

## Capítulo 9

# Tablas y curvas de mortalidad en el siglo XVIII

## Semejanzas y divergencias\*

MARC BARBUT

Centre d'Analyse et de Mathématiques Sociales, EHESS, París

La comparación de tablas mortalidad no es ninguna novedad. Antoine Deparcieux lo hizo ya en su « Ensayo » de 1746, a propósito de unas tablas bien conocidas en su época: Petty, Halley, Kerseboom, John Smart (esta última conocida también como Tabla de Hogdson).

Su intención era construir una tabla mejor que todas ellas, que sirviera para una población ideal y fuera aplicable de la manera más amplia posible a lo que hoy llamamos el cálculo actuarial.

Años más tarde, E. Beauvisage (1867), A. Quicquet (1893) – [13] y [15] de la bibliografía – y otros autores compararon tablas entre sí con el mismo objetivo que Deparcieux.

Aquí, sin embargo, mi objetivo es otro. No tengo nada que demostrar, ni pretendo aproximarme a un ideal; sino que, de forma más modesta, quiero señalar algunos hechos. En cuanto a las teorías, cada uno de nosotros es lo suficientemente inteligente para extraer de los hechos lo que le conviene para pensar.

Pese a que no soy demógrafo ni historiador, me he arriesgado a construir dos tablas empíricas, las dos últimas del Cuadro I.

Enseguida veremos el porqué y la justificación de este enfoque algo insólito.

---

\* Traducido por María Gómez y José M<sup>a</sup> Arribas Dep. de Sociología I, UNED, Madrid

### 1- Cómo leer una tabla de mortalidad

Comencemos por examinar la tabla [6] creada por Lambert, en § 24, que figura aquí en el Anexo I. Nos referiremos a ella a partir de ahora como Lambert 24 (cf. nota 4, Figura I). Tiene 7 columnas y es, que yo sepa, la más completa de todas las tablas del siglo XVIII.

Leemos en la primera columna la edad  $x$  expresada en años, en la segunda el número  $m(x)$  de fallecidos entre la edad  $x$  y la edad  $x+1$ , y en la tercera, el número  $y(x)$  de supervivientes de edad  $x$ .

Dado que toda persona viva de edad  $x$  morirá en ese mismo año, o en cualquier año ulterior, tenemos así las relaciones:

$$(1.1) \quad m(x) = y(x) - y(x + 1).$$

$$(1.2) \quad y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} m(x + i).$$

**N.B.** Aquí (véase columna 3),  $y(x + i) = 0$  cuando  $x + i \geq 103$ .

**CUADRO I**  
**Lista de las tablas estudiadas**

Autores	Fecha de publicación	Localización de las observaciones	Tipo de población y número de observaciones	Período de las observaciones
<i>Halley</i> (1)	1693	Breslau (Silesia)	Conjunto de la población (en torno a 15.000)	1678-1691
<i>Deparcieux</i>	1746	Toda Francia	<i>Tontiniers</i> * y órdenes religiosas	1689-1742
<i>Hogdson</i>	1747	Londres	Conjunto de la población (en torno a 270.000)	1728-1737
<i>J. P.</i> (2)	1759	Londres	(en torno a 750.000)	1728-1757
<i>Lambert</i> (3) teórico	1772	_____	_____	_____
<i>Lambert 24</i> (4)	1772	Alemania (?)	?	Antes de 1770
<i>Duvillard</i>	1796 1806	Toda Francia	Conjunto de la población (en torno a 101.000)	Antes de 1789
<i>Fourier</i>	1821	París	Censo (en torno a 700.000)	1817
<i>Beauvisage</i> (Caisse Lafarge)	1867	Toda Francia	<i>Tontiniers</i> (en torno a 39.000)	1793-1864
<i>Dictionnaire Robert</i> (5)	1977	Europa, Francia	Personalidades célebres (en torno a 1.350)	1667-1801
Abbé de <i>Choisy</i> Mémoires	1727	Francia	Aristocracia (en torno a 250)	1630-1740

Notas sobre el cuadro:

\* *Tontiniers* eran los miembros de una mutua aseguradora, la tontine, en la que cada miembro aportaba una suma destinada a convertirse en una renta vitalicia al llegar a una cierta edad. La persona que sobrevivía a esa edad recibía las sumas aportadas por aquellos que habían fallecido.

1. Salvo en el caso de la tabla de Fourier (cf. [10] de la bibliografía), se muestra para cada año de observación, la edad de defunción de aquellos que mueren ese año concreto.
2. La « Tabula X » de Süssmilch, reproducida en el Anexo III *infra*, es un resumen de esta tabla que figura *in extenso* en la *Collection of yearly bills...* (cf. [4]).
3. Véase Anexo II *infra*. Resulta de la modelización de la « Tabula X ».
4. Reproducida en el Anexo I *infra*. No sabemos a partir de qué datos la ha elaborado Lambert (cf. [6] y [7]).
5. Diccionario « Le petit Robert des noms propres ».

Los números de la 3ª columna se calculan sumando los de la 2ª empezando por el último (a tergo, como decía B. Pascal).

En cuanto a la 4ª columna, los números  $Y(x)$  que la constituyen, son las sumas (siempre comenzando desde el último), de las  $y(x+i)$ :

$$(1.3) \quad Y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y(x+i).$$

Luego  $Y(x)$  es la población total de edad superior o igual a  $x$ . Concretamente,  $Y(0)$  es la población total sobre una base de 10.000 nacimientos. En este caso:

$$Y(0) = 295.022.$$

Esto significa que para conocer la población total de la tabla de mortalidad Lambert 24 basta con conocer el número anual de nacimientos y multiplicarlo por 29,5: éste es el multiplicador que fue tan útil en el siglo XVIII para estimar la población de diversos territorios.

Pero 29,5 es también la esperanza de vida al nacer, como indica la columna 6.

De forma más general, los números de la sexta columna indican para cada edad  $x$  la vida media (denominada también por abuso del lenguaje, esperanza de vida  $v(x)$  a esa edad). Lambert la calcula por medio de los de las columnas 3 y 4.

En efecto, por definición, tenemos (de forma aproximada, ya que todos los muertos de edad  $x$  no fallecen el mismo día):

$$v(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (x+i+1) m(x+i)}{\sum_{i=0}^{\infty} m(x+i)}.$$

Sea, ateniéndose a (1.1) y (1.2) supra:

$$(1.4) \quad v(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (x+i+1)[y(x+i) - y(x+i+1)]}{y(x)}.$$

Tras la simplificación y considerando (1.3), el numerador de (1.4) es:



$$x y(x) + \sum_{i=0}^{\infty} y(x+i) = x y(x) + Y(x),$$

finalmente:

$$(1.5) \quad v(x) = x + \frac{Y(x)}{y(x)}.$$

Por ejemplo, para la edad de 30 años, tenemos según la tabla Lambert 24 :

$$v(30) = 30 + \frac{127.090}{4.517} = 30 + 28,136 = 58,1.$$

**N.B.** La mayor parte de los autores (Hogdson, Deparcieux, ...) eligen como edad de muerte la media  $(x + \frac{1}{2})$ , lo que da una mejor aproximación de  $v(x)$ . De esta manera obtenemos:

$$(1.5)' \quad v(x) = x + \frac{Y(x+\frac{1}{2})}{y(x)} + \frac{1}{2}.$$

El número:

$$(1.6) \quad s(x) = v(x) - x = \frac{1}{2} + \frac{Y(x+\frac{1}{2})}{y(x)},$$

se denomina supervivencia media a la edad  $x$ . (Para Lambert,  $(v(x) - x)$  es igual a  $\frac{Y(x)}{y(x)}$ ; por lo tanto, la esperanza media es según su cálculo:  $s(x) + \frac{1}{2}$ ).

En cuanto a la columna 7, indica la vida mediana (también denominada vida probable)  $p(x)$  a la edad  $x$ , definida por:

$$(1.7) \quad y[p(x)] = \frac{1}{2} y(x).$$

Por ejemplo, para  $x = 30$ , se obtiene según la tabla:

$$y[p(30)] = \frac{4.517}{2} = 2.258,5.$$

Este último número está comprendido entre 2.271 (58 años) y 2.175 (59 años); luego  $p(30)$  es por lo tanto ligeramente superior a 58 años, 58,1 como se puede ver claramente en la columna 7 para  $x = 30$ .

Queda por explicar la quinta columna: representa las inversas de las tasas de mortalidad  $\tau(x)$  para cada edad  $x$ , a saber:

$$\tau(x) = \frac{m(x)}{y(x)} = \frac{y(x) - y(x+1)}{y(x)}.$$

Las obtenemos consecuentemente dividiendo los números de la columna 2 por aquellos de la columna 3. Así, para 30 años tenemos:

$$\tau(x) = \frac{72}{4.517} = \frac{1}{62,736} = \frac{1}{63} \approx 1,6\% .$$

Igualmente, a 63 años:

$$\tau(x) = \frac{105}{1.773} = \frac{1}{16,886} \approx \frac{1}{17} \approx 5,9\% .$$

**N.B.** Todos estos cálculos tienen sentido únicamente suponiendo que la población es estacionaria, es decir, que las  $y(x)$  no varían en el transcurso del tiempo.

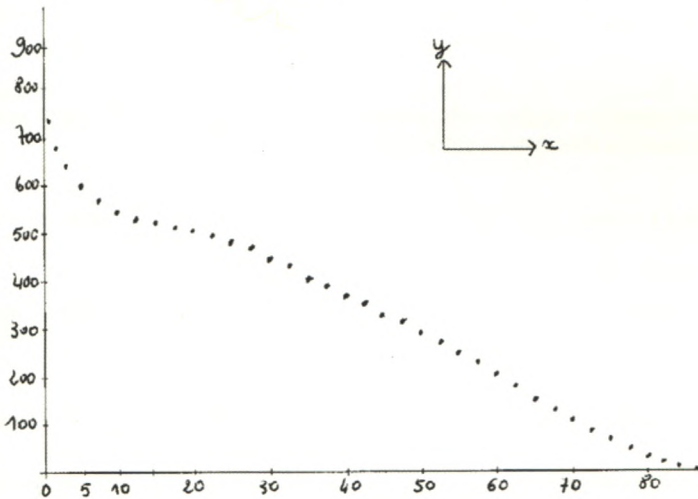
Veremos (§ 2) algunas indicaciones relativas al caso en que el número de supervivientes de edad  $x$  en fecha  $t$  sea una función  $y(x,t)$  de las dos variables  $x$  y  $t$ .

Dos observaciones complementarias al leer la tabla Lambert 24 :

- 1) La mortalidad  $m(x)$  – columna 2– tiene el mínimo 33, para 17 años y el máximo 105, para 63 años. La curva de mortalidad (cf. Figura 1) tiene por lo tanto dos puntos de inflexión correspondientes para  $x = 17$  y  $x = 63$ .

**FIGURA 1. Curva de mortalidad de la tabla Lambert 24.**

$x$  = edad en años,  $y(x)$  = número de vivos de edad  $x$ .



- 2) De 25 años hasta aproximadamente 55 años, la mortalidad varía poco, en una « horquilla » de 70 a 90 muertos por año. La curva de mortalidad será por lo tanto prácticamente una línea recta entre esas dos edades. Esto lo había intuido Leibniz; vamos a retomarlo.

**N.B.** Algunas tablas sólo constan de dos columnas, la de la edad  $x$  y la del número de vivos  $y(x)$  (columnas 1 y 3 de la tabla Lambert 24). De hecho, todas las otras columnas pueden calcularse a partir de esas dos.

## 2- Cómo construir una tabla (empírica) de mortalidad

Como se ha señalado más arriba, el número de vivos de edad  $x$ , en una población dada, varía por lo general con el tiempo  $t$ . Es una función  $y(x, t)$  de la edad  $x$  y de la fecha  $t$ .

Sean:

$y(x, t)$ : el número de vivos de edad  $x$  el 1 de enero del año  $t$ .

$m(x, t)$ : el número de muertos de edad  $x$  a lo largo del año  $t$ .

Así tenemos :

$$(2.1) \quad m(x, t) = y(x, t) - y(x + 1, t + 1).$$

Como todos los vivos de edad  $x$  en la fecha  $t$  tienen que morir necesariamente a esa edad o a una edad ulterior, resulta obvio que:

$$(2.2) \quad y(x, t) = m(x, t) + m(x + 1, t + 1) + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} m(x + i, t + i).$$

(2.2) es además una consecuencia inmediata de la ecuación (2.1).

(2.2) explica por qué a la función  $y(x, t)$ , que, siendo  $t$  constante, es la pirámide de edades en fecha  $t$ , se la denomina también tabla (o curva) de mortalidad.

Teniendo ahora dos fechas  $t_0$  y  $t_1$ , con:

$$t_0 < t_1 \quad \text{y} \quad t_1 - t_0 = T.$$

1) A través de los registros civiles, o de cualquier otra fuente, revelamos, para cada edad  $x$ , el número de muertos observados entre esas dos fechas. Sea:

$$(2.3) \quad M_{01}(x) = m(x, t_0) + m(x, t_0 + 1) + \dots + m(x, t_1 - 1) = \sum_{i=0}^{T-1} m(x, t_0 + i).$$

2) Aplicando la ecuación (2.2) de arriba, se calcula el número total de muertos de edad  $\geq x$  durante el período observado. Sea:

$$Y_{01}(x) = M_{01}(x) + M_{01}(x + 1) + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} M_{01}(x + j),$$

es decir:

$$(2.4) \quad Y_{01}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{T-1} m(x + j, t_0 + i) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{\infty} m(x + j, t_0 + i) = \sum_{i=0}^{T-1} \sum_{j=0}^{\infty} (y(x + j, t_0 + i) - y(x + j + 1, t_0 + i + 1)).$$

Tras la simplificación, obtenemos finalmente:

$$(2.5) \quad Y_{01}(x) = \sum_{i=0}^{T-1} y(x, t_0 + i) - \left[ \sum_{j=1}^{\infty} y(x + j, t_1) - \sum_{j=1}^{\infty} y(x + j, t_0) \right].$$



En (2.5), el primer término es la suma del número de vivos de edad  $x$  para todo el período observado.

En cuanto al término complementario entre corchetes, es la variación del número de vivos de edad  $> x$  entre la fecha inicial y la fecha final del período observado. Teniendo en cuenta las relaciones (1.5), (1.6) del párrafo precedente, este término puede expresarse también mediante el número medio de supervivientes a través de:

$$y(x, t_1) s(x, t_1) - y(x, t_0) s(x, t_0).$$

Si la pirámide de edades de la población estudiada ha variado poco a lo largo del período, tendremos así de forma aproximada:

$$(2.6) \quad Y_{01}(x) \approx \sum_{i=0}^{T-1} y(x, t_0 + i) = T \bar{y}_{01}(x),$$

donde  $\bar{y}_{01}(x)$  es el número medio de vivos de edad  $x$  observado para todo el período estudiado.

En el caso de una población estacionaria (§ 1), (2.6) sería teóricamente una igualdad. Pero la estacionaridad no es más que una hipótesis, que, como todas las hipótesis, puede ser verificada sólo de manera aproximada por los datos empíricos.

La determinación de una tabla empírica de mortalidad se obtiene eligiendo una edad de base – por ejemplo, 0 la edad al nacer – y normalizando la tabla. Planteamos por lo tanto:

$$(2.7) \quad \frac{Y_{01}(x)}{Y_{01}(0)} \times A = y(x),$$

donde  $A$  es un coeficiente de escala, generalmente 1.000 ou 10.000, menos frecuentemente 100.000:  $y(x)$  es por lo tanto el número observado de supervivientes de edad  $x$  para  $A$  nacimientos.

### 3- Aplicación a la construcción de dos « micro-tablas »

Con objeto de establecer comparaciones en relación a la mortalidad entre unas poblaciones ordinarias – es decir, que reúnan todas las categorías sociales – y unas poblaciones social o geográficamente diferenciadas, es necesario disponer de tablas construidas por medio de observaciones realizadas en tal categoría determinada.

Por lo que respecta a las categorías de privilegiados, la tabla de Deparcieux, construida sobre una población de tontiniers y miembros de órdenes religiosas fallecidos entre finales del siglo XVII y mediados del siglo XVIII (cf. Cuadro 1, supra), responde en parte a esta exigencia. Esto es aún más cierto en el caso de la tabla de Beauvisage, constituida únicamente por tontiniers, pero ésta concierne principalmente al siglo XIX.

Luego he construido dos tablas con mis propios medios, que son escasos.

### 3.1- La Tabla « ROBERT DE LOS NOMBRES PROPIOS »

Del diccionario « le petit Robert des noms propres » (ediciones « Le Robert », París, 1977), he anotado la edad de fallecimiento de todas las personalidades europeas que figuran en este diccionario (familias soberanas, papas, grandes militares, hombres políticos, etc ... pero también escritores, artistas, ...) muertas entre 1667 y 1801. De esta forma, he obtenido una tabla construida a partir de cerca de 1300 observaciones si contamos sólo las personalidades fallecidas de « muerte natural »; esta tabla figura en el Anexo IV.

Si le añadimos las muertes violentas, especialmente numerosas al final del período (Revolución francesa), tenemos entonces casi 1450 nombres.

Digo « casi » porque seguramente he cometido algunos errores en este fastidioso trabajo de copista.

He dispuesto las columnas de la tabla Robert del Anexo IV de la misma manera que las de la tabla Lambert 24 del Anexo I, pero omitiendo la columna que concierne a las tasas de mortalidad: no tendría ningún sentido teniendo en cuenta lo pequeños que son los números en juego.

Por la misma razón, podemos reemplazar la tabla del Anexo IV por una tabla con datos ajustados de manera que se atenúe el efecto de las fluctuaciones aleatorias. Lo he hecho depurando los datos brutos a través de una media móvil de 11 puntos. Salvo para edades muy altas, dicha media no varía mucho, como lo demuestra el Cuadro II aquí debajo, extraído de la tabla depurada. La diferencia relativa entre estas dos no supera nunca el 3%.

CUADRO II

Edad	30	40	50	60	70	80	90
Datos brutos	1278	1222	1111	910	547	209	25
Datos depurados	1277,4	1224,8	1108,9	901,8	559,3	212	30,7

Obviamente, la comparación entre esta tabla y las otras tendrá sentido sólo a partir de una edad distinta de la de nacimiento: hace falta haber vivido bastante tiempo para poder llegar a ser célebre. Nosotros tomaremos aquí como base la edad de 40 años.

### 3.2- Estacionaridad de la Población Robert

Es remarcable que esta limitada población (aproximadamente unos 1300 individuos), observada en un largo período (135 años), presente al menos tres características que permitan considerarla estable.

Primera característica: la estructura de la población es prácticamente la misma al principio y al final del período (cf. § 2 y ecuación 2.5 supra).

Efectivamente, tenemos para el período inicial (indexado 0) 1667 – 1673, y para el período final (indexado 1) 1798 – 1801, 74 y 67 observaciones respectivamente. Distribuimos las observaciones por tramos de edad (al morir) quinquenales.

Obtenemos, siguiendo las mismas notaciones que para la tabla del Anexo IV, el Cuadro III abajo.



No hay ningún fallecido menor de 25 años, ni mayor de 94 años. Las columnas 6, 7 y 8 muestran que las dos curvas de mortalidad normalizadas se acercan mucho una a la otra: la diferencia no supera nunca el 5%, de lo que, según un test como el de Kolmogorov-Smirnov, se deduce que en un umbral del 5%, así como en un umbral del 1% hay una misma «distribución genérica». En cuanto a las poblaciones agregadas (columnas 9 y 10) son prácticamente idénticas. De lo que se deduce que en la ecuación (2.5) el término complementario entre corchetes es insignificante.

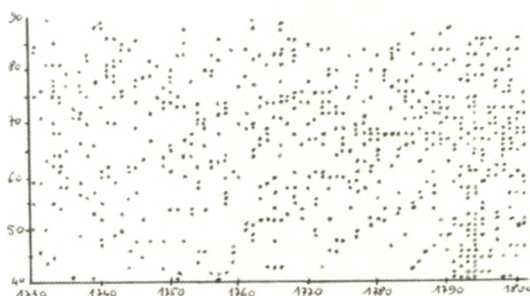
CUADRO III

X	$m_0$	$m_1$	$y_0$	$y_1$	$y_0 \%$	$y_1 \%$	$y_1 \% - y_0 \%$	$Y_0 \%$	$Y_1 \%$	x
25-29	0	3	74	67	100	100	0	100	100	25-29
30-34	2	0	74	64	100	95,5	- 4,5	88	87,8	30-34
35-39	3	3	72	64	97,3	95,5	- 1,8	76,1	76,25	35-39
40-44	2	2	69	61	93,25	91	- 2,25	64,5	64,6	40-44
45-49	6	4	67	59	90,55	88	- 2,55	53,4	53,55	45-49
50-54	5	5	61	55	82,45	82,1	- 0,35	42,6	42,85	50-54
55-59	7	3	56	50	75,7	74,6	- 1,1	32,7	32,85	55-59
60-64	8	7	49	47	66,2	70,15	4	23,7	23,8	60-64
65-69	14	16	41	40	55,5	59,7	4,2	15,8	15,2	65-69
70-74	13	12	27	24	36,5	35,8	- 0,7	9,2	8	70-74
75-79	3	5	14	12	18,9	17,9	- 1	4,8	3,6	75-79
80-84	7	6	11	7	14,85	10,45	- 4,4	2,6	1,45	80-84
85-89	3	1	4	1	5,4	1,5	- 3,9	0,8	0,2	85-89
90-94	1	0	1	0	1,35	0	- 1,35	0,15	0	90-94
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

N.B. Al contrario, la comparación entre el primer período quinquenal (1728-1732) y el segundo (1753-1757) de la tabula X de Süßmilch (cf. Anexo III) muestra, para la ciudad de Londres, una débil pero significativa diferencia en un intervalo de tan sólo 30 años.

Segunda característica: no hay correlación entre la edad x al morir y la fecha t de la misma. Esto es patente en la Figura 2 a continuación.

**FIGURA 2. Diagrama de (no)-correlación entre la fecha de fallecimiento (en abscisas) y la edad al morir (en eje de ordenadas) 1730 à 1801.**  
(En rojo: los fallecidos por muerte violenta-ver el CD).



**Tercera característica:** las dos características principales de la distribución de la edad de los fallecidos (media, desviación) son estables cuando desglosamos las observaciones en 9 períodos de 15 años. Es lo que muestra el Cuadro IV.

**CUADRO IV**  
**Diccionario Robert des noms propres. Fallecimientos entre 1667 y 1801.**  
(Características de 9 períodos de 15 años)

Período	$n$	$v$	max	min	$\sigma$	$r$	$a$	$n'$	$v'$
1667-1681	149	64,55	96	20	14	0,15	0,5	155	63,9
1682-1696	152	63,9	90	21	16,5	0,13	0,5	154	63,75
1697-1711	120	66,1	94	31	13,5	0,03	0,1	120	66,1
1712-1726	126	67	95	24	17	-0,07	-0,03	130	66,3
1727-1741	122	66,3	93	15	13,7	0,03	0,1	124	66,1
1742-1756	107	67,2	93	29	16,6	-0,1	-0,4	109	66,9
1757-1771	136	65,45	100	18	14,3	-0,05	-0,04	145	64
1772-1786	158	65	87	29	13,8	0,08	0,2	163	64,4
1787-1801	225	64	96	25	14,4	-0,1	-0,3	337	57,3
Total	1295	65,3	100	15				1437	63,22

$n$  : número de observaciones, muertes naturales

$n'$  : número de observaciones, incluyendo las muertes violentas

$v$  : edad media al morir (por muerte natural)

$v'$  : edad media al morir (incluyendo las muertes violentas)

$\sigma$  : desviación

$r$  : coeficiente de correlación lineal entre  $x$  y  $t$

$a$  : coeficiente de regresión de  $x$  en relación a  $t$

**N.B.** La aparente estabilidad de la población Robert sugiere que para los « privilegiados », y en esta época, no hay a lo largo del período ni avance ni retroceso de la mortalidad. Por otra parte, una de las razones por las que he construido las tablas Robert y Choisy ha sido comprobar esta hipótesis. ¿Cómo sería en poblaciones mucho más numerosas de « privilegiados » ? La cuestión me parece abierta.

### 3.3- La tabla CHOISY

El abate de Choisy (1644-1724) publicó unas Memorias para servir a la historia de Luis XIV (publicadas en 1727 y reeditadas en *Mercure de France*, colección *Temps retrouvé* 7, París, 1965). En ellas cita cerca de 245 personalidades –no garantizó el número exacto – pertenecientes todos a la alta aristocracia y muertas (todas por causas confusas) entre 1623 y 1749. A través de las reseñas biográficas redactadas por el editor, sabemos la edad del fallecimiento, y podemos elaborar con ella una tabla, denominada Choisy en lo sucesivo, análoga a la tabla Robert.

Esta tabla – en datos brutos – se haya en el Anexo V. Aquí el número de observaciones es demasiado pequeño para que podamos realizar los mismos tests de estacionaridad ya empleados para los 1.300 individuos de la tabla Lambert.

No obstante, el gráfico « fecha de fallecimiento – edad al morir », que no reproduzco aquí, presenta, aunque con menor densidad en la nube de puntos, los mismos rasgos de dispersión y de ausencia de tendencia que el de la Figura 2 más arriba.

Por el contrario, el análogo del Cuadro IV más arriba, donde se dividió casi todo el período en dos partes (grosso modo, los siglos XVII y XVIII) parece mostrar una ligera tendencia al aumento de la longevidad en el siglo XVII (veasé Cuadro V), y un



estrechamiento de la dispersión en el siglo XVIII. Teniendo en cuenta lo pequeños que son los números, sería arriesgado sacar conclusiones de este hecho.

CUADRO V

Período	$n$	$v$	max	min	$\sigma$	$r$	$a$
1630-1699	124	63,9	91	20	13	0,5	0,3
1700-1749	108	68,2	97	27	8,2	0,02	- 1,15
Total	232	65,9					

En cambio, es muy significativo que esta micro-tabla de mortalidad se ajuste casi igual de bien al modelo de Gompertz y con unos valores del mismo orden de magnitud para los parámetros (aquí anticipo lo que veremos en § 6) que las otras tablas que vamos a estudiar, aunque éstas hayan sido construidas con decenas, incluso con centenares, de miles de observaciones.

Es lo que muestran las columnas 7, 8 y 9 del Cuadro Anexo V.

Se puede observar el mismo fenómeno, incluso aún más acentuado, en la tabla Robert. En este caso, creo que está perfectamente justificada la inclusión de las dos micro-tablas en la lista de las que se estudian aquí.

#### 4- Diferencias, semejanzas y correlaciones. Estudio empírico

Estamos ahora en condiciones de hacer algunas comparaciones, situándonos en primer lugar exclusivamente desde el punto de vista de los datos empíricos; más adelante (§ 5 et 6), lo haremos sobre la base de ajustes de las tablas empíricas a unas leyes teóricas.

Algunas tablas de la lista del Cuadro I, p. 2 – la tabla de J. P. (alias « Süssmilch – Tabula X »), la tabla Lambert-teórica que procede directamente de ella, y la misteriosa Lambert 24 – se reproducen aquí en los anexos III, II y I respectivamente.

Las tablas de Halley, Deparcieux y Hodgson se encuentran principalmente en [8], p. 276, 278 et 280 respectivamente. Las de Duvillard, Beauvisage y, de nuevo, Deparcieux en [13], p. 18 y ss.; finalmente, la de Joseph Fourier (censo de la población de París de 1817) en [10] (Cuadros anexos relativos a la población, cuadro 8°).

**N.B.** Al comparar los datos de esta última tabla con los otros debemos tener en cuenta siempre que no se trata de una tabla de mortalidad construida en torno a todo un período, sino de los resultados de un censo realizado en un momento dado (en este caso, el año 1817). Por lo tanto, no podría compararse directamente con las otras tablas salvo en un régimen estable; y al leerla, la palabra vida en las expresiones « vida media », « supervivencia media », etc... debe ser siempre reemplazada por la palabra edad.

#### 4.1- Juventud y vejez. Dos grupos y un caso aparte

El Cuadro VI presentado aquí debajo destaca claramente la singularidad de la tabla Fourier. Las tablas de Halley, Deparcieux, Beauvisage, Robert y Choisy no figuran en este cuadro, porque no comienzan más que a las edades de 1, 3, 3, 15 y 20 años respectivamente.



CUADRO VI

Edad	Número de vivos por 1.000 al nacer				
	<i>Lambert 24</i>	<i>Duvillard</i>	<i>Hogdson</i>	<i>J. P</i>	<i>Fourier</i>
3	644	625	564	597	--
5	604	583	526	550	932
10	554	551	490	516	866,6
20	512,5	502	459	485	692,5
40	375	335	294	312	342
	Tablas « universales »		Londres		Censo
	¿Alemania ?	Francia	1728-1737	1728-1757	París 1817

**Comentarios.**

- La semejanza entre las tablas Hogdson y J. P. y el hecho de que en la segunda los jóvenes sean más numerosos que en la primera, no debe sorprender: se trata de la misma gran ciudad, durante dos periodos de los cuales el segundo incluye al primero, y éste es posterior para los dos últimos tercios.

- Las tablas « universales » Lambert 24 et Duvillard son también cercanas una a la otra, y tienen más jóvenes que las de Londres. Es normal: estas tablas no incluyen sólo a los ciudadanos, y probablemente los datos fueron recopilados más tarde en el siglo XVIII. Por otra parte, las dos tienen además en común que nadie sabe exactamente con qué datos han sido construidas.

- En 1817, la ciudad de París tiene muchos más jóvenes que lo que indicarían las tablas construidas en el siglo precedente. Pero hacia los 40 años las curvas confluyen, y más allá de esta edad, París tiene muchos menos viejos.

El Cuadro VII de supervivencias medias para las mismas edades permite desglosar de forma nítida dos grupos:

- un grupo de « privilegiados »; en este grupo, el hecho de que Beauvisage supere a Deparcieux se explica fácilmente. El período de las observaciones es muy posterior, y la tabla Beauvisage contiene sólo datos de tontiniers, mientras que Deparcieux incluye un tercio de tontiniers y dos tercios de miembros de órdenes religiosas;
- un grupo de « el común de los mortales », en el que las dos tablas londinenses son superadas por las otras tres, incluida la de Halley, aunque ésta concierne a una población urbana y en un período muy anterior; sin duda alguna, en Breslau las condiciones de vida eran mucho mejores que en Londres.

Destacamos por último el descenso de las edades medias en París-1817, ya desde la edad de 5 años.

CUADRO VII  
Supervivencia media en diversas edades x. Juventud

Tabla \ x	0	3	5	10	20	40	Período
<i>Choisy</i>	--	--	--	--	--	29,75	1623-1749
<i>Robert</i>	--	--	--	--	--	28	1667-1801
<i>Beauvisage</i>	--	54,65	53,6	49,8	42,4	28,45	1793-1864
<i>Deparcieux</i>	--	47,65	48,25	46,8	40,25	27,5	1689-1742
<i>Duvillard</i>	28,8	42,5	43,4	40,8	34,25	22,9	Avant 1789
<i>Lambert 24</i>	29,5	41,5	42,2	39,9	33,8	22,3	Avant 1770
<i>Halley</i>	--	39,7	41,2	40,4	34,2	22,2	1678-1691
<i>Hogdson</i>	23,85	38,5	39,3	37	29,2	19,55	1728-1737
<i>J. P.</i>	25,6	38,35	39,5	37	29	19,25	1728-1757
<i>Fourier</i>	32,7	--	29,9	27	22,4	15,5	1817

Después de la juventud, la vejez.

Los análogos Cuadros VII' y VI' muestran las mismas diferencias entre los privilegiados y « el común de los mortales ».

**CUADRO VII'**  
**Supervivencia media en diversas edades. Vejez**

x	Choisy	Beauvisage	Robert	Deparcieux	Duvillard	Lambert 24	Halley	Hogdson	J. P.	Fourier
40	29,75	28,5	28	27,5	22,9	22,3	22,1	19,5	19,25	15,5
60	13,75	14	13,5	14,25	12	11,8	12,4	12,5	12,2	8,6
80	5,5	5	4,8	4,7	4,6	5,7	4,5	5,7	5,3	ε

Se observa que si las diferencias entre los dos grupos son aún nítidas a los 60 años, desaparecen a los 80 años; y que, incluso a esa edad, el censo de París de 1817 se distingue por su singularidad: en particular, ε significa «casi cero».

**CUADRO VI'**

x	Número de vivos por 1.000 a 40 años				Población	Fechas
	50	60	70	80		
Choisy	935	814,5	539	228,5	Alta aristocracia	1623-1749
Beauvisage	902,5	756,8	516	203	Tontiniers	1793-1864
Robert	909	744,5	447,5	171	Personalidades	1667-1801
Deparcieux	800,5	705	472	179,5	Tontiniers y miembros de órdenes religiosas	1689-1742
Duvillard	805,5	578,5	292,5	94,75	Universal - Francia	Avant 1789
Lambert 24	793	555	291,5	91	Universal - ?	Avant 1770
Halley	778	544,5	319,5	91,5	Breslau	1678-1691
Hogdson	694	442	235	97	Londres	1728-1737
J. P.	689	433	231	86,5	Londres	1728-1757
Fourier	619	308	96	14,3	París	1817

**Advertencia.** Comparado con el Cuadro VII', este cuadro hace patente que si todas las tablas (excepto la Fourier) dan aproximadamente 5 años de esperanza de vida a los 80 años, los privilegiados que sobreviven a esa edad son dos veces más numerosos que el resto.

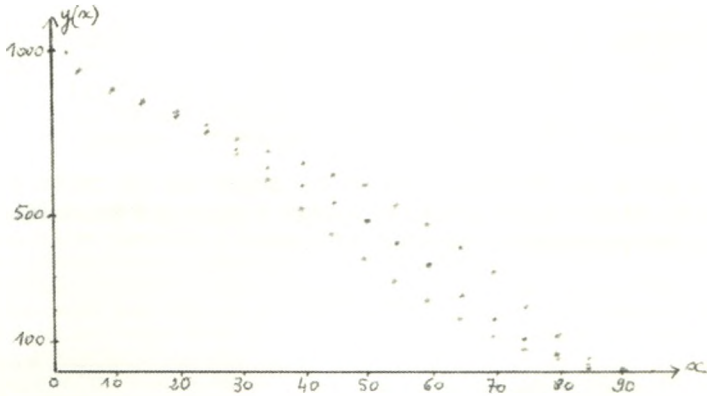
De nuevo, la población de París en 1817 se distingue por el muy bajo número de vivos mayores de 80 años, e incluso de 70 años.

#### 4.2- Semejanzas y diferencias en algunos gráficos

Examinemos ahora las tres curvas de mortalidad de la Figura 3. Se refieren a tres poblaciones muy diferentes tanto por el período de observación como por la categoría de sujetos observados.

Sin embargo, hasta una veintena de años, dichas poblaciones prácticamente se confunden. Después se separan netamente y se ordenan de la forma que podíamos preveer: más supervivientes entre los « privilegiados » de la tabla Deparcieux, muchos menos para los londinenses de la tabla de Hogdson, mientras que la tabla « universal » de Duvillard ocupa una posición intermedia. Finalmente, todo el mundo se reúne en la vejez extrema.

**FIGURA 3. Curvas de mortalidad de *Hodgson*, *Duvillard* et *Deparcieux*.  
(Base de 1.000 vivos en tres años)  
(rojo: Hodgson, azul: Duvillard, verde: Deparcieux)**



Pero veamos más de cerca. La Figura 4 revela una correlación muy fuerte entre la tabla de Hodgson y la de Duvillard, mientras que esta última se distingue mucho más netamente de la de Deparcieux a partir de 20 años de edad (Figuras 4 y 5).

**FIGURA 4. Diagrama de correlación entre las tablas de *Hodgson* y de *Duvillard*. (Datos brutos -  $r$ : coeficiente de correlación lineal)**

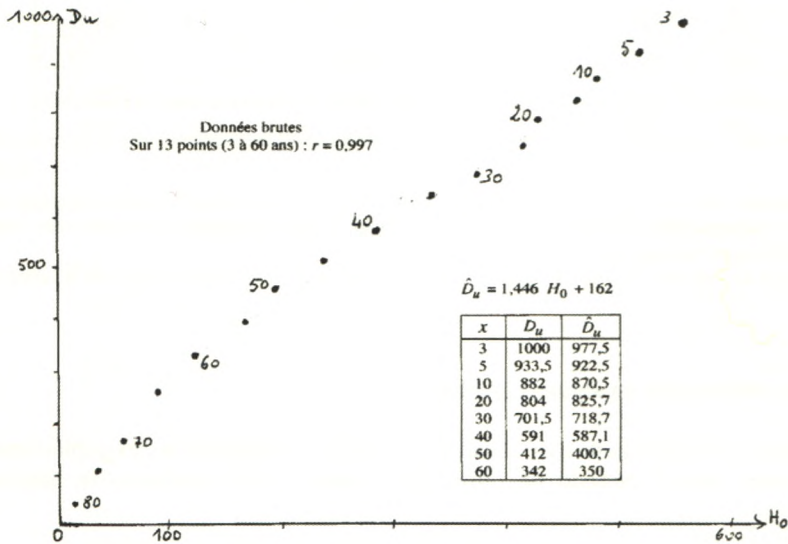
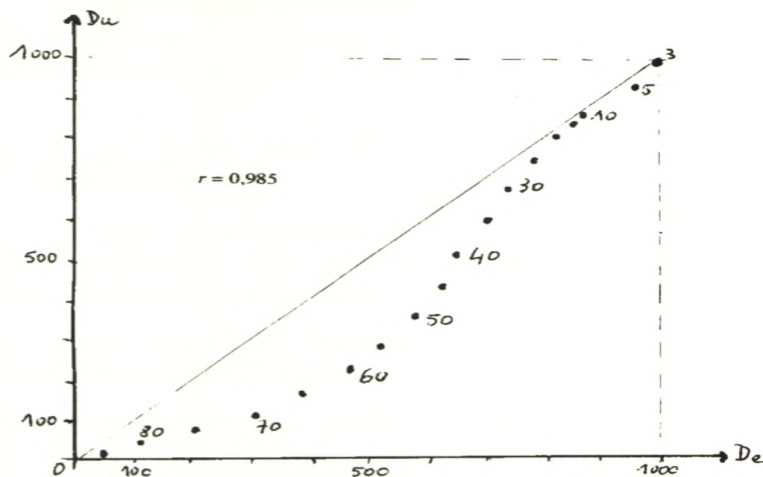


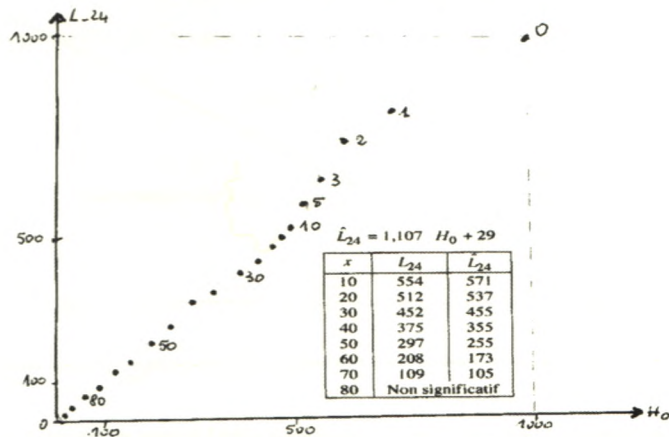


FIGURA 5. Diagrama de correlación entre las tablas de *Deparcieux* y de *Duvillard*.  
(Base de 1.000 vivos en 3 años)



Por el contrario, la tabla Lambert 24 no se distingue netamente de la de Hogdson (Figura 6) salvo en las edades inferiores a cinco años, lo que significa una mortalidad infantil más leve en los datos que han servido para construir la primera, que en Londres en el decenio 1728-1737, que además difiere poco de la de los tres decenios 1728-1757 (cf. Cuadro VI y VII supra). Esto corrobora la hipótesis de que esta misteriosa tabla Lambert 24 concierne a una población universal (urbana y rural) y un período posterior.

FIGURA 6. Diagrama de correlación entre las tablas de *Hogdson* y *Lambert 24*.  
(Base de 1.000 vivos al nacer)

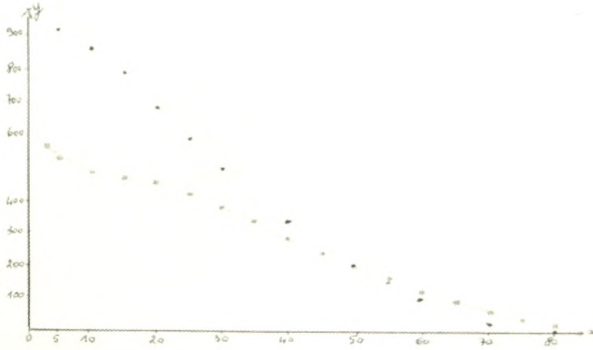


Por último, las dos Figuras 7 y 8 ilustran gráficamente el carácter singular de la pirámide de edades en París en 1817 respecto a las tablas de mortalidad del siglo XVIII.

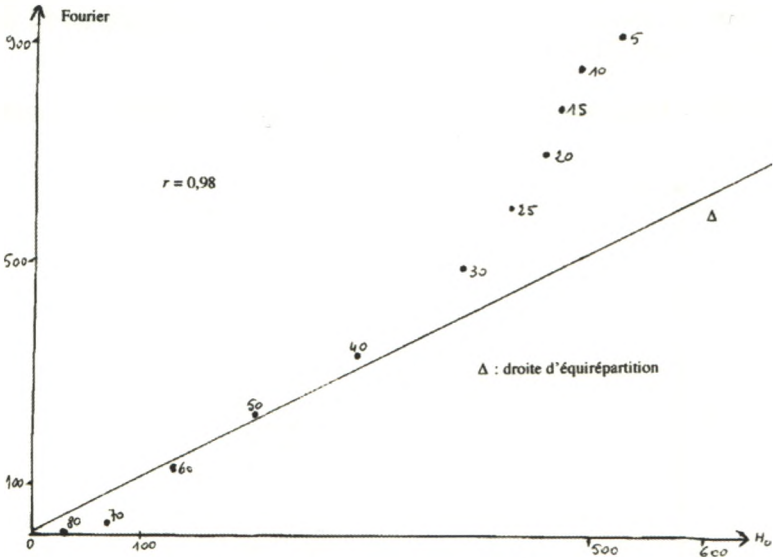
**FIGURA 7. Curvas de mortalidad de *Fourier* y *Hogdson***  
(Base de 1.000 vivos al nacer)

(en negro: J. Fourier, París 1817 ; en rojo Hogdson)

[Fourier : París intra muros, menos los militares, más los hospicios extra muros]



**FIGURA 8. Diagrama de correlación entre *Hogdson* y *Fourier***



**N.B.** Todos los coeficientes de correlación lineal son superiores a 0,97 incluso en los casos más desfavorables (Fourier respecto a Deparcieux, por ejemplo). Los valores tan elevados de ciertos coeficientes deben ser considerados en relación a este « estiaje ».

Además, cuando una de las variables es función monótona de la otra (lo que necesariamente es el caso aquí), es muy probable que su coeficiente de correlación sea muy elevado.

Sobre todo, como veremos en § 6, esas correlaciones lineales, casi perfectas, entre las tablas están relacionadas con el hecho de que cada una de nuestras tablas se ajusta muy bien a dos clases de leyes: el modelo lineal, y la ley de Gompertz. Esto explica aquello.

Destaca especialmente que el punto de inflexión, es decir, edad a la que la disminución del número de vivos es máxima, se sitúa entre 15 y 20 años para Fourier y a más de 40 años para Hogdson. Es 63 años para Lambert 24, 67 para Duvillard e incluso ¡73 años para Deparcieux !

### 4.3- A vueltas con los dos grupos « EL COMÚN DE LOS MORTALES » y los « PRIVILEGIADOS »

La Figura 9 muestra una correlación lineal muy fuerte entre la tabla de Halley y la de Duvillard. Hay también una correlación fuerte entre Halley y Lambert 24 o Hogdson, del mismo grupo, « el común de los mortales », tal y como se muestra en § 4.1.

Por el contrario, y sin que nos sorprenda, el diagrama de correlación entre Halley y Deparcieux (privilegiados) tendría el mismo aspecto que el de la Figura 5 más arriba.

Si ahora miramos el diagrama de correlación entre las tablas de Deparcieux y de Beauvisage (Figura 10) que conciernen a los «privilegiados», pero con más de un siglo de separación entre los períodos de observación, vemos un perfecto ajuste lineal.

FIGURA 9. Diagrama de correlación entre las tablas *Halley* y *Duvillard*

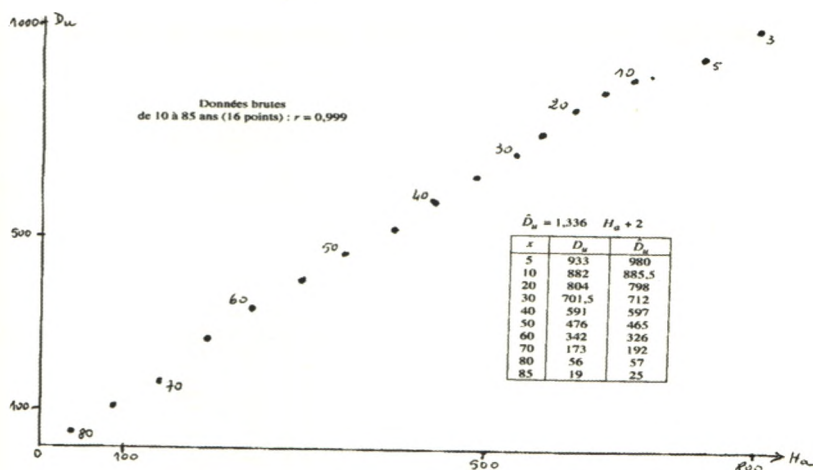
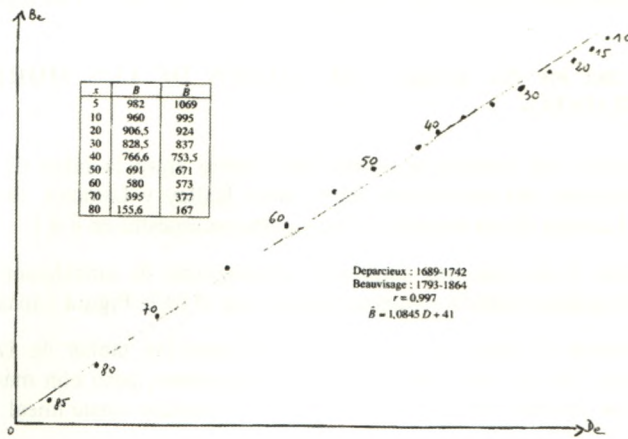


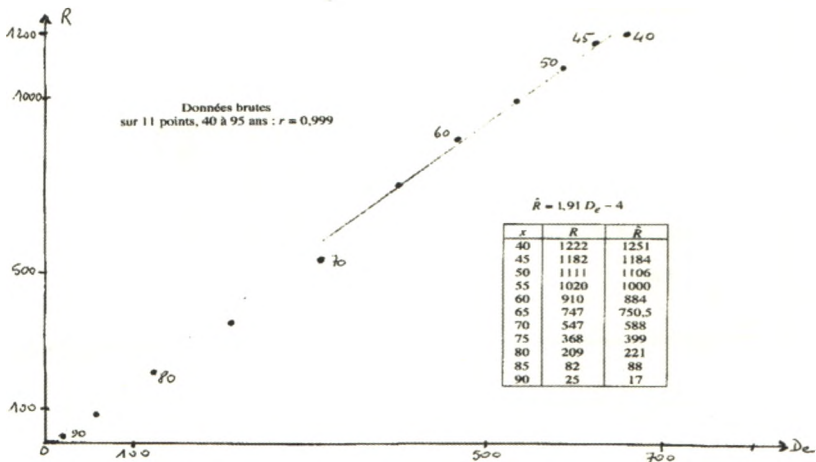


FIGURA 10. Diagrama de correlación entre tablas de *Deparcieux* et *Beauvisage* (Base de 1.000 vivos en 3 años)



Más sorprendente, la casi perfecta correlación lineal entre la tabla de Deparcieux y la « micro-tabla » de las 1222 personalidades del Robert (Figura 11) de edades de 40 años o más de edad.

FIGURA 11. Diagrama de correlación entre *Deparcieux* y *Robert*



Pero aún más sorprendente resulta la muy buena correlación entre la tabla de Deparcieux y la de los 232 aristócratas de la micro-tabla Choisy, de 40 o más años de edad.

El diagrama de correlación es también casi tan rectilíneo como los dos anteriores.

Aquí me bastará presentar los resultados bajo la forma del Cuadro VIII más abajo. Los cálculos han sido efectuados sobre 12 puntos (con edades tomadas de 5 en 5, de 40 a 95 años) y tomando los datos brutos.

**CUADRO VIII**  
**Correlación entre *Deparcieux* y *Choisy***

$$r = 0,995 \quad \hat{C} = 0,3644 D_e + 8$$

<i>X</i>	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90
<i>Choisy</i>	232	227	217	206	189	168	125	82	53	21	8
$\hat{C}$	247,4	234,5	219,7	199,7	177	152	121	85	51	25,5	12

Estas últimas correlaciones, no sólo legitiman el uso de nuestras micro-tablas para las comparaciones, sino que muestran además que para construir su tabla, Deparcieux habría podido contentarse con una muestra bien distribuida en el tiempo y del orden del millar de observaciones.

Ciertamente, se comprende que los actuarios necesiten mucha más precisión. Pero para la comparación que me interesa aquí (esperanza de vida, número de supervivientes), lo que cuenta es el orden de magnitud. Lo que ponen de manifiesto los Cuadros VI a VII' es bastante significativo para que resulte útil comentarlo más a fondo.

### 5- Leyes teóricas de la mortalidad

Desde el siglo XVII, se han propuesto o utilizado algunas « fórmulas » que expresan el número de vivos  $y(x)$  en edad  $x$  en función explícita de  $x$ .

La mayor parte de estas leyes se expresan suponiendo la variable edad  $x$  continua e  $y(x)$  derivable. Se sitúan en la hipótesis de estabilidad.

En esos casos, la mortalidad  $m(x)$  se expresa de esta forma (siendo  $y(x)$  decreciente, su derivada es negativa):

$$(5.1) \quad m(x) = -y'(x) = |y'(x)|,$$

que sustituye a la expresión (1.1) del tiempo discreto. Igualmente, (1.2) y (1.3) se transforman en:

$$(5.2) \quad y(x) = -\int_x^\infty y'(t) dt$$

$$(5.3) \quad Y(x) = \int_x^\infty y(t) dt,$$

de donde en cuanto a la vida y la supervivencia media en edad  $x$ :

$$(5.4) \quad v(x) = x + s(x) = x + \frac{1}{y(x)} \int_x^\infty y(t) dt = x + \frac{Y(x)}{y(x)}.$$

Por lo que se refiere a la tasa de mortalidad a la edad  $x$ , será evidentemente:

$$(5.5) \quad \tau(x) = -\frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{|y'(x)|}{y(x)}.$$

### 5.1- Tres Leyes de los siglos XVII y XVIII

Primera ley: J. Graunt, 1662 (cf. [1]) estima que el número de supervivientes disminuye en una relación de 5/8 cada diez años.

Expresado matemáticamente (Graunt no lo hizo) esto significa que  $y(x)$  es una función exponencial de forma:

$$(5.1.1) \quad y(x) = k e^{-\lambda x} \quad (\lambda > 0), \text{ donde } e \text{ es la base de los logaritmos naturales con } e^{-10\lambda} = \frac{5}{8}, \text{ es decir } \lambda = \frac{1}{21,3}.$$

Pero en este caso, tendríamos:

$$\tau(x) = \frac{|y'|}{y} = \lambda \quad \text{y} \quad s(x) = e^{\lambda x} \int_x^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}.$$

La tasa de mortalidad sería la misma en todas las edades, y la duración media de la vida sería constante: ¿sería entonces la vida humana eterna? Según el valor de  $\lambda$  dado por Graunt, a cada edad nos quedaría aún como promedio aproximadamente 21 años más de vida.

Es evidente que este « modelo » es totalmente irreal.

Segunda ley †: G.W. Leibniz hacia 1680 y A. de Moivre en 1725 (cf. [2] y [9]) supusieron que es la propia mortalidad la que tiene un valor constante  $a$ ; de donde:

$$(5.1.2) \quad y(x) = a(c - x),$$

aquí  $c$  es la edad máxima teórica.

De hecho, esta linealidad de  $y(x)$  es una aproximación bastante buena de las curvas empíricas, no sobre la duración total de la vida, sino en un intervalo conveniente, acotado por las dos inflexiones de la curva (cf. Figuras 1, 3 y 7 supra); ya hemos hecho la observación a propósito de la tabla Lambert 24. Veremos ejemplos de ajuste lineal en § 6.

**N.B.** Como por otra parte, las curvas de mortalidad son muy cercanas en las primeras edades y en la vejez, esto explica las fuertes correlaciones lineales de § 4: dos funciones lineales de una misma variable son, en efecto, función lineal una de la otra.

Tercera ley: En 1772, J.H. Lambert propone (cf. [6] y [7]) la fórmula:

$$(5.1.3) \quad y(x) = A \left( \frac{c-x}{c} \right)^2 - B (e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}).$$

Esta vez, hay una teoría explicitada. Es evidente que  $A$  es un parámetro de escala, el número de vivos  $y(0)$  al nacer tomado como base; en este caso,  $A = 10.000$ ;  $c$  es la edad máxima aproximada.

† Agradezco a I. Schneider que me haya confirmado que de Moivre utilizaba la ley lineal. Lo que era dudoso al leer el « Discours préliminaire » de los padres Gaeta y Fontana en su traducción del anexo a la « Doctrine of chances » [traducida al francés por Pierre Crépel] en [8], p. 259 y ss.



El término del cuadrado  $\left(\frac{c-x}{c}\right)^2$  significa, según Lambert, que la vida humana fluye así como el agua lo hace de un recipiente agujereado en su base: ese agua experimenta la ley de la gravedad, y su altura en el recipiente disminuye en la misma proporción que el cuadrado del tiempo (aquí,  $x$ ).

Cada uno de nosotros puede además observar como se vacía su bañera: muy rápidamente cuando la bañera está llena, después mucho más lentamente.

En cuanto al término complementario  $B(e^{-\lambda x} - e^{-\mu x})$ , Lambert lo justifica a través de algunas analogías con su teoría del calor, muy poco convincentes bajo mi punto de vista.

De hecho, para estimar los parámetros de su modelo se ha apoyado en la « Tabula X » de Süssmilch (cf. Anexo III, infra); ésta se detalla en [7]. En esta ocasión, él da como valores de los parámetros:

$$c = 96, \quad B = 6176, \quad \lambda = \frac{1}{13,682}, \quad \mu = \frac{1}{2,23114}.$$

¡Admirable precisión! Con estos valores para los parámetros, la ley Lambert teórica (cf. Anexo II) se tabula fácilmente, y es – salvo para la edad en torno a los 3 años – notablemente cercana a la tabla J. P. (Londres, 1728-1757), que se resume en la « Tabula X », así como a la de Hodgson (Londres, 1728-1737).

Por desgracia esta ley no se aplica bien a ninguna de las otras tablas que hemos estudiado. Y lo mismo pasa en Lambert 24, ¡que el propio Lambert publicó en [6]!

## 5.2- La Ley de B. Gompertz, 1825 (cf. [11])

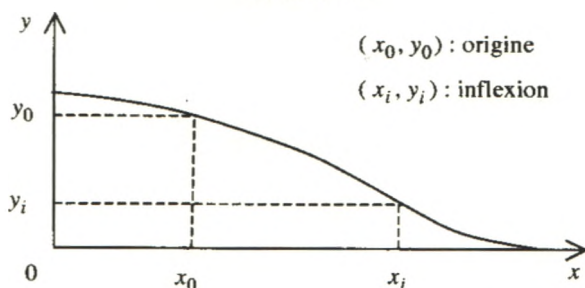
La teoría elaborada por Benjamin Gompertz es simple y se enuncia así: à partir de una cierta edad, la tasa de mortalidad  $\tau(x)$  crece exponencialmente con la edad  $x$ .

Traducción matemática:

$$(5.2.0) \quad \frac{y'}{y} = \alpha e^{\mu x}, \text{ de donde}$$

$$(5.2.1) \quad y(x) = k e^{-u(x-x_0)} \text{ con } u(x) = \frac{1}{\lambda} e^{\mu x}, \quad \lambda, \mu > 0.$$

FIGURA 12



La curva representativa tiene el aspecto que se muestra aquí arriba (cf. Figura 12). Para representar la totalidad de una curva de mortalidad del siglo XVIII, necesitaría una segunda inflexión, entre 0 y  $x_0$  (cf. Figura 1, por ejemplo).

La inflexión  $x_i$  es la solución de:  $u(x - x_0) = 1$ .

Los parámetros se interpretan fácilmente. Tenemos primero:

$$(5.2.1)' \quad k = y(x_0) e^{1/\lambda} = y(x_i) e \quad \text{de donde} \quad \lambda = \left[ 1 - \ell_n \left( \frac{y_0}{y_i} \right) \right]^{-1},$$

$x_0$  es la edad elegida como origen; habitualmente se toma 40 años como valor de este origen, pero no es obligatorio.

A continuación se muestra por el cálculo que:

$$(5.2.2) \quad \mu = \tau(x_i) = \frac{|y'(x_i)|}{y(x_i)},$$

$\mu$  es así la tasa de mortalidad para la edad en la que la mortalidad es máxima.

En cuanto a  $\lambda$ , tenemos:

$$(5.2.3) \quad \lambda = \tau(x_i) / \tau(x_0) = \frac{|y'(x_i)|}{y(x_i)} : \frac{|y'(x_0)|}{y(x_0)},$$

$\lambda$  es la razón entre la tasa de mortalidad en la inflexión y la tasa de mortalidad en el origen.

El valor de  $\mu$  depende sólo de la unidad de tiempo elegida para la edad  $x$ , mientras que  $\lambda$  depende del valor elegido para el origen.

Además, se deduce de (5.2.1), (5.2.2) y (5.2.3) que  $\lambda$  y  $\mu$  están vinculados por:

$$(5.2.4) \quad \lambda = e^{\mu(x_i - x_0)},$$

lo que equivale a:

$$(5.2.4)' \quad x_i = x_0 + \frac{1}{\mu} \ell_n(\lambda), \quad \text{donde } \ell_n \text{ es el logaritmo neperiano (o natural).}$$

Así mismo, se deduce de (5.2.1) :

▫ la vida probable o la vida mediana  $p(x)$  en edad  $x$

$$(5.2.5) \quad p(x) = \frac{1}{\mu} \ell_n \left( \lambda \ell_n(2) + e^{\mu(x - x_0)} \right) + x_0,$$

▫ la supervivencia media  $s(x)$  a la edad  $x$

$$(5.2.6) \quad s(x) = \frac{1}{\mu} \Phi[u(x - x_0)], \quad \text{donde}$$

$$(5.2.7) \quad \Phi(z) = e^z \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad z > 0.$$

Podemos por tanto demostrar que  $p$  et  $s$  son, a edad constante, funciones crecientes de  $\lambda$ , y decrecientes de  $\mu$ . Concretamente, tenemos en el origen:

$$(5.2.8) \quad p(x_0) = \frac{1}{\mu} \ell_n(1 + \lambda \ell_n(2)) + x_0 \quad \text{y} \quad s(x_0) = \frac{1}{\mu} \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

**N.B.** La función  $\Phi$  y sus derivadas satisfacen para todo  $z > 0$  las inecuaciones:

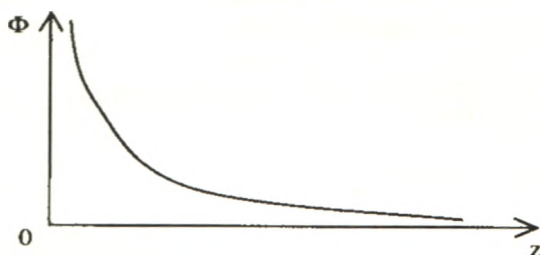
$$(5.2.9) \quad \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} < \Phi(z) < \frac{1}{z}, \quad \Phi'(z) = \Phi(z) - \frac{1}{z}$$

y

$$\Phi''(z) = \Phi(z) - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}.$$

Estas relaciones demuestran que la curva representativa de  $\Phi$  tiene el aspecto de la Figura 13 (por otra parte, se puede además demostrar que:  $\lim_{z \rightarrow 0} \Phi(z) = \infty$ ).

FIGURA 13



Por medio de su definición (5.2.7), podemos calcular los valores aproximados de  $\Phi$ . Teniendo en cuenta el método que he utilizado (método de trapecios), esas aproximaciones son mejores cuanto mayor es  $z$  (cf. Cuadro IX).

CUADRO IX  
Valores aproximados de  $\Phi$

$z$	$\Phi(z)$	$Z$	$\Phi(z)$
0,1	2,04	2,5	0,309
0,2	1,5	3	0,263
0,3	1,225	3,5	0,235
0,4	1,05	4	0,208
0,5	0,925	4,5	0,189
0,6	0,83	5	0,170
0,7	0,75	6	0,145
0,8	0,69	7	0,126
0,9	0,638	8	0,112
1	0,597	9	0,099
1,5	0,458	10	0,08745
2	0,362	11	0,0705



**5.3- Métodos de ajuste a una Ley de Gompertz**

El ajuste a una ley de Leibniz de una tabla empírica no plantea ningún problema, ya que se trata de un ajuste lineal clásico; sólo hay que elegir previamente un intervalo de edades adecuado sobre las que realizar dicho ajuste.

En lo que concierne a la ley de Gompertz, hay por lo menos cuatro métodos posibles.

- Método de inflexión. Teniendo en cuenta la interpretación (5.2.2) de  $\mu$ , localizamos la edad  $x_i$  de mortalidad máxima, y la mortalidad  $m(x_i)$  correspondiente. Así, se estima  $\mu$  por :

$$(5.3.1) \quad \hat{\mu} = \frac{m(x_i)}{y(x_i)} = \tau(x_i).$$

Por ejemplo, para Lambert 24 (cf. Anexo I), tenemos  $x_i = 63$ ,  $m(x_i) = 105$ ,  $y(x_i) = 1772$ . De donde:

$$\hat{\mu} = \frac{105}{1772} \approx \frac{1}{16,9} \approx 0,0592.$$

A continuación intentamos determinar un origen  $x_0$  por tanteo (y por consiguiente  $\lambda$ ), satisfaciendo la ecuación (5.2.3) más arriba, es decir:

$$(5.3.2) \quad \frac{y(x_0)}{m(x_0)} e^{\hat{\mu}x_0} = \frac{y(x_i)}{m(x_i)} e^{\hat{\mu}x_i} = 707,7 \quad (\text{para Lambert 24})$$

Por medio de la tabla, obtenemos así:

$x$	... 40	... 48	49	50...
$\frac{y}{m} e^{\hat{\mu}x}$	498	694	709	714,5

Lo que plantea:  $x_0 = 49$ . De donde:

$$\lambda = e^{\hat{\mu}(x_i - x_0)} = e^{\frac{14}{16,9}} \approx 2,29.$$

Obtenemos finalmente la estimación de  $k$  tomando como ejemplo la media de las que resultarían de (5.2.1)', sea:

$$(5.3.3) \quad \hat{k} = \frac{1}{2} (y_0 e^{1/\lambda} + y_i e) = \frac{1}{2} (4711 + 4819) = 4765.$$

**N.B.** Por supuesto, la ecuación (5.3.2), tendría siempre la solución « trivial »:  $x_0 = x_i$ , y  $\lambda = 1$ .

También se podría estimar  $\lambda$  mediante  $\left[ 1 - \ell_n \left( \frac{y_0}{y_i} \right) \right]^{-1}$ . En este caso, daría:  $\hat{\lambda} = 2,28$ .

Este método, que tiene la ventaja de participar del espíritu de los de Lambert (véase, [6] y [7]), a menudo no da más que la solución  $x_0 = x_i$ . En general produce peores estimaciones que los otros.

▫ Método de las tasas de mortalidad. Se plantea  $w(x) = -\ell_n(\tau(x)) = -\ell_n\left(\frac{y^x}{y}\right)$ .

Teniendo en cuenta la definición (5.2.1), resulta:

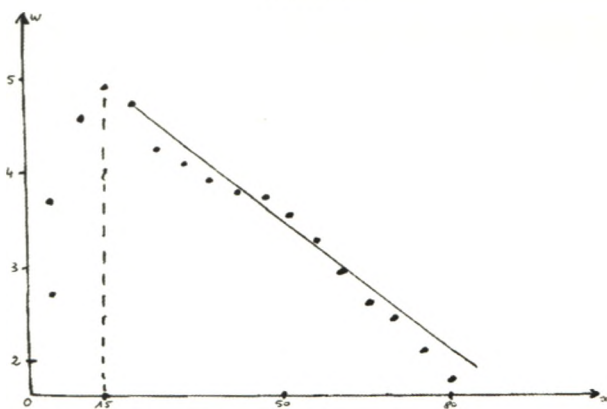
$$(5.3.4) \quad w(x) = -\mu x + \ell_n\left(\frac{\hat{\lambda}}{\mu}\right).$$

En esta fórmula,  $x$  es la edad relacionada con el origen elegido. En la aplicación:  $x = \text{edad} - 40$ .

Por lo tanto, a partir de una cierta edad, la cuestión se reduce a un problema de ajuste lineal.

A partir de la tabla, obtenemos las relaciones empíricas  $\frac{y(x)}{m(x)}$ , y calculamos las  $\hat{w}(x) = \ell_n\left(\frac{y(x)}{m(x)}\right)$ . Para la tabla Lambert 24 tenemos así, gráficamente, los puntos de la Figura 14.

FIGURA 14



Vemos que están aproximadamente alineados a partir de la edad de 15 años. Tomando como origen  $x_0 = 40$ , obtenemos, sobre los 11 puntos de 25 a 75 años, la línea recta de regresión  $\hat{w}$  (con un coeficiente de correlación mediocre: 98 %).

$$\hat{w} = -\frac{x}{24,3} + 3,82,$$

de donde las estimaciones:  $\hat{\mu} = \frac{1}{24,3} = 0,041$ ,  $\hat{\lambda} = 1,88$ ,  $\hat{k} = 6360$  et  $\hat{x}_i = 55,5$ .

Estas estimaciones se encuentran muy lejos de las obtenidas por otros métodos. No obstante, el lector podrá verificar que el ajuste obtenido es muy bueno para las edades entre 10 y 30 años.

- Método del logaritmo iterado. Elegimos de una vez por todas un intervalo  $h$ ; de nuevo, según la definición (5.2.1) la ley de Gompertz implica que:

$$(5.3.5) \quad W(x) = \ell_n \left( \ell_n \left( \frac{y(x)}{y(x+h)} \right) \right) = \mu x + \ell_n \left( \frac{e^{\mu h} - 1}{\lambda} \right).$$

En (5.3.5)  $x$  es la edad relacionada con el origen elegido; en general:  $x = \text{edad} - 40$

Sea cual sea el resultado de (5.3.5), el problema se reduce de nuevo a un ajuste lineal.

En el caso de Lambert 24, con un intervalo de 5 años ( $h = 5$ ) y sobre los 9 puntos, tomados de 5 en 5 años, de 40 a 80 años, obtenemos así la línea recta de regresión:

$$\hat{W} = \frac{x}{18} - 2,363,$$

con un muy buen coeficiente de correlación. De donde se obtienen las estimaciones:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{18}, \quad \hat{\lambda} = \left( e^{\frac{5}{18}} - 1 \right) e^{2,363} = 3,5, \quad \hat{k} = y(40)^{1/\hat{\lambda}} = 4970, \quad \hat{x}_i = \frac{1}{\hat{\mu}} \ell_n(\hat{\lambda}) + 40 = 62,55.$$

La concordancia entre la edad estimada de inflexión,  $\hat{x}_i$  con la edad observada (63 años), conduce a pensar que, en el caso de Lambert 24 este método va a dar un buen ajuste. El lector puede verificarlo; pero aquí el ajuste ya no es bueno para las edades más jóvenes, sino para el intervalo 30 – 80.

- Método mixto « inflexión-logaritmo iterado »

Si se plantea  $y/k = z$ , tenemos, según (5.2.1):

$$(5.3.6) \quad Z(x) = \ell_n \left( \ell_n \left( \frac{1}{z} \right) \right) = \mu x - \ell_n(\lambda).$$

Sea, ateniéndose todavía a (5.2.1) :

$$(5.3.6)' \quad Z(x) = \ell_n(1 + \ell_n(y_i) - \ell_n(y)) = \mu x - \ell_n(\lambda).$$

En el caso de Lambert 24, tenemos:  $y_i = 1773$ , y en consecuencia:

$$(5.3.6)'' \quad Z(x) = \ell_n(8,48043 - \ell_n(y(x))) = \mu x - \ell_n(\lambda).$$

De donde, por ajuste lineal, y tomando la base  $x_0 = 40$  :

$$\hat{\mu} = 1/17,3373, \quad \hat{\lambda} = 3,7654 \quad y \quad \hat{k} = e y_i = 4819,5.$$



**N.B.** El lector podrá verificar que este ajuste es, para el intervalo de 20 a 85 años, tan bueno, incluso mejor, que el que se obtiene por el tercer método. No obstante, este tercer método es más conocido y se emplea más. Ello se debe a que el punto de inflexión de la curva de mortalidad, por lo menos en las tablas del siglo XVIII, no suele estar tan bien marcado como en la tabla Lambert 24; hay una cierta indeterminación respecto al valor de  $y_i$ ; ahora bien, es indispensable conocer este valor para aplicar este método, como también lo es conocer el método de « la inflexión » (1<sup>er</sup> método).

#### 5.4- A título de información, La Ley de Makeham, 1860

Al igual que Gompertz, Makeham asume que la tasa teórica de mortalidad es función exponencial de la edad, pero le añade un « índice mínimo »  $v$ :

$$(5.4.0) \quad -\frac{y'}{y} = \frac{|y|}{y} = v + \alpha e^{\mu x}.$$

De donde la expresión de  $y(x)$  :

$$(5.4.1) \quad y(x) = k \exp\left[-\left(vx + \frac{1}{\lambda} e^{\mu x}\right)\right].$$

**N.B.** De ahora en adelante, la notación  $\exp(z)$  significa  $e^z$ .

Al constar de un parámetro más que el de Gompertz, este modelo se ajusta generalmente mejor a los datos empíricos.

Pero a mí me parece que no hay una interpretación clara de los parámetros (en concreto,  $v$  sería la tasa de mortalidad a una edad infinita negativa, lo cual no tiene ningún sentido). Por tanto, una condición necesaria de validez de un modelo es que todos sus parámetros sean interpretables en la realidad que se supone que representa.

#### 6.- Ajustes a las Leyes de Gompertz y Leibniz

Vamos ahora a dar los resultados de ajuste de algunas tablas a la ley de Gompertz por un lado, y a la de Leibniz por el otro.

Subrayemos que el ajuste a una ley de Gompertz es muy bueno para todas y no sólo para aquellas que son objeto de los cuadros que siguen.

Los Cuadros XV y XVI al final del párrafo recapitulan los valores estimados de los parámetros para el conjunto de las once tablas estudiadas en este artículo.

**CUADRO X**  
**Ajustes de la Tabla de Halley**

Leibniz :  $\hat{y}(x) = 9,09 (86,5 - x)$  Gompertz :  $\hat{y}(x) = 781 \exp\left(-\frac{1}{3,742} e^{\frac{x-20}{27}}\right)$ .

x	Leibniz		Halley	Gompertz				x
	%	$\hat{y}$	y	$\hat{y}$	%	$\sigma$	$\hat{\sigma}$	
3	4,9	759	798	677				3
5	1,2	740,5	732	670				5
7	4,5	722,5	692	622	4,4			7
10	5,2	695	661	649,4	1,7	40,4	42,1	10
15	3,3	649,5	628	625,5	0,4	37,5	38,2	15
20	1	604,2	598	597,9	0,02	34,2	34,5	20
25	1,5	559	567	566,2	0,15	30,9	31	25
30	3,4	513	531	530,35	0,1	27,9	27,7	30
35	4,5	468	490	490,2	0,04	24,1	24,6	35
40	5,1	422,5	445	445,9	0,2	22,3	21,7	40
45	5	377,5	397	397,8	0,2	19,1	19	45
50	4,2	331,5	346	346,8	0,2	17,25	16,7	50
55	2	286,3	292	294	0,7	14,5	14,5	55
60	0,6	240,6	242	241	0,4	12,4	12,5	60
69	4,6	152	159					
70	5,4	142,7	142	142,3	0,2	7,6	9,2	70
72			120	124,9	4			72
80		58,8	41	66,3				
85								

**N.B.** Las líneas de puntos ----- indican los límites de las edades cuya aproximación es  $\leq 5\%$ .

**Notaciones para los Cuadros X a XIV**

x la edad

y número de supervivientes

$\hat{y}$  estimación de y

s supervivencia media observada

$\hat{s}$  supervivencia media estimada

$\sigma$  supervivencia probable observada

$\hat{\sigma}$  supervivencia probable estimada

% **diferencia relativa**  $\frac{|y - \hat{y}|}{y}$ , en porcentaje

Para el cálculo de  $\hat{s}$  y  $\hat{\sigma}$ , véanse las fórmulas (5.2.5), (5.2.6) y el Cuadro IX (§ 5.2) más arriba

Los ajustes de la Tabla de Hodgson son algo peores que los de la Tabla de Halley.

**CUADRO XI**  
**Ajustes de la Tabla de Hogdson**

Leibniz :  $\hat{y}(x) = 8 (77,5 - x)$

Gompertz :  $\hat{y}(x) = 800 \exp \left( -e^{\frac{x-40}{33}} \right)$ .

x	Leibniz		Hogdson	Gompertz				x
	%	$\hat{y}$	y	$\hat{y}$	%	s	$\hat{s}$	
5	10,3	580	526	566	7	39,3	37,8	5
10	10,2	540	490	535	9	37	34,65	10
15	5,3	500	475	501	5,7	33,15	31,75	15
20	0,2	460	459	464	1,1	29,2	29	20
25	1,4	420	426	424	0,5	26,25	26,45	25
30	1,3	380	385	382	0,8	23,75	24	30
35	0	340	340	339	0,3	21,5	21,75	35
40	2	300	294	294,5	0,2	19,7	19,55	40
45	5,7	260	246	250	1,6	17,9	18,2	45
50	8	220	204	206,5	1,25	16,1	16,5	50
55	9	180	165	165,5	0,3	14,3	14,65	55
60	7,7	140	130	128	1,55	12,5	13	60
65	1	100	99	95	4	10,6	11,5	65
70	13	60	69	67	2,9	9,15	10,45	70
75		20	45	44,5	1,1	7,75	9	75
80			29	27,8	4,15	5,7	8	80
85			14	16	14,3			85
90			5	8,5				90
95			0	4				95

**N.B.** Inflexión teórica:  $\hat{x}_i = 40$  y  $\hat{\tau}_i = \mu = 1/33$ .

Inflexión observada:  $x_i = 40,5$  y  $\tau_i = 10/290 = 1/29$ .

Constatamos, sin que nos sorprenda, que la ley teórica de Lambert (cf. Anexo II) es muy cercana a la de Hogdson y se ajusta también muy bien a las dos leyes, la de Leibniz y la de Gompertz.



**CUADRO XII**  
**Ajustes de la tabla Lambert théorica**

Leibniz:  $\hat{y}(x) = 8,62 (76 - x)$ .

Gompertz:  $\hat{y}(x) = 834,5 834,5 \exp \left( -e^{\frac{x-40}{31,8}} \right)$ .

x	Leibniz		Lambert théorica	Gompertz		x
	%	$\hat{y}$	y	$\hat{y}$	%	
5		612	549			5
10	10,5	569	515	559		10
15	3,2	523	507	523	3,2	15
20	0,3	482,7	484	484,9	0,2	20
25	0,1	439,6	440	443,6	0,9	25
30	1,6	396,5	403,5	400	0,9	30
35	0,75	353,4	356	354	0,6	35
40	1	310,3	307	307	0	40
45	3,15	267,2	259	260	0,4	45
50	4,9	224,1	213,6	214	0,2	50
55	5,7	181	171,3	170,3	0,6	55
60	3,8	138	133	130,4	2	60
65	4,25	94,8	99	95,4	4,6	65
70		51,7	69,6	66,2	4,8	70
75		8,62	45,3	43,2	4,9	75
80			26	26,2	0,8	80
85			12	14,6	22	85
90			3,4	7,35		90

**N.B.** Inflexión teórica:  $\hat{x}_i = 40,7$  y  $\hat{\tau}_i = \mu = 1/31,8$ .

Inflexión observada:  $x_i = 40$  y  $\tau_i = 98/3110 = 1/31,75$ .

En cuanto a la Tabla Fourier del censo de la población Parisina de 1817, una vez más, se distingue netamente de las otras por dos características: los ajustes son aceptables sólo para los primeros decenios de la vida (de 0 a 40 años); y el ajuste a la ley de Gompertz es claramente peor que en las otras tablas.

**CUADRO XIII**  
**Ajustes de la Tabla *Fourier* (París, 1817)**

Leibniz :  $\hat{y}(x) = 16 (63,25 - x)$ .

Gompertz :  $\hat{y}(x) = 1400 \exp\left(\frac{-1}{0,7} e^{\frac{x-40}{28}}\right)$ .

x	Leibniz		Fourier	Gompertz		x
	%	$\hat{y}$	y	$\hat{y}$	%	
0	1	1010	1000	998	0,2	0
5	0,15	930	932	933,6	0,2	5
10	2	850	867	861,9	0,55	10
15	3,2	770	795,5	783,2	1,55	15
20	0,35	690	692,5	698,5	0,85	20
25	2,2	610	597	609	2	25
30	5,5	530	502	516,75	2,9	30
40	8,2	370	342	335	2	40
50	0,7	210	211,5	180,3	14,6	50
60		50	105,5	74,4	29,3	60
70			33	20,85	57	70
80			5	3,4	31	80
90			0,2	0,25	20	90

**N.B.** Inflexión teórica:  $\hat{x}_i = 30$ .

Inflexión observada:  $15 < x_i < 20$  ( $x_i = 20 - \epsilon$ ),  $\epsilon > 0$ .

Finalmente se puede leer aquí abajo el ajuste de la micro-tabla Robert a una ley de Gompertz (cf. Anexo IV). El ajuste a una función lineal tendría poco sentido, ya que se refiere a una población muy reducida en edades por debajo de los treinta años.

Recordemos que la micro-tabla Choisy y su ajuste a la ley de Gompertz figuran en el Anexo V.

**CUADRO XIV**  
**Ajuste de la Tabla Robert a una ley de Gompertz**

$$\hat{y}(x) = 1330 \exp\left(-\frac{1}{12} e^{x/13}\right)$$

$X$	$y$	$\hat{y}$	$\hat{y} - y$	%	$\sigma$	$\hat{\sigma}$	$x$
15	1295	1314	19	1,45			
20	1293	1306	13	1	47,5	47,65	20
25	1288	1295	7	0,55	42,5	43,15	25
30	1277	1279	2	0,15	38	38,55	30
35	1256,5	1256,5	0	0	33,5	33,25	35
40	1225	1224	- 1	0,08	28,5	29,15	40
45	1176,5	1177	0,5	0,04	24,5	24,8	45
50	1109	1112	3	0,25	20,5	20,65	50
55	1018,5	1023	4,5	0,45	16	16,85	55
60	902	905	3	0,33	12,5	14,4	60
65	747,5	756	8,5	1,15	9,7	10,3	65
70	559	581	22	4	7,5	7,9	70
75	368,5	394,5	26	7	6	5,9	75
80	212	224	12	5,7	4	4,3	80
85	97	97,6	0,6	0,6	3	3,1	85
90	30,8	28,8	2	6,7	2	2,2	90

**N.B.** Aquí los datos brutos (Anexo IV) han sido ajustados por medio de una media móvil de 11 puntos.

**Recapitulaciones**

Modelo de Leibniz: el cuadro XV recapitula los datos relativos al ajuste a esta ley para ocho tablas (recordemos que las Tablas J. P. y Lambert teórica son casi iguales).

Me parece importante remarcar tres observaciones:

- la alta calidad de los ajustes (coeficiente r) que se confirma en los cuadros X a XIII

**N.B.** Ésta muestra muy claramente que, como ya se ha señalado al final de § 4.2, las fuertes correlaciones lineales que hemos constatado entre las tablas reflejan la calidad de los ajustes de estas tablas a la ley Leibniz.

En efecto, si tenemos aproximadamente:

(6.1)  $y_1 = a_1 x + b_1$  y  $y_2 = a_2 x + b_2$ , con  $a_1 a_2 \neq 0$ , entonces tenemos más o menos:

(6.2)  $y_2 = \frac{1}{a_1} (a_2 y_1 + a_1 b_2 - a_2 b_1)$ .

- el crecimiento del parámetro a (mortalidad anual media para el tramo de edades considerado) es conforme con lo que era de esperar;
- la originalidad aberrante de la Tabla Fourier (París, 1817). Lo cual no es ninguna novedad.



**CUADRO XV**  
**Ajuste a la ley de Leibniz :  $y = a(c - x)$ .**

Tablas	Fechas	$I$	$n$	$r$	$a$	$\Gamma$
<i>Beauvisage</i>	1793-1864	15-65	11	0,988	6,3	
<i>Deparcieux</i>	1689-1742	15-65	11	0,994	6,75	4 - 63
<i>Duvillard</i>	Avant 1789	15-65	11	0,998	7,2	10 - 62
<i>Halley</i>	1678-1691	35-80	10	0,999	7,8	25 - 80
<i>Hogdson</i>	1728-1737	20-70	11	0,998	8,1	16 - 54
<i>Lambert 24</i>	Avant 1770	25-80	12	0,999	8,44	21 - 67
<i>Lambert théorique</i>	1728-1757	20-70	11	0,998	8,6	15 - 65
<i>Fourier</i>	1817	0-60	10	0,997	16	0 - 30

N.B. Todos los datos están elaborados en relación a una base de 1000 al nacer.

**Notaciones.**

$I$ : intervalo sobre el que se realiza el ajuste

$n$ : número de puntos utilizados (generalmente, en intervalos de 5 años)

$r$ : coeficiente de correlación lineal

$a$ : coeficiente de regresión = mortalidad media anual

$\Gamma$ : intervalo de diferencia relativa  $\leq 5\%$  entre los datos y el modelo

**Modelo de Gompertz:** el parámetro más importante de este modelo es  $\mu$ , la tasa de mortalidad en edad  $x_i$  (inflexión) de mortalidad máxima. Por otra parte, recordemos (cf. § 5.2) que la supervivencia media y la supervivencia probable son funciones decrecientes de  $\mu$ .

Respecto al Cuadro XVI, hay tres observaciones dignas de destacar también:

- encontramos de nuevo los mismos grupos y subgrupos que en § 4.1 (cf. Cuadros VI a VII'): privilegiados, «el común de los mortales» universal, « el común de los mortales » urbano;
- la casi concordancia entre los valores estimados y los valores observados para los dos parámetros escogidos. Por ello me parece inútil sobrecargar este cuadro con los datos de los coeficientes de correlación, que son todos aproximadamente del 0,99;
- aquí todavía Fourier se distingue de las otras Tablas. Las tasas  $\mu$  et  $\tau_i$  son de la misma magnitud que en el último grupo, mientras que  $\hat{x}_i$  y  $x_i$  se separan notablemente, y difieren mucho una de la otra.

CUADRO XVI

Ajustes a la ley de Gompertz :  $y(x) = k \exp \left( - \frac{1}{\lambda} e^{\frac{x-x_0}{\mu}} \right)$ .

Tablas	$\mu$	$\hat{x}_i$	$\tau_i$	$x_i$	$\Gamma$
<i>Choisy</i>	1/11,16	76,5			20 - 85 *
<i>Beauvisage</i>	1/12,75	73,3	1/11,95	74,5	25 - 65
<i>Robert</i>	1/13	72,3			15 - 75
<i>Deparcieux</i>	1/14,5	71	1/13	73	30 - 70
<i>Duillard</i>	1/17,4	63,5	1/14,5	67,5	31 - 80
<i>Lambert 24</i>	1/17,9	62,5	1/16,9	63	35 - 80
<i>Halley</i>	1/27	55,5	1/25	59	10 - 70
<i>Lambert théorique</i>	1/31,8	40,7	1/3175	39,5	13 - 82
<i>Hogdson</i>	1/33	40	1/28	40,5	15 - 60
<i>Fourier</i>	1/28	30	1/25	= 20	0-30

N.B. Salvo en el caso de *Halley* ( $x_0 = 20$ ), se ha tomado en todo momento 40 años como la edad de origen.

**Notaciones.**

$\mu = \hat{\tau}_i$  = tasas de mortalidad teórica en la inflexión

$\hat{x}_i$  = inflexión estimada =  $\frac{1}{\mu} \ell_n(\lambda) + x_0$

$\tau_i$  = tasas de mortalidad observada en la inflexión observada

$x_i$  = inflexión observada

$\Gamma$  = intervalo de diferencia relativa  $\leq 5\%$

\* excepto cerca de 70 años

N.B. El hecho de que todas las tablas se ajusten muy bien a una ley de Gompertz explica a su vez las correlaciones observadas entre las tablas.

En efecto, la función  $y(x) = k \exp \left( - \frac{1}{\lambda} e^{\mu x} \right)$  genera una serie entera.

Cerca del punto  $(x_0, y_0)$ , los primeros términos de esa serie son:

$$(6.3) \quad \frac{y}{y_0} = 1 - \frac{\mu}{\lambda}(x - x_0) - \frac{\mu^2(\lambda - 1)}{2\lambda^2}(x - x_0)^2 - \frac{\mu^3(\lambda^2 - 3\lambda + 1)}{6\lambda^2}(x - x_0)^3 (1 + \varepsilon(x - x_0)), \text{ con: } \lim_{z \rightarrow 0} \varepsilon(z) = 0.$$

El cuadro XVI aquí debajo y los valores obtenidos para  $\lambda$  en los ejemplos tratados, muestran que los coeficientes de los términos de grado 2 y 3 son netamente inferiores a  $10^{-2}$  y  $10^{-3}$  respectivamente. Resulta que cerca del punto  $(x_0, y_0)$ , la curva de Gompertz se aproxima muy bien a la tangente de ese punto, es decir, la línea recta de la ecuación:

$$(6.4) \quad \frac{y}{y_0} = 1 - \frac{\mu}{\lambda}(x - x_0).$$

En particular, si tomamos como origen el punto de inflexión  $(x_i, y_i)$ , tenemos,  $\lambda = 1$ ; el término cuadrático desaparece, como es debido, y (6.3) pasa a:

$$(6.3)' \quad \frac{y}{y_i} = 1 - \mu(x - x_i) + \frac{\mu^3}{6}(x - x_i)^3 (1 + \varepsilon(x - x_i)).$$

Cerca de la inflexión, la curva es aproximada al 3<sup>er</sup> grado, es decir, muy aproximada a la tangente:

$$(6.4) \quad \frac{y}{y_i} = 1 - \mu(x - x_i).$$

Así nos encontramos prácticamente como en el caso de los ajustes de las tablas de mortalidad a una función lineal (ley de Leibniz).

Se podría llegar a la misma conclusión partiendo no de la función misma  $y(x)$ , sino de una fórmula de linealización como la de más arriba (5.3.6).

Si  $y_1(x)$  y  $y_2(x)$  son dos funciones de mortalidad Gompertz, y si se plantea:

$$Z(x) = \ell_n \left( \ell_n \left( \frac{k}{y(x)} \right) \right).$$

Se deduce de (5.3.6) la relación lineal:

$$(6.5) \quad \mu_2 Z_1 - \mu_1 Z_2 = \mu_1 \ell_n(\lambda_2) - \mu_2 \ell_n(\lambda_1).$$

Si se supone, a fin de aligerar la escritura,  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  (es decir, que el origen en ambas funciones es su inflexión), obtenemos:

$$(6.5) \quad Z_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} Z_2 = v Z_2 \quad (v > 0).$$

de donde:

$$e^{Z_1} = \ell_n \left( \frac{k_1}{y_1} \right) = \left( e^{Z_2} \right)^v = \left( \ell_n \left( \frac{k_2}{y_2} \right) \right)^v,$$

Y finalmente:

$$(6.6) \quad y_1 = k_1 \exp \left[ - \left( \ell_n \left( \frac{k_2}{y_2} \right) \right)^v \right].$$

Si se plantea  $\eta = 1 - \frac{y_2}{k_2}$  para facilitar el cálculo, el desarrollo en serie de Taylor del segundo miembro de (6.6) resulta como aproximación de primer grado de  $y_1$  en función de  $y_2$  la relación lineal:

$$(6.7) \quad y_1 \approx \frac{k_1 \mu_2}{k_2 \mu_1} y_2.$$

## 7.- Algunas observaciones a modo de conclusión

Esto es el trabajo de un aficionado que no está especializado en demografía histórica, ni está familiarizado a fortiori con sus métodos. Es probable que para los especialistas no aporte nada nuevo, nada que no sea ya bien conocido y destacado.

No obstante, voy a correr el riesgo de sacar tres conclusiones, por muy triviales que puedan parecer.

1. La profunda igualdad entre las tablas de mortalidad de la época estudiada, igualdad de la que son testigo por una parte las fuertes correlaciones entre ellas y por otra la calidad de sus ajustes a una misma familia de leyes teóricas – las leyes de Gompertz y, en menor grado, las leyes de Leibniz.



2. Si hay igualdad, también hay diferencias. En nuestra época son numerosos los estudios de lo que podríamos llamar la « mortalidad diferencial »: diferencias entre clases o categorías sociales, entre zonas geográficas, entre modos de vida, etc. ¿Y el pasado, y especialmente, el siglo dieciocho? Aquí he puesto de manifiesto, de manera esbozada, diferencias entre « privilegiados » y el resto, entre poblaciones urbanas y poblaciones no diferenciadas (seguro que esto también es « descubrir el Mediterráneo »). Seguramente es posible ir mucho más allá.
3. Ahora bien, para hacer esto, no es necesario disponer de datos relativos a poblaciones numerosas, como sucede con los mormones.

De hecho, pequeñas muestras del orden del millar de individuos o menos, han sido suficientes para construir tablas muy adecuadas. Ahora bien, hay múltiples fuentes análogas a las que yo he utilizado y son accesibles a todos y cada uno de nosotros.

Por ejemplo, es posible individualizar algunas categorías dentro de muestras escogidas en compilaciones como los diccionarios (pero hay muchas otras fuentes): los artistas especialmente, pero también los escritores, o incluso los científicos.

Me ha impresionado especialmente que al hacer con el Journal de los Goncourt lo mismo que había hecho (y presentado aquí) con las Mémoires del Abate de Choisy, resulta que, aunque se trate del siglo diecinueve, la longevidad es sensiblemente menor que en mis tablas de Robert y Choisy o en la de Deparcieux.

Esto probablemente se deba a que las referencias de los hermanos E. y J. de Goncourt eran relativas a periodistas, escritores y artistas.

Me parece que la principal dificultad en este tipo de trabajo, realizado sin medios informáticos, radica en evitar las repeticiones. Afortunadamente, los investigadores actuales están más avanzados que yo y saben utilizar los ordenadores.

En suma, aún queda mucho trabajo que hacer para quienes se sientan tentados a « lanzarse » a esa tarea.

ANNEXE I

Table de mortalité de Lambert, tirée d'une table de Süßmilch

Zum §. 24. der Anmerkungen über die Sterblichkeit.

Alter Daher.	Daher leb. ber. beleb.	Erbenbe.	Gewinn des Erb- ten.	Es steht nicht von	Wirtter Zür.	Wirtt, we die Zür. der Berbe.	Alter Daher.	Daher leb. ber. beleb.	Erbenbe.	Gewinn des Erb- ten.	Es steht nicht von	Wirtter Zür.	Wirtt, we die Zür. der Berbe.
0	2610	10000	295022	4	29,5	22,6	55	90	2547	37444	28	69,7	67,9
1	610	7390	285022	12	40,2	40,5	56	92	2457	34897	27	70,2	68,4
2	340	6780	277632	20	42,1	44,4	57	94	2365	32440	25	70,7	68,9
3	233	6440	270852	27	45,0	46,7	58	96	2271	30075	24	71,2	69,4
4	169	6207	264412	37	46,7	48,3	59	98	2175	27804	22	71,8	70,0
5	140	6038	258205	43	47,7	49,5	60	100	2077	25629	21	72,3	70,6
6	116	5898	252167	51	48,5	50,2	61	101	1977	23552	20	72,9	71,2
7	96	5782	246269	60	49,6	51,0	62	103	1876	21575	18	73,5	71,9
8	80	5686	240487	71	50,3	51,6	63	105	1773	19699	17	74,1	72,4
9	68	5606	234801	82	50,5	52,0	64	104	1668	17926	16	74,7	73,1
10	58	5531	229195	95	51,4	52,4	65	102	1564	16258	15	75,4	73,7
11	50	5480	223657	110	51,8	52,8	66	99	1462	14694	15	76,0	74,4
12	45	5430	218177	121	52,2	53,1	67	95	1363	13232	14	76,7	75,1
13	42	5385	212747	128	52,5	53,3	68	92	1268	11869	14	77,4	75,7
14	39	5343	207362	137	52,8	53,6	69	88	1176	10601	13	78,0	76,3
15	37	5304	202019	143	53,1	53,8	70	85	1088	9425	13	78,7	76,9
16	35	5267	196715	151	53,3	54,0	71	82	1003	8337	12	79,4	77,5
17	33	5232	191448	159	53,6	54,2	72	80	921	7334	12	80,0	78,1
18	36	5199	186216	144	53,8	54,4	73	79	841	6413	11	80,6	78,7
19	39	5163	181017	132	54,1	54,6	74	77	762	5572	10	81,3	79,3
20	43	5124	175854	119	54,3	54,8	75	75	685	4810	9	82,0	79,9
21	48	5081	170730	106	54,6	55,1	76	73	610	4125	8	82,7	80,6
22	54	5033	165649	91	54,5	55,3	77	70	537	3515	8	83,5	81,3
23	58	4979	160616	86	55,2	55,0	78	66	467	2978	7	84,3	82,0
24	62	4921	155637	79	55,6	55,9	79	62	401	2511	6	85,2	82,8
25	65	4859	150716	75	56,0	56,3	80	56	339	2110	6	86,2	83,6
26	67	4794	145857	72	56,4	56,7	81	50	283	1771	6	87,2	84,5
27	69	4727	141063	69	56,8	57,0	82	43	233	1488	5	88,4	85,7
28	70	4658	136336	67	57,3	57,4	83	35	190	1255	5	89,6	87,4
29	71	4588	131678	65	57,7	57,8	84	25	155	1065	6	90,8	89,3
30	72	4517	127090	63	58,1	58,1	85	18	130	910	7	92,0	90,9
31	74	4445	122573	60	58,6	58,5	86	13	112	780	9	92,9	92,8
32	75	4371	118128	58	59,0	58,9	87	10	99	668	10	93,7	92,8
33	77	4296	113757	56	59,5	59,3	88	9	89	569	10	94,4	93,0
34	79	4219	109461	54	59,9	59,7	89	9	80	480	9	95,0	94,1
35	80	4140	105242	52	60,4	60,1	90	8	72	400	9	95,5	94,7
36	80	4060	101102	51	60,9	60,5	91	8	64	328	8	95,1	95,3
37	81	3980	97042	49	61,4	60,9	92	8	56	264	7	96,7	95,9
38	81	3899	93062	48	61,9	61,3	93	7	48	208	7	97,3	96,5
39	80	3818	89163	48	62,4	61,7	94	7	41	160	6	97,9	97,1
40	80	3738	85345	47	62,8	62,1	95	7	34	119	5	98,5	97,7
41	79	3658	81607	46	63,3	62,5	96	6	27	85	4	99,2	98,3
42	78	3579	77949	45	63,8	62,9	97	6	21	58	3	99,8	98,9
43	77	3501	74370	45	64,2	63,2	98	5	15	37	3	100,5	99,5
44	76	3424	70869	45	64,7	63,6	99	4	10	22	2	101,2	100,3
45	75	3348	67445	44	65,1	64,0	100	3	6	12	2	102,0	101,0
46	75	3273	64097	44	65,5	64,3	101	1	3	6	2	102,0	102,5
47	76	3198	60924	42	66,0	64,7	102	1	2	3	2	103,5	103,0
48	77	3122	57826	41	66,4	65,0	103		1	1			
49	78	3045	54804	39	66,9	65,4							
50	80	2967	51859	37	67,3	65,8							
51	82	2887	48922	35	67,8	66,2							
52	84	2805	46005	33	68,2	66,6							
53	86	2721	43200	32	68,7	67,0							
54	88	2635	40079	30	69,2	67,5							
55	90	2547	37444	28	69,7	67,9							



**ANEXO II**

La ley teórica de Lambert

Población  $y(x)$  a cada edad  $x$ ; vida probable  $M(x)$  y supervivencia probable  $M(x) - x$ .

$x$	$y$	$M(x)$	$M(x) - x$
0	10 000	16,875	"
1	8 146	29,386	28,4
2	6 965	36	34
3	6 224	39,57	36,6
4	5 786	41,84	37,84
5	5 491	43,38	38,4
6	5 330	44,23	38,2
7	5 240	44,7	37,7
8	5 192	44,96	37
9	5 167	45,09	36,1
10	5 153,5	45,16	35,15
11	5 143,4	45,22	34,2
12	5 132,2	45,28	33,3
13	5 117	45,36	32,35
14	5 096,4	45,47	31,45
15	5 070	45,61	30,6
16	5 035,7	45,8	29,8
17	4 995,4	46	29
18	4 948,6	46,26	28,25
19	4 896	46,55	27,55
20	4 840	46,85	26,85
21	4 774,2	47,21	26,2
22	4 705,9	47,58	25,6
23	4 633,3	47,98	25
24	4 556,9	48,4	24,4
25	4 477	48,85	23,85
26	4 393,8	49,32	23,3
27	4 308	49,8	22,8
28	4 219,8	50,45	22,45
29	4 129,5	50,82	21,8
30	4 035,5	51,37	21,35
31	3 943,9	51,92	20,9
32	3 849	52,45	20,45
33	3 753,2	53	20
34	3 656,5	53,6	19,6
35	3 559,5	54,18	19,2
36	3 461,8	54,78	18,8
37	3 364	55,4	18,4
38	3 266	56	18
39	3 168,4	56,62	17,6
40	3 070	57,25	17,25
41	2 973,9	57,88	16,9
42	2 877,3	58,52	16,5
43	2 781,5	59,17	16,15
44	2 686,3	59,82	15,8
45	2 592	60,5	15,5
46	2 498,7	61,12	15,1
47	2 406,3	61,8	14,8

$x$	$y$	$M(x)$	$M(x) - x$
48	2 315	62,46	14,45
49	2 225	63,12	14,1
50	2 136	63,93	13,9
51	2 048,8	64,55	13,55
52	1 962,7	65,13	13,15
53	1 878	65,8	12,8
54	1 794,7	66,45	12,45
55	1 713	67,17	12,15
56	1 633	67,85	11,85
57	1 544,6	68,54	11,55
58	1 477,8	69,22	11,2
59	1 403	69,9	10,9
60	1 330	70,6	10,6
61	1 257,7	71,3	10,3
62	1 189	72	10
63	1 120	72,67	9,65
64	1 053,5	73,37	9,35
65	989,5	74,06	9
66	927	74,79	8,8
67	866,5	75,5	8,5
68	808	76,15	8,15
69	751	76,85	7,85
70	696	77,56	7,55
71	644	78,25	7,25
72	593	78,97	7
73	544	79,65	6,65
74	497,5	80,35	6,35
75	453	81,03	6
76	410	81,73	5,75
77	369,5	82,62	5,6
78	331	83,425	5,4
79	294,5	84,175	5,15
80	260	84,54	4,55
81	227,5	85,25	4,25
82	197	85,95	3,95
83	182	86,5	3,5
84	143	87,3	3,3
85	119	88	3
86	97	88,7	2,7
87	77,2	89,4	2,4
88	59,51	89,94	1,95
89	43,93	90,75	1,75
90	30,4	91,43	1,45
91	19,146	91,98	,9801
92	9,94	92,7	0,7
93	2,9	93,25	0,25
94	0	0	0



## ANNEXE III

Table de Süßmilch des décès à Londres en 30 ans de 1728 à 1757  
 (Die göttliche Ordnung... II, Annexe, p. 31)

31

## TABVLA X.

Liste der in London Gestorbenen nach den Jahren und zwar in 30 Jahren,  
 vom Jahr 1728 bis 1757.

v. a Collection of the yearly Bills of mortality from 1657 to 1758 incluf.  
 London. 1759. 4. p. 141.

Alter der Gestorbenen.	von 1728 bis 1733.	von 1733 bis 1737.	von 1738 bis 1742.	von 1743 bis 1747.	von 1748 bis 1752.	von 1753 bis 1757.	Summa aller 30 Jahr.
Unter 2 Jahr	50363	52796	49538	41948	39887	38371	272903
2 bis 5 Jahr	10984	12521	12540	9939	9069	9069	64745
5—10	4834	4941	4979	4292	3652	3223	25912
10—20	4267	3975	4546	3787	3374	2942	22891
20—30	10216	9560	11162	9920	9724	7892	58474
30—40	12271	12631	13729	11678	11816	9977	71502
40—50	12077	11912	14297	12659	12130	10163	73238
50—60	9754	9939	11914	9704	9543	8928	59782
60—70	8459	7850	8516	7661	7692	7091	47269
70—80	5553	5131	6793	6134	5043	5025	33679
80—90	3464	2986	3150	2598	2343	2407	16948
90 und drüber	671	595	565	433	352	363	2979
	132913	134237	142720	120753	114625	106074	750322
Unter jedem Tausend Gestorbener sind also gewesen							
Alter.	erste 1 Jahr.	zweite 1 Jahr.	dritte 1 Jahr.	vierte 1 Jahr.	fünfte 1 Jahr.	sechste 1 Jahr.	General- Verhältn.
Unter 2 Jahr	378	393	349	347	347	361	363
2—5	83	93	89	82	80	92	87
5—10	37	37	35	36	31	30	34
10—20	32	29	32	31	30	28	31
20—30	76	72	78	82	85	74	77
30—40	93	89	97	97	103	94	96
40—50	91	89	101	105	106	96	97
50—60	73	74	84	80	83	84	80
60—70	64	59	60	64	67	67	63
70—80	41	38	48	50	44	47	45
80—90	24	22	23	22	20	23	23
90 und drüber	8	5	4	4	4	4	4
	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000

ANEXO IV

$x$	$m$	$y$	$Y$	$v$	$p$
15	1	1295	65.441	65	67,75
16	-				
17	-				
18	-				
19	-				
20	1	1294	58.970	65,1	67,75
21	1	1293			
22	-				
23	-				
24	1	1292			
25	2	1291	53.799	66,2	67,8
26	2	1289			
27	-				
28	4	1287			
29	5	1283			
30	4	1278	47.362	66,5	68
31	3	1274			
32	4	1271			
33	2	1267			
34	3	1265			
35	4	1262	41.007	67	68,1
36	7	1258			
37	10	1251			
38	9	1241			
39	10	1232			
40	3	1222	34.763	68	68,5
41	9	1219			
42	4	1210			
43	16	1206			
44	8	1190			
45	12	1182	28.716	68,8	69
46	10	1170			
47	16	1160			
48	16	1144			
49	17	1128			
50	11	1111	22.932	70,15	69,8
51	18	1100			
52	24	1082			
53	15	1058			
54	23	1043			
55	19	1020	17.538	71,7	71

$m$	$m$	$y$	$Y$	$v$	$p$
55	19	1020	17.538	71,7	71
56	20	1001			
57	21	981			
58	24	960			
59	26	936			
60	35	910	12.640	73,4	72,6
61	27	875			
62	22	848			
63	29	826			
64	31	797			
65	32	766	8.384	75,45	74,4
66	45	734			
67	50	689			
68	48	639			
69	44	591			
70	38	547	4.965	78,6	77,7
71	35	509			
72	30	474			
73	44	444			
74	41	400			
75	35	359	2591	81,7	81
76	31	324			
77	27	293			
78	36	266			
79	21	230			
80	32	209	1119	84,85	84,1
81	26	177			
82	20	151			
83	19	131			
84	30	112			
85	17	82	339	88,65	88
86	15	65			
87	11	50			
88	10	39			
89	4	29			
90	9	25	74	92,45	92
91	3	16			
92	4	13			
93	3	9			
94	2	6			
95	3	4	5		

Diccionario « Robert des nombres propes». Personalidades europeas fallecidas por muerte natural entre 1667 y 1801.

$x$ : edad                       $m(x)$ : número de muertos a la edad  $x$                        $y(x)$ : número de vivos de edad  $x$   
 $Y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} y(x+i)$  : número de vivos de edades  $\geq x$                        $v(x)$  : vida probable a la edad  $x$   
 $p(x)$  : vida probable a la edad  $x$

**N.B.** Una de estas personalidades vivió 100 años: Fontenelle, muerto en 1757

**ANEXO V**

Abate de Choisy, *Mémoires*  
 Aristócratas fallecidos entre 1623 y 1749  
 (Mismas notaciones que para el Anexo IV)

$\hat{y}$  y  $\hat{p}$ : valores calculados según el ajuste a una ley de Gompertz

$$\hat{y} = 242 \exp \left( -\frac{1}{23,3} e^{\frac{x-40}{11,16}} \right)$$

$x$	$m$	$y$	$Y$	$V$	$p$	$\hat{y}$	$\hat{p}$	$\frac{ y - \hat{y} }{y} \%$
20		245	11.774	67,5	70,5	240,3	71,15	2
	4							
25		241	10.560	68,3	71	239,3	71,2	0,8
	3							
30		238	9.361	68,8	71	237,8	71,3	0
	4							
35		234	8.184	69,5	71,15	235	71,5	0,45
	2							
40		232	7.020	69,75	71,2	232	71,7	0
	5							
45		227	5.869	70,35	71,4	226	72	0,44
	10							
50		217	4.757	71,40	71,8	218,6	72,6	0,74
	11							
55		206	3.696	72,45	72,15	205,3	73,4	0,34
	17							
60		189	2.696	73,75	73,375	187	74,7	1
	21							
65		168	1.807	75,25	75,17	131,7	76,15	3,75
	43							
70		125	1.121	79,5	78,2	128,7	78,25	3
	43							
75		82	664	82,5	81,5	90	80,95	10
	29							
80		53	318	85,5	83,8	51,5	84,15	3
	32							
85		21	123	90,5	89	21,5	87,7	2,4
	13							
90		8	38			5,5		
	5							
95		3	6			0,65		
97		0						
	2							
100		0						
	0							
1	2	3	4	5	6	7	8	9



## Tablas y curvas de mortalidad del S. XVIII

### Semejanzas y divergencias

#### Bibliografía general

---

- [1] GRAUNT J., *Observations naturelles et politiques*, Eric Vilquin (éd.), édition Institut National d'Études Démographiques (I.N.E.D.), Paris, 1977.
- [2] LEIBNIZ G.W. et les raisonnements sur la vie humaine, J.-M. Rohrbasser et J. Véron (éds), édition Institut National d'Études Démographiques (I.N.E.D.), Paris, 2001.
- [3] DEPARCIEUX A., *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine* (1746), addition à l'Essai (1760), C. Behar (ed.), édition Institut National d'Études Démographiques (I.N.E.D.), Paris, 2003.
- [4] *A collection of yearly bills of mortality from 1657 to 1758 inclusive*, printed for A. Millar in the Strand, London, 1759.
- [5] SÜSSMILCH J.P., *L'ordre Divin*  
1741, J.-M. Rohrbasser (éd.), édition Institut National d'Études Démographiques (I.N.E.D.), Paris 1998.  
1761, J. Hecht (éd.), édition Institut National d'Études Démographiques (I.N.E.D.), Paris, 1979.
- [6] LAMBERT J. H., *Contributions mathématiques à l'étude de la nuptialité et de la mortalité, 1765 et 1772*, J.-M. Rohrbasser et J. Véron (éds), édition Institut National d'Études Démographiques (I.N.E.D.), Paris, 2006.
- [7] BARBUT M., ROHRBASSER J.-M., VERON J., "Lambert et la loi de survie", *Mathématiques et Sciences humaines* 171, 2005.
- [8] *Arithmétique politique dans la France du XVIIIe siècle*, mélanges sous la direction de Th. Martin, édition Institut National d'Études Démographiques (I.N.E.D.), Paris, 2003.
- [9] DE MOIVRE A., *Annuities upon lives*, London, 1725. Adjunto a *The doctrine of chances* (1735), edición de 1756.
- [10] *Recherches statistiques sur Paris et le département de la Seine*, C. Ballard imprimeur du Roi, Paris, 1821.
- [11] GOMPERTZ B., "On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies", *Phil. Trans. Of the Royal Soc of London*, vol. 115, 1825.
- [12] THUILLIER G., *Le premier actuaire de France : DUVILLARD (1755-1832)*, Paris, La Documentation française, 1997.
- [13] BEAUVISAGE E., *Des tables de mortalité et de leurs applications aux assurances sur la vie*, Paris, Gauthier-Villars, 1867.
- [14] THUILLIER G., *Une ténébreuse affaire : la caisse Lafarge (1787-1892)*, Paris, La documentation française, 1999.
- [15] QUICQUET A., *Aperçu historique sur les formules d'interpolation des tables de survie et de mortalité*, Paris, Warnier & Cie, 1893.

Rubrica « Démographie mathématique »

Revista : *Mathématiques et Sciences humaines*  
*Mathematics and Social Sciences*

<http://msh.revues.org/>

<http://www.ehess.fr/revue-msh/index.php>

n° 148, 1999 ; n° 149, 2000 ; n° 153, 2001 ; n° 156, 2001 ; n° 159, 2002 ; n°  
160, 2002 ; n° 164, 2003 ; n° 166, 2004 ; n° 167, 2004 ; n° 171, 2005