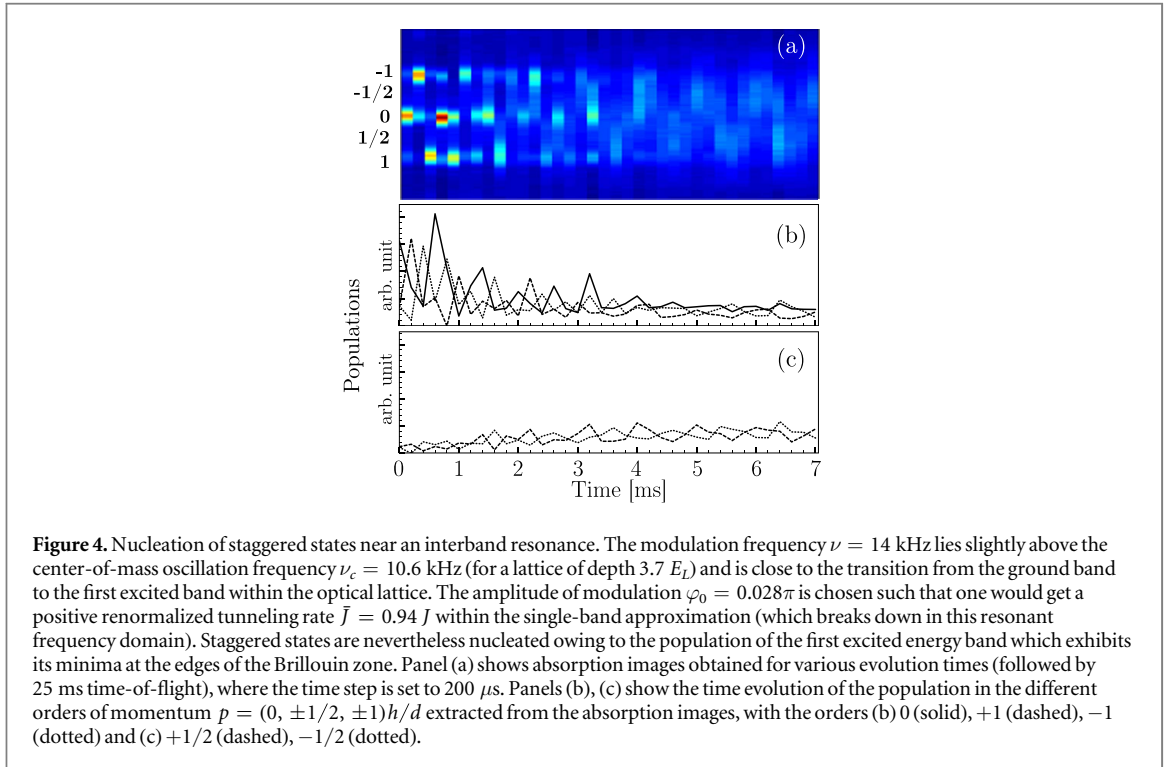


experimental data with a theoretical approach at zero temperature without adjustable parameters remains the only method to identify the crossover between quantum and thermal fluctuations.

Finally, we investigate in figure 3(b) the dependence of the nucleation time with the driving frequency ν where we adapt the shaking amplitude $\varphi_0 = (0.889\pi/\nu) \times 1.5$ kHz such that the argument of the Bessel function is kept constant according to equation (3) yielding $\bar{J} \simeq -0.33J$. As we have the same time-averaged Bose–Hubbard Hamiltonian (4) for all ν , the nucleation time is found to vary only rather weakly with the driving frequency. This behavior is expected to change for $\nu \sim \nu_c$ where ν_c corresponds to the center of mass oscillation frequency (see appendix C) [26]. Spanning the interval $0 < \nu < \nu_c$, we could nucleate staggered states only for a frequency ν below $\sim \nu_c/2$ (see figure 3(b) with $V_0 = 2.6E_L$ and $\nu_c = 8.1$ kHz, and appendix D), which defines experimentally the range of validity of the single band approximation. However, changing the driving parameters such that $\bar{J} > 0$ can give rise to a resurgence of nucleation near the interband resonance. For a lattice depth $V_0 = 3.7E_L$, a modulation frequency $\nu = 14$ kHz and $\varphi_0 = 0.028\pi$ a fast transition to staggered states within 2.7 ms was observed, as shown in figure 4. We attribute this to the population of the first excited band triggered by quantum or thermal fluctuations, which for $\bar{J} > 0$ has an inverted parabolic shape near $k = 0$ and exhibits its minima at $k = \pm\pi/d$ in the Brillouin zone. The numerical study of the appearance of staggered states in this frequency regime therefore requires a more involved treatment taking into account higher bands.

4. Conclusion

In summary, we presented an experimental study of the dynamical transition of a BEC from periodic to staggered states within a periodically shaken optical lattice. As was revealed by TW simulations, this transition is accompanied by a global loss of many-body coherence, even though spatial interferability between different lattice sites is still preserved. It is triggered by quantum or thermal fluctuations, depending on the temperature within the BEC. As key ingredient we identified the inversion of the effective energy band in momentum space, which exhibits a maximum in the center and minima at the edges of the Brillouin zone. This inversion is responsible for the formation of density fluctuations within the lattice that are closely related to gap solitons. The presence of an inverted energy-momentum dispersion relation lies also at the heart of the rapid nucleation of staggered states observed for positive renormalized tunneling near interband resonances, which involve the population of the first excited band within the lattice.



The present experimental setting can be exploited in order to yield a quantitative diagnostic tool for determining interaction and fluctuation effects in similar dynamical transitions involving, e.g. ferro- or antiferromagnetic states [15]. Further studies in the high-frequency regime will be interesting in order to explore the nucleation of staggered states through near-resonant interband transitions in more detail.

Acknowledgments

We thank J Dalibard, N Goldman, H Lignier and M Oberthaler for useful discussions. This work was supported by Direction Générale de l'Armement (DGA), Programme Investissements d'Avenir ANR-11-IDEX-0002-02, reference ANR-10-LABX-0037-NEXT, and by the Programme Hubert Curien 2016.

Appendix A. Implementation of the TW method

The starting point for the implementation of the TW method is the effective many-body Bose–Hubbard Hamiltonian

$$\hat{H}(t) = -J \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_{l+1} e^{-i\theta(t)} + \hat{b}_{l+1}^\dagger \hat{b}_l e^{i\theta(t)}] + \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[V_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + \frac{U_l}{2} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \hat{b}_l \right] \quad (\text{A.1})$$

which describes the dynamics of a BEC within a periodically shaken lattice. Here we employ a single-band approximation within the reference frame that is comoving with the shaken lattice. The shaking is incorporated by means of a periodically time-dependent Peierls phase

$$\theta(t) = 2\pi\varphi_0 \frac{h\nu}{E_L} \cos(2\pi\nu t) \quad (\text{A.2})$$

within the inter-site hopping matrix elements of the lattice. The on-site energies

$$V_l = \frac{1}{2} m\omega_{\parallel}^2 d^2 l^2 \quad (\text{A.3})$$

account for the presence of the longitudinal harmonic confinement with the oscillation frequency ω_{\parallel} .

For lattice strengths $V_0 = s E_L$ with $s \gtrsim 2$, we can approximately represent the Wannier function within the l th well by the Gaussian

$$\Phi_l(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2}a_0}} \exp\left[-\frac{(x - ld)^2}{2a_0^2}\right], \quad (\text{A.4})$$

where

$$a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}} = \frac{\sqrt{2s^{-1/2}}}{k} \quad (\text{A.5})$$

is the oscillator length associated with the frequency $\omega_0 = s^{1/2}E_L/\hbar$ of oscillations within each well of the lattice. The effective hopping parameter between adjacent wells can be determined from a semiclassical Wentzel–Kramers–Brillouin (WKB) ansatz [38, 39]. We obtain

$$J = \frac{\hbar\omega_0}{\sqrt{e\pi}} e^{-\sigma} \quad (\text{A.6})$$

with the dimensionless imaginary action

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{2s} \int_{\arccos\eta}^{\pi} \sqrt{\eta - \cos u} \, du \\ &= \sqrt{8s(\eta + 1)} E\left[\frac{\pi - \arccos\eta}{2}, \sqrt{\frac{2}{\eta + 1}}\right], \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

where we introduce the parameter

$$\eta = \exp\left(-\frac{1}{2s^{1/2}}\right) - \frac{1}{2s^{1/2}} \quad (\text{A.8})$$

and the incomplete elliptic integral of the second kind $E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta$. Note that this WKB ansatz is based on the approximate expression $E_0 = (1 - \eta)s^{1/2}\hbar\omega_0/2$ for the ground state energy within each well, which is obtained from the expression (A.4) for the Wannier function using first-order perturbation theory.

A complication is introduced by the fact that the lattice wells in the experiment are not truly 1D but rather exhibit a pancake shape, as the transverse confinement frequency ω_\perp of the trap is comparable to the longitudinal one ω_\parallel and hence much larger than ω_0 . For the total atom numbers at hand, the BEC exhibits a parabolic Thomas–Fermi profile in its transverse density distribution within lattice wells that are located near the center of the trap. The interaction energy within such a well therefore scales in a non-quadratic manner, namely $\propto n_l^{3/2}$, with the occupancy n_l of that well, which implies that the effective on-site interaction parameters U_l appearing in the Bose–Hubbard Hamiltonian (A.1) scale as $n_l^{-1/2}$ with the occupancies of the corresponding sites. For weakly populated lattice sites that are located at the edge of the atomic cloud, on the other hand, we can justify the perturbative approximation $g \simeq 2\hbar\omega_\perp a_s$ [40] for the effective 1D interaction strength with $a_s \simeq 5.3 \times 10^{-9}$ m the *s*-wave scattering length of ^{87}Rb atoms, which yields $U_l \simeq 2\hbar\omega_\perp a_s / (\sqrt{2\pi} a_0)$ for those sites.

In order to simultaneously account for weakly and strongly occupied sites of the lattice, we employ a heuristic interpolation formula

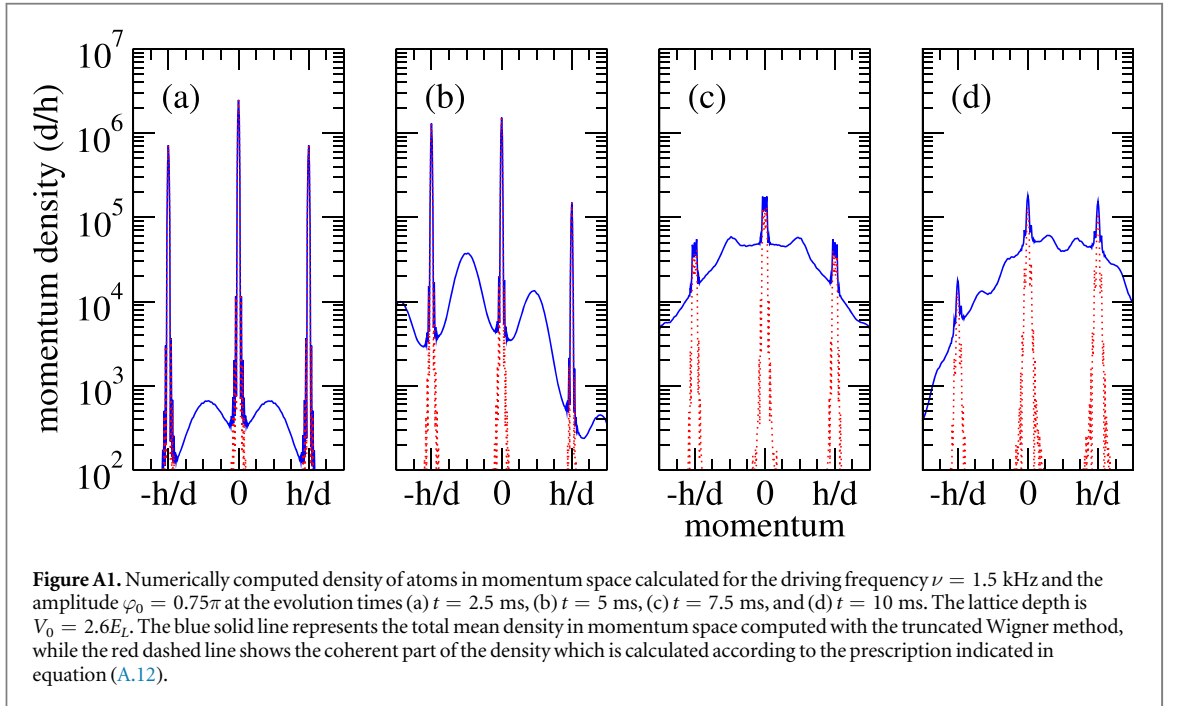
$$U_l = \frac{2\hbar\omega_\perp a_s / (\sqrt{2\pi} a_0)}{\sqrt{1 + 4n_l a_s / (\sqrt{2\pi} a_0)}} \quad (\text{A.9})$$

between the perturbative and the Thomas–Fermi regime [41]. We furthermore make the simplifying assumption that the lattice site occupancies n_l remain fairly constant and are not substantially altered in the course of time evolution. While this constraint appears to be well respected on average, significant fluctuations of the lattice site occupancies about their average values may nevertheless arise if the condensate undergoes a transition to a staggered state (as seen in figure 2(b)).

Having thereby determined all relevant parameters of the Bose–Hubbard system (A.1), we can then derive the discrete nonlinear Schrödinger equation

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \psi_l(t) &= -J[\psi_{l+1}(t)e^{i\theta(t)} + \psi_{l-1}(t)e^{-i\theta(t)}] \\ &\quad + V_l \psi_l(t) + U_l[|\psi_l(t)|^2 - 1]\psi_l(t) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

by means of which the classical fields ψ_l that sample the quantum many-body state of the system have to be evolved with time in the framework of the TW method. For the initial state we assume the presence of a perfect BEC within the optical lattice, which is in an idealized manner described by a coherent state in the classical field space. This leads to the choice $\psi_l(0) = \phi_l + \chi_l$ for the initial value of ψ_l where ϕ_l corresponds to the condensate wavefunction within the (unshaken) lattice at $t = 0$. In practice, ϕ_l is determined by imaginary-time propagation of the Gross–Pitavskii equation that describes the condensate at $t = 0$ (which is nearly identical with



equation (A.10), except that it exhibits real hopping and the usual $U_l|\psi_l|^2\psi_l$ interaction term). This thereby yields $n_l = |\phi_l|^2$ for the determination of the on-site interaction strengths according to equation (A.9). χ_l is a complex random number drawn from a Gaussian probability distribution which is centered about the origin in the complex plane and yields the variance $|\chi_l|^2 = 1/2$. Effects due to the presence of finite temperature and initial quantum depletion within the atomic cloud are therefore neglected in this study.

Expectation values of one-body operators are then evaluated according to the prescription

$$\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger \rangle_t = \overline{2\psi_l^*(t)\psi_l(t)}, \quad (\text{A.11})$$

where $\overline{\psi_l^*(t)\psi_l(t)}$ denotes the statistical average (over TW trajectories) of the expression $\psi_l^*(t)\psi_l(t)$. This yields in particular $\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \rangle_t = \overline{|\psi_l(t)|^2} - 1/2$ for the average occupancy of the site l at time t . A similar subtraction of a ‘half-particle’ is needed in order to determine the average distribution of atoms in momentum space.

The TW method also allows one to estimate the remaining condensate fraction within the atomic cloud, namely through the coherent part of one-body observables $\hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l$ defined by

$$\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \rangle_t^{\text{coh}} = \overline{\psi_l^*(t)\psi_l(t)}. \quad (\text{A.12})$$

The non-condensed fraction associated with the population of the site l is then approximately determined as

$$\langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \rangle_t - \langle \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \rangle_t^{\text{coh}} = \overline{|\psi_l(t)|^2} - \overline{|\psi_l(t)|^2} - 1/2. \quad (\text{A.13})$$

Performing a similar calculation in momentum space, we thereby find in our numerical simulations that many-body coherence is entirely lost in the two side peaks associated with the staggered populations S_\pm shown in figure 2, while it is still preserved within the central peak at $p = 0$ as well as within the side peaks at $p = \pm h/d$. This is shown in figure A1.

Appendix B. Bright solitons in periodically driven Bose–Hubbard systems

In this section, we outline the theory of bright solitons within repulsively interacting BEC that are prepared in periodically driven 1D optical lattices. Our starting point is the simplified Bose–Hubbard Hamiltonian (4) which assumes the presence of a homogeneous optical lattice of infinite extension. A BEC prepared within this lattice therefore evolves according to the discrete nonlinear Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_l(t) = -\bar{J}[\psi_{l+1}(t) + \psi_{l-1}(t)] + U|\psi_l(t)|^2 \psi_l(t), \quad (\text{B.1})$$

where $U > 0$ represents the on-site interaction strength and \bar{J} is the effective renormalized tunneling rate according to equation (3).

For $\bar{J} < 0$, equation (B.1) admits approximate solitonic solutions of the form

$$\psi_l(t) = \sqrt{n_0} \operatorname{sech}[(l - l_0)/w] e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (\text{B.2})$$

which correspond to a hyperbolic secant function $\operatorname{sech}(x) \equiv 1/\cosh(x)$ centered about some lattice site index $l_0 \in \mathbb{Z}$ with the peak density n_0 and the characteristic width w in terms of the lattice spacing. Indeed, we can approximately express

$$\psi_{l+1}(t) + \psi_{l-1}(t) \simeq 2\psi_l(t) + \frac{\partial^2}{\partial l^2} \psi_l(t) \quad (\text{B.3})$$

for $w \gg 1$ and evaluate

$$\frac{\partial^2}{\partial l^2} \psi_l(t) = \frac{1}{w^2} \psi_l(t) - \frac{2}{n_0 w^2} |\psi_l(t)|^2 \psi_l(t) \quad (\text{B.4})$$

using $\operatorname{sech}''(x) = \operatorname{sech}(x) - 2\operatorname{sech}^3(x)$ for all $x \in \mathbb{R}$. Inserting the expressions (B.3) and (B.4) into the discrete Gross–Pitaevskii equation (B.1) yields the relation

$$w = \sqrt{\frac{-2\bar{J}}{Un_0}} \quad (\text{B.5})$$

between the width w and the height n_0 of the soliton. Its associated chemical potential

$$\mu = -2\bar{J} + \frac{1}{2}Un_0 \quad (\text{B.6})$$

is located within the band gap above the ground band of the driven optical lattice.

From the shape of the hyperbolic secant function we infer the FWHM of the gap soliton as

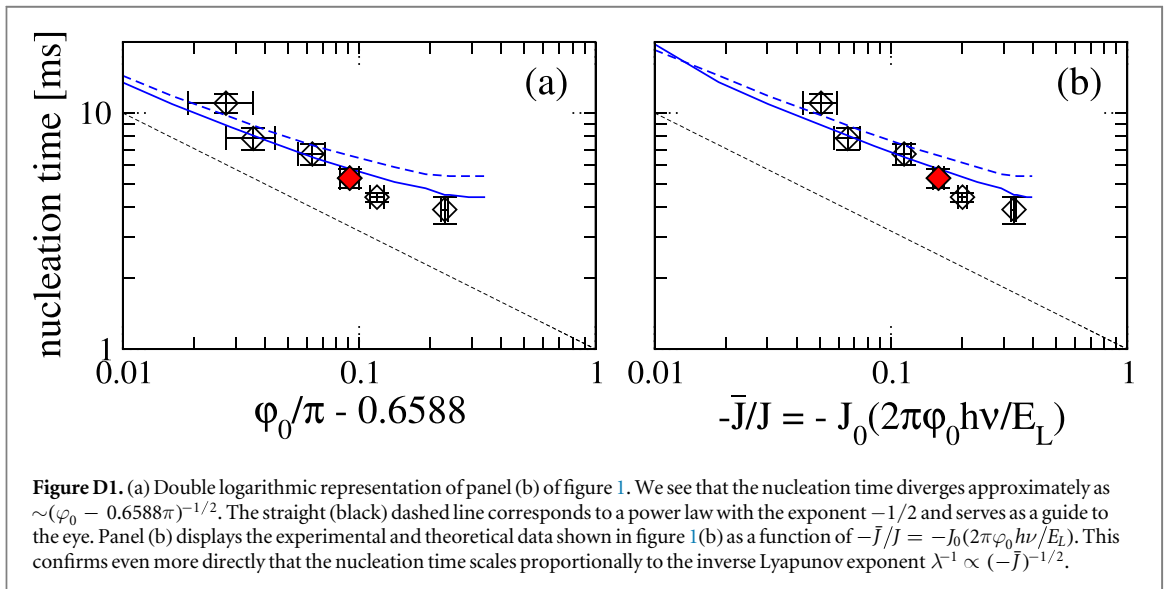
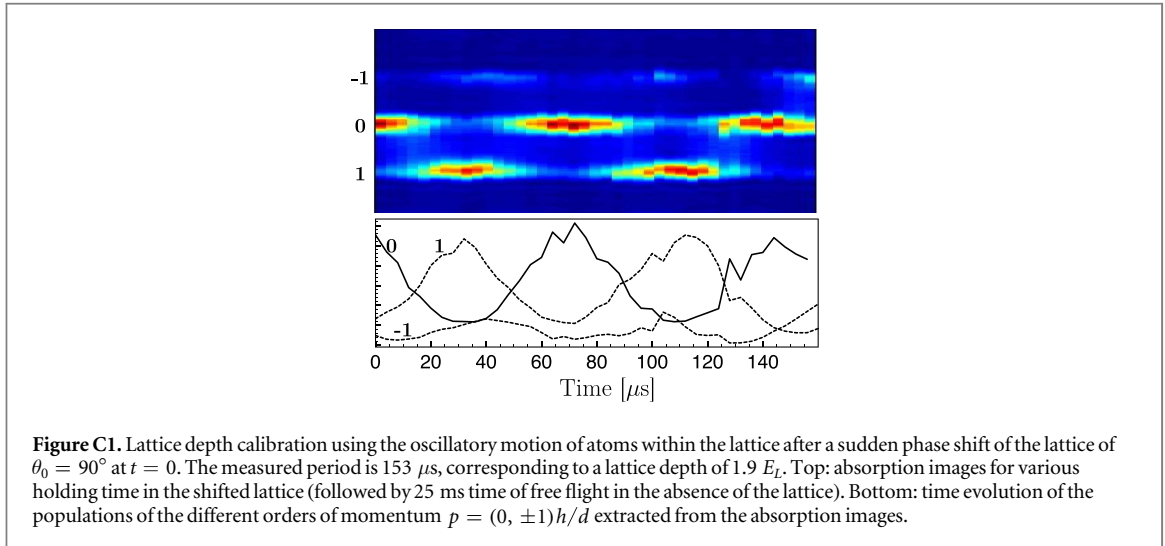
$$\sigma \simeq 2.634 wd = 2.634 \sqrt{\frac{-2\bar{J}}{Un_0}} d, \quad (\text{B.7})$$

where d is the lattice period. For the experiment shown in figure 1(a), which was done with the shaking amplitude $\varphi_0 = 0.75\pi$ yielding $\bar{J} \simeq -0.16J$ and which featured an average occupancy of some 3300 atoms per lattice site as can be seen in figure 2(b), we obtain through equations (A.6) and (A.9) $\bar{J}/U \simeq 180$ on average within the lattice. Inferring again from figure 2(b) a peak height of the order of $n_0 \simeq 5000$, we finally obtain $\sigma \simeq 0.7 d$ for the FWHM width of the soliton, which is in fairly good agreement with the TW calculation shown in figure 2(b).

We should note that the above reasoning is rather approximate insofar as we cannot *a posteriori* justify the approximation (B.3) for such narrow widths. This is reflected by the fact that the spiky peaks shown in figure 2(b) are not really isolated from each other in a solitary manner, but rather form a dense array. Their occurrence gives rise to an enhancement of the total interaction energy contained within the atomic gas (as would any inhomogeneity in the spatial density distribution), and this enhancement compensates for the loss of kinetic energy that is associated with the transfer of atoms from the condensate state in the presence of the driving at $k = 0$ (highly energetic) to the staggered state characterized by $k = \pm\pi/d$ (lowly energetic). This situation is perfectly complementary to the formation of conventional bright solitons within an attractively interacting 1D BEC, where the enhancement of kinetic energy due to the loss of homogeneity would be compensated by the gain of interaction energy.

Appendix C. Lattice depth calibration

We perform a precise calibration of the lattice depth using the out-of-equilibrium dynamics of a chain of BECs in an optical lattice following the method we demonstrated in [26]. To do so, we first load adiabatically a BEC in the lattice, creating a chain of BECs trapped at the bottom of the lattice sites. At $t = 0$, we suddenly shift the phase of the lattice, which triggers the center-of-mass motion of the atomic wave packets in each well (shift of $\theta_0 = 90^\circ$ here). After a given holding time in the shifted lattice, we perform a 25 ms time-of-flight. The experimental absorption images (see figure C1) show the interferences of the different wave packets located in each lattice site. The interference figure is centered on the central interference peak (0th order) corresponding to wave packets that were released while being at rest in the shifted lattice, i.e. at the turning points of the oscillatory motion. We observe oscillations of the population in the 0th order from which we extract the period of the center-of-mass motion of the atomic wave packets. This period can be directly related to the depth of the optical lattice. Indeed, the intrasite dipole mode is coupled to a two phonon transition between the ground state band and the second excited band at $k = 0$:

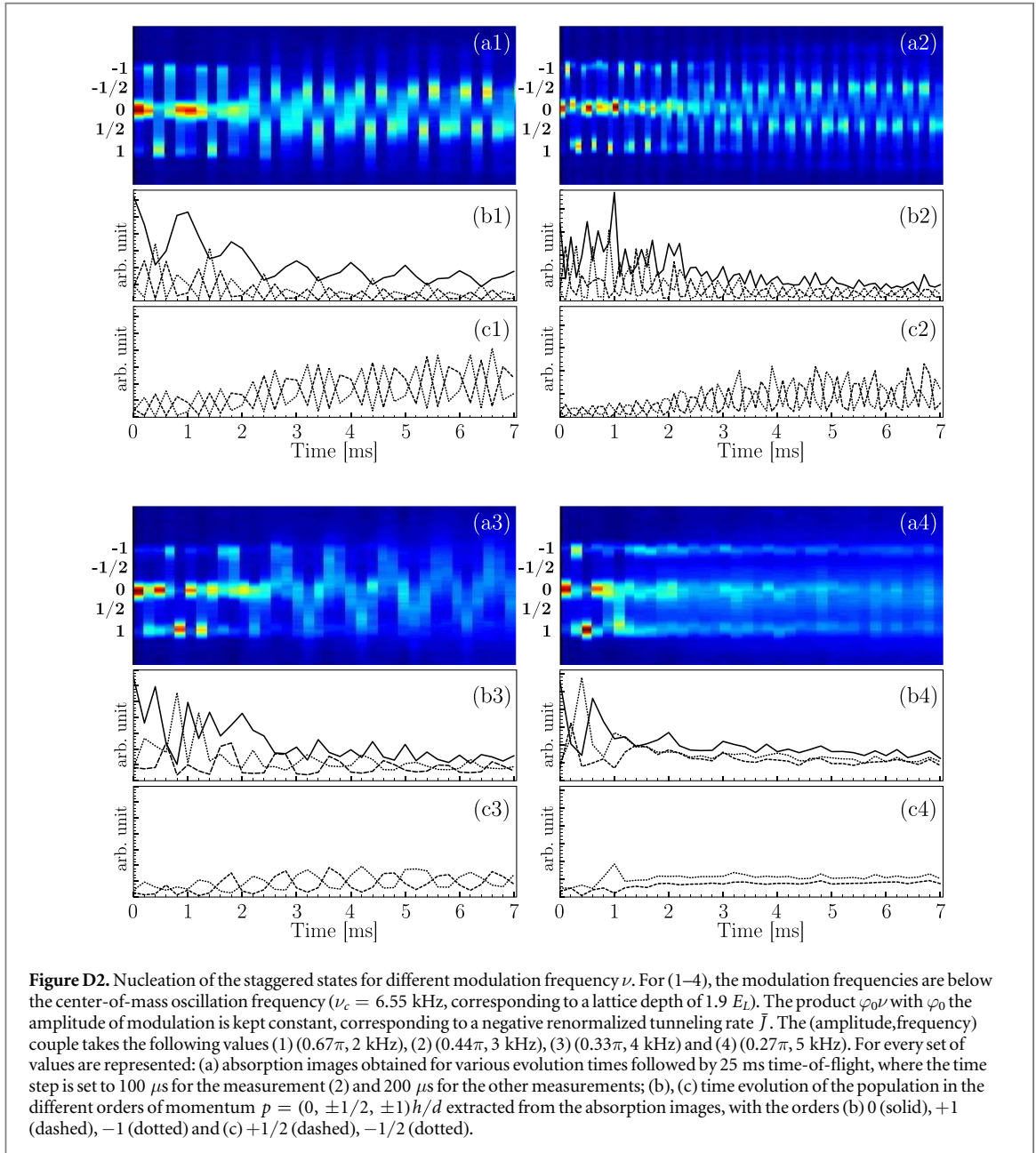


$$T_c = \frac{1}{\nu_c} = \frac{2\hbar}{E_3(k=0) - E_1(k=0)}. \quad (\text{C.1})$$

In this way, we find a lattice of depth $1.9 E_L$ corresponding to the measured period $T_c = 153 \mu\text{s}$. Interestingly, we have shown that this kind of measurement is robust against the value of the phase shift of excitation θ_0 , the atom–atom interaction strength, and the external confinement superimposed to the lattice. For these values of the phase shift and the lattice depth, tunneling plays an important role in the wave packet dynamics insofar as an important fraction of the wave packets tunnels to the neighboring lattice sites. It explains for instance the population of the -1 order for an evolution time in the shifted lattice of $40 \mu\text{s}$ but also more generally the asymmetry of the populations in the ± 1 orders. We have studied in details such effect in [26].

Appendix D. Parameter ranges for the nucleation of staggered states

This section is devoted to a more extensive discussion of the parameter ranges within which a nucleation of staggered states can be observed. We start by recalling that the dependence of the nucleation time with the driving amplitude φ_0 is studied in detail within figure 1. As key feature we find that the nucleation time diverges when φ_0 approaches the value 0.6588π where the Bessel function appearing within equation (3) of the main text has its first node. Identifying this nucleation time approximately with the inverse of the Lyapunov exponent $\lambda = [-8\bar{J}(2\bar{J} + nU)]^{1/2}/\hbar$ that characterizes the dynamical instability of the condensate, and assuming an approximately linear scaling (with negative slope) of the effective renormalized tunneling rate \bar{J} with the distance of φ_0 from the node of the Bessel function, we should expect that the nucleation time diverges as

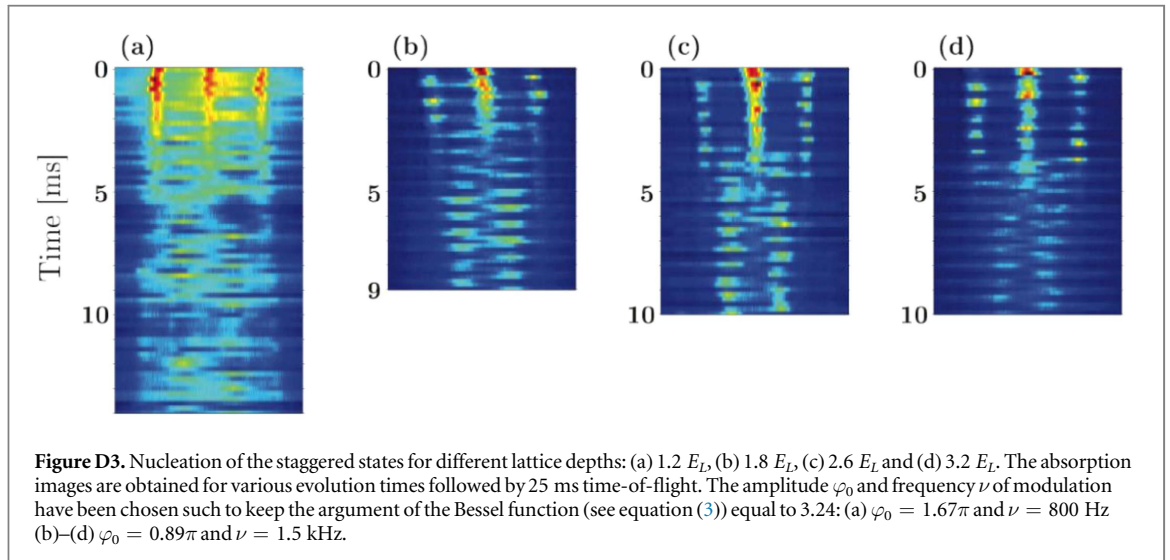


$\sim(\varphi_0 - 0.6588\pi)^{-1/2}$ when approaching the node of the Bessel function. As we can see in figure D1, this is indeed confirmed when plotting the experimental and numerical nucleation time data of figure 1(b) in a double logarithmic representation.

D.1. Frequency range

We extend the study of the effect of the modulation frequency ν on the nucleation of staggered states performed in the main article to determine the frequency range in which such states appear. We first use a lattice of depth $1.9 E_L$, characterized by a center-of-mass oscillation of frequency $\nu_c = 6.55$ kHz (see above) and perform phase modulation experiments at different modulation frequencies below ν_c (see figure D2 (1–4)). We maintain the product $\varphi_0\nu$ constant with φ_0 the amplitude of modulation, yielding an effective tunneling rate \bar{J} that is constant and negative. The argument of the Bessel function (see equation (3)) is chosen equal to 3.24.

At the lowest modulation frequencies (2 and 3 kHz), we clearly observe the nucleation of staggered states with the population of staggered modes at momentum $p = \pm h/2d$, whereas for larger modulation frequencies ($\nu = 5$ kHz), we do not significantly populate the staggered modes (see figure D2(c4)). More specifically, we observe the population of staggered modes for modulation frequencies up to typically $\nu_c/2$, meaning for modulation frequencies that are not too close to excitations frequencies towards the excited bands. The experiments presented in figure 3 on the effect of the modulation frequency were performed with a lattice of depth $2.6 E_L$, corresponding to a center-of-mass oscillation frequency $\nu_c = 8.1$ kHz. As those experiments were



performed for modulation frequencies up to 4 kHz, we could see the population of the staggered modes for each chosen modulation frequency.

D.2. Lattice depth range

We perform phase modulation experiments for different lattice depths ranging from $1.2 E_L$ to $3.2 E_L$ and observe the nucleation of staggered states in this range of lattice depth (see figure D3). The product $\varphi_0 \times \nu$ is kept constant and corresponds to a negative effective tunneling rate \bar{J} . The dynamics for the population of staggered modes look similar to the dynamics shown in figure 1, but for the lattice depth $1.2 E_L$. For the lattice depth $1.2 E_L$, the measurement is performed at a lower modulation frequency and as a consequence with a larger amplitude of modulation. For such an amplitude of modulation, the associated classical phase space starts to exhibit chaotic zones, which is probably responsible for the disrupted aspect of the dynamics observed in this case (see figure D3(a)).

References

- [1] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P and Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [2] Giorgini S, Pitaevskii L P and Stringari S 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1215
- [3] Bloch I, Dalibard J and Zwerger W 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 885
- [4] Bloch I, Dalibard J and Nascimbène S 2012 *Nat. Phys.* **8** 267
- [5] Gemelke N, Sarajlic E, Bidel Y, Hong S and Chu S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 170404
- [6] Lignier H, Sias C, Ciampini D, Singh Y, Zenesini A, Morsch O and Arimondo E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 220403
- [7] Kierig E, Schnorrberger U, Schieteringer A, Tomkovic J and Oberthaler M K 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 190405
- [8] Goldman N and Dalibard J 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031027
- [9] Hofstadter D R 1976 *Phys. Rev. B* **14** 2239
- Aidelsburger M, Atala M, Nascimbène S, Trotzky S, Chen Y-A and Bloch I 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 255301
- Aidelsburger M, Atala M, Lohse M, Barreiro J T, Paredes B and Bloch I 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185301
- Miyake H, Siviloglou G A, Kennedy C J, Burton W C and Ketterle W 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 185302
- Aidelsburger M, Lohse M, Schweizer C, Atala M, Barreiro J T, Nascimbène S, Cooper N R, Bloch I and Goldman N 2015 *Nat. Phys.* **11** 162
- [10] Haldane F D M 1988 *Phys. Rev. Lett.* **61** 2015
- Jotzu G, Messer M, Desbuquois R, Lebrat M, Uehlinger T, Greif D and Esslinger T 2014 *Nature* **515** 237
- [11] Struck J, Ölschläger C, Le Targat R, Soltan-Panahi P, Eckardt A, Lewenstein M, Windpassinger P and Sengstock K 2011 *Science* **333** 996
- Struck J et al 2013 *Nat. Phys.* **9** 738
- [12] Parker C V, Ha L-C and Chin C 2013 *Nat. Phys.* **9** 769
- Clark L W, Feng L and Chin C 2016 *Science* **354** 606
- Feng L, Clark L W, Gaj A and Chin C 2018 *Nat. Phys.* **14** 269
- [13] Weinberg M, Ölschläger C, Sträter C, Prella S, Eckardt A, Sengstock K and Simonet J 2015 *Phys. Rev. A* **92** 043621
- [14] Reitter M, Näger J, Wintersperger K, Sträter C, Bloch I, Eckardt A and Schneider U 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 200402
- [15] Görg F, Messer M, Sandholzer K, Jotzu G, Desbuquois R and Esslinger T 2018 *Nature* **553** 481–5
- [16] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **130** 2529
- [17] Hilligsøe K M and Mølmer K 2005 *Phys. Rev. A* **71** 041602
- [18] Campbell K K, Mun J, Boyd M, Streed E W, Ketterle W and Pritchard D E 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 020406
- [19] Lellouch S, Bukov M, Demler E and Goldman N 2017 *Phys. Rev. X* **7** 021015
- [20] Pedri P, Pitaevskii L, Stringari S, Fort C, Burger S, Cataliotti F S, Maddaloni P, Minardi F and Inguscio M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 220401
- [21] Madison K W, Chevy F, Wohlleben W and Dalibard J 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 806
- [22] Smith N L, Heathcote W H, Krueger J M and Foot C J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 080406

- [23] Haljan P C, Coddington I, Engels P and Cornell E A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 210403
- [24] Sinha S and Castin Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 190402
- [25] Lobo C, Sinatra A and Castin Y 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 020403
- [26] Fortun A, Cabrera-Gutiérrez C, Condon G, Michon E, Billy J and Guéry-Odelin D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 010401
- [27] Dunlap D H and Kenkre V M 1986 *Phys. Rev. B* **34** 3625
- [28] Eckardt A, Weiss C and Holthaus M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 260404
- [29] Eckardt A 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 011004
- [30] Castin Y and Dum R 1998 *Phys. Rev. A* **57** 3008
- [31] Steel M J, Olsen M K, Plimak L I, Drummond P D, Tan S M, Collett M J, Walls D F and Graham R 1998 *Phys. Rev. A* **58** 4824
- Sinatra A, Lobo C and Castin Y 2002 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **35** 3599
- Gardiner C and Zoller P 2004 *Quantum Noise* 3rd edn (Berlin: Springer)
- Polkovnikov A 2010 *Ann. Phys.* **325** 1790
- Dujardin J, Engl T, Urbina J D and Schlagheck P 2015 *Ann. Phys.* **527** 629
- [32] Sträter C and Eckardt A 2016 *Z. Naturforsch.* **71** 909
- [33] Abanin D A, De Roeck W, Ho W W and Huvneers F 2017 *Phys. Rev. B* **95** 014112
- [34] Hadzibabic Z, Krüger P, Cheneau M, Battelier B and Dalibard J 2006 *Nature* **441** 1118
- [35] Eiermann B, Anker Th, Albiez M, Taglieber M, Treutlein P, Marzlin K-P and Oberthaler M K 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 230401
- [36] Mamaev A V, Saffman M and Zozulya A A 1995 *Phys. Rev. Lett.* **76** 2262
- Anderson B P, Haljan P C, Regal C A, Feder D L, Collins L A, Clark C W and Cornell E A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 2926
- [37] Reinaudi G, Lahaye T, Wang Z and Guéry-Odelin D 2007 *Opt. Lett.* **32** 3143
- [38] Landau L D and Lifshitz L M 1965 *Quantum Mechanics* (Oxford: Pergamon)
- [39] Garg A 2000 *Am. J. Phys.* **68** 430
- [40] Olshani M 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 938
- [41] Paul T, Hartung M, Richter K and Schlagheck P 2007 *Phys. Rev. A* **76** 063605

Résumé

La thèse traite de la dynamique d'un Condensat de Bose Einstein (CBE) dans un réseau optique modulé en phase et en amplitude. Dans un premier temps, je présente le dispositif expérimental permettant d'obtenir le CBE ainsi que le réseau optique, et décris les différents contrôles de la phase et de l'amplitude que nous avons mis en place.

La première expérience que nous avons effectuée repose sur le changement brusque de la phase du réseau permettant de déplacer celui-ci de quelques dizaines de nm. Cette expérience nous a permis de mettre au point une méthode de calibration de la profondeur du potentiel périodique se basant sur la mesure de la période de la micro-oscillation de la chaîne de condensats induite par le déplacement soudain du potentiel. Il existe ainsi une bijection entre profondeur et période de l'oscillation faisant de cette dernière une candidate idéale comme méthode de calibration. Cette oscillation présente également de l'effet tunnel entre puits du réseau. Nous avons pu mesurer le temps tunnel i.e. le retard entre un paquet d'atomes ayant traversé une barrière de potentiel par effet tunnel et un paquet d'atomes ayant continué son oscillation.

La dernière partie de ce manuscrit présente une étude de la dynamique du condensat dans un réseau dont la phase ou l'amplitude sont modulées sinusoidalement. Nous avons étudié trois régimes de fréquences de modulation présentant des comportements très différents. Les régimes de fréquences sont définies par rapport à la fréquence résonante entre la bande fondamentale du réseau et la première bande excitée. Pour la modulation à basse fréquence, le taux tunnel intersite est renormalisé et peut atteindre des valeurs effectives négatives. Ce phénomène engendre une instabilité dynamique qui est à l'origine d'une transition de phase quantique. Nous avons effectué une étude théorique, numérique et expérimentale qui nous a permis de déterminer le rôle des fluctuations quantiques et thermiques dans la cinétique de cette transition. Pour le régime de modulation haute fréquence, la profondeur du potentiel du réseau est renormalisée par une fonction de Bessel. Nous nous sommes servis de cet effet pour placer les atomes dans une situation très loin de l'équilibre avec un grand contrôle. Enfin, en nous plaçant dans le régime où la fréquence de modulation est de l'ordre de la fréquence résonante entre la bande fondamentale du réseau et la première bande excitée, nous induisons des transitions interbandes. Nos données révèlent les règles de sélection qui sont différentes pour la modulation de phase et d'amplitude, et le rôle des interactions dans les excitations résonantes.

Abstract

The subject of this thesis is the study of the dynamics of a Bose Einstein condensate in a phase and amplitude modulated optical lattice. First, I present the experimental setup allowing us to produce the BEC as well as the optical lattice. I describe the different means of control on the phase and on the amplitude of the lattice that we implemented.

The first experiment we performed is based on the sudden shift of the phase of the lattice that induces a displacement of a few tenth of nm. This experiment allowed us to develop a new method to calibrate the depth of the lattice using the period of the micro-oscillation of the BEC chain triggered by the phase shift. There is a bijection between the depth of the lattice and the oscillation period giving the period the ideal profile to be a calibration method. The dynamic of the oscillation shows tunnel effect between adjacent wells of the lattice. We have been able to measure directly the tunneling time which is the delay between an atoms packet which passed through a potential barrier by tunnel effect and a packet of atoms which continued its oscillation.

The last part of the manuscript presents a study of the dynamics of the BEC inside a lattice which phase or amplitude is modulated with a sine function. We study three ranges of modulation frequencies showing different behaviors. The frequency is compared with the resonant frequency between the fundamental band of the lattice band structure and the first excited band. When we modulate with low frequencies the phase of the lattice, the tunnel rate between adjacent wells is renormalized. This yields a dynamical instability which triggers a quantum phase transition. We performed a theoretical study, a numerical study and an experimental study that allowed us to define the role of quantum and thermal fluctuations in the system on the kinetics of this transition. For the high modulation frequency regime, the potential depth is renormalized with a Bessel function. We used this effect to put the atoms in a far-out of equilibrium position in a well-controlled manner. Lastly, by choosing the modulation frequency to be of the order of the resonant frequency between the fundamental band and the first excited band, we induce interband transitions. Our data reveal the selection rules which are different for phase and amplitude modulation, and the role of two-body interactions in the excitation process.