

El libro de los dados de Alfonso X

Su relación con el cálculo de probabilidades

JESÚS BASULTO SANTOS
JOSÉ ANTONIO CAMÚÑEZ RUIZ
Universidad de Sevilla
CÉSAR BORDONS ALBA
I. E. S. Punta de Verde

Introducción

El rey Alfonso X es merecidamente conocido con el sobrenombre de Sabio. Fueron muchas las áreas de conocimiento que de una forma u otra recabaron la atención y el interés del rey. Podemos comenzar recordando su notable aportación literaria, poética y musical; sus trabajos sobre legislación, historiografía y ciencias naturales –en un sentido muy amplio, que incluiría campos que hoy consideraríamos pseudo científicos y mágicos-; y podemos terminar mencionando su interés por los juegos.

Primero el rey Sabio se había interesado principalmente por actividades recreativas que podríamos calificar de atléticas y que tenían una vinculación directa con la necesidad de estar bien preparados para la guerra, función social primordial de reyes, príncipes y nobles en la sociedad medieval. Estos ejercicios se podían hacer en solitario, en compañía e incluso a nivel competitivo. Se trata de caminar, montar a caballo, arrojar lanzas, disparar flechas con un arco apuntando a un blanco a pie o a caballo y cazar. Sabemos que Fernando III disfrutaba oyendo música y que incluso se atrevía a cantar, además era un reconocido jugador de juegos de mesa. Su hijo heredó y desarrolló estas aficiones –además de la de la lectura-, por lo cual no debe sorprendernos que diera cabida en su amplio programa cultural a un libro sobre los juegos.

El Libro del ajedrez, dados y tablas se terminó de escribir en Sevilla en el año 1283, un año antes de la muerte de Alfonso X. Se trata de un manuscrito de 98 folios de pergamino encuadernado en piel. Las hojas son de gran tamaño, de 40 x 28 cm. En la actualidad el original se encuentra en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial, a donde fue llevado en 1591 por Felipe II desde la Capilla Real de Granada. Esta obra es un ejemplo perfecto de la

labor intelectual del Rey Sabio, que consistió fundamentalmente en ser el gran transmisor de la cultura y la sabiduría oriental a la Península Ibérica y desde aquí a todo Occidente.

El Libro del ajedrez, dados y tablas consta de siete partes, separadas por folios en blanco. No debe sorprendernos la utilización de este número tan querido por nuestro rey. Ya hemos hecho referencia al interés real por los asuntos mágicos, y en este campo el número siete tiene una interesante simbología a la que el rey Alfonso aludirá en más de una ocasión. Las siete partes son las siguientes:

1. El libro del ajedrez. (folios 1r a 64r)
2. El libro de los dados. (folios 65r a 71v)
3. El libro de las tablas. (folios 72r a 80r)
4. Ajedrez y tablas decimales. (El grant açedrez) (folios 81r a 85v)
5. Otros juegos. (Açedrez de los quatro tiempos) (folios 87r a 89v)
6. El libro del alquerque. (folios 91r a 93v)
7. Juegos astronómicos. (folios 95r a 97v)

Casi al comienzo del texto se recoge una antigua leyenda situada en la India en torno a la polémica sobre la causalidad de los acontecimientos, que se ilustra comparando las ventajas respectivas de los juegos del ajedrez, los dados y las tablas. El sabio partidario de la uentura argumenta que nada vale el seso, que lo decisivo es la suerte, que llega al hombre para proporcionarle pro o danno, y respalda su razonamiento con el ejemplo del juego de los dados.

“Segunt cuenta en las historias antiguas en India la mayor ouo un Rey que amaua mucho los sabios e tenielos siempre consigo e fazieles mucho amenudo razonar sobre los fechos que nascien de las cosas. E destos auie y tres que tenien sennas razones. El uno dizie que mas ualie seso que uentura. Ca el que uiuie por el seso; fazie sus cosas ordenadamientre e aun que perdiessse; que no auie y culpa. Pues que fazie lo quel conuinie. Ell otro dizie que mas ualie uentura que seso, ca si uentura ouiesse de perder o de ganar; que por ningun seso que ouiesse; non podrie estorcer dello. El tercero dizie que era meior qui pudiesse ueuir tomando delo uno e delo al, ca esto era cordura, ca en el seso quanto meior era; tanto auie y mayor cuydado como se pudiesse fazer complidamientre. E otrossi en la uentura quanto mayor era; que tanto auie y mayor peligro por que no es cosa cierta. Mas la cordura derecha era; tomar del seso aquello que entendiessse omne que mas su pro fuesse, e dela uentura guardarse omne de su danno lo mas que pudiesse e ayudarse della en lo que fuesse su pro.”



Libro del ajedrez, dados y tablas, folio 2v

E desque ouieron dichas sus razones much affincadas; mandoles el Rey quel aduxiesse ende cadauno muestra de prueua daquello que dizien, e dioles plazo qual le demandaron, e ellos fueron se e cataron sus libros, cadauno segunt su razon. E quando llego el plazo, uinieron cada unos antel Rey con su muestra. E el que tenie razon del seso, troxo el acedrex con sus iuegos mostrando que el que mayor seso ouiesse, e estudiessse aperçebudo podrie uencer all otro. E el segundo que tenie la razon dela uentura troxo los dados mostrando que no ualie nada el seso si no la uentura, segunt parescie por la suerte llegando el omne por ella a pro o a danno. El tercero que dizie que era meior tomar delo uno e delo al, troxo el tablero con sus tablas contadas e puestas en sus casas ordenadamientre, e con sus dados, que las mouiessen pora iugar ...” (folios 1v y 2r)

Y concluye, ya en el folio siguiente:

“E por que el acedrex es mas assessegado iuego e onrrando que los dados nin las tablas, fabla en este libro primeramientre del.”

Posteriormente el rey se sentirá obligado a justificar por qué trata de los dados en segundo lugar. No por que los considere en segunda posición en cuanto a interés y merecimiento, sino por una cuestión práctica, ya que los dados son necesarios para jugar a las tablas, entretenimiento que goza de mayor aprobación real. La obra de Alfonso X está siempre planteada con un claro afán didáctico, por lo tanto lo racional es hablar primero de los dados, explicar cómo se fabrican y cómo se juega con ellos, antes de pasar a otros juegos que requieren de su utilización.

“Pues que de los iuegos del açedrex que se iuegan por seso auemos ya hablado lo más complidamientre que pudiemos queremos agora aqui contar de los iuegos de los dados por dos razones. La una por que la contienda de los sabios, segund mostramos en el comienço del libro, fue entre seso e uentura qual era meior. E desto dio cada uno so muestra al rey.

El primero del seso, por los iuegos del açedrex. E el segundo de la auentura: por los dados.

La otra por que maguer las tablas son mayor cosa e mas apersonada que los dados por que ellas non se pueden iogar a menos dellos, conuiene que fablemos dellos primera- mientre.” (Folio 65r)

Recordemos aquí lo que en el Libro de las tablas se dice sobre los dados.

“Los dados a mester por fuerça que ayan las tablas. Ca bien assi como el cuerpo non se podrie mouer sin los pies, assi ellas non se mouerien sin ellos pora fazaer ningun iuego, ca por fuerça derecha segunt los puntos de los dados an ellas de iogar en aquellas casas que son señaladas pora ellas...” (folio 72v)

Otra prueba más de la menor consideración en que se tenía al juego de los dados la encontramos en que en las miniaturas que ilustran el Libro de ajedrez y el Libro de las tablas aparecen con frecuencia mujeres y niños practicándolos, así como personajes reales, ya que socialmente no estaban bien considerados. En el Libro de los dados aparecen mujeres en las miniaturas de los folios 68r y 68v, donde están sirviendo bebidas a los jugadores, y jugando en los folios 69r y 70r.

El Libro de los dados consta de siete folios, del folio 65r al 71v. Catorce páginas en total, doce de ellas enriquecidas con miniaturas alusivas al juego de los dados. En la primera de

ellas tenemos una miniatura donde aparece el rey dictando el texto a un copista que se halla situado a su derecha, mientras que a su izquierda se acumulan cinco personajes, cuatro de los cuales parecen dirigirse al rey para solicitar su intervención en alguno de los muchos problemas que ocasionaba el juego de los dados. Esta primera miniatura (65r), al igual que las que dan comienzo a los libros de ajedrez (1r) y de tablas (72r) tiene un enorme interés para comprender el sistema de trabajo de la corte de Alfonso X y el propio universo mental del rey. Ana Domínguez Rodríguez¹ señaló acertadamente que en estas miniaturas, como en otras similares de otras obras alfonsíes que incluyen ilustraciones donde se representa al rey enfrascado en su labor intelectual, podemos encontrar superpuestos dos elementos: el primero imperial-mayestático, resaltado por los atributos reales (corona, trono, lujosa vestimenta) y el solemne escenario; y el segundo hermético-filosófico, señalado por la postura del rey con el dedo índice de la mano derecha enhiesto (postura filosófica) señalando un libro.



Libro del ajedrez, dados y tablas, folio 65r

Ya desde el lejano año de 1915 Antonio García Solalinde² nos desveló cuál era el sistema de trabajo del equipo del rey Sabio, cuál era la intervención de Alfonso X en la redacción de sus obras. La participación del rey era fundamental: el rey ordenaba, impulsaba y dirigía el trabajo y cuando ya estaba acabado lo corregía. Recordemos lo que el propio rey escribía en la General Estoria:

“El rey faze un libro, non porquel escriba con sus manos, mas porque compone la razones del, e las enmienda e yegua e endereça, e muestra la manera de cómo se deven fazer, e desi escríbelas qí el manda, pero dezimos por esta razon que el faze el libro.”

El sistema de trabajo del libro de los dados seguiría este mismo esquema. El rey se ocuparía de proporcionar todo el material necesario, haciendo que trajeran al equipo de redactores toda la información necesaria en forma de manuscritos o libros sobre el tema. El rey era quien seleccionaba a los autores que iban a formar el equipo de trabajo y asignaba las diversas funciones de cada uno. Elaboraba un boceto de lo que quería que hicieran sus colaboradores y supervisaba todo el trabajo, introduciendo continuamente correcciones. Finalmente el rey tenía que aprobar la versión definitiva.

¹ A. DOMÍNGUEZ, “El libro de los juegos y la miniatura alfonsí”, 45. En la edición facsímil que del Libro del ajedrez, dados y tablas coeditaron en 1987 ediciones Poniente de Madrid y Vincent García Editores, S.A. de Valencia.

² A. GARCÍA SOLALINDE, (1915). Intervención de Alfonso X en la redacción de sus obras, Revista de Filología Española, II, 283-288.

En la segunda miniatura del Libro de los dados (65v) podemos observar el proceso de fabricación de los dados. Hay que volver a llamar la atención sobre la estructura didáctica de la obra alfonsí: primero el rey dictando el libro, en segundo lugar la fabricación de los dados y solo después ya se podrá empezar a hablar de los diversos juegos de dados. Ya en esta segunda miniatura el rey nos advierte de la naturaleza peligrosa del juego de los dados. En la derecha de la ilustración se nos representa a un jugador que acude al taller a comprar unos dados, ha perdido la camisa y los zapatos y además en su cara se refleja su desgracia. En el texto, a la vez que se va explicando cómo han de elaborarse los dados se alerta sobre la existencia de dados “engañosos”:

“E dezimos que han de seer tres figuras quadradas de seys cantos eguales tamanno el uno como el otro en grandez e en egualdad de la quadra, ca ssi en otra manera fuesse no caerie tan bien de una parte como de otra, e serie enganno mas que uentura. E por ende esta es la una de las maneras de enganno como diremos adelante: con que fazen los dados engannosos aquellos que quieren engannar con ellos.

E a de auer en estas seys quadras en cada una dellas: puntos puestos en esta guisa.

En la una seys e en la otra cinco, en la otra quatro, en la otra tres, en la otra dos, e en la otra uno, assi que uengan en cada un dado ueynti un punto, de manera que uengan en los tres dados sessenta e tres puntos. E deuen seer puestos los puntos en esta guisa, so la faz del seys: el as, e so el cinco: el dos, e so el quatro: el tria.

E estos dados pueden seer fechos de fuste, o de piedra, o de huesso, o de todo metal; mas sennaladamiente, son meiores de huesso el mas pesado que fallaren, que de otra cosa ninguna, e mas ygualmiente e mas llanos caen doquier que los echen.” (folios 65r y 65v)



Libro del ajedrez, dados y tablas, folio 66v

El resto de las miniaturas son de gran valor sociológico ya que en ellas se representan diversas escenas relacionadas con el juego de los dados. Ya en la primera de éstas (66r) observamos la presencia de un puñal sobre el tablero de juego, en la siguiente (67r) encontramos a dos jugadores enzarzados en una pelea y al resto de los participantes descamisados. La violencia irá aumentando hasta que nos encontremos en la miniatura que ilustra el folio 70v a dos jugadores dándose puñaladas. Son frecuentes las escenas de apuestas y de empeño de bienes (67v y 69r).

También se describen algunas escenas tranquilas relacionadas con el juego de los dados, como la del folio 68r, donde un músico aparece amenizando con su laúd a los jugadores y una mujer ofrece una copa a uno de los jugadores; en el Libro del ajedrez este gesto tenía un valor simbólico, se ofrecía la copa al jugador que ganaba. Muy interesante resulta la ilustración del

folio 71v, que es el que pone fin al Libro de los dados, en ella observamos a dos grupos de cuatro jugadores, pero lo más destacable es el marco en donde se desarrolla la partida, en el acogedor jardín –con palmeras y naranjos– de una casa acomodada. Desgraciadamente las escenas apacibles son la excepción, parece que este tipo de actividad generaba una gran conflictividad, como podemos corroborar con la lectura del Ordenamiento de la tafurerías, que había mandado redactar el propio Alfonso X unos años antes, en 1276.



Libro del ajedrez, dados y tablas, folio 71v

Resulta altamente interesante constatar que la palabra tafur –actualmente tahúr– comienza a utilizarse en castellano precisamente en estos momentos, en la segunda mitad del siglo XIII. Señala Corominas³ que se trata de una voz común a todas las lenguas romances de Francia y de la Península Ibérica y que parece haber designado primero a los componentes de una tropa auxiliar de las Cruzadas, que se dedicaban al saqueo y al merodeo. Se trataba de una muchedumbre andrajosa y hambrienta que aunque se dedicaba fundamentalmente al merodeo, también atacaba con temible valor, pero que vivía de forma miserable, extendiéndose incluso el rumor de que habían devorado cadáveres sarracenos. El origen del vocablo parece estar en el armenio “taphur”, que significa abandonado, desnudo, vagabundo. La primera utilización del término en España se constata en un documento de 1260 fechado en Sevilla, donde se utiliza como nombre propio, se habla de un tal Pedro Royz Taffur. El término se utilizará repetidamente en la Gran conquista de Ultramar y también lo empleará más adelante Juan Ruiz, con la acepción que ya se había generalizado de jugador vicioso y fullero.

No es el momento de resaltar la gran trascendencia que tuvo la obra legislativa de Alfonso X, baste recordar solamente que es la primera vez que se utiliza la lengua vernácula para estos asuntos; que engloba derecho civil y canónico; que obedece al deseo del rey Sabio de fortalecer el poder real frente a una poderosa y peligrosa nobleza; y que por último –y no menos importante–, proporciona información fundamental a los estudiosos de la sociedad del momento, en nuestro caso a los interesados en el juego.

Centrándonos en la legislación sobre el juego hemos de tener presente que los jugadores estaban especialmente mal considerados por la sociedad en general y por las autoridades, especialmente las eclesiásticas, debido a que frecuentemente los juegos de dados terminaban

³ J. COROMINAS. Diccionario crítico etimológico castellano e hispánico. Editorial Gredos. Madrid, 1980. Tomo V, página 377

con blasfemias que vulneraban el tercero de los mandamientos de la iglesia: no tomar el nombre de Dios en vano⁴. Sabemos, tanto por los códigos legales como por la literatura didáctica de la época que cuando un jugador perdía su partida -y su apuesta- era habitual que desahogase su frustración con insultos a Dios, a la Santa Virgen María y a todos los santos, incluso se han recogido testimonios de jugadores desairados que escupían sobre la cruz.

En el *Espéculo*, que data de mediados de la década de 1250 se contempla que si alguna persona que forma parte del séquito real regenta casas de juego o truca los dados para engañar a sus compañeros de juego será desterrado. También se establece que este tipo de personas no puede comparecer como testigo ante un tribunal, ya que su palabra no tiene valor.

Las *Siete Partidas* (1256-1265) van a dedicar más atención legislativa a los jugadores y a las apuestas, parece como si el juego y los problemas que éste acarrea estuviesen en expansión en la Castilla de esos años. Continúa la incapacitación de los jugadores como testigos, ya que se les equipara a ladrones, bandidos y proxenetes. Se resalta la prohibición del juego a los clérigos, incluso se les prohíbe estar en compañía de jugadores. Se contemplan los delitos de los estafadores que utilizan dados trucados, o de los que aprovechan del jaleo que se crea -o que ellos mismos fingen-, para desplumar a los incautos que se concentran en torno a la partida de dados. Todo un título se dedica al asunto de la blasfemia, que ya hemos comentado que esta muy vinculado a este mundo.

La legislación del *Espéculo* y de las *Siete Partidas* con respecto al juego obedece fundamentalmente a consideraciones de tipo moral y a preocupaciones de seguridad pública, de evitar conflictos. Pero a partir de la revuelta mudéjar (1264-1266) y del reinicio de la guerra con los musulmanes el rey va a modificar su actitud ante el problema del juego, adoptando una política completamente prohibicionista que se justifica por la preocupación real ante la ruina financiera y moral que el juego provocaba en muchas personas. Esta proscripción del juego va reforzada con el establecimiento de durísimas sanciones económicas para los que lo practicasen.

Como ocurrirá en muchos otros casos similares, pronto se puso de manifiesto que resultaba imposible hacer cumplir los buenos deseos reales, el juego era algo muy arraigado en la sociedad y Alfonso X, paulatinamente, va a ir adoptando una política más realista. Pocos años después va a conceder, primero a la ciudad de Sevilla y luego a la de Murcia una carta de privilegios en las que les permite el establecimiento de una casa de juego, regulada por los oficiales del rey y sometida a los correspondientes impuestos. También se permite a los hombres buenos de la ciudad jugar en su propia casa y en cualquier otro lugar, sin ser molestados por ello por la autoridad. Esta última concesión tiene interés de tipo sociológico, para la mentalidad del rey no son lo mismo desde el punto de vista moral un hombre bueno que un hombre del común, estos últimos serían mucho más vulnerables al vicio y necesitarían del proteccionismo paternal real.

⁴ R. A. MACDONALD. Libro de las tahurerías: a special code of law, concerning gambling, drawn up by Maestro Roldán at the command of Alfonso X of Castile. Madison Hispanic Seminary of Medieval Studies, 1995



Libro del ajedrez, dados y tablas, folio 72v

A mediados de la década de los setenta el rey Sabio ha llegado ya al convencimiento de que el problema del juego debe ser afrontado de una manera más comprensiva, además, si se establece un sistema de concesiones de lugares de juego se podrían conseguir unos ingresos para el fisco real, que en esos momentos se encontraba en una situación especialmente delicada. Con estas premisas, Alfonso X encargó a Maestro Roldán la elaboración de un código legal que regulara el juego. Piedra central del nuevo sistema van a ser las tafurerías, lugares que recibían una concesión real para poder practicar en ellos el juego legalmente. Estas tafurerías se van a localizar preferentemente en el ámbito urbano. El encargado de regentar estos nuevos lugares de juegos es denominado en el Ordenamiento de las Tahurerías “tablajero”.

Los 12 juegos del libro de los dados

El Libro de los dados contiene los siguientes doce juegos: de Mayores, de Menores, de Tanto en Uno como en Dos, Triga, juego de Azar, juego de Marlota, juego de Riffa, juego de Par con As, Panquist, juego de Medio Azar, juego de Azar Pujado y juego de Guirguesca.

El juego de Triga es el que va a generar los juegos de Azar, Marlota, Panquist y Guirguesca. En todos se utilizan tres dados excepto el juego de Guirguesca que usa dos. Todos estos juegos dividen las puntuaciones totales de los tres dados en dos conjuntos llamados azar y suerte, que son disjuntos y complementarios. Además se usan los conceptos de soçobra⁵, encuentro y, en el caso de que las suertes repartidas entre los dos jugadores sean distintas, uno de los jugadores lanzará sucesivamente los dados hasta que aparezca la suerte de uno de ellos que le hará ganar.

El juego de Azar es una complicación del juego de Triga, en cambio en juego de Marlota es una simplificación del Triga. El juego de Panquist es una complicación del juego de

⁵ Esta palabra soçobra la traducimos por zozobra que significa en nuestro caso “cara del dado opuesta a la que se considera”. María Moliner, (1977). Diccionario del Uso del Español. Editorial Gredos. Madrid.

Marlota. Por último, el juego de Guirguesca añade, a las apuestas que lo jugadores realizan al comienzo del juego, la posibilidad de hacer un envite en el proceso del juego.

Otros tipos de juegos son el de Tanto en uno como dos, el juego de Riffa y el de Par con As. Estos juegos hacen uso de turnos en los lanzamientos y buscan que gane el jugador que antes lance algún tipo de coincidencia entre los tres dados o que logre una mayor puntuación total al lanzar los tres dados bajo ciertas condiciones.

Por último, los dos juegos de Medio Azar y de Azar Pujado son juegos donde los jugadores pueden ganar dinero cuando, al lanzar los dados, ocurren puntuaciones del conjunto Azar en varias partes del juego. En estos juegos no se busca la probabilidad de que gane el juego uno de los jugadores, como ocurre en los otros juegos anteriores. Lo que se busca es aumentar la cantidad de dinero que se puede ganar. De ahí que evaluaremos estos juegos a partir de calcular la cantidad esperada de dinero que puede ganar uno de los jugadores.

Muchos de los juegos que recoge el manuscrito de Alfonso X aparecerán modificados, pero manteniendo ciertas estructuras, en las obras de los matemáticos que vivieron en los siglos XVI, XVII y XVIII, como Cardano, Galileo, Huygens, Leibniz, Montmort, De Moivre, J. Bernoulli, entre otros.

Otras manuscritos que recogen cálculos con dados, juegos de dados o juegos de dados con tablas son: el Vetula, fechado entre 1266-1269, los Carmina Burana, siglo XIII, que contiene miniaturas como el manuscrito de Alfonso X, los dos grandes trabajos latinos de Bonus Socius (antes de 1300) y Civis Bononiae (1400-1450)⁶ que contienen problemas sobre tablas y problemas con dados relacionados con el cálculo de las probabilidades⁷, por último está el manuscrito denominado "Royal 13 A XVIII-1300" que contiene un texto latino llamado "Ludi ad tabulas".

A partir de aquí vamos comenzar a describir cada uno de los juegos recogidos por el manuscrito de Alfonso X.

El juego de mayores y el de tanto en uno como en dos

El manuscrito recoge el texto siguiente,

El iuego de mayores e de tanto en uno como en dos

"El primer iuego de los que usan los omnes, el que mas puntos echare, que gane; e este iuego que llaman a mayores.

Todas las otras maneras de iuegos que a en ellos son posturas que pusieron los omnes entre ssi que son juegos departidos.

Assi como qui echasse menos puntos que ganasse.

O tanto en ell uno como en los dos, que es en esta manera que si dixiere en el un dado seys, que diga en los otros dos cinco e as o quatro e dos e ternas. E si dixiere en el uno cinco, que diga en los otros dos quatro e as, o tres e dos. E si dixiere en ell uno quatro, que diga en los otros tria e as, o dos dos. E si dixiere en ell otro tres, que diga en los otros

⁶ Murray, H.J.R. (1913). History of Ches. Oxford. Capítulo VII.

⁷ Murray, H.J.R. (1978). A History of Board-Games. Other than Chess. Hacker art Books Inc. New York. Capítulo 6.

dos e as. E si dixiere en ell otro dos, que diga en los otros amas as.” (Folio 65v)



Libro del ajedrez, dados y tablas, folio 66r

En esta miniatura aparecen dos grupos de jugadores jugando con tres dados a los juegos De Mayores y de Tanto en Uno como en Dos. Vemos que la suma de las puntuaciones de estos juegos es $21=15+6$, es decir, un dado con seis puntuaciones del tablero de la izquierda es la soçobra de uno de los dados con una puntuación del tablero de la derecha; igual ocurre con el dado de tres puntuaciones del tablero de la izquierda que es la soçobra del dado de cuatro puntuaciones del tablero de la derecha. Globalmente diremos, más adelante, que la puntuación de los tres dados de la miniatura de la izquierda es la soçobra de la puntuación de los tres dados de la derecha. También se ve un puñal en el tablero de la izquierda.

Veamos a continuación nuestra interpretación de los juegos.

El Libro de los dados recoge, en este primer punto, tres juegos. El primero, que llama De mayores [1], es un juego de dados donde gana el jugador que, al lanzar los dados, saca la puntuación más alta. En este primer juego es fácil de ver que la probabilidad de que gane uno de los jugadores es igual a 0,5. No importa quién comience lanzando los dados. El segundo, que llama De menores [2], es un juego de dados donde gana el jugador que, al lanzar los dados, saca la puntuación más pequeña.

A continuación define los juegos de partido como los que permiten que un jugador haga envites o apuestas de acuerdo con los otros jugadores. En un juego de partido el jugador no busca la mayor puntuación, como en el juego De mayores, ya que también puede ganar el juego si lanza otras puntuaciones. Un ejemplo es el siguiente juego llamado Tanto en uno como en dos [3]

Este tercer juego, que el Libro llama Tanto en uno como en dos, se juega con tres dados. El juego consiste en que uno de los jugadores, que vamos a llamar G1, lanza los tres dados y si ocurre una de las siguientes combinaciones con repetición: 6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-4-1, 5-3-2, 4-3-1, 4-2-2, 3-2-1 ó 1-1-1, gana. Si no logra lanzar una de las anteriores combinaciones, entonces deberá lanzar los tres dados el otro jugador que llamaremos G2. Si G2 tampoco lanza una de las anteriores combinaciones, entonces lanzará los dados el jugador G1 y así sucesivamente hasta que alguno de los jugadores lance una de las combinaciones anteriores, lo que le hará ganar el juego.

Vamos a denominar configuraciones a las combinaciones con repetición. Recogemos en la Tabla 3-1 las probabilidades de cada una de las configuraciones de este juego de Tanto en uno como en dos.

Tabla 3-1

Configuraciones	Probabilidades de cada Configuración
6-5-1, 6-4-2, 5-4-1, 5-3-2, 4-3-1, 3-2-1	6/216
6-3-3, 4-2-2, 2-1-1	3/216

Vemos que el juego finaliza cuando ocurre que los puntos de un dado coinciden con la suma de los puntos de los otros dos dados. También se observa que cuando una configuración tiene puntos distintos, como 6-5-1, entonces ocurre según 6 posibilidades. Por ejemplo, la configuración 6-5-1 puede ocurrir según las siguientes permutaciones con repetición: (6,5,1), (6,1,5), (5, 6,1), (5,1,6), (1,6,5) y (1,5,6).

En este juego de Tanto en uno como en dos, no se sortea qué jugador debe comenzar tirando los tres dados. Veremos que en otros juegos del Libro de los Dados se sortea quién debe comenzar lanzando los dados (en el manuscrito se dice “hacer batalla”). La probabilidad de que gane este juego el jugador G1, en el caso de que lance el primero, es igual a 0,5581. Por lo tanto, el jugador que lanza primero tiene una ventaja de 0,0581 (5,81%), un valor pequeño que justifica el que no se sortee quién debe lanzar primero los tres dados. Vemos también que los jugadores se turnan en el lanzamiento de los dados.

Juegos que hacen uso de turnos podemos encontrarlos en el libro de Huygens (1629-1696) “De Ratiociniis in Ludo Aleae” de 1657, el primer libro de cálculo de probabilidades. Una traducción al castellano de la edición inglesa puede verse en la Tesis Doctoral del profesor Camúñez⁸. En este libro traducido por “El Cálculo en los Juegos de Azar” Huygens resuelve un juego de dados con turnos en su Proposición XIV. Recordemos este juego de Huygens.

Si otro jugador y yo lanzamos por turno 2 dados con la condición de que yo habré ganado lanzando 7 puntos y él cuando haya lanzado 6, y si le dejo lanzar el primero, encontrar la relación de mi chance a la suya. La solución de este juego la deduce Huygens, siendo la relación de las chances de 31 a 30.

Vemos que a pesar que el otro jugador comienza tirando los dados, su probabilidad de ganar es menor, 0,4918, que la mía, 0,5082. Esto último se debe a que, aunque comienza tirando los dos dados, no es suficiente para disminuir la ventaja que yo tengo con mi puntuación 7, con seis casos favorables, frente a la puntuación suya de 6, con cinco casos favorables.

El juego de Triga [4]

El manuscrito recoge el texto siguiente,

Este es el juego de la triga

“Otro iuego ay que llaman triga que se iuega en esta manera, que si omne iuega con otro, e lança primeramente par en los tres dados, o quinze puntos o dizeseys o dizesiete o dizeocho, o la soçobra destes que son seys, cinco e quatro e tres que gana; e estas suertes todas son llamadas trigas e pueden uenir en esta manera. Los dizeocho puntos, senas alterz. Los dizesiete, senas cinco. Los dizeseys senas quatro, e quinas seis. Los quinze senas tria, e seys cinco, e quatro e quinas alterz.”

⁸ “La Probabilidad y la Estadística en el Período 1654-1670. Sus Antecedentes en el Renacimiento Italiano”. Memoria de Tesis Doctoral. 2004. Universidad de Sevilla.

Otra manera de triga

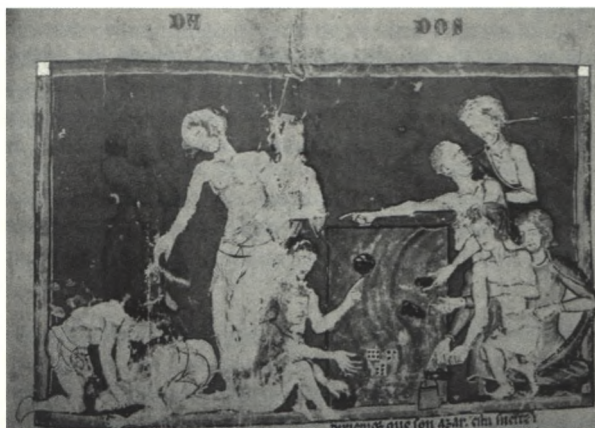
“Otrossi los seys puntos pueden uenir en esta manera quatro amas as o tres dos e as, o dos dos alterz. Los cinco puntos tria e amas as o dos dos as. Los quatro dos e amas as. Los tres amas as alterz. Otrossi par en todos los dados pueden uenir en esta manera, senas alterz, quinas alterz, quadernas alterz, dos alterz, amas as alterz.”

Otra manera de triga

“En otra manera puede omne lançar, en que no avra ninguna destas suertes, que fata aquí dixiemos e sera triga, como si omne tomare pora ssi, siete puntos o ocho o nueve o diez o onze o doze o treze o catorze. E ell otro con qui ell iogare lançare aquella mis/ (66r)ma suerte, esta sera triga e ganara el qui primero tomo suerte. Et ssi por auentura non lançare la suerte del otro e tomare otra pora ssi, conuerna que lance tantas vezes fasta que qual quiere dellos acierte en alguna destas suertes. E lançando la su suerte sera triga e ganara. Et si lançare la del otro, otrossi será triga e perdera.

E estas suertes pueden venir en tantas maneras. Los siete puntos cinco amas as o quatro dos e as o tres e dos dos o ternas as. Los ocho puntos seys amas as, o cinco dos e as, o quatro dos dos, o ternas dos. Los nueve puntos seys dos e as o cinco tria e as, o cinco dos dos, o quadernas as, o quatro tres e dos o ternas alterz. Los diez puntos seys tria e as, o seys dos dos, o cinco quatro e as, o cinco tres e dos, o quadernas dos o ternas quatro. Los onze puntos seys quatro e as, o seys tres e dos, o cinco quatro e dos, o quinas as, o ternas cinco, o quadernas tria. Los doze puntos seys cinco e as, seys quatro e dos, o seys e ternas, o cinco quatro e tria o quinas dos o quadernas alterz. Los treze puntos senas as, o seys quatro e tria, o seys cinco e dos, o quinas tria o quadernas cinco. Los catorze puntos senas dos, o seys cinco e tria, o seys e quadernas, o quinas quatro.

E en tantas maneras como desuso auemos dicho, pueden venir suertes, en los dados, e no en mas.” (Folio 66v)



Libro del ajedrez, dados y tablas, folio 67r

La miniatura asociada a este juego de Triga muestra las consecuencias que el juego tiene sobre la moral de los jugadores. Vemos que uno de los jugadores ha lanzado una puntuación 16 que es un azar, que como sabemos es muy poco probable (seis en 216).

Veamos a continuación nuestra interpretación de este juego de Triga.

Primera parte del juego de Triga [4]

La primera parte del juego de triga comienza en: Este es el juego de la triga. Es un juego donde dos jugadores, que llamaremos G1 y G2, lanzan tres dados. Este juego considera, primero, las puntuaciones, suma de los puntos observados en los tres dados, igual a {15, 16, 17, 18}. Para las quince puntuaciones produce las configuraciones: 6-6-3, 6-5-4 y 5-5-5; para dieciséis puntuaciones: 6-6-4 y 6-5-5; para diecisiete: 6-6-5 y, por último, para dieciocho: 6-6-6. A continuación añade a estas puntuaciones sus soçobras, que son {6, 5, 4, 3}, respectivamente. Al conjunto de las puntuaciones {15, 16, 17, 18, 6, 5, 4, 3} vamos a llamarlo conjunto Azar.

La palabra soçobra significa el complemento de la suma de las puntuaciones observadas al lanzar los tres dados respecto de 21 (donde, $1+2+3+4+5+6=21$). Por ejemplo, la soçobra de 15 es 6 porque $15+6=21$. También, la soçobra de una configuración (combinación con repetición), por ejemplo, 6-6-4, es 1-1-3, es decir, tomamos el complemento respecto de 7 de cada valor numérico de la configuración (por ejemplo, del valor 6, su complemento es $7-6=1$).

Ahora, esta Primera Parte de Triga consiste en que uno de los jugadores, por ejemplo, G1, comienza lanzando los tres dados, y si lanza una puntuación del conjunto Azar gana el juego. Si G1 no lanza una puntuación del conjunto Azar, entonces lanzará una puntuación del complementario del conjunto azar (que veremos en la Segunda Parte del juego) y, a continuación, pasará el turno al jugador, G2, que ganará el juego si lanza una puntuación del conjunto Azar. Si G2 no lanza una puntuación del conjunto Azar, entonces lanzará una puntuación del complementario del conjunto azar (que veremos en la Segunda Parte del juego)

Las configuraciones de los puntos {6, 5, 4, 3} que son las soçobras, respectivamente, de las puntuaciones {15, 16, 17, 18}, son descritas en la parte: Otra manera de triga. Estas configuraciones son: 4-1-1, 3-2-1, 2-2-2 para las seis puntuaciones; 3-1-1, 2-2-1 para las cinco puntuaciones; 2-1-1 para las cuatro puntuaciones y 1-1-1 para las tres puntuaciones.

En el manuscrito se habla de lanzar par en los tres dados, es decir, que al lanzar los dados salgan los mismos puntos en los tres. Notemos que el conjunto Azar recoge las configuraciones: 1-1-1, 2-2-2, 5-5-5 y 6-6-6. En el manuscrito, al hablar de par, incluye la configuración 4-4-4 pero no recoge la configuración 3-3-3. Nuestra opinión es que debemos no considerar, en esta primera parte del Juego de Triga, la configuración 4-4-4 si queremos ser coherente con la otra parte del juego de triga que vemos a continuación.

Segunda parte del juego de Triga [4]

La segunda parte del juego de triga comienza en la frase repetida: Otra manera de triga.

En esta segunda parte, las configuraciones de interés son ahora las que generan las puntuaciones del conjunto {14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7}, que vamos a llamar conjunto Suerte. Las configuraciones correspondientes a este conjunto Suerte son: 6-6-2, 6-5-3, 6-4-4, 5-5-4 para catorce puntuaciones; 6-6-1, 6-5-2, 6-4-3, 5-5-3, 4-4-5 para trece puntuaciones; 6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3, 4-4-4 para doce puntuaciones; 6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3 para once puntuaciones; 6-3-1, 6-2-2, 5-4-1, 5-3-2, 4-4-2, 4-3-3 para diez puntuaciones; 6-2-1, 5-3-1, 5-2-2, 4-4-1, 4-3-2, 3-3-3 para nueve puntuaciones; 6-1-1, 5-2-1, 4-3-1 (la configuración 4-3-1 no es recogida en el manuscrito), 4-2-2, 3-3-2 para ocho puntuaciones; 5-1-1, 4-2-1, 3-3-1, 2-2-3 para siete puntuaciones.

Ahora, si el jugador G1, en su primer lanzamiento, saca una puntuación suerte, ésta será su suerte. A continuación debe lanzar los dados el jugador G2. Si el jugador G2 lanza una puntuación suerte, ésta será su suerte. Si las suertes son iguales, entonces gana el juego el jugador que primero tomó su suerte (que es el que comenzó lanzando los dados). En otro caso, si las suertes lanzadas por los jugadores son diferentes, entonces se lanzarán los tres dados hasta que venga la suerte del jugador, el jugador G1, que le hace ganar, o la suerte del jugador, G2, que sería entonces el ganador.

En esta Segunda Parte del Juego de Triga se afirma al comienzo que “En otra manera puede omne lançar, en que no avra ninguna destas suertes, que fata aqui dixiemos...”, esta frase refuerza lo que anteriormente dijimos sobre quitar la configuración 4-4-4 del Primer Juego de Triga.

Recogemos en la Tabla 4-1 los casos favorables de cada una de las configuraciones de este juego de Triga.

Tabla 4-1

Puntos	Configuraciones						Casos Favorables
18	6-6-6						1
17	6-6-5						3
16	6-6-4	6-5-5					6
15	6-6-3	6-5-4	5-5-5				10
14	6-6-2	6-5-3	6-4-4	5-5-4			15
13	6-6-1	6-5-2	6-4-3	5-5-3	4-4-5		21
12	6-5-1	6-4-2	6-3-3	5-5-2	5-4-3	4-4-4	25
11	6-4-1	6-3-2	5-5-1	5-4-2	5-3-3	4-4-3	27
10	6-3-1	6-2-2	5-4-1	5-3-2	4-4-2	4-3-3	27
9	6-2-1	5-3-1	5-2-2	4-4-1	4-3-2	3-3-3	25
8	6-1-1	5-2-1	4-3-1	4-2-2	3-3-2		21
7	5-1-1	4-2-1	3-3-1	2-2-3			15
6	4-1-1	3-2-1	2-2-2				10
5	3-1-1	2-2-1					6
4	2-1-1						3
3	1-1-1						1

De la Tabla 4-1 podemos ver que las puntuaciones del conjunto Azar (el color azul o sombreado), de la primera parte del Juego de Triga, son menos probables que las puntuaciones del conjunto Suerte (de la Segunda Parte del Juego), lo que explicaría por qué al conjunto {15, 16, 17, 18, 6, 5, 4, 3} se le llama conjunto azar. También vemos que una puntuación y su soçobra tienen la misma probabilidad, con lo que la palabra soçobra recogería el resultado empírico de que las puntuaciones que suman 21 deben aparecer, al lanzar muchas veces los dados, con las mismas frecuencias.

Las configuraciones que hemos recogido en la Tabla 4-1, de los juegos de Triga, son las mismas que las recogidas en el poema de Vetula fechado a mediados del siglo XIII. Una traducción al castellano de la parte de este poema de Vetula puede verse en la Tesis Doctoral de J. A. Camúñez (2004). La notación que usa el poema de Vetula para las Configuraciones

es, por ejemplo, 411, mientras que nosotros hemos utilizado la notación 4-1-1. La traducción de esta parte del poema de Vetula, en latín e inglés, puede verse en Bellhouse (2000).

Este método de representar las combinaciones con repetición, las configuraciones, será retomado por Cardano (1501-1576). Cardano, en su obra *Liber de Ludo Aleae* (1564) utiliza el mismo método que el del *Libro de los Dados*. En el Capítulo Décimo-Tercero (ver la traducción de Marisol De Mora Charles (1989)) escribe: “En dos dados, el doce y el once constan respectivamente de dos 6 y de 6 y 5. El diez de dos 5 y de 6 y 4, pero este último se puede variar de dos maneras, etc. “. (In duabus Aleis duodecim, & vndecim constan eadem ratione qua bis, sex, atque sex, & quinque. Decem autem ex bis quinque, & sex, & quatuor, hoc autem variatur dupliciter, etc.). Vemos que si en la combinación con repetición 6 y 4 considera sus dos permutaciones con repetición, en la combinación 6 y 5, las omite. Esto último, ocurre con las puntuaciones nueve, ocho, siete, etc.

En el caso de tres dados, Cardano calcula, para cada puntuación, el total de sus permutaciones con repetición. Para las puntuaciones cinco y seis, Cardano nos aporta, además, las correspondientes permutaciones con repetición. En cambio, en el poema de Vetuta se calculan las permutaciones con repetición y los totales para cada una de las puntuaciones. Estos totales los recogemos en la última columna de la Tabla 4-2.

Tabla 4-2

3	18	configuraciones de puntos sobre los dados	1	formas de caer (Cadentia)	1
4	17	configuraciones de puntos sobre los dados	1	formas de caer (Cadentia)	3
5	16	configuraciones de puntos sobre los dados	2	formas de caer (Cadentia)	6
6	15	configuraciones de puntos sobre los dados	3	formas de caer (Cadentia)	10
7	14	configuraciones de puntos sobre los dados	4	formas de caer (Cadentia)	15
8	13	configuraciones de puntos sobre los dados	5	formas de caer (Cadentia)	21
9	12	configuraciones de puntos sobre los dados	6	formas de caer (Cadentia)	25
10	11	configuraciones de puntos sobre los dados	6	formas de caer (Cadentia)	27

En esta Tabla 4-2 del poema se recoge en las dos primeras columnas cada puntuación con su soçobra, como, por ejemplo, las puntuaciones 3 y 18. En la última columna se recogen las chances o el total de las permutaciones con repetición para cada una de las puntuaciones, así, por ejemplo, la puntuación 4 ocurre 3 veces frente al total de 216 ya que la puntuación 4 genera las siguientes permutaciones con repetición o chances: (2,1,1), (1,2,1) y (1,1,2). También, en la columna cuatro de la Tabla 4-2, el poema ha recogido el total de configuraciones (combinaciones con repetición) correspondientes a cada una de las puntuaciones, por ejemplo, para la puntuación 4 sólo hay una configuración. Incluimos la palabra latina “cadentia” que se refiere a todas las formas que tienen los dados de salir.

Cardano, en el capítulo XIII de su obra, elabora una tabla que denomina “Consensus sortis in duabus Aleis” donde recoge las combinaciones con repetición para las puntuaciones que resultan al lanzar dos dados y sus correspondientes totales de las permutaciones con repetición. Una siguiente tabla con el título “Suertes y Fritillos para juegos que usan tres dados” (traducción de Marisol de Mora Charles), incluye las columnas primera, segunda y última de la Tabla 4-2.

D. R. Bellhouse (2004) ha propuesto que el libro de Cardano pueda provenir del poema de Vetula, aunque ha señalado algunas diferencias entre ellos. Una de las diferencias que Bellhouse comenta es entre el uso de “sortis” por Cardano, frente al uso de “cadentia”, permutaciones con repetición, en el poema de Vetula. Que Cardano use “sortis”, al igual que el uso de “suerte” en el Libro de Alfonso X, nos lleva a inclinarnos a que el Libro de Cardano pueda tener también relación con el Libro de los Dados.

Veamos a continuación que la probabilidad de que gane el juego el jugador G1, que comienza lanzando los dados, es igual a 0,5604. Para llegar a esta probabilidad debemos recordar que el jugador G1 puede ganar en los siguientes lanzamientos: (1) Gana si lanza una puntuación azar en el primer lanzamiento; (2) Gana si lanza una puntuación suerte en su primer lanzamiento y el jugador G2 lanza, en su primer lanzamiento (segundo lanzamiento del juego), la misma suerte; (3) Si las suertes repartidas entre los dos jugadores son distintas, gana el jugador G1 si al lanzar los tres dados sucesivamente sale antes la suerte de G1.

Primero, la probabilidad de que G1 gane el juego cuando saca en su primer lanzamiento una puntuación azar es 0,185. Segundo, debemos calcular las probabilidades de que G1 lance una puntuación suerte y a continuación G2 lance otra puntuación suerte, que puede ser la misma. Estas probabilidades son el producto de las probabilidades de cada una de las suertes, por ejemplo, si la suerte de G1 es 8 y la de G2 7, entonces la probabilidad de que ocurran ambas suertes es,

$$P_r[8,7] = \frac{CF(8) * CF(7)}{216 * 216} = \frac{21 * 15}{46656} = 0,06751. [1]$$

Con esta fórmula podemos calcular la probabilidad de que gane este juego de Triga el jugador G1 cuando las suertes son iguales, sumando las probabilidades para las suertes idénticas. Aplicando la fórmula [1] obtenemos una probabilidad de 0,0866.

Por último, el jugador G1 puede ganar el juego cuando las suertes repartidas son distintas. Ahora calculamos la probabilidad, condicionada a cada par de suertes distintas de cada jugador, de que al lanzar los dados sucesivamente llegue primero la suerte del jugador G1 antes que la del jugador G2. Una fórmula de estas probabilidades para cada par de suertes distintas es la siguiente,

$$P_r[S(G_1)|S(G_1),S(G_2)] = \frac{CF(S(G_1))}{CF(S(G_1)) + CF(S(G_2))}, [2]$$

donde $S(G_1)$ y $S(G_2)$ son las suertes de G1 y G2 respectivamente y $CF(S(G_1))$ y $CF(S(G_2))$ son los casos favorables de las suertes de G1 y G2, respectivamente. Por ejemplo, para las suertes 8 y 7, de G1 y G2, respectivamente, la fórmula [2] vale $21/(21+15)=0,58333$.

Con las fórmulas [1] y [2] podemos calcular la probabilidad de que gane el juego de Triga cuando las suertes son distintas, así un cálculo laborioso nos lleva a una probabilidad igual a 0,28867.

Si sumamos las tres probabilidades, obtenemos el valor de 0,5604. Vemos que el jugador que comienza lanzando los dados tiene una cierta ventaja, frente al otro jugador, de ganar este juego de Triga. Esta ventaja viene de que el jugador G1 gana el juego cuando saca, en el primer lanzamiento, una puntuación azar o si el jugador G2 lanza la misma suerte del jugador G1. Si modificamos este juego de Triga, haciendo que gane el jugador G2 cuando las suertes repartidas son iguales, un cálculo directo nos lleva a que la probabilidad de que G1 gane este

juego de Triga es ahora 0,4738, una probabilidad que favorece al jugador G2. Otra alternativa sería introducir turnos cuando las suertes repartidas son distintas y además que comience lanzando los dados el jugador G2, en este caso la probabilidad de ganar este juego de Triga el jugador G1 es 0,53569.

Si hacemos los cálculos anteriores bajo el supuesto de que las combinaciones con repetición, las configuraciones, son equiprobables, obtenemos que el jugador G1 tiene ahora una probabilidad de 0,5672 de ganar, que está próxima a la verdadera, 0,5604. Suponer que las configuraciones son equiprobables puede verse en varios manuscritos sobre juegos de azar de Leibniz (Mora Charles, 1992) y en el libro de Cotton (1674). Probabilidades tan cercanas no ayudarían a distinguir empíricamente entre la hipótesis verdadera, de las permutaciones con repetición, frente a la falsa, de las combinaciones con repetición. Sólo un análisis combinatorio a la manera del poema de Vetula o de Galileo justificará la hipótesis de las permutaciones con repetición.

El juego de Azar [5]

El manuscrito recoge el texto siguiente,

El iuego que llaman azar.

“Otra manera ay de iuego de dados que llaman azar que se iuega en esta guisa. El qui primero ouiere de lançar los dados si lançare xv. puntos o dizeseys o dizesiete o dizeocho, o las soçobras destas suertes, que son seys o cinco o quatro o tres: gana. E qual quiere destas suertes en qual quier manera que uengan segundo los otros iuegos que desuso dixiemos es llamado azar.

E si por auentura no lança ninguno destes azares primeramientre, e da all otro por suerte una daquellas que son de seys puntos a arriba o de quinze ayuso, en qual quiere manera que pueda uenir, segundo en los otros iuegos dixiemos que vinién. E depues destas lançare alguna de las suertes que aqui dixiemos que son azar, esta suerte sera llamada, reazar, e perdera aquel que primero lançare. E otrossi si por auentura no lançare esta suerte, que se torna en reazar, e tomare pora si una de las otras suertes que son de seys puntos a arriba o de quinze ayuso en qual quiere manera que uenga. Conuerna que lancen tantas uegadas fasta que uenga una destas suertes o la suya por que gana, o la dell otro por que pierde, saluo ende si tomare aquella misma suerte que dio all otro: que serie llamada encuentro. E conuernie que tornassen a alañar como de cabo. E como quier que uiniesse alguna de las suertes que son llamadas azar o reazar, e entre tanto que uinie una daquellas que amos auien tomado pora ssi: non ganarie ninguno dellos por ella nin perderie fasta que se partiesse por las suertes, assi como desuso dize.” (Folio 67r)

Veamos a continuación nuestra interpretación de este juego de Azar.

Llamaremos G1 al jugador que lanza los tres dados y al otro G2. Si en el primer lanzamiento sale una puntuación azar, es decir, {3,4,5,6,18,17,16,15}, entonces G1 gana el juego (el total apostado); si sale la puntuación que llama suerte, es decir, {7,8,9,10,14,13,12,11}, entonces le corresponde al jugador G2 esta puntuación suerte (por ejemplo, si salen 7 puntos en este primer lanzamiento, entonces la suerte de G2 es de 7 puntos).

En el segundo lanzamiento puede salir una puntuación azar, lo que hace perder al jugador G1, o una puntuación suerte, por ejemplo, 14 puntos, entonces esta puntuación suerte le corresponderá al jugador G1.

Si las suertes repartidas, por ejemplo, 7 puntos de G1 y 14 puntos de G2, son distintas, como ocurre en este ejemplo, entonces el jugador G1 deberá lanzar los tres dados hasta que venga la suerte de G1, que le hace ganar, o la suerte de G2, que hace perder a G1 y ganar a G2. Si ocurre una puntuación azar, esto no hace ganar o perder a los jugadores. Por último, cuando las suertes repartidas son iguales (se dice que hay “encuentro”), entonces el juego debe comenzar de nuevo.

El este juego se llama rezazar a la puntuación azar que sale en el segundo lanzamiento. La palabra rezar no se puede interpretar como “que vuelve a salir otra vez la puntuación azar” porque si el jugador G1 ha sacado una puntuación azar en segundo lanzamiento, que le hace perder el juego, necesariamente no debe haber salido una puntuación azar en lanzamiento primero.

La diferencia entre los juegos de Azar y Triga está en la solución que se da cuando ocurre encuentro, ya que si en el juego de Triga se hace ganar al jugador que comienza lanzando los dados, en este juego de Azar se propone que el juego comience de nuevo, lo que hace aumentar la duración del juego.

En la Ley XL, del Ordenamiento de la Tahurerías, se habla de este juego de Azar, diciendo que se trata de un juego de “paradas”. La palabra “paradas” recoge las distintas apuestas que los jugadores realizaban al comienzo o a lo largo del juego.

En este juego de Azar, ambos jugadores han apostado una misma cantidad antes de comenzar los lanzamientos de los tres dados. En la Ley se habla de que los jugadores apostaban seis maravedís cada uno. En cambio cuando uno de los jugadores hace un envite, como veremos en el juego de guirguesca, la Ley habla de apostar seis o cinco maravedís (estas apuestas serían hechas en las Casas de Juegos Reales).

La probabilidad de que gane este juego de Azar el jugador G1 es 0,5187 (Basulto et al, 2006). Al estar esta probabilidad cercana a 0,5, explicaría por qué en este juego no se sortea quién debe lanzar los dados (en el manuscrito, “hacer batalla”). En nuestro trabajo estudiamos la relación que tiene este juego de Azar con los juegos de Azar de los autores clásicos de la Historia del Cálculo de Probabilidades, como Pierre Rémond de Montmort (1714), Abraham de Moivre (1718) y Jame Bernoulli (1713).

Entre 1613 y 1623 Galileo escribió, poco antes de llegar a Florencia, un trabajo con el título: *Sopra le Scorpette dei Dadi* (Sobre un descubrimiento concerniente a los dados) cuya traducción al castellano puede verse en la Tesis Doctoral del profesor J. A. Camúñez. Este trabajo fue publicado en 1718, cuando aparecen las obras completas de Galileo. El trabajo que realiza Galileo fue ordenado por el gran duque de la Toscana. En palabras de Galileo: “Ahora yo, para complacer a quien me ha pedido que muestre lo que se me ocurra sobre tal problema, expondré mis ideas, con la esperanza no sólo de solucionar este problema, sino también de abrir el camino hacia una comprensión exacta de las razones por las que todos los detalles del juego han estado dispuestos y ajustados con gran cuidado y juicio”. Galileo, que va directamente a calcular las probabilidades de obtener la suma de las puntuaciones que resultan al lanzar tres dados, afirma: “El hecho de que ciertos números de un juego de dados sean más ventajosos que otros tiene una razón muy obvia, que es, que algunos se consiguen más fácilmente y con más frecuencia que otros, lo cual depende de su capacidad de ser compuestos de una mayor variedad de números”. Una vez calculados, en una tabla, las

chances asociadas a cada una de las posibles sumas, Galileo termina su trabajo con la siguientes palabras: “Y con esta tabla, cualquiera que entienda el juego puede medir muy ajustadamente todas las ventajas, por pequeñas que puedan ser, del *zara*, del *incontri*, y de alguna otra regla especial y condición observada en este juego”. Vemos que se trataría de un juego de Azar, donde la palabra italiana *zara* es nuestra palabra *azar* y la palabra italiana “*incontri*” corresponde a “encuentro”.

El juego de Marlota [6]

El manuscrito recoge el texto siguiente,

Este es el iuego de marlota.

“Otro iuego ay de dados que llaman marlota en que no a azar nin reazar nin triga.

E iuegasse por suerte partida desta guisa. El que lançare los dados a de dar suerte al otro con que iogare. E las suertes que puede dar o tomar pora ssi a este iuego son estas siete o ocho o nueve, o diez o onze o doze o treze o catorze, en qual quiere manera que uengan segundo en los otros juegos dixiemos que pueden uenir, e si lançare de catorze a arriba o de siete ayuso, no es suerte pora al uno ni pora al otro ante conuerna que lance tantas ueces fasta que de suerte destas sobredichas a aquel con que iogare, e tome otra pora ssi, e destas suertes a de seer la primera daquel con que iogare, e la otra suya. E depues que las suertes fueren partidas en esta guisa, a de lançar tanto fasta que uenga la suya o la del otro, e assi lançando la suya gana e lançando la dell otro pierde.” (Folio 67v)

Veamos a continuación nuestra interpretación de este juego de Marlota.

Este es un juego donde el jugador que lanza los tres dados debe lanzarlos hasta que salga una puntuación del conjunto suerte $\{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$, por ejemplo, 7 puntos. Esta puntuación suerte será del jugador G2. A continuación el jugador G1 seguirá lanzando los tres dados hasta que salga una suerte “distinta” (en el manuscrito se habla de que “tome otra”) de la suerte dada a G2, por ejemplo 13. Esta última suerte será la del jugador G1. Con estas suertes repartidas, el jugador lanzara sucesivamente los tres dados hasta que venga la suerte de G1, que le hace ganar, o que venga la suerte de G2, que le hace perder (ganando el jugador G2).

En este juego no se habla de “encuentro” porque se exige que las suertes repartidas sean distintas, así el juego no se repite y se evita entrar en un juego “infinito” como en el juego anterior de Azar. Este hecho de que finalice el juego cuando ocurre “encuentro” es lo que distingue a este juego de Marlota del juego de Azar.

También vemos que en este juego de Marlota se han eliminado las puntuaciones de azar y reazar, lo que evita que el juego termine pronto porque salga una puntuación azar en el primer lanzamiento, o que salga reazar en el segundo lanzamiento, como en los juegos de Triga y Azar. Por lo tanto queda explicado que el manuscrito afirme: “Otro iuego ay de dados que llaman marlota en que no a azar nin reazar nin triga”.

En la Ley XL, del Ordenamiento de la Tahurerías, se habla de este juego de Marlota, diciendo que se trata de un juego de “paradas”. También llama a este juego “marveta”. Este nuevo nombre para el juego de marlota puede ser un error de los que copiaron estas Leyes.

Veamos ahora las probabilidades asociadas a las suertes repartidas entre los jugadores G1 y G2. Las probabilidades que tiene de ganar el jugador G1, una vez se han repartido las suertes son calculadas por la fórmula [2].

Si queremos conocer la probabilidad de que el jugador G1 gane este juego antes de haber lanzado las suertes, es decir, desde el comienzo, necesitamos dar una interpretación de la primera parte de este juego.

Recogemos en la Tabla 6-1 las puntuaciones suertes y, para cada una de ellas, el total de permutaciones con repetición que genera cada puntuación suerte.

Tabla 6-1

Puntuaciones Suertes	7	8	9	10	11	12	13	14	Total
Frecuencias	15	21	25	27	27	25	21	15	176

Si ahora consideramos una urna que contiene las puntuaciones surtes, {7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}, repetidas según las frecuencias absolutas de la Tabla 6-1, entonces podemos interpretar la parte primera de este juego de Marlota de la siguiente forma: el jugador G1 debe sacar dos números sin reposición de esta supuesta urna: 1) sacará un número, por ejemplo, un 7, que será la suerte del jugador G2, y 2) quitará todos los números repetidos del número que haya sacado, por ejemplo, si ha salido un 7 quitará los 15 setes de la urna, y a continuación sacará otro número, por ejemplo, la puntuación 8, que será su suerte. Ahora la probabilidad de que ocurran las suertes 7 y 8 es,

$$P_r[7,8] = \frac{CF(7) * CF(8)}{176 * (176 - CF(7))} = \frac{15 * 21}{176 * (176 - 15)} = 0,01111. [3]$$

A partir de las fórmulas [2], que usamos en el juego de Triga, y [3] obtenemos que el jugador G1 tiene una probabilidad de 0,4948 de ganar este juego de Marlota. Al estar esta última probabilidad cercana a 0.5 explica por qué no se hace “batalla” en este juego. Si hacemos los cálculos anteriores bajo el supuesto de que las combinaciones con repetición, las configuraciones, son equiprobables, la probabilidad de ganar es 0,4990, un valor muy próximo al verdadero, 0,4948.

De nuestro trabajo: Juegos de azar, guirguesca y marlota del Libro de los Dados del Alfonso X el Sabio (Basulto et al, 2007), puede verse la relación que tiene este juego de Marlota con los juegos de Azar de los autores como Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) y Abraham de Moivre (1667-1754).

El juego de Riffa [7]

El manuscrito recoge el texto siguiente,

Este es el iuego de la Riffa.

“Otra manera de iuego ay: que llaman Riffa que se iuega en esta guisa. El que primero lançare los dados deuelos echar tantas uegadas: fata que lançe par en los dos, desi deue lançar ell otro. Entonce an se de contar los puntos deste dado tercero con los puntos de

los otros dos dados primeros. E si ell otro que iogare con ell lançando los dados en esta misma guisa echare mas puntos: gana, e si tantos manna, e si menos pierde.” (folio 68r)



Libro del ajedrez, dados y tablas, folio 69v

La miniatura muestra a dos jugadores jugando al juego de Riffa, donde uno de ellos está medio desnudo; otros tres jugadores, también medio desnudos, beben agua suministrada por dos mujeres.

Veamos a continuación nuestra interpretación de este juego de Riffa.

En este juego dos jugadores juegan con tres dados de la siguiente forma. El jugador G1 comienza lanzando dos dados hasta que logra sacar la misma puntuación en los dados. A continuación toma otro dado y lo lanza una vez, sumando la puntuación de este último dado con la suma de las puntuaciones de los primeros dados. El jugador G2 lanza, al igual que el jugador G1, primero dos dados hasta sacar par y después lanza un dado, anotando la suma de sus puntuaciones. Gana el juego el que consigue la mayor puntuación. Puede ocurrir que los dos jugadores obtenga la misma suma de puntuaciones, ocurra un empate, con lo que no hay ganador ni perdedor y se deberá comenzar de nuevo el juego (esto no se dice en el texto).

Este juego de Riffa equivale a sacar dos números con reposición, de una urna que contiene las puntuaciones {2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18}, donde las frecuencias de estas puntuaciones son las recogidas en la Tabla 7-1.

Tabla 7-1

Valores	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Total
Frecuencias	1	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	1	1	36

Ahora, el juego de Riffa consiste en sacar dos números con reposición de la urna tal que si el primer valor es mayor que el segundo, gana el juego G1; si ocurre al revés, gana G2 y si coinciden, empatan. Por cálculo directo encontramos que la probabilidad de ganar el jugador G1 es la misma que la del jugador G2, igual a 0,46451. La probabilidad de que empaten es igual a 0,07098. Si los jugadores cuando empatan no retiran sus apuestas y vuelven a sacar dos nuevos números de la urna hasta que alguno de ellos gane el juego, es fácil de probar que la probabilidad de que el jugador G1 gane el juego es 0,5. Este último resultado explica por qué en este juego no se sortea quién debe comenzar lanzando los dados.

El considerar este juego de Riffa como sacar dos números de una urna cuya composición es la que recogemos en la Tabla 7-1, sirve para ilustrar un muestreo aleatorio simple, con reposición, de tamaño dos. Como sabemos, este tipo de muestreo genera dos variables aleatorias que son independientes e idénticamente distribuidas, y el juego de Riffa pide que calculemos la probabilidad de que una de las variables tome un valor mayor que el valor tomado por la otra.

El juego de Par con As [8]

El manuscrito recoge el texto siguiente,

Este iuego llaman par con as.

“Otro iuego a y que llaman par con as e iuegasse desta guisa. El que uenciere la batalla iogara primero. Et si echare par en los dos dados e as en ell otro: gana. Et si no lançare ell otro, desta guisa iogaran; fasta que lance ell uno, e el que primero lo echare: ganara.” (Folio 68v)

Veamos a continuación nuestra interpretación de este juego de Par con As.

Antes de entrar en el juego se debe sortear quién comienza lanzando los tres dados. Vamos a suponer que la “batalla” la ha ganado el jugador G1 y, así, este jugador comienza lanzando los tres dados.

El jugador G1 lanza primero los tres dados, si saca “par” en dos dados y as en el otro, gana el juego. Las configuraciones que hacen ganar este juego son: 1-1-1, 1-2-2, 1-3-3, 1-4-4, 1-5-5 ó 1-6-6. Si G1 no saca una de estas configuraciones, pasa el turno al otro jugador, G2, que lanzará los tres dados buscando sacar una de la configuraciones anteriores. De esta manera se irán turnando hasta que alguno de los jugadores logre una de las configuraciones anteriores, ganando entonces el juego.

Recogemos en la Tabla 8-1 las probabilidades de cada una de las configuraciones de este juego de Par con As.

Tabla 8-1

Configuraciones	Probabilidades de cada Configuración
1-2-2, 1-3-3, 1-4-4, 1-5-5, 1-6-6	3/216
1-1-1	1/216

La probabilidad de que gane el jugador G1, en el caso de que lance el primero, es igual a 0,5192. Por lo tanto, el jugador que lanza primero tiene una ventaja de 0,0192 (1,92%). Cómo en este juego se sortea quién debe comenzar lanzando los dados, si el juego se repite muchas veces, el número de partidas ganadas por G1 se igualará al de partidas ganadas por G2.

Un juego próximo a este Juego de Par con As es el propuesto por el matemático Juan Caramuel (1606-1682). En su obra de Kybeia, que es un tipo de Combinatoria de dados que examina con rigor el juego de dados y los juegos de azar, Caramuel estudia el juego que los españoles llaman Pasa-diez en su Artículo IV (Una traducción de la Kybeia puede verse en la Tesis Doctoral del profesor Camúñez).

Este juego de Pasa-diez consiste en que uno de los jugadores debe lanzar tres dados y el restos de los jugadores pueden hacer apuesta, envidar. Antes de comenzar este juego, los

jugadores deben de sortear quién tirará los dados. El juego consiste en lanzar los tres dados y ver si hay dos dados que sacan la misma puntuación; en otro caso se debe volver a lanzar los dados hasta sacar par en dos dados. Si hay dos dados con igual puntuación, se suman todas las puntuaciones de los tres dados, y si la suma supera diez puntos, gana todo lo apostado el jugador que lanza los dados, si es igual o está por debajo de diez pierde, debiendo abonar todo lo apostado. Caramuel prueba que este juego es justo porque la probabilidad de que gane el juego el jugador que lanza los dados es igual a 0,5. Se entiende que Caramuel hace esta afirmación sin considerar que, si se repite el juego muchas veces, es de esperar que cualquier jugador, el que lanza los dados o el resto de los jugadores, gane igual número de partidas porque se sortea quién debe lanzar los dados.



Libro del ajedrez, dados y tablas, folio 69r

En esta miniatura del juego Par con As, vemos que se juega en una casa noble entre señoras y con observadores que son caballeros. Los dados muestran la configuración 3-1-3, que muestra dos dados a la par, con los mismos puntos, 3-3, y el otro dado ha generado el punto 1, es decir, un as.

El juego de Panquist [9]

El manuscrito recoge el texto siguiente,

Este iuego llaman Panquist.

“Otra manera ay de iuego que llaman panquist que se iuega en esta guisa: el que uenciere la batalla lançara primero, e ell otro ha de parar quatro paradas una ante: otra, e el que lançare dara la primera suerte all otro, e la segunda tomara pora.

E las suertes que se pueden dar son de siete puntos fata catorce, el que ouiere siete puntos por suerte si echare cinco amas as, o quatro dos e as: leuara las dos primeras, e si echare dos dos e tria leuara las tres. E si echare ternas as: leuara las quatro. E a esta suerte postrema llaman panquist.

Otrossi el que (folio 69r) / ouiere ocho puntos por suerte, si lançare cinco dos e as leuara la primera. E si echare quatro tria e as, leuara las dos. E si lançare seys a amas as, o dos dos e quatro: leuara las tres. E si echare ternas dos leuara las quatro. E a esta suerte postrema llaman panquist.

Otrossi el que ouiere nueue puntos por suerte, si lançare seys dos e as, o cinco tria las: leuara la primera. E si lançare quatro tres e dos: leuara las dos. E si echare dos dos o cinco o ternas alterz: leuara las tres. E si lançare quadernas as, leuara las quatro, e esta suerte postremera llaman panquist.

Otrossi el que ouiere diez puntos e lançare cinco quatro e as o cinco tres e dos: leuara la primera. E si echare seys tria las leuara las dos. E si lançare dos dos e seys, o ternas quatro: leuara las tres. E si echare quadernas dos: leuara las quatro, e a esta suerte postremera llaman panquist.

Otrossi el que ouiere onze puntos, por suerte, e lançare seys tres e dos o cinco quatro e dos: leuara la primera. E si echare seys quatro e as, leuara las dos. E si lançare quinas as o quadernas tria, leuara las tres. E si lançare ternas .v. leuara las quatro, e esta suerte postremera llaman panquist.

Otrossi el que ouiere doze puntos, si lançare seys cinco e as, o seys quatro e dos leuara la primera. E si echare cinco quatro e tria leuara las dos. E si lançare quinas dos o quadernas alterz leuara las tres. E si echare ternas seys leuara las quatro, e a este suerte postremera llaman panquist.

Otrossi el que ouiere treze puntos, e lançare seys cinco e dos: leuara la primera, e si echare seys quatro e tria: leuara las dos. E si lançare senas as, o quinas tria, leuara las tres. E si lançare quadernas cinco leuara las quatro e a este suerte postremera llaman panquist.

Otrossi el que ouiere catorze puntos e lançare seys cinco e tria, leuara las dos. E si echare senas dos o quinas quatro, leuara las tres. E si lançare quadernas seys leuara las quatro, e a esta suerte postremera llaman panquist.

E estas son las suertes por que gana, tan bien el que para como el que lança los dados al que primero uiene su suerte.” (Folio 69v)

Veamos a continuación nuestra interpretación de este juego de Panquist.

En este juego juegan dos jugadores y el que gana la “batalla” debe comenzar lanzando tres dados. Si suponemos que el jugador que lanza es G1, éste deberá lanzarlos hasta obtener una puntuación del conjunto de suertes {7,8,9,10,11,12,13,14}, que se la dará al otro jugador, G2. A continuación, buscaremos otra puntuación distinta del conjunto de suertes que se la quedará para él. En el manuscrito no se habla de que pueda ocurrir “encuentro” como en otros juegos, por lo tanto interpretamos este juego de panquist como que las suertes repartidas son distintas. Una vez repartidas las suertes, el jugador G1 lanzará los tres dados hasta que venga la suerte de G2, que le hará perder, o la suerte de G1, que le hará ganar.

Veamos ahora qué ganan o pierden los jugadores.

En este juego, el jugador G2 propone cuatro apuestas al jugador G1. Estas apuestas están ordenadas de una a cuatro y se denominan: una apuesta, dos apuestas, tres apuestas y las cuatro apuestas. En la Tabla 9-1 recogemos las configuraciones que hacen ganar cada de las apuestas anteriores. Veremos más adelante que estas apuestas están ordenadas de mayor a menor probabilidad de que ocurran. También, de la Tabla 9-1, dentro de cada suerte o puntuación de 7 a 14, las apuestas de mayor tamaño nunca tienen mayor probabilidad que la de menor tamaño. Recordemos aquí que la Bonoloto ofrece unos premios del tipo: acertar tres números, cuatro, cinco o seis números (no considero el complementario), y estos premios van de mayor a menor probabilidad de que ocurran.

Veamos las reglas de este juego de panquist. Si por ejemplo, la suerte del jugador G2 es 7 puntos y la del jugador G1 es 10 puntos, si al lanzar los dados el jugador G1 lanza, por ejemplo, la configuración 3-3-1, entonces habrá ocurrido la puntuación $7=3+3+1$, del jugador

G2, antes que la puntuación 10 del jugador G1, lo que hará ganar el jugador G2. Ahora, como la configuración lanzada por los dados pertenece a la columna de Cuatro primeras Apuestas de la Tabla 9-1, el jugador G2 hará panquist y se llevará estas cuatro apuestas. Si hubiera salido la configuración 6-3-1, entonces ganaría el jugador G1 porque ha llegado antes su puntuación, $6+3+1=10$, que la puntuación 7 del jugador G2. La ganancia del jugador G1 será retirar las Dos primera Apuestas porque la configuración 6-3-1 se sitúa en la columna de la Tabla 9-1 con el encabezamiento de Dos primeras Apuestas.

Tabla 9-1

Suertes	Primera Apuesta	Dos primeras Apuestas	Tres primeras Apuestas	Cuatro primeras Apuestas
7		5-1-1, 4-2-1	2-2-3	3-3-1
8	5-2-1	4-3-1	6-1-1, 2-2-4	3-3-2
9	6-2-1, 5-3-1	4-3-2	2-2-5, 3-3-3	4-4-1
10	5-4-1, 5-3-2	6-3-1	2-2-6, 3-3-4	4-4-2
11	6-3-2, 5-4-2	6-4-1	5-5-1, 4-4-3	3-3-5
12	6-5-1, 6-4-2	5-4-3	5-5-2, 4-4-4	3-3-6
13	6-5-2	6-4-3	6-6-1, 5-5-3	4-4-5
14		6-5-3	6-6-2, 5-5-4	4-4-6

Los casos favorables de cada una de las columnas de la Tabla 9-1, según las filas o puntuaciones de las suertes, son los que hemos recogido en la siguiente Tabla 9-2.

Tabla 9-2

Suertes	Primera Apuesta	Dos primera Apuestas	Tres primeras Apuestas	Cuatro primeras Apuestas	Total de Casos Favorables
7		9	3	3	15
8	6	6	6	3	21
9	12	6	4	3	25
10	12	6	6	3	27
11	12	6	6	3	27
12	12	6	4	3	25
13	6	6	6	3	21
14		6	6	3	15
C. F.	60	51	41	24	176

Los casos favorables de la Tabla 9-2 provienen de calcular las permutaciones con repetición que genera cada configuración.

Este Juego de Panquist es igual, en la parte primera donde se reparten las suertes, al Juego de Marlota. En efecto: este juego de Panquist trunca a que las tiradas lancen puntuaciones del conjunto suerte $\{7,8,9,10,11,12,13,14\}$, es decir, que si sale otra puntuación se sigue lanzando los dados hasta que venga dos puntuaciones distintas del conjunto suerte, que es igual a la

parte primera del Juego de Marlota. En consecuencia, la fórmula [3] del juego de Marlota es aplicable a este juego de Panquist.

Una vez se han repartido las suertes entre los jugadores, el jugador G1 lanza sucesivamente los dados hasta que salga su suerte, que le hace ganar, o la suerte del otro, que la hace perder. Aquí, la fórmula [2], del juego de Triga, nos da la probabilidad que tiene de ganar G1 en el juego de Marlota, condicionada a las suertes repartidas. Ahora bien, lo que necesitamos en el juego de Panquist es la probabilidad de que el jugador G1 gane una cierta apuesta una vez se han repartido las suertes entre los jugadores. Luego, debemos adaptar la fórmula [2] a este nuevo problema tomando en consideración, además de las suertes, las distintas apuestas.

Si $S(G_1)$ y $S(G_2)$ son las suerte distintas de G1 y G2, respectivamente, y el evento de que ocurra la apuesta k , $k = 1, 2, 4$, lo representamos por $A(k)$, entonces, si se lanzan los dados sucesivamente, debemos calcular la probabilidad de que ocurra antes la suerte $S(G_1)$ que la $S(G_2)$ y además $A(k)$, para un cierto k , y siempre condicionado a las suertes repartidas entre los dos jugadores. La fórmula que proporciona el cálculo es,

$$P_r[S(G_1), A(k)|S(G_1), S(G_2)] = \frac{CF(S(G_1), A(k))}{CF(S(G_1)) + CF(G_2)}, [4]$$

para $k = 1, 2, 3$.

Veamos unos ejemplos, si las suertes son 8 de G1, 9 de G2 y queremos que salga antes la suerte de G1 y además salga la apuesta primera, usando la Tabla 9-2, el valor de la fórmula [4], para $k = 1$, será,

$$P_r[8, A(1)|8, 9] = \frac{6}{21 + 25} = 0,13043.$$

Si las suertes son 11 de G1, 13 de G2 y queremos que salga antes la suerte de G1 y además salga la apuesta segunda, usando la Tabla 9-2, el valor de la fórmula [4], $k = 2$, será,

$$P_r[11, A(2)|11, 13] = \frac{6}{27 + 21} = 0,125.$$

Si las suertes son 12 de G1, 10 de G2 y queremos que salga antes la suerte de G1 y además salga la apuesta segunda, usando la Tabla 9-2, el valor de la fórmula [4], $k = 3$, será,

$$P_r[12, A(3)|12, 10] = \frac{4}{25 + 27} = 0,07692.$$

Por último, si las suertes son 9 de G1, 7 de G2 y queremos que salga antes la suerte de G1 y además salga la apuesta segunda, usando la Tabla 9-2, el valor de la fórmula [4], $k = 4$, será,

$$P_r[9, A(4)|9, 7] = \frac{3}{25 + 15} = 0,075.$$

A partir de la fórmula [2] y la fórmula [4] ya podemos calcular la probabilidad de que el jugador G1 gane cada una de las cuatro apuestas. La Tabla 9-3 recoge las probabilidades de que gane el jugador G1 las distintas apuestas.

Tabla 9-3

Apuestas	Probabilidad de Ganar el jugador G1
I	0,17707721
II	0,14031911
III	0,11440127
IV	0,06663887
Total	0,49843645

Hacemos notar que el total de la Tabla 9-3 corresponde a la probabilidad de que el jugador G1 gane el Juego de Marlota.

De la Tabla 9-3, vemos que las distintas apuestas, ordenadas de menos a más, se corresponden de más a menos en las probabilidades. Como en este juego se sortea quién debe lanzar los dados, se hace batalla, entonces este juego es justo si se juega muchas veces. El jugador G2 que hace de Banca, es decir, propone las apuestas que hemos visto más arriba, tiene una probabilidad de 0,5015 de no perder ninguna de las apuestas. Para la gran apuesta, la IV, la Banca tiene una probabilidad de no perderla igual a 0,933.

Este juego es el Medio Azar [10]

El manuscrito recoge el texto siguiente,

Este iuego llaman medio Azar.

“Otra manera ay de iuego de dados que llaman medio azar que se iuega en esta guisa. Los que quisieren iogar an de lançar primeramentre batalla, e el que uenciene lançara primero. E si lançare .xiiii. puntos o dent arriba o siete o dent ayuso, en qual quier manera que uenga cadauna destas suertes sera azar. E de cada azar leuara un tanto, de como pusieren entressi que uala el tanto de un dinero o de un sueldo o un morauedi o dent arriba quanto fuere la postura. E las suertes que son en comedio destas son llamadas suertes, e son estas ocho o nueue e diez e onze e doze e treze. E si por auentura no lançare azar e diere suerte al otro, tomare suerte pora ssi, la que ante uiniere ganara tres tantos. E si desque diere suerte all otro lançare luego azar ante que tome suerte pora ssi, ira de quatro tantos. E si lançare otro azar ira de cinco. E quantos azares lançare uno depos otro, ualdra cadauno un tanto, (folio 70r) / fata que tome suerte por si. E si por auentura ante que tome suerte pora ssi encontrare con la suerte dell otro: lançara de cabo por azar, e lo echare: ganara todos los tantos que y fueren. E si no dar la suerte otra uez, e contara sobre los otros tantos primeros e desta guisa se torna el iuego como de comienço.”(Folio 70r)

Veamos a continuación nuestra interpretación de este juego de Medio Azar.

Es un juego donde se lanzan tres dados. Como en otros juegos que hemos vistos, este juego de Medio Azar también considera el conjunto $\{3,4,5,6,7, 14,15,16,17,18\}$, que llamaremos conjunto azar, y el conjunto de $\{8,9,10,11,12,13\}$ que llamaremos conjunto de suertes, que en el manuscrito dice que están en el medio, es decir, entre la puntuaciones 7 y 14. Si comparamos este conjunto azar con el conjunto azar de otros juegos, como en el Juego de Triga o el Juego de Azar, vemos que en este Juego de Medio Azar, el conjunto azar

contiene las puntuaciones 14 y 7, con lo que el conjunto suertes, de este juego de Medio Azar, pierde las puntuaciones 14 y 7.

Si el jugador G1 es el que ha ganado la “batalla”, cada vez que G1 lance una puntuación del conjunto azar ganará un tanto. Este unidad monetaria será un dinero, un sueldo o un maravedí, aunque podrá ser una cantidad mayor dependiendo de cuál sea la cantidad que los jugadores decidan apostar.

En el caso de que el jugador G1 no lance azar y lance una puntuación del conjunto suerte, ésta será la suerte del jugador G2. Si en el siguiente lanzamiento lanza una puntuación del conjunto suerte, distinta a la dada al jugador G1, ésta será la suerte para G1. Una vez repartidas las suertes, el jugador G1 lanzará sucesivamente los tres dados hasta que venga la suerte de G1, que le hace ganar tres tantos, o la suerte de G2, que hace ganar tres tantos al jugador G2. Y si antes que el jugador G1 logre su suerte, distinta de la del jugador G2, ocurre una puntuación azar, entonces al lanzar los dados sucesivamente, si llega antes la suerte de G1, éste ganará ahora cuatro tantos, que son, los tres tantos de cuando no ocurren azares entre las dos surtes más el tanto debido a que ha ocurrido una puntuación azar. Si entre las dos suertes distintas ocurren dos azares, ahora la posible ganancia de G1 será tres tantos más los dos tantos de los azares, y así sucesivamente.

Vemos entonces que cuando las suertes repartidas son distintas el jugador G1 debe lanzar los dados hasta que surja un ganador en las condiciones indicadas. En el manuscrito, en este caso de suertes distintas, afirma únicamente que “la que ante uiniere ganara”, que por el uso que se hace en otros juegos, como en el juego de Triga, Azar, Marlota, Panquist y Guirguesca, interpretamos que se deben lanzar los dados hasta que venga la suerte de G1, que le hace ganar o la suerte de G2, que hace perder al jugador G1 y, por tanto gana el juego G2.

Si cuando el jugador G1 busca su suerte se encuentra con una suerte igual a la que dio al jugador G2, dos situaciones pueden ocurrir: (1) que el jugador G1 lance los dados y saque una puntuación azar, lo que le hará ganar todos los tantos que allí hubieran y (2) que el jugador lance una puntuación suerte que deberá dársela de nuevo al jugador G2, con lo que el juego comenzará, en parte, de nuevo. En el caso de que el juego comience de nuevo, los tantos generados por las puntuaciones azar, no ganadas, deben acumularse a los posibles tantos que se ganen en esta nueva fase del juego. Esta interpretación que hacemos del juego corresponde a las siguientes líneas:

“E si por aventura ante que tome suerte pora ssi encontrare con la suerte dell otro: lançara de cabo por azar, e lo echare: ganara todos los tantos que y fueren. E si no dar la suerte otra uez, e contara sobre los otros tantos primeros e desta guisa se torna el iuego como de comienço.”

En este juego de Medio Azar, el jugador que lanza los dados, G1, gana tantos cuando al comienzo lanza puntuaciones del conjunto azar, hasta que saca una puntuación suerte que se la da al jugador G2. A partir de aquí los tantos se generan porque ocurren azares entre las suertes.

También queremos notar que cuando las suertes han sido repartidas entre los jugadores y son además distintas vemos que a los tantos debidos a los azares se añaden tres tantos, con lo que el jugador que antes saca su suerte se lleva los tantos de los azares y los tres tantos debido a las suerte repartidas. Veremos más adelante, en el juego de Azar Pujado, que ganar tantos por suertes repartidas distintas podrá llevar a ganar un número de tantos que decidan los dos jugadores.

El llamar a este juego Medio Azar se debe a que cuando ocurren puntos de azar en medio de dos suertes repartidas distintas, los jugadores pueden ganar tantos. Y aunque antes de que el jugador G1 dé la suerte al jugador, el jugador G1 puede ganar tantos cuando ocurre una puntuación azar, esto último ya ocurría en otros juegos anteriores, como en el juego de Triga y el juego de Azar. Observamos que el juego puede acabar en las dos siguientes situaciones: (a) cuando las suertes repartidas son distintas; (b) cuando las suertes son iguales y al lanzar los dados el jugador G1 saca una puntuación azar. En cambio, el juego puede comenzar cuando ocurre que las suertes son iguales y además al lanzar los dados G1 saque una puntuación del conjunto suerte. Que comience el juego de nuevo lo hemos visto en el Juego de Azar. Si el juego de Azar debe comenzar cuando ocurre encuentro, en el juego de Medio Azar debe ocurrir además que el jugador G1 al lanzar los dados saque una puntuación del conjunto suerte.

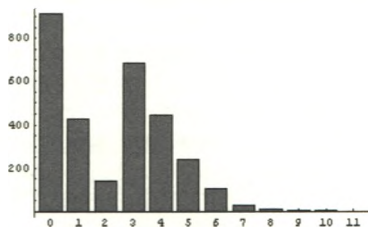
Vamos a calcular la distribución de los tantos que puede ganar el jugador G2 por medio de un programa de ordenador que simula 3000 jugadas de este juego de medio azar. Este cálculo nos permitirá calcular los tantos que espera ganar el jugador G1, que estamos suponiendo que lanza los dados.

La distribución de los tantos ganados por el jugador G1 es la recogida en la Tabla 10-1.

Tabla 10-1

Tantos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Frecuencias	914	424	138	684	443	238	104	31	14	4	5	1
Porcentajes	30,47	14,13	4,6	22,8	14,77	7,93	3,47	1,03	0,47	0,13	0,17	0,03

La gráfica es,



En el gráfico se observar que las frecuencias comienzan con un máximo en cero tantos para descender hasta dos tantos y volver a otro máximo en los tres tantos, esto último es la valoración de tres tantos cuando ocurren dos suertes distintas. Finalmente, las frecuencias descienden hasta cero cuando aumentan los tantos. El número de tantos esperados por el jugador G1 es igual a 2,254.

En este juego de medio azar, al sortear quién debe lanza los dados, cada jugador debe abonar 2,254 tantos para participar en este juego, ya que este valor es el que espera ganar uno de los jugadores al jugar muchas veces.

El juego de Azar Pujado [11]

El manuscrito recoge el texto siguiente,

Este iuego llaman Azar pujado.

“El azar que dizen puiado se iuega desta manera que el medio azar que desuso dixiemos que puian todauia los tantos tan bien por azar, como por qual suerte quiere que uenga la suerte del uno o dell otro. E por esto llaman a este Azar puiado por que ell otro desuso es medio azar.” (Folio 70v)

Veamos a continuación nuestra interpretación de este juego de Azar Pujado.

Este juego de Azar Pujado tiene las mismas reglas que el de Medio Azar, sólo se va a diferenciar en el cálculo de los tantos que pueden llevarse los jugadores. Si interpretamos la palabra “pujado” como en su aplicación en las subastas, podemos interpretar este juego de Azar Pujado como que entre los jugadores se producen pujas sobre cuántos tantos se ganará por la puntuación suerte que, en el caso de que las suertes repartidas sean distintas, si al lanzar los dados el jugador G1 llega antes la suerte de G2, entonces éste gana la puja hecha sobre las suertes, mientras que si llega antes la suerte de G1, entonces gana lo pujado el jugador G1. Recordemos que en el juego de Medio Azar, cuando las suertes están repartidas y son distintas, se añaden 3 tantos a los tantos debidos a los azares que pueden venir entre las suertes, lo que podemos interpretar que en este juego de medio azar se puja las suertes por tres tantos. En el juego de Azar Pujado se busca que la puja sea cualquier número de tantos sobre las suertes. Cuando las suertes repartidas son iguales no podemos hacer uso de la pujas.

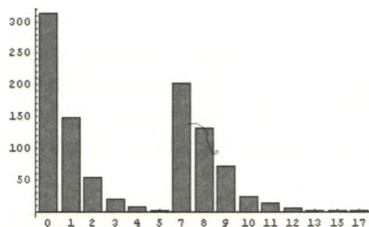
Si suponemos que la cantidad que se puja sobre las suertes es de siete tantos, veamos como se distribuyen los tantos ganados por el jugador G1. Seguimos usando un ordenador para simular 3000 juegos de este juego de Azar Pujado.

La distribución de los tantos ganados por el jugador G1 es la recogida en la Tabla 11-1.

Tabla 11-1

Tantos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Frecuencias	943	405	151	67	22	7	1	609	401	227	87	51	14	7	6	1	0	1
Porcentajes	31,4	13,5	5,03	2,23	0,73	0,23	0,03	20,3	13,4	7,57	2,9	1,7	0,47	0,23	0,2	0,03	0	0,03

La gráfica es,



Vemos que esta nueva gráfica tiene el mismo comportamiento que la del juego de Medio Azar, variando en que ahora por las suertes distintas se puede ganar siete tantos, de aquí que el segundo máximo ocurra en los siete tantos. El número de tantos esperados por el jugador G1 es igual a 4,119.

En este juego de medio azar, al sortear quién debe lanzar los dados, cada jugador debe apostar 4,119 tantos para participar en este juego, así logramos que al jugar muchas veces a este juego, los jugadores esperan ganar los mismos tantos.

Este juego es el Guirguesca [12]

El manuscrito recoge el texto siguiente,

Este es el iuego que llaman guirguesca.

“Otra manera a y de iuego que llaman guirguesca que se iuega con dos dados en esta guisa. Los que quisieren iogar an de alañar primeramente batalla. E el que la uenciene lançara primero, e si lançare senas o seys cinco o la soçobra destes que son dos e as o amas as sera azar. E ganara por el un tanto de qual quantia pusieren entressi que uala. E si por auentura no lançare azar, e echare quatro puntos o cinco, o seys o siete u ocho, o nueue o diez en qual quiere guisa que uengan, cadauna destas sera llamada suerte, e auerla a aquel con qui el iogare, e ell otro parara a ella quanto se quisiere, e si el que lança los dados e echare otra suerte luego a pos ella de tantos puntos como la quel dio esta sera llamada encuentro e leuara lo que y fuere si ouiere otorgado de yr a ello o si sse callare. E si por auentura no lançare encuentro e lançare una delas suertes que desuso dixiemos que eran azares: perder lo a todo. E si non lançare encuentro ni azar e lançare una delas otras suertes aquel la tomara pora ssi, e lançara tantas uezes, fata que uenga la suya o la dell otro, e lançando la suya gana e por la dell otro pierde.” (folios 71r y 71v)

Veamos a continuación nuestra interpretación de este juego de Guirguesca.

Es este juego de Guirguesca se lanzan dos dados, las puntuaciones de tipo azar son {2, 3, 12, 11} y las de tipo suertes {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.

Antes de comenzar este juego de Guirguesca, los jugadores deben de “hacer batalla” (sortear quién debe lanzar los dos dados). Vamos a llamar G1 al jugador que lanza los dados y G2 al otro. Este juego de Guirguesca consiste en un primer lanzamiento: (1) Al principio, primer lanzamiento, si sale la puntuación azar, entonces gana el jugador que lanza los dos dados, jugador G1. De esta ganancia sólo se dice que “E ganara por el un tanto de qual quantia pusieren entressi que uala”, es decir, una cantidad que hayan acordado ambos jugadores antes de comenza el juego; si G1 lanza una puntuación suerte, en vez de una puntuación azar, entonces debe dársela al otro jugador G2; (2) Si G1 ha lanzado una puntuación suerte en su primer lanzamiento, leemos en el manuscrito que “, e ell otro parara a ella quanto se quisiere”, es decir, el jugador G2 hace un envite (apuesta) al jugador G1 donde el valor de esta apuesta lo decide el jugador G2. Este envite del jugador G2 debe ser aceptado por el jugador G1, con lo que G2 obliga al jugador G1 a correr el riesgo de perder la cantidad apostada por G2.

En el segundo lanzamiento; (3) Después del envite de G2, si G1 lanza una puntuación azar entonces pierde lo apostado, antes de comenzar el juego, y la cantidad del envite de G2. Pero si G1 lanza, en este segundo lanzamiento, una puntuación suerte, entonces pueden ocurrir dos alternativas: (4) Si G1 ha lanzado una suerte que coincide con la suerte del jugador G2, hay encuentro, leemos en el manuscrito que “e si el que lança los dados e echare otra suerte luego a pos ella de tantos puntos como la quel dio esta sera llamada encuentro e leuara lo que y fuere si ouiere otorgado de yr a ello o si sse callare”, es decir, ahora el jugador G1 se lleva lo apostado, antes de comenzar el juego, y la cantidad del envite de G2. Las palabras “si ouiere otorgado de yr a ello o si sse callare” justifican que el envite de G2 obliga al jugador G1 a aceptar el envite independientemente que manifieste su deseo de aceptarlo o que calle; y (5) en el caso de que la surte de G1 sea distinta de la de G2, entonces se deben lanzar los dados hasta que venga la suya, ganando G1, o la de otro, perdiendo G1 y, así, ganando G2.

En la miniatura que recoge este juego de Guirguesca, folio 71v del Libro del ajedrez, dados y tablas (nuestra página 9), puede verse que el jugador de la derecha ha lanzado los dos dados, nuestro jugador G1, sacando los puntos 1 y 3, que producen la puntuación 4 que sería la suerte para el jugador de la izquierda, nuestro jugador G2. Este último tiene levantada la mano izquierda como haciendo un envite al jugador que ha lanzado los dados.

En la Ley XL, del Ordenamiento de la Tahurerías, se llama a este juego “gargista”, diciendo que se trata de un juego de “paradas”.

Si nos situamos en el momento donde el jugador G2 tiene su suerte, que vamos a suponer que es de 7 puntos, y hace su envite al otro jugador, G1, sin saber aún qué suerte le llegará a G1, podemos ver en la parte izquierda de la Tabla 12-1 un esquema de esta parte del juego de Guirguesca.

Tabla 12-1

GUIRGUESCA		CRAPS	
Puntos	Gana	Puntos	Gana
2	G2	2	Setter
3	G2	3	Setter
4	R	4	R
5	R	5	R
6	R	6	R
7	G1	7	Caster
8	R	8	R
9	R	9	R
10	R	10	R
11	G2	11	Caster
12	G2	12	Setter

De la Tabla 12-1, la parte izquierda, vemos que si el jugador G1 lanza la puntuación 7, ocurre encuentro, entonces gana. Si G1 lanza una puntuación del conjunto {2, 3, 11, 12}, azar, entonces gana G2. Si sale una suerte de los puntos {4, 5, 6, 8, 9}, el jugador G1 tomara para sí su suerte, por ejemplo, 5 puntos, entonces el jugador G1 lanzará los dos dados hasta que venga 7 puntos, ganando G2, o que venga su suerte, 5 puntos, que le hace ganar. Hemos puesto en la celda de la suerte de 5 puntos la letra R que recoge que G1 debe lanzar sucesivamente los dados.

Si consideramos ahora el juego de Craps (Richard Isaac, 1995), un juego donde se lanzan dos dados y juegan dos jugadores llamados Caster y Setter, este último tiene la puntuación 7 como su suerte antes de comenzar el juego.

Cuando sale la puntuación 7 ó 11, llamados cada uno “nick” o natural, gana el jugador Caster; cuando sale los puntos {2, 3, 12}, llamados cada uno “crap”, pierde Caster, y así gana Setter; y cuando sale una puntuación suerte del tipo {4, 5, 6, 8, 9}, llamado cada uno “point”, por ejemplo, 6 puntos, será la suerte del jugador Caster. A partir de aquí, puede ocurrir que las suertes sean iguales, es decir, que la suerte de Caster sea de 7 puntuaciones como la suerte de Setter, que le hace ganar el juego, o que la suerte de Caster sea distintas de 7, por ejemplo, 6 puntos, lo que llevará a que se lancen los dos dados hasta que salga la suerte 7 antes que la 6, ganando Setter, o que venga 6 antes que 7, ganando el juego Caster. Si consideremos todas las suerte de Caster, podemos ver en la parte derecha de la Tabla 12-1 los resultados de este juego de Craps. Se prueba que la probabilidad de ganar Caster este juego de Craps es 0,493,

Comparando ambos juegos de la Tabla 12-1, vemos que coinciden en las celdas donde hemos puesto la letra R (repetir los lanzamientos). En otros casos, vemos que el jugador Caster gana si salen las puntuaciones de 7 u 11; mientras que en el juego de Guirguesca, el jugador G1 gana si sale la puntuación 7. y pierde en la puntuación 11. Por último, las puntuaciones 2, 3 ó 12 que hacen perder al jugador Caster, también hacen perder al jugador G1.

El juego de Craps puede verse en un juego de Hazard de Pierre Rémond de Montmort recogido en las páginas 177-179 de su *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* publicado anónimamente en 1713.

De la Tabla 12-1, donde hemos considerado el juego de Guirguesca cuando el jugador G2 tiene su suerte igual a 7 puntuaciones, vemos que el juego de Craps es bastante semejante al de Guirguesca, lo que nos lleva a suponer que el juego de Guirguesca antecede al juego de Craps. Si ahora consideramos el juego de Guirguesca cuando el jugador G2 puede tener algunas de las suertes {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} y propone un envite al jugador G1, entonces podemos representar los posibles resultados de esta parte del juego mediante la siguiente Tabla 12-2.

Tabla 12-2

		G2						
G1	4	5	6	7	8	9	10	
2	G2	G2	G2	G2	G2	G2	G2	
3	G2	G2	G2	G2	G2	G2	G2	
4	G1	R	R	R	R	R	R	
5	R	G1	R	R	R	R	R	
6	R	R	G1	R	R	R	R	
7	R	R	R	G1	R	R	R	
8	R	R	R	R	G1	R	R	
9	R	R	R	R	R	G1	R	
10	R	R	R	R	R	R	G1	
11	G2	G2	G2	G2	G2	G2	G2	
12	G2	G2	G2	G2	G2	G2	G2	

En esta Tabla 12-2, recogemos las posibles suertes de G2, en las columnas, y para cada suerte, por ejemplo, 5 puntos del jugador G2, tenemos que si el jugador G1 lanza una puntuación azar, entonces gana el jugador G2, si saca una puntuación suerte igual a 5 puntos, gana G1 y, finalmente, si saca una puntuación suerte distinta de 5 puntos, por ejemplo, 7 puntos, entonces G1 debe lanzar los dos dados sucesivamente hasta que lance 7 puntos, que le hace ganar, o 5 puntos que le hace perder (gana G2). Esta repetición lo indicamos en la Tabla 12-2 con la letra R de "repetición".

Hemos calculado, para cada suerte del jugador G2, la probabilidad de que el jugador G1 gane el envite del jugador G2. Estas probabilidades son recogidas en la siguiente Tabla 12-3.

Tabla 12-3

Suertes de G2	4	5	6	7
Probabilidad de Ganar G1	0,5371	0,4924	0,461	0,4374
Suertes de G2	10	9	8	

De la Tabla 12-3, observamos que las Suertes {5, 9, 6, 8, 7} de G2 le dan ventaja, mientras que para el resto de las Suertes de G2 las ventajas son para el jugador G1. También de la Tabla 12-3 vemos que cuando las suertes de G2 son 5 ó 9, entonces en envite de G2 es bastante justo para ambos jugadores. Recordemos que en el juego de Craps la probabilidad de ganar que tiene el jugador Caster es 0,493, que está muy cercana a la probabilidad 0,4924 de ganar G1 cuando las suertes de G2 son 4 ó 9.

La probabilidad de que el jugador G2 gane su envite cuando su suerte es $S(G2)$ puede ser calculada por la fórmula siguiente,

$$\frac{CF(Azar)}{36} + \sum_{k=4; k \neq S(G2)}^{10} \frac{CF(S(G2)) * CF(S(k))}{36 * (CF(S(G2)) + CF(S(k)))},$$

donde $S(k)$ son las surtes del conjunto {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, que puede tener el jugador G2, y los casos favorables del conjunto Azar son 6.

A falta de conocer las apuestas, tanto al principio del juego como cuando el jugador G2 hace su envite, nos podemos interesar por la probabilidad de que el jugador G1 gane este juego de Guirguesca, es decir, que G1 saque una puntuación azar en su primer lanzamiento o que saque una suerte igual a la de G2 en su segundo lanzamiento o que saque una suerte distinta a la de G2 en su segundo lanzamiento que le lleve a ganar. Si calculamos estas tres probabilidades y las sumamos obtenemos una probabilidad de 0,566 de que G1 gane este juego de Guirguesca. Al superar esta probabilidad el valor 0,5, muestra que este juego de Guirguesca es ventajoso para el jugador que lanza los dados. Esta ventaja explica por qué, antes de comenzar el juego, los jugadores deben de sortear quién debe lanzar los dos dados, lo que, a la larga, hará que los jugadores ganarán el mismo número de partidas. Este último cálculo nos permite afirmar que el juego de Guirguesca es semejante al de Triga cuando jugamos con dos dados, siempre que se elimine la "batalla", no sea de interés las cantidades que los jugadores pueden ganar y además no influya el orden en que se reparten las suertes.

El Libro de los Dados finaliza con la frase siguiente.

"En estos .xii. iuegos delos dados que aqui auemos puesto, se pueden entender todos los otros que iuegan en las otras tierras que son fechos o se pueden fazer daqui adelant de que nos non sabemos." (Folio 71v)

Bibliografía

- BASULTO, J.; J. A. CAMÚÑEZ Y J. ORTEGA (2006). "Azar Game in the Book of Dice of Alfonso X The Learned. Its relation with the Hazard Games of Montmort, Cotton, Hoyle, De Moivre and J. Bernoulli". *Math. & Sci. Hum.-Mathematics and Social Sciences*. No. 174, 5-24.
- BASULTO, J.; J. A. CAMÚÑEZ Y J. ORTEGA. (2007). "Juegos de azar, guirguesca y marlota del Libro de los Dados del Alfonso X El Sabio". *Alcanate. Revista de Estudios Alfonsíes*. 89-116.
- BELLHOUSE, D. R. (2004). "Decoding Cardano's Liber de Ludo Aleae". *Historia Matemática*. 1-22.
- BELLHOUSE, D. R. (2000). "De Vetula: a Medieval Manuscript Containing Probability Calculations". *International Statistical Review*. 68, 123-136.
- BERNOULLI, J. (1713). *The Art of Conjecturing. Together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis*. Translated with an introduction and notes by Edith Duddley Sylla. The Johns Hopking University Press. 2006.
- CARDANO, G. (1564). *Liber de Ludo Aleae*. First printed in *Opera Omnia*, vol. 1, 1663. Translated into english by S.H. Gould in Ore (1953), reprinted in *The book on game of chance*, 1961, Holt, Rinehart and Winston, New York.
- COTTON, C. (1674). *The compleat gamester: or, instructions how to play at billads, trucks, bowl,...and chess. Together with all manner pf usual and most gentile games either on cards or dice*. London, print by A.M. for R. Cutler.
- HUYGENS, C. (1657). *De Ratiociniis in Ludo Aleae*, printed in *Exercitationum Mathematicarum* by F. Van Schooten, Elsevirii, Leiden.
- MOIVRE, A, DE (1718). *The Doctrine of Chances or, A Method of Calculating the Probability of Events in Play*. Pearson. London.
- MONTMORT, P.T. DE (1714). *Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard*. Second Edition. Published anonymously. Reprinted by Chelsea, New York, 1980.
- MORA CHARLES, M. S. DE (1989). *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII*. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco, Bilbao.
- MORA CHARLES, M. S. DE (1992). "Quelques jeux de hazard selon Leibniz ». *Historia Mathematica* 19, 125-157.
- RICHARD ISAAC. (1995). *The Pleasures of Probability*. Springer Verlag.