VIII Foro sobre Evaluación de la Calidad de la Investigación y de la Educación Superior: Libro de Capítulos. ISBN-978·84·694·3489·5

EMPLEO DE PROBLEMAS HISTÓRICOS EN UN CURSO INTRODUCTORIO DE CÁLCULO DE PROBABILIDADES

José Antonio Camúñez-Ruiz, Mª Dolores Pérez-Hidalgo y Francisco Javier Ortega-Irizo

Facultad de Turismo y Finanzas, Universidad de Sevilla

Introducción

Tradicionalmente, un curso introductorio de cálculo de probabilidades sigue una secuencia que va desde la definición del "álgebra de sucesos" hasta "la axiomática de Kolmogorov" y su aplicación al enfoque apriorístico de Laplace con sucesos elementales equiprobables y experimentaciones independientes. Este planteamiento teórico se complementa con la resolución de ejercicios de aplicación, muchos de ellos relacionados con experimentos aleatorios sencillos pero poco realistas. La mecánica es adquirida por el alumno, la teoría no tanto, pues la componente abstracta implícita en la misma y que se asocia con la aleatoriedad escapa en muchos casos a las reflexiones de los estudiantes.

Enfocamos la docencia de este tópico de una manera distinta, proponemos una mezcla de pragmatismo e historia. Nuestro punto de partida es el enunciado de problemas relacionados con juegos realistas de azar, planteados y estudiados por científicos pioneros en estos asuntos y que son clásicos en la historia incipiente de ese "nuevo" cálculo de probabilidades, aunque el término "probabilidad" no fuese usado, hablándose de azares, chances o repartos de suertes. Se piden resoluciones por parte de los estudiantes, bajo asesoramiento y supervisión del profesor, usando un álgebra sencilla y ya por ellos conocida. En ese contexto se va produciendo una cimentación de una teoría básica que al final es formalizada y complementada por el docente. La experiencia ha sido desarrollada en un curso introductorio de estadística en el Grado en Finanzas y Contabilidad de la Facultad de Turismo y Finanzas de la Universidad de Sevilla, en un grupo de 45 alumnos.

Método

En el contexto del cálculo de probabilidades el empirismo tiene lugar, durante los primeros tiempos de esta disciplina, sobre la mesa de juegos. Jugadores y apuestas, juegos de dados (los naipes no existían dado que aún no se había inventado la imprenta), con dos y tres dados, la primacía del juego (¿quién es el mano?), juegos que se interrumpen, juegos con ventajas para unos y desventajas para otros, todos son ingredientes suficientes para elucubrar, inventar y calcular.

El método consiste en la propuesta de resolución de diferentes problemas tempranos de la historia de este cálculo para lo que es necesario un conocimiento matemático que los alumnos ya disponen y una importante dosis de curiosidad e intuición que, en contextos de juegos de azar es fácil encontrar. Las resoluciones darán pie a las formalizaciones, de manera graduada, sin necesidad de introducir de golpe todo el aparato teórico que habitualmente se utiliza para este capítulo.

Comenzamos proponiendo a los alumnos la resolución del primer problema que fue abordado en la historia de este cálculo, el conocido como Problema de los Puntos: reparto justo de una apuesta en un juego que ha sido interrumpido antes de su conclusión, o sea, antes de que uno de los jugadores haya ganado y, por tanto, antes de que uno de ellos se lo haya llevado todo. Se llama así porque el objetivo de cada jugador es conseguir una determinada puntuación de manera que el primero que la alcance es el que gana, pero el juego se ha interrumpido cuando un jugador tiene una cantidad de puntos y otro otra cantidad distinta pero ninguno tiene los suficientes como para ganar el juego. En un principio se plantea para dos jugadores, los cuales han depositado la misma cantidad de dinero como apuesta y cada uno va acumulando punto a punto cada vez que se realiza una partida de puro azar y sale el resultado por el que apuesta (por ejemplo lanzar una moneda equilibrada de manera consecutiva y si sale cara un punto para el primer jugador y si sale cruz para el segundo).

Las primeras soluciones que emanan desde los estudiantes son similares a las propuestas realizadas por los matemáticos del Renacimiento italiano: reparto del dinero total apostado de manera proporcional a los puntos acumulados por cada jugador. Aprovechamos para citar a dichos matemáticos y sus propuestas, que son variantes sobre dicho reparto y que, en general van a coincidir con esas propuestas iniciales de los estudiantes: Pacioli, Tartaglia, Peverone, Forestani y Cardano. Con ejemplos se comentan las contradicciones que generan las mismas y, por tanto la invalidez del método. Las lecturas con lenguaje actual de sus escritos son al mismo tiempo, enriquecedoras y llenas de curiosidad.

Se propone la búsqueda de solución del problema pero en lugar de usar como base de cálculo los puntos conseguidos, usar los que le falta a cada jugador para ganar el juego y, por tanto, subyaciendo en el cálculo la probabilidad que tenía cada uno de ganar en el momento en que se produce la interrupción. En lugar de mirar hacia atrás, hacia adelante. En este momento, la correspondencia que se produce entre los sabios franceses Pascal y Fermat en el verano de 1654 es usada como ejemplo de solución. El alumno se agarra a la solución de Pascal, más intuitiva: Diagrama tipo árbol describiendo los posibles resultados en caso de continuar el juego desde la posición en que fue interrumpido. Repartir la chance total (la unidad) entre las ramas que se abren en cada nodo. Multiplicar las diferentes chances que forman parte de una misma rama. Resultado final: probabilidad de que gane el correspondiente jugador asociado a esa rama. Solución al problema de los puntos: reparto de la apuesta en función de dicha probabilidad. Aparecen en la resolución las ideas de equiprobabilidad, independencia de sucesos, producto de probabilidades. También la de "equivalente cierto": Valoración de una situación de incertidumbre, sustitución de dicha situación por su valoración para poder seguir avanzando en la resolución.

Solución de Fermat: Usando combinatoria. Calcular todos los posibles resultados en caso de continuar el juego, y repartirlos entre los jugadores según les favorezcan. Construir la probabilidad como cociente entre resultados favorables al jugador y resultados posibles. La idea de Laplace (siglo XIX), subyace ya en la propuesta de Fermat.

Una enumeración de posibles resultados en el lanzamiento de tres dados, al estilo de cómo se hace en el poema De Vetula, anónimo del siglo XIII, o en el trabajo de Cardano, es ilustrada para comprobar que determinadas puntuaciones de la suma de tres dados tienen más chances que otras, como demostró Galileo en el trabajo que se le encargó.

En 1657 encontramos otro autor, Huygens que publica un pequeño tratado sobre probabilidades donde incluye su solución al problema de los puntos: la esperanza matemática. Al final de esta obra encontramos 5 problemas propuestos a los lectores. El último de ellos es el conocido como "Problema de la ruina del jugador", otro clásico de la historia de este cálculo. El enunciado del mismo da la sensación de solución compleja. Pero, finalmente, su resolución es sencilla usando progresiones geométricas cuyas formulaciones son ya conocidas por los estudiantes desde la ESO. Nuevas conceptos relacionados con el tópico aparecen: Espacio muestral infinito, probabilidad condicionada, resultados no equiprobables. También, la idea de primacía en el juego.

Del siglo XIII es el manuscrito de Alfonso X el Sabio titulado "El libro de ajedrez, dados y tablas". En el mismo, entre los juegos de dados descritos, que se practicaban en la sociedad española de la época, encontramos tres particularmente sencillos en lo que respecta a su cálculo: "A mayores", "A menores" y "Tanto en uno como en dos". Se propone a los estudiantes el cálculo de las probabilidades de ganar de cada uno de los jugadores intervinientes. En los dos primeros es inmediato. En el tercero, tras la experiencia de la resolución del problema de la ruina del jugador, el alumno encuentra la solución e incluso propone variantes para hacer que el juego sea más equitativo, más justo.

En 1670 el matemático madrileño Juan Caramuel publica una obra enciclopédica de matemáticas, de la que uno de sus tomos es Kybeia ("juego de dados" en griego). Aquí encontramos un juego de fácil cálculo, el Passa-diez, donde la enumeración del espacio muestral y el cálculo de las probabilidades que tienen los jugadores de ganar, refuerzan las ideas que han ido adquiriendo con los otros problemas.

Resultados

Los resultados, en una primera experiencia en un curso introductorio de Estadística sobre un grupo del área de las Finanzas y de la Dirección de Empresas, son esperanzadores en cuanto a calificaciones, y alentadores respecto a la comprensión o maduración de las ideas. Las calificaciones de las pruebas evaluadoras sobre este capítulo arrojaron los siguientes resultados:

- La calificación media fue 6’71 con una desviación típica de 2’03.
- El percentil 50, o mediana fue 7’50, mientras que el percentil 75 toma el valor de 8’1, lo que nos da una idea de mayoría de calificaciones entre notable y sobresaliente.

Una encuesta a los alumnos se desarrolló en la conclusión del capítulo. Se les presentó una serie de afirmaciones sobre las que los mismos manifestaban desde su “total desacuerdo” hasta su “total acuerdo”, en una escala tipo Likert de cinco categorías, que recorren el camino señalado. Las siguiente tabla muestra resultados porcentuales de una de las afirmaciones planteadas en la encuesta.

Afirmación: *El contexto histórico me ha ayudado a entender el por qué de la regresión.*

Posibles Respuestas	Porcentaje
Ni de acuerdo ni en desacuerdo	2,9
De acuerdo	57,1
Totalmente de acuerdo	40,0

Conclusión

La historia es una fuente de donde surten todos los hechos científicos. Apostar por ella para la introducción de conceptos puede ser una vía interesante. En nuestro caso particular, además, no es necesaria una fuerte base matemática. Personajes históricos importantes y relacionados con este cálculo aparecen y se incorporan al bagaje cultural del estudiante. La formalización de la teoría se realiza a posteriori. Cuando ésta se produce el estudiante entiende las razones de la misma.

Referencias

Basulto, J., Camúñez, J. A., y Ortega, F. J. (2006). El juego que llaman Azar del Libro de los Dados de Alfonso X El Sabio. *Historia de la Probabilidad y la Estadística (III)*. Madrid: Editorial Publicaciones Delta.

Basulto, J. y Camúñez, J. A., (2007). *La Geometría del Azar: la correspondencia entre Pierre de Fermat y Blaise Pascal*. Madrid: Nivola, libro y ediciones.

Basulto, J., Camúñez, J. A., y Bordon C. (2008). El Libro de los Dados de Alfonso X. Su relación con el Cálculo de Probabilidades. *Historia de la Probabilidad y la Estadística (IV)*. Huelva: Universidad de Huelva.

Basulto, J., Camúñez, J. A., y Pérez, M. D. (2008). El problema de la ruina del jugador. *Suma*, 59, 23-30.

Bellhouse, D. R. (2004). Decoding Cardano’s Liber de Ludo Aleae. *Historia Matemática*, 1-22.

Bellhouse, D.R. (2000). De Vetula: a Mediaval Manuscript Containing Probability Calculations. *International Statistical Review, 68*, 123-136.

Camúñez Ruiz, J. A. (2004). Un fragmento de Galileo sobre cálculo en juegos de azar. *Lecturas de Economía Aplicada (Homenaje al profesor Antonio Rallo)*. Sevilla: Edición Digital @tres, S.L.L. 235-244.

Camúñez, J. A., Basulto, J. y García del Hoyo, J. J. (2007). *Juan Caramuel: Su aportación al Cálculo de Probabilidades*. Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.

Hacking, I (1975): *The emergence of probability*, Cambridge University Press.

Hald, A. (1990): *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750*, New York: John Wiley & Sons.

Huygens, C. (1657). *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, printed in *Exercitationum Mathematicarum* by F. Van Schooten, Elsevirii, Leiden.

Kendall, M.G. (1956). Studies in the History of Probability and Statistics: II. The Beginning of Probability Calculus. *Biometrika*, *43*, 1-14.