UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA

UNAN - MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA, CHONTALES

FAREM – CHONTALES

Doctorado en Matemática Aplicada

Proceso de enseñanza–aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva en las asignaturas de Cálculo en las carreras de Ingeniería

Estudio realizado en la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí (FAREM – Estelí)

Autora: Julia Argentina Granera Rugama

Director: Dr. Winston Joseph Zamora Díaz

Estelí, Nicaragua, diciembre de 2017

Dedicatoria

A Dios, por estar presente en cada paso que doy, por iluminar mi mente y por haber puesto en mi camino a aquellos seres que me han brindado su apoyo y compañía.

A mi padre y mi madre (q.e.p.d.), que desde la eternidad me siguen acompañando y dándome su apoyo.

A mi familia, especialmente a mi hija, por el apoyo recibido, su comprensión, cariño y motivación para seguir adelante en mi formación profesional.

Agradecimientos

A la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua y a la Universidad Martha Abreu de las Villas, Santa Clara, Cuba, por confiar y darnos la oportunidad de estudiar este Doctorado en Matemática Aplicada.

A la coordinación del programa de doctorado y al decano de la FAREM Chontales, el maestro Emilio López, por la disposición de buscar solución a los problemas que enfrentamos en el transcurso de nuestros estudios.

A mi tutor, Dr. Winston Joseph Zamora D., no solo por aceptar dirigir este trabajo, sino por sus valiosas ideas y acompañamiento, y, sobre todo por su generosidad.

A todos los docentes que nos impartieron módulos, por compartir sus valiosos conocimientos.

A nuestros compañeros doctorantes, por intercambiar experiencias y conocimientos que jamás olvidaremos.

A estudiantes y docentes que fueron partícipes del estudio, que con mucho cariño compartieron su tiempo.

Muy especial mi agradecimiento a la Dra. Ana Teodora Téllez F., quien siempre fue mi cercana colaboradora, por sus atinadas ideas y críticas sobre la investigación y aporte práctico que se propone.

Y a todas aquellas personas, que de alguna u otra manera nos prestaron su colaboración y ayudaron para que nuestra investigación fuera posible.

RESUMEN

Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) han revolucionado al mundo entero y dan paso a la innovación educativa, que cada vez más requiere estar presentes en los procesos de formación profesional demandados por la sociedad actual.

En consecuencia, el uso de los medios tecnológicos demanda una nueva configuración del proceso didáctico y de la metodología, pues los contenidos a desarrollar no deben estar exclusivamente en manos del docente sino que los estudiantes han de ser constructores de su propio aprendizaje.

El presente trabajo investigativo, de carácter descriptivo, se centró en la determinación del proceso de enseñanza–aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva en las asignaturas de Cálculo en las carreras de Ingeniería de la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Se identificaron aspectos que fundamentan teóricamente la elaboración de un compendio metodológico en el aprendizaje del concepto de integral definida como área bajo la curva en un entorno computacional.

Los hallazgos del presente estudio se obtuvieron a través del análisis documental, encuestas, entrevistas y observación. El análisis documental se realizó al programa de asignatura, plan didáctico y plan de clase de las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II. Las entrevistas se aplicaron al Director de Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud, coordinadores de carreras y docentes participantes en el estudio. La observación se realizó en los dos grupos clases de estas asignaturas y el cuestionario se aplicó tanto los estudiantes sujetos de estudios como de otras ingenierías, con el fin de valorar sus actitudes hacia la Matemática y el uso de la computadora.

Esta investigación reveló que, en el Modelo Educativo de nuestra Universidad sugiere la utilización de estrategias metodológicas activas. Éstas están dirigidas a la evaluación

procesual, vinculación de la teoría con la práctica, construcción de aprendizajes, formación de valores, al saber hacer, saber ser y a la promoción del pensamiento crítico y autónomo.

En los programas de asignatura las sugerencias metodológicas y estrategias de evaluación son concretas y claras. No obstante, hace falta un mayor énfasis en el desarrollo de aptitudes, habilidades y destrezas. En los **planes didácticos** de la asignatura están presentes estrategias metodológicas activas y la forma de evaluación coincide con lo establecido en dicho programa.

Referente a la preparación informática de los docentes se constató que existe dominio de contenidos básicos necesarios para manipular la computadora, pero hay debilidades en el dominio de asistentes y software matemáticos. Sin embargo, existen fortalezas cognitivas y actitudinales para la incorporación de los mismos al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se verificó que en los estudiantes existe una actitud global positiva hacia las Matemáticas y el uso de las computadoras, aunque no demasiado alta, no así en el uso de la computadora en actividades matemáticas, tal vez por el desconocimiento que tienen los estudiantes de este recurso. También se comprobó que las dimensiones actitudinales como compromiso, confianza y seguridad son altamente positivas, la motivación fue positiva pero baja.

La principal dificultad encontrada en los libros de textos, recomendados en el programa de asignatura, es que no se considera la utilización de las nuevas tecnologías en el Cálculo Integral, lo que favorecería un aprendizaje significativo de sus contenidos. Con este fin, se diseñó un compendio metodológico que promueva el aprendizaje de la integral definida previo al cálculo de derivadas, basado en las representaciones semióticas de Duval, como un aporte didáctico a los docentes y estudiantes que imparten o cursan la asignatura Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II, con el propósito de que el acto educativo sea más dinámico y enriquecedor.

INDICE

ANEXOS

Índice de tablas

Índice de Figuras

PRIMERA PARTE:

INTRODUCCIÓN

I. INTRODUCCIÓN

Ander-Egg, (1992, p. 57), concluye a partir de varias definiciones, en una que nos presenta una amplia proyección en relación con las diversas disciplinas científicas:

> La investigación es un proceso reflexivo, sistemático, controlado y crítico que tiene por facilidad descubrir e interpretar hechos y fenómenos, relaciones y leyes de un determinado ámbito de la realidad… - una búsqueda de hechos, un camino para conocer la realidad, un procedimiento para conocer verdades parciales, - o mejor, para descubrir no falsedades parciales.

En relación con lo anterior, podemos afirmar que, vivimos en un mundo que cambia continuamente, donde los grandes adelantos científicos y tecnológicos son gracias a la investigación. Estos han hecho que la humanidad supere sus propios retos. De ahí que, la investigación nos permite establecer contacto con la realidad a fin de que la conozcamos mejor; y esto conlleva al estímulo del pensamiento crítico, la creatividad, la curiosidad creciente acerca de la solución de problemas.

Considerando que las dudas y la curiosidad por saber son inherentes al ser humano, es necesario investigar, ya que, la investigación es la fuente de todo conocimiento. Para comprender la realidad se hace necesario realizar investigación.

Reafirmamos que nadie pone en duda la importancia de investigar, pues se considera el principal pilar del progreso de la ciencia. Ahora bien, sin establecer un orden de importancia podemos decir que, investigar contribuye a ampliar el conocimiento, en cualquier actividad que realicemos, al desarrollo del pensamiento lógico. Mediante su práctica aumentamos la autoestima (confianza en uno mismo), nos ayuda a ser más rigurosos, nos hace más racionales. Además, favorece al mejoramiento de la vida colectiva, ya que cuando hay cambios necesarios en la sociedad primero debemos saber que está ocurriendo, por qué sucede esto y cuál es la mejor forma de abordar la situación.

En resumen, la importancia de la investigación científica es que nos permite establecer contacto con la realidad a fin de que la conozcamos mejor.

Refiriéndonos a la investigación educativa, podemos decir que la educación posee un aspecto interesante: es un proceso activo, dinámico, en constante construcción, y sin duda, altamente contextualizado. Esta característica facilita hacer cambios y aportes que aseguran su permanente transformación. Bajo esta perspectiva, la investigación repunta como actividad inherente al proceso educativo; ya sea que se trate de investigación científica altamente rigurosa o básica, pero su propósito es siempre hacia la búsqueda de dar respuestas a las necesidades y problemas reales a los que nos enfrentamos en cualquier campo de la ciencia.

Sin menospreciar otros elementos, podemos afirmar que, en el ámbito de la Educación, investigar es importante porque su fin es la mejora de la formación de los estudiantes, ya que el docente– investigador en cualquier situación relacionada con su quehacer se plantea metódicamente dudas y busca soluciones. En este proceso, reflexiona, aprende, selecciona y decide. Además, le permite intercambiar estos conocimientos con homólogos de otras universidades de todo el mundo, ya sea publicando sus trabajos, asistiendo a congresos, participando en actividades relacionadas con su labor investigativa, lo que a su vez le permite mantenerse en una primera línea del conocimiento.

Por tanto, el docente–investigador puede compartir a sus estudiantes no solo conocimientos, a los cuales con el avance de la ciencia puede acceder con enorme facilidad mediante Internet, sino sobre todo conceptos, criterios, orientaciones, tendencias y dudas.

El campo de la investigación es realmente amplio y en la Educación Matemática representa una alternativa que facilita el análisis didáctico-pedagógico, favorece la visión prospectiva, estratégica y táctica, necesaria para todos los profesionales y en especial para los del ámbito educativo.

Es por ello que, conforme ha avanzado el tiempo, se ha incrementado la investigación de los problemas asociados a la enseñanza y al aprendizaje de las Matemáticas, así como al desarrollo de productos de "aplicación" de los resultados de las investigaciones que permiten coadyuvar en la solución de problemas.

A continuación se describe de manera breve las formas en que los países desarrollados han abordado la investigación en la Educación Matemática.

Blanco (2011), señala que hasta inicio de los años 90, el tema más frecuente de las investigaciones en Matemática era la medición del rendimiento escolar en los diferentes niveles educativos, resaltando éstos en los niveles de primaria y secundaria, a través de pruebas objetivas. Para el análisis de resultados se utilizaron procedimientos cuantitativos, mayoritariamente cuestionarios y el uso de la estadística como metodología preferente, pues las variables que generalmente se correlacionaban eran género, nivel socioeconómico, inteligencia general, tipo de centro, entre otros.

Otra temática abordada en estos trabajos fue sobre aspectos relacionados con el dominio afectivo, como la creatividad, la motivación o la actitud. También se desarrollaron algunas experiencias con grupos de estudiantes que siempre eran comparadas con algún grupo de control que validara los resultados.

Un aspecto que nos parece importante resaltar es que, estas investigaciones no se centran en contenidos específicos de Matemáticas, excepto para analizar el aprendizaje de los primeros números y los problemas aritméticos. Es decir, consideraban las Matemáticas como un todo sin tener en cuenta que el contenido matemático fuera un referente fundamental que influye en el resultado en la investigación.

A partir de la década de los 90, se aprecia la incorporación del contenido matemático en trabajos de investigación. A este respecto, resaltan la línea relacionada con la Didáctica del Análisis, sobre la enseñanza-aprendizaje de las derivadas, límites, integrales y diferentes proyectos de investigación que han dado lugar a una abundante literatura científica sobre el tema.

Es de destacar que estas investigaciones se han centrado tanto en estudiantes como profesores de secundaria y Universidad, para optar al grado de licenciados o ingenieros. Sin embargo, son pocas las investigaciones encontradas cuya población de estudio sean estudiantes de Matemáticas.

Como se hacía referencia anteriormente, entre las investigaciones con contenido matemático sobresalen las relacionadas con la Didáctica del Análisis, pero otro elemento a mencionar es el estudio de la funciones, globalmente o en aspectos específicos, el cual ha sido considerado por diferentes grupos de investigación. Asimismo, otra línea de investigación que ha tenido repercusión en la Educación Matemática está centrada en el análisis del conocimiento, concepciones y creencias de los estudiantes, así como de los profesores y su desarrollo profesional en diferentes niveles educativos.

No podemos obviar los estudios relacionados con la resolución de problemas de Matemáticas, tema que ha sido ampliamente tratado en investigaciones desarrolladas en los departamentos de pedagogía y psicología. Uno de los problemas de investigación frecuentes se refiere al conocimiento, concepciones y creencias de los profesores en formación y en servicio. Así como trabajos de investigación que relacionan la resolución de problemas matemáticos con diferentes aspectos del dominio afectivo.

En los trabajos de investigación también aparece la Geometría como un tópico de referencia. A este respecto, debemos destacar las investigaciones sobre enseñanza - aprendizaje en la educación primaria, en la formación inicial de profesores de primaria y en un entorno interactivo de aprendizaje.

Algunos investigadores han trabajado temáticas sobre la Historia de la Educación Matemática y el análisis de los libros de texto, el uso de recursos en la enseñanza -

aprendizaje de las Matemáticas. Del mismo modo, existen estudios sobre el uso de juegos y Matemática recreativa para la resolución de problemas o la literatura como recurso didáctico.

También es meritorio señalar que los temas en educación infantil han sido escasamente abordados desde el área de Didáctica de la Matemática pero no así desde el ámbito de la pedagogía y psicología.

Finalmente, en los diferentes seminarios de investigación se han abordado de forma periódica el análisis de la metodología e instrumentos de investigación en Educación Matemática.

A nivel nacional, se debe reconocer el esfuerzo que hacen algunas universidades como la UNAN-León, UNAN-Managua, UNI y otras, en relación a la investigación como actividad académica. Hace algunos años se han venido preparando hacia una investigación que relacione la generación de conocimientos con la innovación, el emprendedurismo y esto a su vez con el empleo del futuro. Sin embargo, existe aún una distancia resaltada entre lo que hacemos en investigación y lo que se define como investigación para ser parte de un sistema científico.

Al mismo tiempo, en nuestro país, el Plan Nacional de Educación, la Ley General de Educación y la Política Educativa del Gobierno de Reconciliación y Unidad Nacional, plasman algunas orientaciones y directrices acerca de lo que el Sistema Educativo debe realizar para que exista una educación de calidad. Esto se concretó en el Encuentro Nacional de Educación, realizado en diciembre del 2015, cuyos acuerdos fueron retomados, ampliados y profundizados durante el 2016, a través de los ejes del fortalecimiento de la Educación, que ratifican, entre otros, el papel de la universidad en cuanto a la educación pública, el papel de los docentes para la calidad educativa, la integración responsable didáctica y pedagógica de las nuevas tecnologías.(Van de Velde, 2014).

Este mismo autor señala que, estas intenciones expresadas anteriormente, sin duda alguna, también cuentan con las potencialidades correspondientes para ir avanzando sustancialmente en la construcción de la calidad educativa pretendida. Cabe mencionar que, esto mismo se destaca en el Plan de Educación en Buena Esperanza 2016.

Sin embargo, no podemos obviar que, en la actualidad la calidad de la educación secundaria está siendo muy cuestionada principalmente en la disciplina de Matemática debido a que los resultados obtenidos por los estudiantes durante los procesos de evaluación en secundaria no concuerdan con los resultados obtenidos en los exámenes de ingreso en la universidad, que no son satisfactorios. Existen muchos factores que provocan dicha situación, algunos centrados en los estudiantes, otros en los docentes y otros en el Sistema Educativo Nacional.

Pero, es meritorio reconocer, los esfuerzos que el país hace con apoyo de la cooperación y financiamiento internacional, para transformar y fortalecer la formación docente. En los últimos años se han impartido cursos de diplomados de cobertura nacional, coordinadas y certificadas por varias universidades del país (UNAN León, UNAN Managua, UCA, BICU, URACCAN), con miles de docentes involucrados.

En el año 2010 el Instituto de Estudio de Estrategias y Políticas realizó un estudio sobre la formación permanente de docentes en Nicaragua, en el que se abordan los principales desafíos que enfrentan. Uno de los resultados de ese estudio es que existe un alto índice de empirismo docente principalmente en la zona rural sobre todo en el área de Matemática.

En el año 2009 el Ministerio de Educación implementó un curso de actualización de docentes de educación secundaria en herramientas científicas y metodológicas de la Matemática.

En el año 2013 el Ministerio de Educación, en conjunto con la UNAN–Managua, presentó el "Diplomado para el Mejoramiento de la Calidad Educativa en Nicaragua", para darle un continuo desarrollo a la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje en nuestro país. Resulta oportuno señalar que, en el I Congreso de Educación, realizado en la UNAN Managua, se abordó la Transformación Curricular de la Educación Básica y Media (2009), como una estrategia para alcanzar la calidad educativa, la cual está basada en un modelo consensuado de relaciones pedagógicas y de aprendizajes, popular, científico y de fuertes raíces nicaragüenses. Dicha transformación curricular se sustenta por las siguientes razones:

1. La enseñanza tradicional basada en el uso exclusivo de la memoria, no es eficaz, pues no prepara a los estudiantes en forma satisfactoria y éstos fracasan al tratar de acceder a la universidad y al trabajo.

2. El desarrollo acelerado de la tecnología, la comunicación y las ciencias genera una gran cantidad de conocimientos en todos los campos, a los cuales nuestros estudiantes no tienen acceso mediante la forma tradicional de enseñanza. Por lo tanto, es ineludible para el país el establecimiento de nuevos enfoques curriculares y nuevos procedimientos metodológicos que privilegien el aprendizaje comprensivo, el pensamiento crítico, el aprender haciendo, el espíritu de investigación y el aprendizaje permanente.

3. Para lograr el desarrollo del país hay que lograr primero el desarrollo de cada ciudadano, mediante una educación que lo prepare para la vida, que lo prepare para el trabajo, que responda a sus necesidades e intereses.

En su Modelo Educativo, Normativa y Metodología para la Planificación Curricular, la UNAN – Managua desde el año 2013 también desarrolla el *proceso de transformación curricular el que constituye un espacio que permitirá tomar decisiones para la implementación de los cambios que requiere nuestra institución. De esta manera se estará* *garantizando que la Universidad esté en capacidad de enfrentar los grandes retos que la sociedad actual le plantea*. (UNAN-Managua, 2011).

Retomando lo expresado en párrafos anteriores podemos afirmar que, la Educación es un proceso en el cual el ser humano adquiere conocimientos a lo largo de su vida y ésta se va desarrollando a través de situaciones y experiencias vividas por cada persona. Se debe tener en cuenta que la misma no consiste en el simple hecho de transmitir y adquirir conocimientos, sino que el propósito fundamental de la educación es la formación integral de los sujetos, el desarrollo de las facultades físicas, intelectuales y morales del ser humano, con el fin de integrarse mejor en la sociedad. ¡Es un aprendizaje para vivir!

Por ello, la educación superior del siglo XXI debe asumir el cambio necesario de su ser y quehacer, lo que implica la búsqueda constante de nuevas alternativas que apunten a la mejora de la práctica docente. De ahí que, la UNAN–Managua en su Modelo Educativo plantea que el proceso de enseñanza–aprendizaje debe estar centrado en el estudiante, por lo cual éste debe asumir un rol activo, participativo y con alta responsabilidad en el desarrollo de un aprendizaje autónomo y estratégico, implementando, para ello, metodologías de aprendizaje activas.

El proceso de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en todos los sistemas educativos: primaria, secundaria y en la educación universitaria se ha convertido, en una tarea ampliamente compleja y fundamental. Con el fin de preparar a los estudiantes para la vida, se hace necesario dotarlo de un sistema de conocimientos, habilidades, hábitos, modos de actuación y convicciones para su accionar en la sociedad. Esto a tono con el contexto actual que impone el vertiginoso desarrollo científico–técnico.

Por lo anteriormente expresado, los docentes de matemáticas y de otras áreas del conocimiento científico debemos actualizarnos y/o adquirir conocimientos que permitan enfrentarnos a exigencias didácticas cambiantes e innovadoras. Para ello, se requiere una mayor atención por parte de los investigadores en el campo de la didáctica de la

Matemática; así como trabajar en el desarrollo de unidades de aprendizaje donde el estudiante sea sujeto de su propio aprendizaje y el docente el facilitador.

Asimismo, es fundamental el manejo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en este nuevo milenio, ya que somos llamados a ser docentes de calidad, pertinentes y contextualizados, en esta sociedad del conocimiento. Es por ello que, representa un reto para cualquier labor docente ser gestor de cambio, donde los recursos tecnológicos son los nuevos pilares como estrategia para obtener un aprendizaje significativo.

Es importante indicar que, a nivel internacional se han realizado estudios sobre esta problemática y se plantea que las fallas en el aprendizaje del Cálculo son frecuentes. Los estudiantes se someten a un régimen pesado de ejercicios y el porcentaje de reprobación oscila entre el 30% y el 50%. Este es uno de los problemas que más preocupa a la comunidad educativa, y, Nicaragua no es la excepción.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de Cálculo infinitesimal han sido considerados un tema complejo difícil de facilitar. El Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo II), es una asignatura de carácter obligatoria y fundamental para los estudiantes de las carreras de ingeniería que se imparte en la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí.

Las carreras de ingeniería (Ingeniería Industrial, Ingeniería Agroindustrial, Ingeniería en Energías Renovables e Ingeniería en Ciencias de la Computación) se imparten en el turno vespertino e Ingeniería Ambiental en el turno matutino. En todos los planes de estudio de estas carreras se imparten además de Matemática General, las asignaturas de Cálculo I y II.

Todas estas ingenierías llenan el cupo establecido en la oferta educativa (50 estudiantes), con estudiantes de primera y segunda opción, a excepción de la Ingeniería en Energías

Renovables e Ingeniería Ambiental las cuales no alcanzan la meta ni con los estudiantes de tercera opción.

La asignatura de Cálculo II aparece en los planes de estudios ubicada en el III o IV semestre (depende de la carrera) y los contenidos a desarrollar son:

En las carreras de Ingeniería Industrial, Ingeniería Agroindustrial e Ingeniería en Ciencias de la Computación: (1) La integral definida, (2) La integral indefinida y los métodos de integración y (3) Aplicaciones de la integral definida. Este programa tiene un total de 60 horas presenciales y 120 horas de estudio independiente.

En Ingeniería en Energías Renovables e Ingeniería Ambiental la asignatura Cálculo Diferencial e Integral se imparte en el IV semestre y sus contenidos son: (1) Introducción a la derivada; (2) La derivada y sus aplicaciones; (3) La integral y sus aplicaciones. Este programa tiene un total de 90 horas presenciales y 180 horas de estudio independiente.

En las recomendaciones metodológicas propuestas para el desarrollo de estas unidades con el fin de dinamizar el proceso enseñanza – aprendizaje se detallan: preguntas exploratorias, conferencias, mapas cognitivos y aprendizaje basado en problemas. Es de señalar que, la elaboración de mapas cognitivos de los contenidos conceptuales se propone desarrollarlos durante las horas de estudio independiente, mediante la entrega de una guía de lectura.

En estas asignaturas se reportan frecuentemente problemas en su enseñanza aprendizaje. Éstas presentan un alto índice de reprobación, inclusive con aquellos estudiantes que cursan la asignatura por segunda y tercera vez. Muestra de ello se visualiza en los porcentajes de reprobación de los últimos cinco años en las diferentes carreras de Ingeniería, los cuales se encuentran entre 37.6% y 66.50%.

Revisando la bibliografía recomendada en los programas de asignatura, observamos que, generalmente la forma en que se presenta la Matemática en los libros de textos y las distintas publicaciones científicas no reflejan el proceso de creación de la definición, siendo, posiblemente, ésta la causa del conflicto entre la estructura propia matemática y los proceso cognitivos necesarios para la adquisición del concepto.

De igual forma, por la experiencia adquirida y conversaciones con compañeros de trabajo, coincidimos con varios estudios que plantean que los profesores impartimos las clases mediante secuencias de tipo Definición – Teorema - Aplicación, obviando así los procesos que aparecen involucrados en el aprendizaje.

Por otra parte, el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Matemática se realiza de diferentes maneras y con la ayuda de muchos medios, cada uno con sus respectivas funciones. Y es precisamente en este sentido, donde los docentes universitarios tenemos como tarea principal incentivar la curiosidad de nuestros estudiantes. De modo que, se debe establecer la relación entre los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre la temática a abordar y lo que se va a estudiar, estimulando la búsqueda de medios para resolver problemas.

Ahora bien, en la actualidad, la computadora y sus respectivos programas se han convertido en un medio artificial muy utilizado para el tratamiento de diferentes temas matemáticos. Estos medios ayudan a los docentes para un buen desempeño en el desarrollo del proceso educativo, sobre todo en los niveles universitarios y de secundaria.

Por todo lo anteriormente descrito, me he motivado por indagar sobre ¿cómo integrar didácticamente la computadora al proceso enseñanza – aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva?

El campo científico en el que está ubicado este estudio es la Didáctica de la Matemática, el cual se genera como un intento por estudiar los problemas relativos al proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes de ingeniería de la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Este problema toma como punto de referencia tanto la experiencia educativa, en la que se han observado dificultades en la apropiación de los conceptos matemáticos, especialmente los relativos al concepto de integral definida.

Es por ello que, el objeto de estudio es el aprendizaje de la integral definida como área bajo una curva, es decir, cómo el estudiantado se apropia de la parte conceptual del cálculo, específicamente del concepto de integral definida.

De ahí que, se consideró importante centrar este estudio en la búsqueda del aprendizaje significativo de los estudiantes mediante la determinación del "P*roceso de enseñanza–aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva en las asignaturas de Cálculo en las carreras de Ingeniería",* de la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Este estudio se deriva de la línea de investigación de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN – MANAGUA; FAREM – Estelí) "Calidad educativa". En fin, este estudio pretende desarrollar el campo conceptual del Cálculo y su enseñanza aprendizaje, considerando dos aspectos principales:

Un primer aspecto, de ámbito cognitivo mediante el cual se preparó material curricular con el objetivo de introducir previamente al estudio del cálculo de primitivas, el concepto de Integral Definida como área bajo una curva, desde una perspectiva gráfica y numérica.

En este ámbito se consideró el concepto de la integral definida poniendo énfasis en las relaciones con el de área y los procesos que intervienen en la adquisición de dicho concepto.

Los aspectos que se tuvieron en cuenta en el desarrollo de la investigación son:

- La problemática de la definición del concepto de integral como área bajo una curva.

- La dualidad del concepto de integral definida, considerada a su vez como proceso y como objeto

- La visualización del concepto de integral definida.

Con relación al primer ámbito, se trató de desarrollar una imagen del concepto de integral definida, lo más completa posible, en el sentido de obtener una perspectiva amplia que permitiera integrar sus diferentes tipos de representaciones semióticas utilizando las representaciones de Duval. De este modo, reconocer la importancia que tienen las diversas representaciones de los objetos matemáticos fue el primer paso para elaborar actividades que permitieran alcanzar un aprendizaje conceptual más rico.

En relación a la dualidad del concepto de integral definida, como proceso y como objeto (Sfard, 1991; Dubinsky, 1991), citado por Depool (2005), se consideró que los conceptos matemáticos como procesos son una forma dinámica de comprensión de un concepto matemático, obtenido a partir de acciones y transformaciones mentales sobre él mismo, mientras que el concepto matemático entendido como un objeto, es cuando las transformaciones mentales ya han sido ejecutadas con anterioridad.

Al referirnos a la visualización, la entendimos como un proceso que incluye, tanto la interpretación y la comprensión de modelos visuales, que reflejan la estructura matemática del concepto de integral definida y el proceso de integración como el cálculo de un área bajo una curva. Esto es, la habilidad de traducir en imágenes visuales la información presentada en forma simbólica; es decir, los aspectos de codificación y decodificación del concepto.

En esta propuesta se consideró que los conocimientos y destrezas relacionadas con la visualización que debería alcanzar un estudiante serán:

- Entender los lenguajes analíticos y gráficos como diferentes alternativas para la expresión del concepto de integral definida.

- Entender las reglas y convenciones asociadas con las representaciones gráficas del área bajo una curva.

- Entender la estimación y la aproximación en un contexto geométrico.

- Disponer de un repertorio amplio de imágenes visuales.

El segundo aspecto, de ámbito afectivo consistió en analizar las componentes del proceso de enseñanza–aprendizaje de la unidad de integral definida como área bajo la curva, poniendo énfasis en las actitudes de los estudiantes en torno a confianza, seguridad, motivación, compromiso y uso del ordenador en el trabajo matemático.

Tradicionalmente las investigaciones en la enseñanza–aprendizaje de las Matemáticas se han centrado sobre el rendimiento académico de los estudiantes y la resolución de problemas, primeramente en aspectos cognitivos, segundo en aspectos afectivos, pero pocas veces en la interacción de ambos. Actualmente se reconoce la necesidad de integrar ambas dimensiones. De ahí que nuestra propuesta estudie este ámbito.

Como ya se señaló anteriormente, en esta investigación se tuvo en cuenta las siguientes dimensiones: Confianza y seguridad en el trabajo matemático, motivación hacia él, compromiso con el mismo y, uso del ordenador en las actividades matemáticas, que constituyeron los elementos básicos de nuestro análisis. Consideramos las actitudes referidas a respuestas afectivas que poseen cierta intensidad y relativa estabilidad.

Se consideró que esta investigación comprendiera tres aspectos principales: la problemática surgida con los aspectos didácticos, el uso de las computadoras y las actitudes de los estudiantes en la enseñanza–aprendizaje de las Matemáticas en general y del Cálculo en particular.

La Tesis Doctoral que se presenta, se estructura en diez partes que describiremos a continuación:

En la parte I - Introducción, después de describir la importancia de la investigación, primeramente de manera general, luego la investigación en Educación y por último la investigación en Matemática se caracterizan las formas en que se ha abordado en los países desarrollados, a nivel nacional e institucionalmente, se sitúa el marco general en que se desarrolla la investigación, se da una perspectiva del problema a estudiar y se describen los tres aspectos principales que comprende el estudio: la problemática surgida con los aspectos didácticos, el uso de las computadoras y las actitudes de los estudiantes en la enseñanza–aprendizaje de las Matemáticas en general y del Cálculo en particular.

La parte II. Planteamiento del problema, aquí se describen los hechos y acontecimientos que giran en torno al problema, las causas posibles del mismo y la evidencia de sus efectos. Se concluye con las preguntas de investigación.

En la parte III. Justificación, se fundamenta la necesidad y pertinencia de tratar este problema, la importancia y relevancia del estudio tanto a nivel metodológico como científico. También se fundamenta la pertinencia de realizar la investigación y la viabilidad de su ejecución y el impacto social que conlleva.

En la parte IV.- Estado del Arte, se presentan los resultados de la revisión de la literatura científica que configura los tres campos donde se enmarca nuestro trabajo. Se analizan las distintas investigaciones relacionadas, fundamentalmente, con la enseñanza y aprendizaje del concepto de integral definida, el ámbito afectivo y el uso de las TIC para la enseñanza y aprendizaje de los diferentes conceptos del Cálculo

En la parte V.- Cuestiones de investigación, se plantean las preguntas científicas que constituyen la guía para la realización del trabajo y sus correspondientes tareas científicas.

En la parte VI. Objetivos, se plantean el objetivo general del estudio a realizar y los objetivos específicos que permiten el alcance del objetivo general.

En la parte VII. Perspectiva teórica, se describen los distintos componentes que intervienen, tanto para el ámbito afectivo (creencias y actitudes) como para aquéllos que tienen que ver con los aspectos cognitivos curriculares (los sistemas de representación semióticos, la visualización matemática, las TIC en el aprendizaje de las Matemáticas), que convergen en el establecimiento de un modelo de competencia cognitivo para el aprendizaje del concepto de integral definida.

En la parte VIII. Perspectiva metodológica, se presenta el enfoque metodológico utilizado en la investigación, que resulta ser una metodología descriptiva y cualitativa que utiliza diferentes técnicas e instrumentos para la recogida de la información. Se describen además en este capítulo, las distintas escalas de actitudes utilizadas en el estudio, así como el diseño general del compendio propuesto para la enseñanza del concepto de integral definida.

En la parte IX. Análisis y discusión de los resultados de la parte diagnóstica y la disposición del compendio metodológico. Aquí se describen los resultados obtenidos a partir del procesamiento, análisis y comparación de la información. Estos se presentan junto con su interpretación y se abordan de acuerdo con cada uno de los objetivos planteados en esta investigación.

La tesis finaliza con las referencias bibliográficas que han sido utilizadas en el desarrollo de la investigación.

Para completar, se incluye un apartado de anexos en los que recogen las distintas escalas de actitudes, los cuestionarios, guía de observación, programas de asignaturas, planes didácticos y en archivo aparte la propuesta de compendio metodológico.

SEGUNDA PARTE:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La UNAN-Managua, es una institución que desde su fundación ha gozado de prestigio a nivel nacional e internacional, por la calidad de sus docentes y graduados. La Facultad Regional Multidisciplinaria (FAREM) Estelí desde el 2006 adquirió el compromiso social de formar ingenieros industriales y de sistemas, ampliando su oferta educativa paulatinamente. En la actualidad se sirven cinco ingenierías en: Energías Renovables, Ambiental, Agroindustrial, Industrial y en Ciencias de la Computación.

En la FAREM Estelí, una buena parte de los docentes estamos implementando estrategias metodológicas activas en el proceso de enseñanza aprendizaje. Sin embargo, se presentan dificultades de aprendizaje en disciplinas de ciencias, entre ellas la asignatura Cálculo diferencial e integral, que se imparte en las ingenierías Ambiental y en Energías Renovable y su homóloga Cálculo II en las restantes ingenierías.

En las evaluaciones realizadas en los colectivos docentes, en los informes cualitativos y cuantitativos y en las asambleas estudiantiles de las carreras del Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud de nuestra Facultad, a las que pertenecen las carreras de Ingeniería en Energías Renovables, Industrial, Agroindustrial, Ambiental y Ciencias de la Computación y Licenciatura en Turismo Sostenible, Diseño Gráfico y Multimedia y, recientemente la carrera de Medicina, los docentes consideramos, entre otros aspectos, que los bajos rendimientos están asociados a la falta de interés, falta de motivación, pocos hábitos de estudio, desaprovechamiento del estudio independiente y, en muchos casos, poca identidad con el perfil profesional.

A lo anterior se agrega, las concepciones erróneas en relación a que son materias difíciles y aburridas, y principalmente en las Matemáticas, donde la mayoría de los estudiantes tienen prejuicios. Asimismo, los docentes somos de la opinión que tiene que ver con la base que traen los estudiantes de la secundaria, falta de estudio individual, falta de escucha, que algunos estudiantes no aprovechan el tiempo, y que tienen dificultad en análisis de problemas. Es así, que este problema ha venido siendo un tema de grandes preocupaciones de parte del profesorado de nuestra Facultad.

Referente a la asignatura Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo II), los estudiantes expresan como principal dificultad, la poca relación que tienen los contenidos con la realidad o más bien su aplicación en la vida diaria y su utilidad en la vida profesional. Algunos afirman que la metodología docente no es adecuada, que las explicaciones de la clase no son claras y que son poco dinámicas.

Los registros estadísticos de la FAREM-Estelí analizados en el período 2012-2016 reflejan que en las carreras de ingeniería esta asignatura, durante este período, presentaron en promedio un porcentaje de reprobados entre 37.6% y 66.50%.

Consideramos importante mencionar, que esta asignatura es prerrequisito para otras asignaturas del plan de estudio y base de asignaturas subsecuentes. En mi experiencia laboral he observado y constatado a través de las evaluaciones, dificultades en relación a conceptos básicos y operaciones fundamentales de aritmética y álgebra, lo que dificulta la comprensión y aprendizaje consciente del Cálculo Diferencial e Integral.

Según Llorens & Santonja (1997), generalmente en los cursos de Cálculo Integral y la mayoría de textos se consideran dos grandes momentos. En primer lugar, podemos comprobar que la secuencia de contenidos en el apartado de Cálculo integral es siempre la misma: Cálculo de primitivas, Métodos de integración, La integral definida, Aplicaciones de la integración: Cálculo de áreas y volúmenes. En segundo lugar, el nivel de profundidad en cada uno de esos contenidos suele ser diferente, llevándose la mayor cantidad de horas clases los dos primeros, porque el objetivo es que los estudiantes adquieran destrezas en el cálculo de primitivas, trucos matemáticos y recetas para la obtención del resultado.

Se puede constatar que en muchos textos se omite una revisión del concepto de área; se aprovecha que es un "concepto intuitivo" para interpretar de ese modo las integrales, justificando todo el engorroso cálculo de primitivas. Además, en los últimos años se está generalizando el uso de software, para computadoras y calculadoras científicas que realicen diferentes operaciones y actividades matemáticas como la integración. En estas circunstancias, se considera más importante el significado y estudio de algunos métodos de integración numérica con el uso de las nuevas tecnologías.

Por estas razones, se presenta una propuesta que introduce, previo al cálculo de primitivas, el concepto de integral definida como área bajo una curva, desde una perspectiva gráfica y numérica, partiendo de la idea de aproximación.

Por otra parte, en los trabajos de diversos autores (Chalmers, 1990; Holton, 1996; Wolpert, 1992; Dunbar, 1999), citados por Solbes (2007) concluyen que existe un desinterés generalizado e incluso rechazo por parte de los estudiantes hacia el aprendizaje de las ciencias y en particular de la Matemática. Asimismo afirman, que el mayor nivel de fracaso se debe al impacto emocional que representa el ingreso a las aulas universitarias.

Los mismos autores destacan que los estudiantes no aprenden ciencias y llegan a los estudios superiores con muy mala base. Esta situación, junto con la cantidad de contenidos abstractos y los otros factores ya mencionados, ha provocado que los estudiantes universitarios disminuyan el interés por el aprendizaje consciente de la Matemática en general y el Cálculo en particular.

Por lo antes expuesto, me he motivado a indagar sobre ¿cómo se realiza el proceso enseñanza-aprendizaje de la Integral Definida como el área bajo una curva y cómo integrar didácticamente la computadora a dicho proceso?

El campo científico en el que está ubicado este estudio es la Didáctica de la Matemática, el cual se genera como un intento por estudiar los problemas relativos al proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes de ingeniería de la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Este problema toma como punto de referencia la experiencia educativa, en la que se han observado dificultades en la apropiación de los conceptos matemáticos, especialmente los relativos al concepto de integral definida.

Es por ello que, el objeto de estudio es el aprendizaje de la integral definida como área bajo una curva, es decir, cómo el estudiantado se apropia de la parte conceptual del cálculo, específicamente del concepto de integral definida.

De ahí que, se consideró importante centrar este trabajo en la determinación del "P*roceso de enseñanza–aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva en las asignaturas de Cálculo en las carreras de Ingeniería",* de la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí. Este estudio se deriva de la línea de investigación de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN – MANAGUA; FAREM – Estelí) "Calidad educativa".

En fin, en este estudio nos centramos en un diagnóstico que consistió en analizar las componentes del proceso de enseñanza – aprendizaje de la unidad de integral definida como área bajo la curva, poniendo más énfasis en las actitudes de los estudiantes (ámbito afectivo) y en el diseño de un compendio metodológico utilizando un entorno computacional que contribuyan a la generación de aprendizajes significativos en dicha asignatura.

TERCERA PARTE:

JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

III. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

En diferentes partes del mundo, se ha venido observando que es necesario introducir cambios al interior de las aulas de clase. Esto es algo que viene considerándose seriamente, y que se debe reflexionar en las aulas de Ingeniería una vez que se reconoce la necesidad de brindar aportes para la mejora de los procesos de enseñanza.

En efecto, en los últimos años se ha visto una preocupación creciente por los métodos de enseñanza–aprendizaje del Cálculo, debido a los elevados niveles de fracaso estudiantil y, consecuentemente, de reprobación y deserción, sin obviar la incidencia probada que los métodos utilizados para su enseñanza influyen en el proceso de aprendizaje.

En vista de lo anterior, varias de las investigaciones en torno a estas dificultades indican que el problema está en la comprensión y manejo de los conceptos de límite, diferenciación e integración, ya que, por un lado, la enseñanza del Cálculo se concentra en habilidades de proceso en lugar de la comprensión conceptual, y por el otro, los conceptos de las Matemáticas avanzadas tienen una complejidad intrínseca, que no pueden entenderse sin una sólida comprensión de los conceptos básicos previos (Turégano, 1998).

Salinas & Alanís (2009), mencionan que la enseñanza tradicional del Cálculo propicia que los docentes centremos la evaluación en la capacidad que logran los estudiantes para aplicar algoritmos y procesos algebraicos en la resolución de ejercicios. Por otra parte, los estudiantes no prestan interés por comprender los conceptos matemáticos, sino más bien que procuran aprender procesos mecánicos de resolución de ejercicios. Si el área bajo la curva no se establece como un objeto geométrico, ocurre que los estudiantes identifican el concepto de integral con el cálculo de primitivas y con la aplicación indiscriminada de la regla de Barrow.

En este mismo sentido, Depool (2005), señala que, no existe una integración del concepto de Integral Definida y el área, es decir, falta una coordinación adecuada entre la representación gráfica y la numérica, citando a Llorens & Santonja (1997; Turégano (1998); Hitt (2003); Contreras y Ordóñez (2006).

En las carreras de ingeniería el Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II son asignaturas a las cuales hay que prestar mucha atención, si consideramos que su enseñanza y aprendizaje constituye una parte fundamental de otras asignaturas.

En el programa de asignatura de Cálculo diferencial e integral que se imparte en la Facultad Regional Multidisciplinaria – Estelí para las carreras de Ingeniería se propone la metodología tradicional de enseñanza para desarrollar los contenidos propuestos basada en clases expositivas, utilizando como recursos instruccionales: pizarra, marcadores y borrador, además de guías elaboradas por el docente que imparte la asignatura.

De igual manera, los diagnósticos de investigaciones realizadas muestran que los aprendizajes conceptuales y de aplicación son escasos. Esto se debe a la poca visualización y contextualización de las propiedades de los conceptos y procesos matemáticos; así como, a dificultades en la vinculación cognitiva de aspectos gráfico-visuales y analítico–algorítmicos de los mismos.

El plan de estudio y el programa de asignatura señalan como propósitos fundamentales, favorecer el desarrollo de un pensamiento lógico, formal y algorítmico en el futuro profesional, lo que le permitirá analizar, criticar, precisar, abstraerse, argumentar, formalizar, intuir, modelar, resolver y tomar decisiones en la solución de problemas de aplicación de la vida diaria. Sin embargo, las actividades y recursos didácticos sugeridos han proporcionado resultados poco satisfactorios.

En la asignatura de Cálculo diferencial e integral predomina el modelo tradicional, el cual se traduce en un aprendizaje basado únicamente en la reproducción mecánica de los contenidos impartidos por el o la docente. Lo anterior, favorece en los estudiantes la memorización, lo que no es congruente con lo que establece la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel. En ella se enfatiza, que el estudiante es el constructor de su propio aprendizaje, con la mediación del docente. Tal como lo plantea nuestro Modelo Educativo.

En conversaciones con docentes con vasta experiencia en la enseñanza de las Matemática se menciona que, por lo general, los docentes introducimos el concepto de integral definida de una función como el área bajo la curva en forma expositiva, evitando el verdadero propósito que consiste en obtener aproximaciones cada vez más precisas.

De manera semejante, se afirma que, existe una pobre comprensión de los conceptos y su aplicación en la enseñanza del Cálculo. Esto posiblemente debido a que, por un lado, ésta se conduce con una fuerte carga operativa en deterioro de la parte conceptual, y por el otro, la enseñanza del Cálculo está asociada al predominio del formalismo en el abordaje de los conceptos y la ausencia de asociación con un enfoque geométrico.

También es habitual que se realice un abordaje bastante simple o superficial del concepto y sin aparente conexión con las aplicaciones del Cálculo Integral. Esto incide en la comprensión por parte de los estudiantes, y por ende, la resolución de problemas. Es decir, en la aplicación de la integral donde se hacen cálculos de áreas, longitud de curvas, volumen de sólidos de revolución; y los referidos a aplicaciones a la ingeniería: trabajo, presión, fuerza hidrostática y centros de masa.

Para ilustrar esto, usualmente la enseñanza del Cálculo parte de enunciados, teoremas y problemas que ejemplifican los conceptos asociados y se apoya fundamentalmente en el conocimiento algebraico del estudiante y poco en la intuición geométrica y visual. Esto, probablemente, debido a la dificultad de representar en el papel o la pizarra un número suficientemente grande de ejemplos, que den significado geométrico a los contenidos del Cálculo. Además de que en el programa de asignatura se dedica poco tiempo para el desarrollo de contenidos relacionados con los conceptos. En este sentido, se hace necesario rescatar el desarrollo del Cálculo haciendo uso de los medios tecnológicos de que se dispone.

Para Duval (1998), citado por Aranda (2015), el acceso al conocimiento matemático no es directo, por lo que se requiere auxiliarse de diferentes representaciones de los objetos matemáticos, según la teoría de representaciones semióticas.

La presente investigación tiene la finalidad de analizar la manera en que se incide en el aprendizaje del tema de la Integral Definida en los estudiantes de Ingeniería de la FAREM - Estelí, mediante la elaboración de un compendio enmarcado en un esquema constructivista, en que el estudiante sea activo en la adquisición y formación de sus conceptos, pues se plantean problemas que propician la necesidad de utilizar diferentes representaciones semióticas (gráficas, algebraicas y verbal).

Nuestra propuesta se fundamenta en que, uno de los recursos didácticos que facilita los procesos de enseñanza aprendizaje para transmitir la naturaleza dinámica de un concepto a partir de la visualización es la computadora. De igual manera, facilita la coordinación de los distintos registros de representación de un concepto, así como la creación de medios personalizados que mejor se adapten a los requerimientos pedagógicos. Además, facilita el factor motivación de manera que los estudiantes reafirmen los conocimientos teórico – prácticos necesarios para el alcance exitoso de los objetivos de la asignatura.

Con esta investigación se pretende contribuir a mejorar el proceso de enseñanza – aprendizaje del Cálculo Integral en el que se utilizan las TIC como mediador didáctico, donde es posible analizar las dificultades y potencialidades que se dan en su implementación y, también aportar en cuanto a los factores que influyen en la comprensión de los conceptos relacionados con la asignatura.

Considerando, además que, la calidad educativa también es un mandato de ley tal y como lo establece la Ley General de Educación, Ley Nº 582, aprobada por la Asamblea Nacional (2006, p.8) que expresa literalmente en el artículo 6 inciso e) en su último párrafo:

> La calidad de la educación apunta a la construcción y desarrollo de aprendizajes relevantes, que posibiliten a los educandos enfrentarse con éxito ante los desafíos de la vida y que cada uno llegue a ser un sujeto – actor positivo para la comunidad y el país.

Con la realización de este trabajo se pretende apoyar el proceso de enseñanza aprendizaje de los estudiantes universitarios, produciendo cambios significativos en las prácticas pedagógicas, metodologías de enseñanza y la forma en que los estudiantes acceden a los conocimientos e interactúan con los conceptos matemáticos presentes en ellos.

Basado en lo anterior, es indudable la necesidad de incursionar en una propuesta de nuevas metodologías para la enseñanza aprendizaje de las Matemáticas en la carreras de Ingeniería, utilizando el entorno computacional de aprendizaje, el mismo que será un apoyo tanto para los docentes universitarios como para el estudiantado universitario, generando de esta manera cambios valiosos y significativos en la forma de enseñar y aprender.

Es decir, se facilita la reflexión tanto de los docentes como de los estudiantes cuando se trata de enseñar y aprender las Matemáticas, utilizando las herramientas tecnológicas de que se dispone en la actualidad, sin obviar que el mejor recurso para el aprendizaje va a depender de los objetivos propuestos, los métodos de enseñanza utilizados, la forma organizativa docente a emplear, las posibilidades y limitaciones, la cantidad de estudiantes y la maestría del docente, entendida esta última como su nivel de conocimientos, experiencia profesional y dominio de elementos psicopedagógicos y de comunicación.

La parte innovadora del presente estudio es precisamente proponer la inclusión de una metodología didáctica que permita mejorar el proceso de enseñanza del Cálculo en la universidad, especialmente en Ingeniería.

El aporte práctico tanto para el docente como para los estudiantes, es poder optar por esta forma de enseñanza-aprendizaje, ya que este último se realiza en forma computacional, trata de adaptar la teoría a la realidad; a su vez facilita al docente en su tarea mediante actividades sencillas. En lo que tiene que ver a los estudiantes mejorará su aprendizaje, estará motivado y llevará a la práctica lo aprendido, despertando su interés y entusiasmo, por ser partícipe en su proceso de aprendizaje.

Se considera que esta investigación fue factible y necesaria no solo para la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí, sino para la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, que está inmersa en un proceso de cambio hacia un Nuevo Modelo Educativo con el propósito de transformar la enseñanza tradicional, centrada en el docente, en una entidad activa donde el estudiantes debe ser gestor de su propio desarrollo y formación integral: intelectual, humana, social y profesional, donde los estudiantes sean personas autónomas, independientes y reguladoras de su propio aprendizaje, es decir, que aprendan a aprender. Por otro lado, los docentes serán los facilitadores, diseñadores, comunicadores, coordinadores, asesores, orientadores y evaluadores en el proceso de aprendizaje.

El presente trabajo de investigación, pretende ser el punto de partida para establecer líneas de discusión y acción, que permitan elaborar nuevas herramientas didácticas en un entorno computacional, con la seguridad que con ello se contribuirá a mejorar el aprendizaje significativo de la Integral Definida, de tal manera que sea más ameno, motivador y que tenga una aplicación práctica; de una manera general constituirá un aporte para las demás asignaturas que son parte del plan de estudio de las carreras.

En lo concerniente a la elaboración del compendio, su ámbito de aplicación será, inicialmente, en las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II, de las carreras de ingeniería. Su utilización se podrá extender, posteriormente, a todas aquellas asignaturas o cátedras que aborden temas relacionados con las ciencias aplicadas.

El diseño del compendio contribuirá a la superación de factores limitantes u obstaculizadores del aprendizaje del Cálculo. Esto a fin de estimular el interés por el estudio del mismo, promoviendo un ambiente favorable para el aprendizaje significativo.

Asimismo, esta investigación es oportuna, dado que nuestra universidad se encuentra en un proceso de transformación curricular en el aspecto metodológico tendiente a un aprendizaje centrado en el estudiante como verdadero protagonista del proceso docente educativo.

La trascendencia de esta investigación está relacionada con su aporte al enriquecimiento de estrategias metodológicas participativas, para la motivación y generación de interés por el aprendizaje del Cálculo en las carreras de nuestra Facultad.

En el aspecto metodológico, beneficiará a los docentes interesados en aplicar metodologías activas, con miras a la mejora continua del proceso de aprendizaje. Además, este estudio servirá de base para otras investigaciones que tengan como interés principal profundizar sobre la temática.

La novedad científica está dada en la introducción coherente de la computadora como medio auxiliar didáctico para el proceso de enseñanza–aprendizaje de la unidad de Integral Definida como área bajo la curva en un entorno computacional. Al incorporar herramientas computacionales se brinda la posibilidad de ofrecer medios de expresión matemática alternativos, formas innovadoras de manipulación de los objetos matemáticos y estrategias de acercamiento al conocimiento matemático.

La realización de esta investigación fue viable ya que se contó con los recursos humanos, el apoyo institucional y con la disposición de todos los implicados en la misma.

En consecuencia, consideramos que esta investigación tiene impacto social por ser una de las primeras realizadas a nivel de Doctorado en el área del Cálculo Integral, mediante la introducción coherente de la computadora como medio auxiliar didáctico para el proceso de enseñanza–aprendizaje. Además, como toda investigación en el área de Didáctica de la Matemática, tiene como objetivo último el de mejorar el aprendizaje de las Matemáticas, lo cual implica mejorar su enseñanza y, por tanto, aportar elementos teóricos y prácticos que permitan incrementar la eficacia de una formación inicial de los estudiantes universitarios, quienes utilizarán nuevas formas de aprender, con el propósito que se les facilite su desarrollo profesional.

CUARTA PARTE:

ESTADO DEL ARTE

IV. ESTADO DEL ARTE

En la búsqueda de investigaciones realizadas sobre el problema que se plantea en este estudio, se realizó un recorrido sobre la temática planteada "***Proceso de enseñanza–aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva en las carreras de ingeniería",*** **de la** Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí.

Uno de los trabajos pioneros es el de Orton (1983), sobre el aprendizaje del concepto de Integral Definida, que plantea como uno de sus objetivos investigar la comprensión de los estudiantes sobre la integración y la diferenciación. En los resultados del trabajo se evidencia el dominio del modo algebraico sobre el gráfico y algunas carencias de significado en límites y aproximaciones.

Dicho estudio se basa en entrevistas a 110 estudiantes con edades comprendidas entre los 16 y 22 años; todos ellos cursaban Matemáticas como una de las materias principales de su curso. Sesenta alumnos fueron seleccionados del nivel académico conocido como Sixth Form (16-18 años) de cuatro escuelas diferentes; los otros cincuenta (18-22 años) eran estudiantes de dos colegios de Educación Superior que se preparaban para ser profesores de Matemáticas.

En el estudio se consideraron 38 ítems, de los cuales 18 eran relativos a la integración. Se consideraron clave para evaluar la comprensión de la integración los ítems relacionados con:

- Límite de una sucesión igual al área bajo una gráfica.

- Límite a partir de una sucesión de fracciones y a partir de un término general.

Orton consideraba que los límites son importantes para una comprensión real de la integración y la diferenciación, aunque por lo general a éstos no se les presta mucha atención para su aprendizaje hasta que sean necesarios para el Cálculo.
Otro estudio referente al concepto de integral definida es el de Aranda (2015), quien presentó la tesis doctoral *Análisis de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de bachillerato*. El objetivo de esta investigación fue analizar el proceso de construcción del concepto de integral definida desde el marco de la abstracción reflexiva. Este estudio se realizó con quince estudiantes de bachillerato (16 -18 años) que participaron en un experimento de enseñanza constructivista.

Cabe señalar que, los participantes de esta investigación fueron elegidos del segundo año de bachillerato, sin distinción del rendimiento académico, es decir, la calificación final obtenida en la asignatura de Matemática I del primer curso de bachillerato.

Dichos estudiantes trabajaron por parejas que formó la docente con el criterio de que todos ellos tuvieran un nivel de rendimiento similar. Esto se hizo con el objetivo, entre otros, de que los estudiantes discutiesen sobre las tareas y sus soluciones, de modo que se pudiera observar mejor el proceso de construcción del conocimiento. Además, realizaron su trabajo utilizando una guía didáctica que minimizaba el papel de la profesora.

El experimento de enseñanza se realizó en tres fases.

Fase I: Diseño y planificación donde se especifican los objetivos de aprendizaje de los estudiantes, la secuencia de tareas que se les proponen y una hipótesis del proceso de aprendizaje.

Fase II: Se identifican las comunicaciones orales y registros de interacciones con el applet que mostraban acciones cognitivas de los estudiantes.

Fase III: Se describe la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes en términos del mecanismo reflexión sobre la relación actividad – efecto, mostrando los saltos cognitivos que se producen al pasar del momento de proyección al de reflexión y de este al de anticipación local.

En relación a la secuencia didáctica, ésta plantea el estudio de la Integral Definida a partir del cálculo del área de una superficie bajo una curva (Turégano, 1998) y se articula de la siguiente manera:

- Aproximación del área de superficies bajo una curva (un cuadrante del círculo y de la región determinada por una parábola, el eje X y dos rectas verticales), cuando la función es positiva y mediante suma de áreas de rectángulos.

- Diferencia entre área bajo una curva en un intervalo e integral definida de la función definida por la curva en dicho intervalo: Definición de integral definida.

- Propiedades de la integral

- Introducción de la función integral, del teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow.

Para abordar la secuencia didáctica se diseñan once tareas con sus correspondientes guías de trabajo, las cuales dan orientaciones y plantean cuestiones.

Para facilitar el trabajo se diseñan distintos tipos de applets: unos aproximan el área de superficies mediantes rectángulos que recubren la superficie por exceso y por defecto; otros visualizan la acumulación de diferencias de las sumas superiores e inferiores. En ambos casos el estudiante (usuario) determina el número de rectángulos, que corresponde al número de subintervalos de la partición.

Finalmente otros applets permiten relacionar una función y su función integral en casos sencillos, donde el usuario puede modificar la pendiente, los parámetros de la ecuación de una recta y los extremos de un intervalo.

La investigación se centra en los siguientes temas:

1. Área del cuadrante
2. Parábola: área bajo un arco de parábola
3. Parábola: error de la aproximación
4. Área e integral
5. Función integral I
6. Función integral II

A partir de la relación con la construcción de la aproximación al área bajo una curva se identifican tres perfiles de estudiantes:

Perfil 1: Estudiantes que muestran evidencias de construir la aproximación mediante la coordinación entre dos concepciones del límite: la métrica y la dinámica y son capaces de aplicar las regularidades observada a nuevas situaciones (momento de anticipación local).

Perfil 2: Estudiantes que muestran evidencias de construir la aproximación mediante la coordinación entre dos concepciones del límite: la métrica y la dinámica pero no de conexión entre ambas concepciones (momento de reflexión).

Perfil 3: Estudiantes que no dan evidencias de construir una aproximación al área de superficie bajo una curva como límite de una sucesión (momento de proyección)

En relación al significado de la expresión de las sumas de Darboux se identifican tres perfiles:

Perfil 1: Coordinación entre representaciones de la acumulación de diferencias de sumas superiores e inferiores (momento de anticipación local)

Perfil 2: Coordinación entre representaciones para las sumas superiores e inferiores pero no entre representaciones de la acumulación de diferencias de (momento de reflexión)

Perfil 3: no existen evidencias suficientes de coordinación entre representaciones (momento de proyección)

En relación con la construcción del concepto de integral definida y de función integral se identifican dos perfiles:

Perfil 1: Los estudiantes distinguen entre el valor del área y la integral definida más allá de los casos particulares, relacionan una función (constante, lineal o afín) y la función integral y expresan esta relación gráfica y analíticamente (momento de reflexión)

Perfil 2: Los estudiantes hacen sólo algunas constataciones sobre la relación entre el área y la integral apoyado en los casos particulares y son capaces de obtener la fórmula del área bajo una recta, pero no de relacionar una función y su función integral (momento de proyección)

En la Tesis *Unidad didáctica para la interpretación de la integral definida como el área de una región plana, mediante la modelación de las funciones en Geogebra*, Díaz (2015), se planteó como objetivo: Diseñar una unidad didáctica para los cursos de Cálculo Integral de la Universidad de Boyacá, para interpretar la Integral Definida como área de una región plana a partir del estudio gráfico y analítico de funciones, usando el software Geogebra.

Para alcanzar este objetivo se aplicó, al inicio, una prueba diagnóstica con el propósito de revisar conceptos previos, relativos a la noción de área y a la representación y análisis de funciones de variable y valor real. El trabajo está conformado por cinco capítulos de los cuales cuatro de ellos describen el marco histórico, epistemológico, didáctico y disciplinar, con el fin de fundamentar el análisis de la prueba y diseñar la unidad didáctica.

Para la elaboración de la unidad Didáctica, con el apoyo del software Geogebra como herramienta para la construcción de curvas, se presenta una aproximación intuitiva y secuencial a la interpretación de la Integral Definida como área. Para ello, parte de la noción inicial de área por recubrimiento de una región plana (polígonos regulares e irregulares). Luego, se aproxima paulatinamente al concepto formal de Integral Definida, haciendo énfasis en procesos de visualización y generalización, así como para la determinación de intersecciones y la caracterización de regiones del plano.

También, se incluye un análisis de resultados de la aplicación de la unidad didáctica a un grupo de estudiantes del curso de Cálculo Integral, además de una serie de applets y una guía básica (que aparece como anexo) para que los estudiantes que trabajen con la secuencia de actividades puedan usar el Geogebra como herramienta para representar funciones, delimitar regiones del plano y construir iterativamente polígonos inscritos y circunscritos y aproximarse al concepto de Integral Definida.

Otra investigación relacionada con el estudio es la Tesis Doctoral *Integral Definida, Cálculo Mental y Nuevas Tecnologías*, realizada por Porres (2011), inscrita en Didáctica de la Matemática, realizada bajo el marco metodológico cualitativo de investigación - acción y el modelo teórico de los actos de comprensión de Sierpinska.

En esta investigación se establece como objetivo básico y fundamental: "Investigar los aprendizajes que se producen en los estudiantes de segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales sobre la Integral Definida al integrar docencia tradicional, cálculo mental y nuevas tecnologías", desglosándolo en cuatro objetivos generales:

Objetivo 1: Analizar el desarrollo epistemológico de la integral y diferentes conceptualizaciones de la misma con el fin de establecer conexiones con el currículo actual y fundamentar la docencia y la investigación.

Objetivo 2: Descubrir los logros y las dificultades que tienen los estudiantes al resolver mentalmente integrales indefinidas sencillas, que sean muy parecidas a las que figuran en las tablas de primitivas.

Objetivo 3: Explorar desde una perspectiva investigadora los aprendizajes que se producen en los estudiantes en el estudio de la integral definida utilizando los soportes clásicos: libro de texto, toma de apuntes y resolución de problemas con lápiz y papel.

Objetivo 4: Analizar la integración del programa de cálculo simbólico *DERIVE*, aplicado al desarrollo teórico-práctico de la integral definida, en el proceso de enseñanza del profesor y aprendizaje de los estudiantes.

La propuesta consiste en realizar un estudio epistemológico del área y la Integral Definida que permita justificar la docencia actual del Cálculo Integral con estudiantes de bachillerato de ciencias sociales.

En esta investigación participan seis ciclos, y las muestras de cada uno de ellos están tomadas de un único grupo de estudiantes de segundo curso de bachillerato de la modalidad de ciencias sociales del Instituto de Enseñanza Secundaria "Félix Rodríguez de la Fuente" de Burgos, siendo la muestra de, aproximadamente, veinte estudiantes por ciclo, para un total de ciento veinte.

La metodología básica empleada es la práctica del cálculo de primitivas mediante el cálculo mental con estudiantes de segundo de bachillerato de ciencias sociales, generalmente, al comienzo de cada clase y, además, con la realización de pruebas escritas donde sólo se permitía escribir la solución de integrales indefinidas elementales.

Los instrumentos utilizados en la obtención de datos son los siguientes:

- Anotaciones del docente-investigador. Después de cada clase, el docente-investigador anotaba en un cuaderno específico los acontecimientos, el ambiente, las incidencias y los episodios considerados relevantes durante el desarrollo de la clase.

- Grabaciones en audio. Con esto se asegura la toma de datos de manera fidedigna, con todas las intervenciones orales de los estudiantes y del docente, incluso, refleja el ambiente de clase.

- Los textos escritos de los estudiantes. Consistía en cuadernos que debían completar los estudiantes para poder obtener información sobre su comprensión teórica de los conceptos, la comprensión de la práctica informática, cuestionarios, pruebas sobre la comprensión - adquisición de los conceptos explicados en el aula de clase y en el aula de informática.

Las aportaciones de todos estos documentos fueron muy valiosas para obtener información acerca del proceso de aprendizaje, las dificultades encontradas, los logros conseguidos, carencias detectadas, etc.

La parte experimental se realiza en seis ciclos, en donde se elaboraron y reelaboraron distintos materiales, según el currículo establecido y la programación del departamento de matemáticas. Se trabajó con estudiantes de Bachillerato de la modalidad de Ciencias Sociales y se encontró, entre otras, las siguientes aportaciones:

- Los aprendizajes de los estudiantes sobre los conceptos inherentes a la integral definida analizados mediante el establecimiento de categorías de comprensión matemática, según los actos de comprensión de Sierpinska, y con la metodología cualitativa de investigación-acción.

- Los resultados prácticos del cálculo de primitivas elementales realizados mediante el cálculo mental, cuya implementación ha sido realizada en los diez primeros minutos de cada sesión de clase en el aula habitual de grupo.

- Los resultados de la utilización del programa de cálculo simbólico DERIVE, junto con el programa de utilidades realizado por el profesor investigador, en la enseñanza y el aprendizaje de la integral.

La tesis "*El entorno virtual de aprendizaje y el aprendizaje significativo de la integral definida en el área de ciencias exactas de la Universidad Politécnica Saleciana*" Cañizares (2010), investiga sobre la incidencia del entorno virtual de aprendizaje (EVA) y el aprendizaje significativo de la integral definida, en los estudiantes de las Carreras de Ingeniería Agropecuaria, Ingeniería en Biotecnología, Ingeniería en Administración de Empresas, Ingeniería Civil, Ingeniería Eléctrica y Electrónica, de la Universidad Politécnica Salesiana, en el semestre septiembre 2009 a febrero del 2010.

El objetivo de esta investigación: Busca identificar si la utilización del EVA contribuye a generar aprendizajes significativos y analizar el ámbito de los aprendizajes significativos de la integral definida. Plantea como hipótesis: la óptima utilización del Entorno Virtual de Aprendizaje mejorará los aprendizajes significativos de la Integral Definida en los estudiantes de las Carreras de Ingeniería.

Además, propone la elaboración de un texto digital como herramienta de aplicación para el EVA, que contribuya a mejorar el aprendizaje significativo de la integral definida. Se consideró que esta investigación es de tipo propositiva, utiliza la metodología fundamentada en lineamientos de carácter cualitativa, interpretativa y cuantitativa, que incluyó una investigación de campo, documental, bibliográfica y electrónica de carácter descriptiva con una perspectiva de proyecto factible analítica, inducción, deducción y estadística, mediante la utilización de entrevistas, encuestas, material bibliográfico y consultas en la Internet.

Del análisis de los datos obtenidos, se concluye que los EVA constituyen una herramienta para lograr aprendizajes significativos de la integral definida, verificándose, de esta manera, la hipótesis propuesta.

En el 2005, la tesis doctoral "*La enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS)*, Depool (2005), la cual se inscribe dentro de las líneas de investigación del área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna (España).

En la investigación se propone tres objetivos fundamentales:

- Estudiar las actitudes de los estudiantes al participar en un curso que involucra el uso de la Tecnología de la Información y la Comunicación

- Diseñar, implementar y evaluar un módulo instruccional que contiene prácticas de laboratorio, estructuradas utilizando el programa de cálculo simbólico DERIVE

- Estudiar el nivel de competencia que puede lograr el estudiante en cuanto a la comprensión del concepto de integral definida.

Los estudiantes fueron seleccionados de la asignatura de Cálculo I de un primer curso de Ingeniería de la Universidad de Venezuela, los cuales participaron en actividades que combinaban clases normales de tiza y pizarra con prácticas de laboratorio, siguiendo el módulo instruccional basado en DERIVE.

Las principales conclusiones fueron:

- El módulo resulta ser un instrumento útil en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo I

- Los estudiantes lograron una comprensión aceptable del concepto de integral definida

- En relación a las actitudes se tiene que el uso de los ordenadores inspira confianza y seguridad, resulta motivante y compromete en la realización de actividades matemáticas usando DERIVE.

Otra tesis que se considera importante mencionar es la Tesis Doctoral de Turégano (1995), *Los Conceptos en torno a la Medida y el Aprendizaje del Cálculo Infinitesimal*, destaca, después de aplicar un cuestionario, que el nombre “área bajo la curva” resultó conflictivo cuando la función toma valores negativos.

Dicho trabajo parte de la hipótesis de que los estudiantes pueden aprender (de forma intuitiva) conceptos del Cálculo sin el dominio previo o simultáneo de las habilidades algorítmicas usuales, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto de integral definida y a sus propiedades mediante la idea de área bajo una curva.

Según esta autora, para iniciar al estudiante en el estudio del Cálculo Infinitesimal sería más adecuado utilizar una secuencia del currículum del Cálculo y un enfoque de la integración de acuerdo con su génesis histórica. Para ello, propone comenzar con la integral definida, independientemente de la diferenciación y como primera introducción al concepto de límite; motivado por el problema que está en el origen del cálculo integral: el cálculo de áreas planas. El modelo que propone está basado en la definición geométrica de la integral de Lebesgue, asociada a la idea de medir una región.

Como conclusión final menciona que en la secuenciación de contenidos, se debe considerar la génesis histórica sobre su orden lógico, y que la introducción a los conceptos mediante la resolución de problemas que han estado en el origen del concepto logra realizar la formación de éste. Al utilizar simultáneamente diferentes representaciones, se favorece el establecimiento de conexiones entre ellas, siendo las conexiones las que marcan las diferentes etapas del aprendizaje en los estudiantes.

Aquí es donde el ordenador juega un papel importante debido a su potencia visual, que ayuda a la formación y transformación de intuiciones y a la creación de la imagen del concepto, y debido también a la facilitación para realizar cálculos, eximiendo al estudiante de esta tediosa labor, el estudiante puede centrarse en la exploración y discusión de los conceptos.

4.1 Investigaciones relacionadas con las actitudes hacia las Matemáticas y hacia los ordenadores y el uso de los PCS.

> El estudio de las actitudes en educación matemática se ha desarrollado de forma significativa en las últimas décadas. Las primeras investigaciones estaban centradas en las relaciones entre actitudes positivas y rendimiento (Leder, 1985; Leder y Forgasz, 2006), estudios centrados en la medida de actitudes en distintas áreas de la matemática (Kulm, 1980; Estrada, 2002), metaanálisis y estudios recientes sobre la naturaleza de la actitud (Ruffell et al., 1998), la búsqueda de una buena definición (Di Martino y Zan, 2001, 2002), o la exploración de instrumentos como cuestionarios (Hannula, 2002) (Camacho M. & Depool R., 2003, p 128).

Blanco, Caballero, Piedehierro, Guerrero & Gómez del Amo (2010), mencionan que diversas evaluaciones sobre rendimiento en las Matemáticas (INECSE, 2001; OCDE, 2005, MEC, 2007) revelan que un alto porcentaje de estudiantes fracasan y muestran dificultades para superar con éxito esta materia. Dicho autor, citando a Marchesi y Hernández (2003) señala que los factores que mejor explican el fracaso académico son, por un lado, la falta de conocimientos y habilidades cognitivas, interés y afectos positivos.

Depool (2005), sostiene que aunque el estudio de las actitudes hacia la Matemática se viene desarrollando desde hace tiempo, los trabajos relacionados con las actitudes hacia la tecnología en el aprendizaje matemático tiene una historia más corta. Sobre esto, han sido significativas las investigaciones llevadas a cabo con estudiantes universitarios por Galbraith y Haines (2000); Cretchley y Galbraith (2002); Camacho y Depool (2002); Gómez-Chacón y Haines (2003) y en el ámbito de secundaria Forgasz (2003); Goos et al., (2003); Pierce y Stacey, (2004); Pierce, Stacey y Brakatsas (2007).

Se podría afirmar que, la tendencia en estos estudios ha sido el uso de los cuestionarios para la evaluación de las actitudes, formulados desde la perspectiva de la definición multidimensional de actitud (cognitiva, afectiva y conductual) y teniendo en cuenta, como principales dimensiones respecto a su influencia en el aprendizaje, la confianza y la motivación matemática.

Es válido mencionar que según , Cretchley y Galbraith (2002, p.8), citado por Depool (2005), estos estudios han obtenido conclusiones similares, indicando que:

> Existe una débil relación entre actitudes hacia la Matemática y actitudes hacia el ordenador (ambas, confianza y motivación) y que las actitudes de los estudiantes en el aprendizaje matemático en contextos tecnológicos correlacionan más fuertemente con las actitudes hacia los ordenadores que con las actitudes hacia las Matemáticas.

Otros estudios mencionados por Gil, Guerrero, & Blanco (2006), sobre actitudes hacia las Matemáticas han sido llevadas a cabo por autores como Gairín (1990), Camacho, Hernández y Socas (1995), Carbonero, Martín y Arranz (1998), Hernández y Socas (1999) y Cubillo y Ortega (2002), entre otros. Sin embargo, son escasos los estudios sobre dimensión afectiva y el aprendizaje de la Matemática, y son más raros aún los relativos al estudio de las emociones.

Galbraith y Haines (1998), citado por Depool (2005), realizaron un estudio sobre las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y el impacto de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las mismas. Para ello aplicó un cuestionario de actitudes a 156 estudiantes de un primer curso de Ingeniería, Matemáticas y Ciencias Actuariales.

El instrumento aplicado constó de seis escalas para medir la confianza y motivación en Matemáticas y en los ordenadores, así como la interacción de ordenador y las Matemáticas y el compromiso con las Matemáticas.

Las conclusiones a las que se llega en este estudio son:

- Los estudiantes con alta confianza en Matemáticas creen que ellos obtienen valor mediante su esfuerzo, no se preocupan por tener que aprender temas complicados, esperan conseguir buenos resultados, y se sienten bien con las Matemáticas como materia.

- Los estudiantes con confianza baja están nerviosos al aprender nuevos contenidos, esperan que todas las Matemáticas sean difíciles y se preocupan más por las Matemáticas que por cualquier otra materia.

- Los estudiantes con alta motivación matemática disfrutan haciendo Matemáticas, insisten en los problemas hasta que los resuelven, continúan pensando sobre sus ideas confusas fuera de la clase, y se entusiasman cuando resuelven actividades matemáticas.

- Los estudiantes con baja motivación no disfrutan con los desafíos matemáticos, se frustran teniendo que pasar tiempo resolviendo problemas, prefieren que les den las respuestas en lugar de pensar sobre ellas, y no pueden entender a las personas que se entusiasman con las Matemáticas.

- El ordenador influye de manera dominante en cuanto a la interacción ordenador - Matemáticas y es de esperar que tenga un impacto significativo al integrar el uso del ordenador y las calculadoras gráficas al plan de estudio.

- Los estudiantes prefieren trabajar utilizando ejemplos más que aprender la materia teórica, les gusta probarse razonando mediante ejercicios y problemas, les agrada relacionar sus nuevos conocimientos con los que ya tenían, les gusta elaborar apuntes de las materias, y repasan su trabajo regularmente.

- Los estudiantes con baja actitud tratan las ideas en Matemáticas como unidades separadas que deben ser posteriormente recordadas, no toman apuntes y usualmente no comprueban sus cálculos y les gusta revisar la materia toda de una vez.

- Los estudiantes que tienen una alta confianza y seguridad en el uso del ordenador, desarrollan actitudes positivas a la hora de realizar actividades matemáticas utilizándolo. Tal actitud genérica hace esperar un importante impacto cuando estas herramientas sean integradas en la enseñanza.

4.2 Investigaciones sobre los programas de cálculo simbólico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

A continuación se referencian algunas investigaciones llevadas a cabo por varios autores que han utilizado algún PCS en sus estudios, mencionados por González - Martín, (2005), en su trabajo de tesis doctoral.

Marlewski (1999) presenta un programa de utilidades distinto a los que aparecen en la librería de DERIVE para el estudio de las fórmulas de cuadraturas. El programa de utilidades proporciona soluciones gráficas a los problemas de cuadratura.

De manera análoga, Mann y Zehavi (1998) presentan una serie de programas de utilidades, distintos a los que vienen incorporados en la librería de DERIVE, para el cálculo de valores extremos de una función. En este estudio, los problemas son resueltos utilizando representaciones gráficas y simbólicas y una de las conclusiones señala que, un importante cambio positivo es el uso de un alto lenguaje matemático para interactuar con PCS, el cual facilita a los estudiantes el hacer Matemáticas, y ampliar el rango de los problemas que ellos pueden resolver. Otro importante resultado es que, podemos aproximar problemas que eran considerados tabú en años anteriores.

Tall (1997) destaca que los Programas de Cálculo Simbólico (o manipuladores simbólicos) están siendo ahora más extensivamente usados para enseñar Cálculo, desde cursos basados en libros de software, que incluyen manipulación simbólica y el dibujo de gráficas en Mathematica (Brown, Porta y Uhl 1990; 1991a), a cursos de laboratorio añadidos a cursos estándar en Maple (Muller 1991) y proyectos de investigación (Heid 1988; Palminter 1991).

Comparando estudiantes en un laboratorio con ordenadores usando DERIVE con un curso tradicional, Coulombe y Mathews (1995) no encontraron diferencias importantes en el conocimiento, manipulación de lápiz y papel, comprensión conceptual o destrezas mentales de orden superior, aunque produzcan un nivel similar de realización mientras que se da una familiaridad adicional a los estudiantes con la tecnología computacional.

Depool (2005), refiriéndose al trabajo de Monaghan et al. (1994), señala que, el uso de software con instalaciones gráficas y manipulaciones simbólicas cambia las concepciones de los estudiantes de Cálculo y sus capacidades para llevar a cabo las destrezas relacionadas. Estos autores, encontraron que algunos estudiantes, que usan un PCS para efectuar el proceso de diferenciación, respondían a una explicación solicitada sobre la diferenciación describiendo la sucesión de “secuencia de teclas” que era necesario para conseguir el resultado. Parece que algunos estudiantes pueden simplemente reemplazar un procedimiento que tiene poco significado conceptual por otro.

Tall (1991a) señala que, la disponibilidad creciente del ordenador con gráficos de alta definición, ha ofrecido la posibilidad de reforzar, en general, la visualización en Matemática y el Cálculo, en particular. El software interactivo para ordenador puede usarse para dar la visión a los estudiantes, maestros y matemáticos profesionales. No obstante, la tecnología trae con ella, el desafío para re-evaluar lo que es importante en el plan de estudios y esto está demostrando ser la tarea más difícil para los matemáticos profesionales con una rica experiencia en tecnología del pre-ordenador.

En otro estudio, Tall (1990) menciona que tradicionalmente el Cálculo es el estudio de los algoritmos simbólicos para la diferenciación e integración, la relación entre ellos, y su uso para la resolución de problemas. Sólo al final del curso, cuando todo falla, se introducen los métodos numéricos, como el método de Newton-Raphson para resolver ecuaciones, o la regla de Simpson para el cálculo de áreas.

El problema con tal acercamiento es que a menudo los estudiantes están muy bien versados en algoritmos y pueden resolver complicados problemas simbólicos, pero todavía no entienden el significado de lo que están haciendo. Con la llegada del software para el ordenador, el cual puede llevar a cabo estos algoritmos mecánicamente, la pregunta es qué partes del Cálculo deben ser estudiadas en futuros planes de estudios. En su opinión debe usarse la tecnología del ordenador para producir un acercamiento más versátil al tema de las representaciones numéricas y gráficas.

Expresa que las ideas fundamentales, en el Cálculo, son las de cambio, la razón de cambio, y la acumulación debida al cambio. Simbólicamente éstos se representan por el concepto de la función, la derivada y la integral, respectivamente. En los estudios del Cálculo para el futuro, se necesita ampliar las ideas en estos tres aspectos, para que en la enseñanza del

Cálculo no sólo se aplique la abstracción propia del Cálculo tradicional, sino también los planteamientos aplicados al mundo real.

Tall (1986) retoma lo mencionado en el artículo anterior y expone una serie de estrategias que se pueden utilizar para explicar gráfica y numéricamente, el Cálculo aproximado del área de una región bajo una curva, utilizando el Graphic Calculus II (software creado por él). El software aproxima el área utilizando los extremos izquierdos o derechos de los rectángulos o los puntos medios de la base de cada uno de ellos, sin embargo señala que el programa no estima sumas inferiores y superiores. Si la función es creciente o decreciente no hay problema, pero, si en un intervalo hay un máximo o mínimo, se requeriría una técnica sofisticada para encontrarlos. La teoría de "sumas superiores e inferiores" es construida a partir de un teorema de existencia y por tanto habrá que considerar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función para poder utilizar el software.

Tall (1985) menciona que la llegada del ordenador a las aulas ofrece una buena oportunidad para la enseñanza del Cálculo, el cual permite demostraciones gráficas. En su artículo expone algunas dificultades observadas en los estudiantes al estudiar límites, derivadas e integrales. En este último indica, citando a Orton (1980), que éste notó que los estudiantes tenían dificultades con el concepto de la integral cuando $f(x)$es negativa o b es menor que a. Interpretado geométricamente que se puede dar una demostración cognoscitiva profunda de las ideas.

Muestra dos gráficos hechos con un PCS, utilizando rectángulos punto medio, explicando la construcción de estos rectángulos, tanto si están sobre el eje OX como debajo de él; menciona que al aumentar el número de rectángulos se puede ilustrar como se aproxima el área de la región. Puntualiza que una aproximación geométrica usando un ordenador no puede considerarse como de bajo nivel matemático; al contrario se puede probar que tiene beneficios directos para la comprensión de las Matemáticas.

Es válido señalar que durante el análisis documental sobre el tema de investigación, se comprobó que es un tema poco o casi nada estudiado en el ámbito nacional. No se encontró ningún trabajo de investigación a nivel de postgrado relacionado con la temática a investigar. Sin embargo, es meritorio mencionar los esfuerzos realizados por algunos docentes de Matemática los cuales han elaborado guías metodológicas de contenidos de asignaturas, solucionarios de ejercicios, material de apoyo para el desarrollo de algunas asignaturas.

QUINTA PARTE:

CUESTIONES DE INVESTIGACIÓN

V.- CUESTIONES DE INVESTIGACIÓN

En la presente investigación se tomó como objeto de estudio el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Integral Definida como área bajo la curva, en las carreras de ingeniería de la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí, donde se enmarca su campo de acción el cual se deriva de la línea de investigación de la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua (UNAN – MANAGUA; FAREM – Estelí) "Calidad educativa".

Para el estudio se partió de un sistema de preguntas científicas que constituyeron la guía para la realización del trabajo:

1. ¿Cómo se realiza el proceso de enseñanza aprendizaje de la Integral Definida en las carreras de Ingeniería de nuestra Facultad?

2. ¿Cuál es la opinión de los docentes sobre el uso de software matemático en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Integral Definida?

3. ¿Cuáles son las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y el uso de la computadora?

4. ¿Qué dificultades metodológicas presentan los libros de textos recomendados en la asignatura de Cálculo para el tratamiento de la Integral Definida?

5. ¿Cuál es la necesidad de disponer de un compendio con un enfoque basado en los sistemas de representación gráfica y numérica para la enseñanza de la Integral Definida utilizando herramientas tecnológicas para el aprendizaje significativo de ésta?

Estas interrogantes científicas conducen a las siguientes tareas científicas:

1. Análisis de los componentes del proceso enseñanza–aprendizaje de la unidad de Integral Definida en los programas de asignaturas en torno a objetivos, contenidos, estrategias metodológicas, medios y formas de evaluación.

2. Valoración de la opinión de los docentes sobre el uso de software matemático en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Integral Definida.

3. Valoración de las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y el uso de la computadora.

4. Descripción de las dificultades metodológicas que presentan los libros de textos recomendados en la asignatura de Cálculo para el tratamiento de la Integral Definida.

5. Diseño de un compendio con un enfoque basado en los sistemas de representación gráfica y numérica para la enseñanza de la Integral Definida utilizando herramientas tecnológicas como elemento básico para su aprendizaje.

SEXTA PARTE:

PROPÓSITOS DE INVESTIGACIÓN

VI.- PROPÓSITOS DE INVESTIGACION

En este apartado nos interesa destacar, de acuerdo con Hernández, Fernández, & Baptista (2014), que los objetivos de investigación son los que han guiado nuestro estudio, al establecer lo qué se pretende con el mismo. Es decir, son el norte que nos permite precisar hasta que nivel de respuesta aspiramos llegar, por lo que los mismos estuvieron presentes durante todo su desarrollo.

Partiendo de que los objetivos de investigación expresan el grado de compromiso que adquiere el investigador en cuanto al alcance de su estudio y, además definen el grado de respuesta que aspiramos llegar, nos planteamos los siguientes objetivos:

PROPÓSITOS GENERALES

1. Determinar el proceso de enseñanza–aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva en las asignaturas de Cálculo en las carreras de Ingeniería de nuestra Facultad.

2. Disponer un compendio metodológico para el proceso de enseñanza – aprendizaje de la Integral Definida como el área bajo una curva utilizando un entorno computacional para las carreras de Ingeniería de la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí.

PROPÓSITOS ESPECIFICOS

1. Describir cómo se realiza el proceso enseñanza – aprendizaje en el desarrollo de la unidad Integral Definida de las asignaturas de Cálculo en las carreras de Ingeniería de la FAREM–Estelí.

2. Valorar la opinión de los docentes sobre el uso de software matemático en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la Integral Definida.

3. Valorar las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y el uso de la computadora.

4. Describir las dificultades metodológicas que presentan los libros de texto recomendados en la asignatura de Cálculo para el tratamiento de la Integral Definida.

5. Fundamentar el enfoque basado en los sistemas de representación gráfica y numérica para el aprendizaje significativo de la Integral Definida utilizando como elemento básico herramientas tecnológicas.

Es importante señalar que la descripción de cómo se realiza el proceso de enseñanza – aprendizaje es referido al análisis del programa de asignatura en la unidad de Integral Definida en relación a objetivos, contenidos, estrategias metodológicas propuestas, medios y forma de evaluación. Así cómo las acciones que los docentes realizan cuando planifican, organizan, dirigen y evalúan el proceso de aprendizaje en dicha asignatura.

SÉPTIMA PARTE:

PERSPECTIVA TEÓRICA

VII.- PERSPECTIVA TEÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN

La presente fundamentación incluye los conceptos de términos básicos para identificar claramente los mismos, muestra los aspectos teóricos tanto en el ámbito afectivo como cognitivo-curricular, basados en trabajo de investigación relacionados con el ámbito afectivo en cuanto a las emociones, actitudes y creencias y se establece lo que entenderemos por actitudes, así como en el ámbito cognitivo, se exponen las propuestas teóricas de Duval (1995) sobre los sistemas de representación semiótica y la visualización. También se describen las componentes teóricas relacionadas con el uso de las TIC.

7.1 Conceptos de términos básicos

Aprender o aprendizaje

Según Van de Velde (2014, p. 25), "*Hablar de aprendizaje es hablar de cambio de actitud*". Tal afirmación la sustenta expresando que la actitud es un proceso inconcluso, en construcción, de carácter dinámico. El aprendizaje es la modificación del comportamiento como resultado de una experiencia.

Es evidente entonces que, aprender resulta un proceso complejo, continuo, inconcluso, necesario y dinámico. Inciden una serie de factores internos y externos y es producto de la interacción entre las personas y de éstas con su entorno. Es decir, es un constructo social, histórico, político, cultura dialógico. Se caracteriza por ser creativo, práctico y vivencial.

Basado en lo anterior, podemos afirmar que el aprender es algo propio, consciente, impulsado por el interés mismo que conlleva a la satisfacción personal.

De lo anterior expuesto podemos afirmar que, el aprendizaje se define como el cambio de la conducta de una persona a partir de una experiencia. Podemos definirlo también, como la consecuencia de aprender a aprender. Por tanto, es innegable que el aprendizaje es el centro de la acción educativa.

Ausubel (1983), referido por Palomino (2006), plantea que el aprendizaje del alumno depende del conjunto de conceptos, ideas previas que un individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización, relacionadas con la nueva información.

Este mismo autor plantea que, el proceso de orientación del aprendizaje no solo es saber la cantidad de información que posee el estudiante sino cuales son los conceptos y proposiciones estables y definidos. Se debe partir de que, los educandos tienen una serie de experiencias y conocimientos que afectan su aprendizaje y pueden ser aprovechados para su beneficio. Esto quiere decir que en el proceso educativo, es importante considerar lo que el individuo ya sabe de tal manera que establezca una relación con aquello que debe aprender.

Aprendizaje significativo

De acuerdo con Díaz Barriga & Hernández Rojas (2004, p. 39), el aprendizaje significativo

> Es el que conduce a la creación de estructuras de aprendizaje de conocimiento mediante la relación sustantiva entre la nueva información y los conocimientos previos del estudiante.

Para obtener este aprendizaje significativo es necesario reestructurar tanto a los/as participantes como los contenidos. Ausubel referido por Pozo (2006), cree al igual que Vygotsky, que para que esa reestructuración se produzca se precisa de una instrucción formalmente establecida, que presente de modo explícito la información, así el aprendizaje debe analizarse desde dos dimensiones que constituyen los ejes vertical y horizontal, tal y como se muestran en la siguiente figura:

Figura 1. Ejes del aprendizaje

Fuente: (Pozo, 2006)

Según Ausubel si nos situamos en el eje vertical adquirimos un aprendizaje memorístico y no significativo, ya que este se da cuando se incorpora la nueva información a las estructuras de conocimientos que los participantes ya poseen, es decir, cuánto material adquiere significado para el sujeto a partir de su relación con los conocimientos anteriores (Pozo, 2006).

En otras palabras, los participantes relacionan los conocimientos previos que han obtenido a través de la experiencia o de su formación educativa y los conjugan como un todo que convierte, en algunas veces, en conceptos estratégicos y adaptados a su realidad.

En efecto, en el proceso educativo, es importante considerar lo que el individuo ya sabe de tal manera que establezca una relación con aquello que debe aprender. Por tanto este proceso tiene lugar si el educando posee en su estructura cognitiva conceptos, estos son:

ideas, proposiciones, estables y definidas, con los cuales la nueva información puede interactuar.

Según López (2012, p. 59) para la UNAN (Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua):

> El aprendizaje significativo hace énfasis en las estrategias metodológicas de construcción de conocimientos, en el saber hacer, que necesita para lograrse del saber y del saber ser como condiciones sine que non. Las estrategias que sobresalen en este tipo de aprendizaje son aquellas que, además de presentar un producto, demandan un fuerte componente procedimental - actitudinal capaz de provocar la metacognición del aprendiz. Es decir, favorecen el procesamiento profundo de la información, la estructuración lógica y adecuada de ésta y finalmente, crean recuerdos más efectivos sobre lo aprendido.

Actitud hacia el aprendizaje

Considerando que, la actitud es un estado de disposición psicológica, adquirida y organizada a través de la propia experiencia que incita al individuo a reaccionar de una manera característica frente a determinadas personas, objetos o situaciones o sea es la disponibilidad a reaccionar de manera favorable ante un estímulo.

Las actitudes no son susceptibles de observación directa sino que han de ser inferidas de las expresiones verbales; o de la conducta observada. Esta medición indirecta se realiza por medio de unas escalas en las que partiendo de una serie de afirmaciones, proposiciones o juicios, sobre los que los individuos manifiestan su opinión, se deducen o infieren las actitudes (Van de Velde, 2014).

La actitud hacia el aprendizaje puede ser positiva o negativa o indiferente, su esencia dependerá de las circunstancias en que nos encontremos, de nuestra motivación y de la experiencia misma de aprendizaje como tal. En un mundo donde prima la competencia y predomina el conocimiento como componente esencial del aprendizaje, se deja por fuera componentes tales como la afectividad, el contexto, la bioenergética, lo estético entre otras dimensiones.

Si retomamos la definición de aprendizaje como cambio de actitud, tenemos que reconocer al cambio como un proceso dinámico, que no depende de la voluntad, es ineludible. Sin embargo, es necesario crear oportunidades de aprendizaje para buscar conscientemente cambios de actitud con significado, con sentido, frente a la vida, de manera intencionada, planificada, organizada. La apertura al cambio lo hace mucho más fácil y placentero.

Estrategia para la enseñanza

Se puede caracterizar la enseñanza como un proceso activo, el cual requiere no solamente del dominio de la disciplina, en nuestro caso de los conocimientos matemáticos básicos a ser trabajados con los estudiantes y aquellos que fundamentan o explican conceptos más finos y rigurosos necesarios para la comprensión del mundo de las matemáticas, sino del domino adecuado de un conjunto de habilidades y destrezas necesarias para un buen desempeño de nuestra labor como profesores de matemáticas.

En la actualidad, la computadora y sus respectivos programas son un medio muy utilizado para el tratamiento de diferentes temas matemáticos. Esos medios ayudan a los docentes para un buen desempeño en el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza.

Una estrategia para la enseñanza se puede definir como un conjunto de acciones que se dan en cada aula, en donde el docente es el responsable de crearlas, suscitarlas, avivarlas y dirigirlas mediante la planificación y dirección de acciones consientes e intencionadas por una determinada metodología didáctica que facilite el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje, es decir el camino para conseguir los objetivos educativos.

Estrategias de aprendizaje

Al revisar las aportaciones más relevantes sobre el tema de las estrategias de aprendizaje nos encontramos con una amplia gama de definiciones que reflejan la diversidad existente a la hora de delimitar este concepto.

De acuerdo con González Cabanach, Fernández Suárez, Cuevas González, & Valle (1998), los rasgos esenciales que aparecen incluidos en la mayor parte de las definiciones sobre estrategias son los siguientes (Justicia y Cano, 1993): las estrategias son acciones que parten de la iniciativa del alumno (Palmer y Goetz, 1988), están constituídas por una secuencia de actividades, se encuentran controladas por el sujeto que aprende, y son, generalmente, deliberadas y planificadas por el propio estudiante (Garner, 1988).

Atendiendo a lo anteriormente expresado, podemos decir que, una estrategia de aprendizaje es un plan de acción, consciente e intencional, diseñada para lograr un objetivo de aprendizaje. Dicha estrategia exige tomar decisiones en la planeación, ejecución y evaluación del plan, lo que a su vez implica una continua revisión y auto-evaluación del proceso de aprendizaje.

De acuerdo a Monereo (2007, p.27),

> La estrategia de aprendizaje se define como procesos de toma de decisiones (conscientes e intencionales) en los cuales el estudiante elige y recupera de manera coordinada, los conocimientos que necesita para cumplir con una determinada demanda u objetivo, dependiendo de las características de la situación educativa en que se produce la acción.

Con respecto a lo enunciado por el autor, se considera que estrategias de aprendizaje son pasos que el mismo estudiante toma para ordenar e interiorizar sus conocimientos, para cumplir con sus metas en una acción determinada. Las estrategias utilizadas por cada uno suelen conllevar a crear diferentes vías innovadoras que le permitan el avance en el proceso.

Componentes del proceso enseñanza – aprendizaje

Los componentes del proceso enseñanza aprendizaje se clasifican en:

- ✓ Personales
    - Profesor

- Estudiante

✓ No personales

- Objetivos.
- Contenidos
- Métodos
- Medios de enseñanza
- Formas organizativas docentes
- Evaluación.

Objetivos

De acuerdo con Alvarez (1990), los objetivos **c**onstituyen la categoría más importante del proceso docente educativo, es decir, la categoría rectora de toda la actividad docente. Esta se realiza con el fin de lograr un egresado formado integralmente, que satisface determinado niveles requeridos por la sociedad, lo que constituye el encargo social que se le plantea a la universidad.

Asimismo, este autor refiere a que, un objetivo es la planificación de un fin socialmente determinado, una meta o un propósito, cuya función es lograr transformaciones graduales en el sistema de conocimientos, habilidades y hábitos que poseen los estudiantes, así como en sus actitudes, convicciones, sentimientos, ideales y valores.

Además, manifiesta que los objetivos, de acuerdo con el grado de trascendencia que se espera alcanzar en los estudiantes, se clasifican en educativos, instructivos y desarrolladores.

También se clasifican los objetivos de acuerdo con su nivel de generalidad en:

a) Objetivos generales; que son los objetivos de la sociedad, la educación, la educación superior, las disciplinas y las asignaturas.

b) Objetivos parciales o particulares, que abarcan los temas de cada asignatura.

c) Objetivos específicos, que son los señalados a lograr en cada actividad docente. Precisamente, la derivación gradual de los objetivos implica ir desde los objetivos generales hasta los específicos.

Los contenidos de la enseñanza

Según Rosell & García (2003), los contenidos de la enseñanza constituyen el componente del proceso docente-educativo que representa las bases o fundamentos de cualquier campo de la cultura, están determinados por los objetivos y se concretan en el programa analítico de cada asignatura. El contenido está estructurado en tres sistemas: sistema de conocimientos, sistema de habilidades, y sistema de hábitos, valores y actitudes.

Los métodos de enseñanza

Ruiz (1994), señala que los métodos de enseñanza son el camino o vía que se debe escoger para lograr el objetivo del modo más eficiente, es decir, es el orden, la secuencia de las actividades que ejecuta el estudiante para aprender y el profesor para enseñar, así como la organización del proceso de comunicación. Además, los métodos de enseñanza no constituyen un elemento aislado del proceso pedagógico, su determinación depende de los objetivos propuestos y de las características del contenido de la enseñanza con los cuales interactúan constantemente.

Es necesario tener en cuenta que para elevar la calidad de la educación superior no basta con la aplicación de nuevos planes y programas que posean un alto nivel científico, si se mantiene métodos que no están en correspondencia con las nuevas exigencias planteadas.

Los medios de enseñanza

Ruiz (1994), indica que, los medios de enseñanza constituyen aquellos elementos del proceso docente que le sirven de soporte material a los métodos de enseñanza y que junto con ellos posibilitan el logro de los objetivos planteados. Los medios de enseñanza tienen una relación de coordinación con los métodos y, al igual que éstos, están determinados por el objetivo y el contenido, por lo que se subordinan a ellos.

Las formas de enseñanza

Este mismo autor señala que, las formas de enseñanza son los espacios curriculares en los que se encuentran profesores y estudiantes para desarrollar el proceso docente educativo en un determinado escenario docente.

La evaluación

Rosell & García (2003), nos dice que la evaluación es el mecanismo regulador del proceso docente y puede considerarse como el instrumento de control de la calidad del producto resultante de dicho proceso. Está determinada por los objetivos, pero su efectividad va a depender en gran medida del número, la frecuencia y la calidad de los controles que se apliquen, así como de la correcta y uniforme calificación que se realice de los resultados.

Funciones de la evaluación. Función de retroalimentación: Función instructiva: Función de comprobación y control Función educativa.

7.2 La enseñanza y el aprendizaje con las nuevas tecnologías de la comunicación

Partimos de que, la enseñanza y el aprendizaje son los contenidos esenciales de la Didáctica y, además, son referencia obligada a la hora de fundamentar la virtual naturaleza educativa de los medios y las tecnologías de la comunicación, ya que estos medios son actores condicionantes de manera especial en los procesos didácticos. Es así que, las tecnologías de la comunicación provocan necesariamente resultados cuando se integran en el proceso de enseñanza aprendizaje.

En consecuencia, el uso de los medios tecnológicos demanda una nueva configuración del proceso didáctico y de la metodología, ya que los contenidos a desarrollar no tienen que estar exclusivamente en manos del docente sino que los estudiantes dejan de ser meros receptores de información, se convierten ahora en constructores de su propio aprendizaje.

De acuerdo con Aguaded (1989), los nuevos medios audiovisuales e informáticos permiten la simultaneidad de acceso al saber. Ahora bien, no podemos obviar que, el papel del docente sigue siendo esencial en la planificación de esas adquisiciones, en la orientación y motivación para su búsqueda y en las dinámicas de afianzamiento y evaluación de los mismos.

Estos nuevos accesos al conocimiento implican también originales propuestas metodológicas para el aprendizaje, lo que presupone un nuevo rol del docente que ha de responsabilizarse del diseño de situaciones instruccionales para el estudiante y se convierte en tutor del proceso didáctico. En suma, se produce un cambio en el modelo didáctico-comunicativo que pasa de ser básicamente unidireccional (el saber se encuentra en los libros o en el docente) a ser multidireccional, más abierto y flexible con diferentes puntos de información, posibilitando la ruptura de la clase como único espacio para el aprendizaje. (Perera-Cumerma & Veciana-Pita, 2013).

Con la aparición de las tecnologías de la comunicación se hace necesario una profunda revisión del modelo tradicional de enseñanza, pues en la actualidad es posible incorporar nuevas formas de presentación de la información donde la imagen aporta componentes icónicos muy intuitivos y motivadores

Resumiendo, la presencia de las tecnologías de la comunicación en la sociedad y también en la escuela es uno de los factores fundamentales que define la necesidad de modificar los esquemas tradicionales de la enseñanza, pues estos nuevos medios ofrecen múltiples posibilidades de acceso a la información con canales más versátiles, potentes, económicos y rápidos que los tradicionales. De manera que los mismos estudiantes pueden obtener la información sin necesidad de la presencia de los propios docentes. La educación por tanto, dejará de ser tan informativa, para pasar a ser más orientadora y guía de los aprendizajes de los estudiantes.

7.3 Fundamentos Teóricos de la integral

A continuación presentaremos, en forma general, algunas nociones necesarias para entender el concepto de integral. Para ello, hemos tomando como fuente principal el texto de Apostol (2001), así como a Zill (2011), pues además de ser libros con rigurosidad teórica, presentan la integral antes que la derivada, tal como se aborda el concepto de integral definida en el compendio metodológico propuesto, basados en el orden histórico del desarrollo del Cálculo. Además se introducen las temáticas prescindiendo de un formalismo exagerado y se hace amplio uso del razonamiento geométrico.

Partiremos del concepto de función, por ser éste uno de los principales conceptos que definen la integral.

En Apostol (2001, p. 62)

> *Una función f es un conjunto de pares ordenados (x, y) ninguno de los cuales tiene el mismo primer elemento.*

Este concepto permite introducir el concepto de área, dado que el área es vista como una función que asocia un número a una colección $\mathcal{M}$ de conjuntos del plano medibles, es decir que puede asignárseles área. La definición de área es entonces: En Apostol (2001, pp. 72-73)

Supongamos que existe una clase $\mathcal{M}$ de conjuntos del plano medibles y una función de conjunto a, cuyo dominio es $\mathcal{M}$, con las propiedades siguientes:

1. **Propiedad de no negatividad**. Para cada conjunto **S** de $\mathcal{M}$ se tiene $\mathbf{a}(\mathbf{S}) \geq \mathbf{0}$.

2. **Propiedad aditiva**. Si **S** y **T** pertenecen a $\mathcal{M}$, también pertenecen a $\mathcal{M}$, $\mathbf{S} \cup \mathbf{T}$ y $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$, y se tiene $\mathbf{a}(\mathbf{S} \cup \mathbf{T}) = \mathbf{a}(\mathbf{S}) + \mathbf{a}(\mathbf{T}) - \mathbf{a}(\mathbf{S} \cap \mathbf{T})$

3. **Propiedad de la diferencia**. Si **S** y **T** pertenecen a $\mathcal{M}$siendo $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{T}$, entonces $\mathbf{T} - \mathbf{S}$ está en $\mathcal{M}$, y se tiene $\mathbf{a}(\mathbf{T} - \mathbf{S}) = \mathbf{a}(\mathbf{T}) - \mathbf{a}(\mathbf{S})$

4. **Invariancia por congruencia**. Si un conjunto **S** pertenece a $\mathcal{M}$ y **T** es congruente a **S**, también **T** pertenece a $\mathcal{M}$ y tenemos $\mathbf{a}(\mathbf{S}) = \mathbf{a}(\mathbf{T})$.

5. **Elección de escala**. Todo rectángulo **R** pertence a $\mathcal{M}$. Si los lados de **R** tienen longitudes **h** y **k**, entoces $\mathbf{a}(\mathbf{R}) = \mathbf{hk}$.

6. **Propiedad de exhaución**. Sea Q un conjunto que puede encerrarse entre dos regiones S y T, de modo que $S \subseteq Q \subseteq T$ (1.1)
Si existe uno y sólo un número c que satisface las desigualdades

$$a(S) \leq c \leq a(T)$$

Para todas las regiones escalonadas que satisfagan (1.1), entonces Q es medible y $\mathbf{a}(\mathbf{Q}) = \mathbf{c}$.

De la definición anterior vemos que se considera el área de una región como la suma de las áreas de sus particiones.

Las funciones escalonadas, (funciones que permiten aproximar una curva), se definen de la siguiente manera: En Apostol (2001, pp. 80-81)

Una función s cuyo dominio es el intervalo cerrado $[a, b]$, se dice que es una función escalonada, si existe una partición $\mathbf{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, de $[a, b]$, tal que s es constante en cada subintervalo abierto de **P**. Es decir, para todo $k = 1,2, \dots, n$ existe un número real s_k tal que:

$$s(x) = s_k \quad \text{si } x_{k-1} < x < x_k$$

Además, la partición de una región delimitada por curvas en rectángulos inscritos y circunscritos se apoya en la siguiente definición para la integral de una función escalonada.

La integral de s en el intervalo $[a, b]$, se define mediante la siguiente fórmula

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Es decir, para obtener el valor de la integral, se multiplica cada valor s_k constante, por la longitud de intervalo k-ésimo correspondiente, formando el producto $s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$ y se suman luego todos los productos obtenidos

Lo anterior, nos permite determina la integral de funciones acotadas más generales a partir de funciones escalonadas. Así:

Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$. Sean s y t dos funciones escalonadas arbitrarias definidas en $[a, b]$, tales que

$$s(x) < f(x) < t(x) \quad (1.2)$$

Para cada x en $[a, b]$. Si existe un número I, y sólo uno, talque

$$\int_a^b s(x)dx \leq I \leq \int_a^b t(x)dx \quad (1.3)$$

para cada par de funciones escalonadas s y t que verifican (1.2), entonces este número I se denomina la integral de f desde a hasta b y se indica por el símbolo $\int_a^b f(x)dx$. Cuando I existe se dice que f es integrable en $[a, b]$

Basados en la determinación de la integral de funciones acotadas se determinan las integrales superiores e inferiores: En Apostol (2001, pp. 91-92)

Toda función f acotada en $[a, b]$ tiene una integral inferior $\underline{I}(f)$ y una integral superior $\bar{I}(f)$ que satisfacen las desigualdades

$$\int_a^b s(x)dx \leq \underline{I}(f) \leq \bar{I}(f) \leq \int_a^b t(x)dx$$

Para todas las funciones s y t tales que $s \leq f \leq t$. La función f es integrable en $[a, b]$si y sólo si sus integrales superior e inferior son iguales, en cuyo caso se tiene

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{I}(f) = \bar{I}(f)$$

Podemos decir que, lo anterior, fundamenta con rigurosidad las construcciones geométricas en torno al área de una superficie delimitada por curvas en el plano. En Apostol (2001, p. 92)

> Sea f una función no negativa, integrable, en un intervalo $[a, b]$, y sea Q el conjunto de ordenadas de f sobre $[a, b]$. Entonces Q es medible y su área es igual a la integral $\int_a^b f(x)dx$

A partir de la definición de integral, es posible deducir las **propiedades fundamentales** siguientes: En Apostol (2001, pp. 99-100)

1. **Linealidad respecto al integrando**. Si f y g son ambas integrables en $[a, b]$ también lo es $c_1 f + c_2 g$ para cada par de constantes c_1 y c_2. Además, se tiene:
$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]dx = c_1 \int_a^b f(x)\, dx + c_2 \int_a^b g(x)\, dx$$

2. **Aditividad respecto al intervalo de integración**. Si existen dos de las tres integrales siguientes, también existe la tercera y se tiene:
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx$$

3. **Invariancia frente a una traslación**. Si f es integrable en $[a, b]$, para cada número real c se tiene:
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx$$

4. **Dilatación o contracción del intervalo de integración**. Si f es integrable en $[a, b]$ para cada número real $k \neq 0$, se tiene:
$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx$$

Nota: En las dos propiedades 3 y 4 la existencia de una de las integrales implica la existencia de la otra. Cuando $k = -1$, la propiedad 4 se llama **propiedad de reflexión**.

5. **Teorema de comparación**. Si f y g son ambas integrables en $[a, b]$ y si $g(x) \leq f(x)$ para cada x $[a, b]$, se tiene:

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

Un caso particular importante del teorema anterior se tiene cuando $g(x) = 0$ para cada x. En este caso el teorema dice que si $f(x) \geq 0$ en todo el intervalo $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. Dicho de otra manera, una función no negativa tiene integral no negativa.

Teorema fundamental del Cálculo

Según Apostol (2001, pp. 192-195), Barrow en su libro *Lectiones Geometricae* publicó varios teoremas semejantes al teorema fundamental del Cálculo, como es el siguiente:

> Si se traza una curva de modo que la razón de su ordenada a su subtangente es proporcional a la ordenada de una segunda curva, entonces el área bajo la segunda curva es proporcional a la ordenada de la primera.

La subtangente hace referencia al segmento de recta entre el punto A donde la recta tangente al punto P de coordenadas (x,y) de la curva dada corta al eje x y el punto (x,0). (Ver Figura 2)

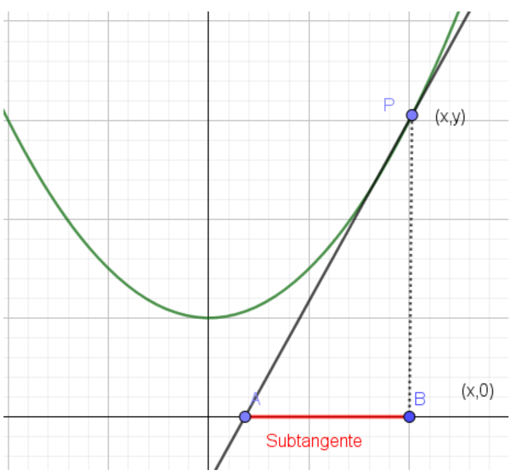


Figura 2

El razonamiento de Barrow sobre el teorema fundamental del Cálculo, podemos interpretarlo de la siguiente manera:

Sea ZGE puntos de la curva $y = f(x)$, se construye una nueva curva $g(x)$, la cual contiene los puntos AIF, tal que el rango de estas funciones es siempre igual al área límitada por $f(x)$, el eje x, un punto fijo y el punto variable x (Ver Figura 2). Lo que Barrow demostró es que la recta TF se encuentra fuera de la curva g(x) y por tanto es la tangente de la curva en el punto F, siempre que $DT = \frac{DF}{DE}$ (1.4)

A continuación presentaremos una demostración adaptada al razonamiento de Barrow sobre el teorema fundamental del Cálculo, la cual se encuentra en Kindt (2005). En esta demostración es notable que su enfoque no mostró ningún indicio del enfoque infinitesimal.

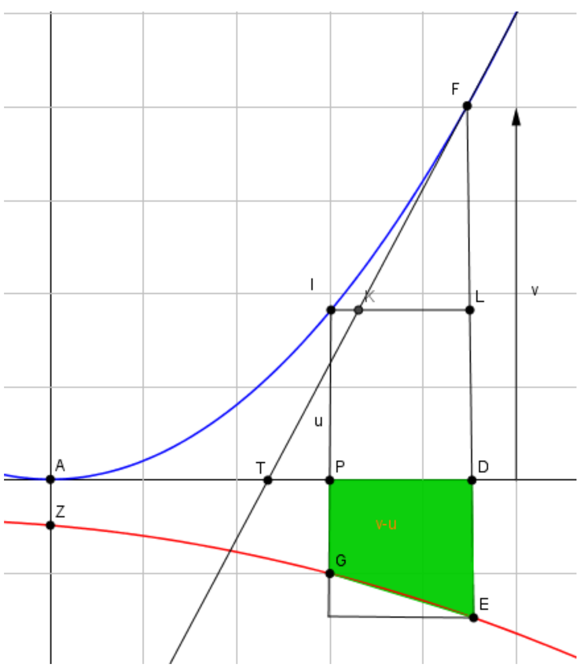


Figura 3

Demostración: Sea un punto K de la recta TF, y el segmentos KL el cual es paralelo a $\overline{AD}$, entonces los triángulos FDT y FLK son semejantes, por tanto se cumple que

$\frac{FL}{LK} = \frac{FD}{DT} = DE$ (1.5) por (1.4).

Despejando FL en (1.5) se obtiene

$FL = LK \cdot DE$ (1.6)

Por otra parte sean u y v igual al área de APGZ y ADEZ respectivamente, así:

$FL = v - u$

$= \text{area } PDEG$ (1.7)

$< PD \cdot DE$

Por lo tanto de (1.6) y (1.7)

$LK < PD = IL$ $\qquad$ $LK < IL$ (1.8)

De esta manera se muestra que cada punto K de la recta TF está por debajo de la curva g(x), excepto el punto F. Lo cual significa que TF es la tangente de la curva g(x) en el punto F.

Con la notación de Leibniz el teorema de Barrow indica que, el área A bajo la curva de $f(x)$ es $A = \int f(x)dx$, la cual es equivalente a la ecuación $dA = f(x)dx$.

Zill (2011, pp . 305-307), nos presenta los siguientes teoremas:

Teorema fundamental del Cálculo: primera forma

Si f una función continua sobre el intervalo$[a,b]$ y F es una antiderivada de f sobre el intervalo, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En este teorema se ve que el concepto de antiderivada de una función continua constituye el puente entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Teorema fundamental del Cálculo: segunda forma

Suponga que f es continua sobre un intervalo un intervalo$[a,b]$, por lo que se sabe que la integral $\int_a^b f(t)dt$ existe. Para toda x en el intervalo $[a,b]$, la integral definida

$$g(x) = \int_a^b f(t)dt$$

representa un solo número

De lo anterior vemos que la f es una función positiva con dominio $[a,b]$, y así cuando x varía a través del intervalo es posible interpretar g(x) como un área bajo la gráfica sobre el intervalo $[a,x]$.

Teorema fundamental del Cálculo: forma de derivada

Sea f continua sobre $[a,b]$ y sea x cualquier número en el intervalo. Entonces $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre (a,b) y

$$g'(x) = f(x)$$

Otra forma de presentar el resultado es $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

Como podemos ver este teorema garantiza construir una primitiva (antiderivada) de una función continua por integración. Cuando se combina esto con el hecho de que dos primitivas de la misma función difieren tan solo en una constante, se obtiene el el teorema fundamental del cálculo de la primera forma $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$

La forma de antiderivada del teorema fundamental del cálculo constituye una herramienta muy importante y poderosa para evaluar integrales definidas, pero existen funciones para las cuales su antiderivada $\int_{a}^{b} f(t)dt$ no puede expresarse en términos de funciones elementales: sumas, productos, cocientes y potencias de funciones polinomiales, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Estas son las llamadas integrales no elementales.

7.4 Enseñanza de las Matemáticas con la ayuda de la computadora y los correspondientes programas

Señala Correa (1999), citado por Aguaded (1989, p. 48), que la enseñanza se puede definir como “la acción desarrollada con la intención de llevar a alguien al aprendizaje”. Como bien se señala, la enseñanza trata de un acto consciente e intencional que pretende la consecución de un aprendizaje a través de una serie de acciones.

En virtud de lo anterior, podemos decir que la tecnología, que en la actualidad ha tenido un adelanto exponencial, podría convertirse en un poderoso recurso para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, administrada correctamente.

El problema que surge al integrar tecnologías en la enseñanza de la Matemática, en nuestro caso en el cálculo integral, no está en discusión, pero si lo está el cómo llevarlo a la práctica, y qué habilidades fomenta o no la utilización de las mismas.

En el mismo orden de ideas, la integración de las TIC en el proceso de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, es un gran apoyo para el docente que desea que sus estudiantes adquieran un aprendizaje significativo. Al usar las TIC en el aula de clase, podemos encontrar estudiantes muy motivados, ya que ellos están muy familiarizados con el uso de las herramientas tecnológicas, haciendo del aprendizaje un proceso agradable y muy productivo para ellos.

Es de aclarar, que las TIC usadas para apoyar el proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas, no son por sí solas, agentes de cambio en la enseñanza de las matemáticas, sino que son una herramienta que el docente tiene a su disposición para apoyarse y generar ambientes diferenciados en el aula.

Cuando se utilizan las TIC, los contenidos de Matemática para los estudiantes, son más convincentes. Éstas permiten modelar situaciones problemas, realizar gráficos y elaborar tablas, las cuales facilitan la comprensión de dichos contenidos matemáticos, y al mismo tiempo, promueven una mayor participación y atención en la enseñanza de las matemáticas

Hitt (2003), asegura que el uso de tecnologías favorece y facilita las diferentes representaciones de los objetos matemáticos, que son necesarias para construir un conocimiento matemático. Uno de los conceptos que remarca como importante es el de visualización matemática. Explica el autor que para comprender el enunciado de un problema matemático se ponen en juego diferentes representaciones de la cuestión a tratar en él.

También exterioriza que, es importante tener en cuenta las dificultades que manifiestan los estudiantes para manipular distintas representaciones y a su vez señala que los docentes no tenemos que priorizar alguna de ellas, en detrimento de otras, en el proceso de aprendizaje de un determinado concepto.

De igual manera, hace referencia a otras investigaciones que muestran que los estudiantes se resisten a utilizar diferentes representaciones para poder construir un concepto matemático. Este comportamiento se extiende a todos los niveles educativos. Teniendo en cuenta estas investigaciones el autor señala que es importante desarrollar habilidades de visualización en los estudiantes, por ejemplo, haciendo uso de software. Así, si un concepto dado en el lenguaje algebraico no es comprendido por el estudiante, se puede provocar en él una percepción diferente de dicho concepto realizando su representación gráfica y quizás, aquello que resultó ser una interpretación errónea, se pueda corregir o rearmar.

Siguiendo esta misma línea, Macías (2007) remarca que la Matemática se vale de la semiótica y la visualización para representar los entes matemáticos, y que ésta no es un fin en sí mismo sino un medio para mejorar la comprensión de dichos entes abstractos. Este proceso de visualización puede realizarse con lápiz y papel, pero el uso de tecnología lo torna más ágil y efectivo.

En relación con lo anterior, podemos afirmar que, la tecnología puede ayudar a los estudiantes a aprender Matemática, ya que pueden examinar ejemplos o formas de representar los conceptos, utilizando el poder gráfico de estas herramientas, lo que permite el acceso a modelos visuales poderosos. De esta manera, el aprendizaje se ve favorecido por la retroalimentación brindada por la tecnología, ya que permite modificar gráficos en la pantalla, observar las consecuencias de un valor dependiente de algún parámetro, transformaciones dinámicas, etc.

En ese mismo sentido, podemos mencionar que, los programas en la enseñanza de las matemáticas juegan un papel muy importantes siempre y cuando se le dé una adecuada y eficiente utilización para la comprensión de los conceptos matemáticos. La idea es utilizar estos programas con la finalidad de visualizar con mayor precisión y comodidad las construcciones matemáticas, comprender con mayor facilidad y motivación algunas fases de la construcción de estructuras matemáticas y demostraciones, implementar estrategias heurísticas en la resolución de problemas y fomentar la independencia y creatividad de los estudiantes.

En definitiva, el aspecto central en cuanto al aprendizaje con la ayuda de la computadora radica, definitivamente, en una adecuada interacción entre los programas seleccionados, el papel de los docentes, las acciones de los estudiantes y las actividades concretas de aprendizaje, sin obviar que la presencia activa y formadora de los docentes, es indispensable ya que son ellos en quienes recae con mayor peso la responsabilidad pedagógica y didáctica, pues no puede concebirse una sociedad integralmente "educada" sin su presencia formadora.

Podríamos decir, finalmente, que la computadora se ha convertido en un recurso o medio indispensable para el adecuado desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de todas las asignaturas, particularmente de la Matemática. Ella, sin embargo, no debería sustituir, por ningún motivo, la presencia y el papel fundamental que jugamos los docentes.

Como señalamos anteriormente, en la actualidad el uso de las TIC se ha convertido en una poderosa herramienta en la enseñanza, que mediante un uso correctamente orientado apoya a la visualización matemática, facilitando la comprensión de conceptos. Es así como, en Internet se pueden encontrar una gran variedad de software educativos, y los software matemáticos no son la excepción.

Uno de los softwares, que se puede descargar en forma gratuita es Geogebra y con el cual proponemos trabajar el concepto de Integral definida, como área bajo la curva. Este programa trae incorporado comandos que calculan y grafican el área bajo una curva utilizando rectángulos y trapecios inscritos y circunscritos, lo que permite a los estudiantes observar y conjeturar respecto a dicho concepto.

7.5 Creencias y actitudes hacia las matemáticas y hacia el uso de los ordenadores

En esta sección pretendemos fundamentar un poco más sobre las creencias y actitudes, centrados principalmente en las matemáticas y el uso de los ordenadores.

La actitud

Según Ros(1985, p.220),citado por Sánchez R. & Ursini, (2010), existe una controversia clásica en la definición de actitud. Por un lado, la Escuela del Componente Único (o Unidimensional), dice que una actitud es simplemente la tendencia a evaluar un objeto o constructo en términos positivos o negativos, es decir, esta escuela mantiene que las actitudes son evaluativas y se refieren a un objeto. En cambio, la Escuela de los Componentes Múltiples (o Multidimensional), conceptualiza la estructura de la actitud formada por tres componentes: Cognoscitivo, Afectivo y Conductual.

En nuestro trabajo retomamos esta última conceptualización. Veamos que entendemos por estos tres componentes.

El componente cognoscitivo está formado por las percepciones y creencias hacia un objeto, así como por la información que tenemos sobre ese objeto. Es decir, los objetos que no conocemos o de los cuales no tenemos información no pueden generar actitudes.

El componente afectivo es el sentimiento a favor o en contra de un objeto social. Es el componente más característico de las actitudes.

El componente conductual es la tendencia a reaccionar de una determinada manera hacia un objeto. El componente activo de la actitud.

También se establece que el componente cognitivo se refiere al grado de conocimiento, creencias, opiniones, pensamientos que el individuo tiene hacia un objeto de actitud. El componente afectivo alude a los sentimientos de una persona y su evaluación del objeto de actitud. En tanto la dimensión conductual abarca tanto sus intenciones de conducta como sus acciones respecto a su objeto de actitud.

En relación con las creencias y actitudes hacia las Matemáticas, la mayoría de las investigaciones en Educación Matemática manifiestan los aspectos que inciden en la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina.

Según (Sánchez R. & Ursini, 2010), algunos investigadores afirman que en estos procesos confluyen factores socioculturales (Bishop, 1999), variables contextuales (Carvallo, Caso y

Contreras, 2007) y factores internos (Papanastasiou, 2000) como las actitudes y las habilidades, Schiefele y Csikzentmihalui (1995) señalan que para comprender dichos proceso habría que investigar las características del estudiante, su ambiente familiar y el contexto escolar.

El dominio afectivo ha sido tomado en cuenta, como una parte importante de la cognición dentro de la Educación Matemática. Uno de los pioneros en estas investigaciones es Mandler (1989) quien en sus trabajos trata de clarificar a qué debemos referirnos cuando hablamos del dominio afectivo de nuestros estudiantes.

McLeod (1992), citado por Depool (2005, p. 378).), resume la teoría de Mandler de la siguiente manera:

> Primero, los estudiantes poseen ciertas creencias sobre las Matemáticas y sobre sí mismos que juegan un papel importante en el desarrollo de sus respuestas afectivas a situaciones matemáticas. Segundo, a partir de interrupciones y bloqueos que son una parte inevitable del aprendizaje de las Matemáticas, los estudiantes experimentarán emociones positivas y negativas cuando aprenden Matemáticas, estas emociones se notan más probablemente cuando las tareas a realizar son nuevas. Tercero, los estudiantes desarrollarán actitudes positivas o negativas hacia las Matemáticas cuando encuentran repetidamente situaciones matemáticas iguales o semejantes

Para McLeod (1992) el dominio afectivo en educación matemática aparece dividido en tres categorías principales y varias subcategorías.

- ✓ Creencias
    - Hacia las Matemáticas
    - Hacia uno mismo
    - Hacia la enseñanza de las Matemáticas
    - Hacia el contexto social.

- ✓ Actitudes

- ✓ Emociones

En concordancia con lo expresado anteriormente, las creencias son de naturaleza principalmente cognitiva y se desarrollan durante largos períodos de tiempo. También, las emociones se consideran con un menor valor cognitivo y pueden aparecer y desaparecer bastante rápidamente. Ejemplo de esto es, la frustración que sentimos cuando no podemos resolver un problema que se convierte rápidamente en la alegría de haberlo resuelto al cabo de poco tiempo.

Revisando la literatura, es difícil separar las investigaciones sobre actitudes de las investigaciones sobre creencias, ya que existe una conexión importante entre ellas y las emociones, las que se relacionan entre sí cuando se desarrollan nuevas tareas matemáticas.

Haciendo una síntesis de estos componentes, decimos que, una repetición de las emociones que surgen al experimentar con nuevas tareas, da lugar a actitudes que contribuyen a configurar las creencias sobre las Matemáticas y que a su vez inciden, de una manera o de otra, en lo que se consideran emociones.

Como señala Mayer (1998), su visión sobre el dominio afectivo, planteada desde la psicología del desarrollo, es análoga a la visión constructivista sobre el dominio cognitivo. (Depool, 2005)

Los estudiantes experimentan emociones, que se desarrollan en actitudes, las cuales son usadas para construir sus propias creencias. En el siguiente esquema se sintetiza la idea de Mandler:

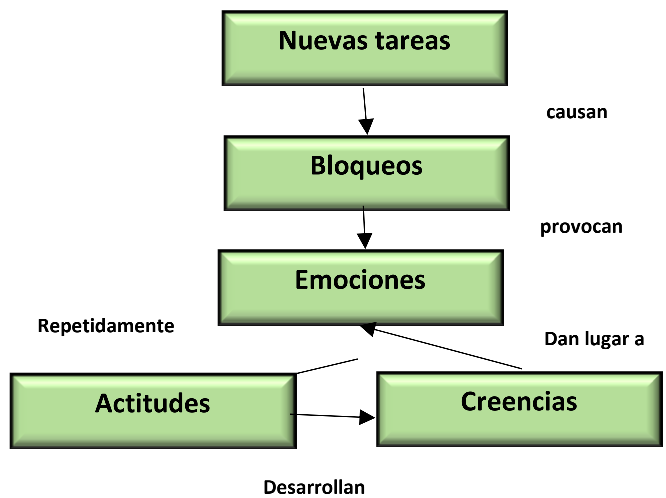


Figura 4. Modelo de Mandler – Hart

Fuente Depool (2005)

Adhiriéndonos a las ideas de Depool (2005), nos basaremos, desde una perspectiva teórica, en el modelo propuesto por Mandler-Hart, considerando como dimensiones del dominio afectivo las creencias, las actitudes y las emociones. De esta manera, la creencia refleja un juicio sobre cierto conjunto de conceptos; la actitud representa una reacción emocional sobre un objeto, sobre una creencia o sobre un comportamiento hacia el objeto; la emoción significa una reacción intensa creada por algún estímulo.

Consideramos las **actitudes** como el resultado de reacciones emocionales que han sido internalizadas y automatizadas para generar sentimientos de intensidad moderada y estabilidad razonable.

Algunos investigadores han considerado relevante los estudios que relacionan las actitudes hacia la tecnología conjuntamente con las actitudes hacia las Matemáticas. Galbraith, Haines e Izard (1998) estudian las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y sus efectos en el rendimiento estudiantil y justifican la importancia del estudio de las actitudes hacia la tecnología, por la relevancia de su uso en las actividades relacionadas con la modelización matemática.(Depool, 2005).

En este mismo sentido, de acuerdo con los resultados de Galbraith y Haines (2002), quienes afirman que las actitudes hacia el ordenador son más influyentes que las de las Matemáticas, en facilitar un compromiso activo con las actividades del ordenador para el aprendizaje de éstas, optamos por incluir en este trabajo, con algunas pequeñas modificaciones, las escalas de actitudes utilizadas por estos investigadores.

En síntesis, las dimensiones, de análisis que determinan nuestros aspectos teóricos son:

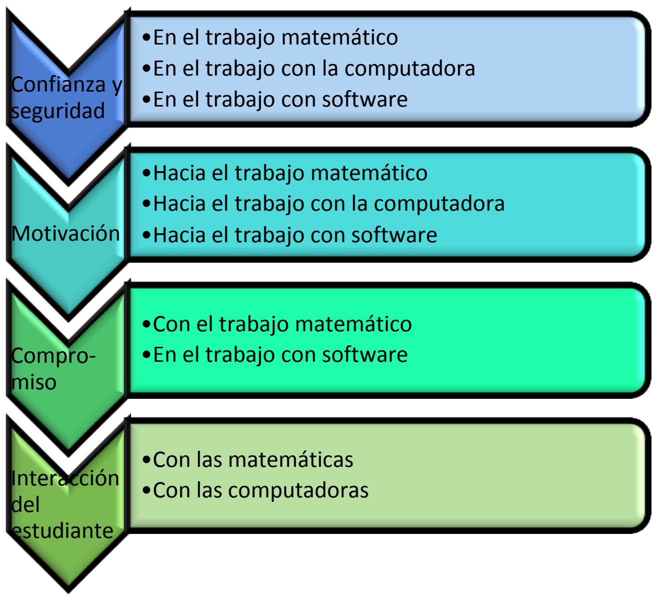


Figura 5. Dimensiones sobre actitudes

Fuente propia

La **confianza en Matemáticas** es una dimensión que el estudiante pone de manifiesto cuando considera que el esfuerzo es un valor, no le preocupa la dificultad intrínseca de las Matemáticas, espera lograr buenos resultados y se siente bien con la Matemática. Entendemos confianza con el ordenador cuando se siente seguro en las operaciones efectuadas con éste, cuando cree que puede manejar los procedimientos que requiere su uso, cuando piensa que si comete errores podrá resolverlos por sí mismo.

Se constata **motivación con el ordenador** cuando el estudiante muestra un alto interés por los ordenadores y encuentra que el aprendizaje con ellos es agradable, cuando reconoce que el ordenador le permite más libertad para la experimentación de nuevas ideas. A lo que añadimos que el estudiante mostrará una motivación efectiva cuando se muestren dos categorías de uso del ordenador:

- El valor para el usuario, que incluye el compromiso y el estímulo que conllevan actitudes tales como curiosidad e interés, la credibilidad que añade elementos de valor y relevancia; y el valor de la utilidad (reconocer el valor de la tarea antes de poner los medios para realizarla).

- La expectativa de éxito en su desenvolvimiento técnico y en su satisfacción y efectividad operan como estructuras orientadoras de la acción. Esta expectativa de éxito está vinculada a las formas de comportamiento en el uso del ordenador.

La dimensión de **compromiso en matemáticas** se refiere al comportamiento del estudiante y a la expresión de gestos que manifiestan una implicación responsable en el aprendizaje. Además, como se ha indicado para el estudio de actitudes hacia el uso de tecnología en el aprendizaje matemático, Galbraith y Haines (1998), mencionado por González - Martín (2005. p 279), definen un constructo que denominan interacción entre ordenador y matemáticas.

Al respecto, afirman que en este contexto "los estudiantes muestran interacción alta entre ordenador y matemáticas cuando piensan que los ordenadores mejoran su aprendizaje, proporcionándoles más ejemplos, ayudándoles en procesos de demostración, les ayudan en el establecimiento de conexiones entre pensamiento algebraico y geométrico".

7.6 Los sistemas de representación. La visualización matemática

En la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas, se utilizan frecuentemente diversas representaciones para las ideas matemáticas. Es importante señalar que no se debe confundir al objeto matemático con su representación, ya que esto provoca de forma inmediata, a mediano o largo plazo una pérdida de comprensión lo que conlleva a que los conocimientos adquiridos llegan a ser pronto inutilizables fuera de su contexto de aprendizaje. Por lo anterior, de acuerdo con Duval (1998), la distinción entre un objeto y su representación es indispensable para la comprensión de las Matemáticas.

El aspecto cognitivo referido a la adquisición de los conceptos matemáticos está relacionado con las representaciones semióticas definidas por Duval (1993, p. 25), como "*producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación*". Este sistema de signos tiene sus propias restricciones de significados y de funcionamiento. Se puede considerar que las figuras de tipo geométrico, un enunciado en lengua habitual o una fórmula matemática, pertenecen a sistemas semióticos diferentes.

Este autor define registro de representación semiótica como aquel registro que "constituye el margen de libertad con que cuenta un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o, simplemente, para comunicarlas a un interlocutor" (Duval, 2004, p.30)

A continuación presentamos algunos elementos de la Teoría de las Representaciones Semióticas de Duval, los cuales se considera permitirán formular coherentemente nuestra propuesta.

Duval (2004) afirma que para lograr la conceptualización, o lo que podríamos considerar "aprendizaje" el estudiante debe recurrir a varios registros de representación semiótica, sean gráficos, símbolos, íconos, tablas, expresiones en lenguaje natural, entre otros. Es decir, considera que la utilización de varios sistemas de representación es esencial para el ejercicio y el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales.

En el mismo sentido, señala que, para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir tres actividades cognitivas fundamentales:

1. La formación de una representación identificable dentro de un registro dado. Este se refiere a la selección del conjunto de caracteres del concepto que forman parte de un registro. Por ejemplo, el enunciado de una frase, la elaboración de un dibujo o esquema, de una gráfica, la escritura de una expresión algebraica, entre otros. Esta formación debe respetar las reglas propias del registro semiótico en el cual se produce la representación, la función de estas reglas es asegurar las condiciones de identificación y de reconocimiento de la representación, así como también la posibilidad de su utilización para los tratamientos.

2. El tratamiento de una representación, que es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna equivalente en un registro. Es decir, se refiere a toda la manipulación que puede hacerse de la información del concepto manteniendo un registro determinado Por ejemplo, la transformación equivalente de una expresión algebraica.

3. La conversión de una representación, que es la transformación de esta representación en una representación dentro de otro registro, conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial. Por ejemplo, la transformación de una expresión algebraica en una gráfica, o viceversa.

Cabe indicar que para el autor, este última actividad es fundamental para que exista verdadera conceptualización, es decir, verdadero aprendizaje del concepto.

En relación al tratamiento de una representación, distingue dos niveles: Denomina "tratamiento cuasi instantáneo" a aquel que corresponde a la "familiaridad o a la experiencia que resulta de una larga práctica o de una competencia adquirida en un dominio" (Duval, 2004, p. 40), lo que se suele llamar un tratamiento mecánico. Por otro lado, "tratamiento intencional" es aquel que "para ser efectuado toma al menos el tiempo del control consciente" (Duval, 2004, p. 41). A mayor posibilidad de tratamientos cuasi instantáneos que posea un estudiante, mayor posibilidad de tratamientos intencionales.

Duval (1998, p. 189), afirma también, que estos procesos deben ser enseñados para que el alumno pueda aprenderlos, y dice: "*un aprendizaje que considere la relación estrecha que existe entre la noesis y la semiosis debe colocar a los alumnos en condiciones que permitan esta toma de consciencia más global, y para ello, se les deben presentar tareas específicas*"

Duval llama semiosis a la aprehensión de las representaciones semióticas y noesis a la aprehensión conceptual de un objeto. Afirma que no hay noesis sin semiosis, lo cual significa que no hay acceso al objeto matemático sino a través de sus representaciones semióticas.

Este hecho es la causa de la paradoja cognitiva del pensamiento matemático y las dificultades que de ella resultan para aprender este tipo de pensamiento, debido a que se quiere enseñar las matemáticas como si la semiosis fuera una operación despreciable con respecto a la noesis.

En lo que se refiere a la paradoja cognitiva del pensamiento matemático, según Duval (1998), ésta se explica basados en la imposibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos, fuera de toda representación semiótica. ¿Cómo los estudiantes que están en el proceso de aprendizaje no van a confundir los objetos matemáticos con sus representaciones semióticas, si sólo se enfrentan a estas últimas? Y a la inversa ¿cómo pueden adquirir la habilidad en los procesos matemáticos necesariamente ligados a las representaciones semióticas, si no tienen ya una aprehensión conceptual de los objetos representados?

Sin embargo, en la enseñanza no se le presta atención a esta paradoja, probablemente debido a que se le da más importancia a las representaciones mentales que a las representaciones semióticas.

Según Duval, las representaciones mentales abarcan al conjunto de imágenes y, en forma más general, a las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre lo que les está asociado. Por lo general, se considera a las representaciones semióticas como un medio de exteriorización de las representaciones mentales, para volverlas visibles o accesibles a otros.

Este punto de vista es engañoso, ya que las representaciones semióticas son necesarias no solamente para fines de comunicación, sino que también son indispensables para la actividad cognitiva del pensamiento.

En efecto, las representaciones semióticas son indispensables para:

- El desarrollo de las representaciones mentales, ya que éste depende de una interiorización de las representaciones semióticas. Por lo cual no se puede proceder como si las representaciones semióticas están subordinadas a las representaciones mentales.

- La realización de diferentes funciones cognitivas, tales como la función de tratamiento, considerada una función cognitiva esencial, la cual no puede llevarse a cabo por las representaciones mentales, debido a que las actividades de tratamiento están directamente ligadas al uso de sistemas semióticos; por ejemplo, el álgebra.

- La producción de conocimientos, debido a que las representaciones semióticas permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto en la medida en que pueden hacer surgir sistemas semióticos totalmente diferentes (Benveniste, (1974), Bresson (1987); citados en Duval (1998). El desarrollo de las ciencias está ligado a un desarrollo de sistemas semióticos cada vez más específicos e independientes del lenguaje natural (Gragner, 1979); citado en Duval (1998). Por lo cual se revela al funcionamiento cognitivo humano como inseparable de la existencia de una diversidad de registros de representación semiótica.

En la actividad matemática, la coordinación de varios registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lengua natural, etc.) es fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos; estas conversiones entre registros de representación semiótica es una condición necesaria para que no se confunda a los objetos matemáticos con sus representaciones y para que también se les pueda reconocer en cada una de ellas.
Esta es la clave para que una representación funcione verdaderamente como tal y proporcione el acceso al objeto matemático representado. Duval (1998) expone tres razones para justificar lo anterior:

1. La conveniencia de tratamiento; la existencia de varios registros permite hacer cambios entre ellos, y este cambio tiene como objetivo efectuar tratamientos de una manera más económica y potente.

2. La complementariedad de los registros; toda representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que ella representa, y de un registro a otro no son los mismos aspectos del contenido de una situación los que se representan.

3. La conceptualización implica una coordinación de registros de representación. La comprensión de un contenido conceptual se sustenta en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión.

En la enseñanza formal de las matemáticas, la actividad de conversión se considera como algo secundario o subordinado, ya que sólo se le percibe como necesaria para elegir el registro que se va a utilizar y proceder a efectuar los tratamientos debidos dentro de dicho registro, y se cree ingenuamente que ella tiene un carácter trivial, ya que al poder identificar un objeto en algún registro, el representarlo en otro registro no debería provocar ninguna dificultad.

Sin embargo, como Duval mismo lo explica, la actividad de conversión en muchos casos está lejos de ser trivial, por al menos dos razones:

a) la actividad de conversión no puede ser reducida a una simple traducción, ni mucho menos a un algoritmo o procedimiento estandarizado;

b) toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa.

A partir de este postulado de la complementariedad se puede concluir que los métodos de enseñanza que se enfocan en, o privilegian algún registro en particular, sin propiciar la coordinación entre los diversos registros en los que se puede representar el objeto estudiado, propician por ello un aprendizaje parcial o restringido de dicho objeto.

Si la formación de conceptos matemáticos implica de manera necesaria la coordinación de registros de representación, resulta entonces que el aprendizaje de las matemáticas no puede ser concebido como la automatización o mecanización de ciertas técnicas operatorias, sino que debe comprender también la coordinación de diferentes registros de representación.

Según Duval, la coordinación de los registros de representación es fundamental para la cognición y, por lo tanto, es una condicionante para todos los aprendizajes básicos.

Ahora bien, con respecto a las actividades propuestas a los estudiantes con el fin de que realicen conversiones, Duval (2006) aclara que no basta con tareas que exigen simplemente traducir de un registro a otro como por ejemplo que reconozcan al mismo objeto en una expresión de una función lineal y la gráfica de una recta. A este tipo de conversiones sencillas o directas, Duval (2006, p. 159), denomina "yuxtaposición" y aclara que "*la* *yuxtaposición de dos representaciones de un mismo objeto no puede resolver el problema cognitivo del reconocimiento del mismo objeto representado, porque las diferencias de contenido de las representaciones varían independientemente de los objetos representados*".

Así que, es necesario por lo tanto, que las tareas de conversión propuestas exijan más que una mera yuxtaposición, tareas en las que el estudiante deba realizar las conversiones por opción propia, ya sea por economía de trabajo (porque trabajar en un registro diferente facilita la resolución) o porque el tratamiento posterior así lo requiere. Debe existir más que una yuxtaposición, una coordinación entre los registros.

Otro aspecto central de la teoría presentada por Duval (1998, p.186), es que "*la comprensión (integradora) de un contenido conceptual, reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación se manifiesta por la rapidez y la espontaneidad de la actividad cognitiva de conversión*".

Por lo tanto, no bastará con la exposición del docente para que el estudiante pueda adquirir un concepto, pues debe manipular diferentes registros de representación para poder adquirir el conocimiento, y para esto las actividades o ejercicios propuestos a los estudiantes son fundamentales.

Por otra parte, no bastará con presentar y proponer actividades que apunten a aprehensión o tratamiento de registros sino que necesariamente deben implicar conversión, pues no existirá comprensión si no se maneja al menos dos registros semióticos diferentes del mismo concepto.

Visualización matemática

En el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas el aspecto relacionado con la visualización tiene una gran importancia.

De acuerdo con Marmolejo (2014), según la función que la visualización desempeña es posible agrupar en cinco las acepciones en que ésta ha sido contemplada en la investigación educativa:

- Como el estudio de imágenes que un individuo tiene o crea en su mente acerca de un objeto matemático;

- Como el estudio de las representaciones mentales que tiene acerca de él;

- Como el estudio tanto de las representaciones externas de naturaleza espacial (gráficos, figuras, formulas…) como de las representaciones mentales;

- Como el estudio de los registros de representación semiótica de naturaleza analógica (gráficos cartesianos, figuras geométricas, tablas, esquemas) y,

- Como un proceso matemático que genera prueba de naturaleza matemática.

En esta investigación consideramos la visualización como el estudio de los registros de representación semiótica de naturaleza analógica (gráficos cartesianos, figuras geométricas, tablas, esquemas).

Zimmerman & Cunningham (1991, p. 3) afirman que:

> La visualización se toma como la habilidad para trazar con lápiz y papel un diagrama apropiado, con ayuda de una calculadora o una computadora. El diagrama sirve para representar un concepto matemático o un problema y ayuda a comprender el concepto o a resolver el problema. La visualización no es un fin en sí mismo sino un medio para conseguir entendimiento; visualizar un problema significa entender el problema en términos de un diagrama o de una imagen. La visualización en matemáticas es un proceso para formar imágenes mentales, con lápiz y papel, o con la ayuda de tecnología y utilizarla con efectividad para el descubrimiento y comprensión de nociones matemáticas.

Todo lo expresado anteriormente pone de manifiesto la importancia de la visualización dentro del ámbito del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La visualización como mediadora en el razonamiento de un alumno puede facilitar el proceso de resolución de problemas. Dado un problema, el profesor guía a los estudiantes a formarse una imagen de la situación y a describirlo con sus propias palabras, creando una imagen para lograr la generalización y asimilación del conocimiento.

Es relevante señalar que, a pesar de que la visualización se muestra como una parte esencial en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas existe resistencia tanto por parte de algunos docentes, como de muchos estudiantes a utilizar los aspectos visuales en la resolución de problemas matemáticos.

En relación a esta problemática Eisenberg y Dreyfus (1991), en palabras de Depool (2005), establecen tres razones que influyen en este comportamiento.

La cognitiva (lo visual es más difícil de entender). Es más fácil presentar un argumento linealmente que un argumento que requiere de información bidimensional, con muchos aspectos ligados unos con otros entre varias informaciones y con implicaciones en muchas direcciones. Un diagrama es una colección de información concentrada y compleja. Aunque dos representaciones de un concepto matemático contienen la misma información, mucha de la información será explícita en el diagrama e implícita en la representación analítica.

Las representaciones mediante diagramas no son inmediatamente entendibles sino que necesitan procesos cognitivos para darle sentido. Los estudiantes que no han sido enseñados apropiadamente se niegan a dibujar diagramas y gráficas. No han tenido la oportunidad de adquirir la habilidad para interpretar diagramas.

La sociológica (lo visual es más difícil de enseñar). Existe diferencia entre los métodos para el procesamiento de la información usados por los matemáticos en su trabajo (visuales generalmente), y los usados por los enseñantes (los aspectos visuales, si se utilizan, son meramente ilustrativos). La teoría de Chevallard (1985, p. 3) sobre las transposición didáctica permite aclarar un poco la idea: La Trasposición didáctica "*Es el cambio que experimenta el conocimiento cuando es convertido en conocimiento científico, académico, en el conocimiento para ser enseñado bajo la institución escolar*.

Se pueden señalar dos aspectos importantes de esta teoría, una es la linealización del conocimiento, mediante la cual la preparación didáctica del conocimientos implica la formulación de un texto lineal que estructura el conocimientos (así no se establece en la mente de los matemáticos); la otra, la compartamentalización del conocimiento, en la que el conocimiento debe ser separado de un cuerpo de conocimientos y aislado en un gran número de pequeños trazos de conocimiento, debiendo hacerse explícito en lugar de ser presentado implícitamente.

El grado de novedad de un concepto debe ser pequeño y es frecuentemente alcanzado por la construcción de algoritmos y procedimientos de cálculo, que permiten las presentaciones secuénciales. El procesamiento analítico utiliza representaciones proposicionales y representa la manera más cómoda para el profesor por lo que tiene sentido que los estudiantes escojan procedimientos analíticos más que visuales.

El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación se presentan como una alternativa que contribuye a la visualización de conceptos matemáticos. Se considera que, los ordenadores tienen papel directo y concreto en la visualización, debido a la manera que generan gráficas matemáticas. Incluyen dibujos geométricos de todos los tipos en dos o tres dimensiones; curvas y superficies, campos direccionales, trozos de contornos y otros dibujos similares.

La visualización debe estar ligada a los aspectos numéricos y simbólicos de las Matemáticas para lograr los mejores resultados.

Hitt (1998), al referirse al uso de varios sistemas de representación, menciona que éstos no logran crear una articulación coherente entre ellos; manipulan coherentemente las transformaciones de representación en un mismo sistema semiótico, sobre todo en el algebraico, pero muestran una carencia de articulación cuando se trata de convertir una representación de un sistema a otro, por ejemplo, del gráfico al algebraico.

El diseño de nuevos materiales resulta relevante, en los que sea notorio el uso reflexivo y creativo de la tecnología existente. El profesor de Matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren su efectividad en el aula, en la que la visualización matemática promueva la elección correcta de un sistema semiótico de representación, relacionado con el concepto inmerso en la situación problemática, y donde la aplicación de aspectos sobre los sistemas semióticos de representación, sea clara.

La visualización matemática promoverá entonces una visión global, integradora, holística, que articule representaciones de varios sistemas.

Guzmán (1996), señala que las ideas, conceptos y métodos de las Matemáticas, presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitiva y/o geométricamente y cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos, como en la manipulación con ellos para la resolución de problemas de campo.

Las personas más aventajadas poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven. Poseen la capacidad de relacionar, de modo muy versátil y variado, elementos complejos y resultados teóricos a través de redes significativas, siendo capaces de escoger, de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con los que se enfrentan.

Del mismo modo, Guzmán (1996), considera tres tipos de visualización, la **isomórfica,** los objetos tienen un correlato "exacto", es decir, significa que sería posible, en principio, establecer una especie de tabla de correspondencias entre ciertos aspectos de la representación visual, que son los que se van a utilizar, y los significados matemáticos que representan, hasta tal punto que las posibles manipulaciones con los objetos de la representación visual podrían ser traducidos, en el momento en que sea necesario, con mayor o menor esfuerzo, en las relaciones matemáticas abstractas que representan.

Su utilidad es clara, ya que la manipulación de objetos percibidos por los sentidos o por la imaginación, se hace normalmente mucho más fácil que el tratamiento de conceptos abstractos frecuentemente bien complicados.

El segundo tipo de visualización es la **homeomórfica**, en la que la representación de algunos de los elementos importantes tienen relaciones entre sí que imitan suficientemente las relaciones entre los objetos que representan, ofreciendo una ayuda poderosa a los procesos mentales de búsqueda, demostración, entre otros.

La **visualización analógica**, es cuando se sustituyen mentalmente los objetos con los que se trabajan por otros que se relacionan entre sí de forma análoga, y, cuyo comportamiento resulta más conocido por haber sido mejor explorado.

Por último la **visualización diagramática.** Nuestros objetos mentales y sus relaciones, en los aspectos que interesan, son meramente simbolizados de manera que los diagramas así obtenidos ayuden en los procesos de pensamiento alrededor de ellos. A veces se podría decir que estos procesos vienen a asemejarse a reglas nemotécnicas. Los diagramas en árbol que usamos en combinatoria o probabilidad, así como otros mucho más personales que cada uno se construye, son de esta naturaleza.

7.7 Dificultades, obstáculos y errores

Otros elementos que intervienen en nuestro marco teórico son las dificultades, obstáculos y errores que están presentes en el proceder de los estudiantes. Éstos pueden estar influenciados por diversos factores que pueden condicionar las respuestas dadas por los estudiantes a situaciones planteadas.

Herscovics (1989), citado por Depool (2005), señala que el estudiante se enfrenta a nuevas ideas que no tienen cabida en sus estructuras cognitivas ya existentes, lo que ocasiona que no pueda enfrentarse adecuadamente a una nueva información, es decir, los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los estudiantes y del procesamiento interno de estas experiencias, y que la organización curricular, diseñada para presentar los objetos matemáticos de la manera más sencilla, puede causar obstáculos cognitivos, pero también surgen obstáculos cognitivos que no tienen que ver con la organización curricular sino que tienen que ver con otros aspectos, por ejemplo, la lógica interna de las Matemáticas.

De igual forma, Depool (2005), retomando a Brousseau (1983) menciona que el error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito, y que ahora se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son fortuitos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos.

Un obstáculo es una pieza del conocimiento; forma parte del conocimiento del estudiante. Este conocimiento ha sido satisfactorio, en general, durante un cierto tiempo para resolver problemas. Es precisamente el aspecto satisfactorio el que ha afianzado el conocimiento en la mente y lo ha convertido en obstáculo. El conocimiento demuestra ser inadecuado cuando se enfrenta con problemas nuevos y puede resultar poco elemental la inadecuación.

Los errores son datos objetivos que forman parte de la producción de los estudiantes; en muchas ocasiones constituyen un elemento estable, revelador de las características de su conocimiento, de los componentes de su imagen del concepto respecto al concepto considerado.

En González - Martín (2005), una organización de las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas, que presenta Socas (1997), es la siguiente:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos de las Matemáticas

2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas

4. Dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes

5. Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

En cuanto a las dificultades de acceso al Cálculo (que son diversas y se refuerzan mutuamente en redes complejas), Artigue (2002) las agrupa en tres grandes categorías:

- Aquéllas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del Cálculo (números reales, sucesiones, funciones).

- Aquéllas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del Cálculo.

- Aquéllas vinculadas con las rupturas necesarias con los modos de pensamientos puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el Cálculo.

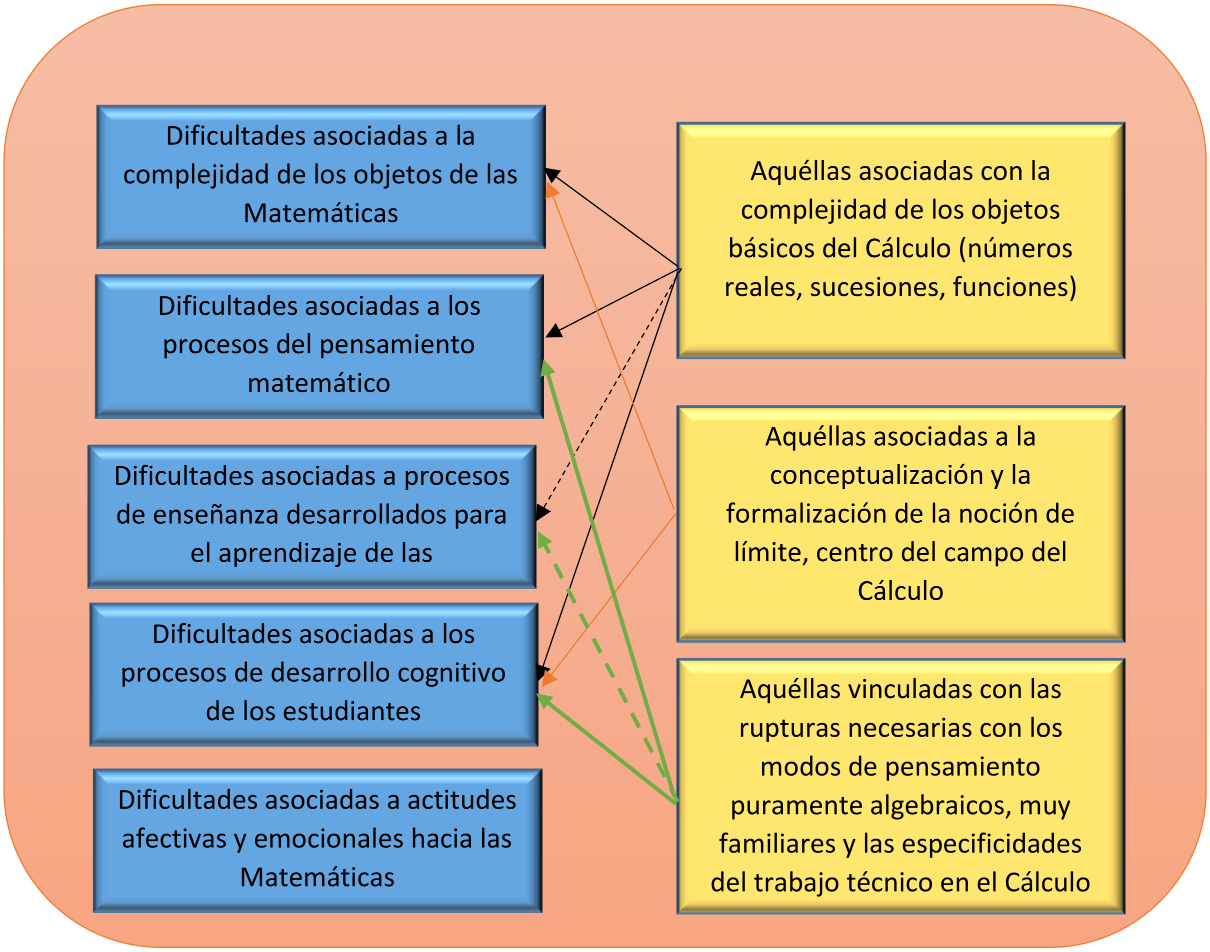


Figura 6. Dificultades de acceso al Cálculo

Fuente Depool (2005)

Asimismo, relacionadas con el concepto de función, Artigue (2002, pp. 110-111) cita también que se han encontrado dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de la noción de función:

> Una vez más los trabajos son muchos y los resultados concordantes. Junto con las dificultades cognitivas que son reales en las conversiones de un registro a otro, o en el trabajo dentro de un mismo registro, por ejemplo en el registro gráfico cuando se deben manejar simultáneamente dos niveles de información (informaciones sobre la función y su derivada), estas investigaciones señalan como causa de las dificultades los hábitos de la enseñanza tradicional. El gran predominio que en ella se le otorga al registro algebraico y el status infra-matemático que se le da al registro gráfico impiden manejar adecuadamente este tipo de dificultades y ayudar al estudiante a construir las flexibilidades necesarias en este nivel.

Todas estas dificultades se relacionan y forman redes en las que se refuerzan, concretándose en la práctica en forma de obstáculos y manifestándose en forma de errores.

Socas (2011) proporciona algunas características de los obstáculos:

a) Un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento.

b) Tiene un dominio de eficacia. El estudiante lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto.

c) Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas.

d) Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

e) Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándose esporádicamente.

Entre los tipos más frecuentes de error podemos mencionar los producidos por la enseñanza o la forma en que se enseña y los de corte epistemológico. Con frecuencia los errores se manifiestan durante la manipulación de una representación dentro de un mismo sistema de representación, que generalmente es el algebraico. Otro tipo de error se puede presentar cuando hay una elección inadecuada de un sistema semiótico al resolver un problema matemático.

También, Camacho & Depool (2003) retomando a Duval (1993), señala que, muchas de las dificultades encontradas por los estudiantes en diferentes niveles de su currículo pueden ser descritas y explicadas como una falta de coordinación de registros de representación.

Como hemos mencionado ya, la construcción inadecuada de un concepto se puede deber a una carencia de articulación entre diferentes registros semióticos de representación. También creemos que muchos malentendidos que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas están relacionados con la falta de estructuras cognitivas que le permitan realizar las conexiones necesarias en la resolución de un problema o para ir más allá de un problema resuelto.

Un obstáculo cognitivo se produce frecuentemente cuando un sujeto, al enfrentarse a un problema, evoca representaciones contradictorias del concepto en cuestión, posiblemente a causa de ideas intuitivas erróneas, en muchos casos incluso necesarias, construidas en el proceso de formación del concepto. Desde esta perspectiva, la instrucción deberá promover mejores conexiones (articulaciones) entre representaciones de tal forma que la red interna que se esté formando en el sujeto le permita contrastar e intentar disminuir la fuerza de ese conocimiento detectado e identificado como obstáculo epistemológico.

Los obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas son un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento; el alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado; cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto genera respuestas inadecuadas, incluso incorrectas y, resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté y cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez; después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo esporádicamente.

Las causas principales de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas se pueden dividir en dos grupos, los que tienen su origen en un obstáculo y los que tienen su origen en una ausencia de significado; estos últimos, tendrían dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas (Depool, 2005)

OCTAVA PARTE:

PERSPECTIVA METODOLÓGICA

VIII.- PERSPECTIVA METODOLÓGICA

8.1 Tipo de investigación

Como se sabe, los estudios descriptivos se centran en la obtención del registro del fenómeno tal y como aparece en determinados contextos. Ello, supone un referente básico para la construcción del conocimiento científico. Para Hernández, Fernández, & Baptista, (2014, p. 80), , "*buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis*".

El alcance de esta investigación, de acuerdo con sus objetivos y el nivel de profundidad, es de tipo descriptivo, ya que comprende la interpretación y análisis de los hechos, vivencias, circunstancias y experiencias en el proceso de enseñanza aprendizaje del cálculo integral, en las carreras del Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud de la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí, durante el primer semestre de 2017.

Según el tiempo de realización esta investigación es transeccional o transversal descriptiva. Los diseños de investigación de este tipo "recolectan datos en un sólo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado" (Hernández et al., 2014, p.151).

De modo que, en este estudio realizamos una descripción detallada de las actividades, vivencias, emociones, hechos, experiencias y situaciones vividas durante el proceso de enseñanza aprendizaje de dicha asignatura. Se identifica y analiza la problemática que comporta la interacción docente-estudiantes.

La metodología empleada es fundamentalmente cualitativa, aunque algunos aspectos fueron abordados cuantitativamente, para el procesamiento de los datos que requieran este tratamiento, con el fin de conocer el fenómeno estudiado.

Referente a la investigación cualitativa, podemos afirmar que, ésta "*estudia la realidad en su contexto natural, tal y como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas*" (Rodríguez-Gómez, Gil-Flores, & García-Jiménez, 1996, p.32). Además, dado que existe interrelación entre el investigador y los sujetos de investigación, las observaciones y mediciones que se realizan se consideran válidas mientras constituyan representaciones auténticas de alguna realidad.

Así que, el propósito de este estudio es la aproximación a los sujetos reales, quienes nos brindaron información sobre sus propias experiencias, opiniones y valoraciones, en relación al proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura.

También Taylor & Bodgan (2001. p.20) plantean que la investigación cualitativa "*produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable. Todo esto en busca de una comprensión detallada desde el punto de vista de otras personas, a quiénes se ve como iguales*".

De igual forma, los autores citados anteriormente, consideran que la interacción del investigador con los informantes ha de ser de modo natural, tratando de identificarse con ellos, para poder comprender cómo ven las cosas. Por ello, busca los medios de obtener un conocimiento directo de la realidad. Esto se logra a través de la observación y escucha de los comentarios acerca de la temática que está investigando.

En este estudio se consideró importante la opinión de los estudiantes, al igual que la de los docentes participantes, ya que nos dimos cuenta de cómo ellos consideran el proceso de enseñanza- aprendizaje. Es decir, como perciben los aciertos, desaciertos, éxitos y fracasos.

8.2 Enfoque de la investigación

Existen diferentes definiciones para el término paradigma. Algunos estudiosos consideran que es un conjunto de valores, creencias, saberes y técnicas que comparte la comunidad científica para afrontar la realidad. Retomamos la definición de Carr (1996), quien señala que, el paradigma, es la forma como la comunidad científica percibe y refleja la realidad. Posee una estructura integrada por supuestos teóricos, fundamentos epistemológicos y criterios metodológicos entrelazados que permiten la selección, evaluación y crítica de temas, problemas y métodos al enfocar la actividad científica.

Este mismo autor sostiene que, para Kuhn, los paradigmas son logros científicos universalmente aceptados que durante algún tiempo suministran modelos de problemas y soluciones a una comunidad de profesionales. Además, plantea tres posturas paradigmáticas: positivista, interpretativo y sociocrítico.

Positivista o, también llamado paradigma cuantitativo, empírico-analítico, pretende explicar, predecir y controlar hechos y/o fenómenos observados a partir de relaciones causa-efecto. Se centra en la metodología experimental, manipulativa y cuantitativa. El análisis de la realidad está basado en la reducción de conceptos complejos a variables específicas y medibles, las que pueden ser descubiertas y descritas de forma objetiva. Los resultados se analizan a partir de procedimientos estadísticos que son utilizados para hacer generalizaciones sin importar el tiempo y el contexto para, finalmente, formular teorías.

En el ámbito educativo su aspiración básica es descubrir las leyes por las que se rigen los fenómenos educativos y elaborar teorías científicas que guíen la acción educativa.

Interpretativo o también llamado paradigma cualitativo, fenomenológico naturalista, etnográfico, pretende comprender e interpretar la realidad, los significados, las intenciones de las personas y percepciones. Se centra en el estudio de los significados de las acciones humanas y de la vida social en un contexto determinado. Intenta sustituir las nociones científicas de explicación, predicción y control del paradigma positivista por las nociones de comprensión, significado y acción.

El paradigma interpretativo busca la objetividad en el ámbito de los significados, utilizando como criterio de evidencia el acuerdo intersubjetivo en el contexto educativo. Se centra en la descripción y comprensión de lo que es único y particular del sujeto, más que en lo generalizable.

Los autores que orientan su actividad investigativa con base en este paradigma, participan de la aplicación de técnicas propias de validación, entre las que destacan la triangulación, observación persistente, réplica paso a paso, entre otros.

Sociocrítico: se enfoca en el análisis de las transformaciones sociales con miras a dar respuesta a determinados problemas generados por éstas. Se cuestiona la supuesta neutralidad de la ciencia y, por ende, de la investigación, a la que se le atribuye un carácter emancipador y transformador de las organizaciones y procesos educativos. Ni la educación ni la investigación son neutrales, por lo que es imposible obtener conocimientos imparciales y que, por lo tanto, es falsa la neutralidad de la ciencia.

El paradigma sociocrítico incorpora el elemento ideológico de manera explícita; en contraposición a las corrientes de pensamiento que propugnan por una ciencia neutral. De modo que, esta orientación incorpora procesos de autorreflexión permanente sobre los procesos y situaciones investigadas. Tiene como propósito el análisis de las transformaciones sociales en la búsqueda de resolver los problemas generados por las mismas. Esto lleva a la generación de propuestas de cambio, es decir, construir una teoría a partir de las reflexiones de la praxis, como análisis crítico del hacer.

En suma, este paradigma se centra en explicar las relaciones sociales como expresión histórica y trata de que los mismos agentes implicados en la realidad sean los protagonistas de la transformación de sus prácticas en sus determinados contextos sociales, a través de la reflexión crítica. El investigador es un sujeto más.

Desde esta perspectiva, el propósito de esta investigación es interpretar y comprender los fenómenos relacionados al objeto de la misma. Es desde esta visión que, este estudio se inscribe predominantemente en el paradigma interpretativo y desde la perspectiva inductivo-deductiva y holística; porque pretende describir, comprender e interpretar los componentes del proceso enseñanza – aprendizaje implementados en la unidad de integral definida, al igual que estrategias metodológicas utilizadas por los docentes y los estilos de aprendizaje de los estudiantes, que favorecen el logro de aprendizajes significativos.

Tal como afirma Hernández et al. (2014), el paradigma interpretativo describe e interpreta los contextos, pensamientos y decisiones de los docentes y estudiantes; analiza la realidad educativa desde la visión de las personas implicadas y estudia sus creencias, intenciones, motivaciones, entre otras características del proceso educativo.

Asimismo, el paradigma interpretativo, se fundamenta en la fenomenología y la teoría interpretativa, porque trata los aspectos relacionados con las metodologías utilizadas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la integral definida. Además, se apoya en el interaccionismo simbólico, ya que comprende la problemática que comporta la interacción docente-estudiantes, así como la funcionalidad de las estrategias metodológicas para el aprendizaje de la misma.

Su propósito final está encaminado a vislumbrar las fases y procedimientos metodológicos que utilizan los docentes, que pueden estar influyendo en la comprensión que tengan los estudiantes de las temáticas que se abordan en esta unidad. Por tal razón, intentamos proporcionar un conocimiento válido, encontrando soluciones a la problemática identificada en el estudio, a partir de la recopilación abundante de datos desde distintos ángulos.

8.3 Población y muestra

Tomando en cuenta los enfoques de la investigación, la población y muestra fue seleccionada en base a criterios previamente establecidos y al contexto en el que se desarrolla la misma.

De modo que, la población de este estudio está constituida por docentes y estudiantes que imparten y cursan, respectivamente, la asignatura Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II en las carreras de ingeniería del departamento de Ciencia, Tecnología y Salud de la FAREM-Estelí. La misma está conformada por 164 estudiantes y cuatro docentes.

La técnica de muestreo empleada es no probabilística e intencional, ya que las personas que participan como sujetos de investigación son seleccionadas de acuerdo a criterios y conveniencia de la investigadora.

En el caso de los docentes, los criterios de selección fueron:

1. Ser docentes activos, que estén o hayan impartido la asignatura en el I semestre 2017 ó II semestre de 2016.

2. Tener al menos un año de experiencia docente en nuestra Facultad.

Inicialmente se consideró tomar como muestra la totalidad de los estudiantes que hubieren cursado la asignatura en el II semestre del 2016. Esto con el fin de que proporcionen la mayor riqueza de información posible para el estudio. Sin embargo, en el momento de la recolección de la información estuvieron presentes, en el aula de clases, solamente 133 estudiantes de las diferentes carreras de Ingeniería. Es así como, el instrumento se aplicó, indistintamente del género, situación estudiantil (repitente o que cursa la asignatura por primera vez) de los estudiantes.

En relación a las autoridades, se entrevistó al Director del Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud y a cuatro coordinadores de carrera.

Cabe señalar que otro criterio de selección de las muestras fue la voluntariedad de los participantes que impartieron o cursaron, respectivamente, las asignaturas.

Lo anterior se justifica con lo planteado por Hernández et al. (2014, p. 392), en relación a que en las investigaciones cualitativas "*el tamaño de la muestra no es importante desde una perspectiva probabilística, pues el interés del investigador no es generalizar los resultados de su estudio a una población más amplia*".

Las fuentes de información:

- 133 estudiantes en las carreras de ingeniería del Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud de la FAREM-Estelí.

- Dos docentes que sirven la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II en el Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud de la FAREM-Estelí.

- La dirección del Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud.

- Las coordinaciones de las carreras de ingeniería del Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud de la FAREM-Estelí.

8.4 Técnicas e instrumentos de recogida de datos

De acuerdo con Hernández et al., (2014), recolectar los datos implica elaborar un plan detallado de procedimientos que nos conduzcan a reunir datos con un propósito específico. Para ello, se utilizaron métodos o técnicas confiables, válidos y objetivos.

Las fases o etapas desarrolladas:

Para iniciar la investigación se realizó un diagnóstico sobre los componentes del proceso de enseñanza – aprendizaje de las asignaturas Cálculo diferencial e Integral (Cálculo II) impartido en las carreras de ingeniería.

Para ello:

1. Se hizo un análisis de los programas de asignaturas en torno a objetivos, contenidos, estrategias metodológicas, medios y formas de evaluación.

2. Se realizaron entrevistas a docentes y autoridades universitarias, y encuestas a estudiantes, así como a docentes con una amplia experiencia en este ámbito profesional.

3. Se realizaron observaciones a clases.

Con el objeto de obtener información de los propios docentes y dado que esta técnica permite una diagnosis personal, se decidió utilizar la entrevista.

Las entrevistas a docentes y observaciones a clases nos permitieron identificar, entre otras, su formación profesional, sus actitudes para enseñar, sus opiniones sobre la asignatura que imparte, cuáles estrategias metodológicas implementa, su actitud para el uso de las computadoras y enseñanza – aprendizaje mediante el uso de software matemático.

Las observaciones realizadas fueron de carácter descriptivo de tal forma que permitieron percibir e identificar la efectividad de las estrategias metodológicas y recursos didácticos utilizados, así como la actitud tanto de docentes como estudiantes hacia las Matemáticas y uso de computadoras.

Las encuestas a estudiantes nos permitieron conocer la actitud hacia las matemáticas, el uso de las computadoras y el aprendizaje con software matemático, en torno a las cuatro categorías de análisis o dimensiones: confianza y seguridad en el trabajo matemático, motivación hacia el trabajo matemático, compromiso con el trabajo matemático y el uso del ordenador en las actividades matemáticas.

Para medir las actitudes hacia las Matemáticas y hacia el uso de los ordenadores para el aprendizaje de las Matemáticas, se aplicó una escala Likert adaptada de Depool (2004), conformada por 34 ítems que categorizamos de manera similar a la de Galbraith Haines (1998). Este instrumento de medición permitió determinar la dirección de la actitud (positiva o negativa; favorable o desfavorable); así como la intensidad de la actitud (alta o baja).

Se hizo una revisión de los materiales e instrumentos utilizados para organizar el estudio definitivo sobre el concepto de la Integral Definida

En relación con la elaboración del compendio metodológico se consideraron los siguientes tópicos:

- Reseña histórica sobre el Cálculo Integral, presentando imágenes de matemáticos clásicos, con una breve biografía. Esta parte tiene el propósito de plasmar la correlación del desarrollo matemático histórico con el enfoque del tema objeto de estudio. Además de estimular una actitud crítica y de promover la valoración del conocimiento y del pensamiento matemático.

- Teoría matemática, desde una perspectiva gráfica y numérica, considerando los aspectos expresados en la introducción y empleando la mediación pedagógica. Para ello, se hace uso del software libre Geogebra como material didáctico, ya que por su versatilidad permite explotar significativamente los distintos marcos: geométrico, numérico y analítico, siguiendo la teoría de las representaciones semióticas de Duval.

8.5 Métodos de análisis

Muñoz Razo (1998), plantea que se entiende por método de investigación, el procedimiento ordenado que se realiza para establecer el significado de los fenómenos a los que se dirige el interés científico, con el propósito de demostrar, objetar, descubrir y aportar un conocimiento.

Durante el desarrollo de la investigación se utilizaron diversos métodos, entre los que se encuentran:

Del nivel teórico:

- El analítico-sintético, el inductivo-deductivo y el enfoque sistémico. En este estudio se partió del análisis de las tendencias didáctico-metodológicas del proceso de enseñanza-aprendizaje de la unidad Integral Definida como área bajo la curva. Así también, las particularidades de esta didáctica cuando se introduce la computadora como medio auxiliar didáctico en dicho proceso. De igual manera se valoraron las fuentes de información extrayendo de éstas regularidades y tendencias relacionadas con la temática. Esto permitió diseñar el compendio que se propone y el sistema de acciones que posibilitan su aplicación.

  En fin, en el estudio se analizaron y sintetizaron los aspectos teóricos de la didáctica del Cálculo contrastándolo con la fase de campo. El hecho particular fue el análisis del proceso de enseñanza-aprendizaje, deduciendo su incidencia en el aprendizaje significativo del concepto de Integral Definida con un enfoque computacional.

- El histórico-lógico, para analizar el comportamiento del problema de la investigación en los diferentes enfoques estudiados y la evolución de las soluciones propuestas.

- La modelación, para plantear el redimensionamiento de la enseñanza – aprendizaje (concepciones tradicionales) de la unidad de Integral Definida cuando en el proceso de enseñanza- aprendizaje de esta asignatura se introduce la computadora.

En resumen, estos métodos de investigación del nivel teórico nos permitieron el procesamiento de la información, la caracterización del objeto de investigación, la determinación de sus fundamentos teórico-metodológicos, así como la elaboración de conclusiones a partir de los objetivos trazados.

Del nivel empírico:

- La encuesta y la entrevista para buscar hechos que fundamentan la existencia del problema de investigación en el objeto y determinar las potencialidades y carencias tanto de docentes como de estudiantes sobre el tema objeto de estudio, conocer la opinión de expertos y obtener información que permita la elaboración del compendio.

- La observación, para apreciar el desempeño de estudiantes y docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje y valorar los resultados de la intervención en la práctica.

Es así que los métodos del nivel empírico nos permitieron estudiar la realidad de cómo se imparte la unidad Integral definida y específicamente lo relacionado con el concepto de integral definida como área bajo una curva. Dichos métodos adquieren un carácter semi-estructurado, al tener como base una guía en la que se establecen los indicadores que se deberán tener en cuenta; es sistemática, pues abarca un semestre, y de campo, al realizarse en el contexto natural del proceso. Se seleccionan intencionalmente docentes para ser entrevistados.

Del nivel estadístico.

- Métodos de la Estadística descriptiva para caracterizar el comportamiento de indicadores previamente definidos en muestras seleccionadas. Los principales estadísticos utilizados fueron la media y desviación estándar, coeficiente alfa de Cronbach para determinar el valor actitudinal de los estudiantes de manera global en las distintas dimensiones objeto de estudio, así como para todo el cuestionario.

8.6 Validación, fiabilidad y pilotaje de los instrumentos

Como se sabe, todo instrumento de recolección de datos debe ser validado y confiable. Al respecto, consideramos oportuno utilizar el procedimiento descrito por Hernández y otros. Este consiste en aplicar un instrumento dos o más veces a un mismo grupo de sujetos, después de cierto período. Si las diferentes aplicaciones, producen los mismos resultados, entonces el instrumento se considera confiable. De lo contrario, habría que realizar ajustes en el instrumento. Este procedimiento se aplicó al cuestionario, por ser un instrumento cuantitativo.

Ahora bien, la validez de una investigación se obtiene mediante las opiniones de expertos y al asegurarse que las dimensiones medidas por el instrumento sean representativas del universo. Es por ello que, los instrumentos para la recogida de datos fueron validados por docentes universitarios; obteniéndose sus criterios de forma independiente.

A estos expertos se les solicitó emitieran criterios sobre:

- Existe relación entre los instrumentos y los objetivos de la investigación

- Si los instrumentos están redactados de forma clara, precisa y concisa

- Si la cantidad y ubicación de los ítems es la adecuada, pertinente y relevante.

Asimismo, el cuestionario fue pilotado con docentes y estudiantes que no formaron parte de la muestra, pero comparable por el hecho de cursar la asignatura en otra carrera de la Facultad. El propósito fue poder constatar la claridad, comprensión, coherencia y aspectos de contenido; verificándose que los encuestados comprendieran todos los ítems del cuestionario.
Igualmente, la guía de observación se sometió a consideración (pilotaje) con un grupo clase que no formó parte de la muestra, pero comparable por las razones descritas anteriormente.

8.7 Procesamiento y análisis de la información

A continuación haremos una descripción del diseño de la investigación y de los instrumentos utilizados para la recogida de información, así como el proceso seguido en la elaboración del compendio metodológico.

Iniciamos describiendo de manera general la investigación explicando brevemente cada una de las distintas etapas. Igualmente, se presentan los núcleos en torno a los cuales se han organizado las diferentes fases de la misma, orientadas a conseguir los objetivos planteados en este estudio.

De igual forma, se describen las técnicas e instrumentos utilizados para la recogida de información y los procedimientos seguidos en el análisis de los datos.

Partimos, haciendo una revisión de la literatura relacionada con las actitudes, las Tecnologías de la Información y la Comunicación y la problemática sobre comprensión del concepto de la Integral Definida. Con esta información se pudo establecer la relevancia de una investigación que considera estos tres elementos. Se conformó un marco teórico, por una parte, referente a las actitudes de los estudiantes, por otra, relacionada con la comprensión del concepto de Integral Definida y el uso de las nuevas tecnologías.

El estudio de campo se desarrolló considerando una población conformada por 162 estudiantes que finalizaron el II semestre de las carreras de Ingeniería que imparte la Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, en nuestra Facultad. Es así que, se pretendió trabajar con toda la población, pero al momento de aplicar la encuesta estuvieron presentes solamente 133 estudiantes, a los cuales se les aplicó el cuestionario sobre actitudes para medir las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de las computadoras para el aprendizaje de las Matemáticas.

Inicialmente, las variables consideradas fueron género, condición de estudio y carrera, pero al momento de aplicar la encuesta se obtuvo que solamente siete de los estudiantes eran repitentes.

Como hemos señalado, utilizamos una escala tipo Likert, adaptada de Depool (2004) (ver anexo 5), conformada por 34 ítems que categorizamos de manera similar a la de Galbraith Haines (1998). Las dimensiones que definen las actitudes fueron: **confianza y seguridad** en el trabajo matemático (8 ítems), **motivación** hacia él (8 ítems), **compromiso** con el mismo (12 ítems) y **uso del ordenador** en las actividades matemáticas (6 ítems).

Para codificar las respuestas se asignaron códigos a cada ítem, teniendo en cuenta si el enunciado de éste último se presentaba en forma positiva (+) o negativa (-), de acuerdo a la siguiente tabla.

Tabla 1. Códigos de respuestas

Tipo de ítem	Completamente de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo
Positivo	4	3	2	1
Negativo	1	2	3	4

El procesamiento de los datos se realizó con SPSS v.22; la confiabilidad del instrumento de acuerdo al Alfa de Cronbach fue de 0.8.

El procesamiento y análisis de los datos que se obtuvo durante la etapa de campo nos permitió extraer información relevante, en relación a la problemática objeto de estudio. En palabras de Hernández, et al (2014), el proceso de análisis de datos cualitativos consiste en que los recibimos no estructurados. Por ello, los estructuramos e interpretamos, con el fin de llegar a interpretaciones razonables; organizándola para poder explicarla y describir el fenómeno objeto de estudio.

En ese sentido, pretendimos hacer reflexiones, interpretaciones, análisis, comparaciones y comprobaciones. De modo que, la organización, discusión y análisis de los resultados nos permitió dar una explicación lógica a la problemática de la investigación.

Con este estudio, cuya metodología es fundamentalmente cualitativa con algunos aspectos cuantitativos, pretendimos:

En la **fase cualitativa** entender los descriptores del estudio, por lo que se analizaron los datos de la entrevista y análisis documental.
El análisis documental se concretó mediante la revisión de bibliografía, Modelo Educativo, programas de asignatura, plan didáctico y planes de clase. Esto con el propósito de analizar, interpretar y triangular la información que se obtuvo en el proceso de investigación.

La tabla que sigue refleja en detalle el instrumento del análisis documental aplicado, tomando en cuenta la variable o dimensión derivada del objetivo específico correspondiente. Esto permitió la identificación de estrategias metodológicas, las que más se reflejaron en los planes didácticos y otros aspectos de la conducción del proceso de enseñanza aprendizaje, implícitos en los documentos analizados.

Tabla 2. Matriz de construcción de análisis documental

Objetivo Específico	**Variable o dimensión**	**Documentos a analizar**	**Informantes**	**Instrumento**
Describir cómo se realiza el proceso enseñanza–aprendizaje en el desarrollo de la unidad Integral Definida de las asignaturas de Cálculo en las carreras de Ingeniería de la FAREM–Estelí.	Conducción del proceso de enseñanza aprendizaje	✓ Modelo educativo ✓ Programa de asignatura ✓ Plan didáctico ✓ Plan de clase	Director de departamento Coordinadores de carrera Docentes	**Guía de análisis documental:** ✓ Objetivos y contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales ✓ Momentos didácticos ✓ Estrategias metodológicas implementadas ✓ Forma y estrategia de evaluación

Algunos aspectos que se tuvieron en consideración tanto en el análisis de los documentos analizados como en las observaciones a clases fueron:

- Es necesario que el docente conciba su clase de manera tal que permita a los estudiantes desempeñar un papel activo en la construcción de los conocimientos, en el desarrollo de habilidades y valores.

- Estimular un aprendizaje participativo, el cual facilite la actuación de los estudiantes, estimulando su creatividad.

- Tratamiento del contenido de enseñanza-aprendizaje con rigor científico. Para ello deben emplearse fuentes actualizadas y suficientes.

- Planificación de la clase a partir de los objetivos propuestos en el programa, considerando las características del contenido de enseñanza-aprendizaje, utilizando los métodos adecuados, así como las particularidades del grupo de estudiantes a los que va dirigida, entre otros elementos.

En nuestro estudio se aplicó la entrevista individual semi-estructurada. La entrevista (guía, anexo 2), estuvo dirigida a los dos docentes que imparten la asignatura en las carreras que conforman la muestra y a los coordinadores de carrera y Director de departamento, participantes en el estudio, con la finalidad de indagar sobre las estrategias metodológicas utilizadas en el proceso de aprendizaje de la asignatura. La información se registró en libretas de campo y grabadora digital, la que sirvió para efectuar el análisis cualitativo.

Los datos de la entrevista se procesaron usando el método de reducción, para lo que se estableció una categorización de las respuestas de acuerdo a los objetivos. El procedimiento consistió en realizar una trascripción literal de lo expresado por cada uno de los entrevistados y hacer una reducción de datos (codificación), clasificarlos e interrelacionar la información. Los datos de la entrevista se interpretaron dando sentido a las descripciones de cada categoría para arribar a conclusiones e implicaciones (propuesta de mejora).

De igual forma, para el análisis de la información nos apoyamos en el software para el análisis de datos cualitativos ATLASti, el cual nos permitió ordenar y obtener mejores representaciones sobre la información recolectada.

Ahora bien, el análisis de **datos cuantitativos** en opinión de Hernández (2014), implica el uso de técnicas estadísticas apropiadas que faciliten el manejo de los datos obtenidos. Estos análisis estadísticos se llevan a cabo mediante programas computacionales, con la ayuda de paquetes estadísticos.

Así mismo, afirman estos autores que, el tipo de análisis o pruebas estadísticas depende del nivel de medición de las variables, las hipótesis y el interés del investigador. Destacan, además, que para procesar la información el investigador debe de elegir previamente las medidas estadísticas que utilizará para su estudio.

De igual forma señalan que, el análisis de los datos cuantitativos es fundamental para interpretar las variables de estudio, determinando las relaciones que se dan entre los resultados.

En este estudio se analizaron los datos obtenidos de la encuesta, utilizando el paquete estadístico SPSS y Excel. De tal manera que se establecieron los perfiles estudiantiles.

El sistema categorial

Un sistema categorial, de acuerdo con Rodríguez (1996), es un elemento básico de medida en la investigación cualitativa, pues afirman que se necesita construir una estructura que soporte lo relevante en relación a los objetivos del estudio, en vista que no existen situaciones modelos o estándar.

En la tabla que aparece a continuación se aprecia el sistema categorial elaborado a partir de los instrumentos y de los objetivos de este estudio.

Tabla 3. Sistema categorial

Objetivos Específicos	Dimensión	Definición Conceptual	Categorías	Subcategorías	Informantes	Revisión Documental	Guía de Entrevista	Guía de Observación	Guía de Cuestionario
1) Describir cómo se realiza el proceso enseñanza – aprendizaje en el desarrollo de las asignaturas en las carreras de ingeniería de la FAREM– Estelí	Componentes del proceso de enseñanza aprendizaje.	Elementos del objeto, del proceso que forma parte de la composición del mismo. Se refieren a aquellas características estables o que se van modificando más rápidamente durante el desarrollo del proceso. (Álvarez,1990)	Objetivos y contenidos.	conceptuales procedimentales y actitudinales	Director de departamento Coordinadores de carrera Docentes Estudiantes	X	X	X	
			Métodos	Tradicional Participativa		X	X	X	
			Medios de enseñanza	Tecnológicos No tecnológicos		X	X	X	
			Formas organizativas docentes			X	X	X	
			Evaluación	Formas de evaluación Estrategias de evaluación		X	X	X	

Objetivos Específicos	Dimensión	Definición Conceptual	Categorías	Subcategorías	Informantes	Revisión Documental	Guía de Entrevista	Guía de Observación	Guía de Cuestionario
Valorar las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y el uso de computadora en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la integral definida.	Actitudes de docentes y estudiantes	Representa una reacción emocional sobre un objeto, sobre una creencia o sobre un comportamiento o hacia el objeto (Mandler, 1989)	Dominio afectivo	Confianza y seguridad					Preg.1-8
				Motivación					Preg.9 - 16
			Dominio cognitivo	Compromiso					Preg.17 - 28
			Dominio conductual	Interacción del estudiantes					Preg. 29 - 34

NOVENA PARTE:

ANALISIS E INTERPRETACION DE RESULTADOS

IX.- ANALISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

9.1 Generalidades

Del procesamiento, análisis y comparación de la información del presente trabajo investigativo se obtuvieron los resultados. A continuación, se presentan los mismos junto con su interpretación. Éstos se abordan de acuerdo con cada uno de los objetivos planteados en esta investigación.

9.1 Descripción del proceso enseñanza – aprendizaje en el desarrollo de las asignaturas

El análisis documental realizado al modelo educativo de la UNAN Managua, al programa de asignatura de Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II, así como a los planes didácticos de las mismas, en las carreras de ingeniería del Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud, nos permitió inferir o extraer explicaciones e indicaciones, tanto de forma explícita como implícita, relacionadas con:

- Las estrategias metodológicas
- Los objetivos
- Los contenidos
- Los recursos didácticos
- Las formas y estrategias de evaluación.

Al realizar el análisis documental, encontramos que, en el Modelo Educativo de nuestra Universidad se sugiere la utilización de estrategias metodológicas activas. Éstas están dirigidas a la evaluación procesual, vinculación de la teoría con la práctica, construcción de aprendizajes, formación de valores, al saber hacer, saber ser y a la promoción del pensamiento crítico y autónomo.

Además, visualizamos que las estrategias activas "demandan un fuerte componente procedimental-actitudinal, capaz de provocar la metacognición del estudiantado. Ello, como condición inevitable para el logro de un aprendizaje significativo" (Modelo Educativo, 2011).

En las orientaciones metodológicas del programa de asignatura de Cálculo Diferencial e Integral, para el desarrollo de la unidad "La integral y sus aplicaciones", se sugiere abordar los contenidos conceptuales a través de conferencias y los contenidos procedimentales realizando clases prácticas, basadas en guías de trabajo previamente dadas a los estudiantes. Cabe señalar que, el docente debe enfatizar en la resolución de problemas aplicados según la naturaleza de la carrera.

Igualmente, se recomienda facilitar a los estudiantes guías de lectura que sirvan de apoyo en la organización de los contenidos desarrollados en clase. También, se orienta dedicar suficientes clase prácticas, asignaciones de tareas y evaluaciones, para que los estudiantes reafirmen procedimientos, mediante el uso correcto del concepto de integral, formularios, métodos de integración y algoritmos de integración numérica.

En el programa de asignatura de Cálculo II, para desarrollar la unidad "La integral", se sugiere iniciar con preguntas exploratorias, es decir una exploración de los conocimientos del concepto de límite de una función, continuidad de una función y derivada de una función, a través de preguntas directas formuladas por el docente para promover la discusión grupal con enfoque participativo.

De igual forma, se enfatiza que, para superar las debilidades encontradas en esta etapa exploratoria se debe entregar a los estudiantes una guía de preguntas y ejercicios para consolidar los conceptos básicos.

A la vez sugiere la utilización de estrategias como las conferencias, indicando que el principal propósito es que el estudiante identifique una función dada y que pueda determinar el método apropiado para calcular la integral de dicha función. También se plantea orientar a los estudiantes en el uso correcto de las tablas de fórmula de la integral (formulario) y calculadora como un instrumento auxiliar para agilizar la realización de ejercicios o problemas.

De la misma manera, se recomienda que, el estudio de los teoremas sobre la integral definida se hará sin plantear las demostraciones formales de los mismos, sino haciendo un análisis descriptivo e interpretativo.

También se propone utilizar mapas cognitivos, con el fin de alcanzar un aprendizaje significativo. Para ello se entregará al estudiante una guía de lectura que deberá desarrollar durante sus horas de estudio independiente.

Finalmente, se expresa la utilización de estrategias como “aprendizaje basado en problemas”, indicando que al estudiante se le entregará una guía de ejercicios en la que se orientará la realización de ejercicios y problemas relativos a la aplicación de los métodos de integración para evaluar integrales.

Es meritorio señalar que, se sugiere la conferencia expositiva y como sabemos con esta metodología los docentes de estas asignaturas suelen apoyarse, en general, en la pizarra y algunas veces en diapositivas. De modo que, éstos se enfocan en la mera transmisión de conocimientos y los estudiantes únicamente son receptores de la información. Como bien lo afirma Ruiz (1994), si los métodos no están en correspondencia con las nuevas exigencias que demanda la Educación Superior, la calidad de los aprendizajes estará en riesgo y tendremos estudiantes poco creativos e innovadores.

Por otra parte, los programas de asignaturas incluyen un apartado sobre recursos didácticos, donde se recomienda utilizar como recursos: el plan didáctico, guías de trabajo, guías de problemas y formulario, apoyándose en el uso de medios tales como: pizarra, marcadores, estuche geométrico, calculadora y computadora, en dependencia de la disponibilidad de laboratorios de computación.

En fin, hemos visualizado que las sugerencias metodológicas son concretas y claras; no obstante, hace falta un mayor énfasis en la contextualización de los contenidos y estrategias más activas como el aprendizaje basado en problemas, aplicando el trabajo colaborativo; aprendizaje basado en proyectos, aprendizaje basado en las TIC, entre otras, ya que todas ellas juegan un papel decisivo para que en el proceso enseñanza-aprendizaje se tome en cuenta al sujeto que aprende.

Ahora bien, los docentes entrevistados manifiestan que ellos utilizan otras estrategias que no aparecen sugeridas en el programa de asignatura. La figura que se muestra a continuación permite visualizar tales estrategias.

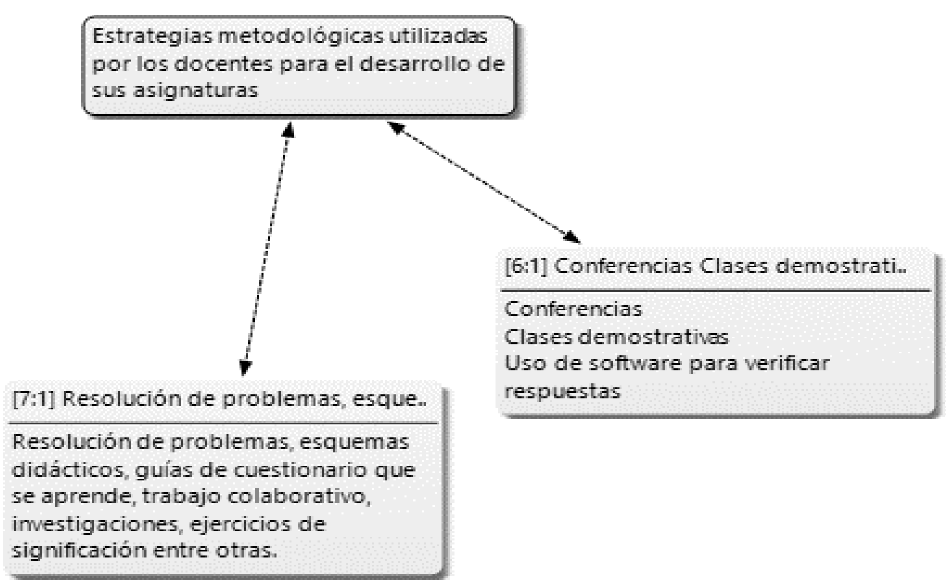


Figura 7. Estrategias metodológicas utilizadas por los docentes.

Como podemos observar, uno de los docentes entrevistados manifestó que algunas veces hace uso de software educativo para verificar respuestas, pero se encuentra con el inconveniente que en los laboratorios de computación no hay disponibilidad para su utilización.

Es válido señalar que, lo anterior mencionado por los docentes coincide con lo expresado por las autoridades entrevistadas, como lo podemos apreciar en la siguiente red semántica:

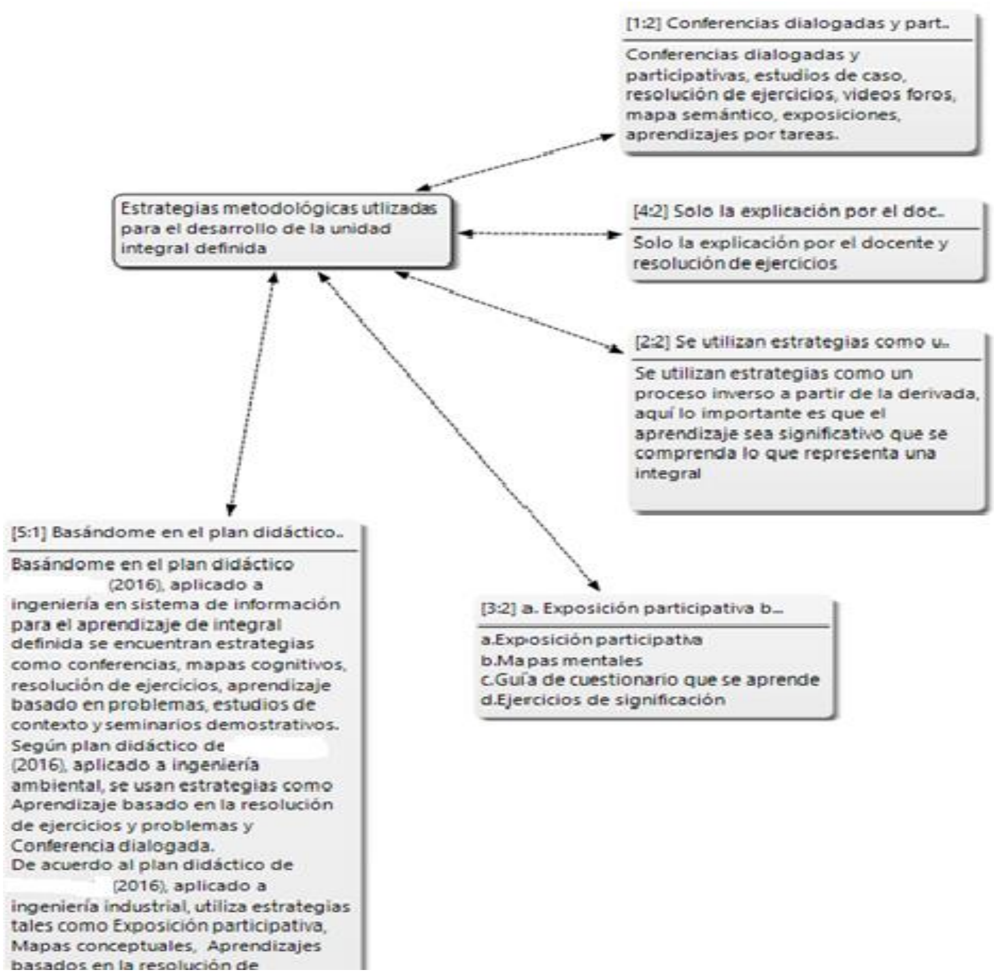


Figura 8. Estrategias metodológicas utilizadas para el desarrollo de la unidad Integral Definida

Podemos decir que, existen fortalezas en la aplicación de estrategias metodológicas, lo que favorece la vinculación con el aprendizaje significativo y con el aprender a aprender.

Por otro lado, se revelan potencialidades en el desarrollo de las clases observadas en cuanto a la comunicación que se logra entre docentes y estudiantes, y de estos entre sí. También se observa que, se crea un clima que favorece el desarrollo del proceso. Sin embargo, se aprecian dificultades relacionadas con otros indicadores, las que se analizan a continuación.

El tratamiento del contenido recae fundamentalmente en el docente, lo que limita la participación del estudiante. Cuando se orientan actividades, no se precisan objetivos, bibliografía a utilizar ni se precisa la forma de evaluación. La estructura metodológica (introducción, desarrollo y conclusiones) que se sigue no difiere mucho, aunque los objetivos por lograr sean diferentes.

En suma, es preciso que se produzca un cambio profundo en nuestro quehacer educativo. Perera-Cumerma & Veciana-Pita (2013), plantean que es necesario que pasemos de la aplicación de un modelo unidireccional, en el que el saber se encuentra en los libros o en el docente, a ser multidireccional. Es decir que, hay que ser más abiertos y flexibles, facilitando un ambiente donde reine la curiosidad, la creatividad y la innovación.

En relación a los programas de asignatura hay un apartado sobre el sistema de evaluación donde se reflejan los parámetros para que el estudiante tenga derecho para presentarse a las evaluaciones, coincidiendo éstas con lo establecido en el Reglamento de Régimen Académico. De igual manera, se explicita que la evaluación debe ser continua considerando el desempeño de cada una de las actividades de aprendizaje, haciendo especial énfasis en obtener evidencias de aprendizaje como: solución de ejercicios, actividades de investigación, análisis y discusión grupal, resolución de problemas y examen escrito para comprobar el manejo de aspectos teóricos y prácticos.

Ahora bien, en los **planes didácticos** de la asignatura la forma de evaluación consignada hace referencia a la modalidad de acuerdo con la función, y de acuerdo con quien la realiza. A su vez, las estrategias de evaluación reflejadas en el mismo son preguntas introductorias de la asignatura, ejercicios individuales, prueba individual y clases prácticas.

En la siguiente figura podemos apreciar lo expresado por los docentes en relación al sistema de evaluación e integración de orientaciones metodológicas en la actividad docente.

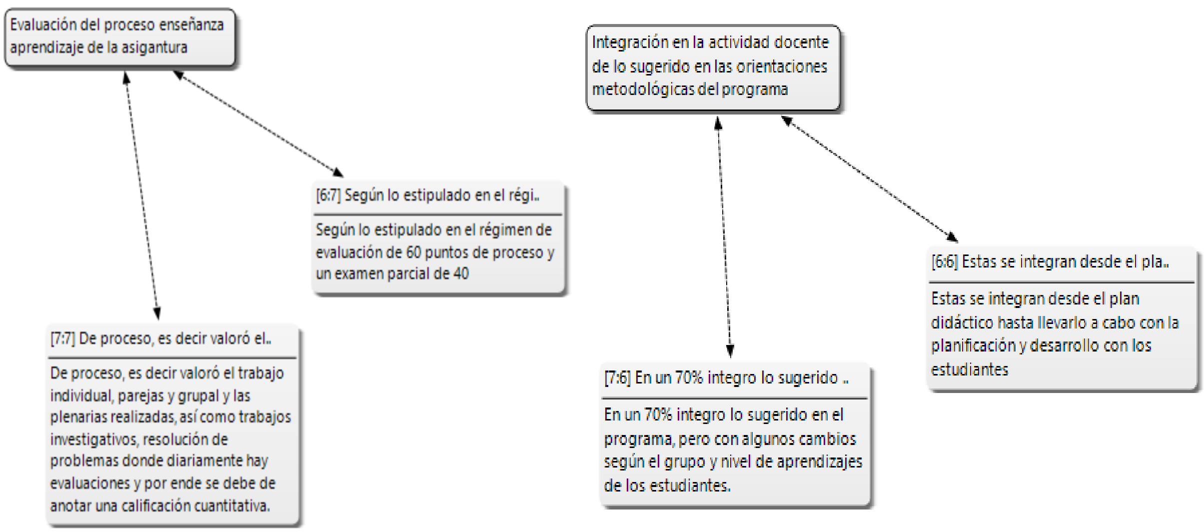


Figura 9. Evaluación del proceso de enseñanza- aprendizaje

Conforme lo expresado anteriormente, podemos decir que, visualizamos que las estrategias de evaluación, como ocurre con las sugerencias metodológicas, son concretas y claras, se implementa la evaluación de proceso. Es decir, es de esperar que estas estrategias formadoras y cualitativas produzcan aprendizaje profundo y de alto rendimiento. No obstante, contradice lo expresado por Hernández (1996), quien afirma que, en el contexto universitario se ha comprobado que la forma en que el profesorado plantea la evaluación de su alumnado afecta a los enfoque de aprendizaje (superficial o profundo) y a la calidad de dichos aprendizajes.

Recogiendo las ideas expresadas se infiere que es preciso utilizar estrategias en que el estudiantado:

- Se sienta como agente activo en su propia evaluación

- Aprenda a evaluar sus propias acciones y aprendizajes

- Utilice técnicas de autoevaluación y sea capaz de transferirlas en diversidad de situaciones y contextos

- Sepa adaptar y/o definir modelos de autoevalución en función de valores, contextos, realidades sociales, momentos, entre otros.

9.2 Opinión de los docentes sobre el uso de software matemático en el proceso de enseñanza - aprendizaje de la integral definida

Las entrevistas realizadas a docentes que imparten las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II, así como a las autoridades universitarias (coordinadores de carrera y el director de Departamento de Ciencia, Tecnología y Salud) nos permitieron identificar cuál es la percepción que tienen acerca de la importancia del uso de medios tecnológicos en el desarrollo de las clases.

De los dos docentes entrevistados, sólo uno de ellos manifiesta realizar, algunas veces, el proceso de enseñanza-aprendizaje aplicando software matemático. Sin embargo, ambos expresan hacer uso de las redes sociales e Internet para la preparación de sus clases.

Referente a la preparación informática de los docentes, los entrevistados manifestaron que poseen conocimientos en cuanto al dominio de contenidos básicos necesarios para manipular la computadora, aunque haya debilidades en el dominio de asistentes matemáticos y software matemático.

Los docentes, al igual que las autoridades entrevistadas, reconocen que el uso de software educativos favorece la clase, ya que facilita la ejercitación de contenidos, desarrolla habilidades informáticas, motiva a los estudiantes, ayudan al desarrollo de contenidos, al igual que facilitan la relación inter- materias.

No obstante, plantean que como su perfil no es de informática no hacen uso de medios informáticos. Además, el acceso a los laboratorios es limitado, no se ha capacitado en el uso de estos medios y falta tiempo para usarlo en la clase y cumplir en tiempo las exigencias de los programas. De igual manera, las autoridades destacaron que falta software por instalar y aunque se menciona el uso de la computadora en los programas de estudios, no aparece declarado su uso como una prioridad.

Todo lo expresado anteriormente por los entrevistados fue secundado en conversaciones con docentes de vasta experiencia. Asimismo, hemos constatado desde nuestro contexto que existe un limitado acceso a los laboratorios, lo que responde más a un problema organizativo que a una situación de real disponibilidad.

Como lo señala González (1998), algunos docentes estamos incursionando en jugar un rol más activo, basado en una docencia de calidad, actuando como facilitador del grupo clase. Es decir, como orientadores, estrategas, expertos no solo en lo científico sino también, en lo metodológico.

En sus propias palabras, en relación a la importancia del uso de medios tecnológicos en el desarrollo de las asignaturas, las autoridades consideran lo que puede apreciar en la siguiente figura:

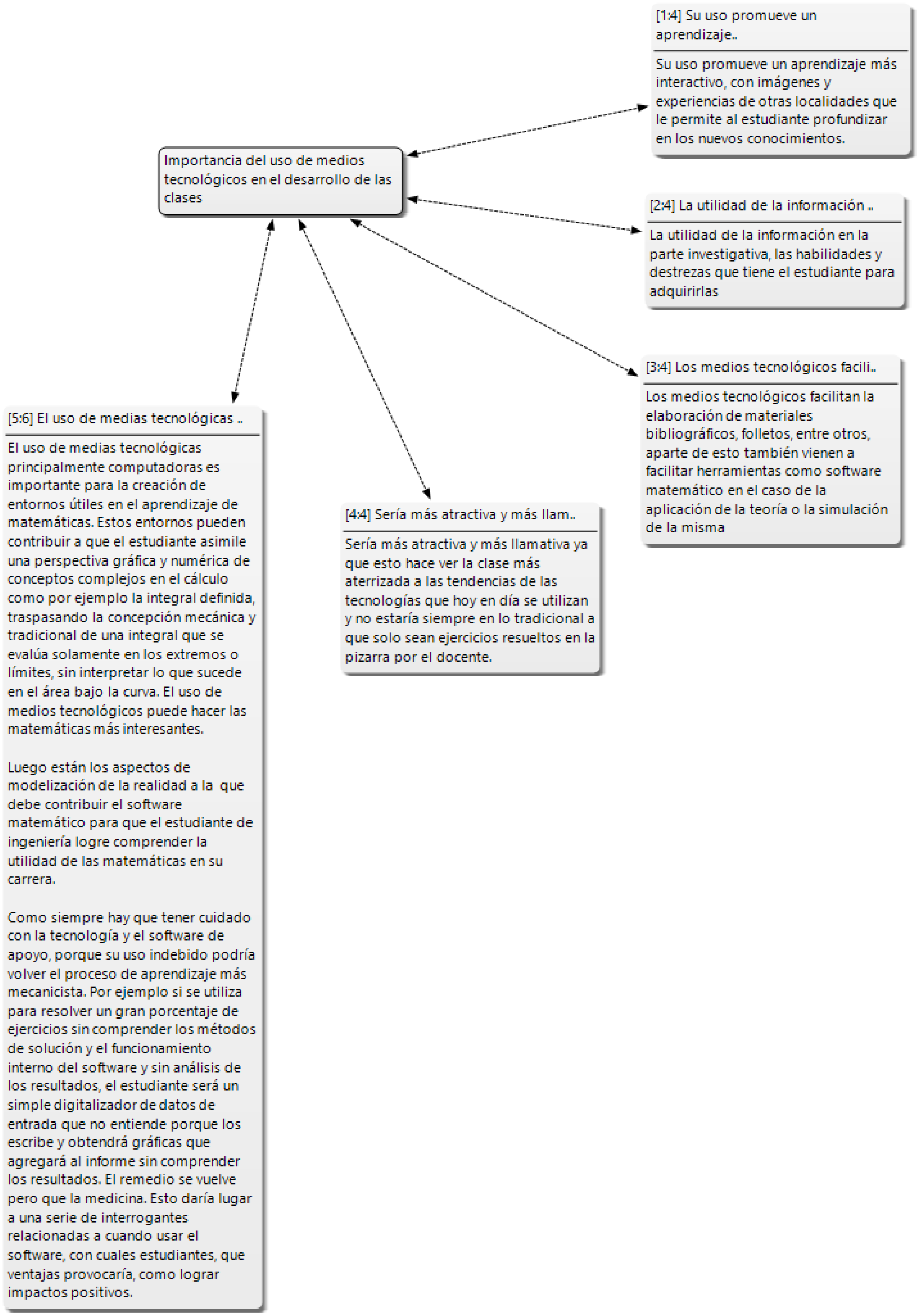


Figura 10. Importancia del uso de medios tecnológicos en el desarrollo de las clases

Ahora bien, las autoridades valoraron la preparación en informática de los docentes que facilitan las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II, con miras a la utilización del software matemático para el ejercicio de su labor educativa.

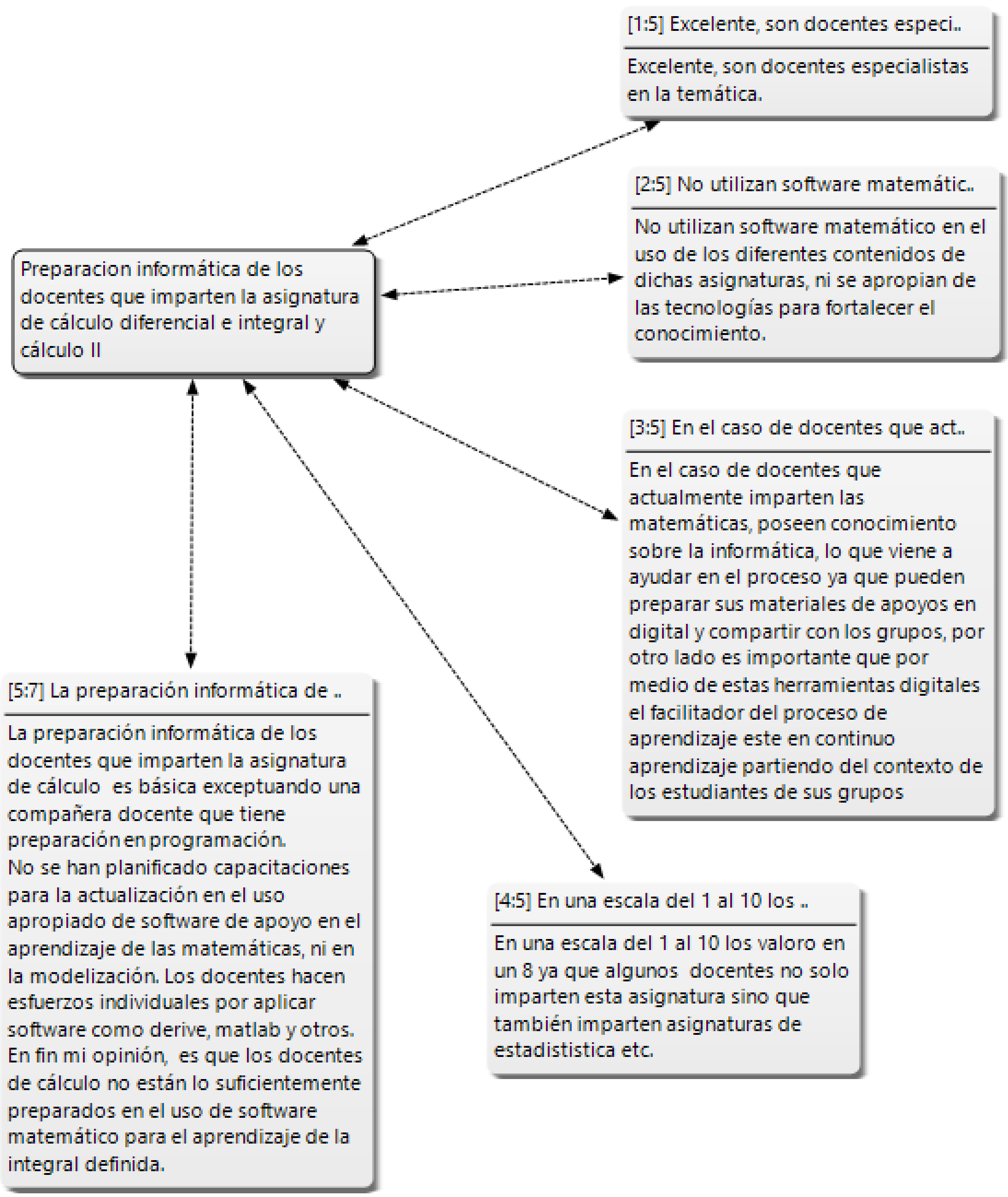


Figura 11. Preparación informática de los docentes que imparten las asignaturas

Asimismo, las autoridades expresaron que las causas por las que los docentes no utilizan los recursos informáticos en sus clases, es debido a:

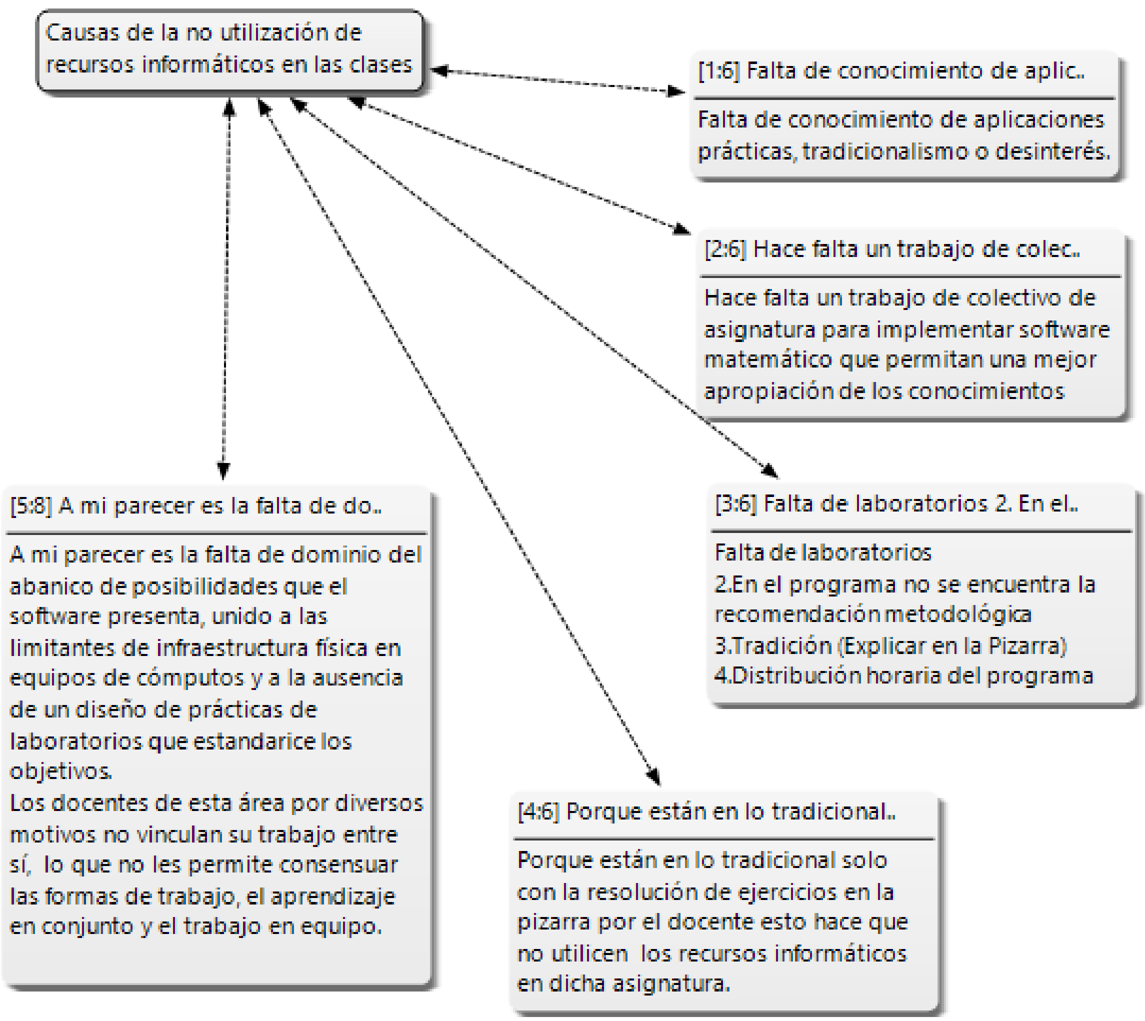


Figura 12. Causas de la no utilización de recursos informáticos en las clases

De igual manera expresaron, las principales necesidades de los docentes de Cálculo para lograr un uso efectivo de los recursos informáticos en el proceso de aprendizaje.

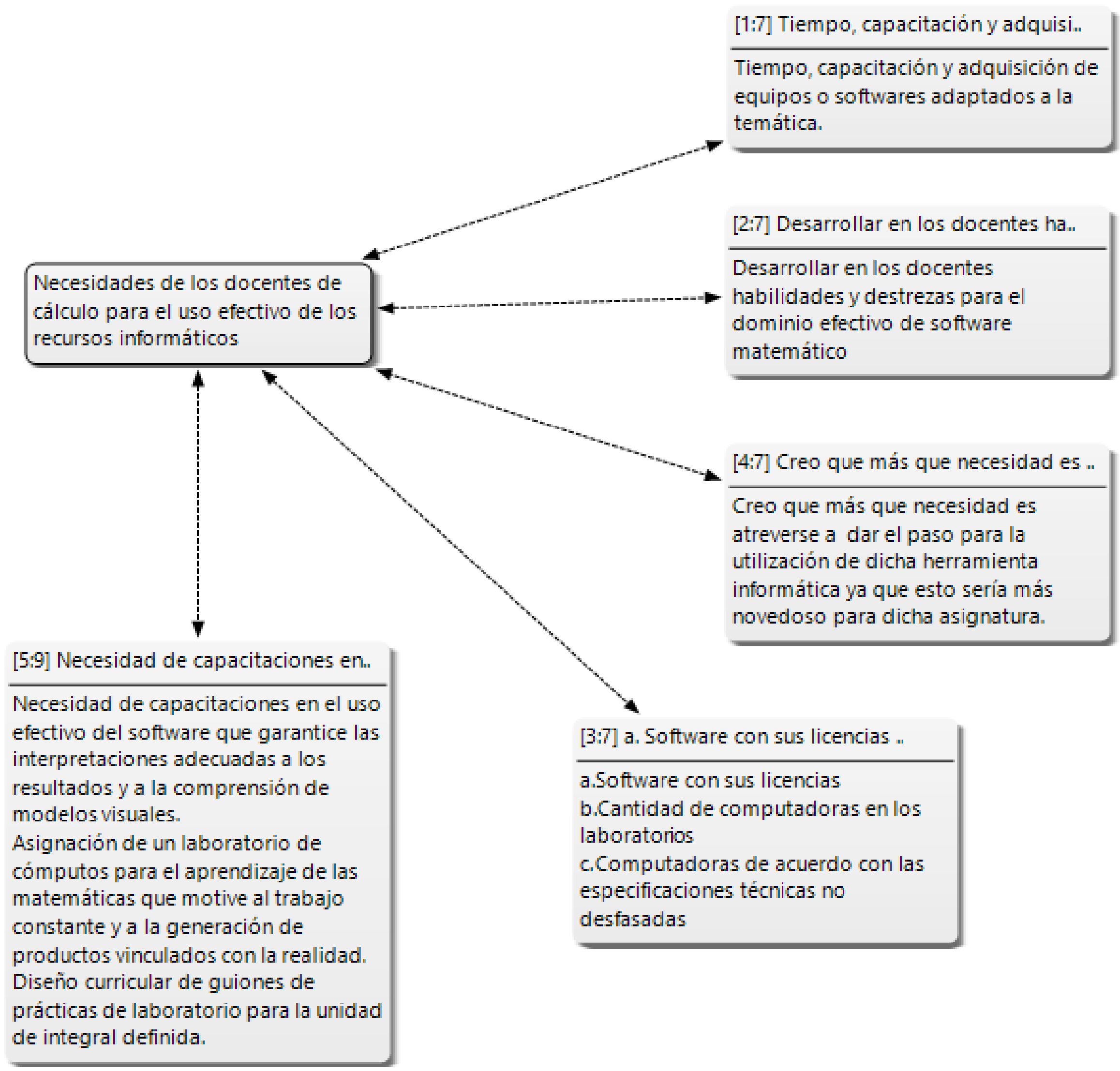


Figura 13. Necesidades de los docentes para el uso efectivo de los recursos informáticos

Finalmente mencionaron algunas recomendaciones a los docentes de la asignatura de Cálculo diferencial e integral (Cálculo II) para la conducción del proceso enseñanza-aprendizaje, utilizando un entorno computacional

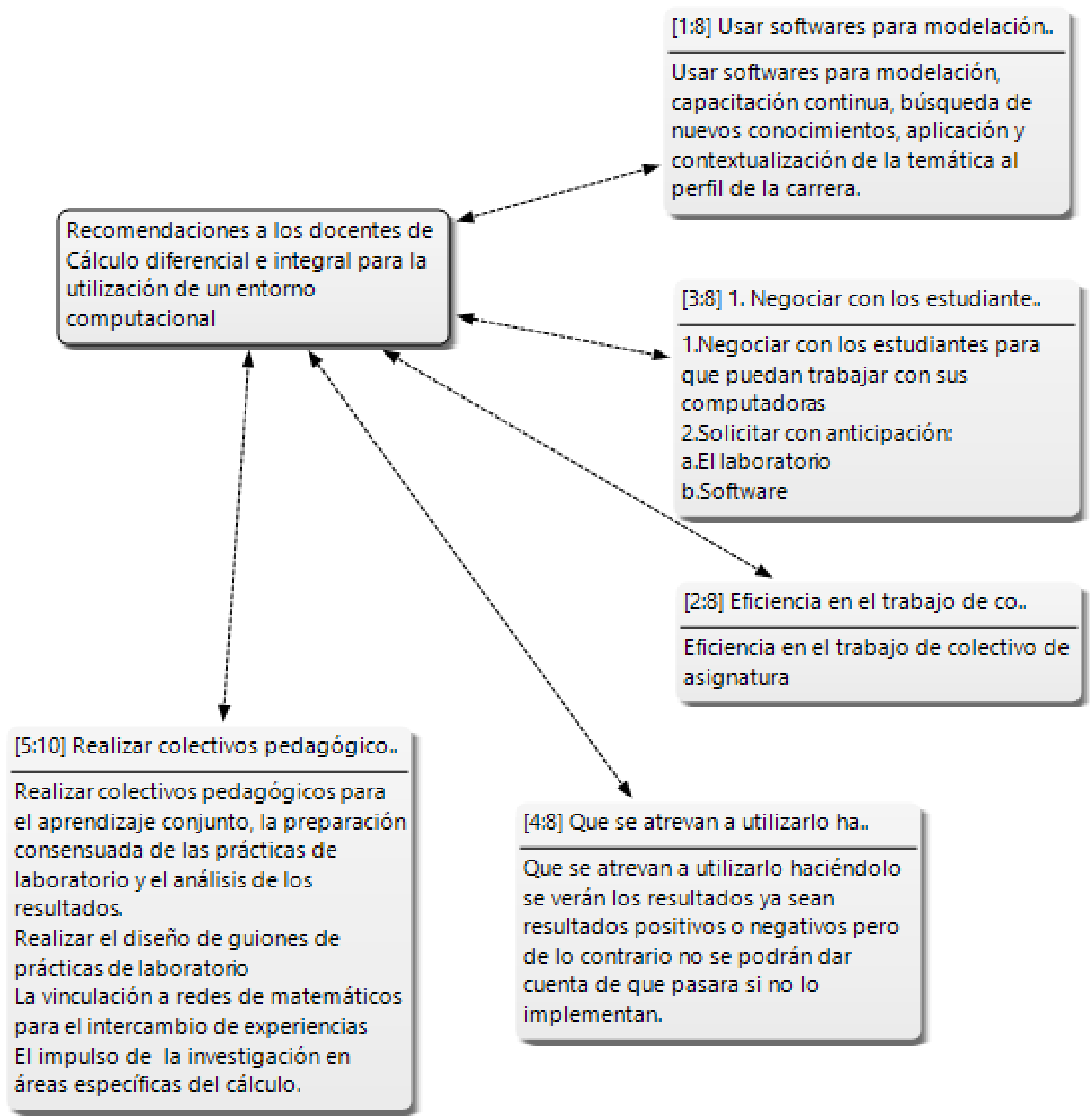


Figura 14. Recomendaciones para la utilización de un entorno computacional.

Sobre la base de las consideraciones anteriores, de las entrevistas y encuestas aplicadas a los docentes y directivos con el propósito de diagnosticar la situación sobre el uso de la computadora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática se obtienen los siguientes resultados:

1. En las actividades docentes controladas se evidencia:
    - El uso de la computadora en la clase no es sistemático

    - La orientación de la actividad no se hace con toda la precisión requerida lo que propicia que no se exploten las posibilidades del software educativo.

2. La preparación informática de los profesores presenta:

    - Potencialidades en cuanto al dominio de los contenidos básicos necesarios para manipular la computadora.

    - Debilidades en cuanto al dominio de los asistentes matemáticos y software educativos.

3. Las principales causas por las que los profesores no utilizan la informática están dadas por debilidades en:

    - La orientación metodológica sobre el uso de la computadora como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje en general y de la Matemática en particular.

    - La orientación explícita del empleo de los softwares educativos y asistentes matemáticos.

    - La preparación de los profesores para utilizar la computadora en la resolución de los problemas.

4. Las principales necesidades del departamento y de los profesores con respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadoras están encaminadas hacia:

- La capacitación de los profesores en el uso del software educativo, asistentes matemáticos y sistemas de aplicación, con el objetivo de demostrar las posibilidades que ofrecen los mismos para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática y la resolución de problemas.

- La preparación metodológica de los profesores encaminada a insertar de una forma coherente y sistémica la computadora en sus clases.

Y bien, podemos decir que, se evidencia la existencia de fortalezas en la preparación de los docentes para la incorporación delos software al proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, en general y del Cálculo en particular como son:

- Dominio de las habilidades informáticas elementales

- Dominio de los contenidos de la Matemática

- Deseos de aprender

- Motivación para utilizarlo.

Lo antes expuesto, nos permite aseverar que, en la medida que el docente reconozca la utilidad que tiene el uso de la computadora y aumente sus habilidades informáticas, contribuirá a la mejora continua del proceso de enseñanza-aprendizaje de la integral definida. De modo que, coincidimos con Hitt (2003) en que el uso de tecnologías favorece y facilita las diferentes representaciones de los objetos matemáticos, que son necesarias para construir un conocimiento matemático.

Asimismo, podemos afirmar que, si el docente asume una actitud positiva hacia la herramienta computacional, valorando las virtudes y potencialidades de dicha herramienta, además generando estrategias que lleven a su inclusión en la práctica, tendremos estudiantes creativos e innovadores. Estos podrán dar respuesta y/o solución a las situaciones de aprendizaje en las que se vean involucrados.

Si bien, en los últimos años, las TIC han pasado a formar parte de nuestra vida cotidiana y constituyen una herramienta facilitadora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática, su uso en el aula requiere una metodología adecuada. De manera que, se promueva un entorno de aprendizaje colaborativo, cuyo énfasis se encuentre centrado en el aprendizaje más que en la enseñanza, donde los profesores actúen en un rol de guías u orientadores más que de transmisores de conocimiento y permitan así que los estudiantes adquieran mayor participación y protagonismo en el proceso educativo.

9.3 Actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y el uso de la computadora

La escala de actitudes aplicada es nuestro estudio fue adaptada de la usada por Depool (2004) basado en Galbraith y Haines (1998). Este instrumento constó de 34 ítems. El procesamiento de los datos se realizó con el software SPSS. 22. La confiabilidad del instrumento fue de 0.81 de acuerdo al coeficiente numérico Alfa de Cronbach, lo cual nos permite afirmar que existe una amplia consistencia de las respuestas de los estudiantes a la escala utilizada.

Para codificar las respuestas se asignaron códigos a cada ítem, tomando en cuenta si el enunciado de este último se presentaba en forma positiva (+) o negativa (-), de acuerdo a la siguiente tabla.

Tabla 4 Codificación de respuestas de ítems

Tipo de ítem	Completamente de acuerdo	De acuerdo	En desacuerdo	Completamente en desacuerdo
Positivo	4	3	2	1
Negativo	1	2	3	4

Este estudio se llevó a cabo con 133 estudiantes de las distintas carreras de ingeniería que se imparten en la Facultad Regional Multidisciplinaria de Estelí y que cursan la asignatura de Cálculo. El mismo tuvo como objetivo general, analizar las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de la computadora. Se les aplicó una escala de actitudes tipo Likert.

Para el momento de la aplicación de la escala, los estudiantes se encontraban cursando la asignatura con sus respectivos profesores, de manera tradicional, es decir sin hacer uso de medios más que de marcadores y pizarra.

Pasamos a analizar e interpretar los resultados de acuerdo a los objetivos propuestos.

Análisis de los promedios de la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de la computadora con relación al género y carrera.

El valor actitudinal de los estudiantes de manera global es positivo, pero podemos considerarlo bajo. La dispersión de los valores actitudinales no son similares en cada grupo; además entre el grupo masculino se observa mayor dispersión en las respuestas que el grupo femenino; esto evidencia heterogeneidad en los valores actitudinales tanto en las mujeres como en los hombres. Al comparar los promedios de los valores actitudinales y las dispersiones en cuanto a género, se observa que existe gran homogeneidad, a excepción del grupo de estudiantes de la carrera de ingeniería industrial. (Ver tabla 5)

Tabla 5. Valor actitudinal de estudiantes de manera global

Género Carrera	Femenino		Masculino	
	Media	D.E	Media	D.E.
Ing. Ambiental	81.11	10.99	77.33	15.47
Ing. En Energías Renovables	83.00	6.66	82.95	10.83
Ing. Ciencias de la computación	85.50	12.71	83.38	7.78
Ing. Industrial	85.00	8.79	75.17	18.26
Ing. Agroindustrial	82.42	8.69	84.09	11.59

El valor actitudinal de los estudiantes de manera global en las dimensiones (Confianza y seguridad, motivación, compromiso con el trabajo matemático) también es positivo, pero al igual que antes lo consideramos bajo. La dispersión de los valores actitudinales son diferentes de acuerdo a la carrera; no obstante entre los hombres se observa mayor dispersión en las respuestas; esto evidencia gran heterogeneidad en los valores actitudinales de los hombres y mujeres. Al comparar los promedios de los valores actitudinales y las dispersiones en cuanto a género por carrera, se observa que existe gran homogeneidad, a excepción de la carrera de ingeniería industrial. (Ver tabla 6).

Tabla 6. Valor actitudinal en dimensiones confianza y seguridad, motivación y compromiso

Género	Femenino		Masculino	
Carrera	Media	D.E	Media	D.E.
Ing. Ambiental	67.00	10.52	64.56	13.13
Ing. En Energías Renovables	69.43	6.50	70.73	9.21
Ing. Ciencias de la computación	74.00	10.49	70.10	6.92
Ing. Industrial	71.56	6.93	63.33	16.09
Ing. Agroindustrial	68.33	8.66	69.73	10.59

En cuanto al uso de la computadora en actividades matemáticas la actitud tiende a ser negativa, tal vez por el desconocimiento que tienen los estudiantes de los potenciales de este recurso. Tanto los valores actitudinales como la dispersión son similares en cada grupo; esto evidencia gran homogeneidad en los grupos tanto por género como por carrera. (ver tabla 7).

Tabla 7.Uso de la computadora

Género	Femenino		Masculino	
Carrera	Media	D.E	Media	D.E.
Ing. Ambiental	14.11	2.76	12.78	2.68
Ing. En Energías Renovables	13.57	5.00	12.23	2.94
Ing. Ciencias de la computación	11.50	3.11	13.28	2.58
Ing. Industrial	13.44	3.31	11.83	3.38
Ing. Agroindustrial	14.08	2.75	14.36	4.01

Estos resultados nos hacen pensar que, contrariamente de lo que se podría pensar sobre la actitud de los estudiantes de las carreras de ingeniería, existe una baja actitud hacia las Matemáticas y el uso de las computadoras.

Análisis de la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de la computadora en cuanto al promedio de respuesta por ítem.

Dimensión afectiva. Confianza y seguridad en el trabajo matemático.

Analizando los promedios en esta dimensión se nota que en la mayoría de los ítems la valoración en torno a la confianza y seguridad hacia el trabajo matemático es alta (5 de 8 ítems) (ver tabla 8).

Tabla 8 Dimensión Afectiva. Confianza y seguridad en el trabajo matemático

Pregunta	Femenino	Masculino	Ing. Ambiental	Ing. en Energías Renovables	Ing. Ciencias Computación	Ing Industrial	Ing. Agroindustrial
Considero que es importante en matemática justificar cada paso al resolver ejercicios y problemas	3.16	3.05	2.39	3.03	3.39	3.33	2.96
Los exámenes de matemática me producen miedo	2.6	2.12	2.22	2.59	2.42	2.27	1.87
Obtener buenas calificaciones en matemática es importante para mí	3.54	3.28	3.11	3.38	3.27	3.53	3.52
Cuando estoy en clase de matemática me quedo como en la luna y no entiendo nada	2.46	2.06	2.67	2.24	2.15	1.93	2.26
Las matemáticas requieren practicar continuamente	3.58	3.24	3.06	3.45	3.27	3.47	3.52
Las matemáticas me dan seguridad y al mismo tiempo me estimula	2.86	2.7	2.78	2.93	2.36	2.97	2.83

Pregunta	Femenino	Masculino	Ing. Ambiental	Ing. en Energías Renovables	Ing. Ciencias Computación	Ing Industrial	Ing. Agroindustrial
Las matemáticas ayuda a las personas a pensar lógicamente	2.94	3.1	2.22	3.24	3.15	3.13	3.13
La imaginación y la intuición son útiles en matemática	2.48	2.75	2.17	3	2.45	2.73	2.74

En orden decreciente se observa que los estudiantes le asignan mayor valoración a: Obtener buenas calificaciones en Matemáticas, es importante para ellos; las Matemáticas requieren practicar continuamente; justificar cada paso en Matemáticas es importante y; las Matemáticas ayudan a las personas a pensar lógicamente.

Consideran con una valoración menor que: la imaginación y la intuición son útiles en Matemáticas; las Matemáticas les dan seguridad y al mismo tiempo los estimula y; cuando están en clases de Matemáticas se quedan como "en la luna" y no entienden.

La valoración más baja se la asignan a que: los exámenes de Matemáticas les producen miedo. También se destaca que los estudiantes de las carreras de Ingeniería Industrial y Agroindustrial le asignan mayor valoración en cada ítem que los otros estudiantes; esta diferencia no es tan significativa en cuanto a género.

De lo anterior se puede concluir que la seguridad y confianza en el trabajo matemático influye significativamente en la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas; que el obtener buenas calificaciones, practicar continuamente y justificar cada paso influye positivamente en la actitud; la imaginación y la intuición en Matemáticas y el hecho de sentirse estimulados por Matemáticas afectan en menor grado a la actitud.

Es de hacer notar que los exámenes de Matemáticas al producirles miedo puede disminuir la confianza y seguridad en el trabajo matemático, generando en el estudiante una actitud que se aproxima a lo negativo. Finalmente el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas.

A continuación podemos apreciar gráficamente el perfil de los estudiantes:

1. Estudiantes que respondieron positivamente
2. Estudiantes que respondieron negativamente

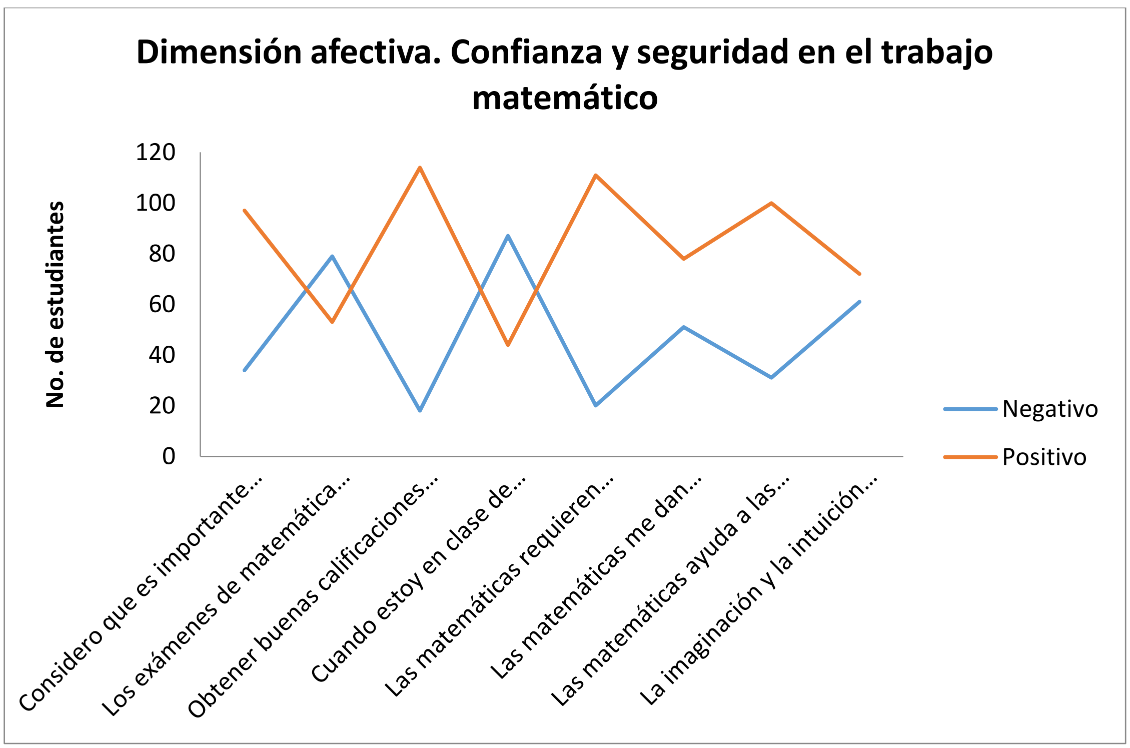


Gráfico 1. Dimensión afectiva. Confianza y seguridad en el trabajo matemático

Dimensión afectiva. Motivación hacia el trabajo matemático.

Analizando los promedios a las respuestas notamos que la valoración es baja en los ítems que definen esta dimensión. En orden decreciente se observa que los estudiantes le asignan mayor valoración a que: prefieren no entrar a clases de Matemáticas y, les agrada resolver problemas matemáticos, así como a que si en la universidad se organiza un club de matemáticas le gustaría participar. La valoración es menor en cuanto a que: las clases de Matemáticas les resultan largas y tediosas. Los valores que reflejan una tendencia hacia una baja motivación se relacionan con: no ser voluntarios para pasar a la pizarra, sentir la necesidad de conversar sobre Matemáticas y que en clases de Matemáticas no presta atención (ver tabla 9).

Tabla 9. Dominio Afectivo. Motivación hacia el trabajo matemático

Pregunta	Femeni-no	Masculi-no	Ing. Ambien-tal	Ing. en Energías Renova-bles	Ing. Ciencias Compu-tación	Ing Indus-trial	Ing. Agroin-dustrial
No sé por qué, pero cuando estoy en la clase de matemática no presto atención	2.1	2.04	2.5	1.97	2.06	1.77	2.22
La clase de matemática me resulta larga y tediosa	2.5	2.27	2.67	2.21	2.24	2.3	2.52
Si en la universidad se organiza un club de matemáticas me gustaría participar	2.56	2.43	2.06	2.69	2.48	2.67	2.3
Prefiero no entrar a las clases de matemática	1.56	1.89	1.78	1.66	2.03	1.6	1.74

Pregunta	Femenino	Masculino	Ing. Ambiental	Ing. en Energías Renovables	Ing. Ciencias Computación	Ing Industrial	Ing. Agroindustrial
Estoy a gusto en la clase de matemática	2.52	2.65	2.44	2.59	2.7	2.53	2.7
Me agrada resolver problemas matemáticos	2.56	2.59	2.44	2.69	2.64	2.7	2.3
Cuando en clase de matemáticas se solicita un voluntario para pasar a la pizarra no me ofrezco	2.18	2.24	1.72	2.28	2.64	2.13	2.04
Generalmente siento la necesidad de conversar de matemáticas	2.1	2.11	2.39	2.1	2.21	1.9	2

También se destaca que generalmente son los estudiantes de las carreras de Ing. Ambiental e Ing. en Energías Renovables los que asignan mayor valoración en cada ítem; esta diferencia, al igual que la dimensión anterior, no es tan significativa en cuanto a género.

De lo anterior se puede concluir que, a pesar de los bajos valores observados, la motivación hacia el trabajo matemático determina una actitud positiva, aunque baja, de los estudiantes hacia las Matemáticas. Detallando las respuestas nos encontramos que, aunque prefieren entrar a clases de Matemáticas, les gustaría participar en un club de matemática y resolver problemas, no les motiva pasar a la pizarra y conversar sobre matemática. Esto nos lleva a pensar que posiblemente las clases habituales de Matemáticas no motivan al estudiante a participar en ellas; no obstante en un ambiente de un club o tal vez con el uso de tecnología sí se sentirían motivados y como consecuencia pudiera contribuir a generar una actitud positiva en ellos. Finalmente el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas.

A continuación podemos apreciar gráficamente el perfil de los estudiantes:

1. Estudiantes que respondieron positivamente
2. Estudiantes que respondieron negativamente

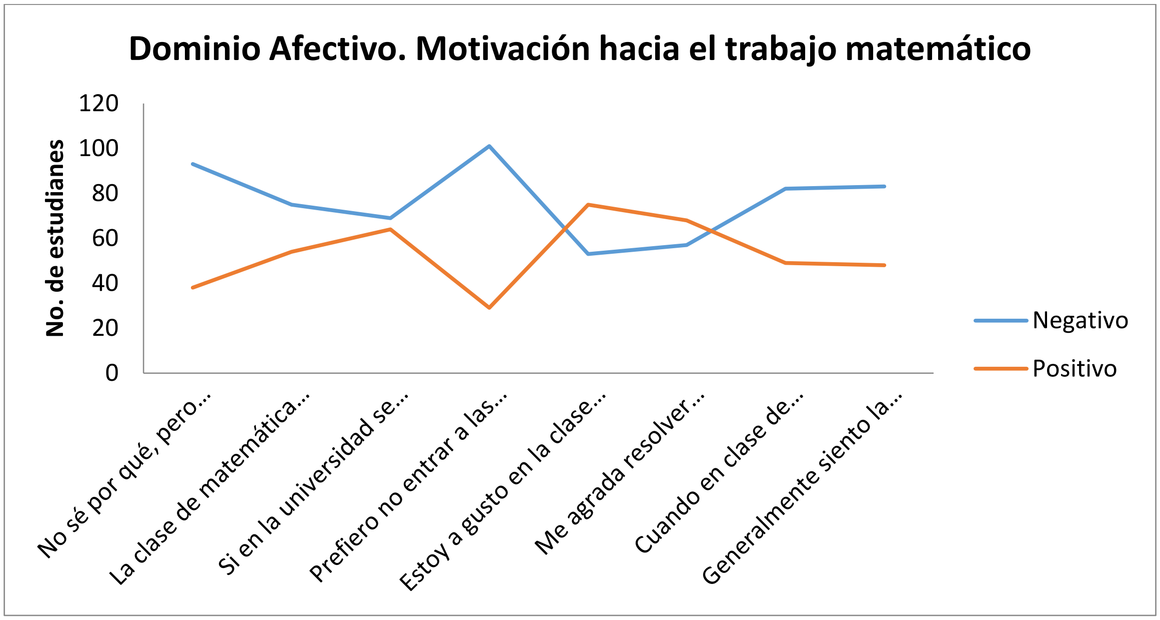


Gráfico 2. Dominio afectivo. Motivación hacia el trabajo matemático

Dimensión Cognitiva. Compromiso con el trabajo matemático.

Analizando los promedios de esta dimensión se nota que la valoración en torno al compromiso con el trabajo matemático es alta (9 de 12 ítems) (ver Tabla 10).

Tabla 10. Dimensión cognitiva. Compromiso con el trabajo matemático

Pregunta	Femeni-no	Masculino	Ing. Amb	Ing. E.R	Ing. CCom	Ing. Ind	Ing. Agroin-dustrial
El vocabulario propio de la matemática hace más difícil su aprendizaje	2.52	2.43	2.22	2.34	2.76	2.4	2.48
Las matemáticas la necesitan solo los ingenieros	1.82	1.84	2.39	1.9	1.88	1.7	1.43
En matemática no me queda más que aprender todo de memoria	2	2.05	1.61	2.07	2.24	1.97	2.09
Conocer cómo resolver un problema es tan importantes como hallar su solución	3.2	3.04	2.44	3.07	3.33	3.03	3.39
El conocimiento de la teoría es indispensable para resolver los problemas	3.16	2.76	2.72	2.9	2.79	3.03	3.09
Las matemáticas tienen la culpa de que algunos estudiantes no hayan seguido estudiando	2.54	2.53	2.61	2.52	2.64	2.4	2.52
A la hora de hacer ejercicios individuales de matemáticas me enredo	2.56	2.25	2.39	2.38	2.55	2.27	2.22
Me gustaría que las asignaciones fueran solamente de matemáticas	1.6	1.71	1.78	1.66	1.67	1.63	1.65
No veo la necesidad de consultar textos de matemáticas fuera de los apuntes	2.14	2.19	2.39	2.31	2.12	1.97	2.17

Pregunta	Femeni-no	Masculino	Ing. Amb	Ing. E.R	Ing. CCom	Ing. Ind	Ing. Agroin-dustrial
Yo espero trabajar en un área que requiera matemáticas	1.78	2.16	1.83	2.1	1.97	2.07	2.04
Además de los ejercicios de matemáticas que me proponen resuelvo otros más	1.7	2.23	1.94	2.14	1.94	2	2.13
La matemática tiene usos prácticos en la vida diaria	3.14	2.94	2.83	3	3.21	2.83	3.13

De lo anterior se puede concluir que el compromiso con las actividades matemáticas determina una actitud positiva de los estudiantes hacia las Matemáticas. Sin embargo nos encontramos con algunas contradicciones. Por ejemplo, al analizar las respuestas nos encontramos que aunque consideran que el conocimiento de la teoría es indispensable para resolver los problemas, el vocabulario propio de las Matemáticas hace más difícil su aprendizaje.

Además, consideran que conocer cómo resolver un problema es tan importante como hallar su solución, pero a la hora de resolverlos se enredan. Esto nos podría indicar que quizás cambiando la estrategia de enfrentar al estudiante con el conocimiento, se podría aumentar el compromiso que involucra la dedicación disciplinada del estudio de las Matemáticas.

De igual manera, consideran que las Matemáticas tienen usos prácticos en la vida diaria, pero señalan que éstas tienen la culpa de que muchos hayan dejado de estudiar. Esto nos refleja que, se considera a la Matemática útil, pero existen motivos (probablemente la forma habitual de impartirla) para que los estudiantes abandonen sus estudios. Es meritorio analizar que, si al utilizar mecanismos que involucren nuevas tecnologías, como las computadoras, de gran uso en actualidad, podrían los estudiantes comprometerse con el trabajo matemático.

Finalmente, observamos que en el género no existen diferencias significativas en la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas.

A continuación podemos apreciar gráficamente el perfil de los estudiantes:

1. Estudiantes que respondieron positivamente
2. Estudiantes que respondieron negativamente

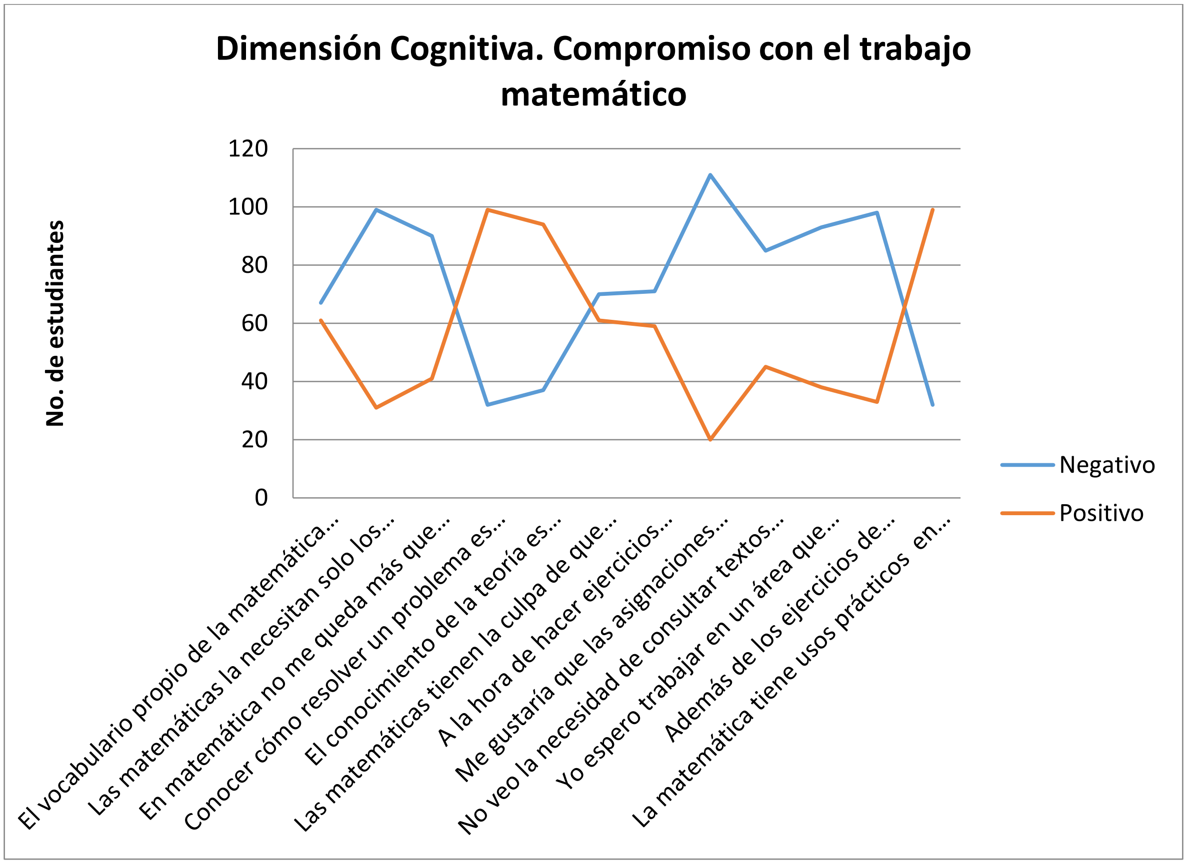


Gráfico 3. Dimensión cognitiva. Compromiso con el trabajo matemático

Dimensión conductual. Uso de ordenadores en actividades Matemáticas.

Analizando los promedios de las respuestas en esta dimensión (ver tabla 11) se observa que la valoración hacia el uso de ordenadores en actividades matemáticas es alta solamente para dos de los seis ítems.

Tabla 11. Dimensión conductual. Uso de ordenadores en actividades matemáticas

Pregunta	Femenino	Masculino	Ing. Ambien-tal	Ing. en Ener-gías Renovables	Ing. Ciencias Compu-tación	Ing Indus-trial	Ing. Agroin-dustrial
El manejar una computadora me produce miedo	1.94	1.76	2.06	1.69	1.61	1.8	2.17
Me gustaría que en las clases de matemáticas se usara una computadora	2.62	2.73	2.61	2.52	2.91	2.63	2.74
Es necesario usar una computadora para realizar cálculos matemáticos	2.44	2.27	2.44	2.17	2.58	2.07	2.43
Para trazar gráficas de funciones no es necesario una computadora	2.36	2.01	2.11	2.14	1.91	2.33	2.26
Los profesores que dan su clase sin una computadora son obsoletos	1.86	1.71	1.83	1.59	1.64	1.77	2.13
En las clases de matemáticas se debería explicar el uso de la computadora	2.36	2.4	2.39	2.45	2.42	2.2	2.48

En orden decreciente se observa que los estudiantes le asignan mayor valoración a que: manejar una computadora no les produce miedo y, que los profesores que dan su clase sin una computadora son obsoletos. Los valores más bajos se tienen en cuanto a que: para trazar una gráfica o para realizar cálculos matemáticos no es necesario usar una computadora.

Así, detallando las respuestas, podemos observar que aunque manejar una computadora no les produce miedo y que están de acuerdo con su uso en clase de Matemáticas, no la consideran una herramienta útil para graficar y realizar cálculos matemáticos.

A continuación podemos apreciar gráficamente el perfil de los estudiantes:

1. Estudiantes que respondieron positivamente
2. Estudiantes que respondieron negativamente

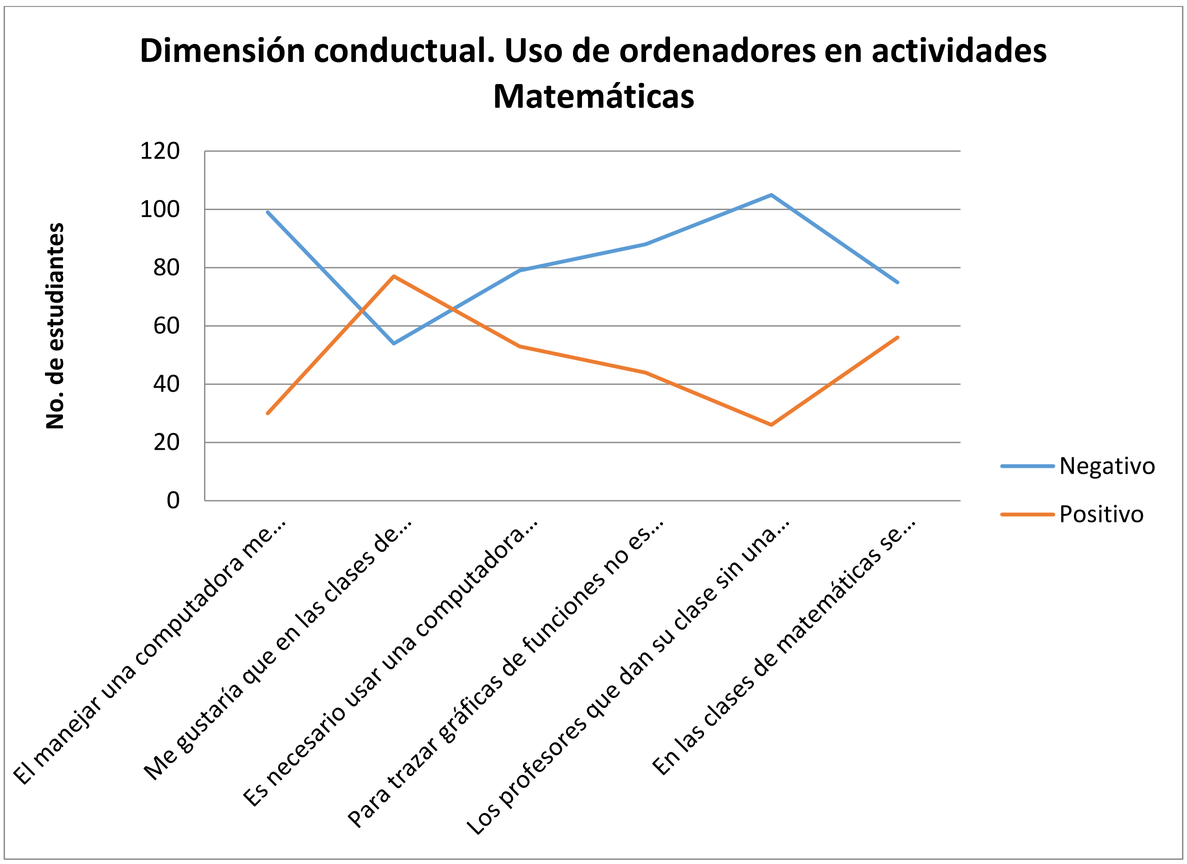


Gráfico 4 Dimensión conductual. Uso de ordenadores en actividades matemáticas.

Generalizando, podemos inferir:

- Se observa que existe una actitud global positiva hacia las Matemáticas y el uso de los ordenadores, aunque no demasiado alta. El género no se considera determinante dada la homogeneidad en torno a los promedios de los valores actitudinales y sus respectivas dispersiones.

- El valor actitudinal de los estudiantes de manera global en las dimensiones relativas a las Matemáticas, podemos seguir considerándolo como positivo. Sin embargo, en cuanto al uso de la computadora en actividades matemáticas la actitud tiende a ser negativa, tal vez por el desconocimiento que tienen los estudiantes de este recurso.

- En el estudio de los promedios de respuesta por ítem se observó que el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de la computadora; no obstante, pensamos que sería conveniente, investigar un poco más sobre la influencia de la condición de estudio, en la actitud.

- La confianza y seguridad en el trabajo matemático, la motivación hacia el trabajo matemático y el compromiso con el trabajo matemático, se pueden considerar dimensiones que definen la actitud de los estudiantes.

- En las condiciones en las que se desarrolló la experiencia, la confianza y seguridad del estudiante en el trabajo matemático resultó altamente positivo; la motivación hacia el trabajo matemático fue positiva, pero baja; el compromiso hacia el trabajo matemático también resultó altamente positiva. Los estudiantes manifiestan no tener una actitud positiva hacia el uso del ordenador en actividades matemáticas.

Atendiendo a los resultados obtenidos en este estudio se propone estructurar nuevamente la experiencia de tal manera que se tomen dos grupos (control y experimental), con los cuales se trabaje, uno con un método tradicional y el otro utilizando computadoras, aplicando el compendio elaborado en este estudio. Al finalizar el desarrollo de los contenidos se les aplicaría una prueba de actitud.

9.4 Deficiencia metodológica que presentan los libros de textos recomendados en la asignatura de Cálculo para el tratamiento de la integral definida

Para dar salida al objetivo 3 hemos realizado una breve descripción del contenido matemático de la integral definida en seis libros de textos propuestos en el programa de asignatura de Cálculo II y Cálculo Diferencial e Integral.

Edward C. y Penney D. Cálculo con Geometría Analítica.

Capítulo 5. La integral. Inicia con una breve mención de los aportes de Arquímedes al desarrollo del Cálculo y una introducción donde señala que “La definición de la integral es motivada por el problema de definir y calcular el área de la región que se encuentra entre la gráfica de una función de valores positivos f y el eje x en un intervalo cerrado $[a, b]$”. Aborda antiderivadas o primitivas y problemas con condiciones iniciales, algunas fórmulas de integrales para luego llegar al cálculo de áreas elementales. En este proceso, plantea ejemplos de funciones polinómicas y funciones trigonométricas sencillas. También enfoca la antiderivación aplicando elementos de física como es el movimiento rectilíneo horizontal y vertical. Además propone problemas donde se evalúan integrales indefinidas, problemas con condiciones iniciales y problemas relacionados con el movimiento vertical cerca de la superficie de la Tierra.

El concepto de integral definida es abordado mediante la utilización de rectángulos inscritos y circunscritos. Es así que, el área bajo una curva lo ilustra con varios ejemplos, resuelve ejercicios, de forma numérica y gráfica. Al final de cada tema plantea problemas con diferentes grados de dificultad, así como un proyecto que requiere el uso de una calculadora programable o una computadora.

Visualizamos que, en este libro no se calcula, por medio de la integral definida, áreas de figuras conocidas como son el rectángulo, triángulo, trapecio y círculo, ni hace uso de la tecnología en el desarrollo de los contenidos.

Leithold L. El Cálculo con Geometría Analítica

Capítulo 6. La integral definida. Se introduce la temática con la notación sigma, donde aparecen las propiedades y fórmulas, planteando como ejemplos la demostración de dos de estas fórmulas sin usar inducción matemática, así como cálculos de sumatorias aplicando las propiedades. Luego plantea ejercicios para su solución.

A continuación pasa al estudio del área de regiones limitadas definiendo regiones poligonales, plantea ejemplos y resuelve en forma numérica. No calcula, por medio de la integral definida, áreas de figuras conocidas como son el rectángulo, triángulo, trapecio y círculo. Propone la resolución de ejercicios, todos ellos de funciones polinómicas. No hace uso de las nuevas tecnologías.

Zill. D.G. Cálculo con Geometría Analítica

Capítulo 5. La integral

Realiza una brevísima introducción histórica, solamente para señalar el origen de la palabra Cálculo Integral. Comienza con el tema de antiderivadas, integrales indefinidas y la sustitución con u, luego pasa al estudio de la notación sigma, continúa con el área bajo una gráfica para luego tratar la integral definida.

En el subtema de área bajo una curva utiliza aproximaciones con rectángulos, hace un resumen en cinco pasos sobre el procedimiento posible para determinar el área, para llegar la definición de área bajo la curva, plantea varios ejemplos del cálculo de áreas y los resuelve sin justificación.

Para formular el concepto de integral definida plantea cinco pasos que concluye con las sumas de Riemann, aclara cuando la integral es equivalentes al “área bajo una gráfica”.

Resuelve varios ejemplos calculando la suma de Riemann y termina proponiendo la solución de ejercicios.

No se visualiza el uso de nuevas tecnologías, aunque al final del subtema hace referencia al programa BASIC para la aproximación de la integral $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n}$, apareciendo la solución del mismo al final del libro, como un anexo.

Ayres, Jr. F. Cálculo Diferencial e Integral

Capítulo 33. Integral definida.

En los capítulos anteriores al de Integral definida se aborda el trazado de curvas, fórmulas fundamentales de integración, los diferentes métodos de integración: sustitución, integración por partes, descomposición en fracciones parciales, integración de funciones. También se estudian las aplicaciones de las integrales indefinidas, para finalmente tratar la integral definida.

Es necesario mencionar que, en este libro solamente se dan definiciones, conceptos, teoremas, propiedades, entre otros, sin ningún tratamiento metodológico. Luego aparecen una serie de problemas resueltos y propuestos. Todo esto sin ninguna explicación y, en algunos casos lo hace de manera muy breve. No se visualizan gráficos, no se utiliza la integral definida para el cálculo de áreas conocidas como rectángulos, triángulos, entre otros.

Larson, H. E. Cálculo y Geometría Analítica.

Capítulo 4. Integración. Inicia el capítulo tratando las antiderivadas o primitivas, mediante su definición, notación y reglas básicas, para seguidamente resolver ejemplos de aplicación de reglas básicas. También trata las condiciones iniciales y soluciones particulares a través de la ejemplificación. Asimismo, emplea la notación sigma para escribir y calcular suma, entender el concepto de área, aproximar el área de una región plana y determinar el área de una región plana usando límites.

Para hallar las áreas de regiones diferentes a la de los polígonos hace referencia a la historia y utiliza el método de exhaución. Además enfoca las sumas superior e inferior como una generalización de la aproximación del área de una región plana, observando que el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas. Finalmente, aborda las sumas de Riemann y halla la integral definida utilizando límites. Continúa calculando áreas de figuras geométricas comunes y plantea las propiedades de las integrales definidas, sin hacer demostraciones. Para finalizar propone la solución de ejercicios relacionados con los temas anteriormente abordados.

No se visualiza el uso de algún software matemático.

Swokowski, E. W. Cálculo con Geometría Analítica

Capítulo 5. La integral definida.

Inicia con la determinación del área utilizando la notación de sumatoria, presenta ejemplos de cálculo de la misma y teoremas relacionados. Así, trata la definición de integral definida relacionándolas con las áreas de ciertas regiones en el plano, enunciando (no se hacen gráficas) las áreas de polígonos regulares. Para el cálculo de áreas de regiones más complicadas utiliza el proceso de límite y aplica los métodos del cálculo.

Seguidamente ilustra, utilizando polígonos inscritos y circunscritos la región bajo la gráfica de una función entre a y b, la define utilizando el límite de la sumatoria y luego pasa a ejemplificar.

Continúa con la integral definida introduciendo una nueva notación y terminología: partición y sumas de Riemann, para concluir con la definición de integral definida. Asimismo, habla sobre función integrable, pero no establece diferencias ni en la simbología ni cómo identificarla cuando se trata como área bajo la curva.

Termina la sección proponiendo la resolución de varios ejercicios.

No se observa uso de computadora como recurso didáctico, ni se hacen referencias históricas.

De manera general podemos señalar que, el tratamiento que se da para la presentación del concepto de integral definida es aceptable. Sin embargo, a pesar que en la mayoría de los libros de texto se enfoca el "nuevo" concepto de área definida mediante la integral definida, partiendo del "viejo" concepto de área conocido por los estudiantes, debiera haberse resaltado que área e integral definida son conceptos distintos.

Así también, en los libros analizados no se pudo evidenciar la utilización de las nuevas tecnologías en el cálculo integral, por tanto, se ignoran las calculadoras y los programas de cálculo simbólico; sin embargo, entendemos que son herramientas imprescindibles para la enseñanza y el aprendizaje de la integral, además, pensamos que hoy en día una razón por la cual es importante el estudio de la integración numérica es por la facilidad de realizar los cálculos con medios informáticos.

Adicionalmente no se proponen elementos extensivos (ejemplos, problemas, actividades) cuyo objetivo sea la conversión entre los diversos registros de representación semiótica. Por ejemplo: la representación gráfica: usando figuras geométricas; la representación algebraica: aplicando fórmulas de áreas de figuras planas; y la representación analítica: planteando particiones del intervalo, sumas de Riemman y el límite de las sumas.

También, creemos conveniente incluir una pequeña introducción histórica en la cual tendrían que estar, al menos, Arquímedes, Newton, Leibniz y Riemann. ¡No podemos ignorar el pasado y silenciar los avances tecnológicos!

DÉCIMA PARTE:

CONCLUSIONES Y ALCANCES ESPERADOS

X.- CONCLUSIONES Y ALCANCES ESPERADOS

A continuación se presentan las conclusiones basadas en el análisis e interpretación de los resultados obtenidos a través de la aplicación de las técnicas (guía de revisión documental, cuestionario dirigido a estudiantes y guía de entrevista a docentes y autoridades y guía de observación) de recolección de datos, acorde a las preguntas planteadas y los objetivos propuestos.

Los resultados de la revisión documental y su correspondiente análisis de contenido permiten fundamentar que:

- El Modelo Educativo de nuestra Universidad sugiere la utilización de estrategias metodológicas activas. Éstas están dirigidas a la evaluación procesual, vinculación de la teoría con la práctica, construcción de aprendizajes, formación de valores, al saber hacer, saber ser y a la promoción del pensamiento crítico y autónomo.

- En los programas de asignatura las sugerencias metodológicas y estrategias de evaluación son concretas y claras; no obstante, hace falta un mayor énfasis en el desarrollo de aptitudes, habilidades y destrezas.

- En los planes didácticos de la asignatura la forma de evaluación consignada hace referencia a la modalidad de acuerdo con la función, y de acuerdo con quien la realiza.

Sobre la preparación informática de los docentes

- Se constata que existen potencialidades en cuanto al dominio de contenidos básicos necesarios para manipular la computadora, aunque haya debilidades en cuanto al dominio de asistentes matemáticos y softwares matemáticos.

- Se evidencia que, en alguna medida, existen fortalezas para la preparación de los docentes en la incorporación de los softwares al proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, en general y del Cálculo en particular como son: (1) Dominio de las habilidades informáticas elementales. (2) Dominio de los contenidos de la Matemática. (3) Deseos de aprender. (4) Motivación para utilizarlo.

En relación a las actitudes de los estudiantes hacia las Matemática y el uso de la computadora, de acuerdo a los datos proporcionados en el análisis de resultados nos permitieron visualizar que:

- Existe una actitud global positiva hacia las Matemáticas y el uso de las computadoras, aunque no demasiado alta.

- Se considera que, los estudiantes tienen una actitud positiva hacia las dimensiones confianza y seguridad, motivación y el compromiso con el trabajo matemático, no así hacia el uso del ordenador en actividades matemáticas.

- En el estudio de los promedios de respuesta por ítem se observó que el género no afecta significativamente la actitud de los estudiantes hacia las Matemáticas y hacia el uso de la computadora.

En relación al análisis de libros de textos

- El tratamiento que se da para la presentación del concepto de integral definida es aceptable, pero no se considera la utilización de las nuevas tecnologías en el Cálculo Integral. Sin embargo, entendemos que son herramientas imprescindibles para la enseñanza y el aprendizaje de la integral.

Referente al compendio metodológico

- Este contempla un breve desarrollo histórico de los orígenes del Cálculo, se aproxima al concepto de la integral definida, abordando la temática con problemas de exploración relacionados con el cálculo de área de regiones planas, en distintos contextos, para formalizarlo utilizando el software matemático Geogebra. Este compendio será de utilidad a los docentes y estudiantes para la promoción de aprendizajes significativo en la unidad de Integral Definida, pero, no podemos obviar que para el alcance de los objetivos propuestos, debe primar el interés y la motivación.

Lo anterior expresado se aprecia en el compendio elaborado (documento aparte)

Alcances esperados si se implementa la propuesta metodológica

La propuesta que se presenta está orientada a influir sobre aspectos importantes que deben considerarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de Integral Definida como área bajo la curva. Es así que, al ser aplicada se esperaría mejorar significativamente el mismo, en los ambientes universitarios para las carreras de Ingeniería, logrando la participación activa del estudiante.

De igual forma, representa un nuevo reto para el profesional que se desempeña como docente. El resultado esperado de su aplicación será por consiguiente una experiencia de aprendizaje significativa, y un cambio innovador al interior de las aulas.

La propuesta considera aspectos importantes, en la que el estudiante participa activamente del proceso, desarrollando y trabajando diversas competencias, tales como la resolución de problemas, trabajo en equipo, análisis e interpretación de resultados, pensamiento crítico, aprendizaje auto–dirigido, toma de decisiones, entre otras características, lo que conlleva a un aprendizaje permanente.

Finalmente, con la propuesta se favorece el desarrollo de habilidades en cuanto a búsqueda y manejo de la información, lo que conduce a un proceso de aprendizaje activo.

DÉCIMA PRIMERA PARTE:

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

XI.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguaded G., J. I. (1989). Aprender y enseñar con las tecnologías de la comunicación. España: Uniiversidad de Huelva.

Alvarez de Zayas, C. (1990). *Fundamentos teóricos de la dirección del proceso docente-educativo en la Educación Superior Cubana* (EMPES, MES). Ciudad de la Habana.

Ander-Egg, E. (1995). La actitud científica como estilo de vida. In *TECNICAS DE INVESTIGACION SOCIAL* (p. 119). Retrieved from http://0-site.ebrary.com.adrastea.ugr.es/lib/univgranada%5Cn/Doc?id=10353188

Apostol, T. M. (2001). *Calculus*. (S. . Reverté, Ed.) (Segunda Ed). España.

Aranda López, M. del C. (2015b). *Análisis de la construcción del concepto de integral definida en estudiantes de Bachillerato*. Universidad de Alicante.

Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a Cas Environment: the Genesis of a Reflection About Instrumentation and the Dialectics Between Technical and Conceptual Work. *International Journal of Computers for Mathematical Learnig*, *7*(July 2001), 245–274.

Blanco, L. J. (2011). La Investigación en Educación Matemática. *Educatio Siglo XXI*, *29*(1), 109–128.

Blanco N., L., Caballero C., A., Piedehierro, A., Guerrero B., E., & Gómez del Amo, R. (2010). El dominio afectivo de la Enseñanza/Aprendizaje de las Matemáticas. Una revisión de investigaciones locales. *Campo Abierto*, *29*(1), 13–31.

Camacho M., M., & Depool R., R. A. (2003a). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el Programa de Cálculo Simbólico (PCS) Derive. *Educación Matemática*, *15*(3), 119–140. Retrieved from http://www.revista-educacion-matematica.com/es/15-3/7.pdf

Cañizares J., S. M. (2010). *El entorno virtual de aprendizaje y aprendizaje significativo de la integral definida, en el área de Ciencias Exactas de la Universidad Politécnica Salesiana*. Universidad Técnica de Ambato.

Carr, W. (1996). *Una teoría para la Educación*. (Morata, Ed.). España.

Depool R., R. A. (2005). *La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbolico (PSC)*. Universidad de La Laguna.

Díaz Barriga, F., & Hernández Rojas, G. (2004). *Estrategias docente para un aprendizaje significativo*. (McGRAW/HILL, Ed.) (Segunda). mÉXICO.

Díaz P., Y. (2015). *Unidad didáctica para la interpretación de la integral definida como el área de una región plana, mediante la modelación de las funciones en Geogebra*. Universidad Nacional de Colombia.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. In *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173–201). México: Cinvestav.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y Apendizajes intelectuales*. (U. del Valle, Ed.). Cali: Grupo de Educación Matemática.

Gil, N., Guerrero, E., & Blanco, L. (2006). El dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *4*(1), 47–72.

González - Martín, A. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica , gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos* . Universidad de La Laguna.

González Cabanach, R., Fernández Suárez, A. P., Cuevas González, L. M., & Valle, A. (Valle A. (1998a). Las estrategias de aprendizaje. Características básicas y su relevancia en el contexto escolar. *Revista de Psicodidáctica*, (6), 53–68. Retrieved from http://dialnet.unirioja.es/servlet/extart?codigo=2002207%5Cnhttp://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2002207&orden=1&info=link

Guzmán O., M. (1996). *El rincón de la pizarra : ensayos de visualización en análisis matemático : elementos básicos del análisis* (1a. Edició). Madrid: Pirámide D.L.

Hernández, F. (1996). La evaluación de los alumnos en el contexto de la evaluación de la calidad de las universidades. *Revista de Investigación Educativa*, *14*(2), 25–50.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, C. (2014). *Metodología de la investigación*. *Journal of Chemical Information and Modeling* (6ta. Edici). McGRAW - HILL.

https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Hitt, F. (2003). Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de La Asociación Matemática Venezolana*, *X*(2), 213–223.

Hitt E., F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. *Educación Matemática*, *10*(2), 23–45.

Kindt, M. (2005). La Historia de las Matemáticas en la enseñanza del Análisis. Holanda: SCTM05.

Llorens, J. L., & Santonja, F. J. (1997). Una interpretación de las dicultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, *5*(1–2), 61–76.

López H., E. (2012). ¿Qué modelo educativo? ¿Para qué tipo de Universidad? *Revista Científica FAREM-Estelí*, *16*.

Macias Ferrer, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *42*(4), 1–17. Retrieved from http://www.rieoei.org/deloslectores/1517Macias.pdf

Marmolejo A., G. A. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles*. Universidad de Salamanca.

Monereo, C. (2007). Estrategias de enseñanza y aprendizaje : formación del profesorado y aplicación en la escuela. *Didáctica/Diseño Y Desarrollo Curricular*.

Muñoz Razo, C. (1998). Como elaborar y asesorar una investigación de tesis. *Editorial Pearson*. https://doi.org/10.1007/s13398-014-0173-7.2

Nacional, A. (2006). Ley General de Educación. Ley No. 582.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1–18. https://doi.org/10.1007/BF00704699

Palomino. (2006). Aprendizaje significativo. Introducción a los conceptos actuales. In *Temas Básicos de Educación* (Universida, p. 45). España.

Perera-Cumerma, L. F., & Veciana-Pita, M. (2013). Las TIC como instrumento de mediación pedagógica y las competencias profesionales de los profesores. *VARONA, Revista Científico - Metodológica*, (56), 15–22. Retrieved from http://www.redalyc.org/pdf/3606/360633908004.pdf

Porres T., M. (2011). *Integral definida, Cálculo mental y Nuevas tecnologías*. Universidad de Valladolid.

Pozo, J. I. (2006). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. (Morata, Ed.). Madrid.

Rodriguez-Gomez, G., Gil-Florez, J., & Garcia-Jimenez, E. (1996). Metodologia de la investigacion cualitativa. *Introduccióin a La Investigación Cualitativa*, 37. https://doi.org/: GR-847-1996

Rosell, W., & García, M. M. (2003). El enfoque sistémico en el contenido de la enseñanza. *Educación Médica Superior*, *17*(2).

Ruiz, L. M. (1994). Los métodos de Enseñanza en la Educación Superior. *Revista Cubana de Educación Superior*, *14*(2), 121–124.

Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *12*, 355–382. Retrieved from http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=33511859004

Sánchez R., J. G., & Ursini, S. (2010). Actitudes hacia las matemáticas y matemáticas con tecnología: estudios de género con estudiantes de secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, *13*(4), 233–290. https://doi.org/ISSN 1405-6666

Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas en Educaíon primaria.Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI*, *29*(2), 199–224.

Solbes, J. (2007). El desinterés del alumnado hacia el aprendizaje de la ciencia: implicaciones en su enseñanza. *Didáctica de Las Ciencias Experimentales Y Sociales*, *117*(21), 91–117. https://doi.org/10.7203/dces..2428

Tall, D. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics Teaching*, *110*, 49–53. Retrieved from http://wrap.warwick.ac.uk/495/

Tall, D. (1986). A Graphical Approach to Integration and the Fundamental Theorem. *Mathematics Teaching*, *113*(x), 48–51.

Taylor, S., & Bodgan, R. (2001). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. (P. I. S.A., Ed.) (Tercera Ed). España.

Turégano, P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de Las Ciencias Revista de Investigacíon Y Experiencias Didácticas*, *16*(2), 233–249.

Turégano M., P. (1995). Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal. *Epsilon: Revista de La Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales," 33*, 307–310.

UNAN-Managua. (2011). *Modelo Educativo, Normativa y Metodología para la Planificación Curricular*.

Van de Velde, H. (2014). Aprender a preguntar, preguntar para aprender. Estelí.

Zill, D. (2011). *Cálculo trascendentes temprana*. (M. G. Hill, Ed.) (Cuarta Edi). México.

Zimmerman, W., & Cunningham, S. (1991). Visualization in Teaching and learning Mathematics. *Mathematical Association of America*, *19*, 1–8.

ANEXOS

1. Guías de Revisión Documental

1.1 Guía para el programa de asignatura

La presente guía se aplicó al programa de Cálculo diferencial e integral, con el propósito de describir los objetivos, contenidos, estrategias metodológicas, medios didácticos sugeridos y formas de evaluación para el proceso de aprendizaje de la unidad integral definida.

1. Estrategias metodológicas y medios didácticos sugeridos en el programa de asignatura:

Estrategias Metodológicas	**Sí**	**No**	**Medios Didácticos**	**Sí**	**No**
Ubicación Contextual			Data show		
Aprendizaje por proyectos			Pizarra acrílica		
Aprendizaje basado en la resolución de problemas			Papelógrafos		
Estudios de caso			Retroproyector		
Aprendizaje cooperativo			Data show		
Prácticas de laboratorio			Videos		
Conferencia			Software educativo		
Investigación como método de aprendizaje					
Otras (especificar)			Otras (especificar)		

2. Estrategias metodológicas integradas en el programa de asignatura dirigidas a:

Estrategias metodológicas dirigidas a:	**Sí**	**No**
La construcción de aprendizajes		
Al fomento de valores y actitudes		
El desarrollo de aptitudes, habilidades y destrezas		
Vinculación de la teoría con la práctica		
La promoción del pensamiento crítico y autónomo		
Partir de la práctica		

Estrategias metodológicas dirigidas a:	**Sí**	**No**
Evaluación procesual		
Otras (especificar)		

3. En el programa de asignatura se describen:

• Objetivos y contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales:
Sí ___ No ___

• Forma y estrategia de evaluación: Sí ____ No ____

1.2 Guía para el Modelo educativo

Objetivo: Hacer referencia a las estrategias metodológicas sugeridas para el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje y que se adecuan al desarrollo de la asignatura.

Estrategias Metodológicas	**Sí**	**No**
Ubicación contextual		
Guías de cuestionamiento de lo que se aprende		
Aprendizaje colaborativo		
Estudio de caso		
Aprendizaje por proyectos		
Aprendizaje basado en la resolución de problemas		
Conferencia		
Trabajo de campo		
Observación auto reflexiva		
Otras		

1.3 Guía para el Plan didáctico

Integración de metodologías activas en el plan didáctico	Sí	No
Metodologías planificadas :		
Relaciona la teoría con la práctica		
Trabajo:		
Individual		
En equipos		
Independiente		
Análisis de casos		
Prácticas de laboratorio		
Discusión en pequeños grupos		
Desarrollo del pensamiento crítico		
Otras. Especifique		
Formas de evaluación		
De acuerdo con quien la realiza: • Heteroevaluación		
• Coevaluación		
• Autoevaluación		
De acuerdo con el tiempo: • Inicial		
• De proceso		
• Final		
De acuerdo con la función: • Diagnóstica		
• Formativa		
• Sumativa		

2. Guía de entrevista a docentes

Estimado profesor/a:

Solicitamos su colaboración como docente de la asignatura Cálculo diferencial e integral, para que nos conteste las siguientes interrogantes. Esta entrevista tiene como objetivo compartir criterios y valoraciones respecto a las estrategias metodológicas que implementan o no, en el desarrollo de la asignatura.

Datos Generales

Carrera: ______________ Departamento Académico: ____________________

Fecha: ______________ Hora de inicio: ______ Hora de finalización: ____

1. ¿Qué estrategias metodológicas utiliza en el desarrollo de su asignatura?
2. ¿Qué aspectos toma en cuenta para seleccionarlas?
3. ¿De las estrategias metodológicas que aplica, cuáles le resultan más apropiadas? ¿Por qué?
4. ¿Cuáles son las principales dificultades que enfrenta en el desarrollo de la asignatura, relacionado con las estrategias metodológicas que aplica? ¿Qué propone para mejorar?
5. ¿Qué capacitaciones metodológicas ha recibido para su desempeño docente? ¿Las considera funcionales? ¿Por qué?
6. ¿De qué manera integra en su actividad docente lo sugerido en las orientaciones metodológicas del programa de asignatura?
7. ¿Cómo evalúa el proceso de enseñanza aprendizaje de la asignatura?
8. ¿Está satisfecho/a con la forma en qué usted organiza el proceso de enseñanza aprendizaje? Explique.
9. ¿Qué recursos TIC ha utilizado en el desarrollo de los contenidos de la asignatura?
10. ¿Cómo ha adquirido los conocimientos de informática (capacitaciones, en forma autodidacta)
11. ¿Cómo considera el dominio que posee de los siguientes contenidos:
    a) Software educativo.
    b) Asistentes matemáticos de geometría dinámica.
    c) Asistentes matemáticos para el tratamiento algebraico y gráficos de Funciones.

12. ¿Cuál es el grado de satisfacción que posee en cuanto a sus conocimientos relacionado con los siguientes temas:
    a) Software educativos
    b) Asistentes Matemáticos de Geometría dinámica
    c) Asistentes Matemáticos para el tratamiento algebraico y gráficos de funciones
13. ¿Cuál su la disposición a aprender Informática Educativa?
14. ¿Cuáles Software Educativos y asistentes matemáticos conoce?
15. ¿En qué temas de las asignaturas los utiliza?
16. ¿ En qué momentos de sus clases los utiliza:
    - Aseguramiento del nivel de partida.
    - Orientación hacia el objetivo.
    - Motivación.
    - Tratamiento del nuevo contenido.
    - Fijación del contenido.
17. ¿Cuáles considera son las ventajas y desventajas de utilizar Software Educativo en la clase?

3. Guía de Entrevista a autoridades

El propósito de esta entrevista es proporcionar información sobre la forma científico-didáctica-metodológica que se ha venido utilizando en el desarrollo de la asignatura Cálculo diferencial e integral (Cálculo II)

Cargo que desempeña el entrevistado:

I. Desarrollo

1. ¿Considera importante que el docente utilice estrategias metodológicas para el desarrollo de las clases? Explique
2. ¿Considera importante que el docente haga uso de metodologías activas en el desarrollo del proceso enseñanza-aprendizaje? Explique
3. ¿Cuáles son las estrategias metodológicas que utilizan los docentes con mayor frecuencia para el desarrollo de la unidad de integral definida?
4. ¿Cuáles son las dificultades encontradas en el aprendizaje de los contenidos?
5. ¿Qué importancia tiene el uso de medios tecnológicos en el desarrollo de las clases?
    - Se aprecia un uso sistemático de la computación.
    - Se orienta a los alumnos el trabajo con software.
    - Se utilizan software o la computadora, en forma general, siempre que el contenido lo permita
6. ¿Cómo valora la preparación informática de los docentes en cuanto a:
    - La preparación de los docentes de modo que puedan hacer uso de sus conocimientos informáticos como recursos didácticos.
    - La utilización de la computadora por parte de los docentes en la solución de los problemas de su labor cotidiana.
7. ¿Cuáles son las causas por las que los docentes no utilizan los recursos informáticos en sus clases.
8. Cuáles son las principales necesidades del departamento y de los docentes para lograr un uso efectivo de los recursos informáticos.
9. ¿Qué le recomendaría a los docentes de la asignatura de Cálculo diferencial e integral (Cálculo II) para la conducción del proceso enseñanza-aprendizaje?

4. Guía de Observación

Objetivo General:

Recoger información del entorno haciendo uso de la observación como técnica de investigación en el aula.

Se dejará bien claro que no se trataba de juzgar comportamientos, sino de recoger información extraída de un contexto real.

Objetivos Específicos:

- Observar en las sesiones de clase si existe aplicación de metodologías participativas adecuadas al contexto.
- Comprobar si existe aceptación e impacto en el aprendizaje aplicando el trabajo cooperativo.

I. Datos Generales

1. Nombre el Observador:
2. Carrera:
3. Tiempo de Observación: Hora de Inicio ____ Hora de finalización _____

II. Desarrollo

1. El/la facilitador/a elabora plan de clase diario
2. El/la facilitador/a da a conocer los objetivos de la sesión a los/as participantes.
3. El/la facilitador/a explica la metodología participativa a los/as participantes
4. La metodología aplicada es apta para el tamaño del grupo y la disciplina
5. Existe ambiente áulico para desarrollar la estrategia
6. El tiempo asignado para cumplir las actividades de la estrategia es apropiado o correcto
7. Los materiales utilizados son correctos o apropiados para la estrategia. Si la respuesta es positiva, escribir los tipos de materiales
8. El/la facilitador/a se incluye en el proceso de aprendizaje de los/as participantes, brinda acompañamiento durante la aplicación de la metodología.

9. Estimula la participación activa de los/as participantes.
10. Valora la participación activa de los/as participantes.
11. Solicita a los/as participantes brinden sus aportes si les gusta o no la metodología aplicada, evalúa el proceso de aprendizaje en conjunto con los/as participantes.

Observaciones:

5. Guía de encuesta dirigida a estudiantes

Estimado/a Estudiante:

Solicitamos tu valioso aporte para que nos conteste la siguiente guía, con el objetivo de obtener información sobre tus actitudes en la clase de matemática. Sea lo más objetivo posible.

A continuación se presenta una serie de enunciados, marca con una X de acuerdo a lo siguiente:

1 – Si estás completamente en desacuerdo con el enunciado

2 - Si estás en desacuerdo con el enunciado

3 - Si estás completamente de acuerdo con el enunciado

4 - Si estás completamente de acuerdo con el enunciado

Datos Generales:

Carrera que estudia:

Ing. Ambiental ____ Ing. En Energías Renovables ____

Ing. En Ciencias de la Comp_____ Ing. Industrial _____

Ing. Agroindustrial _____

Sexo del encuestado: Femenino_____ Masculino ____

Repitente: Sí ____ No____

Nota final en la asignatura: ____

		1	2	3	4
1	Considero que es importante en matemática justificar cada paso al resolver ejercicios y problemas				
2	Los exámenes de matemática me producen miedo				
3	Obtener buenas calificaciones en matemática es importante para mí				
4	Cuando estoy en clase de matemática me quedo como en la luna y no entiendo nada				
5	Las matemáticas requieren practicar continuamente				
6	Las matemáticas me dan seguridad y al mismo tiempo me estimula				
7	Las matemáticas ayuda a las personas a pensar lógicamente				
8	La imaginación y la intuición son útiles en matemática				
9	No sé por qué, pero cuando estoy en la clase de matemática no presto atención				

		1	2	3	4
10	La clase de matemática me resulta larga y tediosa				
11	Si en la universidad se organiza un club de matemáticas me gustaría participar				
12	Prefiero no entrar a las clases de matemática				
13	Estoy a gusto en la clase de matemática				
14	Me agrada resolver problemas matemáticos				
15	Cuando en clase de matemáticas se solicita un voluntario para pasar a la pizarra **no** me ofrezco				
16	Generalmente siento la necesidad de conversar de matemáticas				
17	El vocabulario propio de la matemática hace más difícil su aprendizaje				
18	Las matemáticas la necesitan solo los ingenieros				
19	En matemática no me queda más que aprender todo de memoria				
20	Conocer cómo resolver un problema es tan importantes como hallar su solución				
21	El conocimiento de la teoría es indispensable para resolver los problemas				
22	Las matemáticas tienen la culpa de que algunos estudiantes no hayan seguido estudiando				
23	A la hora de hacer ejercicios individuales de matemáticas me enredo				
24	Me gustaría que las asignaciones fueran solamente de matemáticas				
25	No veo la necesidad de consultar textos de matemáticas fuera de los apuntes				
26	Yo espero trabajar en un área que requiera matemáticas				
27	Además de los ejercicios de matemáticas que me proponen resuelvo otros más				
28	La matemática tiene usos prácticos en la vida diaria				
29	El manejar una computadora me produce miedo				
30	Me gustaría que en las clases de matemáticas se usara una computadora				
31	Es necesario usar una computadora para realizar cálculos matemáticos				
32	Para trazar gráficas de funciones no es necesario una computadora				
33	Los profesores que dan su clase sin una computadora son obsoletos				
34	En las clases de matemáticas se debería explicar el uso de la computadora				

Gracias por su colaboración. Su opinión es muy importante

6. Planes didácticos

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE NICARAGUA, MANAGUA

UNAN – MANAGUA

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA ESTELI

FAREM ESTELI

PLAN DIDACTICO

Asignatura: _Calculo II__ Grupo: _Ingeniería en sistemas de la información_ Año Académico: _2016

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de enseñanza aprendizaje	EVALUACION		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluación	Estrategia de Evaluación	%
I UNIDAD: LA INTEGRAL											
1	07/03/16 Al 09/03/16	Explicar el concepto y las propiedades de la integral indefinida.	Aplicar los conceptos, definiciones, propiedades y teoremas de la integral indefinida en la resolución de problemas contextualizados	Actuar con responsabilidad durante el trabajo individual y en equipo.	• Integral Indefinida: concepto y propiedades. – Integral indefinida. Concepto. Propiedades. – Resolución de ecuaciones	Aplicación de los conceptos, definiciones, propiedades y teoremas de la integral indefinida en la resolución de problemas contextualizados.	Actúa con responsabilidad durante el trabajo individual y en equipo.	Preguntas exploratoria	Diagnostica	Autoevaluación Clase practica	100 %

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de enseñanza aprendizaje	EVALUACION		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluación	Estrategia de Evaluación	%
					diferenciales por variables separables. – Tablas de integrales						
2	14/03/16 Al 16/03/16	Conocer la definición y los teoremas fundamentales de la integral definida.	Utilizar la definición y los teoremas fundamentales de la integral definida para la representación gráfica del área bajo la curva de una función, con algunos rectángulos típicos.		– Cambio de variable. – Integral definida • Integral Definida. Notación sigma. – Cálculo de áreas por rectángulos inscritos y circunscritos.	Utilización de la definición y los teoremas fundamentales de la integral definida para la representación gráfica del área bajo la curva de una función, con algunos rectángulos típicos.		Conferencias	Formativa	Autoevaluación	
3	28/03/16 Al 29/03/16				– Suma de Riemann. – Propiedades fundamentales: Teorema del Valor Medio.			Mapas cognitivos Aprendizaje basado en problemas	Formativa	Clase practica	

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de enseñanza aprendizaje	EVALUACION		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluación	Estrategia de Evaluación	%
					Teorema Fundamental del Cálculo. – Evaluación de integrales definidas.						
4	04/04/16 Al 06/04/16	Reconocer los distintos métodos para evaluar una integral.	Aplicar los distintos métodos de integración que permiten la resolución de problemas contextualizados.		• Métodos para evaluar integrales – Integración por partes. – Integrales de potencias de funciones trigonométricas.	Aplicación de los distintos métodos de integración que permiten la resolución de problemas contextualizados.		Demostrativa	Suamtiva	Sistemático	100
5	11/04/16 Al 13/04/16				– Integración por sustituciones trigonométricas.			Conferencia	Formativa	Autoevaluación	
6	18/04/16 Al				– Integración por descomposi			Desarrollo de clases	Formativa	Autoevaluación	

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de enseñanza aprendizaje	EVALUACION		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluación	Estrategia de Evaluación	%
	20/04/16				ción en fracciones parciales			practicas			
7	25/04/16 Al 27/04/16				– Integrales impropias y propiedades			Demostrativa	Sumativa	Clase practica	100
II UNIDAD: APLICACIONES DE LA INTEGRAL											
8	02/05/16 AL 04/05/16	Interpretar el concepto de área como una integral definida.	Utilizar el concepto de área como una integral definida para la solución de problemas contextualizados.	Actuar con respeto durante el procesamiento grupal de los contenidos en el aula.	• Concepto de área como una integral definida. – Áreas en coordenadas cartesianas: área bajo la gráfica de una función, área entre las gráficas de funciones. – Áreas en coordenadas polares.	Utilización del concepto de área como una integral definida para la solución de problemas contextualizados.	Actúa con respeto durante el procesamiento grupal de los contenidos en el aula.	Aprendizaje colaborativo	Formativa	Autoevaluación	
9	09/05/	Reconocer	Aplicar los		• Concepto	Aplicación de		Conferen	Formativ	Autoevalua	

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de enseñanza aprendizaje	EVALUACION		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluación	Estrategia de Evaluación	%
	16 AL 11/05/16	el concepto de longitud de arco y volumen de una superficie como una integral definida.	conceptos de longitud de arco y volumen de una superficie como una integral definida en la solución de problemas contextualizados.		de longitud de arco y volumen de una superficie como una integral definida. – Longitud de una curva: paramétrica, en coordenadas cartesianas y en polares. Superficies de revolución.	los conceptos de longitud de arco y volumen de una superficie como una integral definida en la solución de problemas contextualizados.		cias	a	ción	
10	16/05/16 AL 18/05/16				– Volumen de sólidos de revolución.			Aprendizaje basado en problemas	Sumativa	Sistemático	100
11	23/05/16	Conocer otras aplicaciones de la	Utilizar otras aplicaciones de la integral		• Otras aplicaciones de la integral	Utilización de otras aplicaciones de la integral		Estudio de contexto	Formativa	Autoevaluación	

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de enseñanza aprendizaje	EVALUACION		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluación	Estrategia de Evaluación	%
		integra definida en la Física.	definida en la resolución de problemas contextualizados de la Física.		definida en la Física. – Centro de masa, fuerza, trabajo.	definida en la resolución de problemas contextualizados de la Física.					
III UNIDAD: SUCESIONES Y SERIES											
11	25/05/16	Conocer las definiciones, propiedades y teoremas de las sucesiones numéricas.	Utilizar las definiciones, propiedades y teoremas de las sucesiones numéricas para el análisis de la convergencia de una sucesión.	Actuar con respeto y responsabilidad durante el trabajo en equipo para la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	• Sucesiones numéricas: definiciones, propiedades y teoremas – Sucesiones monótonas. – Sucesiones aritméticas y geométricas. – Convergencia de sucesiones	Utilización de las definiciones, propiedades y teoremas de las sucesiones numéricas para el análisis de la convergencia de una sucesión.	Actúa con respeto y responsabilidad durante el trabajo en equipo para la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	Conferencias	Formativa	Autoevaluación	
12	01/06/16	Reconocer los criterios de convergencias de las series	Aplicar los criterios para la determinación de la convergencia		• Criterios de convergencias de las series numéricas. – Series	Aplicación de los criterios para la determinación de la convergencia		Problemas de contexto	Formativa	Autoevaluación	

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de enseñanza aprendizaje	EVALUACION		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluación	Estrategia de Evaluación	%
		numéricas.	o divergencia de determinadas series.		infinitas. – Serie numérica. – Serie con términos positivos. Serie alternante.	o divergencia de determinadas series.					
13	06/06/16 AL 08/06/16				– Criterios de convergencia: criterios de la integral, comparación, comparación por límite, de la razón y de la raíz. Convergencia absoluta y condicional.			Demostrativa	Formativa	Autoevaluación	
14	13/06/16	**EXAMEN**									
14	15/06/16	Explicar el desarrollo de series	Aplicar el desarrollo de series de	Actuar con respeto y responsabil	• Desarrollo de Series de Potencias.	Aplicación del desarrollo de series de	Actúa con respeto y responsabil	Aprendizaje colaborati	Formativa	Autoevaluación	

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de enseñanza aprendizaje	EVALUACION		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluación	Estrategia de Evaluación	%
		de potencias.	potencias para la aproximación de funciones.	idad durante el trabajo en equipo para la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	– Radio e Intervalo de convergencia. – Serie de Taylor. – Serie de Maclaurin.	potencias para la aproximación de funciones.	idad durante el trabajo en equipo para la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	vo			
15	20/06/16 AL 22/06/16				– Integrales de funciones expresadas como series de Taylor.			Mapas cognitivos	Sumativa	Clase practica	100
	27/06/16				– Aproximación de funciones por series de potencias				Formativa	Autoevaluación	

FACULTAD REGIONAL MULTIDISCIPLINARIA ESTELI

FAREM ESTELI

PLAN DIDACTICO

Asignatura: _Calculo Diferencial e Integral__ Grupo: _Ingeniería Ambiental Año Académico: _2016

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de Enseñanza - Aprendizaje	EVALUACIÓN		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluac	Estrategia de evaluac	%
1	06 -10 marzo	Interpretar concepto y propiedades del límite de funciones.	Aplicar los teoremas sobre límites de funciones.	Valorar la importancia de los teoremas sobre límites de funciones a través de la	**I.- Introducción a la derivada.** Definición intuitiva y formal de límite. Límite	Interpretación de los límites de funciones.	Valoración de la importancia de l límites de las funciones, para s propia formació profesional.	Aprendizajes basados en la resolución de problemas	Diagnóstica Formativa	Solución de una situación nueva.	.

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de Enseñanza - Aprendizaje	EVALUACIÓN		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluac	Estrategia de evaluac	%
2	13-17 marzo			resolución de ejercicios y problemas	Límites infinitos Límites al infinito	Calcular el límite de funciones aplicando las propiedades correspondientes		Aprendizajes colaborativos	De proceso	Resolución de ejercicios	
3	20-24 marzo				Continuidad de funciones	Comprobar la continuidad o discontinuidad de funciones	Desarrollo del hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno	Conferencia dialogada	De proceso	Solución de una situación nueva	10 puntos

S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de Enseñanza - Aprendizaje	EVALUACIÓN		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluac	Estrategia de evaluac	%
4	**27-31 marzo**	Analizar el concepto de derivada y su interpretación geométrica.	Aplicar las propiedades fundamentales de las derivadas de una función en la solución de ejercicios y problemas.	Valorar la importancia del cálculo diferencial en la solución de problemas relacionados con el perfil profesional	**II.- La derivada y sus aplicaciones** Reglas generales de derivación Derivadas de funciones algebraicas, trascendentes, trigonométricas Aplicaciones físicas, geométricas.	Comprensión del concepto de derivada de una función como velocidad instantánea y razón de cambio	Valoración de la importancia del cálculo diferencial, como instrumento para modelar diversos fenómenos de la naturaleza real	Conferencia dialogada	Heteroevaluación: De proceso y Sumativa	Aprendizaje por tareas: Ejercicios y problemas	
5	**03-07 abril**	Aplicar el concepto de derivada para la resolución de	Aplicar el concepto de derivada para la resolución de problemas	Cooperar en las dificultades de los aprendizajes en el trabajo		. Clase práctica	Desarrollo del hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de	Aprendizaje basado en la resolución de ejercicios	Heteroevaluación: De proceso y Sumativa	Resolución de ejercicios y problemas	10 puntos

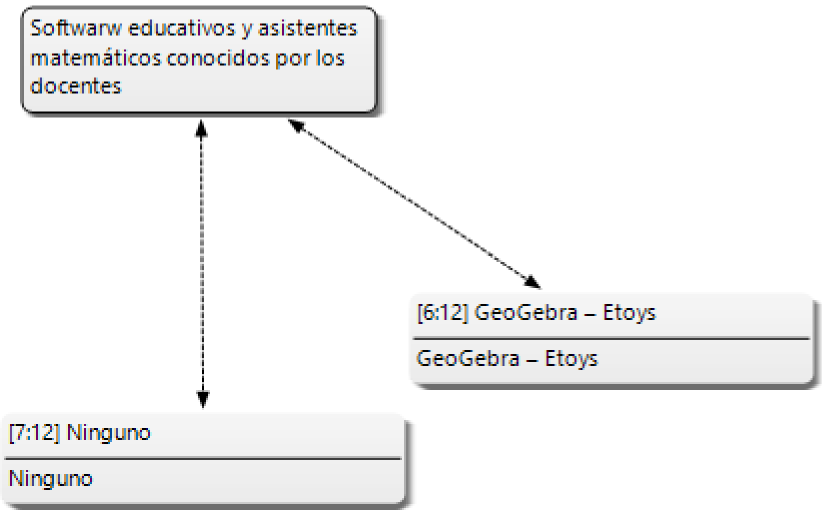
S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de Enseñanza - Aprendizaje	EVALUACIÓN		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluac	Estrategia de evaluac	%
		problemas geométricos y físicos.	geométricos y físicos.	grupal.	Construcción de gráficos		su entorno.	y problemas Trabajo colaborativo			
6	17-21 abril	Reconocer las reglas, fórmulas y teoremas fundamentales de derivación de funciones	Utilizar los teoremas generales y fórmulas de derivación para el cálculo de derivada de funciones	Valorar la importancia de las reglas, fórmulas y teoremas		Clase práctica Resolución de ejercicios y problemas sobre reglas, fórmulas y teoremas fundamentales de derivación de funciones	Desarrollo del hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	Conferencia dialogada Aprendizaje basado en la resolución de ejercicios y problemas	Heteroevaluación: De proceso y Sumativa	Aprendizaje por tareas: Ejercicios y problemas	

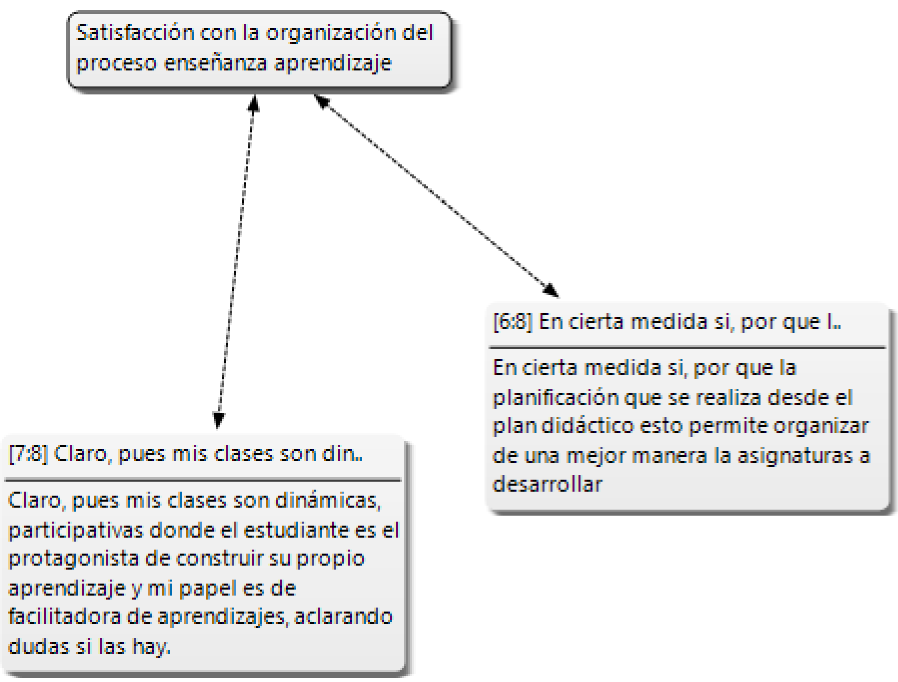
S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de Enseñanza - Aprendizaje	EVALUACIÓN		
		Conceptuales	**Procedimentales**	**Actitudinales**	**Conceptuales**	**Procedimentales**	**Actitudinales**		**Forma de evaluac**	**Estrategia de evaluac**	**%**
7 y 8	**24-28 abril** **1-5 mayo**	Interpretar el concepto de la segunda derivada de una función como	Aplicar el concepto de la segunda derivada para la resolución de problemas de la física.	Valorar la importancia del concepto de la segunda derivada de una función como	Interpretación del concepto de la segunda derivada de una función como derivada	Aplicación del concepto de la segunda derivada para la resolución de problemas de la física.	Desarrollo del hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	Conferencia dialogada Aprendizaje basado	Sumativa	Solución de guía de ejercicios y problemas	10ptos
9	**08-12 mayo**	Interpretar la integral indefinida como el proceso inverso de la diferenciación	Aplicar diferentes métodos de integración de funciones para la resolución de integrales de diversos	Demostrar capacidad para compartir los conocimientos y experiencias en el	**III.- La integral y sus aplicaciones** Función primitiva e	Concepto de antiderivada e integral indefinida. Tablas de integrales	Desarrollo del hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	Conferencia dialogada Aprendizaje basado	De proceso	Aprendizaje por tareas: Ejercicios y problemas	10 puntos

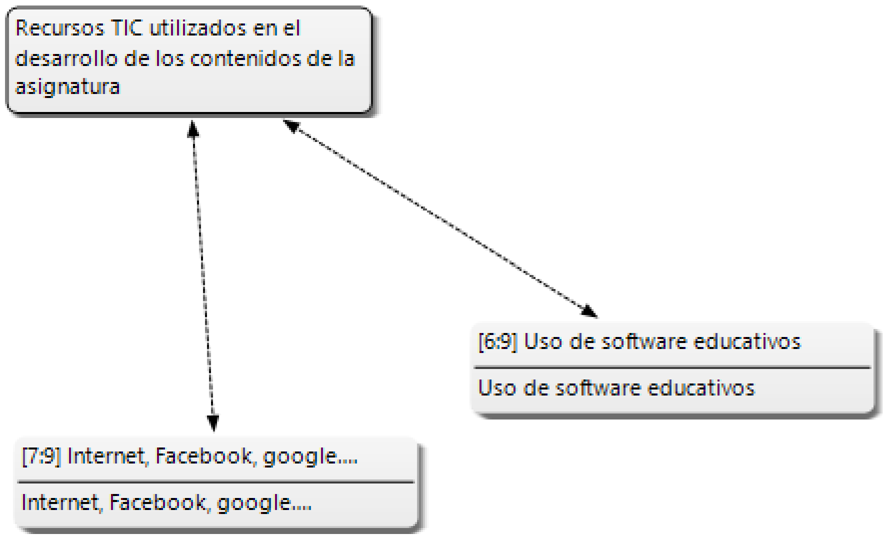
S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de Enseñanza - Aprendizaje	EVALUACIÓN		
		Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales	Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales		Forma de evaluac	Estrategia de evaluac	%
10	15-19 mayo	Interpretar los teoremas importantes en la solución de integrales	Aplicar los teoremas importantes en la solución de integrales	Valorar la importancia de las integrales para el análisis y resolución de ejercicios	Integrales por cambio de variables o sustitución Integración por partes	Aplicación de diferentes métodos de integración de funciones para la resolución de integrales de diversos grados de	Desarrollo del hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno	Aprendizaje basado en la resolución de ejercicios y problema	Heteroevaluación: De proceso y Sumativa	Aprendizaje por tareas: Ejercicios y problemas	5 ptos
11	22 - 26 mayo	Interpretar los teoremas importantes en la solución de	Aplicar los teoremas importantes en la solución de integrales	Valorar la importancia de las integrales para el análisis y resolución	Integración de Fracciones racionales Integral definida	Aplicación de diferentes métodos de integración de funciones para la resolución de integrales	Valoración del trabajo en equipo para fortalecer el aprendizaje significativo.	Aprendizaje basado en la resolución de ejercicios	Heteroevaluación: De proceso y Sumativa	Aprendizaje por tareas: Ejercicios y problemas	

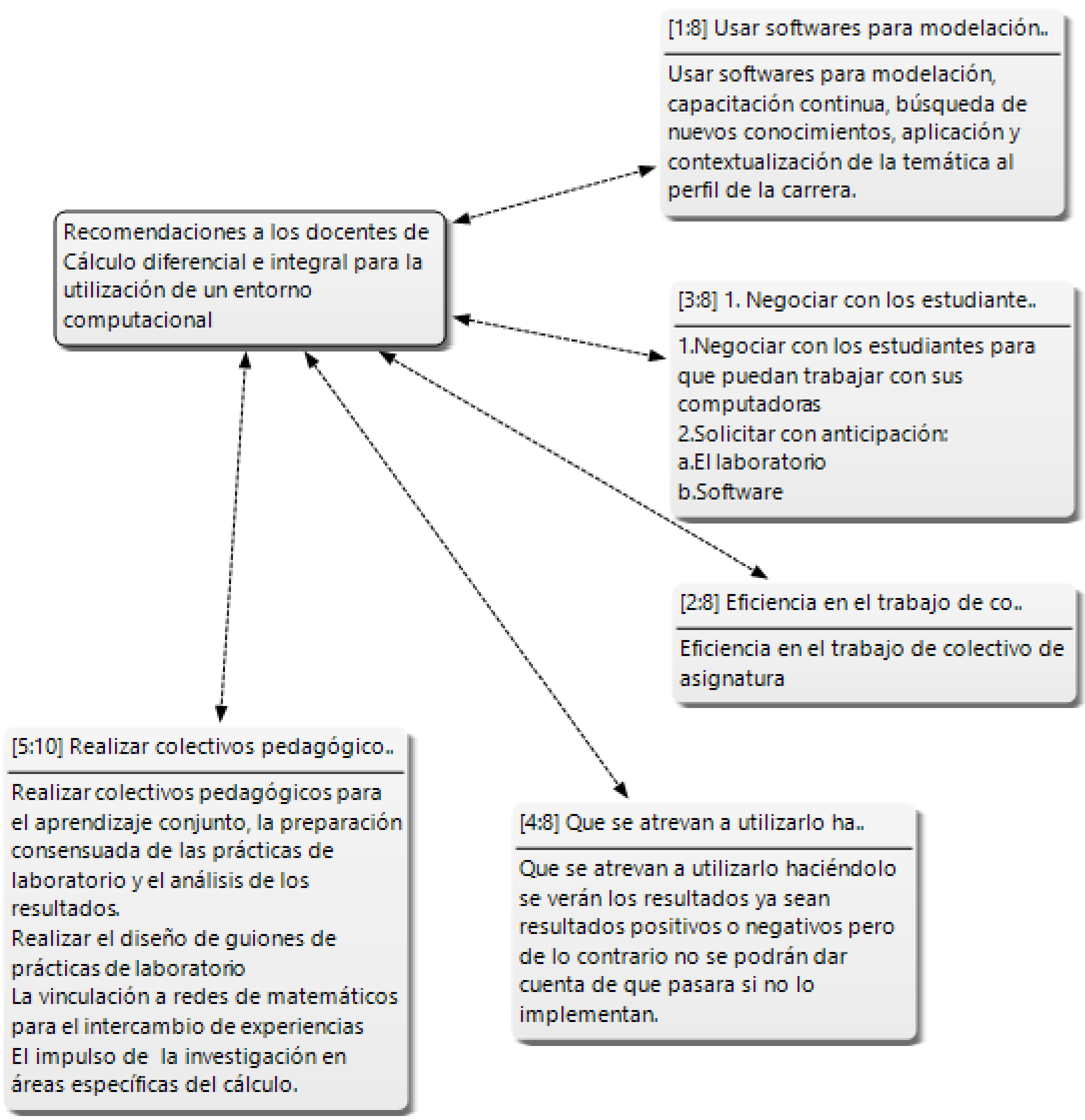
S	Fecha	OBJETIVOS			CONTENIDOS			Estrategias de Enseñanza - Aprendizaje	EVALUACIÓN		
		Conceptuales	**Procedimentales**	**Actitudinales**	**Conceptuales**	**Procedimentales**	**Actitudinales**		**Forma de evaluac**	**Estrategia de evaluac**	**%**
12	**29 may-02 junio**	Interpretar los teoremas importantes en la solución de integrales	Aplicar los teoremas importantes en la solución de integrales	Valorar la importancia de las integrales para el análisis y resolución de ejercicios relacionado	Integración de funciones trigonométricas	Aplicación de diferentes métodos de integración de funciones para la resolución de integrales de diversos grados de dificultad	Valoración del trabajo en equipo para fortalecer el aprendizaje significativo.	Aprendizaje basado en la resolución de ejercicios y problemas	Heteroevaluación: De proceso y Sumativa	Aprendizaje por tareas: Ejercicios y problemas	5 ptos .
13-15	**05-23 junio**	EXAMEN PARCIAL									
		Evaluar la integral definida en el cálculo de áreas bajo una curva y entre dos	Resolver problemas en cálculos de áreas bajo una curva y entre dos curvas	Demostrar capacidad para compartir los conocimientos y experiencia	Fórmulas para el cálculo de área bajo una curva y entre dos curvas	Aplicación de fórmulas para el cálculo de áreas	Valoración del trabajo en equipo para fortalecer el aprendizaje significativo.	Aprendizaje basado en la resolución de ejercicios y	Heteroevaluación: De proceso y Sumativa	Solución de ejercicios y problemas	10 tos

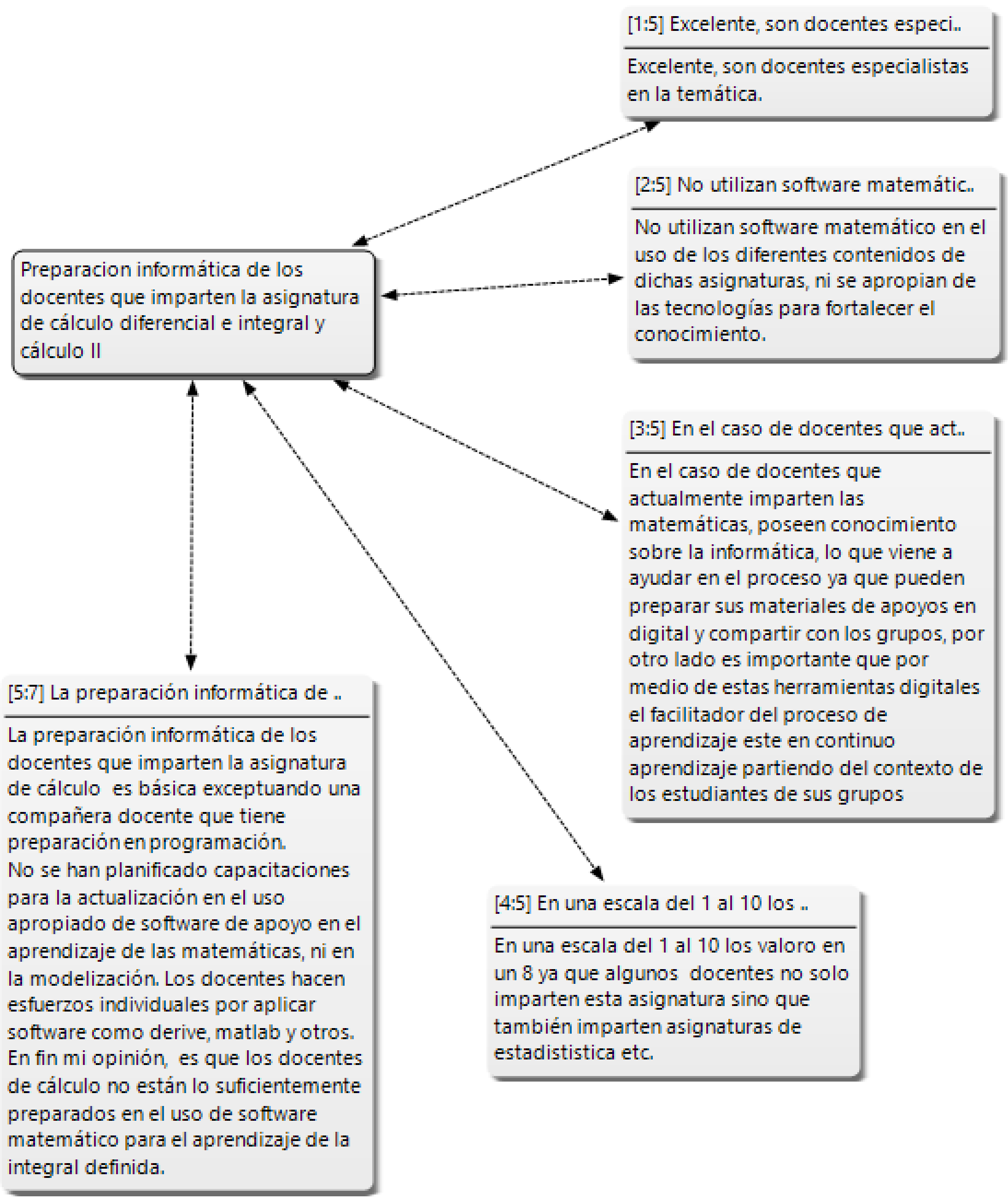
7. Redes sistémicas

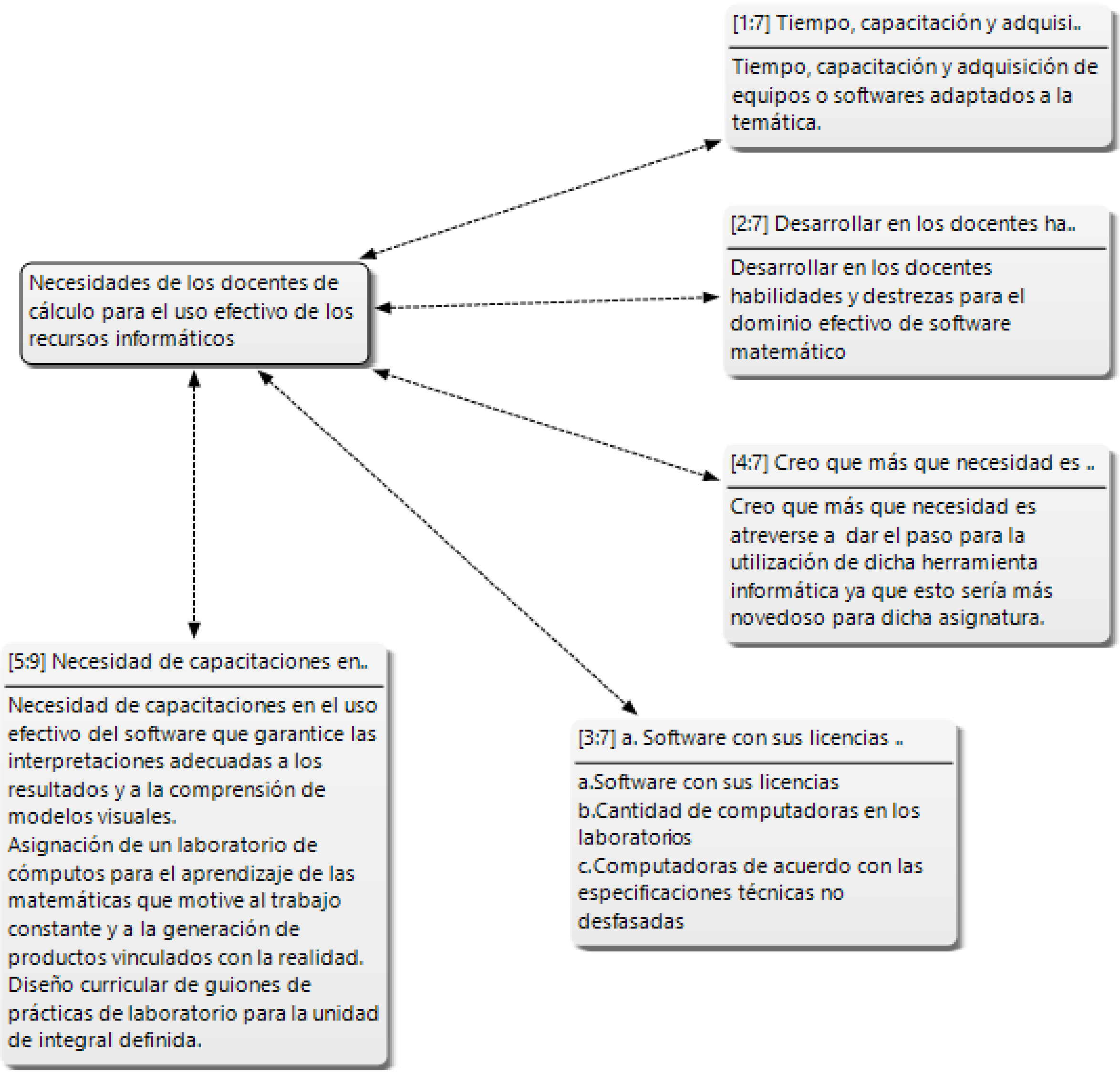


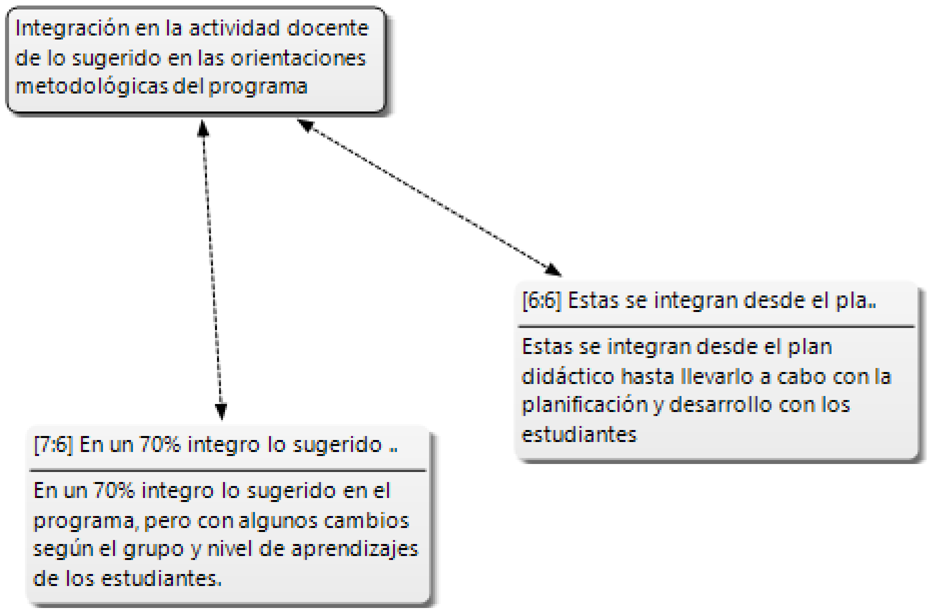


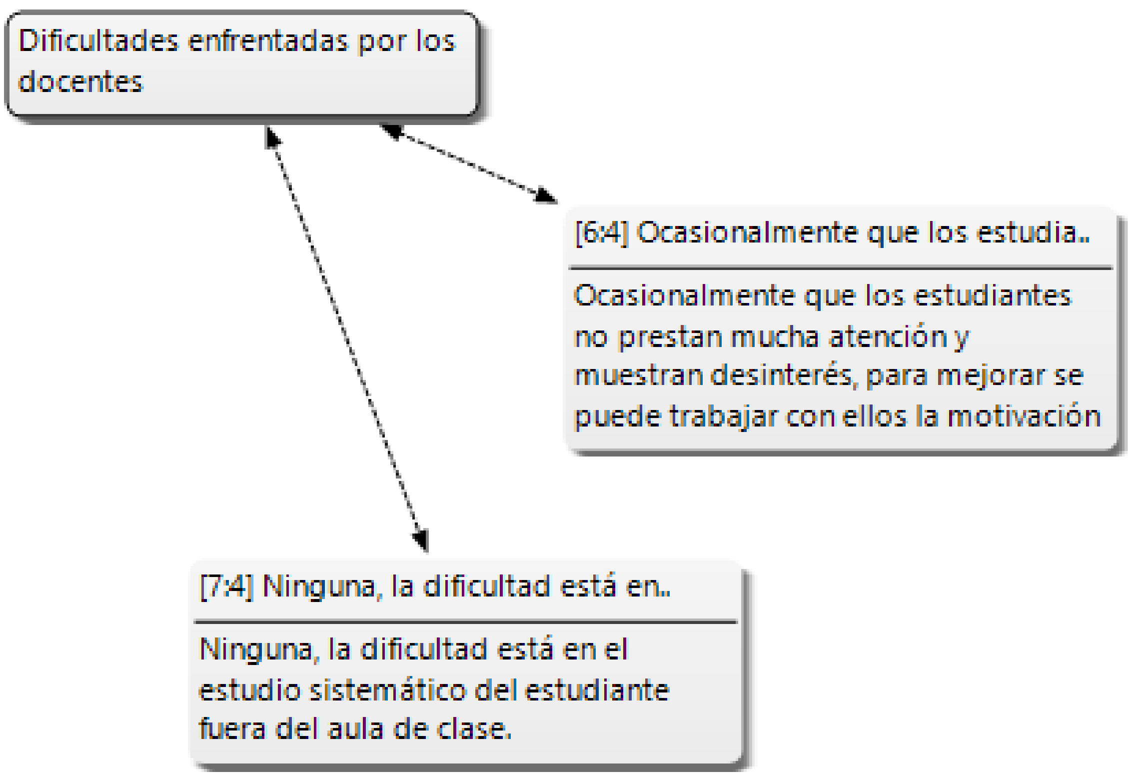

Recursos TIC utilizados en el desarrollo de los contenidos de la asignatura
[6:9] Uso de software educativos
Uso de software educativos
[7:9] Internet, Facebook, google....
Internet, Facebook, google....


[1:8] Usar softwares para modelación..
Usar softwares para modelación, capacitación continua, búsqueda de nuevos conocimientos, aplicación y contextualización de la temática al perfil de la carrera.
Recomendaciones a los docentes de Cálculo diferencial e integral para la utilización de un entorno computacional
[3:8] 1. Negociar con los estudiante..
1.Negociar con los estudiantes para que puedan trabajar con sus computadoras
2.Solicitar con anticipación:
a.El laboratorio
b.Software
[2:8] Eficiencia en el trabajo de co..
Eficiencia en el trabajo de colectivo de asignatura
[5:10] Realizar colectivos pedagógico..
Realizar colectivos pedagógicos para el aprendizaje conjunto, la preparación consensuada de las prácticas de laboratorio y el análisis de los resultados.
Realizar el diseño de guiones de prácticas de laboratorio
La vinculación a redes de matemáticos para el intercambio de experiencias
El impulso de la investigación en áreas específicas del cálculo.
[4:8] Que se atrevan a utilizarlo ha..
Que se atrevan a utilizarlo haciéndolo se verán los resultados ya sean resultados positivos o negativos pero de lo contrario no se podrán dar cuenta de que pasara si no lo implementan.


[1:5] Excelente, son docentes especi..
Excelente, son docentes especialistas en la temática.
[2:5] No utilizan software matemátic..
No utilizan software matemático en el uso de los diferentes contenidos de dichas asignaturas, ni se apropian de las tecnologías para fortalecer el conocimiento.
Preparacion informática de los docentes que imparten la asignatura de cálculo diferencial e integral y cálculo II
[3:5] En el caso de docentes que act..
En el caso de docentes que actualmente imparten las matemáticas, poseen conocimiento sobre la informática, lo que viene a ayudar en el proceso ya que pueden preparar sus materiales de apoyos en digital y compartir con los grupos, por otro lado es importante que por medio de estas herramientas digitales el facilitador del proceso de aprendizaje este en continuo aprendizaje partiendo del contexto de los estudiantes de sus grupos
[5:7] La preparación informática de ..
La preparación informática de los docentes que imparten la asignatura de cálculo es básica exceptuando una compañera docente que tiene preparación en programación.
No se han planificado capacitaciones para la actualización en el uso apropiado de software de apoyo en el aprendizaje de las matemáticas, ni en la modelización. Los docentes hacen esfuerzos individuales por aplicar software como derive, matlab y otros.
En fin mi opinión, es que los docentes de cálculo no están lo suficientemente preparados en el uso de software matemático para el aprendizaje de la integral definida.
[4:5] En una escala del 1 al 10 los ..
En una escala del 1 al 10 los valoro en un 8 ya que algunos docentes no solo imparten esta asignatura sino que también imparten asignaturas de estadististica etc.


Necesidades de los docentes de cálculo para el uso efectivo de los recursos informáticos
[1:7] Tiempo, capacitación y adquisi..
Tiempo, capacitación y adquisición de equipos o softwares adaptados a la temática.
[2:7] Desarrollar en los docentes ha..
Desarrollar en los docentes habilidades y destrezas para el dominio efectivo de software matemático
[4:7] Creo que más que necesidad es ..
Creo que más que necesidad es atreverse a dar el paso para la utilización de dicha herramienta informática ya que esto sería más novedoso para dicha asignatura.
[5:9] Necesidad de capacitaciones en..
Necesidad de capacitaciones en el uso efectivo del software que garantice las interpretaciones adecuadas a los resultados y a la comprensión de modelos visuales.
Asignación de un laboratorio de cómputos para el aprendizaje de las matemáticas que motive al trabajo constante y a la generación de productos vinculados con la realidad.
Diseño curricular de guiones de prácticas de laboratorio para la unidad de integral definida.
[3:7] a. Software con sus licencias ..
a.Software con sus licencias
b.Cantidad de computadoras en los laboratorios
c.Computadoras de acuerdo con las especificaciones técnicas no desfasadas


Integración en la actividad docente de lo sugerido en las orientaciones metodológicas del programa
[6:6] Estas se integran desde el pla..
Estas se integran desde el plan didáctico hasta llevarlo a cabo con la planificación y desarrollo con los estudiantes
[7:6] En un 70% integro lo sugerido ..
En un 70% integro lo sugerido en el programa, pero con algunos cambios según el grupo y nivel de aprendizajes de los estudiantes.


Dificultades enfrentadas por los docentes
[6:4] Ocasionalmente que los estudia..
Ocasionalmente que los estudiantes no prestan mucha atención y muestran desinterés, para mejorar se puede trabajar con ellos la motivación
[7:4] Ninguna, la dificultad está en..
Ninguna, la dificultad está en el estudio sistemático del estudiante fuera del aula de clase.

Importancia del uso de medios tecnológicos en el desarrollo de las clases

[1:4] Su uso promueve un aprendizaje..

Su uso promueve un aprendizaje más interactivo, con imágenes y experiencias de otras localidades que le permite al estudiante profundizar en los nuevos conocimientos.

[2:4] La utilidad de la información ..

La utilidad de la información en la parte investigativa, las habilidades y destrezas que tiene el estudiante para adquirirlas

[3:4] Los medios tecnológicos facili..

Los medios tecnológicos facilitan la elaboración de materiales bibliográficos, folletos, entre otros, aparte de esto también vienen a facilitar herramientas como software matemático en el caso de la aplicación de la teoría o la simulación de la misma

[4:4] Sería más atractiva y más llam..

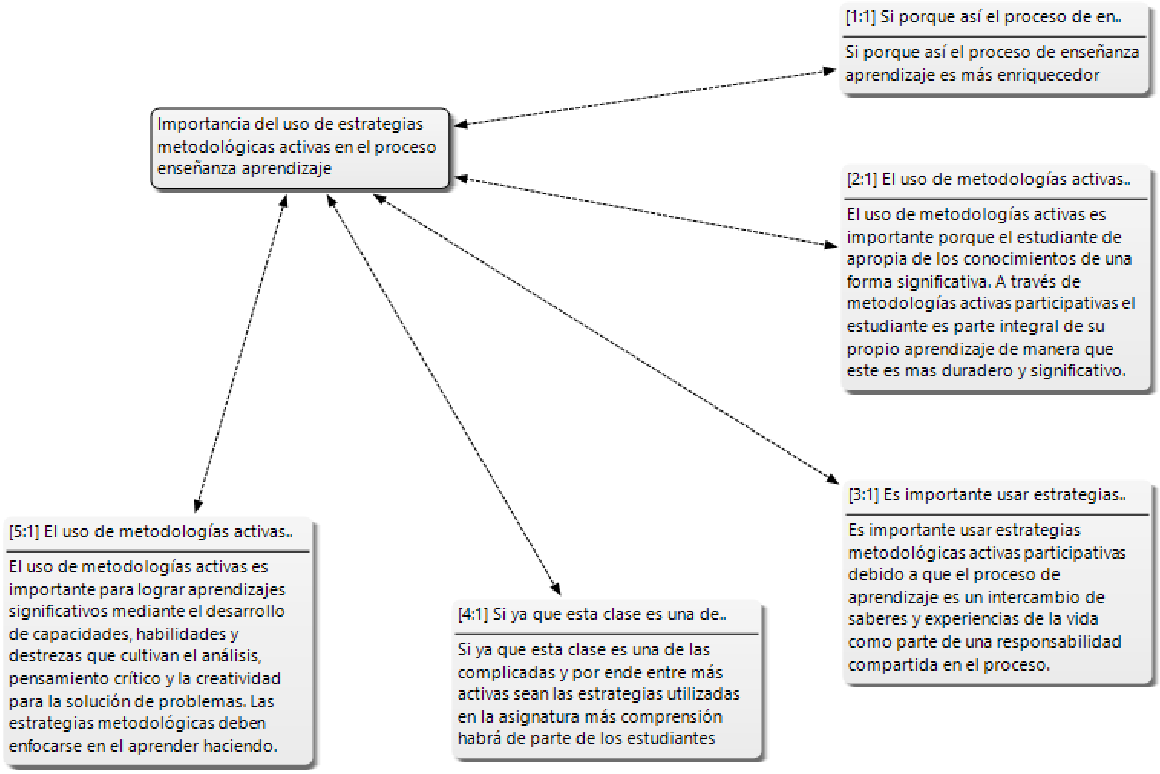
Sería más atractiva y más llamativa ya que esto hace ver la clase más aterrizada a las tendencias de las tecnologías que hoy en día se utilizan y no estaría siempre en lo tradicional a que solo sean ejercicios resueltos en la pizarra por el docente.

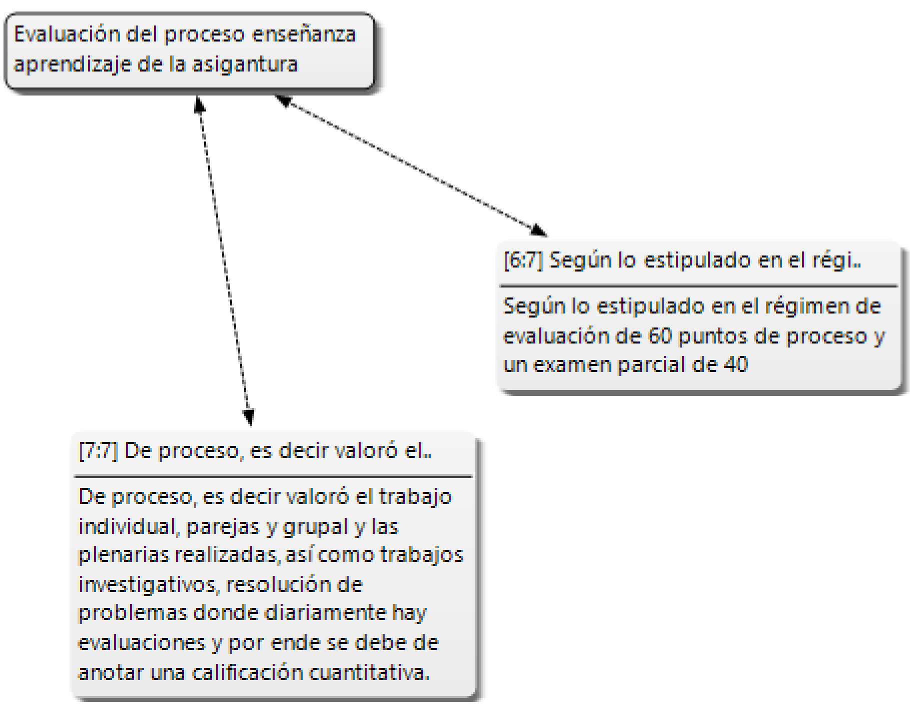
[5:6] El uso de medias tecnológicas ..

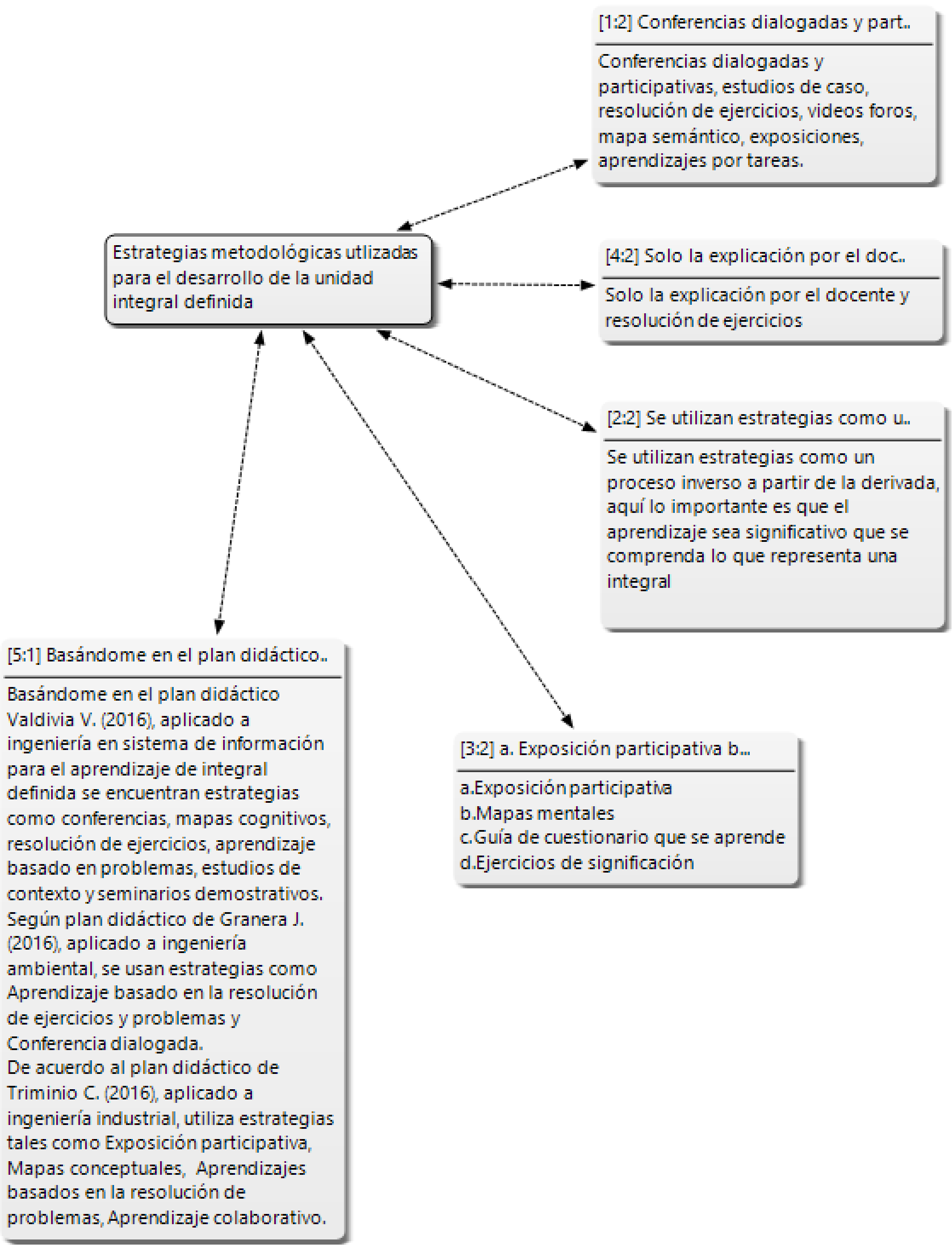
El uso de medias tecnológicas principalmente computadoras es importante para la creación de entornos útiles en el aprendizaje de matemáticas. Estos entornos pueden contribuir a que el estudiante asimile una perspectiva gráfica y numérica de conceptos complejos en el cálculo como por ejemplo la integral definida, traspasando la concepción mecánica y tradicional de una integral que se evalúa solamente en los extremos o límites, sin interpretar lo que sucede en el área bajo la curva. El uso de medios tecnológicos puede hacer las matemáticas más interesantes.

Luego están los aspectos de modelización de la realidad a la que debe contribuir el software matemático para que el estudiante de ingeniería logre comprender la utilidad de las matemáticas en su carrera.

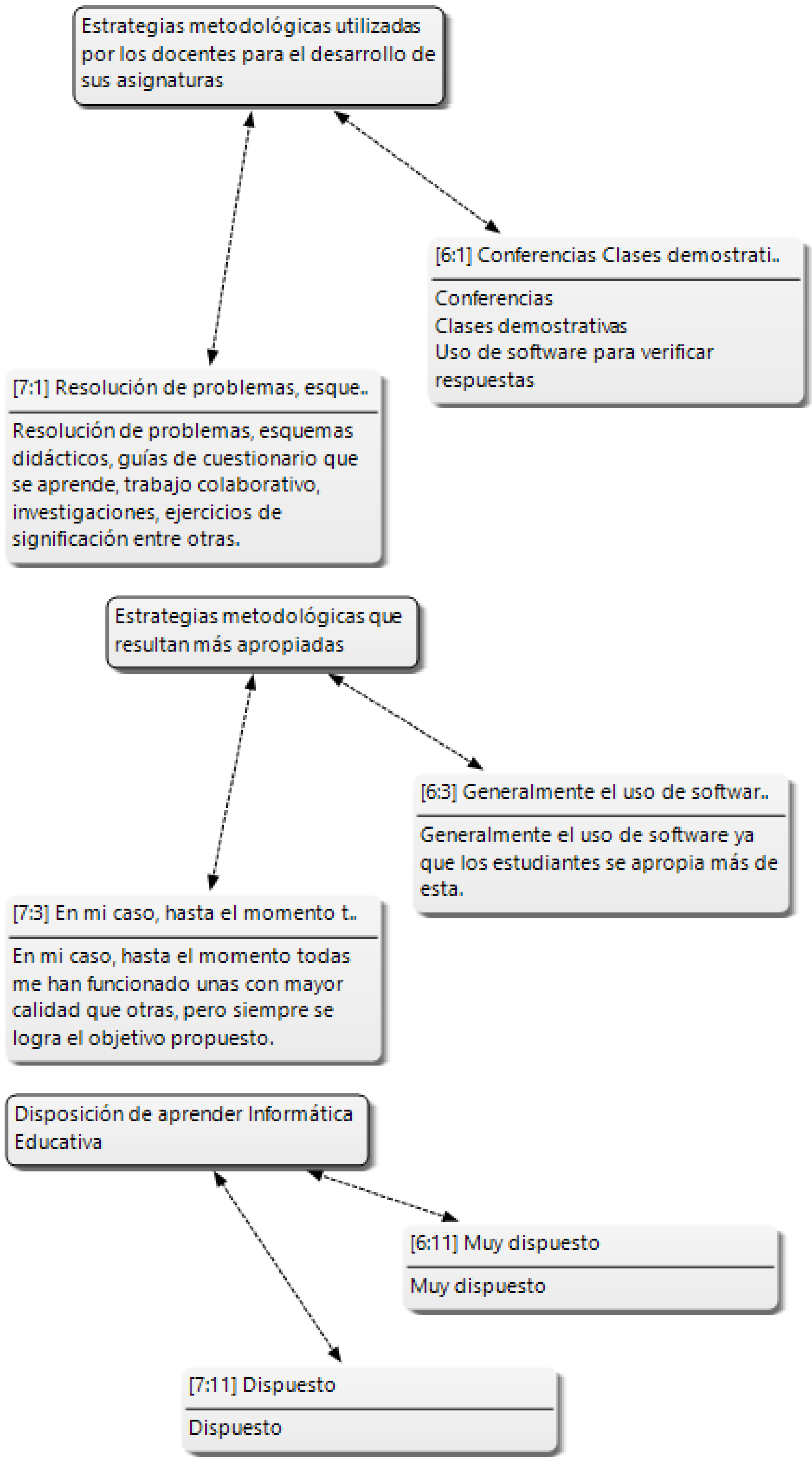
Como siempre hay que tener cuidado con la tecnología y el software de apoyo, porque su uso indebido podría volver el proceso de aprendizaje más mecanicista. Por ejemplo si se utiliza para resolver un gran porcentaje de ejercicios sin comprender los métodos de solución y el funcionamiento interno del software y sin análisis de los resultados, el estudiante será un simple digitalizador de datos de entrada que no entiende porque los escribe y obtendrá gráficas que agregará al informe sin comprender los resultados. El remedio se vuelve pero que la medicina. Esto daría lugar a una serie de interrogantes relacionadas a cuando usar el software, con cuales estudiantes, que ventajas provocaría, como lograr impactos positivos.

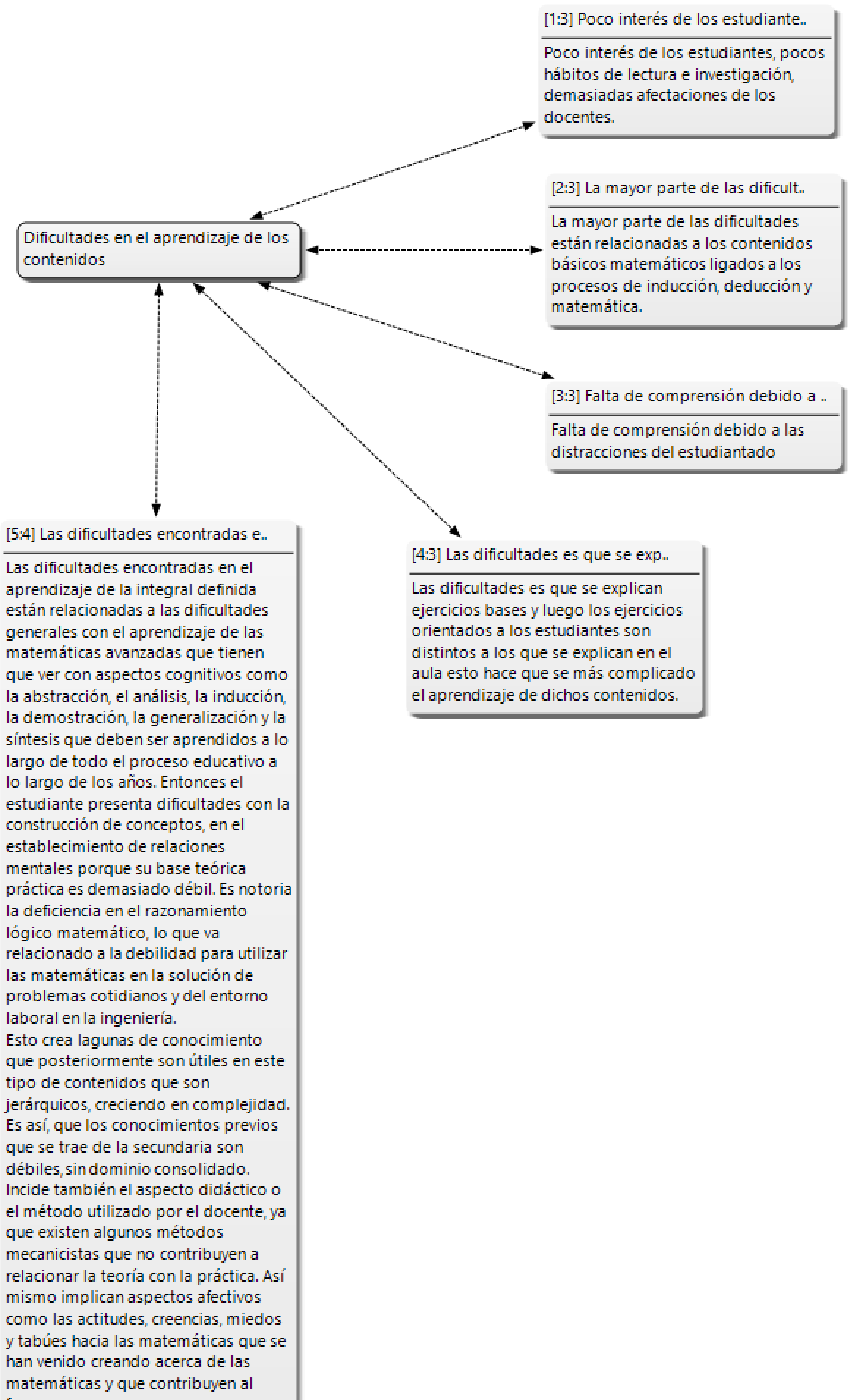

Importancia del uso de estrategias metodológicas activas en el proceso enseñanza aprendizaje
[1:1] Si porque así el proceso de en..
Si porque así el proceso de enseñanza aprendizaje es más enriquecedor
[2:1] El uso de metodologías activas..
El uso de metodologías activas es importante porque el estudiante de apropia de los conocimientos de una forma significativa. A través de metodologías activas participativas el estudiante es parte integral de su propio aprendizaje de manera que este es mas duradero y significativo.
[3:1] Es importante usar estrategias..
Es importante usar estrategias metodológicas activas participativas debido a que el proceso de aprendizaje es un intercambio de saberes y experiencias de la vida como parte de una responsabilidad compartida en el proceso.
[4:1] Si ya que esta clase es una de..
Si ya que esta clase es una de las complicadas y por ende entre más activas sean las estrategias utilizadas en la asignatura más comprensión habrá de parte de los estudiantes
[5:1] El uso de metodologías activas..
El uso de metodologías activas es importante para lograr aprendizajes significativos mediante el desarrollo de capacidades, habilidades y destrezas que cultivan el análisis, pensamiento crítico y la creatividad para la solución de problemas. Las estrategias metodológicas deben enfocarse en el aprender haciendo.

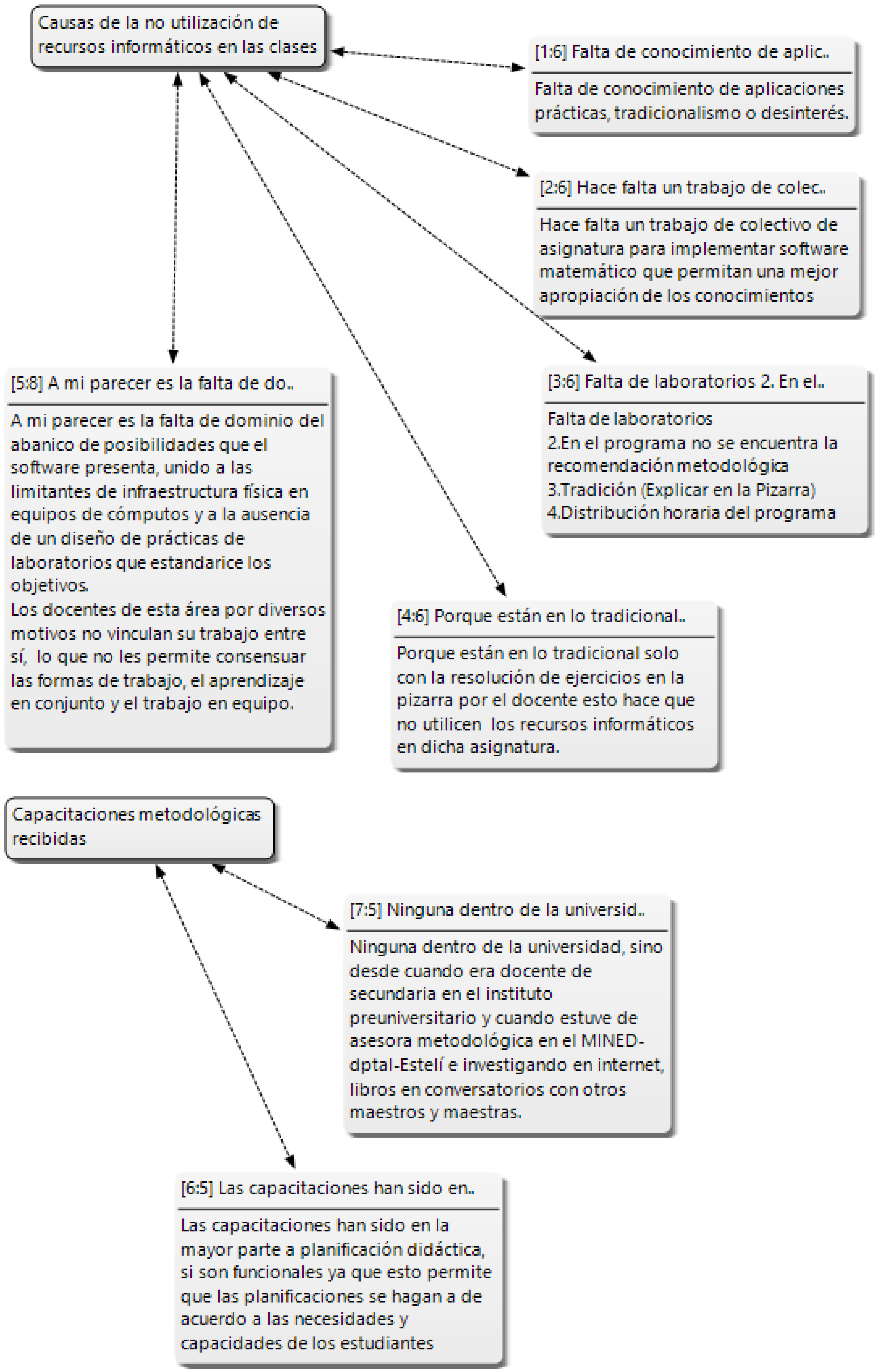

Evaluación del proceso enseñanza aprendizaje de la asignatura
[6:7] Según lo estipulado en el régi..
Según lo estipulado en el régimen de evaluación de 60 puntos de proceso y un examen parcial de 40
[7:7] De proceso, es decir valoró el..
De proceso, es decir valoró el trabajo individual, parejas y grupal y las plenarias realizadas, así como trabajos investigativos, resolución de problemas donde diariamente hay evaluaciones y por ende se debe de anotar una calificación cuantitativa.

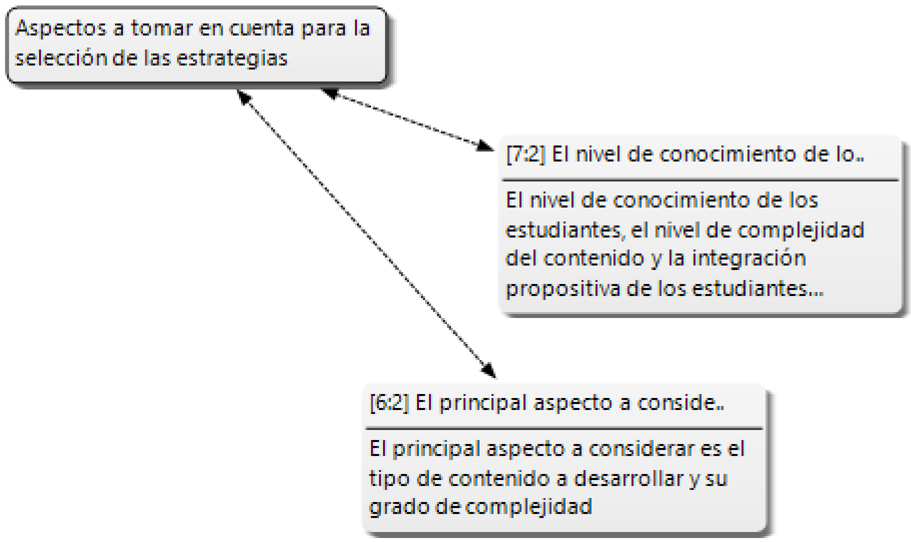


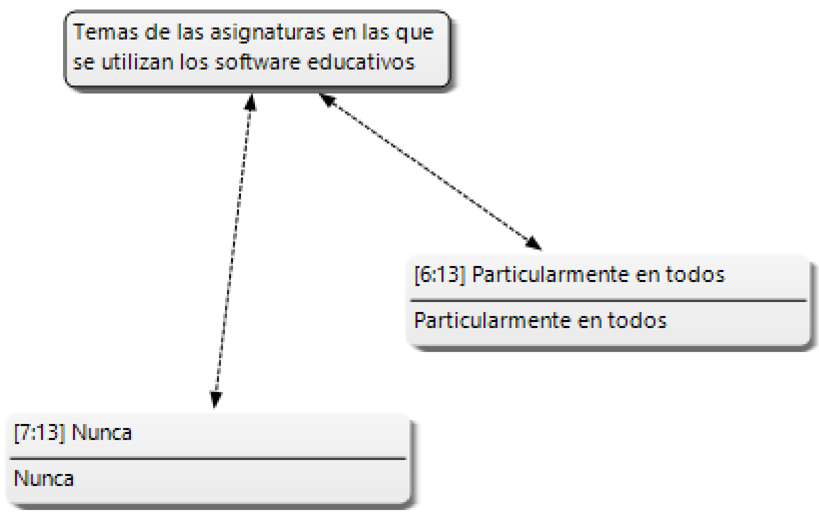
Estrategias metodológicas utlizadas para el desarrollo de la unidad integral definida
[1:2] Conferencias dialogadas y part..
Conferencias dialogadas y participativas, estudios de caso, resolución de ejercicios, videos foros, mapa semántico, exposiciones, aprendizajes por tareas.
[4:2] Solo la explicación por el doc..
Solo la explicación por el docente y resolución de ejercicios
[2:2] Se utilizan estrategias como u..
Se utilizan estrategias como un proceso inverso a partir de la derivada, aquí lo importante es que el aprendizaje sea significativo que se comprenda lo que representa una integral
[5:1] Basándome en el plan didáctico..
Basándome en el plan didáctico Valdivia V. (2016), aplicado a ingeniería en sistema de información para el aprendizaje de integral definida se encuentran estrategias como conferencias, mapas cognitivos, resolución de ejercicios, aprendizaje basado en problemas, estudios de contexto y seminarios demostrativos. Según plan didáctico de Granera J. (2016), aplicado a ingeniería ambiental, se usan estrategias como Aprendizaje basado en la resolución de ejercicios y problemas y Conferencia dialogada.
De acuerdo al plan didáctico de Triminio C. (2016), aplicado a ingeniería industrial, utiliza estrategias tales como Exposición participativa, Mapas conceptuales, Aprendizajes basados en la resolución de problemas, Aprendizaje colaborativo.
[3:2] a. Exposición participativa b...
a.Exposición participativa
b.Mapas mentales
c.Guía de cuestionario que se aprende
d.Ejercicios de significación


Estrategias metodológicas utilizadas por los docentes para el desarrollo de sus asignaturas
[6:1] Conferencias Clases demostrati..
Conferencias
Clases demostrativas
Uso de software para verificar respuestas
[7:1] Resolución de problemas, esque..
Resolución de problemas, esquemas didácticos, guías de cuestionario que se aprende, trabajo colaborativo, investigaciones, ejercicios de significación entre otras.
Estrategias metodológicas que resultan más apropiadas
[6:3] Generalmente el uso de softwar..
Generalmente el uso de software ya que los estudiantes se apropia más de esta.
[7:3] En mi caso, hasta el momento t..
En mi caso, hasta el momento todas me han funcionado unas con mayor calidad que otras, pero siempre se logra el objetivo propuesto.
Disposición de aprender Informática Educativa
[6:11] Muy dispuesto
Muy dispuesto
[7:11] Dispuesto
Dispuesto


[1:3] Poco interés de los estudiante..
Poco interés de los estudiantes, pocos hábitos de lectura e investigación, demasiadas afectaciones de los docentes.
[2:3] La mayor parte de las dificult..
La mayor parte de las dificultades están relacionadas a los contenidos básicos matemáticos ligados a los procesos de inducción, deducción y matemática.
Dificultades en el aprendizaje de los contenidos
[3:3] Falta de comprensión debido a ..
Falta de comprensión debido a las distracciones del estudiantado
[5:4] Las dificultades encontradas e..
Las dificultades encontradas en el aprendizaje de la integral definida están relacionadas a las dificultades generales con el aprendizaje de las matemáticas avanzadas que tienen que ver con aspectos cognitivos como la abstracción, el análisis, la inducción, la demostración, la generalización y la síntesis que deben ser aprendidos a lo largo de todo el proceso educativo a lo largo de los años. Entonces el estudiante presenta dificultades con la construcción de conceptos, en el establecimiento de relaciones mentales porque su base teórica práctica es demasiado débil. Es notoria la deficiencia en el razonamiento lógico matemático, lo que va relacionado a la debilidad para utilizar las matemáticas en la solución de problemas cotidianos y del entorno laboral en la ingeniería.
Esto crea lagunas de conocimiento que posteriormente son útiles en este tipo de contenidos que son jerárquicos, creciendo en complejidad. Es así, que los conocimientos previos que se trae de la secundaria son débiles, sin dominio consolidado. Incide también el aspecto didáctico o el método utilizado por el docente, ya que existen algunos métodos mecanicistas que no contribuyen a relacionar la teoría con la práctica. Así mismo implican aspectos afectivos como las actitudes, creencias, miedos y tabúes hacia las matemáticas que se han venido creando acerca de las matemáticas y que contribuyen al
[4:3] Las dificultades es que se exp..
Las dificultades es que se explican ejercicios bases y luego los ejercicios orientados a los estudiantes son distintos a los que se explican en el aula esto hace que se más complicado el aprendizaje de dichos contenidos.


Causas de la no utilización de recursos informáticos en las clases
[1:6] Falta de conocimiento de aplic..
Falta de conocimiento de aplicaciones prácticas, tradicionalismo o desinterés.
[2:6] Hace falta un trabajo de colec..
Hace falta un trabajo de colectivo de asignatura para implementar software matemático que permitan una mejor apropiación de los conocimientos
[3:6] Falta de laboratorios 2. En el..
Falta de laboratorios
2.En el programa no se encuentra la recomendación metodológica
3.Tradición (Explicar en la Pizarra)
4.Distribución horaria del programa
[4:6] Porque están en lo tradicional..
Porque están en lo tradicional solo con la resolución de ejercicios en la pizarra por el docente esto hace que no utilicen los recursos informáticos en dicha asignatura.
[5:8] A mi parecer es la falta de do..
A mi parecer es la falta de dominio del abanico de posibilidades que el software presenta, unido a las limitantes de infraestructura física en equipos de cómputos y a la ausencia de un diseño de prácticas de laboratorios que estandarice los objetivos.
Los docentes de esta área por diversos motivos no vinculan su trabajo entre sí, lo que no les permite consensuar las formas de trabajo, el aprendizaje en conjunto y el trabajo en equipo.
Capacitaciones metodológicas recibidas
[7:5] Ninguna dentro de la universid..
Ninguna dentro de la universidad, sino desde cuando era docente de secundaria en el instituto preuniversitario y cuando estuve de asesora metodológica en el MINED-dptal-Estelí e investigando en internet, libros en conversatorios con otros maestros y maestras.
[6:5] Las capacitaciones han sido en..
Las capacitaciones han sido en la mayor parte a planificación didáctica, si son funcionales ya que esto permite que las planificaciones se hagan a de acuerdo a las necesidades y capacidades de los estudiantes


Aspectos a tomar en cuenta para la selección de las estrategias
[7:2] El nivel de conocimiento de lo..
El nivel de conocimiento de los estudiantes, el nivel de complejidad del contenido y la integración propositiva de los estudiantes...
[6:2] El principal aspecto a conside..
El principal aspecto a considerar es el tipo de contenido a desarrollar y su grado de complejidad


Temas de las asignaturas en las que se utilizan los software educativos
[6:13] Particularmente en todos
Particularmente en todos
[7:13] Nunca
Nunca

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN-MANAGUA
VICERRECTORÍA ACADÉMICA
DIRECCIÓN ACADÉMICA

Programa de Asignatura
Revisado y Certificado
Dirección Académica
Asesor(a): Maribel Avendaño
Fecha: 2014

"Año del Fortalecimiento de la Calidad"

CERTIFICACIÓN DE PROGRAMAS DE ASIGNATURA
PLAN DE ESTUDIOS 2013

Facultad	Carreras	Fecha
Ciencias e Ingeniería	Licenciatura en Física con mención en Física Médica Licenciatura en Física con mención en Geofísica Matemática Ingeniería Estadística Ingeniería en Ciencias de la Computación Ingeniería en Sistemas de Información	17 de julio de 14

INFORMACIÓN DE CERTIFICACIÓN

Nombre de la Asignatura : Cálculo II

Semestre: IV **Total de Horas**: 225 **Total de Créditos:** 5

Modalidad(es): Presencial

Después de haber constatado que el documento cumple con lo establecido en el Modelo Educativo, Normativa y Metodología para la Planificación Curricular 2011, en lo referido a la elaboración de programas y que además, se han incorporado las observaciones brindadas en las asesorías y en el dictamen, la Dirección Académica da por **Certificado** el programa de asignatura:

Cálculo II

VoBo

Maribel Avendaño
MSc. Maribel del Carmen Avendaño
Asesor(a) Metodológica
Dirección Académica

DIRECCIÓN ACADEMICA
UNAN - MANAGUA

Thelma S. Muñoz
MSc. Thelma Susana Muñoz
Directora de la Dirección Académica
UNAN-Managua

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN-MANAGUA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DOCENTE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Programa de Asignatura
CÁLCULO II

Managua, julio del 2014

1. DATOS GENERALES

Nombre de la asignatura: Cálculo II

Código:

Requisito /Correquisito: Cálculo I

Carrera (s): Física con mención en Física-Médica
Física con mención en Geofísica
Matemática
Ingeniería Estadística
Ingeniería en Ciencias de la Computación
Ingeniería en Sistemas de Información

Modalidad: Presencial

Turno: Diurno y Nocturno

Semestre: IV

Número total de horas: 225
(75 Presencial y 150 Estudio Independiente)

Frecuencia Semanal: 5 horas

Número de Créditos: 5

Área de formación a la que pertenece: Básica

2. INTRODUCCIÓN

Cálculo II es una asignatura de formación básica, impartida en el cuarto semestre académico de las carreras de Licenciatura en Matemática, Física con mención en Física Médica, Física con mención en Geofísica; así como en las carreras de ingenierías: Estadística, Ciencias de la Computación y Sistemas de Información.

Está ubicada dentro de los planes de estudio del segundo año de las carreras de Licenciatura en Matemática, Física con mención en Física Médica, Física con mención en Geofísica e Ingenierías (Estadística, Sistemas de Información, Ciencias de la Computación) que ofrece la UNAN-Managua. Cálculo II tiene como asignaturas precedentes y consecuentes, el Cálculo I y Cálculo III, respectivamente. Asimismo, para todas las carreras Cálculo I es un prerrequisito de Cálculo II, y este último a su vez se convierte en un prerrequisito para Cálculo III para las carreras de Licenciatura en Matemática, Física con mención en Física Médica, Física con mención en Geofísica e Ingenierías Estadística. Por tal razón, se hace indispensable que al culminar la materia Cálculo II, el alumno haya adquirido los conceptos necesarios para afrontar con éxito asignaturas que se relacionan con el cálculo integral.

Cálculo II favorece el desarrollo de un pensamiento lógico, formal y algorítmico en el futuro profesional, lo que le permitirá analizar, criticar, precisar, abstraerse, argumentar, formalizar, intuir, modelar, resolver y tomar decisiones en la solución de problemas de aplicación de la vida diaria. Además, esta asignatura proporciona al perfil profesional una herramienta fundamental para su desempeño en la realización de procesos de investigación básica o aplicada en áreas de su competencia.

Este programa de asignatura está estructurado de la siguiente forma: Datos Generales, Introducción, Descriptor de la asignatura, fundamentación (mapa de la asignatura), objetivos generales de la asignatura, plan temático, objetivos, contenidos y recomendaciones metodológicas por unidad, recursos didácticos, sistema de evaluación, bibliografía y firmas de los miembros de la comisión de elaboración del mismo.

3. DESCRIPTOR DE LA ASIGNATURA

Cálculo II es una asignatura que permite al alumno aplicar los conceptos, propiedades, métodos, algoritmos y teoremas del Cálculo Integral, para la solución del problema esencial del Cálculo Integral (**calcular áreas de superficies**) y de problemas contextualizados. La característica más sobresaliente de esta asignatura es que en ella se estudia la aproximación de funciones mediante las series de potencias, facilitando así algunos cálculos diferenciales e integrales con las mismas.

Asimismo, se estudian varios conceptos descritos como el producto de dos variables; por ejemplo: trabajo, como fuerza por distancia; fuerza como el producto de la presión por el área; masa como densidad por volumen.

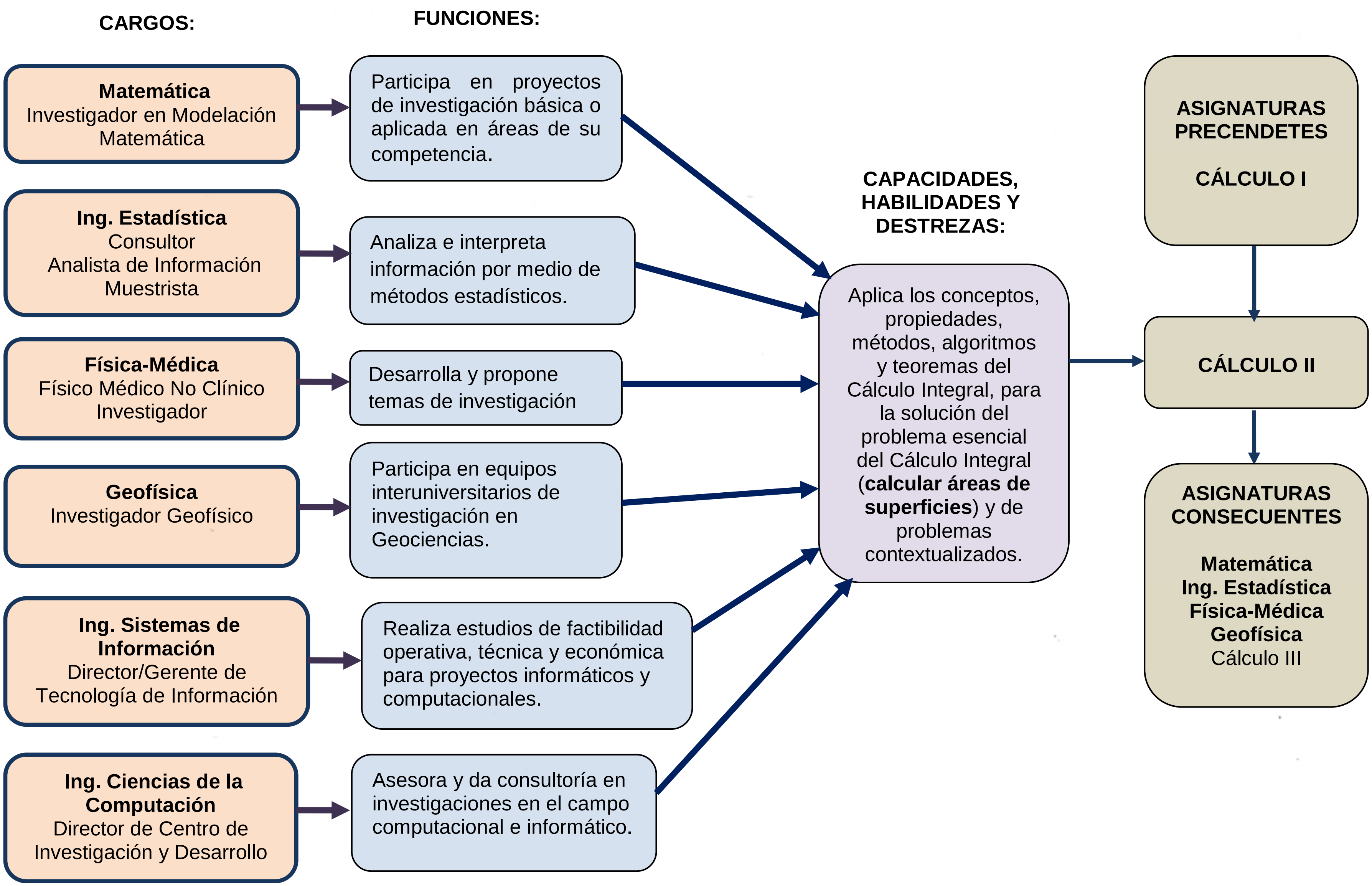
Los principales contenidos son:

Unidad 1: La integral.	Integral Indefinida: concepto y propiedades. Integral definida: definición y teoremas fundamentales. Distintos métodos para evaluar integrales.
Unidad 2: Aplicaciones de la integral.	Conceptos de área. Concepto de longitud de arco y volumen de una superficie. Otras aplicaciones de la integral en la Física.
Unidad 3: Sucesiones y series.	Sucesiones numéricas: definiciones, propiedades y teoremas. Criterios de convergencias de las series numéricas. Desarrollo de Series de Potencias.

La resolución de problemas de aplicación es un tópico común en todo el desarrollo del programa de Cálculo II.

Cálculo II consta de 75 horas presenciales y 150 horas de estudio independiente, para un total de 225 horas, equivalentes a 5 créditos.

4. FUNDAMENTACIÓN (MAPA DE LA ASIGNATURA)



5. OBJETIVOS GENERALES DE LA ASIGNATURA

N°	CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
	Analizar conceptos, propiedades, métodos, algoritmos y teoremas del Cálculo Integral.	Aplicar los conceptos, propiedades, métodos, algoritmos y teoremas del Cálculo Integral, para la solución del problema esencial del Cálculo Integral (**calcular áreas de superficies**) y de problemas contextualizados.	Actuar con respeto y responsabilidad ante el trabajo individual, el trabajo cooperativo y el procesamiento global de los contenidos en el aula.

6. PLAN TEMÁTICO

Modalidad Presencial

N°	Nombre de la unidad	Total de horas presenciales		Horas de estudio Independiente	Total de horas
		Teóricas	Prácticas		
1	La integral	12	21	66	99
2	Aplicaciones de la integral	8	13	42	63
3	Sucesiones y series	8	13	42	63
	Total	28	47	150	225

7. OBJETIVOS, CONTENIDOS Y RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS POR UNIDAD

Unidad 1: La integral

	OBJETIVOS	CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Conceptuales	Explicar el concepto y las propiedades de la integral indefinida.	Integral Indefinida: concepto y propiedades.	Integral indefinida. Concepto. Propiedades. Resolución de ecuaciones diferenciales por variables separables. Tablas de integrales. Cambio de variable.
	Conocer la definición y los teoremas fundamentales de la integral definida.	Integral definida: definición y teoremas fundamentales.	Integral Definida. Notación sigma. Cálculo de áreas por rectángulos inscritos y circunscritos. Suma de Riemann. Propiedades fundamentales: Teorema del Valor Medio. Teorema Fundamental del Cálculo. Evaluación de integrales definidas.
	Reconocer los distintos métodos para evaluar una integral.	Métodos para evaluar integrales.	Integración por partes. Integrales de potencias de funciones trigonométricas. Integración por sustituciones trigonométricas. Integración por descomposición en fracciones parciales. Integrales impropias y propiedades.
Procedimentales	Aplicar los conceptos, definiciones, propiedades y teoremas de la integral indefinida en la resolución de problemas contextualizados.	Aplicación de los conceptos, definiciones, propiedades y teoremas de la integral indefinida en la resolución de problemas contextualizados.	Aplicación de los conceptos, definiciones, propiedades y teoremas de la integral indefinida en la solución de ecuaciones diferenciales por variables separables.
	Utilizar la definición y los teoremas fundamentales de la integral definida para la representación gráfica del área bajo la curva de una función, con algunos rectángulos típicos.	Utilización de la definición y los teoremas fundamentales de la integral definida para la representación gráfica del área bajo la curva de una función, con algunos rectángulos típicos.	Utilización de la definición y los teoremas fundamentales de la integral definida para la representación gráfica del área bajo la curva de una función: Notación sigma, cálculo de áreas por rectángulos inscritos y circunscritos, sumas de Riemann.

	OBJETIVOS	CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Procedimental	Aplicar los distintos métodos de integración que permiten la resolución de problemas contextualizados.	Aplicación de los distintos métodos de integración que permiten la resolución de problemas contextualizados.	Aplicación de los distintos métodos de integración: Integración por partes. Integrales de potencias de funciones trigonométricas. Integración por sustituciones trigonométricas. Integración por descomposición en fracciones parciales. Integrales impropias y propiedades.
Actitudinales	Actuar con responsabilidad durante el trabajo individual y en equipo.	Actúa con responsabilidad durante el trabajo individual y en equipo.	

Recomendaciones Metodológicas de la Unidad 1:

Para desarrollar la unidad de “La integral”, se sugieren las siguientes recomendaciones metodológicas:

Preguntas exploratorias: En la primera semana de clases se hará una exploración de los conocimientos del concepto de límite de una función, continuidad de una función y derivada de una función en el grupo de estudiantes, a través de preguntas directas formuladas por el docente para promover la discusión grupal con enfoque participativo. Para superar las debilidades encontradas en esta etapa exploratoria al estudiante se le entregará una guía de preguntas y ejercicios para consolidar los conceptos básicos.

Conferencias: Hacer énfasis en el principal propósito de esta unidad, que el alumno identifique una función dada y que pueda determinar el método apropiado para calcular la integral de dicha función. Se deberá orientar a los estudiantes en el uso correcto de las tablas de fórmula de la integral (formulario) y calculadora como un instrumento auxiliar para agilizar la realización de ejercicios o problemas. En las carreras de servicio, el estudio de los teoremas sobre la integral definida se hará sin plantear las demostraciones formales de los mismos, sino haciendo un análisis descriptivo e interpretativo. Sin embargo, en la carrera de Matemática, además de hacer un análisis descriptivo e interpretativo, se deben presentar las demostraciones formales de los teoremas.

Mapas cognitivos: Para alcanzar un aprendizaje significativo se entregará al estudiante una guía de lectura de la unidad 1 que deberá desarrollar durante sus horas de estudio independiente. En esta guía se orientará la realización de mapas cognitivos de los contenidos conceptuales de integral indefinida e integral definida para reforzar el conocimiento adquirido en el aula de clase.

Aprendizaje basado en problemas: Al estudiante se le entregará una guía de ejercicios de la unidad 1 en la que se orientará la realización de ejercicios y problemas relativos a la aplicación de los métodos de integración para evaluar integrales.

Los estudiantes deberán desarrollar durante sus horas de estudio independiente la guía de lectura y la guía de ejercicios de la unidad 1; estas serán el material de apoyo que preparará al estudiante para las evaluaciones, tales como tareas y pruebas en forma individual o grupal.

Durante el desarrollo de la unidad 1, el estudiante entregará dos trabajos, y realizará una prueba corta al finalizar la unidad; los contenidos a evaluar estarán acorde a la guía de ejercicios de la unidad 1.

Unidad 2: Aplicaciones de la integral

	OBJETIVOS	CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Conceptuales	Interpretar el concepto de área como una integral definida.	Concepto de área como una integral definida.	Áreas en coordenadas cartesianas: área bajo la gráfica de una función, área entre las gráficas de funciones. Áreas en coordenadas polares.
	Reconocer el concepto de longitud de arco y volumen de una superficie como una integral definida.	Concepto de longitud de arco y volumen de una superficie como una integral definida.	Longitud de una curva: paramétrica, en coordenadas cartesianas y en polares. Superficies de revolución. Volumen de sólidos de revolución.
	Conocer otras aplicaciones de la integra definida en la Física.	Otras aplicaciones de la integral definida en la Física.	Centro de masa, fuerza, trabajo.
Procedimentales	Utilizar el concepto de área como una integral definida para la solución de problemas contextualizados.	Utilización del concepto de área como una integral definida para la solución de problemas contextualizados.	Utilización del concepto de área como una integral definida para la solución de problemas contextualizados sobre: área bajo la gráfica de una función, área entre las gráficas de funciones.
	Aplicar los conceptos de longitud de arco y volumen de una superficie como una integral definida en la solución de problemas contextualizados.	Aplicación de los conceptos de longitud de arco y volumen de una superficie como una integral definida en la solución de problemas contextualizados.	Aplicación de los conceptos de longitud de arco y volumen de una superficie como una integral definida en la solución de problemas contextualizados sobre: longitud de una curva, superficies de revolución y volumen de sólidos de revolución.
	Utilizar otras aplicaciones de la integral definida en la resolución de problemas contextualizados de la Física.	Utilización de otras aplicaciones de la integral definida en la resolución de problemas contextualizados de la Física.	Utilización de otras aplicaciones de la integral definida en la resolución de problemas contextualizados de la Física: centro de masa, fuerza, trabajo.
Actitudinal	Actuar con respeto durante el procesamiento grupal de los contenidos en el aula.	Actúa con respeto durante el procesamiento grupal de los contenidos en el aula.	

Recomendaciones Metodológicas de la Unidad 2:

Para el desarrollo de la unidad dedicada al estudio de las “Aplicaciones de la integral” y en atención al nuevo Modelo Educativo centrado en el estudiante se recomienda tomar en cuenta las siguientes recomendaciones metodológicas que contribuyen a la dinamización del proceso docente educativo. A continuación se enumeran:

Preguntas exploratorias: En la séptima semana de clases se hará una exploración de los conocimientos de conceptos previos al cálculo de áreas y volúmenes, y sobre el teorema fundamental del cálculo, a través de preguntas dirigidas por el docente para propiciar una discusión y un procesamiento grupal. Con el fin de superar los obstáculos y dificultades encontradas en esta diagnosis, al estudiante se le entregará una guía de preguntas y ejercicios para consolidar los conceptos básicos.

Conferencias: Hacer énfasis en el principal propósito de esta unidad, que el alumno comprenda cómo se aplica la integral definida en el cálculo de áreas, volúmenes, longitud de un arco y para resolver problemas contextualizados de la Física (centro de masa, fuerza y trabajo).

Mapas cognitivos: Para alcanzar un aprendizaje significativo al estudiante se le entregará una guía de lectura de la unidad 2, que le permitirá organizar la información de esta unidad para una mejor comprensión, y que deberá desarrollar durante sus horas de estudio independiente. En la guía de lectura se indicará al estudiante la elaboración de mapas cognitivos de los contenidos conceptuales de las aplicaciones de la integral en el cálculo de áreas, volúmenes, longitud de arco, centroides, fuerza y trabajo; permitiendo al estudiante reforzar el conocimiento adquirido en el aula de clase.

Aprendizaje basado en problemas: Al estudiante se le entregará una guía de ejercicios de la unidad 2 en la que se orientará la realización de ejercicios y problemas relativos a las aplicaciones de la integral.

En las horas de estudio independiente, los estudiantes trabajarán la guía de lectura y la guía de ejercicios de la unidad 2. Asimismo, durante el desarrollo de la unidad 2, entregará un trabajo y realizará dos pruebas cortas. Los contenidos a evaluar estarán acorde a la guía de ejercicios de la unidad 2.

Unidad 3: Sucesiones y series

	OBJETIVOS	CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Conceptuales	Conocer las definiciones, propiedades y teoremas de las sucesiones numéricas.	Sucesiones numéricas: definiciones, propiedades y teoremas.	Sucesiones monótonas. Sucesiones aritméticas y geométricas. Convergencia de sucesiones
	Reconocer los criterios de convergencias de las series numéricas.	Criterios de convergencias de las series numéricas.	Series infinitas. Serie numérica. Serie con términos positivos. Serie alternante. Criterios de convergencia: criterios de la integral, comparación, comparación por límite, de la razón y de la raíz. Convergencia absoluta y condicional.
	Explicar el desarrollo de series de potencias.	Desarrollo de Series de Potencias.	Radio e Intervalo de convergencia. Serie de Taylor. Serie de Maclaurin. Integrales de funciones expresadas como series de Taylor. Aproximación de funciones por series de potencias
Procedimentales	Utilizar las definiciones, propiedades y teoremas de las sucesiones numéricas para el análisis de la convergencia de una sucesión.	Utilización de las definiciones, propiedades y teoremas de las sucesiones numéricas para el análisis de la convergencia de una sucesión.	Utilización de las definiciones, propiedades y teoremas de las sucesiones numéricas para el análisis de la convergencia de una sucesión.
	Aplicar los criterios para la determinación de la convergencia o divergencia de determinadas series.	Aplicación de los criterios para la determinación de la convergencia o divergencia de determinadas series.	Aplicación de los criterios para convergencia: criterios de la integral, comparación, comparación por límite, de la razón y de la raíz. Convergencia absoluta y condicional.
	Aplicar el desarrollo de series de potencias para la aproximación de funciones.	Aplicación del desarrollo de series de potencias para la aproximación de funciones.	Aplicación del desarrollo de series de potencias para la aproximación de funciones: serie de Taylor, serie de Maclaurin (Radio e Intervalo de convergencia).
Actitudinales	Actuar con respeto y responsabilidad durante el trabajo en equipo para la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	Actúa con respeto y responsabilidad durante el trabajo en equipo para la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	

Recomendaciones Metodológicas de la Unidad 3:

Para el desarrollo de la unidad dedicada al estudio de las “Sucesiones y series” es imprescindible tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

Diagnosis: En la semana 12 de clases se harán preguntas exploratorias sobre las progresiones aritméticas y geométricas, y sobre la suma de sus términos, propiciando una discusión que deje definidas las bases teóricas para un estudio más general de las sucesiones y series. También se le entregará al estudiante una guía de preguntas y ejercicios para consolidar estos conceptos básicos.

Conferencias: Hacer énfasis en el principal propósito de esta unidad: que el alumno sea capaz de determinar la convergencia o divergencia de una serie, así como la aproximación de una función mediante series de potencias. Los principales resultados de la convergencia de una sucesión, los criterios de convergencia y los desarrollos en series de potencias no serán demostrados, únicamente se hará un análisis descriptivo e interpretativo de los mismos, exceptuando en la carrera de matemática.

Mapas cognitivos: Para alcanzar un aprendizaje significativo al estudiante se le entregará una guía de lectura de la unidad 3. En esta se indicará al estudiante la elaboración de mapas cognitivos de los principales criterios de convergencia de las series numéricas, para reforzar el conocimiento adquirido durante las conferencias.

Aprendizaje basado en problemas: Al estudiante se le entregará una guía de ejercicios y problemas contextualizado de la unidad 3, es decir, sobre las sucesiones y series.

Durante las horas de estudio independiente, los estudiantes trabajarán las guías de lectura y de ejercicios de la unidad 3; estas serán el material de apoyo que preparará al estudiante para las evaluaciones, tales como tareas y pruebas en forma individual o grupal.

Durante el desarrollo de la unidad 3, el estudiante entregará un trabajo y realizará una prueba corta, cuyo contenido se fundamentará en la guía de ejercicios de la unidad 3.

8. RECURSOS DIDÁCTICOS

- A través de breves reseñas históricas del Cálculo II, el profesor abordará los temas de manera tal que propicie en el alumno el trabajo cooperativo y la aplicación de dichos conceptos a través de la experimentación y el modelado, logrando con ello la realización de las tareas programadas para el desarrollo de las competencias según los objetivos generales.

- Utilización de software de matemáticas o calculadoras graficadoras para facilitar la comprensión de algunos conceptos, la resolución de problemas y la interpretación de resultados. Esto estará en dependencia de la disponibilidad de laboratorios de computación.

- Utilización de textos sugeridos; diagnóstico (1, 2, 3); guías de lectura (1, 2 y 3); guías de ejercicios y problemas (1, 2 y 3). Los problemas propuestos en las guías de trabajo deben corresponder a preguntas o ejercicios de reproducción, de conexión y, sobre todo, de reflexión; que permitan al estudiante la integración de los contenidos, para su análisis y solución.

- Para el desarrollo eficiente de los temas, clases prácticas, resolución de problemas se apoyará la docencia en el uso de medios tales como:

  - Pizarrón y Marcadores a colores.
  - Estuche geométrico para pizarra.
  - Computadora.
  - Data show.
  - Micrófonos.

9. SISTEMA DE EVALUACIÓN

Para presentarse a las evaluaciones los estudiantes deben acumular por lo menos un 75% de asistencia a clases (Cursos presenciales). El docente deberá llevar el registro de la asistencia de los estudiantes en cada sesión de clases.

Se realizará un examen escrito, que se aplicará en las semanas 11 o 12 del semestre y que tendrá un valor del 40% de la nota final. Se realizarán 4 pruebas cortas y 4 trabajos, distribuidos en el transcurso del semestre, los que acumulados representarán el 60% de la Nota Final.

La evaluación de la asignatura debe ser continua y se debe considerar el desempeño en cada una de las actividades de aprendizaje, haciendo especial énfasis en obtener evidencias de aprendizaje como:

• Solución de ejercicios.
• Actividades de investigación.
• Elaboración de modelos o prototipos.
• Análisis y discusión grupal.
• Resolución de problemas con apoyo de software.
• Exámenes escritos para comprobar el manejo de aspectos teóricos y prácticos.

10. BIBLIOGRAFÍA

Aguilar, A. (2010). *Cálculo Integral*. México: Pearson.

Ayres, F. (2005). *Cálculo*. México: McGraw-Hill.

Demidovich, B. (1977). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Moscú: Editorial MIR.

Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.

Larson, R. (2009). *Matemáticas 1 (Cálculo Diferencial)*. México: McGraw-Hill.

Leithold, L. (2009). *El Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial Oxford University Press.

Piskunov, N. (1983). *Cálculo Diferencial e Integral (Tomo I)*. Moscú: Editorial MIR.

Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Thomas, G. (2010). *Cálculo en una variable*. México: Pearson.

Thomas, G. (2006). *Cálculo en varias variables*. México: Pearson.

Zill, D. (1987). *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Programa de Asignatura
Revisado y Certificado
Dirección Académica
Asesor(a): ____________
Fecha: ____________

11. FIRMAS

MIEMBROS DE LA COMISIÓN AD HOC

NOMBRES Y APELLIDOS	FIRMA
MSc. Hellen Amanda Parrales Cano Directora de Dpto. de Matemática y Estadística	
MSc. Gustavo González Delegado de la carrera de Física con mención en Geofísica	
MSc. Freddy Israel Somarriba Vanegas Coordinador de la carrera de Física con mención en Física Médica	
MSc. Reynerio Bermúdez Delegado de Ing. en Ciencias de la Computación e Ing. en Sistemas de la Información	
MSc. Juan Wilfredo Calderón Carmona, Especialista	
MSc. Cesar Alejandro Vanegas Reyes, Especialista	
MSc. José Jesús Mendoza Casanova, Especialista	
Lic. Marvin Hernán Herrera Vivas, Especialista	

Aprobado en reunión de la Comisión Ad Hoc efectuada el quince de julio del año dos mil catorce.

Vo.Bo.

MSc. Hugo Gutiérrez Ocón
Decano de la Facultad de Ciencias e Ingeniería

Programa de Asignatura
Revisado y Certificado
Dirección Académica
Asesor(a):
Fecha: 2014

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN-MANAGUA

VICERRECTORÍA ACADÉMICA

DIRECCIÓN ACADÉMICA

"Año del Fortalecimiento de la Calidad"

CERTIFICACIÓN DE PROGRAMAS DE ASIGNATURA
PLAN DE ESTUDIOS 2013

Facultad	**Carreras**	**Fecha**
FAREM-Estelí	Ingeniería Ambiental Ingeniería en Energía Renovable	03032014

INFORMACIÓN DE CERTIFICACIÓN

Nombre de la Asignatura : Cálculo Diferencial e Integral

Semestre: III **Total de Horas**: 180 **Total de Créditos:** 4

Modalidad(es): Presencial

Después de haber constatado que el documento cumple con lo establecido en el Modelo Educativo, Normativa y Metodología para la Planificación Curricular 2011, en lo referido a la elaboración de programas y que además, se han incorporado las observaciones brindadas en las asesorías y en el dictamen, la Dirección Académica da por **Certificado** el programa de asignatura:

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

VoBo

DIRECCIÓN ACADEMICA
UNAN - MANAGUA

MSc. Maribel del Carmen Avendaño
Asesor(a) Metodológica
Dirección Académica

MSc. Thelma Susana Muñoz
Directora de la Dirección Académica
UNAN-Managua

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN-MANAGUA
FACULTAD DE CIENCIAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA

Programa de Asignatura
Cálculo Diferencial e Integral

Managua, febrero 2014

1. DATOS GENERALES

Nombre de la asignatura:	Cálculo Diferencial e Integral
Código:	
Requisito /Correquisito:	Ninguna
Carrera (s):	Ingeniería Ambiental Ingeniería en Energía Renovable
Modalidad:	Presencial
Turno:	Matutino y Vespertino
Semestre:	III Ingeniería Ambiental Ingeniería en Energía Renovable
Número total de horas:	180 horas, (60 Presencial y 120 Estudio Independiente)
Frecuencia Semanal:	4 horas por semana
Número de Créditos:	4
Área de formación a la que pertenece:	Formación Básica

2. INTRODUCCIÓN

La asignatura Cálculo Diferencial e Integral está ubicada dentro de la formación básica de las carreras Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Energías Renovables. Cabe señalar que para estas carreras este curso es impartido en el tercer semestre académico.

Cálculo Diferencial e Integral proporciona conceptos básicos y esenciales que contribuyen a desarrollar en el estudiante un pensamiento lógico, heurístico y algorítmico que le permitirá comprender fenómenos donde interviene el concepto de variabilidad, además de modelar y resolver problemas referidos a fenómenos reales en las diferentes áreas de las ciencias e ingenierías. Esta asignatura tiene asignaturas precedentes y consecuentes en las carreras de **Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Energías Renovables**: Matemática General, Ecuaciones diferenciales ordinarias, Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, Física II, Termometría y Termodinámica y Circuitos Eléctricos.

Con esta asignatura, se pretende que el estudiante adquiera los conceptos necesarios para resolver problemas de optimización y de cálculo de áreas de superficies en el sentido que se pueda dar respuesta a diversos problemas de aplicación contextualizados.

El programa de Cálculo Diferencial e Integral está estructurado de la siguiente manera: Datos generales, introducción, descriptor de la asignatura, fundamentación, objetivos generales, plan temático, objetivos, contenidos y orientaciones metodológicas por unidad, recursos didácticos, sistema de evaluación, bibliografía y firmas de los miembros de la comisión.

3. DESCRIPTOR DE LA ASIGNATURA

El curso de Cálculo Diferencial e Integral permite al estudiante aplicar los conceptos, métodos, algoritmos y técnicas de derivación e integración en la resolución de situaciones y problemas contextualizados. La característica más sobresaliente de esta asignatura es que en ella se estudian los principales conceptos sobre los que se fundamenta todo el cálculo diferencial e integral: magnitudes variables, función, límite, continuidad, derivada e integral.

Los principales contenidos son:

Unidad 1: Introducción a la derivada	Límite de una función: Concepto. Propiedades. Continuidad de una función: Definición. Derivada: Interpretación física y geométrica.
Unidad 2: La derivada y sus aplicaciones	Propiedades de la derivada y las reglas generales de derivación de funciones. Derivada de funciones implícitas, ecuaciones paramétricas y de orden superior. Conceptos, propiedades y criterios sobre máximos y mínimos de una función.
Unidad 3: La integral y sus aplicaciones	Conceptos de antiderivada e integral indefinida. Fórmulas y métodos de integración. Concepto de integral definida como el área bajo una curva y entre dos curvas. Algoritmos de integración numérica.

El Curso de Cálculo Diferencial e Integral, tiene un total de 180 horas (60 horas presenciales y 120 horas de estudio independiente), equivalentes a 4 créditos.

Asesor(a):
Fecha: 2014

4. FUNDAMENTACIÓN (MAPA DE LA ASIGNATURA)

CARGOS:

Consultor
Investigador ambiental
Realiza evaluaciones de impacto y riesgo ambiental, planes de contingencia y mitigación.

Diseñador e instalador de proyectos energéticos
Diseña e instala sistemas de generación de energía con fuentes renovables

FUNCIONES

Realiza evaluaciones de impacto y riesgo ambiental, planes de contingencia y mitigación.

Desarrolla investigaciones sobre problemas ambientales.

Diseña e instala sistemas de generación de energía con fuentes renovables

CAPACIDADES HABILIDADES Y DESTREZAS

Aplica los conceptos, métodos, algoritmos y técnicas de derivación e integración en la resolución de situaciones y problemas contextualizados.

ASIGNATURAS PRECEDENTES

Matemática General

Cálculo Diferencial e Integral

ASIGNATURAS CONSECUENTES
Ingeniería Ambiental

- Ecuaciones Diferenciales

Ingeniería en Energías Renovables

- Ecuaciones diferenciales ordinarias
- Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales
- Física II
- Termometría y Termodinámica
- Circuitos Eléctricos

5. OBJETIVOS GENERALES DE LA ASIGNATURA

N°	CONCEPTUALES	PROCEDIMENTALES	ACTITUDINALES
1.	Conocer los conceptos, métodos, algoritmos y técnicas de derivación e integración en la resolución de situaciones y problemas contextualizados.	Aplicar los conceptos, métodos, algoritmos y técnicas de derivación e integración en la resolución de situaciones y problemas contextualizados.	Desarrollar el hábito de estudio independiente y colectivo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.

6. PLAN TEMÁTICO

Modalidad Presencial

N°	Nombre de la unidad	Total de horas presenciales		Horas de estudio Independiente	Total de horas
		Teóricas	Prácticas		
1	Introducción a la derivada	8	7	30	45
2	La derivada y sus aplicaciones	10	10	40	60
3	La integral y sus aplicaciones	12	13	50	75
Total		**30**	**30**	**120**	**180**

7. OBJETIVOS, CONTENIDOS Y RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS POR UNIDAD

Unidad 1: Introducción a la derivada

	OBJETIVOS	CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Conceptuales	– Interpretar el concepto y propiedades del límite de una función. – Explicar la definición de continuidad de una función. – Comprender el concepto físico y geométrico de la derivada.	– Límite de una función: Concepto. Propiedades. – Continuidad de una función: Definición. – Derivada: Interpretación física y geométrica.	– Idea intuitiva de límite de una función, límites laterales, propiedades de límites, limites infinitos y límites en el infinito. – Definición de continuidad de una función en un punto y en un intervalo. – Velocidad media e instantánea. Pendiente de la recta tangente.
Procedimentales	– Calcular el límite de funciones aplicando las propiedades correspondientes. – Comprobar la continuidad o discontinuidad de una función. – Aplicar el concepto de derivada en la resolución de problemas físicos, químicos y geométricos.	– Cálculo de límite de funciones aplicando las propiedades correspondientes. – Comprobación de la continuidad o discontinuidad de una función. – Aplicación del concepto de derivada en la resolución de problemas físicos, químicos y geométricos.	– Cálculo de límite de funciones aplicando las propiedades de límites laterales, límites infinitos y al infinito. – Comprobación de la continuidad de una función: en un punto y en un intervalo. – Aplicación del concepto de derivada en el cálculo de la velocidad media e instantánea, y la pendiente de la recta tangente.
Actitudinales	– Desarrollar el hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno	– Desarrollo del hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	

Recomendaciones Metodológicas de la Unidad 1:

Para desarrollar la unidad de "Introducción a la derivada", se sugieren las siguientes recomendaciones metodológicas:

Se recomienda abordar los contenidos conceptuales a través de conferencias, y los contenidos procedimentales realizando **clases prácticas**, basadas en **guías de estudios** previamente asignadas a los estudiantes.

Se propone iniciar la unidad 1 con una **diagnosis** sobre los conocimientos previos al concepto de límite de funciones, tales como álgebra de funciones, gráficas de funciones, pendiente de una recta; con el propósito de determinar los puntos de partida cognitivos de los estudiantes y redefinir el proceso de enseñanza aprendizaje de esta unidad.

Durante las **conferencias**, el docente hará énfasis en el principal propósito de esta unidad, que el alumno sea capaz de calcular el límite de una función y que pueda encontrar su derivada en un punto dado.

En el contenido de límite se recomienda el estudio de propiedades y teoremas, sin plantear las demostraciones formales de los mismos, sino haciendo un análisis descriptivo e interpretativo.

La continuidad puntual se debe estudiar tanto por la derecha como por la izquierda apoyándose en un bosquejo gráfico.

Facilitar a los estudiantes **guías de lectura** de esta unidad, que sirvan de apoyo en la organización de los contenidos desarrollados en clase.

Elaborar **guías de trabajo** para que el estudiante practique lo aprendido en el aula de clases y en las horas de estudio independiente; esta guía debe contener problemas relacionados al perfil de las carreras Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Energías Renovables.

Asesor(a):
Fecha: 2014

Unidad 2: La derivada y sus aplicaciones

OBJETIVOS		CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Conceptuales	– Conocer las propiedades de la derivada y las reglas generales de derivación de funciones.	¿ – Propiedades de la derivada y las reglas generales de derivación de funciones.	– Propiedades de la derivada: múltiplo constante, suma y resta de funciones, producto y cociente de funciones, regla de la cadena. Reglas generales de derivación de funciones: función constante, función identidad, potencia, funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas. Método de Newton-Raphson.
	– Describir la derivación de funciones implícitas, ecuaciones paramétricas y de orden superior.	– Derivada de funciones implícitas, ecuaciones paramétricas y de orden superior.	– Derivada de funciones implícitas. Derivada de ecuaciones paramétricas. Derivadas de orden superior.
	– Interpretar los conceptos, propiedades y criterios sobre máximos y mínimos de una función.	– Conceptos, propiedades y criterios sobre máximos y mínimos de una función.	– Valores máximos y mínimos, crecimiento y decrecimiento, criterio de la primera y segunda derivada.
Procedimentales	– Aplicar las propiedades de la derivada y las reglas generales de derivación de funciones en la resolución de ejercicios y problemas.	– Aplicación de las propiedades de la derivada y las reglas generales de derivación de funciones en la resolución de ejercicios y problemas.	– Aplicación de las propiedades de la derivada, las reglas generales de derivación de funciones y el método de Newton-Raphson en la resolución de ejercicios y problemas.
	– Calcular la derivada de funciones implícitas, ecuaciones paramétricas y de orden superior.	– Cálculo de la derivada de funciones implícitas, ecuaciones paramétricas y de orden superior.	
	– Aplicar los criterios de la primera y segunda derivada en la resolución de problemas de optimización.	– Aplicación de los criterios de la primera y segunda derivada en la resolución de problemas de optimización.	– Aplicación de los criterios de la primera y segunda derivada: Resolución de problemas de máximos y mínimos.

OBJETIVOS		CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Actitudinales	– Desarrollar el hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno	– Desarrollo del hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	

Recomendaciones Metodológicas de la Unidad 2:

Para el desarrollo de la unidad "La derivada y sus aplicaciones" se presentan las siguientes recomendaciones metodológicas:

En el cálculo de la derivada de funciones es necesario dedicar suficientes **clases prácticas**, **asignaciones de tareas y evaluaciones**, para que los estudiantes reafirmen procedimientos algebraicos, conocimientos de las funciones trigonométricas, así como de las funciones exponenciales y logarítmicas. Se recomienda abordar los contenidos conceptuales a través de **conferencias** y los contenidos procedimentales realizando clases prácticas, basadas en **guías de estudios** previamente dadas a los estudiantes.

Elaborar **guías de trabajo** para que el estudiante practique lo aprendido en el aula de clases y en las horas de estudio independiente.

Facilitar a los estudiantes **guías de lectura** de la unidad 2, que sirvan de apoyo en la organización de los contenidos desarrollados en clase.

Facilitar **guías de problemas** de optimización que busquen maximizar áreas, volúmenes y utilidades. Asimismo, minimizar distancias, tiempos y costos, entre otros; basados en los criterios de derivada. Cabe señalar, que el docente debe enfatizar en la resolución de problemas aplicados al perfil de las carreras Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Energías Renovables.

Unidad 3: La integral y sus aplicaciones

	OBJETIVOS	CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Conceptuales	– Conocer los conceptos de antiderivada e integral indefinida.	– Conceptos de antiderivada e integral indefinida.	– Ecuaciones diferenciales por integración directa.
	– Identificar fórmulas y métodos de integración.	– Fórmulas y métodos de integración.	– Fórmulas de integración. Integración por sustitución, integración por partes, integración mediante el uso de formulario.
	– Comprender el concepto de integral definida como el área bajo una curva y entre dos curvas.	– Concepto de integral definida como el área bajo una curva y entre dos curvas.	– Área bajo una curva, integral definida. Fórmula de Newton-Leibniz. Área comprendida entre dos curvas.
	– Comprender los algoritmos de integración numérica.	– Algoritmos de integración numérica.	– Integración numérica: Aproximación por los extremos, Regla del trapecio, Regla de Simpson y Regla del punto medio.

	OBJETIVOS	CONTENIDOS	SUBCONTENIDOS
Procedimentales	– Aplicar el concepto de antiderivada en la resolución de problemas contextualizados. – Aplicar fórmulas y métodos de integración que permiten la resolución de problemas contextualizados. – Utilizar el concepto de integral definida para el cálculo del área bajo una curva y entre dos curvas. – Utilizar los algoritmos de integración numérica para el cálculo de integrales por aproximación.	– Aplicación del concepto de antiderivada en la resolución de problemas contextualizados. – Aplicación de fórmulas y métodos de integración que permiten la resolución de problemas contextualizados. – Utilización del concepto de integral definida para el cálculo del área bajo una curva y entre dos curvas. – Utilización de los algoritmos de integración numérica para el cálculo de integrales por aproximación.	– Aplicación del concepto de antiderivada en la resolución de ecuaciones diferenciales. – Aplicación de fórmulas y métodos: Integración por sustitución, integración por partes, integración mediante el uso de formulario. – Utilización del concepto de integral definida para el cálculo de áreas: Área bajo una curva, área entre dos curvas. – Utilización de los algoritmos de integración numérica: Aproximación por los extremos, Regla del trapecio, Regla de Simpson y Regla del punto medio.
Actitudinales	– Desarrollar el hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	– Desarrollo del hábito de trabajo en equipo en la búsqueda de soluciones a problemas de su entorno.	

Recomendaciones Metodológicas de la Unidad 3:

Para el desarrollo de la unidad dedicada a "La integral y sus aplicaciones" es indispensable tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

Se recomienda abordar los contenidos conceptuales a través de **conferencias** y los contenidos procedimentales realizando clases prácticas, basadas en **guías de trabajo** previamente dadas a los estudiantes. Cabe señalar, que el docente debe enfatizar en la resolución de problemas aplicados según la naturaleza de la carrera.

Facilitar a los estudiantes **guías de lectura** de la unidad 3, que sirvan de apoyo en la organización de los contenidos desarrollados en clase.

En esta unidad es necesario dedicar suficientes **clases prácticas**, **asignaciones de tareas y evaluaciones**, para que los estudiantes reafirmen procedimientos mediante el uso correcto del concepto de integral, formularios, métodos de integración y algoritmos de integración numérica.

El docente facilitará **guías de problemas**, relacionados al perfil de las carreras Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Energías Renovables, para que el estudiante practique durante las horas de estudio independiente.

8. RECURSOS DIDÁCTICOS

En el proceso de enseñanza aprendizaje se debe buscar interacciones significativas entre todos los elementos del currículo (estudiantes, docentes, objetivos, contenidos, materiales y recursos didácticos). Por tanto, para el desarrollo del programa de Cálculo Diferencial e Integral, se recomienda utilizar los siguientes recursos y medios: Plan didáctico, guías de trabajo, guías de problemas y formulario.

Por lo que, para el desarrollo eficiente de los temas, clases prácticas, resolución de problemas se apoyará la docencia en el uso de medios tales como:

- Pizarrón y Marcadores a colores
- Estuche geométrico para pizarra
- Calculadora Científica
- Computadora
- Data show

9. SISTEMA DE EVALUACIÓN

La evaluación está centrada en los procesos de aprendizaje, será sistemática y formadora, es por ello que se realizarán 8 (ocho) evaluaciones, de las cuales 4 (cuatro) son pruebas escritas y 4 (cuatro) trabajos de aprendizaje cooperativo, donde los grupos de trabajo deben estar conformados por tres estudiantes como máximo.

Las ocho evaluaciones corresponden a un 60% de la nota final y un único examen que representa 40%, el cual se realizará en la semana once o doce del semestre. Cabe señalar que, las ocho evaluaciones quedan distribuidas de tal manera que al menos 6 evaluaciones sean realizadas previo al examen y dos de ellas posterior al examen.

El estudiante tiene que cumplir obligatoriamente con al menos 75% de la asistencia, y para tener derecho al examen especial debe haber obtenido una nota mínima de 30 puntos en la Nota Final.

10. BIBLIOGRAFÍA

- Aguilar, A. (2010). *Cálculo Diferencial*. México: Pearson.
- Ayres, Frank. (2005). *Cálculo*. México: McGrawHill.
- Demidovich, B. (1977). *Problemas y ejercicios de análisis matemático*. Moscú: Editorial MIR.
- Edwards, C. y Penney, D. (1996). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Prentice Hall Hispanoamericana, S.A.
- Espinoza, E. (2008). *Cálculo Diferencial e Integral*. México: Reverte.
- Larson, R. (2009). *Matemáticas 1 (Cálculo Diferencial)*. México: McGrawHill.
- Leithold, L. (2009). *El Cálculo con Geometría Analítica*. Editorial Oxford University Press.
- Silva, J. (2008). *Fundamentos de Matemáticas*. México: LIMUSA.
- Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Thomas, G. (2010). *Cálculo en una variable*. México: Pearson.
- Zill, D. (2011). *Cálculo: Trascendentes tempranas.* México: McGrawHill.

Programa de Asignatura
Revisado y Certificado
Dirección Académica
Aprobado:
Fecha: 2014

11. FIRMAS DE MIEMBROS DE LA COMISIÓN AD HOC

NOMBRES Y APELLIDOS	FIRMA
MSc. Helen Parrales Cano, Directora de Dpto. de Matemática y Estadística	
MSc. Damaris Berríos Rodríguez, Especialista	
Lic. Ana Marcela Abea Pérez, Especialista	
MSc. Rudy Alberto López Potosme, Especialista	
MSc. José Jesús Mendoza Casanova, Especialista	
Lic. Marvin Hernán Herrera Vivas, Especialista	
Ing. Juan Ramón García, Delegado de las carreras de Arquitectura y Técnico Superior en Construcción	
MSc. Frank Medrano Mayorga, Delegado de las carreras de Química Farmacéutica y Química Ambiental	

Aprobado en reunión de la comisión ad hoc efectuada el cinco de febrero del año dos mil catorce.

Vo.Bo.:

MSc. Hugo Gutiérrez Ocón
Decano de la Facultad de Ciencias e Ingeniería

8. Programas de asignaturas

9. Compendio metodológico

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE NICARAGUA, MANAGUA
UNAN-MANAGUA

Facultad Regional Multidisciplinaria, Estelí

Compendio metodológico para el proceso de enseñanza–aprendizaje de la integral definida como el área bajo una curva en un entorno computacional

Índice

Índice de figuras

Indice de tablas

A modo de introducción

Hemos elaborado este material como un aporte didáctico a los docentes y estudiantes que imparten o cursan la asignatura Cálculo Diferencial e Integral y Cálculo II en nuestra Facultad Regional Multidisciplinaria Estelí (FAREM – Estelí), con el propósito de que se facilite el trabajo, tanto en el aula como fuera de ésta y que el acto educativo sea más dinámico y enriquecedor.

Este material es el resultado de nuestra práctica docente y del aprendizaje adquirido en el programa de doctorado en Matemática Aplicada de la UNAN-Managua con la colaboración de la Universidad Central “Martha Abreu” de Las Villas–Santa Clara, Cuba. El propósito principal de este compendio metodológico, es contribuir a la facilitación del aprendizaje del Cálculo, específicamente en el proceso de enseñanza - aprendizaje del concepto de Integral Definida. Así mismo, nuestra propuesta es concebida de tal forma que, el concepto de integral se estudie independientemente del concepto de derivada.

Es de interés destacar que, una motivación interesante para los estudiantes es recorrer en su formación un camino que sirva de base para la comprensión de conceptos con sólidos fundamentos matemáticos. Ello, en íntima relación con la creación y el descubrimiento.

De modo que, en la elaboración de este material hemos considerado hacer un resumen histórico sobre los aportes de los principales representantes que contribuyeron al desarrollo del Cálculo. Además, se considera que el concepto de área de una región plana es fundamental para abordar uno de los tópicos centrales del cálculo integral, el de integral definida.

Asimismo, en el compendio se plantean situaciones que retoman conceptos y procedimientos estudiados por los estudiantes en la educación secundaria y en la asignatura Matemática General.

Así, es conveniente desarrollar las actividades en el aula teniendo en cuenta:

- La aproximación intuitiva a los conceptos básicos
- La formalización de los conceptos
- La aplicación y socialización por parte de los estudiantes de sus planteamientos y soluciones para puntualizar conceptos y procedimientos elaborados.

Por otra parte, el estudiante podrá hacer uso del software Geogebra con el fin de contrastar sus soluciones y análisis gráfico. El mismo, contiene las construcciones para tal fin. Es importante que, previo al desarrollo de las actividades se disponga de un manual de instrucciones.

Como docentes, nos preocupamos porque nuestros estudiantes avancen en el desarrollo de habilidades relacionadas con la capacidad de análisis, observación, comprensión, innovación e indagación. Consideramos que, si se siguen las sugerencias, ponemos en práctica nuestra creatividad, tenemos en cuenta sus intereses y motivaciones se podrán lograr los resultados esperados.

Los beneficios que podríamos obtener de esta propuesta didáctica.. tienen que ver con brindar en los estudiantes alternativas para construir su propio conocimiento bajo la orientación del docente que se esmera por ayudarle en ese proceso; despertando su interés y entusiasmo, por ser partícipe en su proceso de aprendizaje.

Como señalamos anteriormente, para la construcción de sus aprendizajes, los estudiantes necesitarán estar motivados e interesados en el maravilloso mundo de la Matemática en general y el Cálculo en particular. Además, deben modificar sus hábitos de estudio, participar activamente en todas las actividades de aprendizaje sugeridas, ser investigativos, curiosos y creativos.

En síntesis, el desarrollo exitoso del aprendizaje de la Matemática y por ende del Cálculo requiere de la realización de un proceso de innovación didáctica, que incluya todos los componentes del mismo. Es decir, los métodos y medios utilizados, desde la pizarra hasta programas computarizados; en pro de facilitar a los estudiantes las herramientas que promuevan aprendizajes realmente significativos.

Ubicación temática

Estimados lectores:

"La verdad siempre se halla en la simplicidad y no en la multiplicidad y confusión de las cosas".

Newton

Tenemos el agrado de poner a su disposición este texto sobre Integrales Definidas, mismo que servirá de base para el estudio de la asignatura Cálculo Diferencial e Integral y la asignatura de Cálculo II. Es muy probable que surja la pregunta. ¿De qué trata? ¿Para qué estudiar integrales?

Creemos válido mencionar que la idea fundamental del Cálculo Integral es la determinación de resultados o efectos de cambios o procesos, mismos que están presenten en la vida diaria.

Podemos comparar la determinación de "resultados totales de procesos de cambio", haciendo primero un "corte" instantáneo del proceso de cambio y después referirse a experiencias previas con este proceso, las que indican cómo sucede normalmente. A partir de este "corte momentáneo" es posible hacer la suma de los cambios durante un período más largo y determinar el resultado.

¿Qué queremos decir con lo escrito anteriormente? Lo explicaremos con el siguiente ejemplo: los catadores de vino toman pruebas de los vinos y a partir del contenido alcohólico ("corte") deducen conclusiones acerca del añejamiento del mismo ("resultado total de cambio"), ya que conocen todo el proceso de cambio que éstos experimentan. (Conocimiento previo)

Así que, vamos a iniciar el estudio de integrales independientemente de las derivadas. Pretendemos abordar la temática, de manera que prevalezca la claridad conceptual, la intuición, así como la visualización, desde la utilización de conceptos, propiedades y procedimientos ya conocidos.

Es gratificante que tengamos la oportunidad de emprender un proceso de aprendizaje interactivo y por ende significativo, en este fascinante mundo de la Matemática. Como sujeto activo de este proceso educativo, tendrá la posibilidad de construir conscientemente sus aprendizajes, se apropiará de los contenidos, los cuestionará, comparará y aplicará.

Y bien, los tópicos que abordaremos en este texto serán los siguientes:

- Orígenes del Cálculo: en este contenido se intenta plasmar la correlación del desarrollo matemático histórico con el tratamiento de los contenidos que aquí se abordan, tal y como lo hicieron los científicos en su época. También, pretende aportar una mirada "humana" a la Matemática, estimular una actitud crítica y promover la valoración del conocimiento como del pensamiento matemático.

Queremos señalar que no pretendemos hacer un estudio pormenorizado del desarrollo histórico, sino dar unas pinceladas con las cuales podamos tener una visión generalizada del Cálculo Integral. Además, no hemos podido incluir a todos los representantes de las diferentes épocas, pero sí, pensamos que están los más importantes. Es meritorio señalar que, no fueron solamente ellos los únicos cuyos estudios hicieron que el avance del análisis matemático fuera espectacular.

- **Aproximándonos al concepto de Integral Definida:** aquí se hace énfasis en las relaciones del concepto con el de área y los procesos que intervienen en la adquisición del mismo. Esto se logra, abordando problemas o actividades de exploración que permitan vincularlos al Cálculo utilizando la aproximación del área de una región mediante las sumas superiores e inferiores (representación geométrica, numérica y algebraica). También se visualiza la convergencia de las mismas para funciones continuas.

Se formaliza el concepto de integral según Riemann a partir del problema del cálculo de áreas de una región bajo la gráfica de una función acotada, haciendo el reconocimiento del significado de la integral definida cuando la función tiene intervalos de positividad y negatividad, así como de funciones de Riemann, utilizando para ello la construcción con Geogebra.

Es conveniente indicar que el enfoque propedéutico que se presenta es intuitivo y relacionado con aplicaciones. Sin embargo, se espera que las ideas aquí presentadas puedan contribuir a hacer el Cálculo Integral más comprensible.

También, es necesario destacar que, este texto está acompañado, tal como lo mencionamos en la introducción, del uso de la computadora como herramienta didáctica, lo que permite explotar significativamente la interacción de las distintas representaciones semióticas. Debido a esto, presentamos un material de apoyo que trata de provocar un desequilibrio cognitivo en el estudiante, entre sus conocimientos previos y la necesidad de obtener soluciones a nuevas situaciones; mismas que servirán de base para construir nuevos conceptos.

Esperamos que estos tópicos sean relevantes, tanto para los docentes como para los futuros profesionales, que transitan en este fascinante proceso del aprendizaje. Ello, con miras al mejoramiento continuo de la calidad educativa.

Por último, queremos expresar que, esperamos llevar al aula esta propuesta de aprendizaje para poder registrar el trabajo de los estudiantes, estar dispuestos a sus aportes, sugerencias y recomendaciones que permitan mejorar el diseño de las actividades y/o considerar otros aspectos que no hayan sido tratados o reformularlo en su defecto.

1. Orígenes del Cálculo

No se puede enseñar nada a un hombre; sólo se le puede ayudar a encontrar la respuesta dentro de sí mismo".

Galileo Galilei

La palabra cálculo proviene del latín calculus, que significa contar con piedras. La historia del Cálculo se inicia desde que el hombre siente la necesidad de contar. Es así como surge el ábaco romano que, junto con el suwanpan japonés, constituyen las primeras máquinas de calcular en el sentido de contar.

El cálculo integral, contenido en el cálculo infinitesimal, es una rama de las Matemáticas en la que se estudia el proceso de integración o antiderivación, es muy común en la ingeniería y en la Matemática en general y se utiliza principalmente para el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución.

Debemos señalar que en esta primera parte de nuestro trabajo no se pretende hacer un estudio del desarrollo histórico del Cálculo, que tiene muchas ramas hoy claramente diferenciadas, sino solamente de lo concerniente al llamado Cálculo Integral. De ahí que, aunque se haga alguna referencia a otras cuestiones (por la influencia que tuvieron en el Cálculo), realmente la exposición se va a centrar, en principio, en mencionar brevemente los principales aportes de sus representantes de las diferentes épocas históricas.

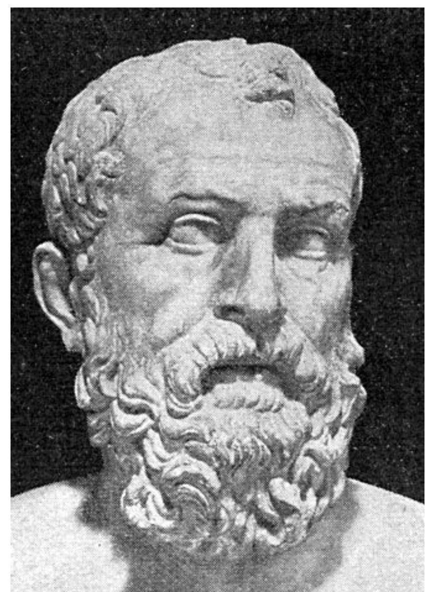
Iniciaremos nuestro resumen de los orígenes del Cálculo, los cuales se remontan a los trabajos de los matemáticos griegos entre los años 400 y 200 antes de Cristo, luego evolucionan en los siglos XIV y XVII y se consolidan en los siglos XIX e inicios del XX.
Veamos cuáles fueron los aportes más importantes en cada una de estas épocas.

1.1. La Matemática griega


https://commons.wikimedia.org/wiki/File:O_Partenon_de_Atenas_adj.JPG

Los matemáticos griegos que contribuyeron de forma trascendental en el desarrollo de la matemática son varios. Los representantes más importantes son: Antifonte, Brison, Anaxágoras, Hipócrates de Chíos, Demócrito, Eudoxo, Euclides y, sobre todo, Arquímedes (considerado uno de los mayores sabios de todos los tiempos). Todos estas celebridades griegas desarrollaron el embrión del Cálculo Infinitesimal iniciando problemas concretos, entre otros, la cuadratura de la parábola y el y el volumen del cono.

Su resolución se consigue mediante la utilización de procedimientos específicos para cada tipo de problema. Conozcamos un poco más sobre estos personajes.

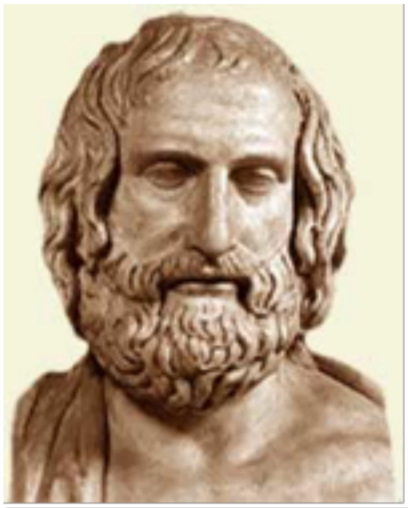

Fuente: http://www.derechoareplica.org/index.php/filosofia/926-freud-el-psicoanalisis-y-antifon-de-atenas-en-la-mirada-de-michel-onfray

Antifonte, hacia el año 430 a.C. Este orador, filósofo y matemático griego en un intento por cuadrar el círculo usó métodos significativos que permitieron abordar el problema y posteriormente perfeccionar sus resultados.
Este matemático, argumentó que "inscribiendo un polígono regular en el círculo y doblando sucesivamente el número de lados, el polígono se confundirá finalmente con el círculo, puesto que sus lados llegarán a ser indiscernibles con respecto a los arcos correspondientes" Brunsshwig (2000), citado por Castelblanco, (2012)

Pero este razonamiento, como observó Aristóteles es falso, ya que por grande que sea el número de lados, el polígono nunca llenará el círculo.

Brison completó el trabajo de su compañero añadiendo a estas conclusiones las referentes a los polígonos circunscritos, obteniendo de esta forma dos series de polígonos cuadrables que se acercan cada vez más al círculo. Por tanto el área del círculo estará siempre entre la de un polígono inscrito y otro circunscrito.

Es decir, Antifonte define el área del círculo mediante una sucesión de polígonos regulares inscritos cuyo número de lados crece suficientemente. En realidad, el concepto de límite, es decir, la idea de crecimiento indefinido, no aparece todavía; y lo mismo acontece a su contemporáneo Brison, que completó el concepto, considerando también los polígonos circunscritos y creyendo, equivocadamente, que el área del círculo es el promedio de las áreas de cada par de polígonos correspondientes.



Fuente: https://goo.gl/eEjwNC

Anaxágoras (500 a.C. – 428 a.C). Se ocupó del problema de la cuadratura del círculo, es decir, construir utilizando regla y compás un cuadrado de área igual a la del círculo. Esta cuestión fascinó a innumerables matemáticos durante casi veinticuatro siglos. Además, la importancia del problema matemático planteado por Anaxágoras radica en que, a diferencia de los egipcios y babilonios, no se trata de la aplicación del conocimiento a una faceta práctica de la vida sino de una cuestión puramente teórica en la que el papel fundamental lo juega la precisión de los cálculos y la exactitud del pensamiento.

Fuente: https://goo.gl/Di8dy2

Hipócrates de Chíos (Llamado el Grande; Isla de Cos, actual Grecia, 460 a.C). La importancia del trabajo de este médico griego, considerado el padre de la medicina y contemporáneo de Sócrates y Platón, se centra en que fue el primero en cuadrar figuras delimitadas por curvas. Sin embargo, su trabajo no logró la cuadratura del círculo.

Calculó un área curvilínea para que fuera igual a un área acotada por líneas rectas. Es decir, consiguió cuadrar recintos limitados por arcos de círculos, que recibieron el nombre de "lúnulas de Hipócrates" por su semejanza con la forma de la luna creciente.
Formuló el siguiente teorema: "Segmentos semejantes de círculos están entre sí en la misma razón que los cuadrados construidos sobre sus bases".

Este teorema parece ser la primera afirmación precisa sobre la medida de figuras curvilíneas y a partir del mismo consiguió la primera cuadratura en la historia de figuras curvilíneas.

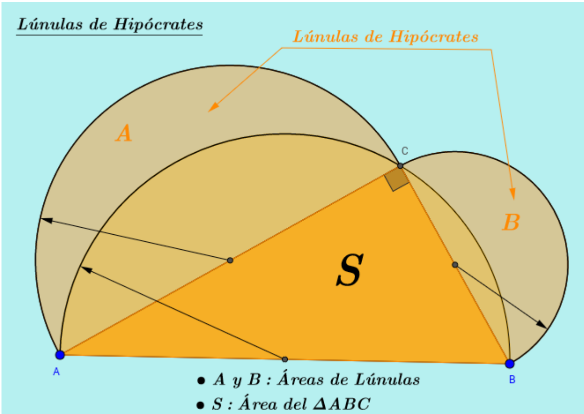
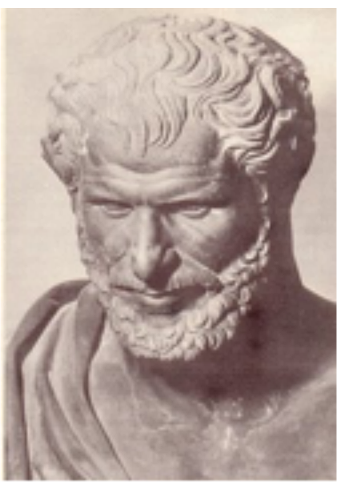


Figura 1: Lúnulas de Hipócrates

Una lúnula es una superficie comprendida entre dos arcos de circunferencia. Por ejemplo: consideremos el diámetro de una semicircunferencia, que es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos tienen el vértice común sobre dicha semicircunferencia y, a su vez, éstos son los diámetros de dos nuevas semicircunferencias; la superficie comprendida entre las tres semicircunferencias se conocen como las lúnulas de Hipócrates (figura 1).

Este autor descubrió que la superficie de dichas lúnulas coincide con la del triángulo rectángulo ABC que las determinan.


Fuente: https://goo.gl/AAPA8B

Demócrito (460-370 a.C.) descubrió que los volúmenes de un cono y de una pirámide son iguales a un tercio de los volúmenes de un cilindro y un prisma que tienen la misma base y la misma altura. Demócrito consideró al cono como una serie de capas muy finas e indivisibles, pero se encontró con la dificultad de que si las capas fueran todas iguales daría un cilindro y si fueran distintas la superficie del cono no sería lisa.

Eudoxo (408-355 a.C.). Fue un astrónomo y matemático que contribuyó significativamente al desarrollo de la matemática griega, especialmente en lo relacionado con dos conceptos fundamentales para el cálculo diferencial e integral: la teoría de las proporciones que se antecedente de la teoría de cuadraturas y curvaturas de Arquímedes que se encuentran en el libro V de los Elementos de Euclides y el método de exhaución (libro XII. Elementos) antecesor del método de paso al límite.

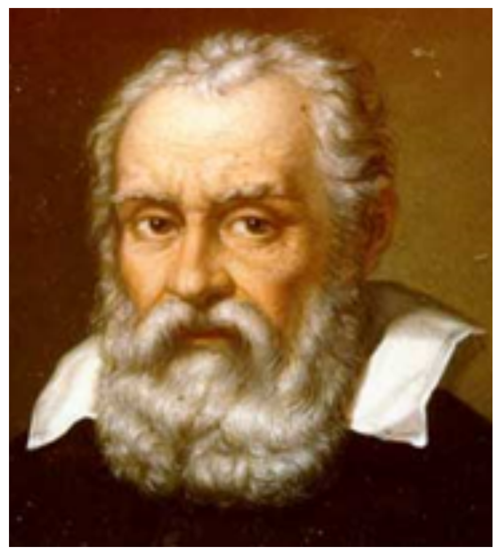

Fuente: https://goo.gl/V4zBuL

Para resolver el problema de las magnitudes inconmensurables Eudoxo planteó el que ha sido considerado como el primer proceso lógicamente correcto para resolver el problema de la continuidad, del infinito y los problemas de significado de los números irracionales. En la estructuración de dicho proceso.

Eudoxo usó la definición de razón de manera que abarcara tanto magnitudes conmensurables como inconmensurables y de ello se derivó la teoría de la proporcionalidad. Paralelamente planteó el llamado Axioma de Eudoxo - Arquímedes (Definición V.4. Elementos) y propuso el método de exhaución, (Euclides, Proposición X.1).

La primera fue la solución más antigua a los números irracionales, que no pueden ser expresados como cociente de dos números enteros. El método exhaustivo le permitió abordar el problema del cálculo de áreas y volúmenes, como el de la pirámide, cuyo volumen es un tercio de un prisma que tenga la misma base.

Arquímedes (287-212 a.C.), nacido y muerto en Siracusa, es considerado el científico más importante de la Antigüedad y junto con Newton (1642-1727) y Gauss (1777-1855) uno de los tres matemáticos más importantes de todos los tiempos.



Fuente: https://goo.gl/pHUfyd

Este gran científico realizó el cálculo de áreas con el método de exahución de Eudoxo. También escribió varios tratados y uno de ellos conocido como El Método tiene una importancia excepcional porque revela una faceta de su pensamiento que no aparece en ningún otro científico, así pues, mediante un "método mecánico" de equilibrio descubrió el área de un segmento parabólico: cuatro tercios del triángulo inscrito.

Asimismo, en su búsqueda por la cuadratura del círculo obtuvo hallazgos muy importantes, mucho de ellos se aplican en la actualidad, en el cálculo de áreas y volúmenes.

Este gran físico, ingeniero, filósofo, inventor y matemático griego, se anticipó a muchos de los descubrimientos de la ciencia moderna, en las matemáticas puras. Fue capaz de demostrar que el volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro que la circunscribe, que el áreas de un segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área que encierra. Además, en mecánica, definió la ley de la palanca y es reconocido como el inventor de la polea compuesta. Inventó el 'tornillo sin fin' para elevar el agua de nivel.

De igual manera, es famoso por el descubrimiento de la ley de la hidrostática, también llamado principio de Arquímedes, que establece que todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta una pérdida de peso igual al peso del volumen del fluido que desaloja. Se cuenta que este descubrimiento lo hizo mientras se bañaba, al comprobar cómo el agua se desplazaba y se desbordaba

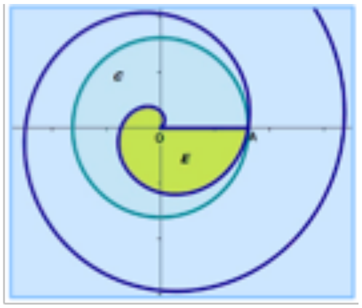


Figura 2. Espiral de Arquímedes.
Fuente Castelblanco (2012)

Otro trabajo que tomó gran importancia es su trabajo sobre espirales. Es así como demostró que una espiral, como la que se muestra en la figura 2, encierra un área E igual a un tercio del círculo C, cuyo radio es la longitud de OA recorrida por el punto sobre la recta en ese primer giro.

Por todos estos hallazgos es que Arquímedes es considerado el precursor del Cálculo Integral.

1.2. La Matemática del siglo XVI

En el siglo XVI algunos matemáticos retomaron el interés por los métodos de Eudoxo y Arquímedes, y se enfocaron en el estudio particular de cuatro problemas:

- Determinar la tangente a una curva en un punto
- Determinar el valor máximo o mínimo de una cantidad
- Hallar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido
- Encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en cualquier instante dada una fórmula de la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo conocido.

Veamos a continuación algunos aportes de estos matemáticos que contribuyeron al desarrollo del Cálculo integral.

Fuente:
https://goo.gl/HNcZgv

Simón Stevin (1548 - 1620). En la historia de las Matemáticas es conocido como uno de los primeros expositores de la teoría de las fracciones decimales. En la historia de la Física se le conoce por sus contribuciones a la Estática e Hidrostática.

Los contenidos matemáticos de carácter geométrico están incluidos en Problematum geometricorum (1583), única obra de Stevin escrita en latín, estructurada en cinco libros.

El primero contiene la teoría clásica de razones y proporciones así como su aplicación a la división de figuras en partes que estén en una razón dada.

En el segundo, Stevin aplica la “regla de falsa posición” (procedimiento que gozó de gran popularidad en los manuales de aritmética del siglo XVI y que se usaba para resolver algunos problemas de primer grado con una incógnita, sin necesidad de recurrir al simbolismo algebraico) a la resolución de cuestiones geométricas.

El tercer libro, el más interesante de todos, se consagra al estudio de los sólidos platónicos, poliedros semirregulares o arquimedianos y poliedros estrellados.
Por último, en los libros cuarto y quinto, se resuelven, respectivamente, los dos problemas siguientes relacionados con la construcción de un sólido a partir de otros dos sólidos dados.

En relación al Cálculo infinitesimal, sustituyó el método de la doble reducción al absurdo usado por Arquímedes por un método de paso directo al límite, basándose en la idea de que dos magnitudes son iguales si su diferencia se puede hacer menor que cualquier cantidad arbitrariamente pequeña. Stevin usó este método en su trabajo sobre hidrostática, en el que determinó la fuerza que ejerce la presión de un fluido sobre una presa rectangular vertical.

Johannes Kepler (1571 - 1630). Es una figura clave en la revolución científica. Astrónomo, matemático y físico alemán, conocido por sus leyes sobre el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol. Fue colaborador de Tycho Brahe. Fue uno de científicos que mostró más interés en el desarrollo de ideas sobre los infinitesimales en conexión con la integración. Recurrió a un procedimiento de integración al interesarse en el cálculo de las áreas relacionadas en su segunda ley, relativa al movimiento de los planetas. Usó el método para encontrar el área de sectores de la elipse, pensando en las áreas como sumas de áreas de polígonos con base infinitamente pequeña.

Fuente: https://goo.gl/hwgVm7

Usó también el método en un problema que requería determinar volúmenes, para hallar la capacidad de barriles de vino.
Kepler consideró muy valioso trabajar la rigurosidad del método de exhaución y retomó lo que Arquímedes había considerado un proceso simplemente heurístico. Determinó el área del círculo y el volumen de una esfera, pero aunque se obtuvieron resultados correctos de forma simple y ha sido una herramienta para ingenieros y físicos, la matemática formal lo rechaza.

Fuente: https://goo.gl/FmNNqq

Galileo Galilei (1564 - 1642). Fue el pionero del método científico experimental y el primero en utilizar un telescopio refractor, con el que hizo importantes descubrimientos astronómicos, tales como las lunas del planeta Júpiter y las fases de Venus, similares a las observadas en la Luna.
La originalidad de Galileo como científico reside en su método de análisis. Primero, reduce el problema a un simple conjunto de relaciones basadas en experiencias de cada día, lógica y sentido común. Luego los analiza y resuelve con formulaciones matemáticas simples.

Los métodos con los que él aplica esta técnica al análisis del movimiento abrieron el camino a la Matemática moderna y a la Física experimental. Isaac Newton usó una de las formulaciones matemáticas de Galileo, la Ley de Inercia, para fundamentar su Primera Ley del Movimiento. Galileo en 1638 dio a conocer su interpretación de la distancia que recorre un objeto como el área bajo la curva tiempo - velocidad, considerando que esta área estaba construida con un número infinito de unidades indivisibles.
También estudió las leyes matemáticas que rigen el movimiento acelerado de un cuerpo cuando se suelta en el vacío, (ley de caída libre), el cual fue un paso trascendental en el desarrollo del cálculo integral.

Fuente: https://goo.gl/sJkz1a

Bonaventura Cavalieri. (1598-1645). Fue discípulo de Galileo. Es el creador de la geometría de los indivisibles, precursora del cálculo infinitesimal, y que en cierto modo puede decirse que ha facilitado la invención de éste, por lo que se considera que sus descubrimientos marcan época en la historia de las matemáticas. Realizó la primera demostración rigurosa del teorema de Papus relativo al volumen de un sólido de revolución.

La teoría de lo indivisible de Cavalieri, presentada en su "Geometría indivisibilis continuorum nova" de 1635 era un desarrollo del método exhaustivo de Arquímedes incorporado en la teoría infinitesimal y pequeñas cantidades geométricas de Kepler. Esta teoría permitió a Cavalieri encontrar simple y rápidamente el área y volumen de varias figuras geométricas. Fue responsable de la introducción de los logaritmos y trigonometría.
Sus obras más conocidas son: Tratado de las secciones cónicas; Directorium generale uranometricum; Geometría indivisibilibus; Trigonometría plana et sphorica; Exercitationes geometrio sex.

Pierre de Fermat (1601 - 1665). Abogado de oficio y matemático aficionado cuyos descubrimientos aún asombran a los profesionales de esta ciencia. Obtuvo la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas. Usaba el método de exhaución pero considerando rectángulos infinitesimales circunscritos a la curva cuyas bases se comportaban como una progresión geométrica.


Fuente: https://goo.gl/ugrAZ6

Esta forma de determinar la cuadratura muestra aspectos esenciales de la integral definida como:

- División del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.
- Aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales, cuya altura la da la ecuación analítica de la curva.
- Una noción similar a la de límite de una suma cuando el número de elementos de esta crece indefinidamente, mientras estos se hacen infinitamente pequeños.

Fuente: https://goo.gl/S9kFuj

René Descartes (1596-1650). Fue un filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna.

La principal aportación de Descartes al Cálculo fue el intento de unificar la antigua geometría con el álgebra. Junto con su paisano Pierre Fermat, inventó lo que hoy en día conocemos como la Geometría Analítica, que es donde se sientan las bases para el desarrollo del mismo.

Blaise Pascal (1623 – 1662). Contribuyó de manera importante al Cálculo Integral aclarando el concepto de integral, calculando algunas áreas que equivalen a las integrales definidas que en la actualidad conducen a integrales de productos de funciones trigonométricas.

Algo relevante de los trabajos de Pascal fueron las fórmulas de integración por partes y cálculo de integrales dobles. De igual forma, en el contexto de la integración de la función seno se aproximó extraordinariamente al descubrimiento del cálculo integral, como lo reconoció Leibniz.

Fuente: https://goo.gl/Z2rcnB

1.3. La Matemática del siglo XVII

La situación de los problemas matemáticos a mediados del siglo XVII era aproximadamente la siguiente: además de tener readquiridos los resultados y métodos de la matemática griega, el desarrollo de la geometría analítica (el método de las coordenadas) había permitido plantear y resolver algunos problemas relacionados con curvas, de las cuales se conocían muchos tipos. Por otra parte, la física proporcionaba un punto de vista cinemático: una curva podía interpretarse como la trayectoria de un punto material móvil.

Los trabajos realizados sobre los métodos infinitesimales por los diferentes matemáticos del siglo XVI, se fundamentaron en el siglo XVII cuando el filósofo-matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) y el físico-matemático inglés Isaac Newton (1642-1727) consolidaron los procedimientos de sus antecesores aportando algoritmos y notaciones que aunque no fueron rigurosos y presentaran debilidades en los procesos demostrativos debido a la poca claridad que en ese tiempo aún se tenía sobre algunos conceptos como los de límite o función, sus trabajos fueron consistentes y suficientes para desarrollar el cálculo.

Gottfried Wilhelm Leibniz. (1646-1716). Filósofo y matemático. Sus trabajos en estas dos últimas disciplinas son de los mejores que se han producido hasta la actualidad. Las contribuciones de Leibniz en el campo del cálculo infinitesimal, efectuadas con independencia de los trabajos de Newton, así como en el ámbito del análisis combinatorio, fueron de enorme valor. Introdujo la notación actualmente utilizada en el cálculo diferencial e integral. Los trabajos que inició en su juventud, la búsqueda de un lenguaje perfecto que reformara toda la ciencia y permitiese convertir la lógica en un cálculo, acabaron por desempeñar un papel decisivo en la fundación de la moderna lógica simbólica.

Fuente: https://goo.gl/9FUmmg

Fuente: https://goo.gl/RhwFe4

Isaac Newton. (1642-1727). Es posiblemente el mayor científico de todos los tiempos. Comparte con Gottfried Leibniz el crédito por el desarrollo del Cálculo Diferencia e Integral, que utilizó para formular sus leyes de la Física. También contribuyó en otras áreas de la Matemática, desarrollando el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes.

Newton y Leibniz trabajaron simultáneamente, aunque con enfoques diferentes; la visión de Leibniz era de carácter más geométrico, consideraba la derivada como incrementos infinitamente pequeños, a los que denominó diferenciales; mientras que para Newton la derivada significaba una velocidad y consideraba las variables como cantidades que fluyen, denominaba fluxiones a lo que Leibniz nombraba como cociente de diferenciales.

Newton no sólo fue un matemático de primerísimo orden, también dejó una huella indeleble en la Física y la Astronomía. La publicación de Philosophiae naturalis principia mathematica, en 1687, marca un hito en la Historia de la Ciencia.

Newton abordó el desarrollo del cálculo a partir de la geometría analítica desarrollando un enfoque geométrico y analítico de las derivadas matemáticas aplicadas sobre curvas definidas a través de ecuaciones. También buscaba cómo cuadrar distintas curvas, y la relación entre la cuadratura y la teoría de tangentes. Trabaja únicamente con problemas geométricos, como encontrar tangentes, curvaturas y áreas utilizando como base matemática la geometría analítica de Descartes. No obstante, con el afán de separar su teoría de la de Descartes, comenzó a trabajar únicamente con las ecuaciones y sus variables sin necesidad de recurrir al sistema cartesiano.

Además, dio un método general para el cálculo de áreas y, como éstas se obtenían como la suma infinita de áreas infinitesimales dio una respuesta generalizada a la infinidad de procedimientos particulares desarrollados durante más de dos milenios. Hoy se conoce este resultado como “Teorema Fundamental del Cálculo”. Incluso estableció la linealidad de la integral y realizó integraciones de series infinitas

Asimismo, elaboró la teoría de las series de potencias y logró desarrollar la exponencial, el logaritmo, la potencia del binomio cualquiera que sea su exponente y las funciones circulares.

En el Cálculo Integral resuelve los problemas de rectificación de arcos y cuadratura de superficies y construye tablas de integrales. En el Cálculo Diferencial resuelve los problemas de máximos y mínimos, concavidad, convexidad e inflexión.

Debemos mencionar que, Newton era ante todo físico y como tal le interesaba el cálculo como instrumento de investigación, sin preocuparse de la pureza de sus conceptos y de la sencillez de su notación; así por ejemplo definía “la tangente por la condición de tener dos puntos consecutivos de una curva”

1.4. La Matemática del siglo XIX

El siglo XVIII produjo un enorme desarrollo de los métodos iniciados en el XVII. Sin embargo, los matemáticos de finales del siglo XVIII eran conscientes de la falta de rigor en las demostraciones y de la vaguedad con que se explicaban los conceptos. Las demostraciones eran una mezcla de pruebas formales con consideraciones geométricas y físicas sobre los problemas. Así, las demostraciones de muchos resultados no se hallaban hechas en sitio alguno y los enunciados eran meras generalizaciones de experiencias concretas. El rigor se basaba en la comprobación experimental a posteriori de los resultados obtenidos. La búsqueda formal del rigor en dicho siglo se realiza intentando basar los conceptos iniciales del cálculo en la geometría, que era el modelo más riguroso disponible.

El siglo XIX se caracteriza porque se critica a la geometría como modelo de rigor; su lugar lo pasa a ocupar la aritmética. De esta manera, se produce una “aritmetización” de las matemáticas. Además, hay una auténtica explosión en todas las ramas de las matemáticas. En concreto, el desarrollo del cálculo da lugar a lo que, hoy en día, se conoce con el nombre de análisis matemático.

En este periodo los matemáticos se enfocaron más en presentar los métodos con rigurosidad que en resolver problemas. A lo largo de este siglo las matemáticas se van haciendo cada vez más abstractas. Es en este donde surge la geometría no euclidiana, así como el álgebra abstracta.
Augustin-Louis Cauchy, Bernhard Riemann y Karl Weierstrass reformularon el cálculo de una forma más rigurosa.
A continuación conoceremos un poco más sobre estos representantes y sus aportes al desarrollo del cálculo.

Fuente: https://goo.gl/A9wYJN

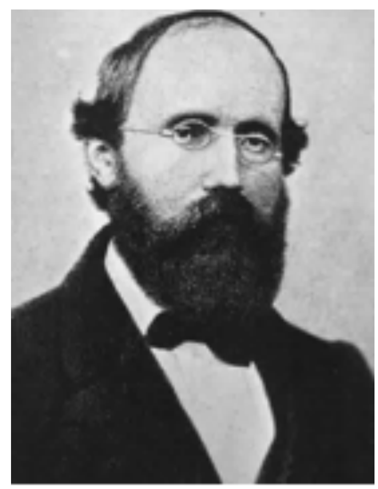
Agustin Louis Cauchy. (1789 - 1857).

Este matemático francés inició la fundamentación rigurosa del Cálculo infinitesimal. Fue pionero en el análisis y la teoría de permutación de grupos. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

En 1814 publicó la memoria de la integral definida que llegó a ser la base de la teoría de las funciones complejas. Gracias a Cauchy, el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.

Este gran matemático francés precisa los conceptos de función, de límite y de continuidad en la forma actual o casi actual, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y eliminando de la idea de función toda referencia a una expresión formal, algebraica o no, para fundarla sobre la noción de correspondencia. Los conceptos aritméticos otorgan ahora rigor a los fundamentos del análisis, hasta entonces apoyados en una intuición geométrica que quedará eliminada, en especial cuando más tarde sufre un rudo golpe al demostrarse que hay funciones continuas sin derivadas, es decir: curvas sin tangente.

Georg Friedrich Bernhard Riemann. (1926 – 1966).



Fuente: https://goo.gl/Pb6XNL

Fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial. Su nombre está conectado con la función zeta, la hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Hizo grandes contribuciones en diferentes campos de las matemáticas: en análisis complejo estudió las funciones de una variable, revolucionó la geometría analizando la negación del quinto postulado de Euclıdes, dentro del cálculo definiendo las conocidas integrales que llevan su nombre, entre otros campos. También trabajo en áreas de la física como la dinámica de fluidos, magnetismo, teoría de gases, etc.

Todos estos trabajos y resultados nos muestran la gran productividad que tuvo Riemann, ya que sus trabajos sentaron las bases de la matemática actual, y son fundamentales para la investigación tanto en matemáticas, como física, incluso se incorporaron al arte.

Karl Weierstrass (1815 – 1897).

Fue un matemático alemán que se suele citar como el "padre del análisis moderno". Dio las definiciones de continuidad, límite y derivada de una función, que se siguen usando hoy en día. Esto le permitió demostrar un conjunto de teoremas que estaban entonces sin demostrar como el teorema del valor medio, el teorema de Bolzano-Weierstrass y el teorema de Heine-Borel.

Este reconocido matemático también realizó aportes en convergencia de series, en teoría de funciones periódicas, funciones elípticas, convergencia de productos infinitos, cálculo de variaciones, análisis complejo, entre otros.

Fuente: https://goo.gl/bhyA5j

1.5. La matemática del siglo XX y nuestros días

El conocimiento matemático del mundo moderno está avanzando más rápido que nunca. Con la invención de la computadora se han resueltos problemas pendientes de solución. En esta época, las teorías que eran completamente distintas se han reunido para formar teorías más completas y abstractas. Sin embargo, aunque la mayoría de los problemas más importantes han sido resueltos, otros como las hipótesis de Riemann siguen sin solución. Al mismo tiempo siguen apareciendo nuevos y estimulantes problemas. Parece que incluso las matemáticas más abstractas están encontrando aplicación.

El desarrollo y uso del cálculo ha tenido efectos muy importantes en casi todas las áreas de la vida moderna: es fundamento para el cálculo numérico aplicado en casi todos los campos técnicos y/o científicos cuya principal característica es la continuidad de sus elementos, en especial en la física. Prácticamente los avances tecnológicos obtenidos en las diferentes áreas de la ciencia hacen uso del cálculo.

2.0 Aproximándonos al concepto de integral definida

En este tema consideraremos el problema de calcular el área de una región limitada por una curva, el eje y dos rectas verticales; primero aprenderemos que se pueden obtener valores aproximados para el área dividiendo la región en franjas verticales, calculando una aproximación para el área de cada una de las franjas y sumando los valores obtenidos.

Después reflexionaremos sobre un procedimiento sistemático con el que, a través de dividir convenientemente la región se pueden lograr aproximaciones cada vez más precisas y llegar a establecer el valor exacto del área como un límite cuando el número de divisiones es cada vez más grande. Por otra parte, al incorporar la consideración infinitesimal de que porciones infinitamente pequeñas de la curva son rectas, se tiene como consecuencia que las franjas verticales son trapecios de un ancho infinitesimal y con ello lograremos expresar el área de la región como una integral.

2.1. Idea fundamental del Cálculo Integral

Antes de conceptualizar la integral definida aclaremos los conceptos que son importantes para entender la idea fundamental del Cálculo Integral.

Usaremos el ejemplo de una cuenta bancaria. Sabemos que en una empresa diario se deposita y se hacen retiros de dinero. Veamos el estado de cuenta de una empresa X durante una semana. En la figura siguiente se muestran los movimientos de dinero en miles de córdobas.

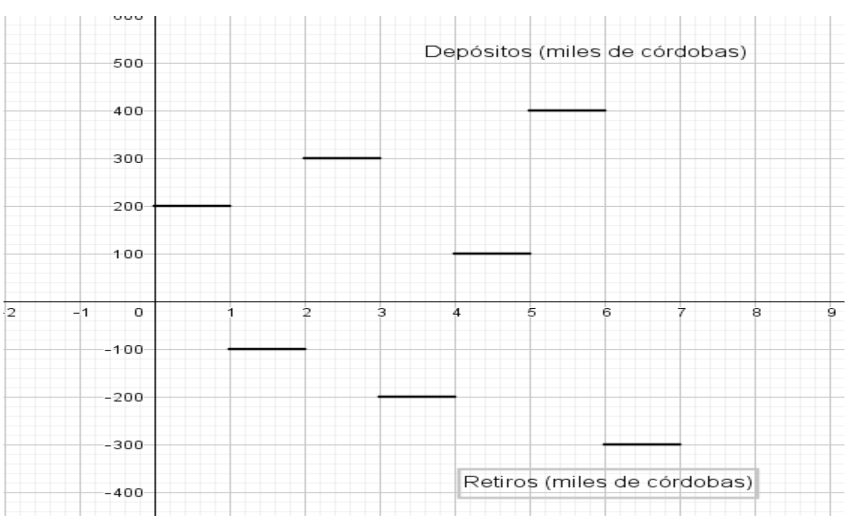


Figura 3. Movimiento de dinero en miles de córdobas

¿Cuál será la razón de cambio promedio por día?

Los movimientos diarios representan la razón de cambio promedio por día, es decir, debemos calcular el total de depósitos y retiros para un determinado día. Pero como sabemos, al director de la empresa no le interesa saber, los movimientos diarios, sino con cuánto dinero cuenta la empresa, es decir, el saldo al final de la semana. Esos "efectos de los cambios" y al "efecto total", constituyen la idea fundamental del Cálculo Integral.

Veamos en la siguiente gráfica, los saldos al final de cada día (efecto de cambio) y de la semana (efecto total).

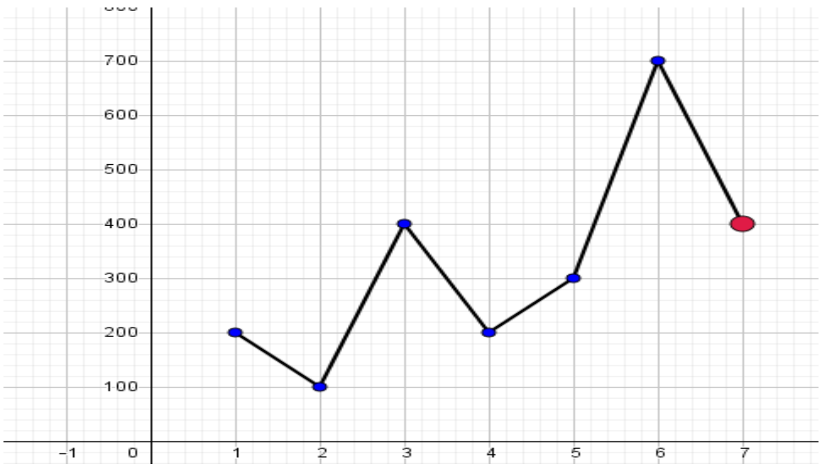


Figura 4. Saldos al final del día

Para calcular los saldos al final de cada día se procede de forma natural: Al saldo inicial (200 mil) se le resta el retiro (100 mil), se suman el depósito (300 mil) y así sucesivamente.

Ahora bien, los resultados acumulados de razones de cambio se pueden interpretar como una suma de productos:

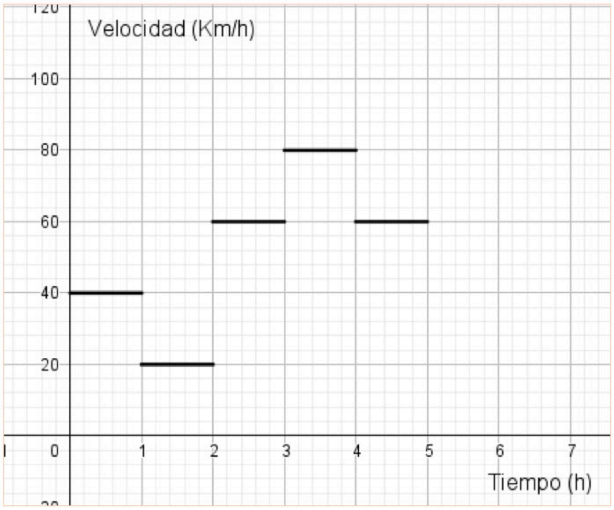
$$200\left(\frac{C\$}{día}\right)\cdot 1día + (-100)\left(\frac{C\$}{día}\right)\cdot 1día + 300\left(\frac{C\$}{día}\right)\cdot 1día + (-200)\left(\frac{C\$}{día}\right)\cdot 1día + 100\left(\frac{C\$}{día}\right)\cdot 1día$$
$$+\,400\left(\frac{C\$}{día}\right)\cdot 1día + (-300)\left(\frac{C\$}{día}\right)\cdot 1día = C\$400$$

¿A qué conclusión podemos llegar?

En general, la suma de los productos de las razones de cambio multiplicados por el intervalo, es el resultado acumulado o total de un proceso de cambio.

Ilustremos con el movimiento de un automóvil la idea fundamental del Cálculo Integral.

En la figura 8 se muestra su velocidad media cada hora. Queremos calcular la distancia total recorrida en 5 horas. (Ver figura 9)



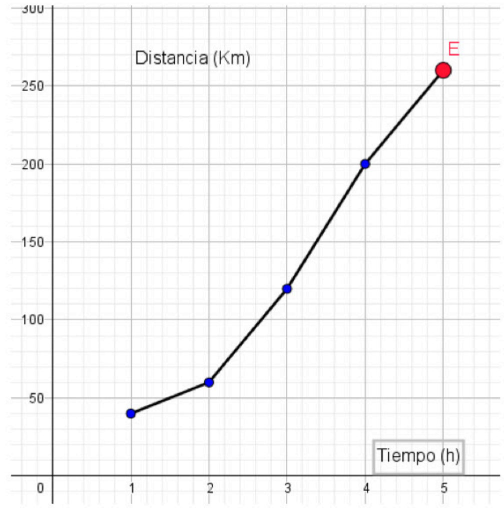


Figura 5. Velocidad y distancia recorrida por automóvil

Otra vez se multiplica la razón de cambio de la posición del automóvil, es decir, su velocidad en cada intervalo, por el intervalo de tiempo.

$$40\ (Km/h)\cdot 1h + 20\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot 1h + 60\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot 1h + 80\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot 1h + 60\left(\frac{Km}{h}\right)\cdot 1h$$
$$= 260\ Km$$

Nos surge una pregunta, ¿este método se puede aplicar siempre?
La respuesta es NO. Este método se aplica sólo a casos cuando la razón de cambio se mantiene constante en todo un intervalo. Sin embargo, la mayoría de las aplicaciones del Cálculo Integral no son tan sencillas, sino que las funciones que representan razones de cambio tienen gráfica poligonales o curvas.

De esto nos ocuparemos más adelante.

Ahora analicemos otro ejemplo en el cual tenemos que hacer transformaciones para poder aplicar el método anterior.

A continuación, la siguiente gráfica representa la producción y venta de cierto artículo durante 4 años

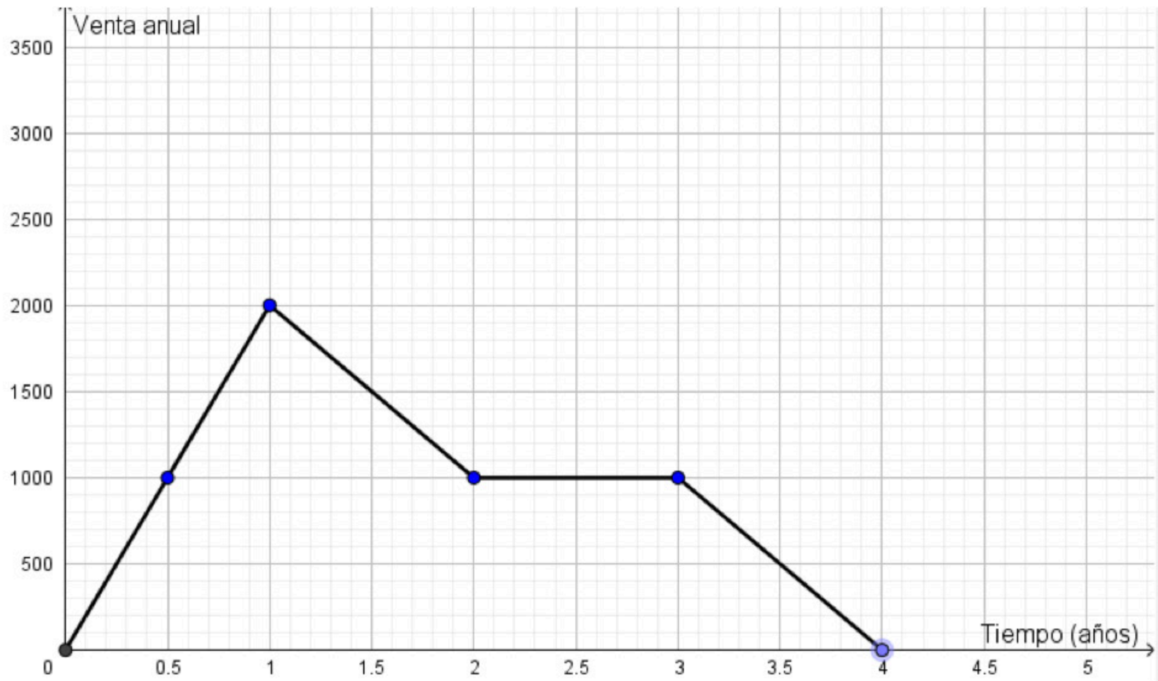


Figura 6. Producción y venta de artículos

¿Qué nos indica la gráfica? Nos indica que en el primer año las ventas aumentan, luego disminuyen, se mantienen constante y decrecen en el cuarto hasta agotar existencia.
Como no podemos utilizar el método anterior, (¿Por qué?), para calcular las ventas totales, utilizamos el método de aproximación. Para ello, tomamos intervalos de tiempo de medio años y calculamos la media de las ventas en cada período, la cual consideraremos que es representativo para ese intervalo. Después se forma nuevamente el producto de cada intervalo (medio año) por las ventas y sumamos todos los productos para obtener la venta total.

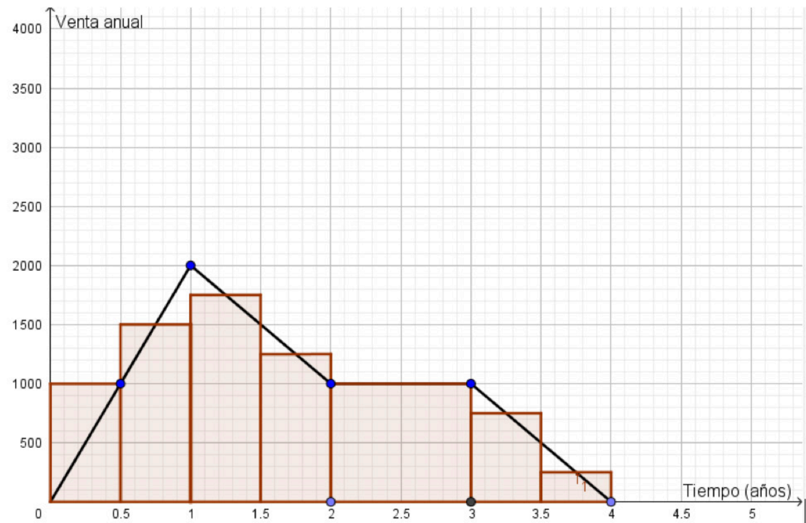


Figura 7. Método de aproximación

$$\frac{1}{2}\,(año)\cdot 500\left(\frac{art}{año}\right)+\frac{1}{2}\,(año)\cdot 1500\left(\frac{art}{año}\right)+\frac{1}{2}\,(año)\cdot 1750\left(\frac{art}{año}\right)+\frac{1}{2}\,(año)\cdot 1250\left(\frac{art}{año}\right)$$
$$+\quad 1(año)\cdot 1000\left(\frac{art}{año}\right)+\frac{1}{2}\,(año)\cdot 750\left(\frac{art}{año}\right)+\frac{1}{2}\,(año)\cdot 250\left(\frac{art}{año}\right)$$
$$= 4000\ artículos$$

La acumulación de los resultados de este proceso de cambio (ventas totales) se presenta en la siguiente tabla, con su respectiva gráfica.

Tabla 1. Ventas totales

Ventas por año	Total
1	1000
2	2500
3	3500
4	4000

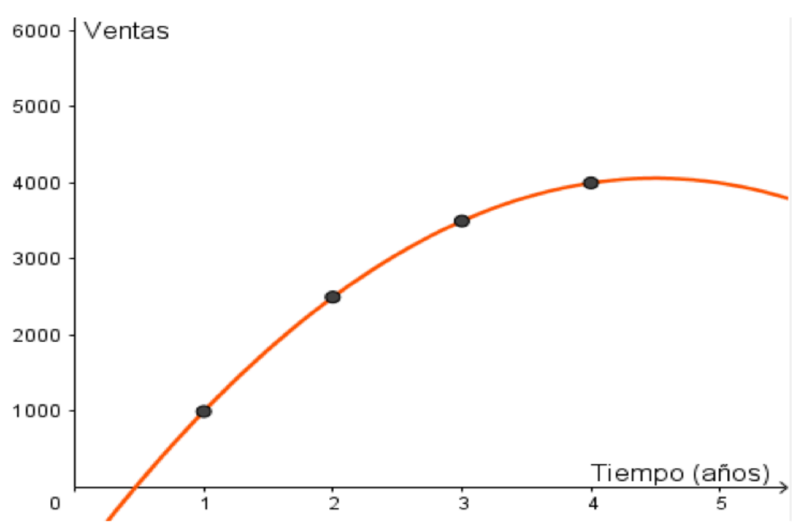


Figura 8. Ventas totales

Ahora, aparentemente cambiaremos de tema, pues calcularemos áreas. Pero, no es así. Seguiremos trabajando haciendo los mismos tipos de cálculo. ¿Por qué? Más adelante tendremos la respuesta.

2.2. Cálculo de áreas

Todos, alguna vez, hemos calculado el área de figuras planas sencillas como el rectángulo, el cuadrado, el triángulo, el trapecio, entre otros. Partiendo de este conocimiento que ya tenemos, indagaremos en cómo se puede hallar el área del recinto delimitado por una curva, de la que conocemos su representación analítica, el eje OX y dos rectas verticales que marcan el intervalo de observación.

Hemos de señalar, que el cálculo de áreas de figuras curvas históricamente ha supuesto una carrera de relevos hacia lo que hoy conocemos como Cálculo, basado en el reto intelectual que supone la "cuadratura" de cualquier figura geométrica. Arquímedes consiguió la fórmula de cuadratura de la parábola mediante un ingenioso proceso geométrico. Pero para lograr un método general, se necesitaba una matemática más poderosa que tardó mucho tiempo en desarrollarse.

Bien, recordemos lo que aprendimos en Geometría, la relación que existe entre el área y el perímetro de regiones rectangulares y triangulares.

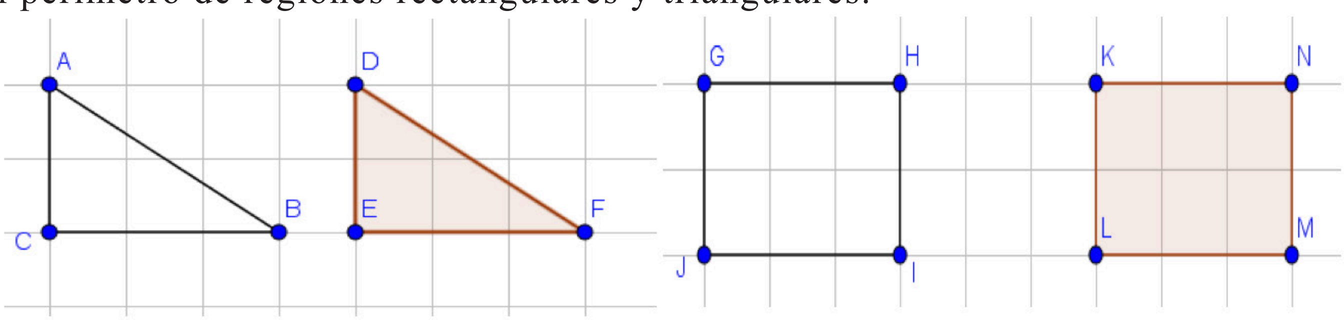


Figura 9 . Región triangular y región rectangular

¿Notamos la diferencia?

En Geometría Euclídea la forma más simple de una región plana es una región rectangular, cuya área está definida como el producto de la base *b* del rectángulo por su altura h.

A=b×h

y el área de una región triangular de base *b* y altura h es la mitad del área de la región rectangular antes mencionada, es decir: A=(b×h)/2

Cuando ya hemos determinado el área de una región triangular, es posible determinar áreas de regiones poligonales, dado que: "una región poligonal es la unión de un número finito de regiones triangulares en un plano".

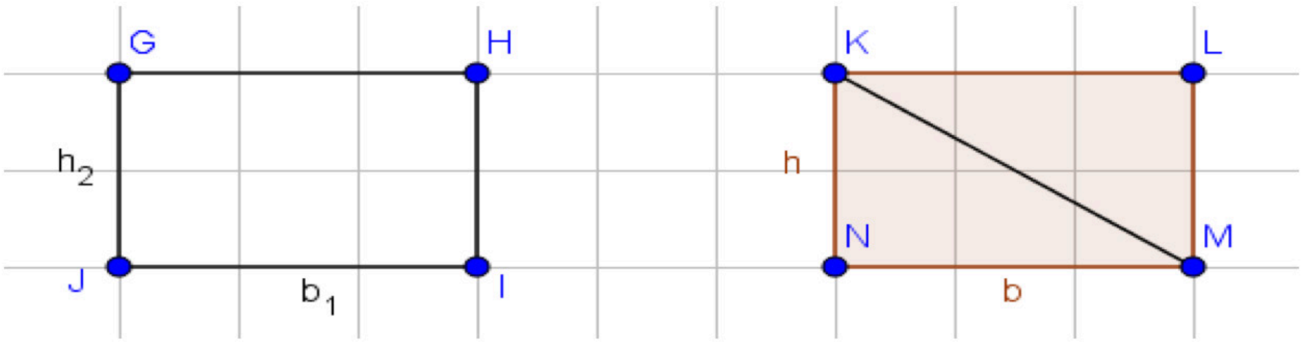


Figura 10. Relación de áreas de regiones triangulare y rectangulares

Visto lo anterior, podemos utilizar el Postulado de la adición de áreas, el cual se enuncia de la siguiente manera:

Supongamos que tenemos una región R, que es la unión de dos regiones R_1 y R_2, con áreas A_1 y A_2 respectivamente. Además R_1 y R_2 se intersecan en un número finito de segmentos y puntos, entonces el área de la región R, es igual a la suma de las áreas de R_1 y R_2. Esto es:

$$A=A_1+A_2$$

Este postulado se puede generalizar a una región R, que sea la unión de un número finito de regiones, con la condición que cada par de regiones se intersequen en un número finito de segmentos y puntos.

Visualicemos, lo anteriormente expresado en la siguiente figura

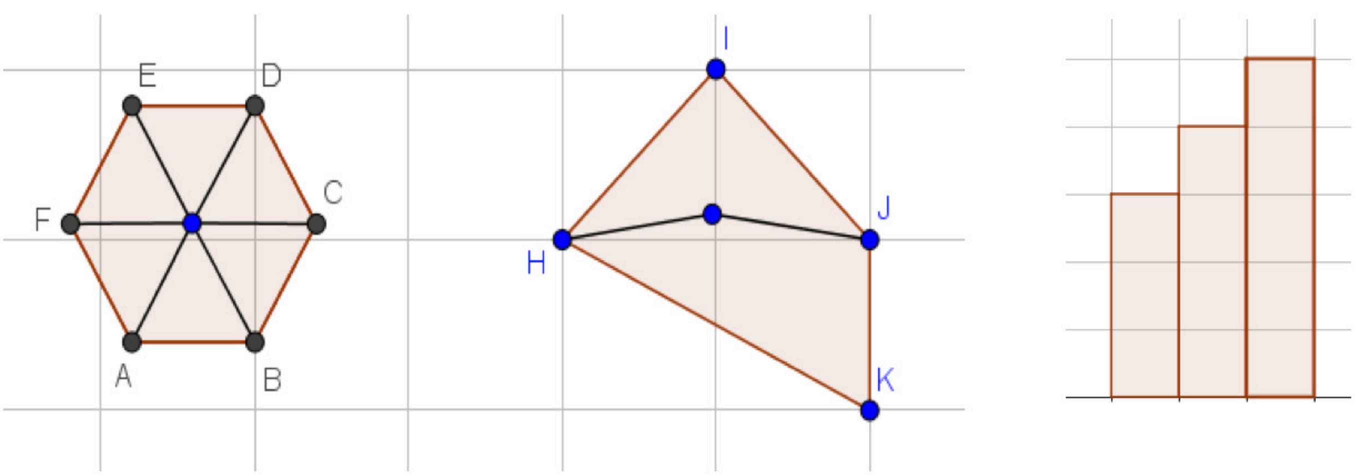


Figura 11. Postulado de la adición de áreas

Bien, hasta ahora hemos calculado el área de regiones poligonales. Pero… ¿qué sucede si la región es no poligonal?
Para determinar áreas de regiones más generales (no poligonales) es posible retomar el método propuesto por los matemáticos griegos, el Método de exhaución.
¿En qué consiste el método de exhaución?

Consiste en lo siguiente:
Para cada número natural n dividimos el segmento [0,b] en n partes iguales de longitud b/n. Sobre cada una de esas partes construimos un rectángulo con la altura de la ordenada máxima (rectángulo superior, por exceso o circunscrito).

En nuestro caso usamos polígonos inscritos y circunscritos a la región para aproximarnos a su área. Se ilustra su planteamiento a continuación.
Calcularemos el área de una curva en un intervalo concreto a partir de su expresión analítica. El método que vamos a utilizar es el cálculo de la altura media de la función, convirtiendo la figura de la cual queremos hallar el área en un rectángulo cuya altura será la altura media de la función. Basados en el teorema del valor medio, podemos afirmar que, el área del rectángulo será equivalente al área que estamos buscando.
Pero, ¿qué dice el teorema del valor medio?
El Teorema del valor medio o de Lagrange dice que:

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), existe un punto $c \in (a,b)$, talque

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

La interpretación geométrica del teorema del valor medio es que el área del trapecio mixtilíneo considerado es igual al área de un rectángulo del mismo ancho (b-a), cuya altura sea la imagen de f(c) de un punto que pertenece al intervalo [a,b]

Veamos esto en el siguiente ejemplo:
Calculemos el área limitada por la recta y=x+2 en el intervalo [1,5]

Solución: Consideremos el rectángulo que se obtiene con la altura mínima (h_{min}) de la curva en el intervalo, Amin, y el área del rectángulo de altura máxima (h_{max}) de la curva en el intervalo, A_{max}. Como es lógico pensar el área de la región que estamos buscando estará acotada entre estos dos valores. Por lo tanto, debemos aproximar A_{min} y A_{max} hasta encontrar A. Es decir, aumentar h_{min} y disminuir h_{max} hasta llegar a M (altura media)

Por ello, para lograr un rectángulo de área equivalente A, encontremos la altura media en el intervalo [1,5], calculando la media entre el valor mínimo y máximo de la recta.

$$M = \frac{h_{min}+h_{max}}{2} = \frac{3+7}{2} = 5; \qquad \text{donde} \qquad h_{min} = f(a) = 1 + 2 = 3$$

$$h_{max} = f(b) = 5 + 2 = 7$$

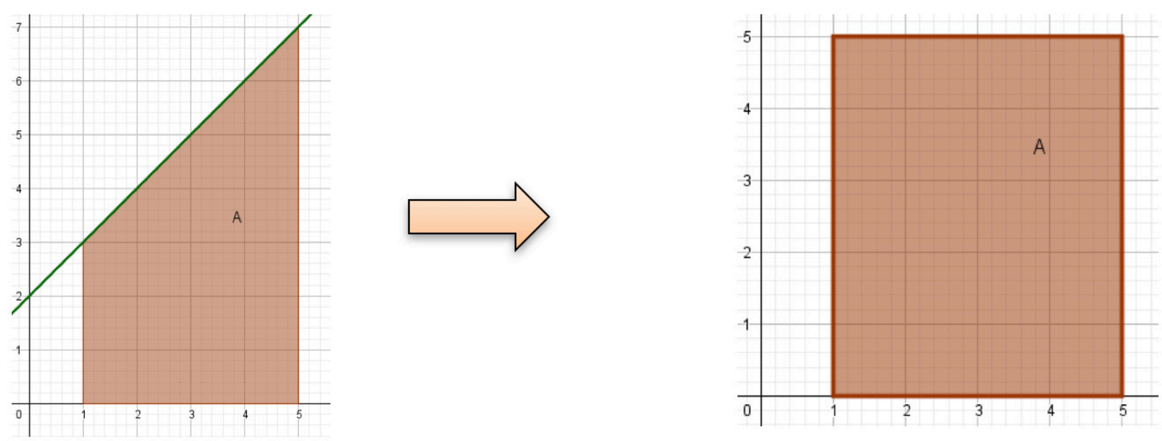


Figura 12. Área del trapecio y su rectángulo equivalente

Así que, el área será $A = base \cdot altura = 5 \cdot 4 = 20$, o lo que es igual,

$A = (b-a)\frac{h_{min}+h_{max}}{2} = (5-1)\frac{3+7}{2} = 20$, que coincide con la fórmula del área de un trapecio, que ya conocemos $A = h\frac{B+b}{2}$, donde h es la altura del trapecio (ancho en nuestro rectángulo) y b y B son la base menor y base mayor del mismo (valores máximo y mínimo de la función en el intervalo dado. ([1,5])

Como podemos observar la región limitada por la recta $y = x + 2$, en el intervalo [1,5], es un trapecio y la altura media que calculamos es exacta nos ha proporcionado el área exacta.

Nos preguntamos, y ¿si la gráfica no es una recta?

Es lógico pensar que la altura media no será exacta, por lo tanto el área no será exacta.

Apreciemos esto, en el siguiente ejemplo, utilizando la función $f(x) = x^2$, $x = 1$, $x = 4$

Procedemos de manera semejante a como lo hicimos anteriormente.

Tomamos la media entre el valor mínimo y el máximo

$M = \frac{h_{min}+h_{max}}{2} = \frac{1+16}{2} = 8.5$ $\qquad$ $h_{min} = f(1) = (1)^2 = 1$

$h_{max} = f(4) = (4)^2 = 16$

Por lo tanto, $A = (4-1)8.5 = 3 \cdot 8.5 = 25.5$

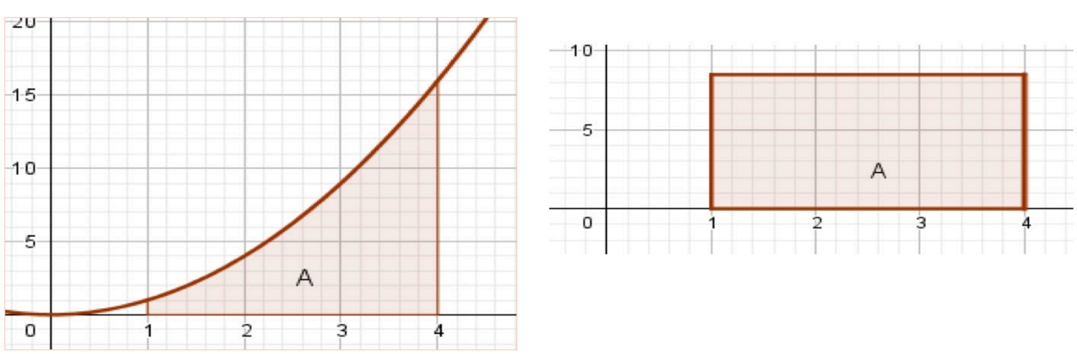
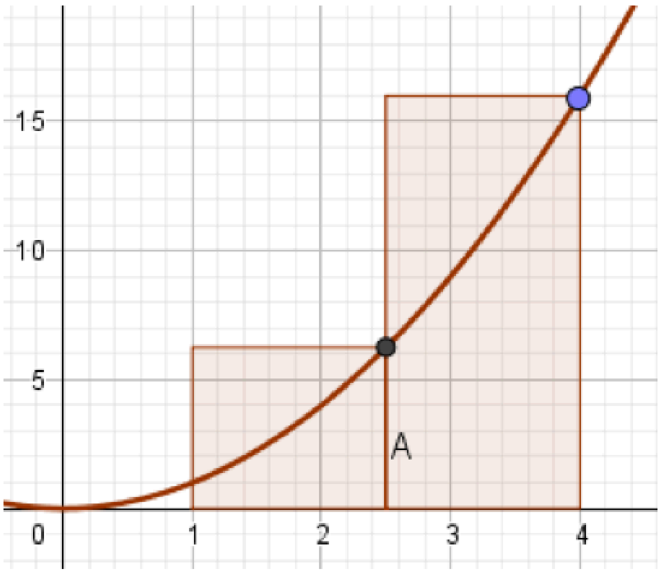


Figura 13. Área con una partición

En este caso, el ancho de cada rectángulo será $\frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{2}$=1.5 Por lo tanto, tomamos el valor del punto $x = 2.5$, cuya altura es 6.25 ($f(2.5) = (2.5)^2 = 6.25$) y realicemos una media de las alturas máxima y mínima de cada rectángulo para luego calcular la media entre ambos valores



$$h_{min} = \frac{1+6.25}{2} = 3.625$$

$$h_{max} = \frac{6.25+16}{2} = 11.125$$

$$M = \frac{h_{min}+h_{max}}{2} = \frac{3.625+11.125}{2}$$
$$= 7.375$$

$$A = 3 \cdot 7.375 = 22.125$$

Figura 14. Área con dos particiones

Si se realizan cuatro particiones tendríamos:

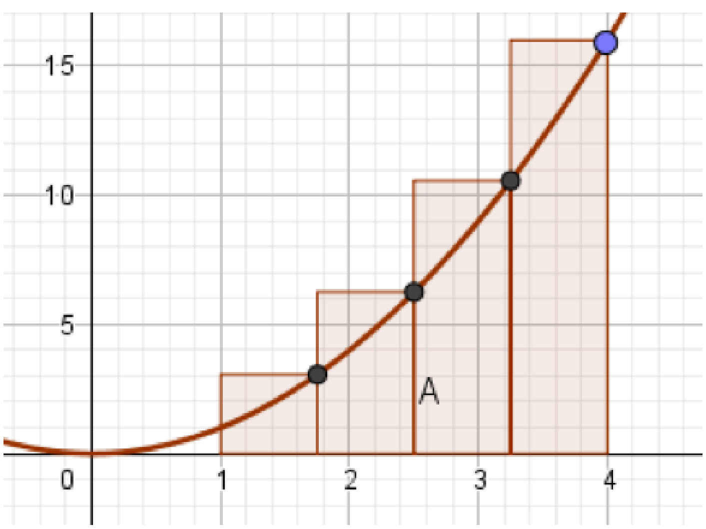


Figura 15. Área con cuatro particiones

$$h_{min} = \frac{1+3.06+6.25+10.56}{4} = 5.2175$$

$$h_{max} = \frac{3.06 + 6.25 + 10.56 + 16}{4} = 8.9675$$

$$M = \frac{h_{min} + h_{max}}{2} = \frac{5.2175 + 8.9675}{2} = 7.0925$$

$$A = 3 \cdot 7.0925 = 21.2775$$

¿Qué observamos con respecto a las alturas?
¿A qué conclusión podemos llegar?
Observamos que la diferencia entre los valores de la altura máxima y mínima va disminuyendo. Podríamos concluir que cuando esta diferencia se aproxime a cero, hemos encontrado la media casi exacta y por tanto hemos hallado el área casi exacta de la región.

Ahora, con ayuda de la computadora, complete la siguiente tabla donde se aprecia cómo el valor de la altura media se aproxima a 7, y el área por tanto del rectángulo equivalente converge a 21. En consecuencia el área de la región limitada por la curva será de 21.

Tabla 2. Cálculo de área de la región limitada por la curva

No. particiones	Medias de alturas mínimas h_{min}	Medias de alturas máximas h_{max}	$h_{max} - h_{min}$	M	A_{min}	A_{max}	A
1							
2							
4							
16							
32							
64							
128							
256							
512							

Nos preguntamos ¿será que con cualquier curva se cumple?, ¿es posible resolver otros ejercicios de igual forma?

2.3. Suma de Riemann

Ahora vamos a calcular el área de regiones planas limitadas por diferentes tipos de curvas. Para ello utilizaremos el método de exhaución. Esto es,
Dada una función f de variable real y valor real, continua y positiva, consideramos la región R limitada por la curva y=f(x), las rectas x=a ,x=b y el eje x

Primeramente, dividimos el intervalo [a,b] en n subintervalos de longitud Δ_x=(b-a)/n, es decir, tenemos los subintervalos $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$...$[x_{(n-1)},x_n]$, donde $x_0=a$ y $x_n=b$. Además $x_1=a+\Delta_x$, $x_2=a+2\Delta_x$, $x_3=a+3\Delta_x$ ...
Esta subdivisión se llama partición de [a,b] y se denota por P. Para indicar la longitud del i-ésimo subintervalo utilizaremos la simbología $[x_{(n-1)},x_n]$. Así $\Delta_{(xi\ )}=x_i-x_{(i-1)}$
Gráficamente esto se representa de la siguiente manera:

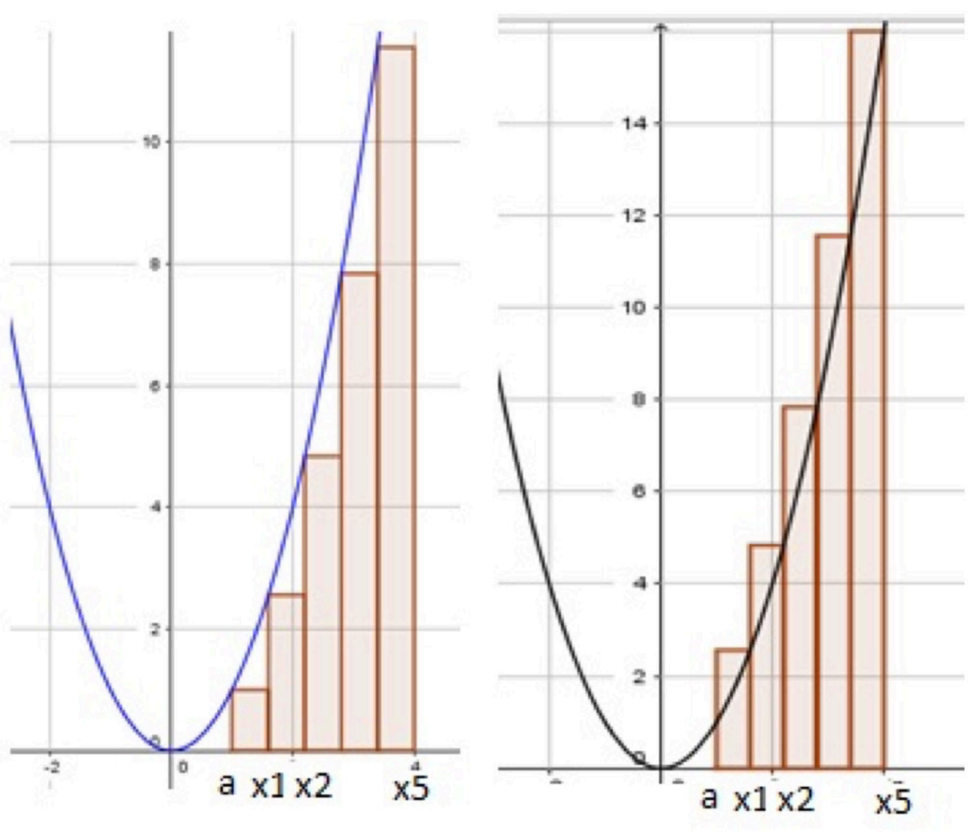


Figura 16. Rectángulos de aproximación

En la figura 15 podemos apreciar que hemos trazado perpendiculares desde los puntos extremos de los subintervalos, obteniendo n regiones (franjas). El área total encerrada por la curva, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$ corresponde a la suma de las áreas de las franjas. Pero, como no podemos calcular exactamente el área de estas franjas, construimos rectángulos de base Δ_x y altura $f(x)$, siendo el valor de f en el punto extremos de la derecha, de tal manera que el área del i – ésimo rectángulo será $f(x_i) \cdot \Delta_x$. Por lo tanto, al sumar las áreas de los n rectángulos obtenemos el área (aproximada) de toda la región R. Es decir,

Definición:

El área A de la región R limitada por la gráfica de una función continua y positiva f, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$, es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos R_i de base Δ_x y altura $f(x_i)$, donde x_i es el punto extremo de la derecha del subintervalo i-ésimo de la partición.

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta_x + f(x_2)\Delta_x + f(x_3)\Delta_x + \cdots + f(x_n)\Delta_x]$$

Nos preguntamos, ¿Qué pasa si en lugar de tomar los extremos derechos de la partición se toman los izquierdos? ¿Y si tomamos un punto entre los extremos?

Para dar respuesta a la primera interrogante, si tomamos los extremos izquierdos obtenemos también una aproximación al área A de la región R.

$A_n = f(x_0)\Delta_x + f(x_1)\Delta_x + f(x_2)\Delta_x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta_x,$ y

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_0)\Delta_x + f(x_1)\Delta_x + f(x_3)\Delta_x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta_x]$$

Podemos concluir que como f es continua, el límite existe y es igual a A. Es decir,

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

La segunda pregunta tiene una respuesta similar, la suma de las áreas de los rectángulos construidos, cualquiera que sea la elección del punto x_i^*, es

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta_x$$

Esta suma se denomina **Suma de Riemann.**

Es importante señalar que si $f(x) \geq 0$, para toda x en un intervalo dado, la suma de Riemann se interpreta como la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación. Sin embargo, si $f(x)$ toma valores positivos y negativos en el intervalo, las áreas de los rectángulos que quedan debajo del eje x se determinan utilizando la expresión $-f(x_i) \cdot \Delta_x$.

De esta manera, **la suma de Riemann se interpreta como la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x, con los opuestos aditivos de las áreas de los rectángulos de los rectángulos que estén por debajo del eje x**.

Veamos cómo se ilustra esto en las siguientes figuras

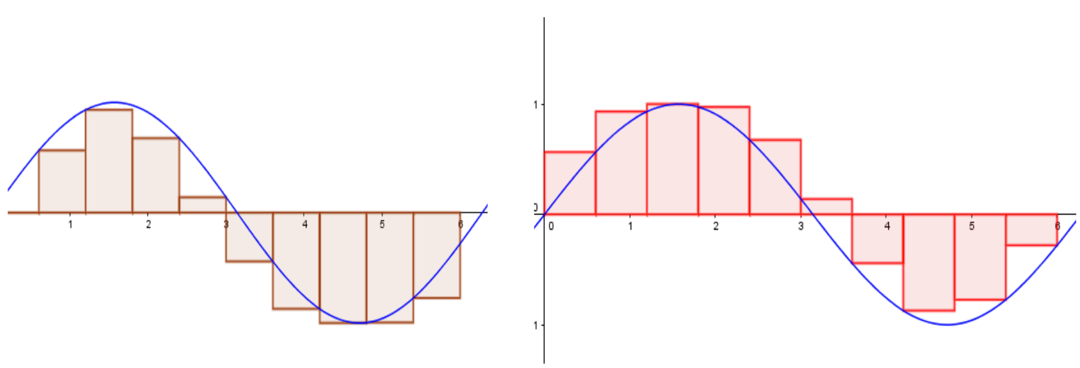


Figura 17. Rectángulos de altura

Observemos que si la función f es una función continua y acotada, al construir rectángulos de aproximación se determinan funciones escalonadas que encierran la curva f. Y, entonces, cuando nos aproximamos al área encerrada por la curva f y el eje x por rectángulos de aproximación es equivalente a determinar el área encerrada por el eje x y cada una de las funciones escalonadas que encierran la curva.
Veamos ahora las propiedades que verifican las integrales de las funciones escalonadas. Estas propiedades son consecuencia inmediata de las propiedades del área de un conjunto, debido a la definición que hemos dado de integral de una función escalonada.

2.4 Propiedades de la integral

1) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx \,, \ \ \forall k \in R$

3) Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

4) Si $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

7) $\int_a^a f(x) = 0$

Estas propiedades las verificará también la integral de una función cualquiera.

Las demostraciones de estas propiedades son triviales.

La interpretación geométrica de la aditividad se da a continuación

Figura 18. Interpretación geométrica de la aditividad de la integral

De manera similar representaremos la monotonía de la integral, es decir,

$$Si\ f(x) \geq g(x), \forall x \in [a,b] \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

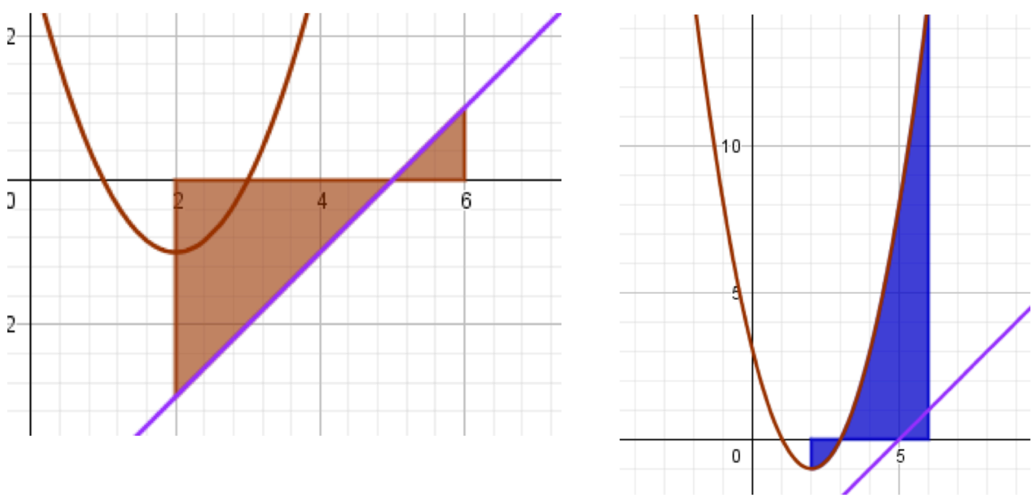
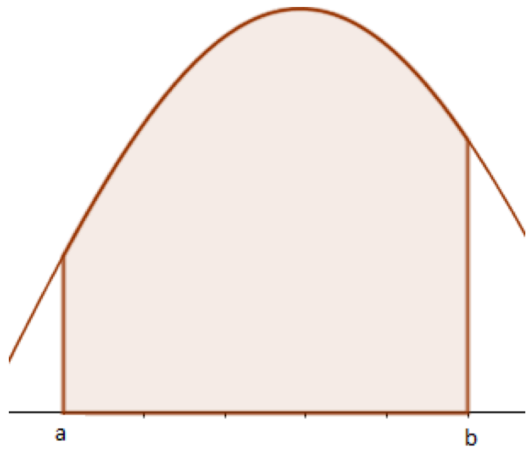


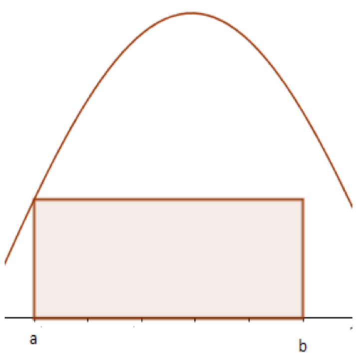
Figura 19. Interpretación geométrica de la monotonía de la integral

Ahora que ya hemos analizado cómo calcular el área de regiones poligonales y no poligonales, haremos un pequeño resumen gráfico del área bajo una curva

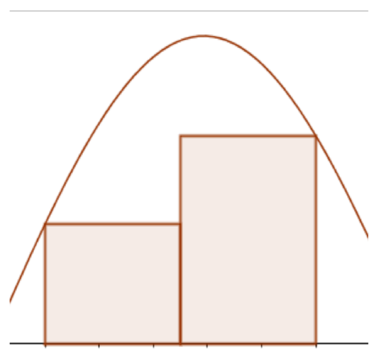
2.5. Área bajo una curva



Sumas inferiores

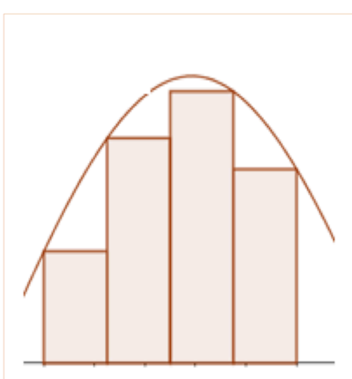


$$S_{inf}(f,1) = hm_1 = m_1(b-a)$$



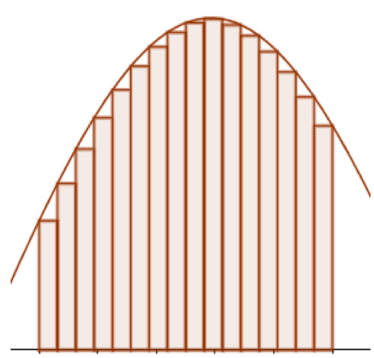
$$S_{inf}(f,2) = hm_1 + hm_2$$

$$h = \left(\frac{b-a}{2}\right)$$



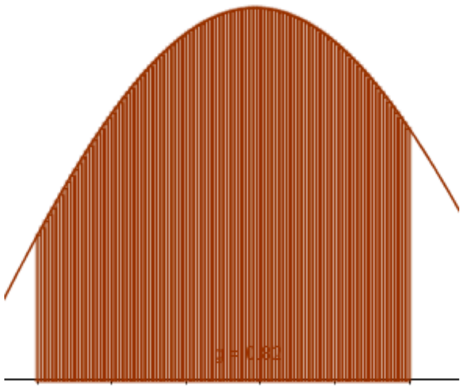
$$S_{inf}(f,4) = hm_1 + hm_2 + hm_3 + hm_4$$
$$= \sum_{i=1}^{4} m_i h$$

$$h = \left(\frac{b-a}{4}\right)$$



$$S_{inf}(f,16) = hm_1 + hm_2 + \cdots + hm_{16}$$
$$= \sum_{i=1}^{16} m_i h$$

$$h = \left(\frac{b-a}{16}\right)$$

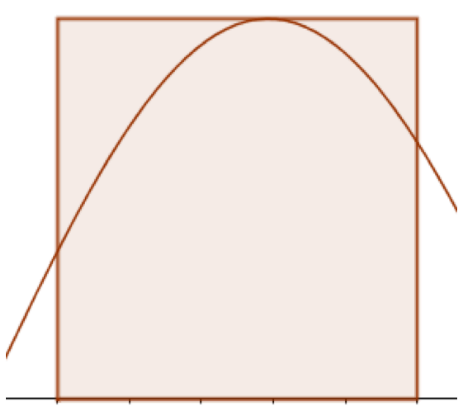


$$S_{inf}(f,n) = hm_1 + hm_2 + \cdots + hm_n$$
$$= \sum_{i=1}^{n} m_i h$$
$$h = \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

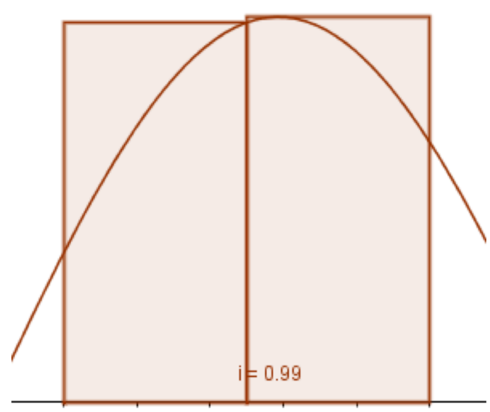
Concluimos que a medida que aumenta el número de rectángulos $(n \to \infty)$, la sumatoria $S_{inf}(f,n)$ se aproxima al área bajo f entre $x = a$ y $x = b$.

De manera similar analizamos

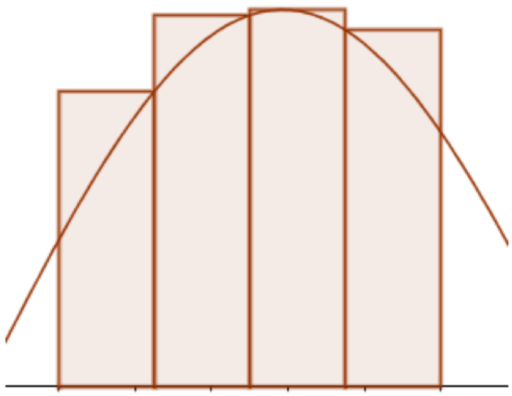
Sumas superiores



$$S_{sup}(f,1) = hM_1 = M_1(b-a)$$

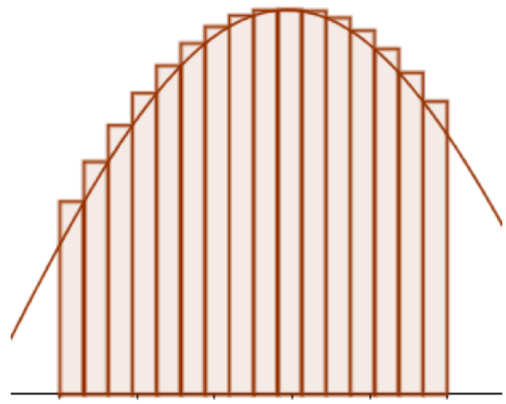


$$S_{sup}(f,2) = hM_1 + hM_2$$
$$h = \left(\frac{b-a}{2}\right)$$



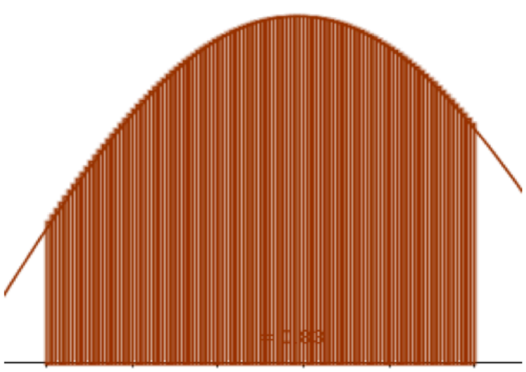
$$S_{sup}(f,4) = hM_1 + hM_2 + hM_3 + hM_4 = \sum_{i=1}^{4} M_i h$$

$$h = \left(\frac{b-a}{4}\right)$$



$$S_{sup}(f,16) = hM_1 + hM_2 + \cdots + hM_{16} = \sum_{i=1}^{16} M_i h$$

$$h = \left(\frac{b-a}{16}\right)$$



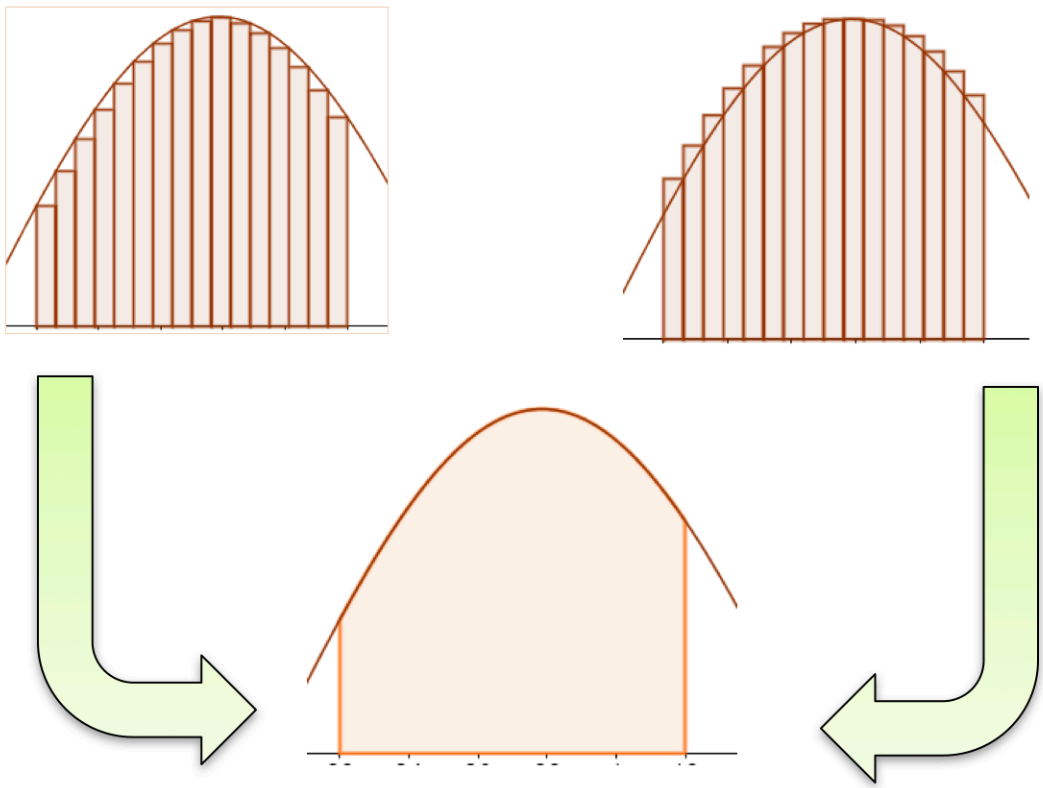
$$S_{sup}(f,n) = hM_1 + hM_2 + \cdots + hM_n = \sum_{i=1}^{n} M_i h$$

$$h = \left(\frac{b-a}{n}\right)$$

Llegamos a la misma conclusión. A medida que aumenta el número de rectángulos $(n \to \infty)$, la sumatoria $S_{sup}(f,n)$ se aproxima al área bajo f entre $x = a$ y $x = b$.

A manera de resumen, tenemos

Sumas inferiores, sumas superiores, área bajo la curva



Concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} S_{inf}(f,n) = \lim_{n\to\infty} S_{sup}(f,n) = Area = \int_a^b f(x)dx$$

El símbolo $\int$ ⬚ fue introducido por Leibniz a finales del siglo XVII para caracterizar la sumatoria, f(x) es el integrando y a y b son los límites de integración.

Algo que debemos aclarar es que la integral definida representa el área bajo la curva, pero ¿siempre lo es? No. La integral definida es una aplicación y en la gran mayoría representa el área bajo una curva.

Entonces, ¿cuándo **no** podemos considerar que la integral definida representa el área bajo la curva? Cuando la integral sea igual a cero o negativa, ya que no existe área negativa o de valor cero.

Surge la inquietud, ¿qué haremos cuando la función f tome tanto valores positivos como negativos?

Al considerar el límite de la suma de Riemann, se obtiene una integral definida que puede interpretarse como una diferencia de áreas: $\int_a^b f(x) = A_1 - A_2$, donde A_1 es el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x en el semiplano superior $(y > 0)$ y A_2 es el área de la región limitada por la gráfica de f y el eje x en el semiplano inferior $(y < 0)$

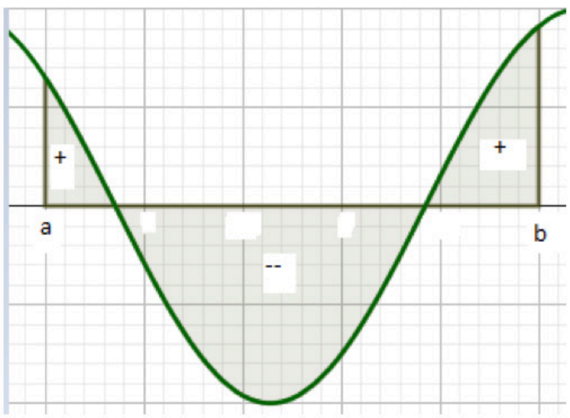


Figura 20. Integral definida como diferencias de áreas

Ahora aplicaremos todo lo anterior a ejemplos concretos.

Calcularemos el área bajo una curva haciendo uso de la computadora, mediante la utilización del software Geogebra.

Calculemos el área limitada por $f(x) = x^2$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

Vamos a insertar rectángulos bajo la curva $f(x) = x^2$. Además trataremos de trabajar utilizando la hoja de cálculo, la vista algebraica y la vista gráfica de Geogebra.

Estas vistas se activan desde el menú haciendo click sobre el botón Vista. Nos aparecerá una pantalla como la que se presenta a continuación.

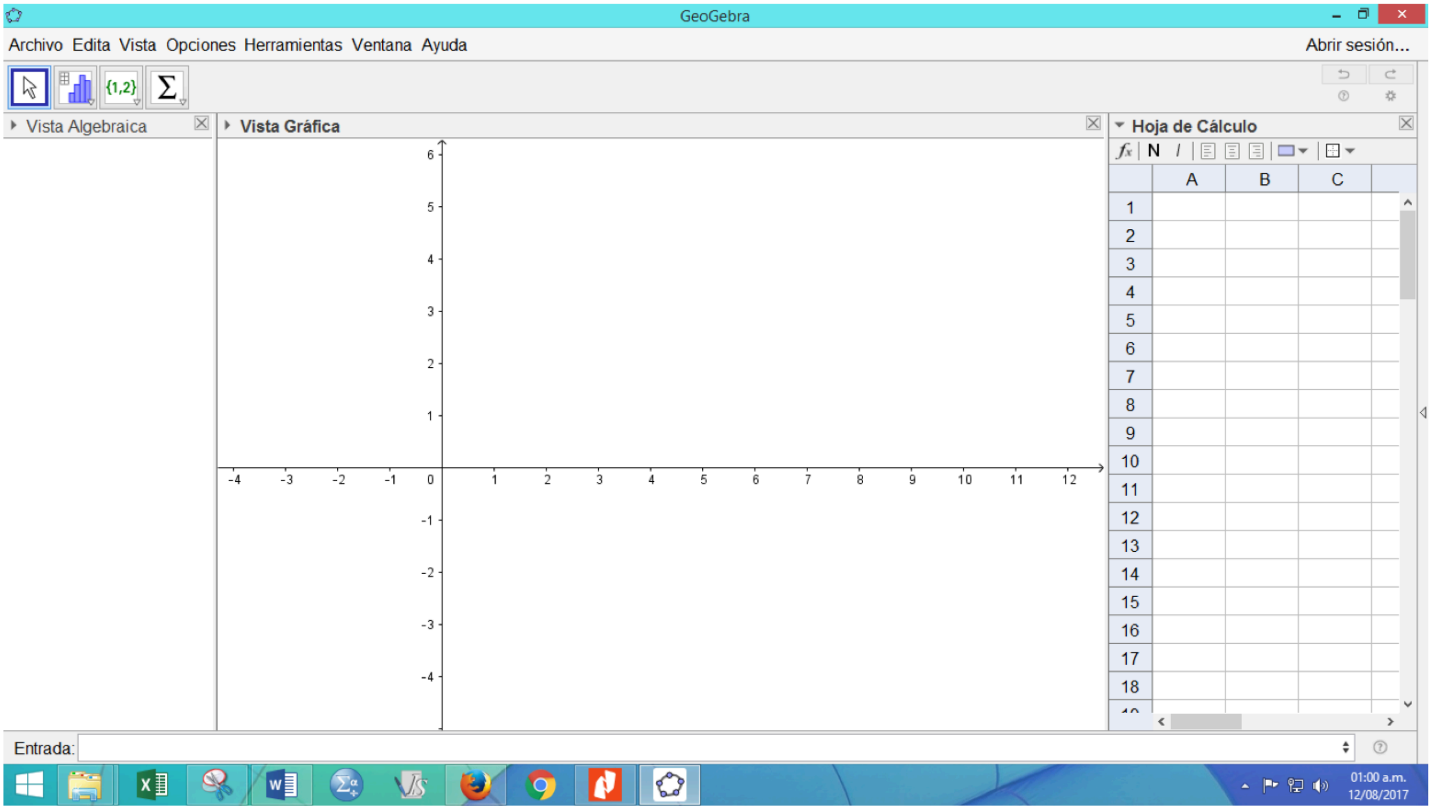


Ilustración 1. Pantalla de Geogebra

Empezamos por introducir la función en el campo de Entrada y observamos que en la vista algebraica aparece la función y en la vista gráfica se despliega dicha gráfica. En la hoja de cálculo, la cual trabaja similar a la hoja de cálculo de Excel escribimos algunas leyendas que requeriremos:

a – Extremo izquierdo del área a calcular

b – Extremo derecho del área a calcular

n – Número de rectángulos

Delta x (Δ_x) – base de los rectángulos; $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$

También introducimos los encabezados donde calcularemos la base, altura, área y suma de rectángulos a utilizar.

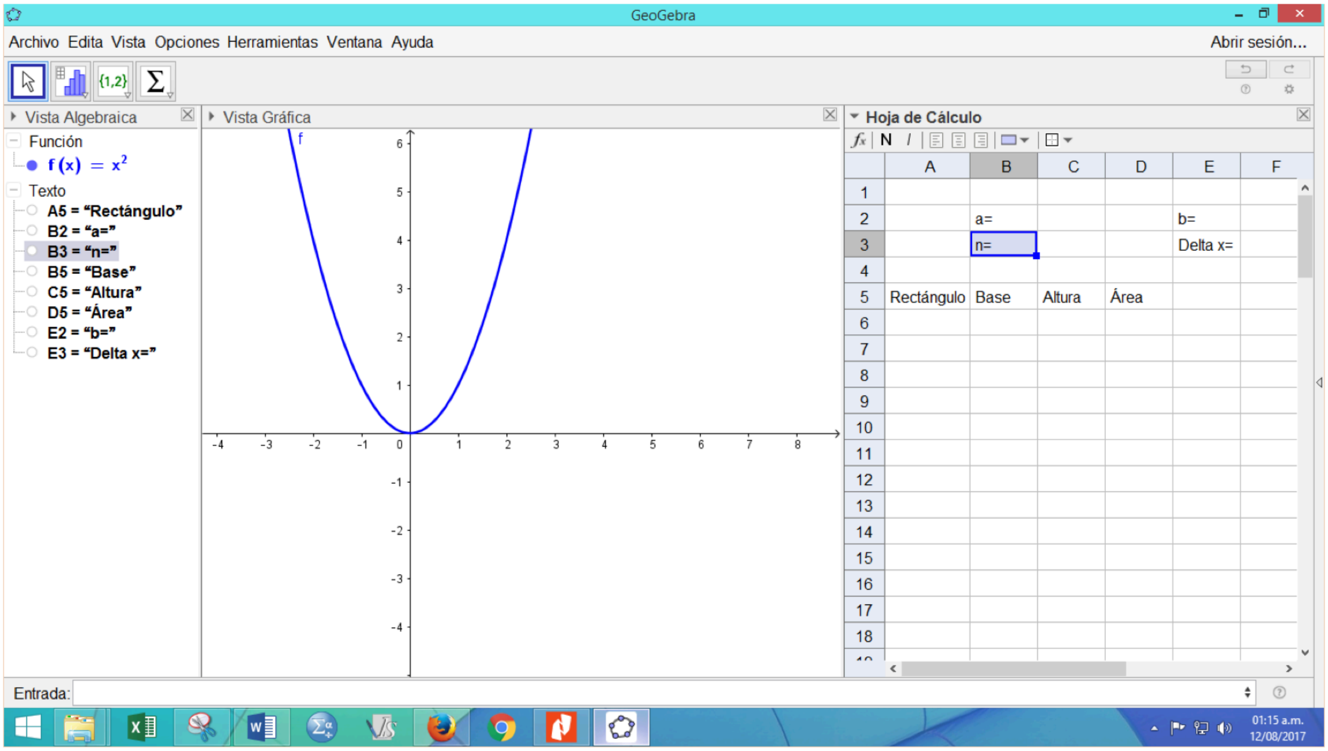


Ilustración 2. Introduciendo datos

Iniciamos con 2 rectángulos ($n = 2$), $a = 1$ es el extremo inferior y $b = 4$ el extremo superior del área que queremos calcular, $\Delta_x = \frac{b-a}{n}$

En el campo de entrada elegimos la función "suma inferior" e introducimos los parámetros solicitados $(f, 1,4,2)$. Observamos que el valor de Δ_x en la gráfica coincide con el calculado en la hoja de cálculo ($\Delta_x = 1.5$). También nos aparece el número $a = 10.88$ que es la suma inferior de la función con dos rectángulos.

Ahora regresamos a la hoja de cálculo e introducimos la base del primer rectángulo, que inicia en $a = 1$, el segundo rectángulo inicia en $a + \Delta_x$ (introducimos el dato como fórmula teniendo cuidado de fijar el valor de Δ_x, es decir escribiendo el signo de dólar antes y después de la letra). Después introducimos los datos de las alturas. Vemos que para el primer rectángulo tenemos en el extremo izquierdo que es igual a $f(a) = f(1)$ (también introducimos como fórmula). Como ya tenemos la fórmula solo arrastramos ésta al segundo rectángulo.

Ahora calculamos el área de cada rectángulo aplicando la fórmula $base * altura$. En nuestro caso la altura ya está calculada para cada rectángulo y la base será igual a la base del segundo rectángulo menos la base del primero. Para copiar la fórmula en el segundo rectángulo generamos la base del tercer rectángulo arrastrando la celda de base hasta el rectángulo 3 (aparece 4). Ahora sí arrastramos la celda de área.

Seguidamente calculamos la suma utilizando la función suma e introduciendo como parámetros los valores de las áreas calculadas de los dos rectángulos. Nos da que es igual a 10.88, coincidiendo con lo que ya conocíamos de la vista gráfica.

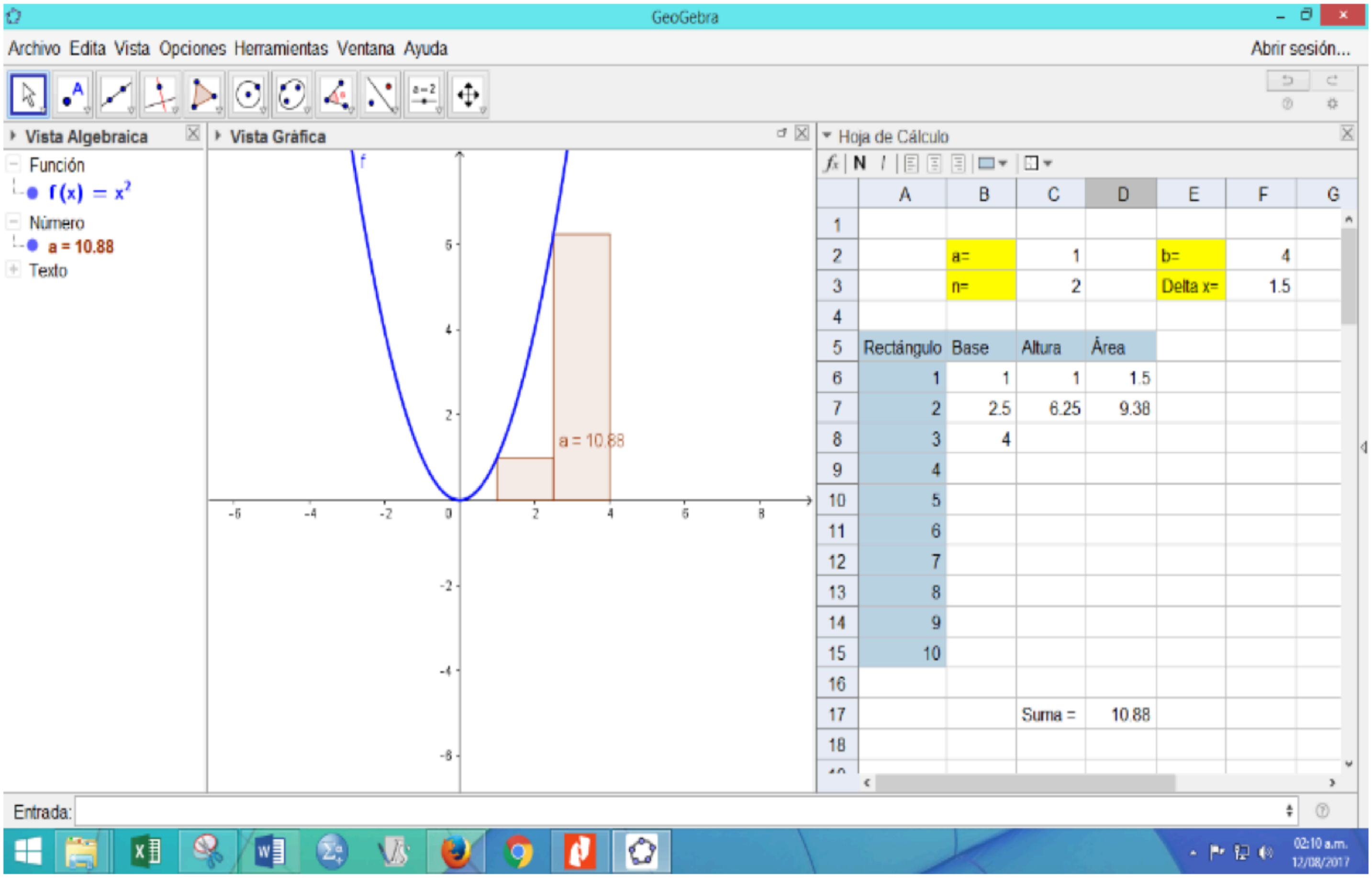


Ilustración 3. Pantalla de Geogebra con los cálculos realizados

Para definir más rectángulos creamos un deslizador. En la ventana de vista gráfica hacemos click en el icono de deslizador, y luego en un punto de la vista gráfica. Se abre una nueva ventana donde definimos los valores seleccionando la opción “entero”, Min = 2, Max = 10, Incremento = 1, ya que queremos trabajar hasta con 10 rectángulos, iniciando con 2, luego click en OK.

Seguidamente, nos vamos a la vista algebraica, seleccionamos el número a (que nos daba la suma inferior), haciendo click con el botón derecho. Se abre otra ventana y seleccionamos Propiedades, en la pestaña Básico y el campo definición cambiamos el número de rectángulos (2) por n, que es el nombre del deslizador que acabamos de insertar, cerramos la ventana.

Y ahora estamos listos para desplazar el deslizador. Probemos y veamos que sucede en la vista gráfica. ¿Qué podemos decir al respecto? ¿Qué sucede cuando n es igual a 3?

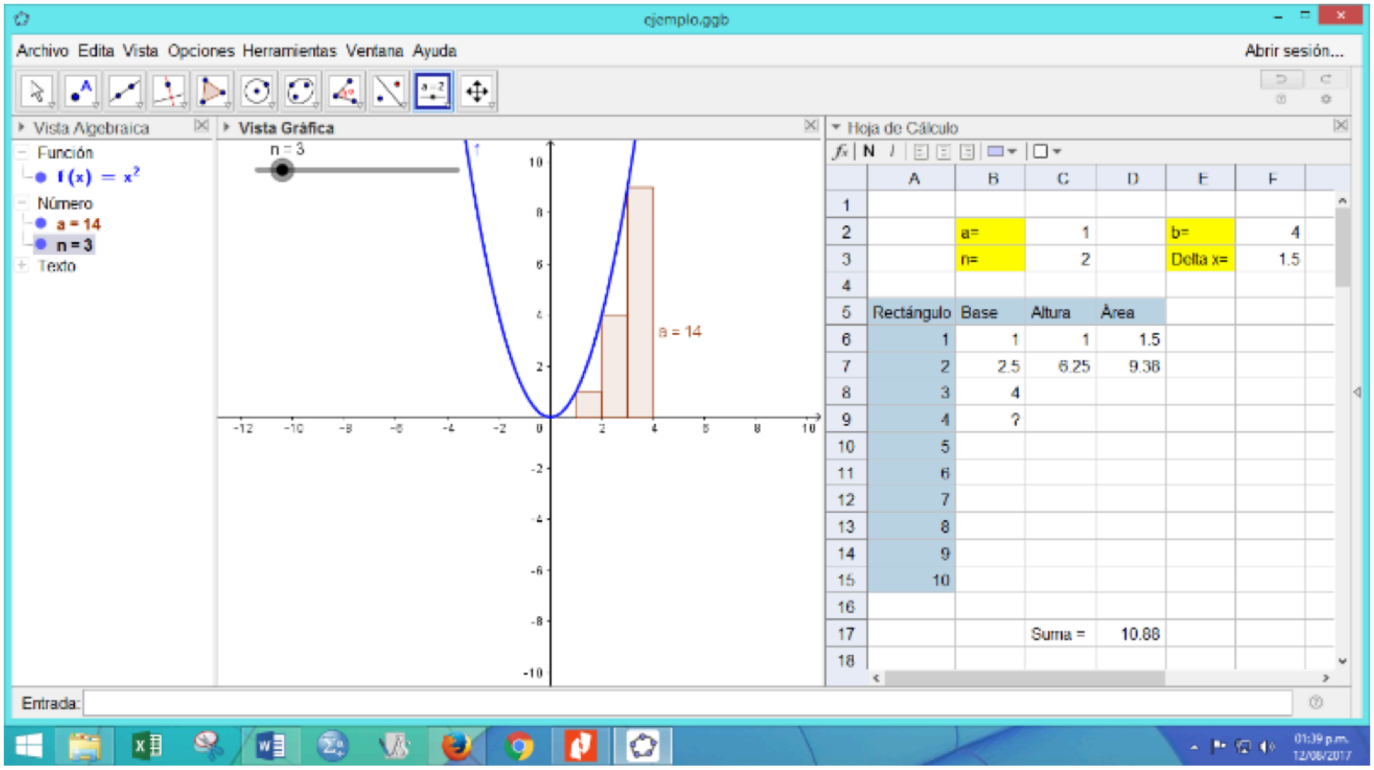


Ilustración 4. Deslizador

Como podemos observar el área se ha dividido en 3 rectángulos y como es obvio la base de cada uno ha disminuido y la suma de áreas ha aumentado (a = 14).

Podemos comprobar estos resultados usando la hoja de cálculo: cambiamos n =3, aumentamos un rectángulo y recalculamos la suma.

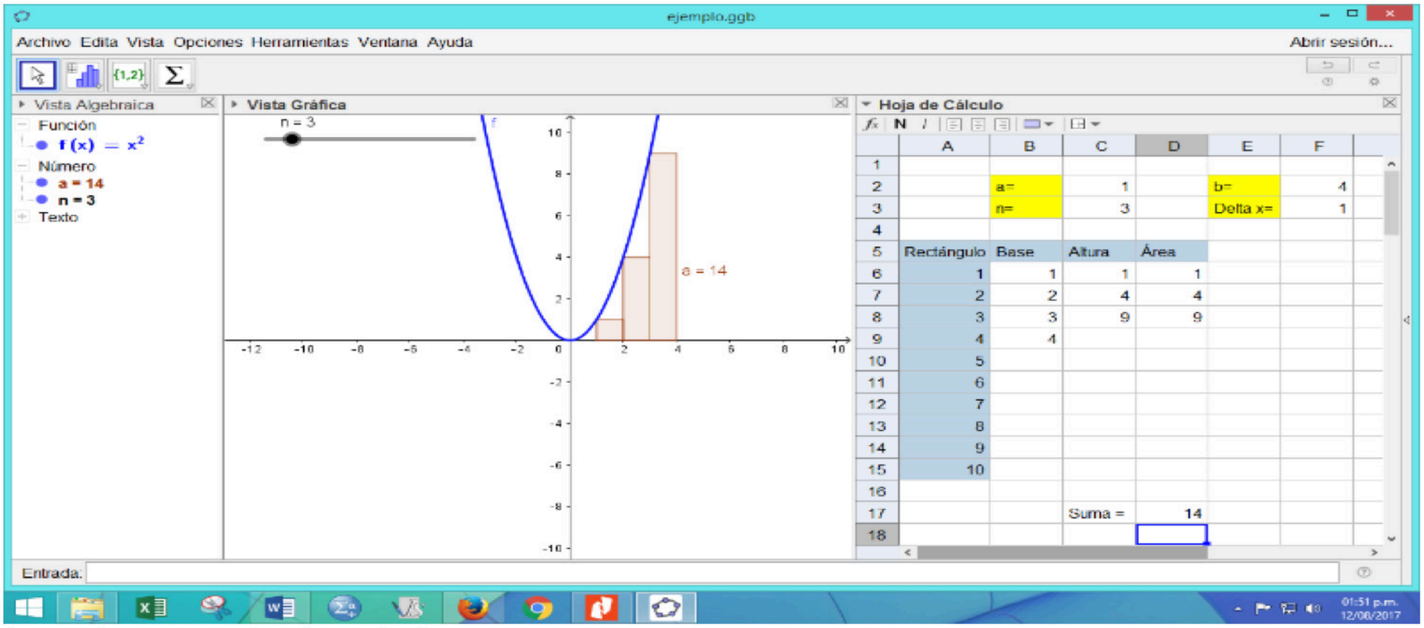


Ilustración 5. Comprobando resultados

Comprobamos que el resultado de la suma de áreas es el mismo obtenido por el método gráfico (a = 14)

Podemos seguir calculando las áreas cuando n = 4,5,6,7,8,9,10.
Los resultados aparecen en la siguiente tabla

Tabla 3. Sumas de Riemman

No. Rectángulos	Base	Suma
2	1.5	10.88
3	1	14
4	1.75	15.66
5	0.6	16.88
6	0.5	17.38
7	0.4	17.88
8	0.375	18.26
9	0.33	18.56
10	0.3	18.8

Estos resultados deben converger al área de la integral definida $\int_1^4 x^2\,dx$, que utilizando Geogebra se calcula mediante la función Integral (f,1,4) y la cual es igual a 21.

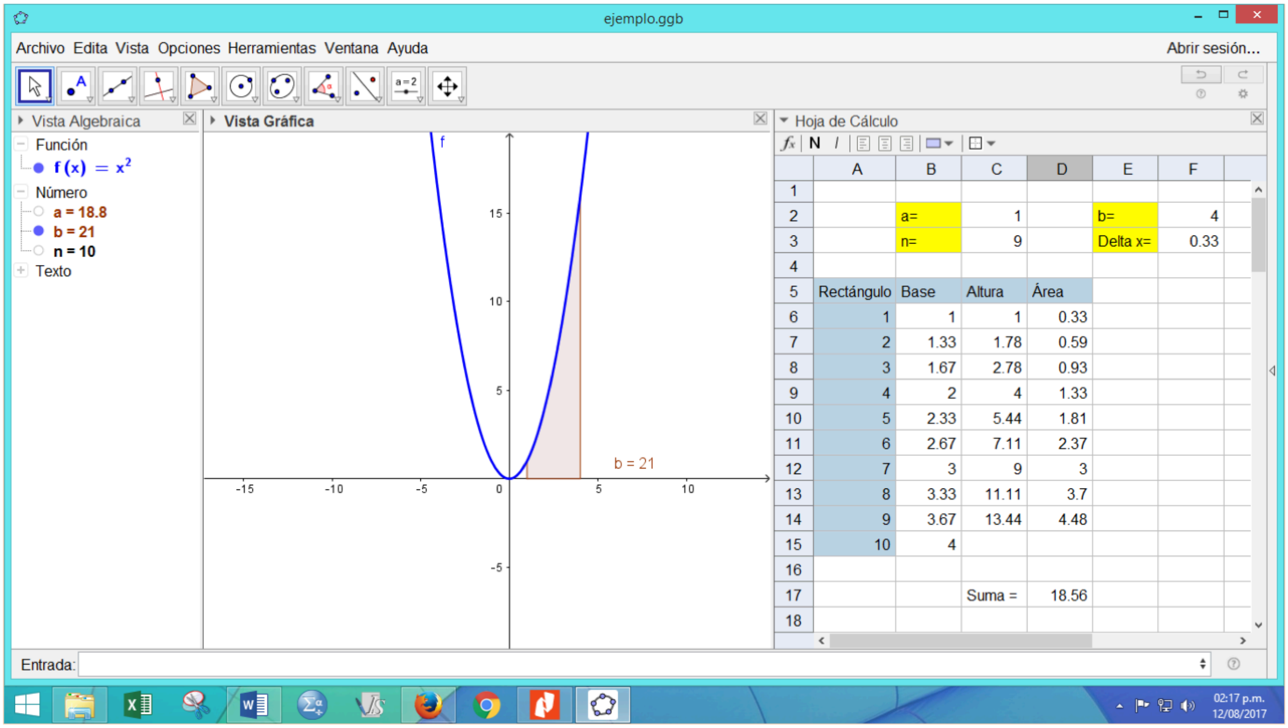


Ilustración 6. Área bajo la curva

Siguiendo los mismos pasos anteriores. **Calculemos el área de la región limitada por la función $f(x) = senx$, $x = 0$ y $x = 2\pi$**

Utilizando 2, 5, 10, 15, 100 rectángulos:

A continuación mostramos algunas gráficas con diferentes números de rectángulos

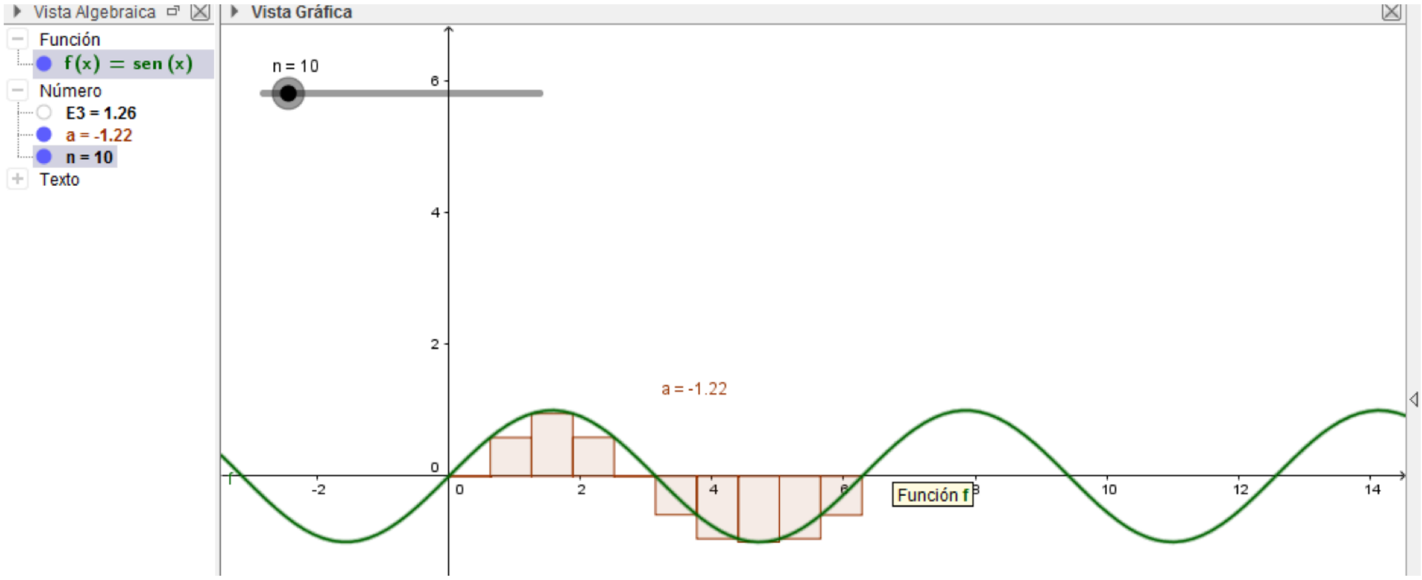


Ilustración 7. Cálculo de área utilizando 10 rectángulos

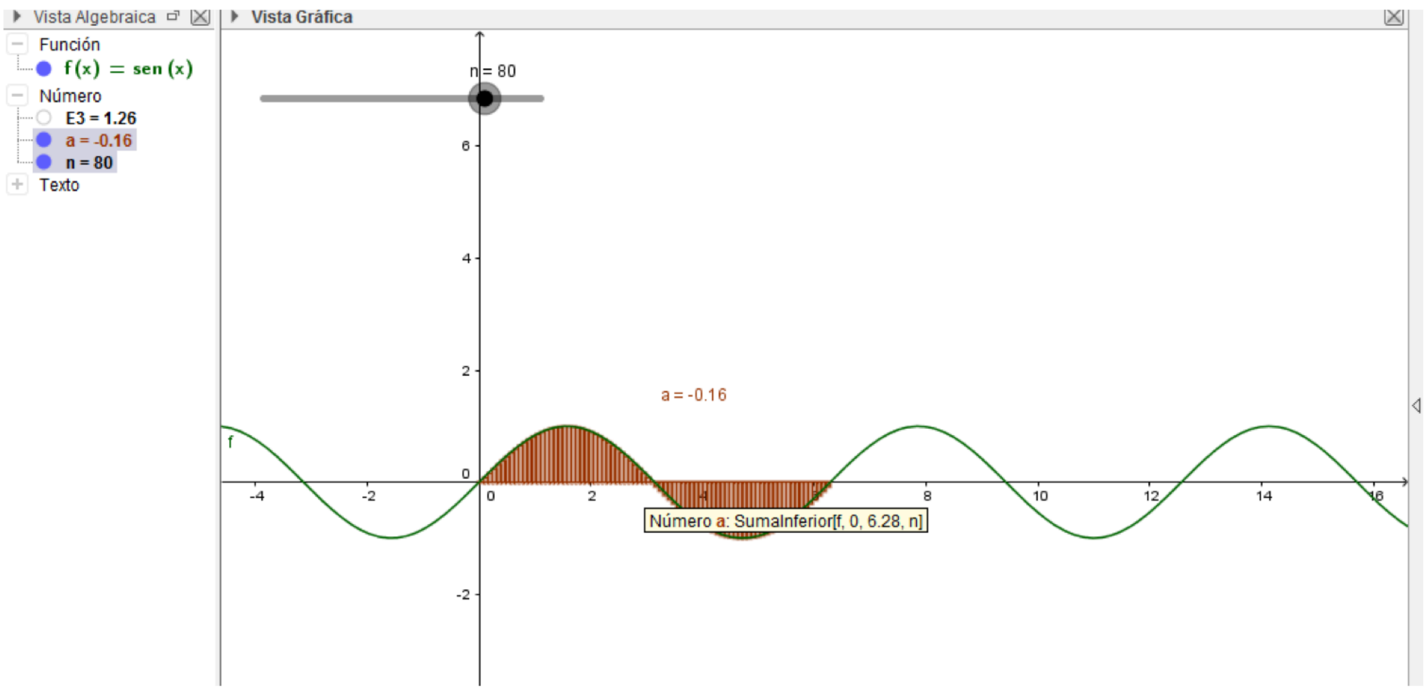


Ilustración 8. Cálculo de área empleando 80 rectángulos

¿Qué podemos decir de los valores de área encontrados?
¿A qué conclusión llegamos?
De esta manera, hemos mostrado que la integral definida es un número y que la misma, no siempre representa el área de una región.

Ahora, ¡Ponte a prueba!

Utilizando la hoja de cálculo, la vista algebraica y la vista gráfica de Geogebra:

a) Calcula, en forma aproximada, el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, el eje $\boldsymbol{x}$ y las rectas $x = 0$ y $x = 4$. Para ello divide la región en dos subregiones partiendo el intervalo dado en dos subintervalos de igual tamaño, y considera que en cada subintervalo el arco de la curva es recto.

b) Encuentra una mejor estimación partiendo la región en 4, 15, 25, 50 subregiones. Para eso parte el intervalo dado en subintervalos de igual tamaño y nuevamente considera que en cada subintervalo el arco de la curva es recto.

c) Plantea la integral que representa el valor exacto del área de la región dada.

Bien, nos surge una pregunta, ¿Y si los límites de la región son líneas horizontales y no verticales? ¿Y si no son líneas rectas, sino dos curvas, por ejemplo?

El procedimiento para resolver los ejercicios es similar, lo único que debemos tener cuidado que, para la primera pregunta, ahora en nuestra función, la variable independiente es y y la variable dependiente x.

Prueba a resolver los siguientes ejercicios:

Considera la región encerrada por la recta y = 4 y la función $y = x^2$.

Calcule el área de la región limitada por $y = senx$, $y = sen(2x)$, en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2.7. Funciones Riemann integrables

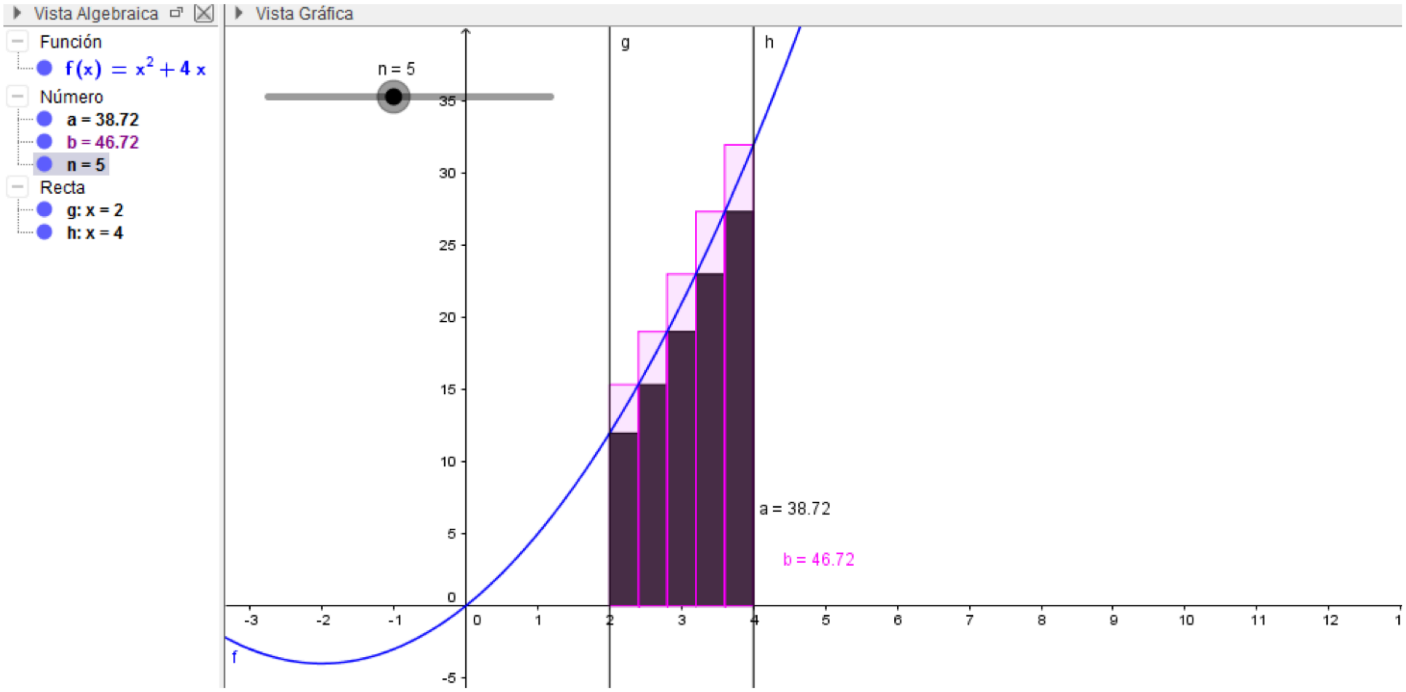
Ahora trataremos de reconocer las funciones Riemann – Integrables: dado un valor positivo ε, se encuentra una partición adecuada tal que la diferencia entre la suma superior y la suma inferior es menor al número ε. En otras palabras, el criterio de integrabilidad de Riemann asegura que una función es integrable sí y solo sí, dado un valor ε mayor que cero, es posible encontrar una partición del intervalo de integración para la cual la diferencia entre la suma superior y la suma inferior es menor que el valor dado ε

Para lograr lo anterior, resolvamos:

Graficar las funciones:

a) $f(x)= x^2+4x$, $y = 0$ y las rectas $x=2$ y $x=4$
b) Calcular el valor de la suma superior, utilizando 5 rectángulos.
c) Calcular el valor de la suma inferior, utilizando 5 rectángulos.
d) Calcular la diferencia entre la suma superior y la suma inferior.
e) Repetir el proceso anterior utilizando 100, 200, 300,.. rectángulos.
f) ¿Qué podemos decir de las diferencias de las sumas?
g) Determine cuantos rectángulos se necesitan dado un ε=0.25,0.2,0.15,0.10,0.05
h) Calcular el valor de la integral desde 2 a 4.

Utilizando el deslizador y las funciones Sumainferior y Sumasuperior, tenemos



Las instrucciones a utilizar:

-En vista algebraica y en el campo Entrada, introducir las funciones dadas.

-Siempre en el campo Entrada llamar la función Suma superior mediante la instrucción Sumasuperior(f,2,4).

-Haciendo click con el botón derecho del mouse sobre el número a que aparece en vista algebraica, creamos el deslizador.

-Calculamos la suma inferior de manera análoga como lo hicimos con la suma superior.

-Calculamos las diferencias de las sumas (superior e inferior).

Así tenemos:

Valor de la Suma inferior = 38.72

Valor de la Suma superior = 46.72

Diferencia entre la suma superior y la suma inferior = 8

Los resultados del inciso e) se presentan en la siguiente tabla. Para obtener estos resultados, podemos crear una variable que nos dé la diferencia de las sumas inferior y superior, mediante la siguiente instrucción: d=b-a , donde b es la suma superior y a la suma inferior. Esta instrucción la escribimos en el campo de Entrada.

Tabla 4. Reconociendo funciones Riemann integrables

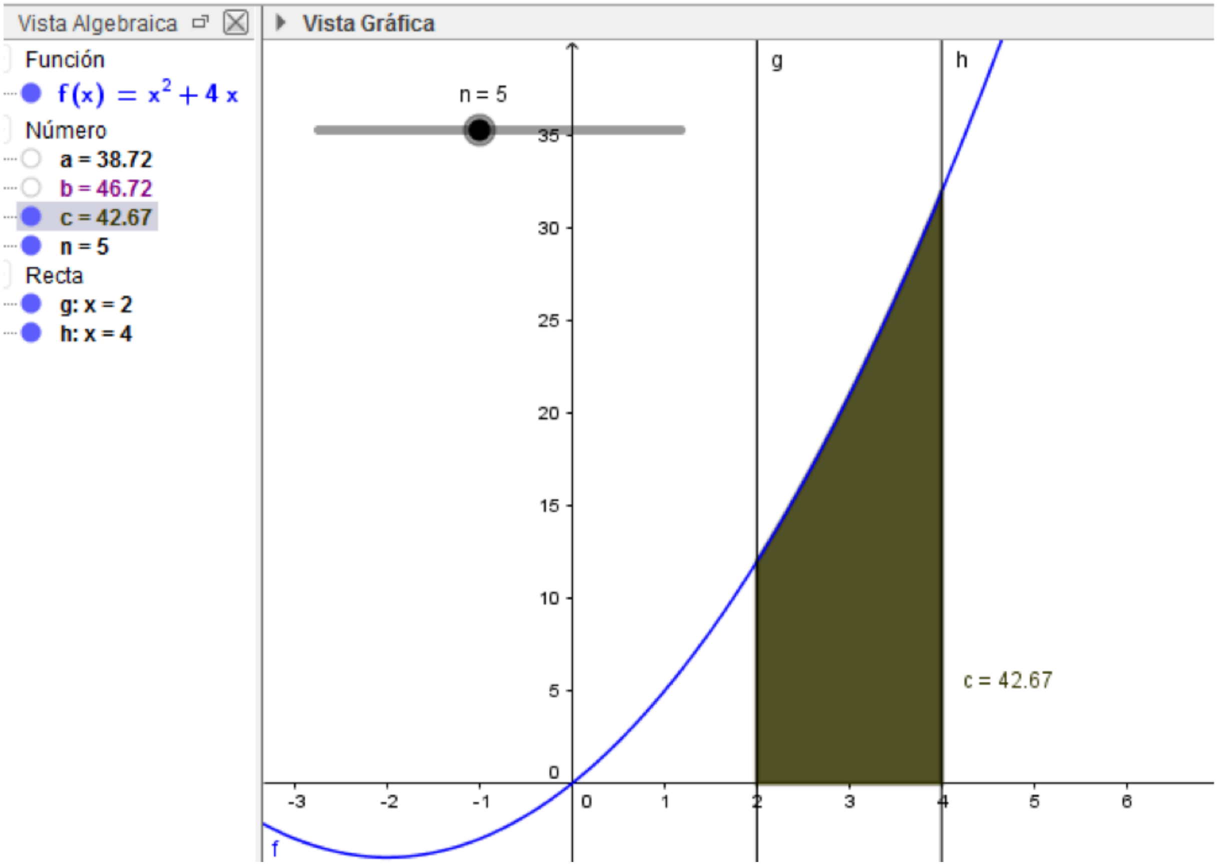
n	Suma superior	Suma inferior	Diferencia de sumas
5	46.72	38.72	8
100	42.87	42.47	0.4
200	42.77	42.57	0.2
300	42.73	42.60	0.13

Pasamos a dar respuesta al inciso f). Para ello construimos la siguiente tabla. Movemos el deslizador hasta obtener el valor dado de ε (diferencias de sumas)

Tabla 5. Visualización de funciones Riemann integrables

ε	n
0.25	160
0.20	200
0.15	260
0.10	390
0.05	750

Para dar respuesta a la última pregunta utilizamos la instrucción: Integral(f,2,4), y se nos presenta la siguiente pantalla:



El valor de la integral desde 2 a 4 es de 42.67

2.8 Teorema fundamental del Cálculo. Regla de Barrow

Se nos plantea la siguiente situación:

Dada una función: $f(x) = x^2$

a) Evalúe la función f en $x = 4$ y en $x = 1$

b) Calcule $f(4) - f(1)$

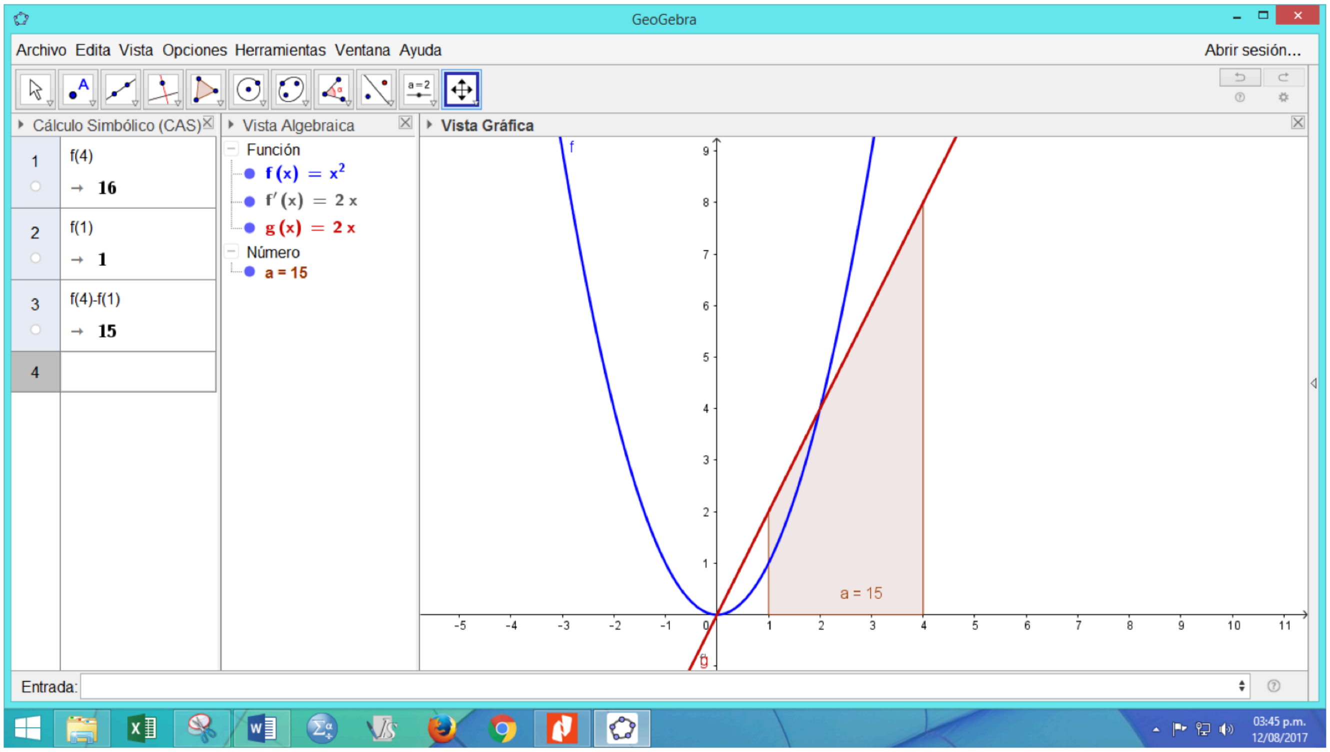
c) Derive la función $f(x) = x^2$

d) Dibuje la gráfica de la función derivada anteriormente en [1,4]

e) Halle el área de la región determinada por la gráfica de $f(x)$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$

f) Compare los valores obtenidos en b) y e) ¿Qué concluimos?

Para dar respuestas a estas preguntas utilizamos el CAS, vista algebraica y vista gráfica de Geogebra



Al comparar los resultados de $f(4) - f(1)$ y el área de la región determinada por la gráfica de $f'(x)$, el eje x y las rectas $x = 1$ y $x = 4$, vemos que son iguales, ¿será esto cierto siempre?.

Sí, esto se generaliza para cualquier función continua y se conoce como la **regla de Barrow**.

La **regla de Barrow** dice que la integral definida de una función continua $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva $G(x)$ de $f(x)$, en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x)dx = G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$$

También debemos resaltar que, esta expresión representa un puente, una conexión, importantísima en las matemáticas: la derivada y la integral son funciones inversas. Este resultado constituye la esencia del **Teorema fundamental del Cálculo Integral**. Y es lo que buscaban Newton y Leibniz para hacer esos cálculos de infinitas contribuciones que nosotros, hasta el momento, sólo sabíamos aproximar con el método de la altura media.

A continuación planteamos actividades con los objetivos de:

- Profundizar en el análisis de las propiedades y formas de representación de funciones.
- Determinar áreas y perímetros de regiones poligonales.

Actividad 1

1. Dibuja un rectángulo de base 4 y lado 3. Calcula el área y perímetro.

2. Dibuja un triángulo rectángulo de base 4 y altura 5. Calcula área y perímetro.

1) La siguiente figura muestra la velocidad media de un automóvil en cada hora. Se quiere calcular la distancia total recorrida en 4 horas.

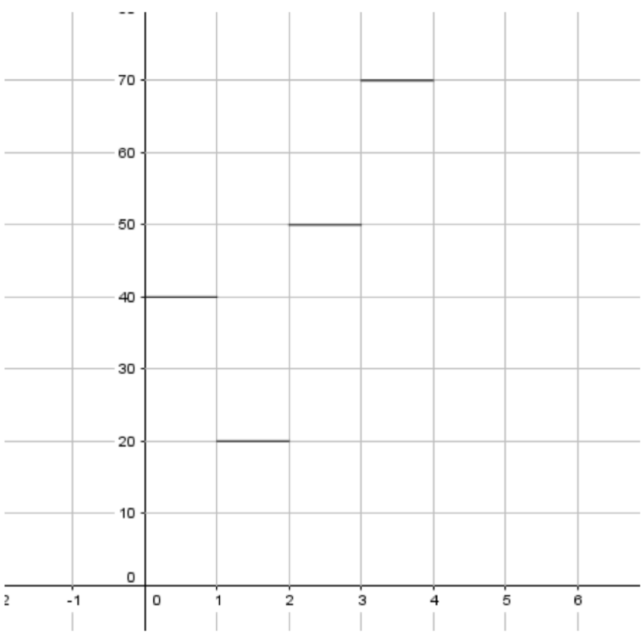


Ilustración 9.Velocidad media de automóvil en km/h

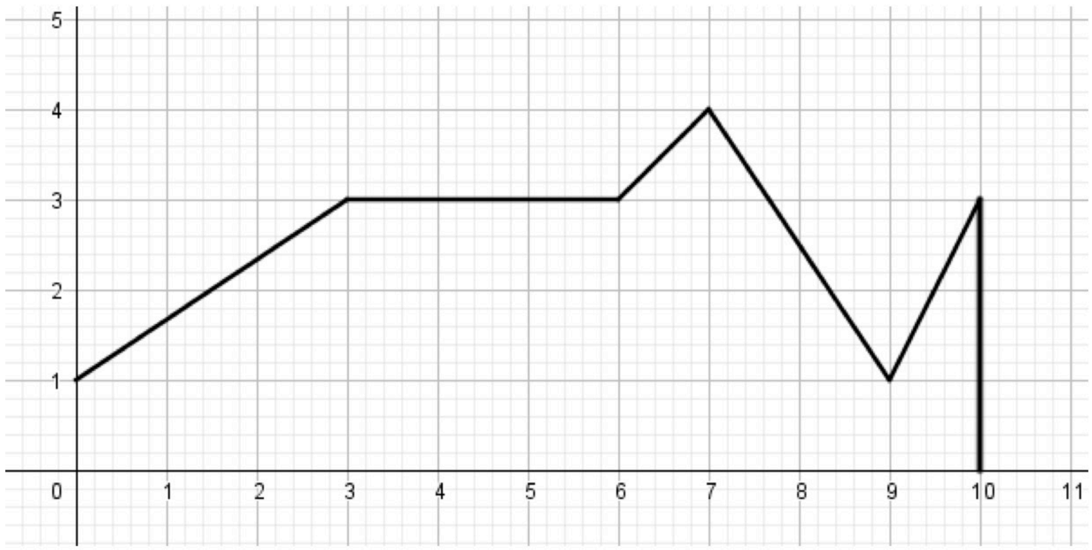
a) Describir el procedimiento para calcular la distancia recorrida al final de las cuatro horas, vinculando las variables del gráfico.

b) Representar gráficamente la función que describe la distancia recorrida según el transcurso del tiempo. ¿Es factible utilizar trozos de rectas para representar gráficamente tal función? Justificar.

c) Determinar los intervalos, si existen, de crecimiento y/o decrecimiento de la gráfica.

d) ¿Existe alguna relación entre el área bajo la gráfica de la función dada y la distancia final recorrida?

3. Dada la siguiente gráfica



a) Subdivida la región en 5 regiones poligonales y determine las áreas de estas regiones y súmelas
b) Repita el mismo proceso subdividiendo en forma diferente la región.
c) Compare los resultados obtenidos y haga una conclusión.

4. Determine las regiones del plano limitadas por:
   a) La función $f(x) = 4$, el eje y y la recta $x = 3$
   b) La función $g(x) = x + 2$, el eje x y la recta $x = 3$
   c) Halle las áreas de estas regiones y súmelas.

5. Determine la región limitada por la gráfica de la función $h(x) = x + 6$, el eje x, el eje y y la recta $x = 3$. Halle el área de esta región y compare con el resultado obtenido en el inciso anterior. ¿Qué concluye?

6. Grafique las siguientes funciones: $f(x) = x + 4$, $g(x) = -x + 2$, $h(x) = 2$
   a) Determine los puntos de intersección de las rectas.
   b) Sombree la región del plano limitada por estas rectas.
   c) Determine el perímetro y el área de esta región.

7. Grafique la recta $f(x) = -x + 10$. Construya rectángulos de base 2 y altura igual a la imagen de $f(x)$ por el extremo izquierdo del subintervalo.
   a) Determine la altura de cada uno de estos rectángulos.
   b) Determine el área de cada uno de los rectángulos.
   c) Sume las áreas de los rectángulos.
   d) Analice los resultados obtenidos.

8. Repita el ejercicio anterior tomando como altura de los rectángulos la imagen del $f(x)$ por el lado derecho. Compare los resultados y analícelos.

9. Calcule el área limitada por $f(x) = -x + 10$, el eje x y el eje y. Explique el método utilizado.

Para consolidar los conocimientos adquiridos en el cálculo de áreas por aproximación, sumas de Riemann e integral definida planteamos las siguientes actividades.

Actividad 2

Utilizando el software Geogebra, realizamos las siguientes actividades:

1) Dada la región limitada por f(x)=x^3-3x+4, x= -1, x= 2.

Calcule el área utilizando

a) La cuadrícula
b) El método de aproximación. Utilice 2, 5, 10, 20 rectángulos.
c) Sumas inferiores de Riemann
d) Sumas superiores de Riemann
e) Integral definida
f) Compare los resultados y analícelos.

2) Grafique en el mismo plano cartesiano las funciones:

$f(x) = x^2 + 6x + 10$ y $g(x) = 6x - x^2$

a) Determine los puntos de intersección de las gráficas de estas funciones.

b) Observe la región limitada por las dos gráfica y responda

b.1) ¿Es $f(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [a, b]$?

b.2) ¿Es $g(x) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$?

c) Encuentre por aproximación el área de la región limitada por la gráfica de f y las rectas $x = a$ y $x = b$.

d) Usando el mismo método encuentre el área de la región limitada por la gráfica de g y las rectas $x = a$ y $x = b$.

e) Calcule la diferencia entre las aproximaciones obtenidas en c) y d).

f) Calcule el área limitada por las dos gráficas.

g) Compare los resultados obtenidos en e) y f). Analice los mismos.

2) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función $x^3 + x^2 - 2x$ y el eje y.

Se presentan algunos enlaces para profundizar sobre la temática desarrollada:

http://tube.geogebra.org/material/show/id/54263

http://tube.geogebra.org/material/show/id/339

http://tube.geogebra.org/material/show/id/285657 http://tube.geogebra.org/student/m14979

http://tube.geogebra.org/material/show/id/1107

http://tube.geogebra.org/student/m20548

http://tube.geogebra.org/material/show/id/11857

http://tube.geogebra.org/student/m9006

http://tube.geogebra.org/student/m20548

https://www.geogebra.org/m/Pu4bSAQn

Reflexiones finales

Creemos conveniente reflexionar no solo sobre el contenido matemático del concepto de integral, sino también sobre el rol del docente para gestionar el aprendizaje del Cálculo.

Como docentes, que amamos nuestro trabajo, estamos interesados en que nuestros estudiantes se encuentren motivados en el proceso de aprendizaje, haciendo dinámico y enriquecedor dicho proceso; tanto dentro como fuera del aula. Es por ello que, hemos tratado en el marco de una metodología participativa abordar el concepto de integral definida como área bajo una curva; desde la perspectiva del cálculo del área de una región. También hemos tratado de introducir las situaciones problémicas en contextos de familiaridad para el estudiante. Todo ello, con el fin de evitar la gestión del aprendizaje del Cálculo Integral a una lógica fría y poco atractiva.

Nuestro compromiso pedagógico es la de acompañar a los estudiantes en un verdadero proceso de formación integral, con miras a que sean los constructores de su propio aprendizaje. Por tal razón, hemos elaborado este compendio metodológico como un aporte didáctico a los docentes y estudiantes. Así también, como una forma de contribución al cumplimiento de la Visión y Misión de nuestra Alma Mater. Eso sí, para poder lograrlo, los discentes han de estar motivados e interesados en el maravilloso mundo de la Matemática; participando activamente en todas las actividades de aprendizaje sugeridas, ser investigativos, curiosos, creativos y responsables de sus avances.

Finalmente, queremos expresar que se hace necesario enriquecer nuestra práctica pedagógica. Así que, es de suma importancia, tal y como lo expresan Gutiérrez & Prieto (1996), suscitar en los educandos el afán de construirse y apropiarse del mundo y de sí mismos. Esto con vistas a que, el aprendizaje sea lúdico, placentero y gratificante.

Referencias bibliográficas

Aguaded G., J. I. (1989). Aprender y enseñar con las tecnologías de la comunicación. España: Universidad de Huelva.

Aranda, C., & Callejo, M. L. (2011). Usando applets para construir el concepto de integral definida. *Uno. Revista de Didáctica de Las Matemáticas., (58), 65–75.*

Arenas, J. C. (2003). *Un modelo de enseñanza- aprendizaje de los conceptos de limites de sucesiones, limites de funciones y derivadas a traves de maples(libro electronico interactivo).* Universidad Complutense de Madrid.

Ares, O. E., Gatica, S. N., & Olguin, R. K. (2010). Una propuesta didáctica utilizando las nuevas tecnologías para la enseñanza de la integral como límite de sucesiones. *REPEM*, (1998), 387–395.

Camacho M., M. (n.d.). La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso de CAS (computer algebra system). *Educación Matemática*, 97–110.

Castelblanco Castelblanco, Y. A. (2012). Propuesta didáctica para trabajar el concepto de integral a partir de métodos que aporta la historia de la matemática, 74.

Contreras, J., & Del Pino, C. (2001). Propuesta de diseño y desarrollo de actividades implementadas computacionalmente. *Educación Matemática*, 13(2), 68–77.

Cuevas V., C. A., & Pluvinage, F. (2009). Cálculo y Tecnología. *El Cálculo Y Su Enseñanza*, 45–59.

Cuevas V., C. A., & Zepeda M., S. M. (2003). Propuesta de entorno computacional como apoyo a la enseñanza de las matemáticas, (1981), 1–11.

Díaz P., Y. (2015). *Unidad didáctica para la interpretación de la integral definida como el área de una región plana, mediante la modelación de las funciones en Geogebra.* Universidad Nacional de Colombia.

Hernández C., R. (2007). Propuesta Didáctica para identificar cuándo la integral definida es aplicable para resolver un problema. *Actualidades Investigativas En Educación,* 7(2), 1–20.

Kaiber, C. T., & Pacheco Renz, S. (2008). Cálculo diferencial e integral: un abordaje utilizando el software maple. *Paradígma*, 113–132. Retrieved from http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512008000100007&lang=pt

Larson, R., & Edwards, B. (2010). Calculo 1 de una Variable. *McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V., 1*(2010), 820. https://doi.org/10.1007/s13398-014-0173-7.2

Linares O., P. J. (2013). Unidad Didáctica: *Integral Definida*. Universidad de Almeria.

Morales, J., & Peña, L. (2013). Propuestas metodologicas para la enseñanza del Cálculo en Ingeniería, basasa en la modelización Matemática. *Actas Del VII CIBEM, 577–587.* Retrieved from http://medcontent.metapress.com/index/A65RM03P4874243N.pdf

Ordóñez C., L., & Contreras, A. (n.d.). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida, 277–287.

Otal J., N. (2015). Introducción a la Integral Definida : *una propuesta didáctica para 2o de Bachillerato.* Universidad Zaragoza.

Porres T., M. (2011). Integral definida, *Cálculo mental y Nuevas tecnologías*. Universidad de Valladolid.

Salinas, P., Alanís R., J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., & Garza, J. L. (2012). *Cálculo Aplicado. Competencias matemáticas a través de contextos TO*. (Cengage, Ed.). México.

Soto A., E., & Alanís R., J. A. (2014). Propuesta para la enseñanza del concepto Integral Definida de funciones de una variable en el Nivel Superior. *El Cálculo Y Su Enseñanza,* 5, 67–74.

Stewart, J. (2008). *Calculo de una variable. Trascendentes tempranas. Notes and Queries* (Vol. 160). https://doi.org/10.1093/nq/CLX.apr04.243

Turégano M., P. (1997). El Aprendizaje del concepto de integral. Suma, 26, 39–52. Retrieved from http://cife.uniandes.edu.co/tesis/luis_angel_bohorquez.pdf

Zúñiga, L. (2007). El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa,* 10, 145–175.

Autora Julia Argentina Granera Rugama

UNIVERSIDAD
NACIONAL
AUTÓNOMA DE
NICARAGUA,
MANAGUA

UNAN - MANAGUA