Capítulo 26

La resolución de Montmort (1708, 1713) de los cinco problemas propuestos por Huygens en su tratado (1657)

BASULTO SANTOS, JESÚS
PÉREZ HIDALGO, Mª DOLORES
Universidad de Sevilla

Introducción

Al final del tratado de Huygens, *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, cuya versión en latín fue publicada por primera vez en 1657, encontramos cinco ejercicios propuestos por el autor y no resueltos, aunque en tres de ellos se da la solución.

Los cinco problemas se convirtieron en un desafío para los investigadores de aquella época. Autores como Hudde, Spinoza, Montmort, de Moivre, Jacques Bernoulli y Struyck se ocuparon de ellos de una manera u otra: resolviendo algunos de ellos o resolviéndolos todos. Sus soluciones, interpretaciones (con o sin reemplazamiento) y generalizaciones ejercieron una influencia incontestable en el desarrollo de la nueva disciplina a finales del siglo XVII y principios del XVIII. Ahora bien, este honor lo debe compartir Huygens con Fermat, que fue quién propuso el primero y el tercero, a través de Carcavy, en la carta que éste envió a Huygens el 22 de junio de 1656, y con Pascal, autor del quinto ejercicio propuesto por éste a Fermat, y que Huygens también conoció a través de la carta que Carcavy le envió el 28 de septiembre de ese mismo año (una traducción al español de la correspondencia indirecta entre Pascal y Fermat, con intermediación de Carcavy y con la participación de Huygens, durante los años 1655 y 1656, la encontramos en Basulto Santos, J., Camúñez Ruiz, J. A., 2007).

El propio Huygens, en años posteriores a la publicación de su tratado, fue resolviendo casi todos estos problemas (no se ha encontrado su resolución del tercero, si bien la solución del mismo la conocía el autor como se demuestra en la carta que éste envió a Carcavy el 6 de julio de 1656), a pesar de que sus resoluciones no vieron la luz hasta que no fueron recogidas en las Obras Completas del autor que la Sociedad Holandesa de las Ciencias publicó entre finales del siglo XIX y principios del XX.

Como se ha dicho, uno de los autores que abordaron la resolución de estos problemas fue Montmort en su importante tratado *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazard* (ediciones de 1708 y 1713). Según lo comentado más arriba, Montmort no conocía las resoluciones de Huygens de estos problemas, por lo que sus propias resoluciones pueden considerarse originales y, al disponer en la actualidad de lo escrito por ambos autores, tenemos la posibilidad de analizarlas y compararlas. Ese es el objetivo de este trabajo en el que, problema a problema, recogemos los enunciados bajo los que fueron presentados (curiosamente, hay algunos matices que diferencian los enunciados dados por ambos autores) y las reflexiones y cálculos que cada uno realizó para encontrar sus respectivas soluciones. Todo ello, bajo un lenguaje y notación más actual que la que nuestros autores usaron a mediados del XVII y principios del XVIII.

Problema primero

El primero de estos ejercicios es una generalización de la Proposición última del tratado de Huygens (Proposición XIV), la cuál sí estaba resuelta en el propio tratado. El enunciado bajo el que aparece en dicho tratado es:

A y B juegan juntos con dos dados con la condición siguiente: A habrá ganado si lanza 6 puntos, B si lanza 7. A hará en primer lugar un solo lanzamiento; a continuación B 2 lanzamientos sucesivos; después de nuevo A 2 lanzamientos; y así sucesivamente, hasta que uno u otro haya ganado. Se pide la relación de la chance de A a la de B. Respuesta: como 10355 es a 12276.

En la segunda edición del libro de Montmort, la de 1713, éste aparece como Problema I o Proposición XXXII. El autor lo enuncia así:

Pedro y Pablo juegan juntos con dos dados: He aquí las condiciones del juego. Pedro ganará consiguiendo seis, y Pablo consiguiendo siete. Cada uno de ellos jugará dos lanzamientos sucesivos cuando tenga los dos dados: no obstante, Pedro, que comenzará, jugará con uno por primera vez. Se trata de determinar la suerte de cada uno de estos dos Jugadores, o la esperanza que cada uno tendrá de ganar la partida.

La resolución aportada por Huygens aparece en la carta que envió a Carcavy el 6 de julio de 1656 y es muy parecida a la que da en la Proposición 14. Plantea la periodicidad del juego respecto de los jugadores que participan. Escribe que la misma seguirá la sucesión: ABBA ABBA … Esa periodicidad (y la independencia de los lanzamientos) le lleva a presentar una recurrencia bastante simple.

Tras enumerar los casos favorables a la obtención del "seis" al lanzar dos dados, y los favorables a la obtención del "siete", 5 y 6, respectivamente, llama x al valor del juego para A, o sea, la esperanza de este jugador al inicio del mismo y afirma que, en la situación de haberse realizado ya varios lanzamientos y en el momento en que A ha lanzado sin éxito el primero de los dos lanzamientos de su turno, entonces, antes de efectuar el segundo *"tendrá la misma apariencia de ganar que al inicio de juego"*, o sea, x. Aquí es donde constatamos que Huygens se da cuenta de la periodicidad de este juego (ya había ocurrido en su resolución de la Proposición 14 del tratado). Eso le permite resolver el problema usando solamente las cuatro esperanzas e_1, e_2, e_3 y e_4, que son las valoraciones del juego para el primer jugador en las situaciones respectivas siguientas: al inicio del mismo, cuando se ha realizado la primera partida (cuando A ha lanzado sin éxito y es el turno de B), cuando se ha realizado la segunda partida (cuando B ha lanzado la primera de sus dos veces sin éxito), y cuando se ha realizado la tercera partida (cuando B ha realizado su segundo lanzamiento sin éxito y es ahora el turno de A). Llamando a al total apostado, esas cuatro esperanzas son:

- $e_1 = \frac{5}{36}a + \frac{31}{36}e_2$ (antes de lanzar, el jugador A tiene 5 posibilidades de ganar y 31 de que pase a ser el primer lanzamiento de B).
- $e_2 = \frac{6}{30} \cdot 0 + \frac{30}{36} \cdot e_3 = \frac{30}{36}e_3$ (en el primer lanzamiento de B, el jugador A tiene 6 posibilidades de perder, y 30 de que el jugador B disponga de su segundo lanzamiento).
- $e_3 = \frac{6}{36} \cdot 0 + \frac{30}{36} \cdot e_4 = \frac{30}{36}e_4$ (en el segundo lanzamiento de B, el jugador A tiene 6 posibilidades de perder y 30 de que se encuentre en el primero de sus dos lanzamientos).
- $e_4 = \frac{5}{36}a + \frac{31}{36}e_1$ (en el primero de los dos lanzamientos de A, este jugador tiene 5 posibilidades de ganar y 31 de disponer de un segundo lanzamiento y, por tanto, encontrarse como en el inicio del juego).

Resolviendo para e_1, que es realmente lo que nos interesa (esperanza del jugador A antes de iniciarse el juego), obtenemos $e_1 = \frac{10355}{22631}a$, por lo que la esperanza del segundo jugador en ese instante es la complementaria, o sea, $\frac{12276}{22631}a$. Por tanto, las suertes de ambos jugadores están en la relación 10355:12276, siendo la solución dada por Huygens.

Para este problema, Montmort ofrece una resolución casi idéntica. Está claro, en este caso, que aunque Montmort no conocía la de Huygens, si conocía la solución de su Proposición 14. Usa la expresión "método analítico" a esta forma de resolución, expresión que había sido acuñada ya por Huygens en su tratado. La novedad de Montmort en este problema es la nota que añade al final del mismo, en donde presenta la siguiente generalización, de la que da la solución sin explicación alguna:

El método analítico que se ha empleado aquí es siempre el mejor y el más corto, cuando ocurre que al cabo de un cierto número de lanzamientos los Jugadores se encuentran en el mismo estado en el que ellos estaban anteriormente; pero cuando esto no ocurre, se cae en series infinitas; y para encontrarlas, toda la habilidad consiste en observar bien las condiciones del juego, y en sacar la Ley de la progresión. Por ejemplo, si se supone que Pedro juega en primer lugar un lanzamiento, y Pablo dos lanzamientos, a continuación Pedro dos lanzamientos, y Pablo tres lanzamientos; a continuación Pedro tres lanzamientos, y Pablo cuatro lanzamientos, y así sucesivamente, Pablo jugando siempre un lanzamiento más que Pablo, la suerte de Pedro sería expresada por una serie en la que sería muy difícil obtener la suma, esta serie sería

$$= \frac{b}{f}A + \frac{d \times c^2 \times b}{f^4}A + \frac{d^2 \times c^2 \times b}{f^5}A + \frac{d^3 \times c^3 \times b}{f^9}A + \frac{d^4 \times c^3 \times b}{f^{10}}A +$$

$$\frac{d^3 \times c^5 \times b}{f^{12}}A + \frac{d^8 \times c^9 \times b}{f^{16}}A + \frac{d^7 \times c^9 \times b}{f^{17}}A + \frac{d^8 \times c^9 \times b}{f^{18}}A + \frac{d^9 \times c^9 \times b}{f^{19}}A + \frac{d^{10} \times c^{14} \times b}{f^{25}}A + \ \&$$

así, suponiendo $b = 5$, $c = 30$, $d = 31$, $f = 36$.

Es fácil señalar el orden de la serie, y de continuar hasta el infinito, la expresión de la suerte de Pablo sería la cantidad que le falta a la serie que expresa la suerte de Pedro para valer A.
Si Pedro y Pablo juegan con un dado, según el orden que se acaba de señalar, a que el primero consiga un seis, se tendrá para la expresión de la suerte de Pedro una serie más simple, a saber $1-p+p^3-p^5+p^8-p^{11}+p^{15}-p^{19}+p^{24}-p^{29}+\&$ *así, suponiendo que sea* $p=\frac{1}{6}$.

Problema segundo

Este problema de Huygens tiene la originalidad de introducir por primera vez en la historia de esta disciplina, la distinción entre muestreo con y sin reemplazamiento. Eso ocurre en la discusión que surge entre este autor y su amigo Hudde sobre la resolución de este problema. El problema tuvo el siguiente enunciado para Huygens:

Tres jugadores A, B y C toman 12 fichas de las que 4 son blancas y 8 negras; juegan con esta condición de que ganará el que primero haya, escogiendo a ciegas, sacado una ficha blanca, y que A elegirá el primero, B a continuación, después C, después de nuevo A, y así sucesivamente, por turnos. Se pide la relación entre sus chances.

Para Montmort, que lo presentó en su libro como Problema II, o Proposición XXXIII, el mismo mereció el siguiente enunciado:

Tres Jugadores, Pedro, Pablo y Jacobo juegan juntos y acuerdan que, sacando uno detrás del otro una ficha al azar entre doce, de las que ocho serán negras y cuatro blancas, el que primero extraiga una ficha blanca ganará. He aquí el orden según el cual ellos juegan: Pedro saca el primero, Pablo saca el segundo, y Jacobo el tercero; a continuación, Pedro vuelve a comenzar, y los otros le siguen según su orden, hasta que uno de los Jugadores haya ganado. Se trata de encontrar lo que cada Jugador debe poner en el juego, con el fin de que la partida sea igual.

No es conocido de dónde derivó Huygens este segundo problema. Es probable que fuese inventado por él mismo. Jacques Bernoulli señala en la edición comentada del Tratado de Huygens (en la *Pars Prima* de su *Ars Conjectandi*) que hay tres posibles interpretaciones del problema: (i) cada bola o ficha negra es reemplazada después de la extracción, (ii) las bolas o fichas no son reemplazadas y hay una caja común que incluye inicialmente las doce y (iii) cada jugador tiene su propia caja con las doce bolas o fichas y van extrayendo, cada uno de su caja, por turno y sin reposición. Resulta que Huygens tenía la primera interpretación en mente, como se puede comprobar por la resolución que aparece en el Apéndice II del tratado. La Academia Holandesa de las Ciencias añadió al tratado de Huygens nueve apéndices en su edición del siglo XIX. En ellos se recogen las notas en cuadernos y hojas sueltas, que Huygens fue escribiendo a lo largo de su vida en relación al cálculo en juegos de azar. Esos cálculos y reflexiones sólo vieron la luz cuando fueron publicados en el siglo XIX, formando parte del Tomo XIV de las Obras Completas, por lo que Montmort los desconocía en el momento en que publica las dos ediciones de su tratado.

En su resolución, Huygens supone que las extracciones son con reemplazamiento, dado que a cada uno de ellos asigna cuatro posibilidades en una dirección y ocho en la contraria, o sea, la composición de la caja no se altera tras cada extracción. El orden de las extracciones es ABC ABC... Llama *x*, *y*, *z* a las esperanzas u oportunidades de los jugadores antes de iniciarse el juego (son los valores que se quieren conocer), y llama a a la apuesta. En la primera extracción, si se extrae blanca, el jugador A ganará el juego y si no, el jugador A se convierte en el tercero de la siguiente serie de extracciones, por lo que su oportunidad se convierte en z (esperanza del tercero en el turno de extracciones). Por tanto, A tiene 4 posibilidades de conseguir la apuesta a y 8 de conseguir z, por lo que, según la Proposición 3 de su Tratado (proposición clave en el desarrollo de todo el tratado), el valor del juego para A, al inicio del mismo, es $x = \dfrac{4a + 8z}{12}$.

Consideramos ahora la situación del jugador B también en el momento en que el juego se inicia. Este jugador tiene 4 posibilidades de conseguir 0 (si el jugador A acierta en la primera extracción) y 8 oportunidades de convertirse en el primer jugador de la nueva serie y, por tanto, tener de suerte x. Entonces, $y = \dfrac{0 + 8x}{12}$. Por último, la valoración del juego, al inicio del mismo, para el tercer jugador es: 4 posibilidades de conseguir 0 y 8 de convertirse en el segundo jugador de la serie de extracciones y, por tanto, tener derecho a y. Entonces, $z = \dfrac{0 + 8y}{12}$. Resolviendo: $x = \dfrac{9}{19}a$, $y = \dfrac{6}{19}a$, $z = \dfrac{4}{19}a$, o sea, las ratios de sus suertes son 9:6:4.

En general, si p es la probabilidad de éxito en una extracción (probabilidad que no varía por ser con reemplazamiento) y si $q = 1 - p$, se obtiene:

$$x = \frac{p}{1 - q^3}a, \quad y = \frac{pq}{1 - q^3}a, \quad z = \frac{pq^2}{1 - q^3}a,$$

y las ratios de las suertes son $1 : q : q^2$ (Hald, 1990).

Montmort, como primera resolución, interpreta el problema en el mismo sentido que Huygens y resuelve de forma parecida, pero no igual. Se fija en el tercer jugador, estableciendo y construyendo la suerte del mismo en estas tres circunstancias: Cuando le toca al primero extraer, *S*, cuando le toca al segundo extraer, *y*, y su suerte cuando a él mismo le toca extraer, *z*. Entre estas suertes hay las siguientes relaciones (llama *A* al total del dinero que hay en juego):

- $S = \dfrac{4}{12} \cdot 0 + \dfrac{8}{12} \cdot y = \dfrac{2}{3}y$ (si gana el primer jugador, la suerte del tercero será cero, y si no gana, la suerte del tercero se convierte en la que le corresponde cuando el segundo va a extraer).
- $y = \dfrac{4}{12} \cdot 0 + \dfrac{8}{12} \cdot z = \dfrac{2}{3}z$ (si gana el segundo jugador en su extracción, la suerte del tercero se hace cero, y si no gana, la suerte del tercero se convierte en la que le corresponde cuando a él le toca extraer).
- $z = \dfrac{4}{12} \cdot A + \dfrac{8}{12} \cdot S = \dfrac{1}{3}A + \dfrac{2}{3}S$, (o sea, cuando es el turno de extraer del tercero tiene 4 posibilidades de ganar y, por tanto llevarse el dinero que está en juego, y 8 oportunidades de no ganar y, por tanto, pasar de nuevo a la situación en que le toca extraer al primero, en la que la suerte del tercero era *S*).

Resolviendo en las tres igualdades encuentra $S = \frac{4}{19}A$, lo que expresa la suerte del tercer jugador al inicio del juego, o sea, cuando va a extraer el primero.

A continuación procede de igual forma con el segundo jugador, llamando, *u* a la suerte de este jugador cuando al primero le toca extraer, obteniendo $u = \frac{9}{19}A$. Por último, obtiene la suerte del primer jugador restando a la cantidad total en juego, la suerte de los otros dos jugadores, o sea, realizando $A - \frac{4}{19}A - \frac{9}{19}A = \frac{6}{19}A$. Y concluye:

Por consiguiente, si se quiere que el juego sea de diecinueve escudos, será necesario que Pedro ponga nueve, Pablo seis, y Jacobo cuatro.

A continuación, este autor añade una nota en la que da la solución bajo la segunda interpretación de Bernoulli. En este caso no se detiene a explicar su procedimiento de resolución, aunque si se procede como en el caso anterior, construyendo la esperanza de cada jugador en cada una de las sucesivas extracciones, y teniendo en cuenta que en este caso, al ser sin reemplazamiento, el proceso tiene fin, se obtiene los resultados dados por el autor. Así es como escribe:

Si el sentido del problema es que cada Jugador después de haber sacado una ficha no la vuelve a poner más, se encontrará de la misma manera la suerte de los tres Jugadores, como estos tres números, 77, 53, 35.

Problema tercero

Como ya se ha dicho, este problema fue otro de los propuestos por Fermat a través de Carcavy. Su enunciado es:

A apuesta contra B, que de 40 cartas, donde hay diez de cada color, extraerá 4 de manera que tenga una de cada color. Se encuentra en este caso que la chance de A es a la de B como 1000 es a 8139.

La solución de Huygens, sin explicación alguna, aparece en la carta que éste envió a Carcavy el 6 de julio de 1656. En los apéndices y cartas publicados en sus obras completas, no se ha encontrado la solución de Huygens de este problema.

Montmort intercambió el orden de los problemas 3 y 4 de Huygens. Decidió mantener seguidos los problemas 2 y 4 por tratarse de una temática parecida. El enunciado con el que Montmort presenta este problema, bajo el título de Problema IV o Proposición XXXV es el siguiente:

Pedro apuesta contra Pablo que sacando, con los ojos cerrados, cuatro cartas entre cuarenta, a saber, diez rombos, diez corazones, diez picas y diez tréboles, sacará una de cada clase. Se pide cuál es la suerte de estos dos Jugadores, o lo que ellos deben poner en el juego para apostar con igualdad.

En este problema, Montmort rompe su línea de resolución que, en los anteriores, había sido similar a la de Huygens (lo que este último llamó método analítico). En este caso, Montmort hace uso de un método que encontraba más eficaz y rápido: usando la combinatoria. Comienza por recordar una proposición que había demostrado al principio de su tratado (Proposición VII) cuyo enunciado es el siguiente:

PROPOSICIÓN VII.

Pedro, teniendo entre sus manos un número cualquiera de fichas de todos los colores, blancas, negras, rojas, verdes, & así, apuesta contra Pablo, que sacando al azar un número cualquiera determinado de fichas, él sacará tantas blancas, tantas negras, tantas rojas, tantas verdes, & así. Se pide cuántos azares tiene Pedro para hacer lo que se propone.

SOLUCIÓN.

Es necesario multiplicar el número que expresa de cuántas maneras las fichas blancas que Pedro debe tomar al azar, pueden ser tomadas de forma diferente en el número de fichas blancas propuestas, por el número que expresa de cuántas maneras las fichas negras que Pedro debe tomar al azar, pueden ser tomadas de forma diferente en el número entero de fichas negras propuestas; multiplicar a continuación este producto por el número que expresa de cuántas maneras diferentes las fichas rojas que Pedro se propone extraer, pueden ser tomadas en las fichas rojas propuestas, multiplicar de nuevo ese producto por el número que expresa de cuántas maneras diferentes las fichas verdes que se piden pueden ser tomadas entre todas las verdes, & así, sucesivamente, se tendrá el número buscado.

Esta solución lleva consigo la demostración, y no tiene dificultad alguna; pero como este Teorema será un resultado de un gran uso.

Entonces, Montmort comenta que este problema *no es más que un caso particular de la Proposición VII* y, por lo tanto, la suerte de Pedro es

$$\frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}\cdot\binom{10}{1}}{\binom{40}{4}} = \frac{10^4}{\binom{40}{4}} = \frac{10000}{91390},$$

o sea, las suertes de ambos jugadores están en la relación de 10000 a 81390, con lo que propone una solución muy actual, tal y como hoy día se suele resolver este problema. Entonces añade dos ejemplos más con sus soluciones:

Si se pidiese cuánto hay que apostar que Pablo extrayendo trece cartas al azar en cincuenta y dos, no sacase todas de un color, se encontraría que hay que apostar 158753389899 contra 1.

Si se quiere saber cuánto hay que apostar que Pedro, extrayendo diez cartas al azar entre cuarenta, a saber, un as, un dos, un tres, un cuatro, un cinco, un seis, un siete, un ocho, un nueve y un diez de rombos, tantas de corazones, de picas y de tréboles, él sacará una decena completa, se encontrará que hay que apostar 1048576 contra 846611952, más o menos, como 1 contra 808.

Problema cuarto

Como ya se ha dicho, este problema tiene un contexto similar al segundo y también admite una doble interpretación, entendiendo nuestro autor las extracciones sin reemplazamiento. Su enunciado es:

Se toma, como más arriba, 12 fichas de las que 4 son blancas y 8 negras. A apuesta contra B que entre 7 fichas que él sacará a ciegas, se encontrarán 3. Se pide la relación entre la chance de A y la de B.

La solución de Huygens aparece también en el Apéndice II antes citado. En el mismo, Huygens considera también la modificación propuesta por Hudde en la que el resultado puede ser tres o más fichas blancas. En el segundo apartado de este apéndice Huygens lo enuncia de la siguiente forma:

A apuesta contra B que entre 12 fichas, de las cuales 4 son blancas y 8 negras, él tomará a ciegas 7 fichas, de las cuales 3 serán blancas, y no más. Se pide la relación de la chance de A a la de B. Respuesta: como 35 es a 64.

Vemos que el enunciado es idéntico al cuarto problema. Solamente, a consecuencia de un malentendido que había tenido lugar entre él y Hudde, sobre la interpretación del enunciado, Huygens añadió al mismo las palabras "en niet meer", que indican que para ganar A debe tener 3 fichas blancas "y no más", dado que Hudde entendía el enunciado como "extraer al menos 3 blancas". Huygens supone que las fichas son extraídas una tras otra y comienza por calcular la esperanza o suerte de A, después de la sexta extracción, en los dos únicos casos donde éste puede ganar en la séptima. A continuación considera la situación del juego después de la quinta extracción, y así sucesivamente, para remontarse por fin al inicio del juego. La resolución puede contemplarse de la siguiente forma: En la situación inicial hay 4 blancas y 8 negras. Supongamos el instante en el que se han extraído b blancas y n negras, quedando entonces en la caja $4-b$ blancas y $8-n$ negras (en total quedan $12-b-n$ fichas). Sea $e(b,n)$ el valor de la suerte o esperanza del primer jugador en ese instante. En la siguiente extracción puede salir una ficha blanca (hay $4-b$ posibilidades de que eso ocurra) y pasar así a un juego cuya valoración para el jugador A es $e(b+1,n)$, o puede salir negra (hay $8-n$ oportunidades para ello) y encontrarse entonces en un juego cuya valoración para el primer jugador es $e(b,n+1)$. Aplicando la Proposición 3 del tratado de Huygens:

$$e(b,n)=\frac{(4-b)\cdot e(b+1,n)+(8-n)\cdot e(b,n+1)}{12-b-n}, \text{ donde } 0\le b\le 4 \text{ y } 0\le b+n\le 7.$$

Desde luego, si el jugador A consigue su objetivo (3 blancas y 4 negras) gana la apuesta, o sea, $e(3,4)=a$. Ahora bien, $e(b,7-b)=0$, en cualquier otro caso, pues culminadas las 7 extracciones, el primer jugador sólo gana cuando consigue la extracción (3,4). En la situación "3 blancas y 3 negras" (ha extraído 6 fichas y le falta una por sacar que si es blanca gana), Huygens obtiene para el jugador A: $e(3,3)=\frac{5}{6}a$.

Pues bien, partiendo de esta igualdad y analizando todas las posibilidades favorables a ese jugador, hacia atrás y tras 19 igualdades, Huygens llega a la situación (0,0), o sea, el punto de partida, para el que encuentra $e(0,0)=\frac{35}{99}a$, por lo que concluye que la chance de A es a la de B como 35 es a 64. Es claro, en este caso, que el método analítico Huygens se hace largo y tedioso.

Por último, en el mismo apéndice, Huygens aborda este problema otra vez pero introduciendo en el enunciado la modificación propuesta por Hudde. O sea, el jugador A debe conseguir 3 o más fichas blancas en las 7 extracciones. Por tanto, los resultados que le hacen ganar el juego son (3,4) y (4,3).

Teniendo el precedente del apartado anterior, Huygens simplifica el cálculo reemplazando el problema en cuestión por el "problema complementario". Según éste, el jugador A debe tomar 5 fichas de las que cuatro al menos deben ser negras. Señalemos que no es necesario discutir el caso de 4 fichas de las que 0 son blancas y 4 negras, porque entonces la quinta extracción siempre hará ganar al jugador A. En este caso, tras ocho igualdades, llega a la solución 42 a 57, o 14 a 9.

Este problema es presentado por Montmort en su texto como Problema III o Proposición XXXIV. El enunciado y resolución van como sigue:

Pedro apuesta contra Pablo que cogiendo, con los ojos cerrados, siete fichas entre doce, de las que ocho son negras y cuatro blancas, él cogerá tres blancas y cuatro negras. Se pide cuánto deben apostar Pedro y Pablo para que la apuesta de cada uno esté en la misma proporción que su suerte.

En este caso, Montmort hace uso de nuevo de su Proposición VII, o sea de la combinatoria, y resuelve el problema de una forma sencilla y actual. La suerte del primer jugador es calculada mediante $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{8}{4}}{\binom{12}{7}} = \dfrac{35}{99}$, por lo que la del segundo jugador es $\dfrac{64}{99}$.

Y el autor añade la solución para el caso de tres o más fichas blancas: *Si se quiere que Pedro haya ganado también cuando coja cuatro blancas y tres negras, se tendrá de igual forma, por el art. 20,* $\dfrac{70\times 4+1\times 56}{792}=\dfrac{14}{33}$ *para la suerte de Pedro, y en este caso sería necesario que Pablo ponga en el juego 19 contra 14 de Pedro.* O sea, en este caso calcula

$$\frac{\binom{4}{3}\binom{8}{4}}{\binom{12}{7}}+\frac{\binom{4}{4}\binom{8}{3}}{\binom{12}{7}}.$$

Problema quinto

Éste es el problema propuesto por Pascal ("que juzga más difícil que todos los demás") a Fermat y, a través de Carcavy, a Huygens, en una carta de 28 de septiembre de 1656. Esta carta contenía la solución sin explicación de los dos sabios franceses. La solución de Huygens aparece en su respuesta a Carcavy de 12 de octubre de 1656. El problema es conocido como el de la Ruina del Jugador y el enunciado que aparece al final del Tratado de Huygens es el siguiente:

> *Habiendo tomado cada uno 12 fichas, A y B juegan con 3 dados con esta condición de que a cada tirada de 11 puntos, A debe dar una ficha a B, y que B debe dar una ficha a A en cada tirada de 14 puntos, y que ganará aquel que sea el primero en poseer todas las fichas. Se encuentra en este caso que la chance de A es a la de B como 244140625 es 282429536481.*
>
> La resolución detallada del problema aparece en unas hojas sueltas escritas por Huygens en 1676 y que la edición de sus obras la incluye como Apéndice VI. Queremos señalar que estas hojas sueltas son presentadas como las primeras en la historia que incluyen árboles de probabilidad para la comprensión y demostración de los resultados.

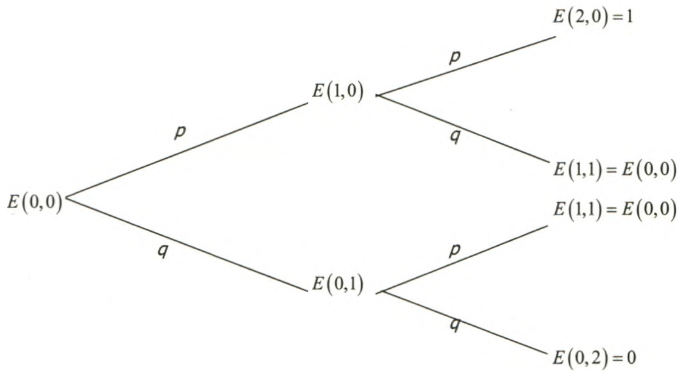
El enunciado tal y como fue presentado inicialmente sería: Sean dos hombres que juegan con tres dados, donde el primer jugador consigue un punto si se lanza 11 y el segundo lo consigue si se lanza 14. Pero en lugar de que los puntos se acumulen en la vía ordinaria, dejamos que un punto sea añadido al tanteo de un jugador sólo si el tanteo de su oponente es cero y, en otro caso, dejamos en su lugar que el punto sea sustraído del tanteo de su oponente. Es como si los puntos opuestos formasen "pareja" y se aniquilasen unos a otros, por lo que el jugador que va detrás siempre tiene cero puntos. El ganador es el primero que alcance 12 puntos. ¿Cuál es la chance de cada jugador?

Esta es una versión libre de la descripción dada por Carcavy y no hay razón para suponerla muy diferente de la que Pascal había propuesto. Cuando Huygens la lee inmediatamente la piensa en términos de que los puntos de los jugadores se acumulan en la vía ordinaria, pero el ganador será el primero que lleve doce puntos de ventaja (en 1656), y cuando él lo plantea en su De ratiociniis in aleae ludo *(en 1657) lo da en términos de que cada jugador arranca con doce puntos, y una ganancia de un jugador supone la transferencia de un punto de su oponente a él mismo, y el ganador total es el que arruina al otro de todos sus puntos. Las tres formas de este problema de Pascal son, desde luego, equivalentes, pero es en la última forma como el problema es conocido como el de la "Ruina del Jugador".*

Entonces, en la formulación de Pascal, los jugadores arrancan con el tanteo (0,0), y el ganador es aquel que primero consigue 12 puntos (teniendo el otro 0 puntos). Pues bien, ésta es también la forma que Huygens usa en su resolución de 1676.

El número de chances para ganar un punto es 15 para A y 27 para B; tomaremos $p=15/42=5/14$ y $q=27/42=9/14$. Supongamos que $E(a,b)$ es la chance que tiene A de ganar cuando este jugador tiene a puntos y B tiene b puntos. El problema es encontrar $E(0,0)$.

Huygens comienza analizando el caso simple en el que el juego se acaba cuando uno de los jugadores llega a 2 puntos. Da una lista de todos los posibles resultados y sus probabilidades en un diagrama de tipo árbol. El diagrama que presenta, con un lenguaje actual, es el siguiente:



Aquí, el total apostado es tomado como 1. Del esquema podemos deducir las igualdades:

$$E(0,0) = p\cdot E(1,0) + q\cdot E(0,1) = = p\left(p\cdot E(2,0) + q\cdot E(1,1)\right) + q\left(p\cdot E(1,1) + q\cdot E(0,2)\right) =$$

$$= p\left(p + q\cdot E(0,0)\right) + q\left(p\cdot E(0,0) + q\cdot 0\right) = = p^2 + 2pq\cdot E(0,0).$$

Teniendo en cuenta que $p+q=1$, podemos despejar $E(0,0)$, obteniendo: $E(0,0) = \dfrac{p^2}{p^2+q^2}$. Por tanto, la esperanza del primero es a la del segundo como p^2 es a q^2.

Después, Huygens estudia el caso en el que el ganador ha de conseguir cuatro puntos de ventaja. Ingeniosamente resuelve considerando sólo uno de cada dos posibles estados del juego, a saber los puntos (4,0), (2,0), (0,0), (0,2) y (0,4), y señala que el árbol de sucesos será similar al primero, salvo que todas las chances son cuadradas. La justificación para omitir los puntos intermedios es, evidentemente, que para pasar de (0,0) a (0,4), por ejemplo, es necesario pasar por (0,2). Huygens no ofrece explicación, más allá de un diagrama, aunque el planteamiento origina tres ecuaciones con la solución $E(0,0) = \dfrac{p^4}{p^4+q^4}$. Entonces, las chances de los dos jugadores están en la relación $p^4 : q^4$.

Finalmente, señala que si es necesaria una ventaja de 8 puntos, aplicando nuevamente el argumento anterior, $E(0,0) = \dfrac{p^8}{p^8+q^8}$, y así.

Si se requiere una ventaja de 3 puntos para ganar, él hace el paso de (0,0) a (1,0) con probabilidad p y después a (3,0) con probabilidad p^2, y de manera similar para las demás ramas del diagrama, lo que le lleva a las ecuaciones

$$E(1,0) = \frac{p^2E(3,0) + q^2E(1,2)}{p^2+q^2} = \frac{p^2 + q^2E(0,1)}{p^2+q^2},$$

$$E(0,1)=\frac{p^2E(2,1)+q^2E(0,3)}{p^2+q^2}=\frac{p^2E(1,0)}{p^2+q^2},$$

$$E(0,0)=p\cdot E(1,0)+q\cdot E(0,1),$$

con la solución $E(0,0)=\frac{p^3}{p^3+q^3}$. De aquí, él generaliza para $\frac{p^6}{p^6+q^6}$.

Los casos considerados hasta aquí requieren la solución de tres ecuaciones. Si es necesaria una ventaja de 5 puntos para ganar, el número de ecuaciones llega a ser considerablemente mayor, y Huygens señala que una solución puede ser obtenida como para $n=3$ pero que tomaría un tiempo mucho mayor. Finalmente, afirma que, en general, la ratio de las esperanzas de A a B es $p^n:q^n$, aunque *"no vemos como concluir en general que las esperanzas de A y B están en la razón de las potencias"*. La respuesta dada al final del problema 5 será entonces $5^{12}:9^{12}$.

El enunciado y resolución de Montmort es el siguiente:

Pedro y Pablo cogen cada uno doce fichas y juegan con tres dados con las condiciones que siguen. Si los dados llevan once, Pablo dará una ficha a Pedro. Si los dados llevan catorce, Pedro dará una ficha a Pablo. Aquél de los dos que primero tenga todas las fichas, ganará. Se pide cuál es la suerte de los dos Jugadores.

Para resolver, en primer lugar Montmort calcula la suerte de cada jugador en cualquier lanzamiento de los tres dados. El número de posibles resultados es $6^3=216$. Los favorables al primer jugador, que debe sumar once puntos entre los tres dados, son 27, y los que favorecen al segundo, que deben sumar catorce, son 15. El resto hasta 216, o sea, 174, no favorecen ni a uno ni a otro. Por tanto, Montmort maneja las fracciones $\frac{27}{216}$, $\frac{15}{216}$ y $\frac{174}{216}$ en la resolución de este problema.

A continuación, el autor define las "suertes" del primer jugador cuando él mantiene las 12 fichas y le ha ganado al contrario 1, o 2, o 3, …, o las 12 al segundo jugador, y al contrario, cuando el contrario mantiene las 12 y él va perdiendo 1, o 2, o 3,…, o las 12. Así, por ejemplo, si

x: suerte del primer jugador cuando él tiene 12 fichas y el segundo también 12,

y: suerte del primer jugador cuando él tiene 12 fichas y el segundo tiene 11,

k: suerte del primer jugador cunado él tiene 11 fichas y el segundo 12, se verifica:

$x=\frac{27}{216}y+\frac{15}{216}k+\frac{174}{216}x$, o sea, $14x=9y+5k$. De esta forma llega a plantear otras 19 igualdades que tras un proceso de sustitución hacia atrás le lleva a (siendo A el dinero total en juego): *Y como consecuencia se encontrará* $x=\frac{9y+5k}{14}=$

$\dfrac{282429536481A + 352487604195x}{987648885496}$, *sustituyendo para y & k sus valores en x, y por fin*

reduciendo se tendrá $x = \dfrac{282429536481}{282673677106}A$, *lo que expresa la suerte de Pedro, y*

$A - x = \dfrac{244140625}{282673677106}$, *lo que expresa la suerte de Pablo.*

Montmort termina este problema añadiendo esta nota en la segunda edición de su texto:

Es a propósito observar que la vía analítica no es aquí, quizás, la mejor, puesto que se puede descubrir de otra forma que las suertes de Pedro y de Pablo son como las doceavas potencias de los números 9 y 5, así como ha sido observado por los señores Bernoulli que me han avisado en sus cartas del 17 de marzo de 1710 y 26 de febrero de 1711, y después por el señor de Moivre en su Tratado De Mensura Sortis, que apareció el año pasado.

Conclusión

Este autor, P. R. de Montmort, en su excelente tratado sobre el cálculo en juegos de azar, incorpora como parte del mismo los cinco problemas propuestos por Huygens casi cincuenta años antes, los resuelve y, como corresponde al proceso natural del crecimiento matemático, introduce generalizaciones de los mismos. En dos de estos problemas utiliza el método más natural y sencillo de resolución, la combinatoria, método actual por otra parte, y en los otros tres usa el de su predecesor, el "método analítico", reconociendo lo farragoso que llega a resultar, sobre todo, en la resolución del último problema.

Bibliografía

BASULTO SANTOS, J., CAMÚÑEZ RUIZ, J. A., ORTEGA IRIZO, F. J., PÉREZ HIDALGO, M. D. (2006). "El problema de los puntos para jugadores con desigual destreza: la solución de Montmort (1713)". Capítulo 2, pag. 13-22. *Historia de la Probabilidad y la Estadística (III)*. Delta Publicaciones. Madrid

BASULTO SANTOS, J., CAMÚÑEZ RUIZ, J. A., (2007). *La geometría del azar.* Nivola, libro y ediciones. Madrid.

CAMÚÑEZ RUIZ, J. A. (2004). *La Probabilidad y la Estadística en el Periodo 1654-1670. Sus Antecedentes en el Renacimiento Italiano*. Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.

DAVID, F. N. (1962) . "Games, Gods and Gambling".Charles Griffin & Co. Ltd., London.

EDWARDS, A.W.F. (1983) "Pascal's Problem: The "Gambler's Ruin" Int. Statist. Re. *51, 73-79.*

FREUDENTHAL, H. (1980). "Huygens' Foundations of Probability".*Historia Matemática*, 7, 113-117.

HALD, A. (1990). *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* John Wiley & Sons. New York.

HUYGENS, C. *Oeuvres Complètes*. 22 volúmenes. Société Hollandaise des Sciences. Nijhoff, La Haye. 1888-1950. Los volúmenes usados aquí son: Vol. I y XIV.

KENDALL, M.G. (1956)."The beginnings of a probability calculus".*Biometrika,* 43, 1-14.

KENDALL, M.G., PLACKETT, R. L. (1977). *Studies in the History of Statistics and Probability. Vol II.* Griffin, London.

MONTMORT, P. R. DE (1713) *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard.* Seconde Edition. Revûe et augmentée de plusieurs Lettre. Quillau, París. Publicado de forma anónima.

REIERSOL, O. (1968). "Notes on some propositions of Huygens in the Calculus of Probability". *Nordisk Matematsk Tidskrift*, 16, 88-91.

SCHNEIDER, I. (1980). "Christiaan Huygens's Contribution to the Development of a Calculus of Probabilities". *Janus* LXVII, 269-279.

TODHUNTER, I. (1865). *A History of the of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Macmillan, London. Reprinted by Chelsea, New York, 1949.