

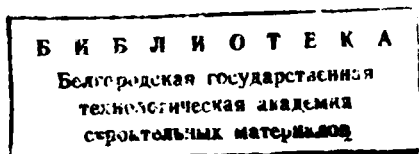
**МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Белгородская государственная технологическая академия строительных
материалов**

А.В. Маматов, В.Н. Подлесный, В.Г. Рубанов

**РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

**Утверждено советом академии
в качестве учебного пособия**



Белгород 1997

УДК 681.51

Маматов А.В., Подлесный В.Н., Рубанов В.Г. Робастная устойчивость линейных систем автоматического управления: Учебное пособие. - Белгород, Изд-во БелГТАСМ, 1997. - 78 с.

В учебном пособии изложены основы теории робастной устойчивости линейных систем автоматического управления с параметрической интервальной неопределенностью. Для каждого класса систем (непрерывных, импульсных, замкнутых, с постоянным и интервальным запаздыванием) приведены формулировки и схемы доказательств критериев робастной устойчивости, которые иллюстрируются типовыми примерами.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 210200 "Автоматизация технологических процессов и производств" и может быть полезно для студентов других специальностей, выполняющих курсовые и дипломные проекты по анализу и синтезу систем автоматического управления разнообразными динамическими объектами.

Ил. 33. Список лит.: 24 назв.

Рецензенты: Ю. Н. Соколов, канд. техн. наук (ХАИ);

А. А. Виноградов, канд. техн. наук (БелГТАСМ)

ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей системы автоматического управления является обеспечение такого режима функционирования объекта управления, при котором его реальное поведение приближается к некоторому желаемому с точностью до выбранного критерия. Желаемый алгоритм функционирования объекта управления задается либо явно через идеальный оператор, связывающий входные и выходные переменные объекта, либо опосредованно, путем формализации критерия управления. Представления о реальном поведении объекта управления формируются на основании его математической модели и текущем измерении, что в совокупности составляет информационное обеспечение управления.

При синтезе управляющих устройств, поддерживающих заданный алгоритм функционирования объекта управления, необходимо учитывать дополнительные требования, а именно:

- 1) управляющее устройство должно быть физически реализуемо;
- 2) управляющее устройство должно по возможности компенсировать координатные возмущения;
- 3) управляющее устройство должно обеспечить стабильность показателей качества в условиях отклонения свойств объекта от их модельного представления.

Несмотря на многообразие различных исследований по управляющим устройствам, отвечающим перечисленным требованиям, можно выделить два главных подхода к синтезу управления. Компенсационный подход, когда для улучшения динамики системы непосредственно учитывают в законе управления параметры объекта и измеряют действующие на него возмущения. К этому направлению относятся адаптивные системы, в которых параметры объекта определяют в процессе его функционирования и используют отклонение контролируемого показателя качества от требуемого значения для коррекции управляющего устройства. Структурный подход, когда для улучшения динамики применяют жесткие структуры управления,

которые обеспечивают требуемые свойства системы при сравнительно больших вариациях параметров объекта (без изменения параметров регулятора и без непосредственного измерения возмущений).

Теория адаптивных систем представляет вполне самостоятельное направление в общей теории автоматического управления. Однако, несмотря на большое количество теоретических работ по адаптивному управлению и интерес к нему, существует определенный разрыв между теоретическими и прикладными результатами в этой области.

Структурный подход к синтезу управления характерен для систем с бесконечным коэффициентом усиления; с переменной структурой; инвариантных; для систем, синтезированных методами теории чувствительности. Этот же подход лежит в основе теории робастных систем.

Принципиальное отличие теории робастных систем от других методов исследования неполностью определенных динамических объектов состоит в том, что ставится задача синтеза управления не одним объектом, а классом объектов управления. В этом смысле термин "робастность" характеризует сохранение тех или иных свойств не единственной системы, а множества систем, определенных тем или иным способом, при этом робастность существенно расширяет понятие грубости, нечувствительности, которые ранее рассматривались лишь при малых вариациях параметров.

Одна из основных проблем теории робастных систем - проблема робастной устойчивости. Система считается робастно устойчивой, если устойчива любая система, принадлежащая множеству систем, определенных классом объекта управления. По аналогии с классической теорией устойчивости, в теории робастных систем управления сформировалось два подхода к оценке робастной устойчивости: алгебраический и частотный. В практике расчетов систем автоматического управления промышленными объектами более широкое распространение получил частотный подход к анализу робастной устойчивости, основополагающие идеи которого сформулированы и конкретизированы в виде ряда критериев академиком Я.З. Цыпкиным и его коллегами.

1. РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

1.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

К классу линейных непрерывных систем относятся динамические системы, движение которых может быть описано линейным обыкновенным дифференциальным уравнением вида :

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x = b_m \frac{d^m g}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} g}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 g, \quad (1.1)$$

где t - время; $x = x(t)$ - выходная (управляемая) переменная; $g = g(t)$ - входная переменная (управляющее воздействие); $a_i, b_j, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ - параметры системы.

Для физически реализуемых систем выполняется соотношение $n \leq m$, при этом число n определяет порядок системы. Уравнение (1.1) называют уравнением движения системы.

Наряду с уравнением движения в качестве динамической модели системы используется передаточная функция. Передаточной функцией системы называют отношение выходной и входной переменных, преобразованных по Лапласу при нулевых начальных условиях. Согласно определению, передаточная функция системы, движение которой описывается уравнением (1.1), будет иметь вид:

$$W(s) = \frac{X(s)}{G(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (1.2)$$

где $s = \alpha + j\beta$ - комплексная переменная преобразования Лапласа; $X(s)$ и $G(s)$ - изображения функций $x(t)$ и $g(t)$ соответственно.

Одним из основных условий работоспособности автоматической системы является ее устойчивость. Применительно к линейным непрерывным системам устойчивость состоит в способности системы возвращаться к состоянию равновесия после снятия внешних воздействий. Это свойство можно записать следующим образом:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad g(t) = 0, \quad -\infty < x^{(i)}(0) < \infty, \quad \lambda = \overline{1, n}. \quad (1.3)$$

Об устойчивости линейной непрерывной системы можно судить на основе анализа решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего общему решению уравнения (1.1):

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 = 0. \quad (1.4)$$

В свою очередь, анализ общего решения сводится к анализу корней характеристического полинома системы

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0. \quad (1.5)$$

Как видно, характеристический полином системы (1.1) совпадает со знаменателем ее передаточной функции. Следует отметить, что характеристический полином с вещественными коэффициентами $a_i, i = \overline{0, n}$, может иметь либо вещественные, либо комплексно-сопряженные корни.

Для устойчивости линейной непрерывной системы необходимо и достаточно, чтобы все корни (1.5) имели отрицательные вещественные части. В самом деле, пусть для определенности все корни характеристического полинома различны, тогда решение уравнения (1.4) может быть записано в виде:

$$x(t) = c_n e^{s_n t} + c_{n-1} e^{s_{n-1} t} + \dots + c_1 e^{s_1 t}, \quad (1.6)$$

где c_i , $i = \overline{1, n}$ - постоянные, определяемые начальными условиями; s_i , $i = \overline{1, n}$ - корни характеристического полинома.

В случае, если $s_k = -\alpha_k$ - отрицательный вещественный корень, то в решении (1.6) ему соответствует слагаемое $x(t) = c_k e^{-\alpha_k t}$, которое с течением времени по экспоненте стремится к нулю. В случае, если $s_{i_1, i_2} = -\alpha_i \pm j\beta_i$ - пара комплексно-сопряженных корней, ей соответствует слагаемое $x_i(t) = c_i e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \psi_i)$, которое представляет собой затухающие колебания. Таким образом, если вещественные части всех корней характеристического уравнения системы отрицательны, то все составляющие свободного движения системы (1.6) с течением времени стремятся к нулю, что определяет устойчивость системы.

Нахождение корней характеристического уравнения выше второго порядка сопряжено с громоздкими вычислениями, а в случаях, когда порядок уравнения выше четырех, аналитическое решение в общем виде не существует. В связи с этим на практике используют правила, которые позволяют без вычисления корней характеристического уравнения проверить отрицательность их вещественных частей. Эти правила, называемые критериями устойчивости, позволяют не только оценить устойчивость системы, но и проанализировать влияние тех или иных параметров системы на ее устойчивость.

Существуют две группы критериев устойчивости: алгебраические и частотные. Критерии первой группы предполагают проведение алгебраических вычислений над коэффициентами характеристического уравнения с последующим анализом результатов. К ним относятся критерии Рауса и Гурвица. Критерии второй группы базируются на использовании тех или иных частотных функций системы. К этой группе относятся критерии Михайлова и Найквиста.

В основе частотных критериев лежит принцип аргумента, являющийся следствием теоремы Коши о числе полюсов и нулей функции комплексного переменного, аналитической в заданной области. Представим характеристический полином системы в виде простых сомножителей :

$$D(s) = a_n (s - s_n)(s - s_{n-1}) \dots (s - s_1). \quad (1.7)$$

Каждому из сомножителей $(s - s_i)$, $i = \overline{1, n}$ в плоскости корней соответствует вектор (рис. 1.1), модуль и аргумент которого определяются взаимным расположением точек s и s_i . В свою очередь, модуль и аргумент произведения $D(s)$ определяются модулями и аргументами сомножителей :

$$|D(s)| = |a_n| |s - s_n| |s - s_{n-1}| \dots |s - s_1|, \quad (1.8)$$

$$\arg D(s) = \arg(s - s_n) + \arg(s - s_{n-1}) + \dots + \arg(s - s_1).$$

Для проверки принадлежности корней s_i , $i = \overline{1, n}$ левой полуплоскости плоскости корней следует изменять переменную s вдоль мнимой оси (см. рис.1.1), сделав замену $s = j\omega$ и варьируя ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ аргумент каждого из сомножителей $(s_i - j\omega)$, $i = \overline{1, n}$ изменится от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, если корень s_i лежит в левой полуплоскости, и от $-\frac{\pi}{2}$ до $-\frac{3}{2}\pi$, если корень s_i лежит в правой полуплоскости плоскости корней. В первом случае $\Delta \arg (j\omega - s_i) = \pi$, в другом случае $\Delta \arg (j\omega - s_i) = -\pi$.

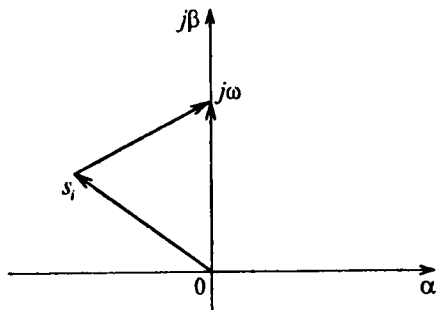


Рис. 1.1.

Если характеристический полином степени n имеет m правых корней, то это можно определить по приращению аргумента произведения $D(j\omega)$:

$$\Delta_{-\infty < \omega < \infty} \arg D(j\omega) = (n - m)\pi - n\pi = (n - 2m)\pi. \quad (1.9)$$

Введем следующие обозначения:

$$U(\omega) = \operatorname{Re} D(j\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots, \quad (1.10)$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im} D(j\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots$$

Из (1.10) следуют равенства $U(\omega) = U(-\omega)$, $V(\omega) = -V(-\omega)$, что обуславливает симметричность годографа $D(j\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$ относительно вещественной оси. По этой причине для исследования устойчивости линейной непрерывной системы достаточно проанализировать поведение годографа $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Для устойчивых систем число правых корней $m = 0$, поэтому

$$\Delta_{0 \leq \omega < \infty} \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2}. \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) лежит в основе частотного критерия Михайлова, согласно которому для устойчивости линейной непрерывной системы порядка n необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от 0 до $+\infty$ годограф $D(j\omega)$ (годограф Михайлова), начинаясь на вещественной положительной полуоси, обходил в положительном направлении n квадрантов плоскости (U, jV) .

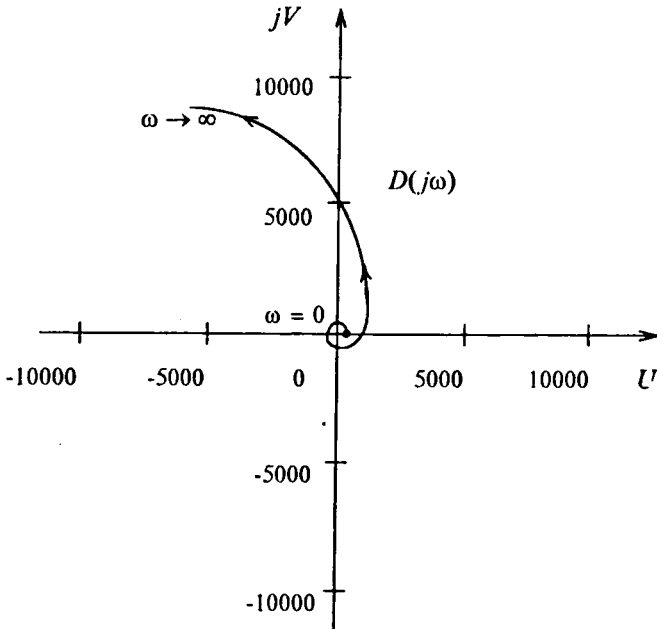


Рис. 1.2.

Пример 1.1. Проанализируем с использованием критерия Михайлова устойчивость линейной непрерывной системы шестого порядка, характеристический полином которой имеет вид:

$$D(s) = 24s^6 + 52s^5 + 62s^4 + 44s^3 + 21s^2 + 6s + 1.$$

На рис.1.2 приведен годограф Михайлова исследуемой системы. В рассматриваемом случае годограф Михайлова начинается на вещественной положительной полуоси и последовательно обходит шесть квадрантов плоскости (U, jV) при изменении ω от 0 до ∞ , на основании чего можно заключить, что исследуемая система устойчива.

В рассмотренной постановке задачи исследования устойчивости линейных непрерывных систем предполагается, что все параметры системы точно заданы. В реальных задачах параметры, как правило, точно неизвестны. При этом необходимым условием работоспособности системы является ее устойчивость при всех возможных комбинациях параметров. В данном случае имеет место задача исследования робастной устойчивости, предполагающая проведение анализа устойчивости не одной системы, а некоторого семейства систем, определяемого возможными вариациями параметров.

Введем обозначение вектора параметров характеристического уравнения системы: $\mathbf{a} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$. Пусть в пространстве коэффициентов характеристического уравнения задано связное множество $A \subset R^{n+1}$, задающее параметрическую неопределенность системы. Семейство

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0, \mathbf{a} \in A \quad (1.12)$$

называется робастно устойчивым, если корни всех полиномов семейства имеют отрицательные вещественные части.

Непосредственное использование критериев устойчивости для проверки расположения корней всех характеристических полиномов заданного семейства является неприемлемым, ввиду практической невозможности полного перебора всех возможных комбинаций параметров в пределах заданной неопределенности. Для решения задач исследования робастной устойчивости используют специально разработанные критерии робастной устойчивости.

1.2. ТЕОРЕМЫ ХАРИТОНОВА И ПРИНЦИП ИСКЛЮЧЕНИЯ НУЛЯ

Толчком к развитию теории робастной устойчивости послужили исследования В.Л. Харитонова [1]. Им рассматривалась задача робастной устойчивости семейства характеристических полиномов с интервальной неопределенностью коэффициентов, когда каждый из коэффициентов принадлежит заданному интервалу: $\underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i$, $i = \overline{0, n}$, где \overline{a}_i - верхняя граница интервала; \underline{a}_i - нижняя граница интервала.

В этом случае множество параметрической неопределенности

$$A = \{ \mathbf{a} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) : \underline{a}_i \leq a_i \leq \overline{a}_i, i = \overline{0, n} \} \quad (1.13)$$

представляет собой в пространстве коэффициентов n -мерный прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны i координатным плоскостям (рис 1.3).

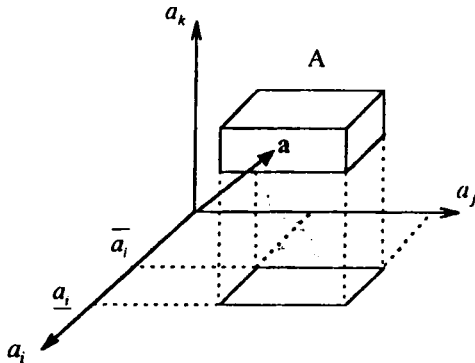


Рис. 1.3.

Первым результатом, полученным при решении приведенной задачи, является так называемая “слабая” теорема Харитонова, согласно которой для

робастной устойчивости семейства характеристических полиномов (1.6),(1.13) необходимо и достаточно, чтобы устойчивыми были все угловые полиномы:

$$\overline{D}(s) = \overline{a_n}s^n + \overline{a_{n-1}}s^{n-1} + \dots + \overline{a_0},$$

где $\overline{a_i}$, $i = 0, n$ принимает значение $\overline{a_i}$ либо a_i .

“Слабая” теорема Харитонова позволяет судить об устойчивости всех полиномов семейства на основе анализа устойчивости конечного числа его элементов. При этом задача исследования робастной устойчивости может быть решена с использованием известных алгебраических и частотных критериев устойчивости. Однако с повышением порядка полинома n число полиномов, подлежащих исследованию на устойчивость, резко возрастает: число угловых полиномов семейства при порядке характеристического уравнения n определяется выражением $N_{\overline{D}} = 2^{n+1}$. Поэтому практическое использование “слабой” теоремы Харитонова для решения задач исследования робастной устойчивости является затруднительным. Именно этому обстоятельству слабая теорема обязана своим названием.

Более эффективные необходимые и достаточные условия устойчивости семейства полиномов с интервальной неопределенностью даст “сильная” теорема Харитонова, согласно которой для робастной устойчивости семейства характеристических полиномов (1.6),(1.13) необходимо и достаточно, чтобы устойчивыми были лишь четыре полинома (полиномы Харитонова):

$$\begin{aligned} D_1(s) &= \underline{a_0} + \underline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \underline{a_4}s^4 + \underline{a_5}s^5 + \dots, \\ D_2(s) &= \underline{a_0} + \overline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \underline{a_3}s^3 + \underline{a_4}s^4 + \overline{a_5}s^5 + \dots, \\ D_3(s) &= \overline{a_0} + \overline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \underline{a_3}s^3 + \overline{a_4}s^4 + \overline{a_5}s^5 + \dots, \\ D_4(s) &= \overline{a_0} + \underline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \overline{a_4}s^4 + \underline{a_5}s^5 + \dots. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Использование "сильной" теоремы существенно упрощает решение задач исследования робастной устойчивости, причем число анализируемых полиномов не увеличивается с повышением степени характеристического полинома n .

В справедливости условий робастной устойчивости, приведенных в "сильной" теореме Харитоновна, можно легко убедиться, используя частотный подход к анализу устойчивости. Анализируя вместе выражения (1.10) и (1.13), можно показать, что область A пространства коэффициентов при переходе в комплексную плоскость (U, jV) проецируется в прямоугольник $Q(\omega)$, стороны которого параллельны координатным осям (рис. 1.4).

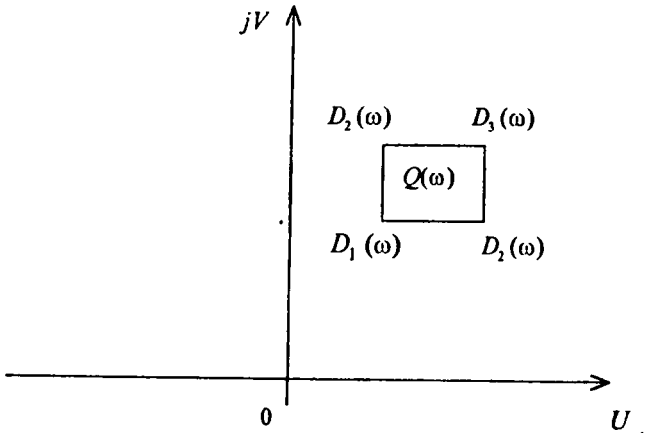


Рис. 1.4.

В самом деле из (1.9) и (1.13) получаем:

$$\underline{U}(\omega) \leq U(\omega) \leq \bar{U}(\omega), \quad \underline{V}(\omega) \leq V(\omega) \leq \bar{V}(\omega),$$

$$\text{где } \underline{U}(\omega) = \underline{a}_0 - \underline{a}_2\omega^2 + \underline{a}_4\omega^4 - \dots; \quad \bar{U}(\omega) = \bar{a}_0 - \bar{a}_2\omega^2 + \bar{a}_4\omega^4 - \dots;$$

$$\underline{V}(\omega) = \underline{a}_1\omega - \underline{a}_3\omega^3 + \underline{a}_5\omega^5 - \dots; \quad \bar{V}(\omega) = \bar{a}_1\omega - \bar{a}_3\omega^3 + \bar{a}_5\omega^5 - \dots$$

Таким образом, вершины прямоугольника $Q(\omega)$ описываются выражениями

$D_1(j\omega) = \underline{U}(\omega) + j\underline{V}(\omega)$, $D_2(j\omega) = \underline{U}(\omega) + j\overline{V}(\omega)$, $D_3(j\omega) = \overline{U}(\omega) + j\overline{V}(\omega)$,
 $D_4(j\omega) = \overline{U}(\omega) + j\underline{V}(\omega)$, которые соответствуют полиномам Харитонова (1.14) при замене $s = j\omega$.

Далее, используя критерий Михайлова, можно показать, что устойчивость полиномов, соответствующих вершинам прямоугольника $Q(\omega)$, влечет за собой устойчивость всех полиномов семейства (1.6), (1.13). Согласно критерию Михайлова, устойчивость полиномов Харитонова означает, что вершины прямоугольника $Q(\omega)$ последовательно обходят n квадрантов при изменении ω от 0 до ∞ . В силу того, что стороны прямоугольника $Q(\omega)$ параллельны координатным осям, в такой же последовательности будут обходить квадранты плоскости (U, jV) и все точки прямоугольника $Q(\omega)$, что означает устойчивость семейства (1.6), (1.13).

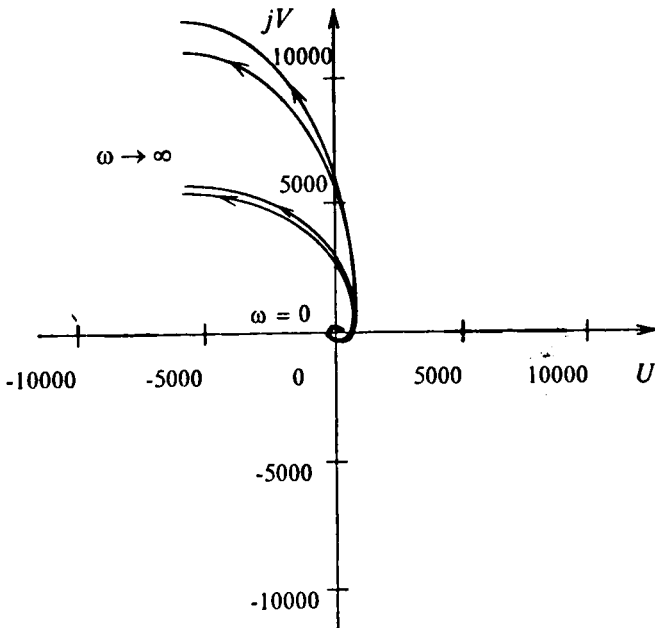


Рис. 1.5.

Пример 1.2. Проанализируем робастную устойчивость семейства характеристических полиномов шестого порядка, соответствующего 5-процентному параметрическому возмущению коэффициентов полинома из *Примера 1.1*: $\underline{a}_i = 0,95a_i^0$, $\overline{a}_i = 1,05a_i^0$, $i = \overline{0,7}$, где a_i^0 - исходные значения коэффициентов.

На рис.1.5 приведены годографы Михайлова для полиномов Харитонова рассматриваемого семейства. Все четыре годографа начинаются на вещественной положительной полуоси и последовательно обходят шесть квадрантов плоскости (U, jV) при изменении ω от 0 до ∞ , на основании чего можно заключить, что исследуемое семейство робастно устойчиво.

В большинстве случаев область $Q(\omega)$, соответствующая параметрической неопределенности характеристического полинома в плоскости (U, jV) , имеет достаточно сложную форму. Поэтому необходимо иметь общий принцип решения задач робастной устойчивости в различных постановках. Основу частотного подхода к решению задач исследования робастной устойчивости линейных систем составляет принцип исключения нуля, который в общем случае может быть сформулирован следующим образом [2].

Пусть задан некоторый номинальный полином семейства (1.6):

$$D^0(s) = a_0^0 + a_1^0 s + \dots + a_{n-1}^0 s^{n-1} + a_n^0 s^n, \quad \mathbf{a}^0 \in A. \quad (1.15)$$

Семейство (1.6) робастно устойчиво тогда и только тогда, когда номинальный полином устойчив и множество $Q(\omega) = \{D(j\omega) : \mathbf{a} \in A\}$ на комплексной плоскости (U, jV) не содержит нуля при всех $0 \leq \omega < \infty$, т.е. при

$$0 \notin Q(\omega), \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (1.16)$$

В самом деле, если в семействе (1.6), содержится неустойчивый полином $D'(s)$ с вектором коэффициентов $\mathbf{a}' \in A$, то при непрерывном изменении

коэффициентов характеристического уравнения вдоль некоторой линии (a^0, a^r) в пределах области A (рис. 1.6) в силу непрерывной зависимости

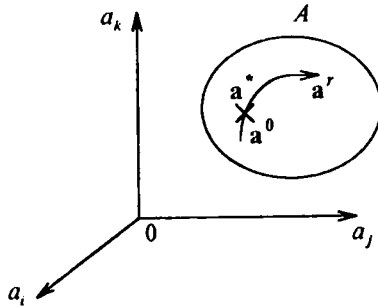


Рис. 1.6.

корней характеристического уравнения от его коэффициентов и связности множества A найдется, по крайней мере, один полином $D^*(s)$ с вектором коэффициентов $a^* \in (a^0, a^r)$, один или несколько корней которого расположены на мнимой положительной полуоси, т.е. $s_i^* = j\omega_i^*$, где $0 \leq \omega_i^* < \infty$ (рис. 1.7).

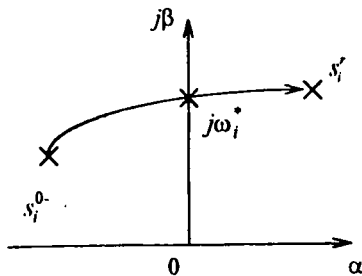


Рис. 1.7.

Тогда при $\omega = \omega_i^*$ выполняется равенство $D^*(j\omega_i^*) = 0$, но поскольку $D^*(j\omega_i^*) \in Q(\omega_i^*)$, то при $\omega = \omega_i^*$ множество $Q(\omega)$ будет содержать начало координат (рис. 1.8), т.е. будет нарушено условие (1.16).

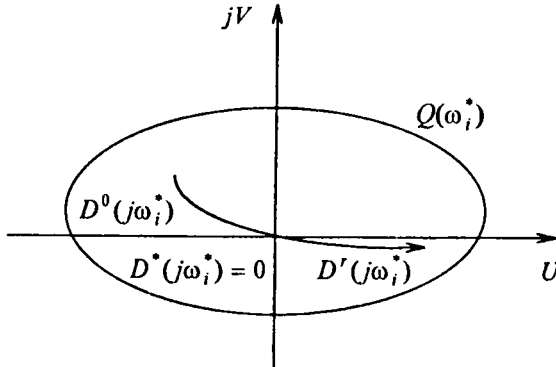


Рис. 1.8.

Принцип исключения нуля в той или иной форме используется при формулировке частотных критериев робастной устойчивости. При этом, как правило, разрабатываются эффективные процедуры совместной проверки устойчивости номинального полинома и отделимости нуля, не требующие построения области $Q(\omega)$ и непосредственно анализа ее поведения при изменении ω от 0 до ∞ .

1.3. КРИТЕРИЙ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Рассмотрим обобщенную постановку задачи исследования робастной устойчивости семейства характеристических полиномов. Скорректируем выражение (1.13), задающее интервальную неопределенность коэффициентов характеристического полинома (1.6), сделав границы изменения

коэффициентов линейно зависящими от общего параметра,

$$A = \{a: |a_i - a_i^0| \leq \gamma \alpha_i, i = \overline{0, n}\}, \quad (1.17)$$

где a_i^0 - коэффициенты номинального полинома; $\alpha_i \geq 0$ - масштабы возмущений коэффициентов; $\gamma \geq 0$ - размах возмущения.

Отметим, что при $\gamma = 0$ семейство (1.6), (1.17) содержит один номинальный полином и задача исследования робастной устойчивости семейства полиномов вырождается в задачу анализа устойчивости полинома $D^0(s)$. Увеличение параметра γ соответствует расширению интервалов неопределенности коэффициентов характеристического полинома. Так, при $\gamma = 1$ имеет место рассмотренная ранее задача исследования робастной устойчивости семейства (1.6), (1.13). В этом случае $a_i^0 = \frac{\bar{a}_i + a_i}{2}$, $\alpha_i = \frac{\bar{a}_i - a_i}{2}$.

В частотной области семейству (1.6), (1.17) соответствует прямоугольник $Q(\omega)$ с центром в точке $D^0(j\omega)$, стороны которого параллельны координатным осям и равны $2\gamma S(\omega)$ и $2\gamma T(\omega)$, где

$$S(\omega) = \alpha_0 + \alpha_2 \omega^2 + \alpha_4 \omega^4 + \dots, \quad (1.18)$$

$$T(\omega) = \alpha_1 \omega + \alpha_3 \omega^3 + \alpha_5 \omega^5 + \dots$$

В данном случае условие отделимости нуля может быть представлено в следующем виде :

$$|U^0(\omega)| - \gamma S(\omega) > 0 \quad \text{или} \quad |V^0(\omega)| - \gamma T(\omega) > 0, \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (1.19)$$

Теперь, поскольку $S(\omega) \geq 0$ и $T(\omega) \geq 0$, при $\omega \geq 0$ условия (1.19) можно преобразовать:

$$\left| \frac{U^0(\omega)}{S(\omega)} \right| > \gamma \quad \text{или} \quad \left| \frac{V^0(\omega)}{T(\omega)} \right| > \gamma, \quad 0 \leq \omega < \infty. \quad (1.20)$$

Условие (1.20) означает, что при $0 \leq \omega < \infty$ годограф $Z(j\omega) = \frac{U^0(\omega)}{S(\omega)} + j \frac{V^0(\omega)}{T(\omega)}$ не должен пересекать γ -квадрат в плоскости (U, jV) , что показано на рис. 1.9.

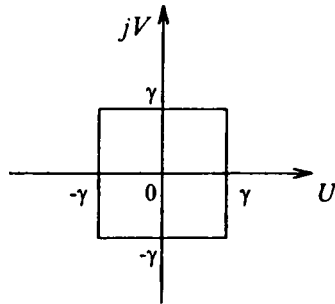


Рис. 1.9.

Отметим, что по поведению годографа $Z(\omega)$ можно судить об устойчивости номинального полинома $D^0(\omega)$, поскольку $S(\omega) \geq 0$, $T(\omega) \geq 0$ при $0 \leq \omega < \infty$, а следовательно, вещественные и мнимые части годографов $D^0(j\omega) = U^0(\omega) + jV^0(\omega)$ и $Z(j\omega) = \frac{U^0(\omega)}{S(\omega)} + j \frac{V^0(\omega)}{T(\omega)}$ при фиксированном значении $\omega > 0$ имеют одинаковый знак, т.е. при изменении ω от 0 до ∞ последовательность обхода квадрантов координатной плоскости у этих годографов совпадает.

Используя критерий устойчивости Михайлова и принцип исключения нуля в виде условия (1.20), сформулируем критерий робастной устойчивости

семейства характеристических полиномов с интервальной параметрической неопределенностью.

Для робастной устойчивости семейства (1.6), (1.17) необходимо и достаточно, чтобы годограф $Z(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ :

- 1) последовательно проходил через n квадрантов;
- 2) не пересекал γ -квадрата;
- 3) выполнялись соотношения $\frac{a_0^0}{\alpha_0} > \gamma$, $\frac{a_n^0}{\alpha_n} > \gamma$.

Выполнение условия 1 означает устойчивость номинального полинома, условие 2 определяет отделимость нуля, условие 3 соответствует значениям $\omega = 0$ и $\omega = \infty$, при которых условие (1.20) не определено.

Рассмотрим отдельно случаи $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. При $\omega = 0$ $V^0(\omega) = T(\omega) = 0$, поэтому условие (1.19) выполняется лишь тогда, когда $U^0(0) - \gamma S(0) > 0$, но $U^0(0) = a_0^0$, $S^0(0) = \alpha_0$, откуда $\frac{a_0^0}{\alpha_0} > \gamma$. При $\omega = \infty$ выражение (1.7) с учетом замены $s = j\omega$ примет вид:

$$D(j\infty) = a_n (j\infty - s_n)(j\infty - s_{n-1}) \dots (j\infty - s_1).$$

При любых конечных значениях s_i , $i = \overline{1, n}$ равенство $D(j\infty) = 0$ может быть выполнено только при $a_n = 0$, но согласно (1.17) $|a_n - \alpha_n^0| \leq \gamma \alpha_n$, поэтому неравенство $D(j\infty) \neq 0$ будет выполняться при условии $\frac{a_n}{\alpha_n} > \gamma$.

Максимальное значение размаха параметрических возмущений, определяющее допустимое изменение интервалов неопределенности коэффициентов характеристического уравнения, при котором семейство остается робастно устойчивым может быть определено следующим образом:

$$\gamma_{\max} = \min(\gamma_{\max}^{\infty}, \gamma_{\max}^0, \gamma_{\max}^{\infty}) ,$$

$$\text{где } \gamma_{\max}^{\infty} = \min_{0 < \omega < \infty} (\max(x(\omega), y(\omega))), \quad \gamma_{\max}^0 = \frac{a_0}{\alpha_0}, \quad \gamma_{\max}^{\infty} = \frac{a_n}{\alpha_n} .$$

Приведенный критерий робастной устойчивости семейства характеристических полиномов с интервальной параметрической неопределенностью был сформулирован Я.З. Цыпкиным и Б.Т. Поляком [3].

Данный критерий можно рассматривать как обобщенный критерий Михайлова. Однако даже в случае $\gamma = 0$ (при фиксированных коэффициентах характеристического полинома) годограф $Z(j\omega)$ не совпадает с годографом Михайлова $D(j\omega)$ и в некоторых отношениях более удобен, так как он лежит в ограниченной части плоскости (U, jV) , а не уходит в бесконечность. Отметим также несколько преимуществ полученного результата перед “сильной” теоремой Харитонова: анализируется поведение одного, а не четырех годографов; имеется возможность не только оценить робастную устойчивость семейства характеристических полиномов с интервальной неопределенностью при фиксированном размахе параметрических возмущений γ , но и определить максимальное значение размаха γ_{\max} .

Пример 1.3. Рассмотрим задачу исследования робастной устойчивости семейства характеристических полиномов при $n = 6$

$$a^0 = (24 \quad 52 \quad 62 \quad 44 \quad 21 \quad 6 \quad 1);$$

$$\alpha = (2,4 \quad 5,2 \quad 6,2 \quad 4,4 \quad 2,1 \quad 0,6 \quad 0,1).$$

На (рис. 1.10) приведен годограф $Z(j\omega)$, анализ которого показывает, что номинальный полином семейства устойчив, условия отделимости нуля выполняются при $0 \leq \gamma \leq \gamma_{\max}^{\infty}$, где γ_{\max}^{∞} определяется размером квадрата, вписанного в годограф $Z(j\omega)$, ($\gamma_{\max}^{\infty} = 0,86$). Вычислим $\gamma_{\max}^0 = \frac{24}{2,4} = 10$ и

$\gamma_{\max}^{\infty} = \frac{1,0}{0,1} = 10$. Определим максимальный размах параметрических возмущений $\gamma_{\max} = \min(0,86, 10, 10) = 0,86$. Таким образом, в рассмотренном примере условия робастной устойчивости выполняются при $0 \leq \gamma < 1,20$.

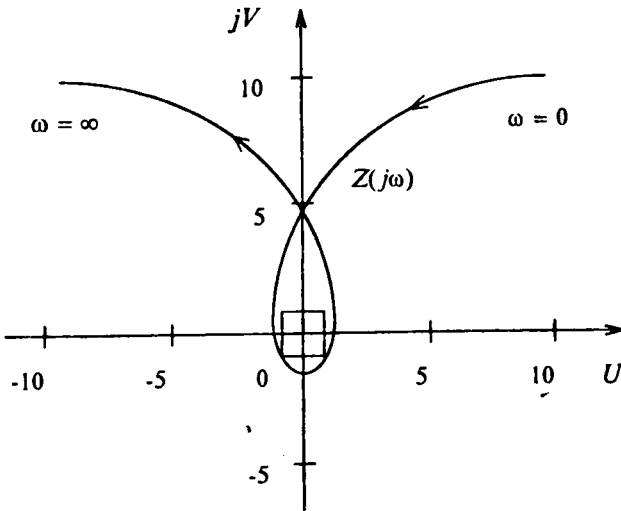


Рис. 1.10.

1.4. КРИТЕРИЙ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ

В предыдущих параграфах были рассмотрены критерии робастной устойчивости для случая, когда характеристический полином системы имеет коэффициенты в виде интервальных чисел. Однако при практических расчетах такое представление часто оказывается "искусственным" и не точно отражает структурные и параметрические свойства реальной системы. Поясним данное утверждение на примере.

На рис. 1.11 приведена структурная схема системы с обратной связью, в которой пропорциональный регулятор известен точно, а динамический объект 2-го порядка является интервальным.

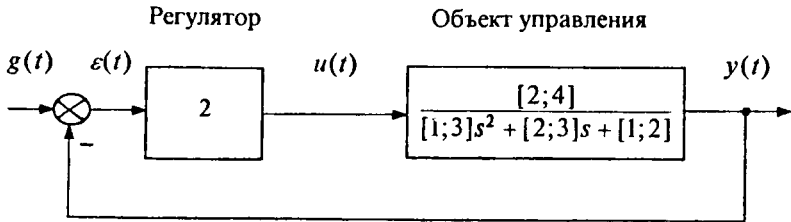


Рис. 1.11.

Запишем характеристический полином замкнутой системы:

$$D(s) = [2;4] \cdot 2 + [1;3]s^2 + [2;3]s + [1;2]. \quad (1.21)$$

Далее с помощью правил интервальной арифметики приведем (1.21) к виду полинома с интервальными коэффициентами

$$D^*(s) = [1;3]s^2 + [2;3]s + [5;10] \quad (1.22)$$

и сравним семейства полиномов (1.21), (1.22).

Нетрудно увидеть, что семейство (1.22) является избыточным по отношению к семейству (1.21). Так, например, характеристическому полиному из (1.22) $D^*(s) = 3s^2 + 3s + 10$ может соответствовать объект управления как содержащийся в (1.21) $W_{11}(s) = \frac{4}{3s^2 + 3s + 2}$, так и не входящий в него $W_{12}(s) = \frac{3}{3s^2 + 3s + 4}$. Другими словами, замена при исследовании робастной устойчивости семейства (1.21) на семейство (1.22)

приводит к тому, что исследуется устойчивость не только требуемого семейства систем, но и дополнительного множества систем.

Формализуем задачу анализа робастной устойчивости систем с фиксированным регулятором и интервальным объектом управления. Обобщенная структура систем данного класса представлена на рис. 1.12.

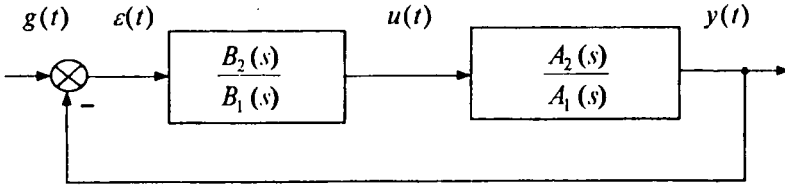


Рис. 1.12.

Полиномы $B_2(s) = \sum_{i=0}^{m_2} b_{2i} s^i$ и $B_1(s) = \sum_{i=0}^{m_1} b_{1i} s^i$ ($m_1 \geq m_2$) относятся к регулятору и заданы точно, а полиномы $A_2(s)$ и $A_1(s)$ описывают объект и являются интервальными:

$$A_2(s) = \sum_{i=0}^{n_2} a_{2i} s^i, \quad |a_{2i} - a_{2i}^0| \leq \gamma \alpha_{2i},$$

$$A_1(s) = \sum_{i=0}^{n_1} a_{1i} s^i, \quad |a_{1i} - a_{1i}^0| \leq \gamma \alpha_{1i}, \quad n_1 \geq n_2,$$

где, как и ранее, a_{2i}^0 и a_{1i}^0 - коэффициенты номинальных полиномов $A_2^0(s)$ и $A_1^0(s)$; $\gamma \geq 0$ - общий размах возмущений; $\alpha_{2i} > 0$ и $\alpha_{1i} > 0$ - масштабы возмущений. Необходимо оценить робастную устойчивость замкнутой системы.

Для этого запишем характеристический полином замкнутой системы

$$D(s) = \sum_{k=1}^2 A_k(s) B_k(s) \text{ и с целью выявления условий выполнения принципа}$$

исключения нуля формализуем описание множества $Q(\omega) = \{D(j\omega)\}$.

Учитывая, что множества $\{A_k(j\omega) B_k(j\omega)\}$, $k=1,2$ представляют собой прямоугольники с центром в $A_k^0(j\omega)$ и сторонами $2\gamma S_k(\omega)$ и $2\gamma T_k(\omega)$, где

$$\begin{aligned} S_k(\omega) &= \alpha_{k0} + \alpha_{k2}\omega^2 + \alpha_{k4}\omega^4 + \dots, \\ T_k(\omega) &= \alpha_{k1}\omega + \alpha_{k3}\omega^3 + \alpha_{k5}\omega^5 + \dots, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} Q(\omega) &= \sum_{k=1}^2 A_k^0(j\omega) B_k(j\omega) + \gamma \sum_{k=1}^2 B_k(j\omega)(s_k + jt_k), \\ |s_k| &\leq S_k(\omega); |t_k| \leq T_k(\omega). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} D^0(j\omega) &= \sum_{k=1}^2 A_k^0(j\omega) B_k(j\omega), \\ D_\delta(j\omega) &= \sum_{k=1}^2 B_k(j\omega)(s_k + jt_k). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Тогда условие отделимости нуля $0 \notin Q(\omega)$ может быть представлено в виде

$$\tau(\omega) = \sup_{\varphi} \frac{\eta(\omega, \varphi)}{k(\omega, \varphi)} > \gamma, \quad \varphi \in [0; 2\pi], \tag{1.24}$$

где

$$\begin{aligned} \eta(\omega, \varphi) &= \operatorname{Re} D^0(j\omega) e^{j\varphi}, \\ k(\omega, \varphi) &= \max_{s_k, t_k} \operatorname{Re} D_\delta(j\omega) e^{j(\varphi + \pi)}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Обоснование выражения (1.24) состоит в следующем. Множество $Q(\omega)$ не будет включать ноль, если найдется прямая, проходящая через начало координат, которая не пересекает $Q(\omega)$. Это равносильно тому, что существует такое $\varphi \in [0, 2\pi]$, при котором

$$\operatorname{Re} D(j\omega)e^{j\varphi} > 0. \quad (1.26)$$

Действительно, приняв в качестве "разделяющей" прямой мнимую ось системы координат, следует поворачивать множество $Q(\omega)$ до тех пор, пока оно не окажется, например, справа от оси, т.е. вещественные составляющие векторов, образующих $Q(\omega)$, будут положительны.

Подставив в (1.26) выражение для $D(j\omega)$, получим:

$$\operatorname{Re}(D^0(j\omega)e^{j\varphi} + \gamma D_\delta(j\omega)e^{j\varphi}) > 0.$$

Или иначе

$$\operatorname{Re} D^0(j\omega)e^{j\varphi} > \gamma \operatorname{Re} D_\delta(j\omega)e^{j(\pi+\varphi)}. \quad (1.27)$$

Поскольку положительность вещественных составляющих достаточно проверять только для оболочки $Q(\omega)$, перепишем (1.27) в виде

$$\operatorname{Re} D^0(j\omega)e^{j\varphi} > \gamma \max_{\omega, \omega_k} \operatorname{Re} D_\delta(j\omega)e^{j(\pi+\varphi)}.$$

Далее, учитывая что (1.26) должно выполняться не для всех φ , а хотя бы для одного из них, приходим к условию (1.24).

Теперь представим $A_k^0(j\omega)$ и $B_k(j\omega)$ в экспоненциальной форме

$$A_k^0(j\omega) = \rho_k e^{j\varphi_k}; \quad B_k(j\omega) = \mu_k e^{j\psi_k}$$

и сформируем критерий робастной устойчивости замкнутых систем [4].

Для того чтобы замкнутая система с фиксированным регулятором и интервальным объектом управления была робастно устойчива, необходимо и достаточно, чтобы был устойчив номинальный полином и для всех ω от 0 до ∞ выполнялось условие $\tau(\omega) > \gamma$, где

$$\tau(\omega) = \max_{\varphi \in \Psi} \frac{\eta(\omega, \varphi)}{k(\omega, \varphi)},$$

$$\eta(\omega, \varphi) = \sum_{k=1}^2 \rho_k \mu_k \cos(\varphi_k + \psi_k + \varphi),$$

$$k(\omega, \varphi) = \sum_{k=1}^2 \mu_k (S_k(\omega) |\cos(\psi_k + \varphi)| + T_k(\omega) |\sin(\psi_k + \varphi)|),$$

$$\Psi = \left\{ \psi_k, \psi_k + \frac{\pi}{2}, \psi_k + \pi, \psi_k + \frac{3}{2}\pi \right\}, k = 1, 2.$$

Аналитические выражения для функций $\eta(\omega, \varphi)$ и $k(\omega, \varphi)$ получают путем подстановки (1.23) в (1.25) и выполнения несложных преобразований. Замена в (1.24) непрерывного интервала по φ дискретным множеством Ψ объясняется тем, что при более подробном рассмотрении множество $Q(\omega)$ оказывается восьмигранником с аргументами сторон $\arg B_k(j\omega) + l\frac{\pi}{2}$, $l = 0, 1, 2, 3$. Тогда для анализа условия отделимости (1.26) $Q(\omega)$ достаточно поворачивать именно на эти углы, поскольку в этом случае по крайней мере одна из сторон восьмигранника будет параллельна мнимой оси, т.е. будет совпадать по направлению с разделяющей прямой.

Пример 1.4. Рассмотрим задачу анализа робастной устойчивости замкнутой системы при условии, что номинальный полином устойчив, $\gamma = 5$ и

$$a_{A_1} = (100); \alpha_{A_1} = (5);$$

$$a_{A_2} = (5 \cdot 10^{-3} \ 0,015 \ 1 \ 0); \alpha_{A_2} = (10^{-5} \ 0,001 \ 0,05);$$

$$a_{B_1} = (0,0125 \ 2,176 \ 1); \alpha_{B_1} = (0,012 \ 0,29 \ 1),$$

где \mathbf{a}_{A_k} - векторы коэффициентов полиномов $A_k^0(s)$; \mathbf{a}_{B_k} - векторы коэффициентов полиномов $B_k(s)$; α_{A_k} - векторы диапазонов изменения коэффициентов полиномов $A_k(s)$.

Из рис. 1.13, на котором приведен график функции $\pi(\omega)$, следует, что замкнутая система робастно устойчива, т.к. $\pi(\omega) > 5$.

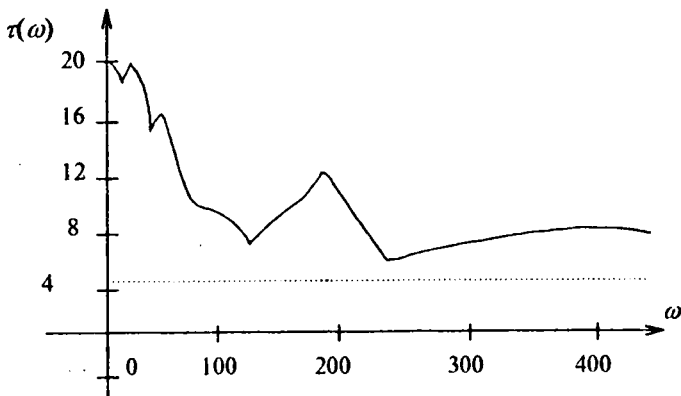


Рис. 1.13.

1.5. РОБАСТНОЕ D-РАЗБИЕНИЕ

При исследовании устойчивости систем большое практическое значение имеет задача параметрического анализа устойчивости. В отличие от обычной постановки задачи оценки устойчивости, когда система полностью задана и необходимо определить, устойчива она или нет, в случае параметрического анализа устойчивости требуется найти допустимые области изменения некоторых параметров (например, коэффициентов регулятора), в пределах которых система устойчива. Полное решение задачи параметрического анализа устойчивости разработано в предположении, что система линейна; искомых параметров, влияние на устойчивость которых исследуется, один или два; искомые параметры входят в характеристический полином линейно. Метод решения задачи параметрического анализа устойчивости с учетом

перечисленных ограничений получил название метода D -разбиения [5].

При D -разбиении пространства параметров выделяют области $D(m)$, отвечающие заданному числу m корней характеристического полинома в правой полуплоскости. Область с числом корней, равным нулю, является областью устойчивости.

В робастной постановке задачи D -разбиения выделяется один или два параметра, а по остальным задается область их изменения. Робастным D -разбиением называются те области относительно искомым параметров, для которых сохраняется заданное число корней характеристического полинома в правой полуплоскости при любых значениях остальных параметров из заданной области их изменения.

Рассмотрим способы построения робастного D -разбиения для основных случаев [6].

Робастное D -разбиение по одному параметру.

Предположим, что характеристический полином линейной системы n -го порядка имеет вид:

$$D(s) = vN(s) + L(s), \quad (1.28)$$

где v - выделенный параметр, $N(s)$ - полином, содержащий v множителей; $L(s)$ - полином, не зависящий от v .

При обычном D -разбиении полиномы $N(s)$ и $L(s)$ фиксированы и уравнение границы D -разбиения получают путем подстановки в (1.28) $s = j\omega$ и приравниванием полученного выражения нулю:

$$vN(j\omega) + L(j\omega) = 0. \quad (1.29)$$

Действительно, при некотором значении параметра v один из корней или пара корней полинома (1.28) попадают на мнимую ось, и, следовательно,

соответствующая точка в плоскости параметра v будет удовлетворять уравнению (1.29).

Тогда кривая

$$v = -\frac{L(j\omega)}{N(j\omega)} \quad (1.30)$$

разобьет плоскость параметра v на области, в пределах которых число корней характеристического полинома в правой полуплоскости корней остается постоянным. Изменение числа корней в правой полуплоскости возможно только при таком изменении параметра v , когда происходит пересечение кривой (1.30).

Перебирая ω от $-\infty$ до $+\infty$ и временно предполагая, что параметр v является комплексной величиной, по формуле (1.30) строят границу D -разбиения. Затем путем прямого тестирования или путем нанесения на границу D -разбиения по определенным правилам штриховки определяют область параметра v , в пределах которой число правых корней полинома (1.28) равно нулю, т.е. определяют область устойчивости. Так как изменяемый параметр - вещественное число, то из полученной области устойчивости выделяют только отрезок устойчивости, т.е. отрезок вещественной оси, лежащей в области устойчивости.

Теперь предположим, что полином $L(s)$ является интервальным

$$L(s) = a_{L,0} + a_{L,1}s + \dots + a_{L,l}s^l, \quad |a_{L,i} - a_{L,i}^0| \leq \alpha_{L,i}, \quad i = \overline{0, l}, \quad (1.31)$$

где l - порядок полинома; $a_{L,i}^0$ - коэффициент номинального полинома $L^0(s)$, причем $a_{L,l} \neq 0$; $\alpha_{L,i} \geq 0$ - заданные диапазоны изменения коэффициентов $a_{L,i}$.

Тогда уравнение границы D -разбиения будет иметь вид

$$vN(j\omega) + L^0(j\omega) + (s + jt) = 0, \quad (1.32)$$

$$|s| \leq S(\omega), \quad |t| \leq T(\omega),$$

$$S(\omega) = \alpha_{L0} + \alpha_{L2}\omega^2 + \alpha_{L4}\omega^4 + \dots,$$

$$T(\omega) = \alpha_{L1}\omega + \alpha_{L3}\omega^3 + \alpha_{L5}\omega^5 + \dots,$$

где $L^0(j\omega)$ - функция Михайлова номинального полинома семейства (1.31).

Запишем (1.32) относительно искомого параметра

$$v = -\frac{L^0(j\omega)}{N(j\omega)} - \frac{(s + jt)}{N(j\omega)} \quad (1.33)$$

и сравним полученное уравнение с уравнением кривой D -разбиения для фиксированных полиномов (1.30).

Нетрудно убедиться, что при фиксированном ω граница D -разбиения (1.33) представляет собой прямоугольник с центром в соответствующей точке границы D -разбиения полинома (1.28) с номинальным полиномом $L^0(s)$ и вершинами, порождаемыми полиномами Харитонова семейства (1.31). Другими словами, при наличии интервальной неопределенности полинома $L(s)$ каждая точка границы D -разбиения номинального полинома «размоется» в прямоугольник и соответственно граница D -разбиения номинального полинома «размоется» в полосу. Выбор параметра v в пределах этой полосы означает, что существует такой полином $L(s)$, для которого при данном значении параметра v число правых корней характеристического полинома $D(s)$ изменится, и напротив, выбор параметра v за пределами полосы гарантирует, что в этой точке для любого из полиномов $L(s)$ число правых корней характеристического полинома $D(s)$ остается постоянным.

Необходимо отметить, что число правых корней характеристического полинома может измениться, если при некотором v степень полинома $D(s)$ станет меньше n . Это может произойти в двух случаях:

$$1) \quad n > l, \text{ когда } v = 0, \quad (1.34)$$

$$2) \quad n = l, \text{ когда } |va_{Nn} + a_{Ll}^0| \leq \alpha_{Ll}, \quad (1.35)$$

где a_{Nn} - старший коэффициент полинома $N(s)$.

Таким образом, для робастного D -разбиения по одному параметру необходимо выполнить следующее:

- построить обычное D -разбиение номинального характеристического полинома и выделить область (отрезок) устойчивости;
- для каждой точки границы D -разбиения номинального полинома построить прямоугольник с вершинами

$$v_k = -v_0 - \frac{\pm S(\omega) \pm jT(\omega)}{N(j\omega)}, \quad k = \overline{1,4}, \quad (1.36)$$

где v_0 - точка границы D -разбиения номинального полинома;

- проверить возможность уменьшения степени характеристического полинома, и если необходимо, построить полосу (1.35).

Оставшаяся часть после расширения границы D -разбиения области (отрезка) устойчивости номинального полинома и есть область (отрезок) робастной устойчивости.

Пример 1.5. Рассмотрим задачу построения робастного D -разбиения по одному параметру при

$$a_N = (0 \ 1 \ 3 \ 2), \quad a_L = (11 \ 3 \ 2), \quad \alpha_L = (0,22 \ 0,09 \ 0,02).$$

Здесь \mathbf{a}_N -вектор коэффициентов полинома $N(s)$; \mathbf{a}_L -вектор номинальных коэффициентов полинома $L^0(s)$; α_L -вектор диапазонов изменения коэффициентов полинома $L(s)$.

Робастное D -разбиение показано на рис. 1.14, где приняты следующие обозначения: 1- граница (кривая) D -разбиения номинального полинома; 2- граница (полоса) робастного D -разбиения; $[a, c], [d; +\infty [$ - отрезки устойчивости номинального полинома; $[a; b], [e; \infty [$ - отрезки робастной устойчивости.

В точке $\nu = 0$ степень характеристического полинома станет равной 2, но это не приведет к изменению числа правых корней, т.к. в этом случае положительность коэффициентов \mathbf{a}_L гарантирует устойчивость системы.

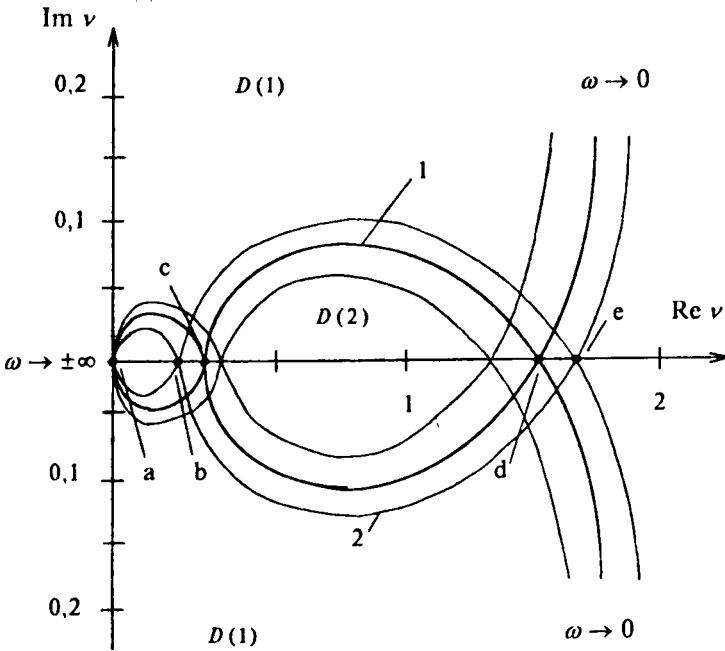


Рис. 1.14.

Робастное D -разбиение по двум параметрам.

Пусть характеристический полином замкнутой системы n -го порядка можно привести к виду

$$D(s) = \nu N(s) + \mu M(s) + L(s) = 0, \quad (1.37)$$

где $N(s)$, $M(s)$, $L(s)$ - полиномы относительно s со степенью не выше n ; ν и μ - изменяемые параметры, влияние на устойчивость которых исследуется.

При фиксированных полиномах $N(s)$, $M(s)$ и $L(s)$ граница D -разбиения для (1.37) определяется из уравнения

$$D(j\omega) = \nu N(j\omega) + \mu M(j\omega) + L(j\omega) = 0, \quad (1.38)$$

где $-\infty < \omega < \infty$.

Разбивая (1.38) на два уравнения, приравняв отдельно вещественную и мнимую части к нулю, получают систему двух уравнений, решение которой относительно ν и μ при изменении ω представляет собой параметрическую форму границы D -разбиения. Кроме того, нужно проанализировать те ω , для которых уравнение (1.38) имеет не единственное решение и в плоскости ν и μ для данных ω получается не точка, а так называемая особая прямая, также являющаяся границей D -разбиения.

Теперь предположим, что $L^0(j\omega)$ - интервальный полином вида (1.31). Тогда граница робастного D -разбиения определяется уравнением

$$D(j\omega) = \nu N(j\omega) + \mu M(j\omega) + L^0(j\omega) + s + jt = 0, \quad (1.39)$$

$$|s| \leq S(\omega), \quad |t| \leq T(\omega),$$

где $S(\omega)$ и $T(\omega)$ вычисляются в соответствии с (1.32).

Перепишем (1.39) в виде

$$\operatorname{Re} N(j\omega)v + \operatorname{Re} M(j\omega)\mu = -(\operatorname{Re} L^0(j\omega) + s),$$

$$\operatorname{Im} N(j\omega)v + \operatorname{Im} M(j\omega)\mu = -(\operatorname{Im} L^0(j\omega) + t)$$

или

$$A(\omega) \begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix} = P(\omega), \quad (1.40)$$

где $P(\omega)$ - прямоугольник с центром в $L^0(j\omega)$ и сторонами $2S(\omega)$, $2T(\omega)$;

$A(\omega)$ - матрица линейного преобразования размерностью 2×2 :

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} N(j\omega) & \operatorname{Re} M(j\omega) \\ \operatorname{Im} N(j\omega) & \operatorname{Im} M(j\omega) \end{bmatrix}.$$

Тогда из уравнения (1.40) имеем

$$\begin{bmatrix} v \\ \mu \end{bmatrix} = A^{-1}(\omega) P(\omega). \quad (1.41)$$

Здесь $A^{-1}(\omega)P(\omega)$ - параллелограмм, вершины которого определяются как $A^{-1}(\omega)b_k$, где b_k - вершины прямоугольника $P(\omega)$:

$$b_k = (-\operatorname{Re} L^0(j\omega) \pm S(\omega), -\operatorname{Im} L^0(j\omega) \pm T(\omega)), \quad k = \overline{1, 4}, \quad (1.42)$$

причем точка пересечения диагоналей параллелограмма совпадает с соответствующей точкой \mathcal{D} -разбиения характеристического полинома (1.37)

с номинальным полиномом $L^0(s)$.

Таким образом, граница робастного D -разбиения представляет собой «полосу», получающуюся при перемещении вдоль границы D -разбиения номинального характеристического полинома, некоторого параллелограмма, зависящего от частоты ω .

Кроме того, может потребоваться «расширение» особых прямых.

Известно, что в большинстве практических задач особые прямые получаются при значениях $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. В этом случае хотя бы один из параметров ν и μ входит в коэффициенты, соответствующие свободному и старшему членам характеристического уравнения. Особая прямая при $\omega = 0$ получается приравниванием к нулю коэффициента, соответствующего свободному члену характеристического уравнения, особая прямая при $\omega = \infty$ получается приравниванием к нулю коэффициента, соответствующего старшему члену характеристического уравнения. Если в выражения для коэффициентов старшего и свободного членов характеристического уравнения входят интервальные коэффициенты полинома $\mathcal{L}(s)$, то особая прямая будет «размываться» в полосу между двумя параллельными или пересекающимися прямыми, уравнения которых не трудно получить путем подстановки в исходное выражение крайних значений интервальных коэффициентов.

Таким образом, алгоритм построения робастного D -разбиения состоит в следующем:

с помощью известных правил в плоскости параметров ν и μ строится граница D -разбиения номинального характеристического полинома;

с помощью формул (1.41), (1.42) для каждого ω строят соответствующий параллелограмм, тем самым «расширяя» границу D -разбиения номинального характеристического полинома в полосу;

если потребуется, «расширяют» особые прямые.

Пример 1.6. Рассмотрим задачу построения робастного D -разбиения по двум параметрам при

$$\mathbf{a}_N = (0 \ 1 \ 2 \ 1), \mathbf{a}_M = (1), \mathbf{a}_L = (1 \ 2 \ 1), \alpha_L = (0,25 \ 0,4 \ 0,1),$$

где, как и в предыдущем примере, $\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_M, \mathbf{a}_L$ - векторы коэффициентов полиномов $N(s)$, $M(s)$ и $L^0(s)$ соответственно; α_L - вектор диапазонов изменения коэффициентов интервального полинома $L(s)$.

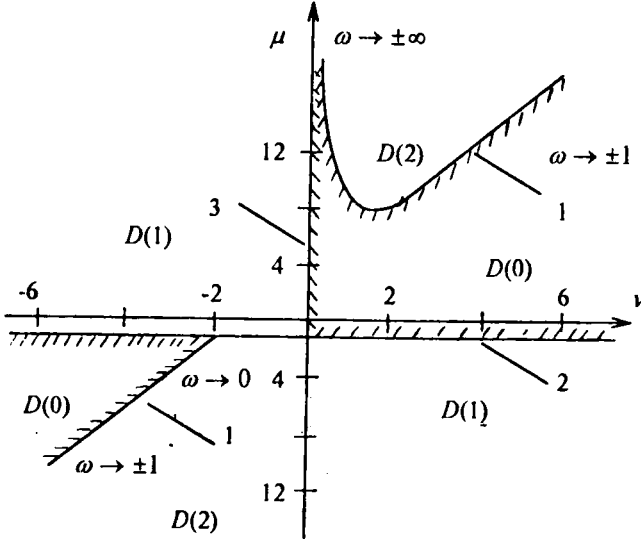


Рис. 1.15.

На рис. 1.15 показано D -разбиение номинального полинома, где 1 - кривая D -разбиения; 2 - особая прямая $\mu = -\alpha_{L0}^0 = -1$ при $\omega \rightarrow \infty$; 3-особая прямая $v = 0$, при $\omega = 0$.

На рис.1.16 показано робастное D -разбиение. Кривая 1 размывается в полосу 1', особая прямая 2 - в полосу 2' между прямыми

$$\mu = -\alpha_{L0}^0 + \alpha_{L0} = -0,75 \text{ и } \mu = -\alpha_{L0}^0 - \alpha_{L0} = -1,25,$$

особая прямая 3 не размывается, т.к. ее уравнение не зависит от интервальных коэффициентов.

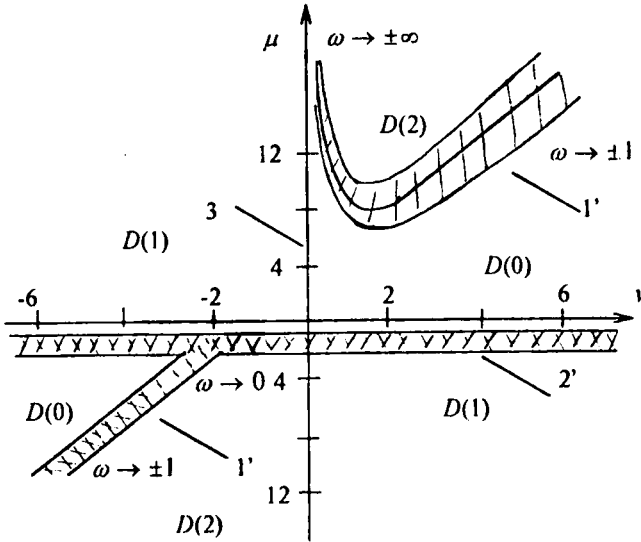


Рис. 1.16.

2. РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

2.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В практике расчетов систем автоматического управления широкое распространение получили модели линейных непрерывных систем с запаздыванием. Это вызвано двумя причинами. Во-первых, во многих технологических процессах наблюдаются эффекты чистого транспортного запаздывания. Классическими примерами здесь являются перемещение материала из одной точки в другую с помощью ленточных транспортеров, или измерение толщины листа при прокате стали. Во-вторых, часто

аппроксимируют передаточные функции сложных систем с распределенными параметрами передаточными функциями систем с сосредоточенными параметрами и эквивалентными временами чистого запаздывания, или сложные системы высокого порядка с сосредоточенными параметрами, содержащие большое число инерционных звеньев, заменяют более простой системой низкого порядка, но содержащей звенья чистого запаздывания.

В общем случае, характеристический полином линейной непрерывной системы с запаздыванием имеет вид

$$D(s) = P(s) + \sum_{k=1}^m R_k(s)e^{-\tau_k s} \quad (2.1)$$

где $P(s), R_k(s)$ - полиномы различной степени относительно s , причем порядок полиномов $R_k(s)$, по крайней мере, на единицу меньше порядка полинома $P(s)$; $\tau_k > 0$ - время чистого запаздывания.

В классической постановке задачи (при фиксированных коэффициентах полиномов $P(s)$ и $R_k(s)$) для того чтобы линейная непрерывная система с запаздыванием была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни полинома (2.1) были левыми. Однако прямое нахождение корней затруднительно ввиду того, что полином (2.1) из-за наличия множителей $e^{-\tau_k s}$ является не полиномом, а трансцендентной функцией (или иначе квазиполиномом) и, в отличие от обыкновенного алгебраического полинома, имеет бесконечное множество корней. По этой же причине алгебраические критерии устойчивости Рауса и Гурвица в их обычной форме для исследования систем с запаздыванием непригодны. Применение специальных алгебраических критериев устойчивости систем с запаздыванием не нашло широкого распространения. Для практических целей оказалось удобней использовать частотные критерии (обобщение критериев Михайлова и Найквиста) и близкие к ним методы, например волновой метод [7].

В робастной постановке задачи предполагается, что коэффициенты полиномов $P(s)$ и $R_k(s)$ принадлежат некоторому множеству неопределенности, т.е. выражение (2.1) представляет собой не квазиполином, а семейство квазиполиномов.

Для того чтобы линейная непрерывная система с запаздыванием была робастно устойчива, необходимо и достаточно, чтобы было устойчиво множество систем со всеми возможными наборами коэффициентов полиномов $P(s)$ и $R_k(s)$, выбранными в пределах исходного множества неопределенности. В теории робастной устойчивости разработаны критерии, позволяющие оценить робастную устойчивость систем с запаздыванием, не перебирая все исходное множество систем, а ограничившись исследованием устойчивости конечного набора квазиполиномов или анализом поведения специальных частотных кривых. Некоторые из этих критериев будут рассмотрены ниже. Важно отметить, что для систем с запаздыванием в общем случае не выполняются теоремы Харитонова. Проиллюстрируем данное утверждение на примере.

Пример 2.1. Рассмотрим систему, структурная схема которой изображена на рис. 2.1. Нетрудно показать, что характеристический полином данной системы имеет вид:

$$(s + e^{-s})^2 + k = 0. \quad (2.2)$$

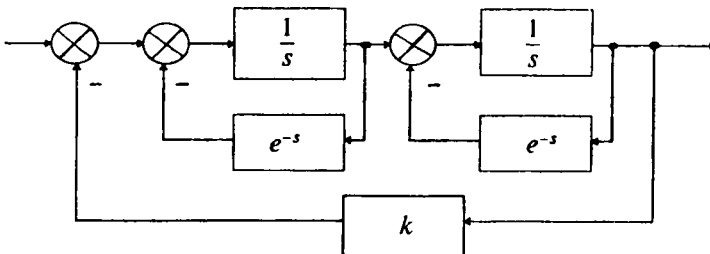


Рис. 2.1.

На рис. 2.2 показана граница D -разбиения полинома (2.2) относительно коэффициента обратной связи k .

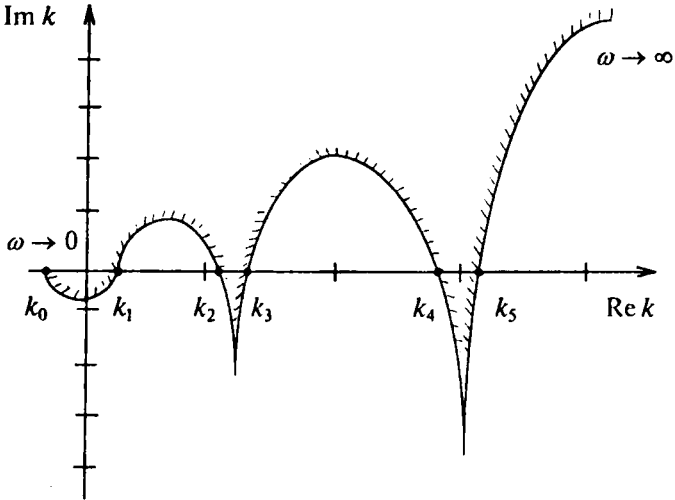


Рис.2.2.

Учитывая направление штриховки кривой D -разбиения, можно сделать вывод о том, что замкнутая система будет устойчива, если $k \in]k_0; k_1[\cup]k_2; k_3[\cup \dots$ и неустойчива, когда $k \in [k_1; k_2] \cup [k_3; k_4] \cup \dots$.

Пусть в исходной постановке задачи коэффициент k не фиксирован, а принадлежит интервалу $k = [\underline{k}, \bar{k}]$, где $\underline{k} \in]k_0; k_1[$, $\bar{k} \in [k_2; k_3[$.

Тогда в соответствии с теоремами Харитонова система будет робастно устойчива, т.к. устойчивы квазиполиномы с $k = \underline{k}$ и $k = \bar{k}$. Однако это не соответствует действительности, потому что, как видно из рис. 2.2, интервал k включает интервал неустойчивости системы $[k_1; k_2]$.

2.2. КРИТЕРИЙ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Критерии робастной устойчивости систем с запаздыванием подразделяются на алгебраические и частотные. Критерии алгебраического типа основываются на реберной теореме [8] и ввиду их относительной сложности здесь рассматриваться не будут. Частотные критерии представляют собой ту или иную интерпретацию принципа исключения нуля и сводятся к анализу поведения некоторых частотных функций.

Рассмотрим один из основополагающих частотных критериев робастной устойчивости систем с запаздыванием, известный в теории робастной устойчивости как критерий Бармиша-Ши.

Пусть характеристический полином системы имеет вид (2.1), причем:

$$P(s) = A_0(s)B_0(s), \quad R_k(s) = A_k(s)B_k(s), \quad k = \overline{1, m}, \quad (2.3)$$

где полиномы $B_k(s) = \sum_{i=0}^{b_k} b_{ik}s^i$, $k = \overline{1, m}$ заданы точно, а полиномы $A_k(s)$ являются интервальными:

$$A_k(s) = \sum_{i=0}^{n_k} a_{ik}s^i, \quad |a_{ik} - a_{ik}^0| \leq \gamma \alpha_{ik}, \quad k = \overline{1, m}. \quad (2.4)$$

Здесь, как и ранее, a_{ik}^0 - коэффициенты номинальных полиномов A_k^0 ; $\gamma > 0$ - общий размах возмущений; $\alpha_{ik} > 0$ - масштабы возмущений.

Предположим, что хотя бы один из квазиполиномов семейства (2.1), (2.2), (2.3) устойчив. Тогда, согласно условию отделмости нуля, для того чтобы система была робастно устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы область

возможных значений семейства квазиполиномов $D(j\omega)$ при фиксированном ω не включала начало координат для всех ω от 0 до ∞ .

Для любого ω множество возможных значений семейства квазиполиномов $D(j\omega)$ в общем случае представляет собой многоугольник $M(\omega)$, определяемый как выпуклая оболочка множества точек $D_\mu(j\omega)$, где $D_\mu(j\omega)$ - значения угловых квазиполиномов семейства (2.1), (2.2), (2.3) при данной частоте. Угловые квазиполиномы получают путем подстановки в (2.1) граничных значений интервальных коэффициентов a_{jk} . На рис. 2.3 приведен многоугольник $M(\omega)$, где точками a^1, a^2, \dots, a^8 обозначены значения угловых квазиполиномов $D_1(j\omega), D_2(j\omega), \dots, D_8(j\omega)$, в предположении, что общее число интервальных коэффициентов равно 3.

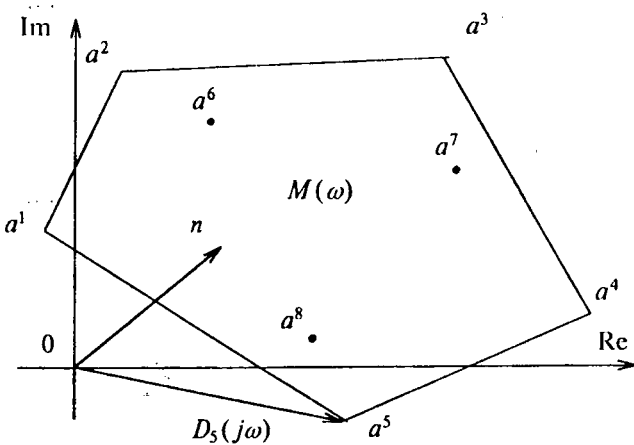


Рис. 2.3.

Для того чтобы показать, что $0 \notin M(\omega)$, достаточно найти хотя бы один вектор, выходящий из начала координат, скалярное произведение которого на векторы, построенные в точки, образующие все вершины многоугольника $M(\omega)$, было бы больше нуля. Таким требованиям на рис.2.3 удовлетворяет,

например, вектор n . В противном случае (рис.2.4) для любого вектора, выходящего из начала координат, найдется такая вершина многоугольника $M(\omega)$, что угол между соответствующими векторами будет равен или больше $\frac{\pi}{2}$, а следовательно, скалярное произведение векторов будет равно или меньше нуля. Например, на рис.2.4 для вектора n_1 , требованию положительности скалярного произведения не удовлетворяют векторы $D_1(j\omega)$ и $D_5(j\omega)$, для вектора n_2 - векторы $D_1(j\omega)$ и $D_2(j\omega)$ и т.д.

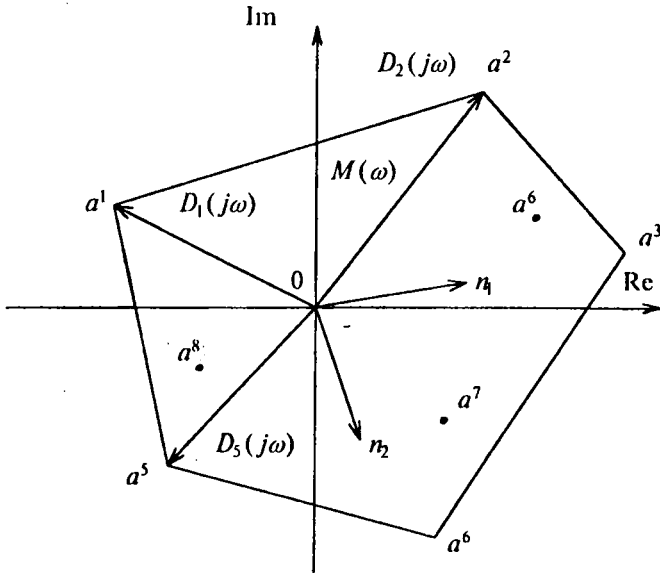


Рис. 2.4.

Из приведенных простых рассуждений, подкрепленных геометрическими построениями, следует алгоритм критерия Бармиша-Ши.

Для каждого ω от 0 до ∞ необходимо выполнить следующие вычисления.

1. Определить значения угловых квазиполиномов $D_\mu(j\omega)$, $\mu = \overline{1, \nu}$, где ν - общее число угловых квазиполиномов.

2. Для некоторого единичного вектора $n = \cos(2\pi p) + j \sin(2\pi p)$, где $p \in [0; 1]$, выбрать минимум скалярного произведения векторов n и $D_\mu(j\omega)$. С учетом формулы для вычисления скалярного произведения двух векторов

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} = (\overline{a + jb}) \cdot (\overline{c + jd}) = a \cdot c + b \cdot d,$$

выражение для вычисления имеет следующий вид:

$$n_r(p, \omega) = \min_{\mu \leq \nu} (\cos(2\pi p) \operatorname{Re} D_\mu(j\omega) + \sin(2\pi p) \operatorname{Im} D_\mu(j\omega)). \quad (2.5)$$

В соответствии с (2.5) вычисление скалярного произведения производится для всех угловых квазиполиномов, а не только для тех, которые образуют на данной частоте вершины многоугольника $M(\omega)$. Это объясняется чисто вычислительными аспектами, т.к. определение вершин многоугольника может оказаться достаточно трудоемкой задачей, которую необходимо решать для каждого ω . В этом смысле более просто перебрать все угловые квазиполиномы, потому что, с одной стороны, множество векторов, образующих вершины $M(\omega)$, является подмножеством векторов $D_\mu(j\omega)$, с другой стороны, если требование положительности скалярного произведения выполняется для векторов, образующих вершины $M(\omega)$, оно выполняется и для оставшихся $D_\mu(j\omega)$. Кроме того, чтобы убедиться в положительности всех скалярных произведений, достаточно проверить знак минимального из них.

3. Путем изменения параметра p от 0 до 1 найти направление вектора n , которому будет соответствовать максимальное значение функции (2.5):

$$H_r(\omega) = \max_{p \in [0; 1]} h_r(p, \omega). \quad (2.6)$$

4. Проверить условие

$$H_c(\omega) > 0. \quad (2.7)$$

Если условие (2.7) для данной частоты выполняется, тогда найденный вектор n образует со всеми векторами $D_\mu(j\omega)$ острый угол. В противном случае вектора n , удовлетворяющего указанным требованиям не существует. А это значит, что $0 \in M(\omega)$, т.е. на данной частоте не выполняется условие отделимости нуля.

Таким образом, формулировка критерия Бармиша-Ши состоит в следующем [9].

Все квазиполиномы семейства (2.1), (2.2), (2.3) робастно устойчивы тогда и только тогда, когда один из них устойчив и $H_c(\omega) > 0$ для всех $0 \leq \omega \leq \infty$.

Пример 2.2. Исследуем с помощью критерия Бармиша-Ши контрпример из параграфа 2.1.

Для характеристического полинома (2.1)

$$D(s) = (s - e^{-s}) + k = s^2 + 2e^{-s} + e^{-2s} + k$$

введем обозначения:

$$P(s) = s^2 + \bar{k}; \quad R_1(s) = 2; \quad R_2(s) = 1; \quad \tau_1 = 1; \quad \tau_2 = 2.$$

Пусть также $\bar{k} \in [\underline{k}, \bar{k}]$ и $\gamma = 1$, т.е. $k^0 = \frac{\bar{k} + \underline{k}}{2}$, $\alpha_k = \frac{\bar{k} - \underline{k}}{2}$, где k^0 - номинальное значение коэффициента k ; α_k - масштаб возмущений коэффициента k . Тогда решаемая задача соответствует постановке (2.1), (2.2), (2.3).

Исходное семейство квазиполиномов включает только два угловых

квазиполинома $D_1(j\omega)$ и $D_2(j\omega)$. Поэтому многоугольник $M(\omega)$ представляет собой отрезок.

На рис.2.5 приведена функция $H_r(\omega)$ для случая, когда $\underline{k} \in]k_0; k_1[$ и $\bar{k} \in]k_0; k_1[$ (см. рис. 2.2). При построении принято, что $\underline{k}=0$ и $\bar{k}=40$. Несмотря на то, что квазиполиномы исходного семейства с $k = \underline{k}$ и $k = \bar{k}$ устойчивы, система в целом робастно неустойчива, т.к. существует частотный отрезок, на котором $H_r(\omega) < 0$.

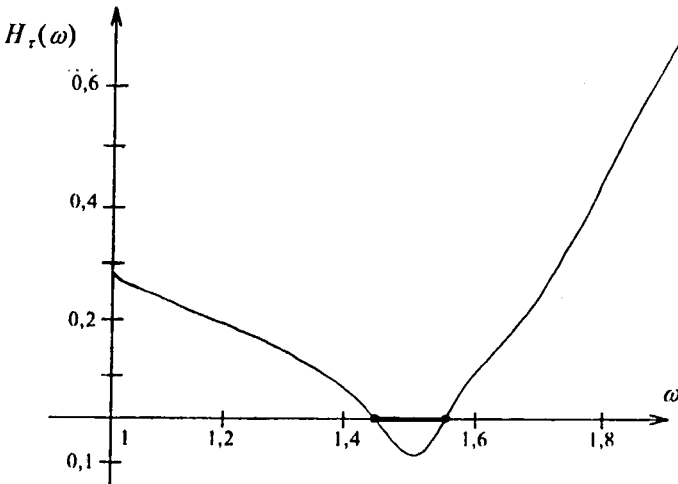


Рис. 2.5.

На рис. 2.6 изображена функция $H_r(\omega)$ при $k \in [k_2; k_3]$ для $\underline{k} = 38$ и $\bar{k} = 43$. Поскольку угловые квазиполиномы устойчивы и для всех ω функции $H_r(\omega)$ больше нуля, исходное семейство квазиполиномов робастно устойчиво.

Таким образом, полученные результаты полностью соответствуют результатам анализа характеристического уравнения (2.1) с помощью метода D -разбиения, представленным в п. 2.1.

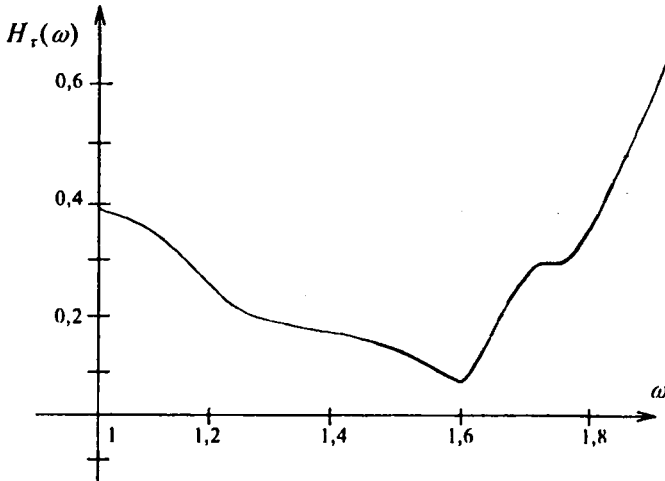


Рис. 2.6.

Отметим также, что путем изменения общего размаха возмущений γ можно добиться такой ситуации, когда

$$H_r(\omega) = 0, \omega = \omega' \text{ и } H_r(\omega) > 0, \omega \neq \omega'. \quad (2.8)$$

В этом случае система находится на грани робастной устойчивости, а найденное значение $\gamma = \gamma_{\text{пик}}$ может интерпретироваться как мера робастной устойчивости.

Проанализируем алгоритм критерия Бармиша-Ши с точки зрения вычислительной сложности. В соответствии с формулами (2.5), (2.6) и (2.7) необходимо выполнить трехуровневый вложенный перебор по двум параметрам ω и p , изменяющимся в пределах непрерывных интервалов и по множеству $\{1, 2, \dots, \nu\}$. Кроме того, для оценки меры робастной устойчивости $\gamma_{\text{пик}}$ требуется многократное построение $H_r(\omega)$ с целью поиска γ , при котором выполняется условие (2.8). Даже при относительно небольшом числе интервальных коэффициентов такая процедура требует значительных объемов вычислений.

Покажем теперь возможность снижения вычислительной сложности решения задачи анализа робастной устойчивости систем с запаздыванием за счет применения более простого достаточного критерия устойчивости.

Примем в качестве номинального характеристического квазиполинома семейства (2.1), (2.2) и (2.3) фиксированный квазиполином вида:

$$D^0(s) = A_0^0(s)B_0(s) + \sum_{k=1}^m A_k^0(s)B_k(s)e^{-\tau_k s}$$

где $A_k^0(s)$ - полиномы с номинальными коэффициентами a_{ik}^0 , и исследуем вид множества возможных значений семейства квазиполиномов $D(j\omega)$.

Нетрудно показать, что множество значений $A_0(j\omega) \cdot B_0(j\omega)$ на комплексной плоскости при фиксированном ω и всех возможных значениях коэффициентов интервального полинома $A_0(s)$ представляет собой прямоугольник, точка пересечения диагоналей которого соответствует вектору $A_0(j\omega) \cdot B_0(j\omega)$, а длина диагоналей определяется выражением

$$d_0(\omega) = 2\gamma \sqrt{S_0^2(\omega) + T_0^2(\omega)} |B_0(j\omega)|,$$

где $S_0(\omega) = \alpha_{00} + \alpha_{20}\omega^2 + \alpha_{40}\omega^4 + \dots$; $T_0(\omega) = \alpha_{10}\omega + \alpha_{30}\omega^3 + \alpha_{50}\omega^5 + \dots$

Аналогично, для $A_k(j\omega)B_k(j\omega)e^{-j\omega\tau_k}$ центр прямоугольника лежит в точке $A_k^0(j\omega)B_k^0(j\omega)e^{-j\omega\tau_k}$, и длина диагоналей

$$d_k(\omega) = 2\gamma \sqrt{S_k^2(\omega) + T_k^2(\omega)} |B_k(j\omega)|, \quad k = \overline{1, m},$$

где $S_k(\omega) = \alpha_{0k} + \alpha_{2k}\omega^2 + \alpha_{4k}\omega^4 + \dots$; $T_k(\omega) = \alpha_{1k}\omega + \alpha_{3k}\omega^3 + \alpha_{5k}\omega^5 + \dots$

Впишем прямоугольники в окружности с центрами в точке пересечения диагоналей и радиусами $r_k(\omega) = \frac{d_k(\omega)}{2}$, $k = \overline{0, m}$.

Тогда область возможных значений семейства квазиполиномов $D(j\omega)$ при фиксированной частоте гарантированно принадлежит кругу $O(\omega)$ с центром в точке $D^0(j\omega)$ и радиусом $r(\omega) = \sum_{k=0}^m r_k(\omega)$.

Для выполнения условия $0 \notin O(\omega)$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|D^0(j\omega)| > \sum_{k=0}^m r_k(\omega)$.

Учитывая выражение для $r_k(\omega)$, получим:

$$\frac{D^0(j\omega)}{R(\omega)} > \gamma, \quad (2.9)$$

где $D^0(j\omega)$ - функция Михайлова номинального квазиполинома;

$$R(\omega) = \sum_{k=0}^m \sqrt{S_k^2(\omega) + T_k^2(\omega)} |B_k(j\omega)|.$$

Графическая интерпретация неравенства (2.9) приводит к следующей формулировке критерия робастной устойчивости [10].

Для робастной устойчивости семейства квазиполиномов (2.1), (2.2) и (2.3) достаточно, чтобы квазиполином $D^0(s)$ был устойчив и годограф

$z(j\omega) = \frac{D^0(j\omega)}{R(\omega)}$ при изменении ω от 0 до ∞ не пересекал окружности с центром в начале координат и радиусом γ .

Об устойчивости номинального квазиполинома $D^0(s)$ можно судить по виду годографа $z(j\omega)$. Очевидно, что если $z(j\omega)$ ведет себя так же, как устойчивый годограф Михайлова, т.е. если

$$\Delta \arg z(j\omega) = n\pi/2, \quad \omega = [0; +\infty [,$$

где n - порядок номинального квазиполинома, то $D^0(s)$ устойчив. При сложном очертании годографа $z(j\omega)$ для оценки устойчивости $D^0(s)$ следует воспользоваться одним из критериев устойчивости для фиксированных полиномов с запаздыванием.

Максимальный радиус γ -окружности, охватываемой годографом $z(j\omega)$, служит мерой робастной устойчивости. Если $\gamma_{\max} > 1$, то все масштабы возмущений коэффициентов интервальных полиномов α_{ik} могут быть увеличены без потери робастной устойчивости как минимум в γ_{\max} раз. Когда $\gamma_{\max} \leq 1$, то для сохранения робастной устойчивости масштабы возмущений α_{ik} достаточно уменьшить до значений $\gamma_{\max}^{-1} \alpha_{ik}$.

Пример 2.3. Задан интервальный характеристический квазиполином замкнутой системы с двумя элементами запаздывания:

$$D(s) = A_0(s)B_0(s) + \sum_{k=1}^2 A_k(s)B_k(s)e^{-\tau_k s}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \tau_1 = 0,33, \quad \tau_2 = 0,65, \quad n = 3, \quad B_0(s) = B_1(s) = B_2(s) = 1, \\ \mathbf{a}_0 = (13,75 \ 28,818 \ 9,957 \ 1,6595), \quad \alpha_0 = (0 \ 12,657 \ 5,523 \ 0,9205), \\ \mathbf{a}_1 = (11,708 \ 0,697), \quad \alpha_1 = (7,504 \ 0,387), \\ \mathbf{a}_2 = (1,82 \ 3,02), \quad \alpha_2 = (0 \ 1,675), \end{aligned}$$

где $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ - векторы коэффициентов номинальных полиномов $A_0^0(s)$, $A_1^0(s)$, $A_2^0(s)$ соответственно; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ - векторы масштабов возмущений

коэффициентов полиномов $A_0^0(s)$, $A_1^0(s)$, $A_2^0(s)$ соответственно; n -порядок квазиполинома $D(s)$.

Сформируем соответствующие функции и построим годограф $z(j\omega)$. Из рис. 2.7, где 1- годограф $z(j\omega)$; 2 - γ_{\max} - окружность, следует, что $D^0(s)$ устойчив, т.к. $\Delta \arg z(j\omega) = 3\pi/2$ при $\omega = [0; +\infty [$ и $\gamma_{\max} = 0,796$.

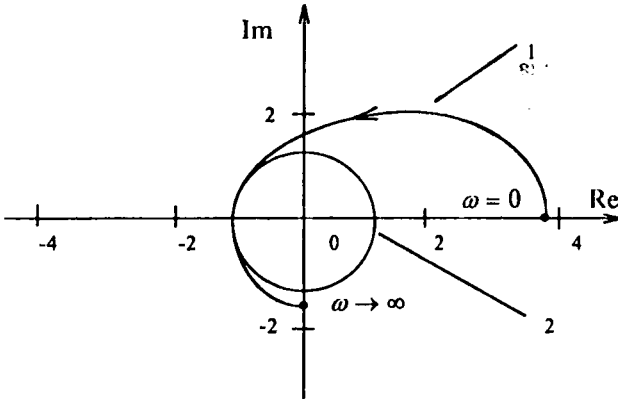


Рис.2.7.

2.3. ДОСТАТОЧНЫЙ КРИТЕРИЙ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ИНТЕРВАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В общем случае оценка робастной устойчивости систем с интервальным запаздыванием вызывает затруднения, связанные с тем, что в характеристический полином (2.1) параметры τ_k входят нелинейно. Поэтому представляют интерес различные частные постановки задачи, имеющие более конструктивное решение, чем прямой перебор в пределах интервалов запаздывания.

Рассмотрим типовую структурную схему автоматической системы с интервальным запаздыванием в передаче управляющего воздействия, представленную на рис. 2.8.

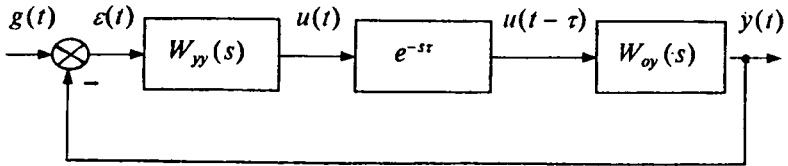


Рис. 2.8.

Здесь $g(t)$ - задающее воздействие; $\varepsilon(t)$ - ошибка управления; $u(t)$ и $u(t-\tau)$ - соответственно управляющее и управляющее запаздывающее воздействия; $y(t)$ - управляемая переменная; $W_{yy}(s) = \frac{B_1(s)}{B_0(s)}$ - передаточная функция управляющего устройства; $W_{oy}(s) = \frac{A_1(s)}{A_0(s)}$ - передаточная функция объекта управления без учета звена чистого запаздывания $e^{-s\tau}$. Полиномы $B_k(s) = \sum_{i=0}^{l_k} b_{ik} s^i$, $k = 1, 2$ относятся к управляющему устройству и заданы точно, а полиномы $A_k(s)$ описывают объект и являются интервальными:

$$A_k(s) = \sum_{i=0}^{n_k} a_{ik} s^i, \quad |a_{ik} - a_{ik}^0| \leq \gamma \alpha_{ik}, \quad k = 0, 1, \quad (2.10)$$

где a_{ik}^0 - коэффициенты номинальных полиномов $A_k^0(s)$; $\gamma \geq 0$ - общий размах параметрических возмущений; $\alpha_{ik} > 0$ - масштабы параметрических возмущений. Кроме того, время запаздывания τ принадлежит непрерывному интервалу $\Delta_\tau = [\underline{\tau}, \bar{\tau}]$. Необходимо оценить устойчивость замкнутой системы с учетом параметрической интервальной неопределенности объекта управления и интервального запаздывания в передаче управляющего воздействия.

Для характеристического квазиполинома рассматриваемой замкнутой системы

$$D(s) = A_0(s)B_0(s) + A_1(s)B_1(s)e^{-s\tau} = Q(s) + R_1(s)e^{-s\tau}$$

определим семейство номинальных квазиполиномов

$$D_{\Delta}(s) = A_0^0(s)B_0(s) + A_1^0(s)B_1(s)e^{-\tau s} = Q^0(s) + R_1^0(s)e^{-\tau s}, \quad (2.11)$$

$$\tau = \Delta\tau$$

и в соответствии с обозначениями, принятыми в выражении (2.10), частотную функцию обобщенного параметрического возмущения

$$R(\omega) = \sum_{k=0}^1 \sqrt{S_k^2(\omega) + T_k^2(\omega)} |B_k(j\omega)|, \quad (2.12)$$

где

$$S_k(\omega) = \alpha_{0k} + \alpha_{2k}\omega^2 + \alpha_{4k}\omega^4 + \dots, \quad T_k(\omega) = \alpha_{1k}\omega + \alpha_{3k}\omega^3 + \alpha_{5k}\omega^5 + \dots$$

Справедлив следующий критерий робастной устойчивости [10].

Для того чтобы при $\gamma = \gamma_0$ система была робастно устойчива, достаточно, чтобы было устойчиво семейство номинальных квазиполиномов $D_{\Delta}(s)$ и для всех ω от 0 до ∞ выполнялись условия

$$\left| \frac{D_1(j\omega)}{R(\omega)} \right| > \gamma_0 \quad \text{и} \quad \left| \frac{D_2(j\omega)}{R(\omega)} \right| > \gamma_0, \quad (2.13)$$

где $D_1(j\omega) = D_{\Delta}(j\omega) \Big|_{\tau=\underline{\tau}}$ и $D_2(j\omega) = D_{\Delta}(j\omega) \Big|_{\tau=\bar{\tau}}$.

Проверку устойчивости семейства номинальных квазиполиномов $D_{\Delta}(s)$ целесообразно выполнить, используя классический критерий Михайлова для систем с запаздыванием, процедура которого включает следующие этапы [11]:

- 1) определение точек пересечения кривых $|Q^0(j\omega)|$ и $|R_1^0(j\omega)|$ и соответствующих этим точкам критических частот запаздывания ω_i ;
- 2) вычисление множества критических времен запаздывания

$$\tau_{iq} = \frac{\pi - \arg Q^0(j\omega_i) + \arg R_1^0(j\omega_i) + 2\pi q}{\omega_i},$$

$$q = 0, 1, \dots;$$

3) нанесение критических времен запаздывания на действительную ось и выявление путем прямого тестирования или графоаналитических рассуждений интервалов устойчивости Δ_m , $m=1, 2, \dots$ по времени запаздывания τ .

Семейство номинальных квазиполиномов $D_\Delta(s)$ будет робастно устойчиво, если существует такое m , что $\Delta_\tau \in \Delta_m$.

Выполнение условий (2.13) гарантирует при $\gamma = \gamma_0$ робастную устойчивость двух семейств квазиполиномов $D(s)$ с $\tau = \underline{\tau}$ и $\tau = \bar{\tau}$ (это непосредственно следует из робастного критерия робастной устойчивости, сформулированного в п. 2.2). Покажем теперь, что данные условия с учетом робастной устойчивости семейства номинальных квазиполиномов $D_\Delta(s)$ одновременно гарантируют робастную устойчивость семейства квазиполиномов $D_\Delta(s)$ с $\gamma = \gamma_0$ и любым $\tau \in \Delta_\tau$.

Рассмотрим семейство характеристических квазиполиномов (2.11) с интервальными $Q(s)$ и $R_1(s)$ и с фиксированным временем запаздывания $\tau = \tau^0$. Зададимся общим размахом возмущений коэффициентов интервальных полиномов $\gamma = \gamma_0$ и исследуем критический случай, соответствующий границе робастной устойчивости

$$\left| \frac{D^0(j\omega)}{R(\omega)} \right| = \gamma_0, \quad (2.14)$$

где $D^0(j\omega) = Q^0(j\omega) + R_1(j\omega)e^{-p^0j\omega}$ - номинальный характеристический квазиполином, $R(\omega)$ - частотная функция (2.12).

Если (2.14) имеет решения, то найдется такое $\varphi \in [0; 2\pi]$, что

$$\frac{Q^0(j\omega)}{R(\omega)} + \frac{R_1^0(j\omega)}{R(\omega)} e^{-\tau^1 j\omega} = \gamma_0 e^{j\varphi}$$

или

$$\frac{Q^0(j\omega)}{R(\omega)} - \gamma_0 e^{j\varphi} = -\frac{R_1(j\omega)}{R(\omega)} e^{-\tau^1 j\omega}. \quad (2.15)$$

Введем обозначения $\frac{Q^0(j\omega)}{R(\omega)} = Q_M(j\omega)$, $\frac{R_1^0(j\omega)}{R(\omega)} = R_M(j\omega)$ и представим

(2.15) в виде системы

$$\begin{cases} |Q_M(j\omega) - \gamma_0 e^{j\varphi}| = |R_M(j\omega)| \\ \arg(Q_M(j\omega) - \gamma_0 e^{j\varphi}) = \arg R_M(j\omega) + \pi - \omega\tau^0 + 2\pi q, q = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (2.16)$$

Вектор $Q_M(j\omega) - \gamma_0 e^{j\varphi}$ при фиксированной частоте ω и изменении φ от 0 до 2π описывает своим концом в комплексной плоскости окружность с центром в точке $Q_M(j\omega)$ и радиусом γ_0 , а его модуль лежит в пределах интервала $\left[\left| |Q_M(j\omega)| - \gamma_0 \right|, |Q_M(j\omega)| + \gamma_0 \right]$. Тогда для $\omega \in [0; \infty[$ значение модуля $|Q_M(j\omega) - \gamma_0 e^{j\varphi}|$ будет принадлежать полосе с границами $\left| |Q_M(j\omega)| - \gamma_0 \right|$ и $|Q_M(j\omega)| + \gamma_0$. Объединение интервалов пересечения кривой $|R_M(j\omega)|$ и данной полосы определит множество критических частот $\Omega = \cup \bar{\omega}_i$, - решение первого уравнения системы (2.16), где $\bar{\omega}_i$ - интервалы критических частот.

Для каждого $\omega \in \bar{\omega}_i$ можно указать два вектора $Q_1(j\omega) = Q_M(j\omega) - \gamma_0 e^{j\varphi_1}$ и $Q_2(j\omega) = Q_M(j\omega) - \gamma_0 e^{j\varphi_2}$, удовлетворяющие условию равенства модулю вектора $R_M(j\omega)$ на этой частоте. Данные векторы отличаются по фазе от вектора $Q_M(j\omega)$ на величину Δ_φ , вычисляемую по выражению

$$\Delta_\varphi(\omega) = \arccos \frac{|Q_M(j\omega)|^2 + |R_M(j\omega)|^2 - \gamma_0^2}{2|Q_M(j\omega)||R_M(j\omega)|}. \quad (2.17)$$

Тогда каждому интервалу $\bar{\omega}_i$ соответствует множество критических времен запаздывания $\bar{T}_{iq} = (\tau_q | \omega \in \bar{\omega}_i)$, элементы которого вычисляются как

$$\tau_q(\omega) = \frac{\pi - \arg Q_M(j\omega) + \arg R_M(j\omega) \pm \Delta_\varphi(\omega) + 2\pi q}{\omega}, \quad (2.18)$$

$$q = 0, 1, 2, \dots$$

Объединение множеств $T_\Omega = \bigcup \bar{T}_{iq}$ представляет собой множество решений системы (2.16) относительно времени запаздывания τ^0 . Иначе множество T_Ω можно представить как $T_\Omega = \bigcup \bar{\tau}_{iq}$, где $\bar{\tau}_{iq} = [\inf \bar{T}_{iq}; \sup \bar{T}_{iq}]$ - интервалы критических времен запаздывания. Такая замена тождественна, поскольку функции (2.17) и (2.18) являются непрерывными функциями относительно аргумента ω .

Теперь с учетом предположения о робастной устойчивости семейства номинальных квазиполиномов $D_\Delta(s)$ справедливо утверждение о том, что семейство квазиполиномов будет робастно устойчиво, если для всех i и q

$$\Delta_\tau \cap \bar{\tau}_{iq} = \emptyset \quad (2.19)$$

Проверку условия (2.19) можно упростить. Действительно, поскольку интервалы Δ_τ и $\bar{\tau}_{iq}$ непрерывны, для выполнения (2.19) достаточно, чтобы $\underline{\tau} \notin \bar{\tau}_{iq}$ и $\bar{\tau} \notin \bar{\tau}_{iq}$. Таким образом, достаточно проверить робастную устойчивость при $\gamma = \gamma_0$ двух семейств квазиполиномов $D(s)$ с $\tau = \underline{\tau}$ и $\tau = \bar{\tau}$, т.е. проверить выполнение условий (2.13).

Пример 2.4. Разомкнутая система имеет передаточную функцию $W(s) = \frac{A_1(s)}{A_0(s)} e^{-s\tau}$. Здесь $\mathbf{a}_0 = (2 \ 0,5 \ 2)$, $\alpha_0 = (0,1 \ 0,025 \ 0,1)$, $\mathbf{a}_1 = (1)$, $\alpha_1 = (0,5)$,

$\tau \in \Delta_\tau = [4,5 \ 5,2]$, где $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ - векторы коэффициентов номинальных полиномов $A_0^0(s), A_1^0(s)$ соответственно; α_0, α_1 - векторы масштабов возмущений коэффициентов полиномов $A_0^0(s), A_1^0(s)$ соответственно. Необходимо оценить робастную устойчивость замкнутой системы при $\gamma_0 = 1$.

В [12] вычислены интервалы устойчивости $\Delta_m, m=1,2$ по времени запаздывания τ : $\Delta_1 = [0; 0,54]$; $\Delta_2 = [3,78; 5,86]$. Поскольку $\Delta_1 \in \Delta_2$, семейство номинальных квазиполиномов $D_\Delta(s)$ робастно устойчиво.

На рис. 2.9 представлены графики функций $\frac{|D_1(j\omega)|}{R(\omega)}$ (кривая 1), $\frac{|D_2(j\omega)|}{R(\omega)}$ (кривая 2) и прямая $\gamma_0 = 1$ (прямая 3), где $D_1(j\omega) = D_\Delta(j\omega)|_{\tau=4,5}$; $D_2(j\omega) = D_\Delta(j\omega)|_{\tau=5,2}$. Из взаимного расположения кривых 1, 2 и прямой 3 следует выполнение условий (2.13).

Таким образом, система робастно устойчива.

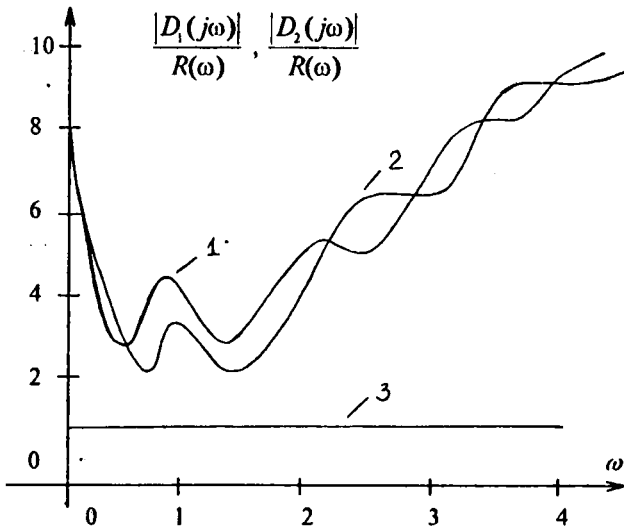


Рис. 2.9.

Для иллюстрации обоснования сформулированного критерия устойчивости на рис. 2.10 приведены полоса $|Q_M(j\omega) - \gamma_0 e^{j\omega\tau}|$ (полоса 1) при $\gamma_0 = 1$ и кривая $|R_M(j\omega)|$ (кривая 2). Они имеют два интервала критических частот $\bar{\omega}_1 = [0,65; 0,82]$ и $\bar{\omega}_2 = [1,11; 1,25]$.

На рис. 2.11 представлены множества \bar{T}_q , для которых приняты следующие обозначения: $\bar{T}_{10} - 1$, $\bar{T}_{20} - 3$, $\bar{T}_{21} - 4$, $\bar{T}_{11} - 2$.

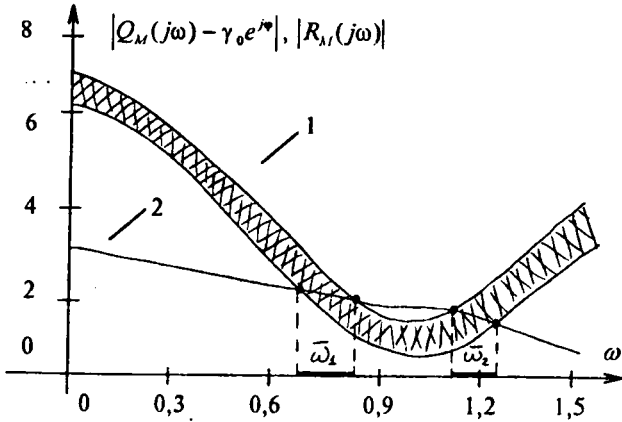


Рис. 2.10.

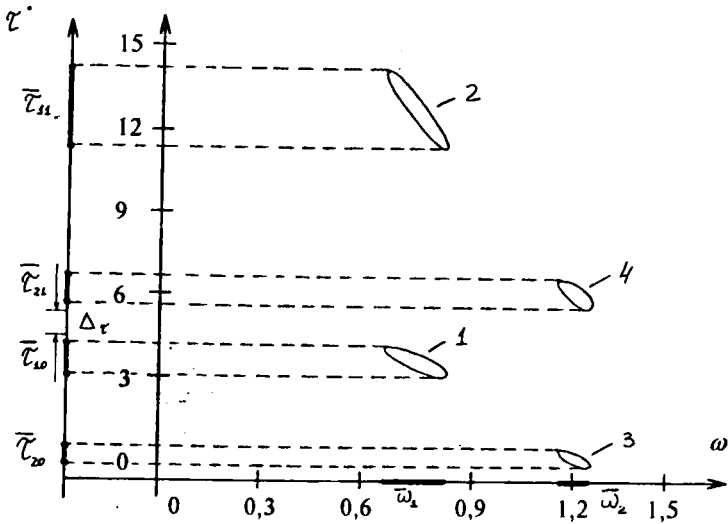


Рис. 2.11.

Множествам \bar{T}_{iq} соответствуют интервалы критических частот: $\tau_{20} = [0,25; 0,75]$; $\tau_{10} = [3,11; 4,36]$; $\tau_{21} = [5,34; 4,6]$; $\tau_{11} = [10,84; 13,98]$. Поскольку $\Delta_{\tau} = [4,5; 5,2] \cap \tau_{iq} = \emptyset$, система робастно устойчива.

3. РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

3.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение движения линейной дискретной системы может быть представлено линейным разностным уравнением :

$$\begin{aligned} a_n x((k-n)T) + a_{n-1} x((k-n+1)T) + \dots + a_0 x(kT) = \\ = b_m g((k-m)T) + b_{m-1} g((k-m+1)T) + \dots + b_0 g(kT), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где T - период дискретизации сигналов в системе; $x(kT)$ - выходная (управляемая) переменная; $g(kT)$ - входная переменная (управляющее воздействие); $a_i, b_i, i = \overline{0, n}$ - параметры системы.

Для физически реализуемых дискретных систем $n \leq m$, поскольку при формировании выходной переменной в текущий момент времени не могут учитываться последующие значения выходной переменной.

Моделью линейной дискретной системы в частотной области служит дискретная передаточная функция, определяемая как отношение z -преобразований выходных и входных переменных при нулевых начальных условиях $x(kT) = 0, g(kT) = 0, k < 0$;

$$W(z) = \frac{X(z)}{G(z)} = \frac{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + \dots + b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + \dots + a_0} = \frac{b_m z^{n-m} + b_{m-1} z^{n-m+1} + \dots + b_0}{a_n z + a_{n-1} z + \dots + a_0 z^n},$$

где $z = e^{sT}$ - комплексная переменная преобразования z -преобразования.

Относительно оператора запаздывания $q = z^{-1}$ дискретная передаточная функция имеет вид:

$$W(q) = \frac{b_m q^m + b_{m-1} q^{m-1} + \dots + b_0}{a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_0}. \quad (3.2)$$

Отметим, что вторая форма представления дискретной передаточной функции является более естественной при описании цифровых систем управления, поскольку основу цифровых фильтров составляют элементы запаздывания.

Устойчивость линейных дискретных систем, также, как и в случае линейных непрерывных систем, состоит в способности возвращаться к состоянию равновесия после снятия внешних воздействий:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(kT) = 0, \quad g(kT) = 0, \quad -\infty < \chi(kT) < \infty, \quad -n \leq k < 0. \quad (3.3)$$

Исследование линейной дискретной системы может быть сведено к анализу расположения на комплексной плоскости корней характеристического полинома:

$$D(q) = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_0. \quad (3.4)$$

В случае, когда характеристический полином $D(q)$ имеет n простых корней, свободное движение системы описывается выражением

$$\chi(kT) = c_n q_n^{-k+1} + c_{n-1} q_{n-1}^{-k+1} + \dots + c_1 q_1^{-k+1}, \quad (3.5)$$

где $c_i, i = \overline{1, n}$ - постоянные, определяемые начальными условиями; $q_i, i = \overline{1, n}$ - корни характеристического полинома (3.4).

Каждое из слагаемых в правой части выражения (3.5) при условии $|q_i| > 1$ обладает свойством:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_i q_i^{-k+1} = c_i \lim_{k \rightarrow \infty} |q_i|^{-k+1} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{j(-k+1)\arg q_i} = 0.$$

Таким образом, если все корни характеристического уравнения характеристического полинома (3.4) расположены вне единичного круга

комплексной плоскости ($\text{Re } q, j \text{Im } q$), все составляющие свободного движения с течением времени стремятся к нулю, что определяет устойчивость системы.

Для исследования устойчивости линейных дискретных систем разработаны алгебраические и частотные критерии. К первым относится критерий Шур-Кона, к последним - аналоги критериев Михайлова и Найквиста.

Частотные критерии устойчивости дискретных систем базируются на принципе аргумента. Учитывая, что $q = e^{-sT}$, после замены $s = j\omega$ получим :

$$q = e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \sin \omega T = \cos \bar{\omega} - j \sin \bar{\omega}, \quad (3.6)$$

где $\bar{\omega} = \omega T$ - приведенная круговая частота. Разложим характеристический полином (3.4) на простые множители:

$$D(q) = a_n (q - q_n)(q - q_{n-1}) \dots (q - q_1). \quad (3.7)$$

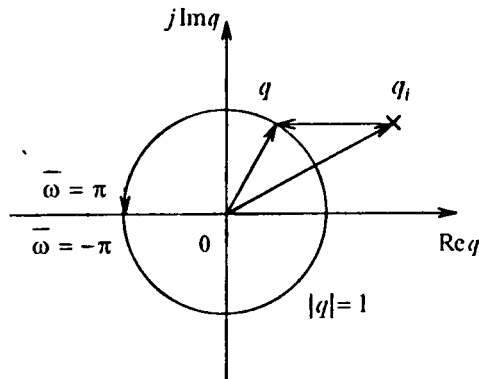


Рис. 3.1.

Проанализируем (рис. 3.1) изменение аргумента простого множителя $(q - q_i)$, $i = \overline{1, n}$ при изменении q вдоль единичной окружности на плоскости $(\operatorname{Re} q, j \operatorname{Im} q)$. Для этого используем замену (3.6), варьируя $\bar{\omega}$ от $-\pi$ до π . В случае, когда корень q_i лежит вне единичного круга, $\Delta_{-\pi \leq \bar{\omega} \leq \pi} \arg(e^{-j\bar{\omega}} - q_i) = 0$. Если корень q_i лежит внутри единичного круга, то $\Delta_{-\pi \leq \bar{\omega} \leq \pi} \arg(e^{-j\bar{\omega}} - q_i) = 2\pi$. Таким образом, если характеристический полином (3.1) имеет m корней, лежащих внутри единичного круга, суммарное приращение аргумента произведения $D(e^{-j\bar{\omega}})$ составит:

$$\Delta_{-\pi \leq \bar{\omega} \leq \pi} \arg D(e^{-j\bar{\omega}}) = 2m\pi. \quad (3.8)$$

Выражение (3.8) лежит в основе дискретного аналога частотного критерия Михайлова [13]. Для устойчивых систем число правых корней $m = 0$, поэтому в соответствии с выражением (3.8) для устойчивости линейной дискретной необходимо и достаточно, чтобы при изменении $\bar{\omega}$ от $-\pi$ до π годограф $D(e^{-j\bar{\omega}})$ не охватывал начало координат плоскости (U, jV) .

Пример 3.1. Проанализируем устойчивость линейной дискретной системы пятого порядка, характеристический полином которой имеет вид:

$$D(q) = q^5 - 0,7q^4 + 0,6q^3 - 0,198q^2 + 0,0664q - 0,0052.$$

На рис.3.2 приведен годограф $D(e^{-j\bar{\omega}})$. В рассматриваемом случае годограф $D(e^{-j\bar{\omega}})$ не охватывает начало координат при изменении $\bar{\omega}$ от $-\pi$ до π , на этом основании можно заключить, что исследуемая система устойчива.

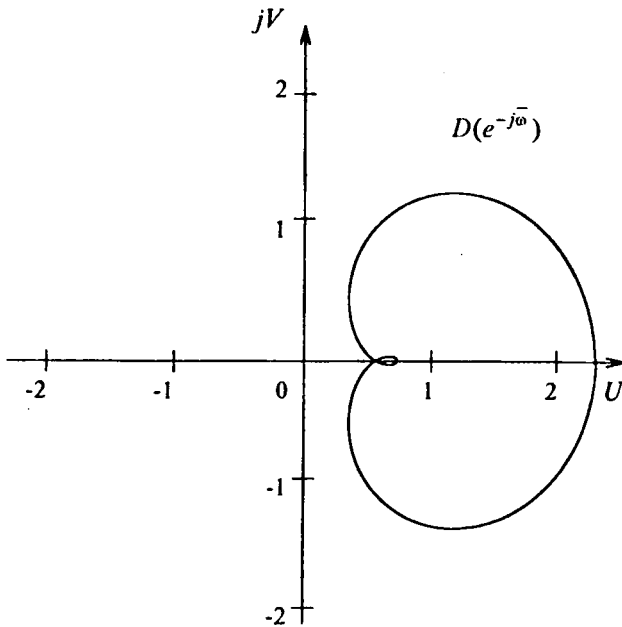


Рис. 3.2.

В случае параметрической неопределенности коэффициентов характеристического полинома линейной дискретной системы имеет место задача исследования робастной устойчивости, которая формулируется следующим образом. В пространстве коэффициентов задана область неопределенности $A \subset R^{n+1}$, которой принадлежит вектор коэффициентов характеристического полинома (3.4) $\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{a} = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$. Требуется оценить устойчивость семейства характеристических полиномов

$$D(q, \mathbf{a}) = a_n q^n + a_{n-1} q_{n-1} + \dots + a_0, \quad \mathbf{a} \in A. \quad (3.9)$$

Семейство (3.9) является робастно устойчивым тогда и только тогда, когда корни всех полиномов семейства лежат вне единичного круга на плоскости $(\operatorname{Re} q, j \operatorname{Im} q)$.

3.2. РЕБЕРНАЯ ТЕОРЕМА И ПРИНЦИП ИСКЛЮЧЕНИЯ НУЛЯ

Задача исследования робастной устойчивости линейных дискретных систем во многом схожа с аналогичной задачей для непрерывных систем. Тем не менее приведенные в теоремах Харитонова результаты не могут быть распространены на случай интервальной неопределенности параметров линейных дискретных систем [14]. Покажем это на примере.

Пример 3.2. Задан характеристический полином линейной дискретной системы четвертого порядка: $D(q) = 1 + b_1q + \frac{3}{2}q^2 - \frac{1}{3}q^4$, в котором один коэффициент является интервальным $b_1 \in \left[-\frac{17}{8}, \frac{17}{8}\right]$. Найдем корни характеристического уравнения $D(q) = 0$ в граничных точках интервала неопределенности (корни угловых полиномов): при $b_1 = -\frac{17}{8}$ $q_{1,2} = 0,808 \pm 0,613j$, $q_3 = 1,082$, $q_4 = -2,697$, $|q_i| > 1$, $i = \overline{1,4}$; при $b_1 = \frac{17}{8}$ $q_{1,2} = -0,808 \pm 0,613j$, $q_3 = -1,082$, $q_4 = 2,697$, $|q_i| > 1$, $i = \overline{1,4}$. Однако при $b_1 = 0$ $q_{1,2} = \pm 1,303j$, $q_{3,4} = \pm 0,443j$, $|q_i| > 1$, $i = \overline{1,2}$, $|q_i| < 1$, $i = \overline{3,4}$.

Как видно из *Примера 3.2*, устойчивость угловых полиномов не гарантирует устойчивость всех полиномов семейства, соответствующего интервальной параметрической неопределенности линейной дискретной системы. По этой причине для дискретных систем не существует аналогов теорем Харитонова, позволяющих по устойчивости конечного числа полиномов заданного семейства судить о робастной устойчивости всего семейства.

Наиболее сильным результатом подобного типа является реберная теорема. Пусть множество неопределенности коэффициентов характеристического уравнения линейной дискретной системы A представляет собой многогранник в пространстве коэффициентов (рис. 3.3). В этом случае для робастной устойчивости семейства (3.9) необходимо и

достаточно, чтобы устойчивыми были все полиномы, соответствующие ребрам многогранника A :

$$D(q, \lambda a^i + (1-\lambda)a^j) = (\lambda a_n^i + (1-\lambda)a_n^j)q^n + \dots + \lambda a_0^i + (1-\lambda)a_0^j, \quad (3.10)$$

где $0 \leq \lambda \leq 1$; a^i, a^j - смежные вершины многогранника A . Выражения вида (3.10) называют полиномиальными отрезками.

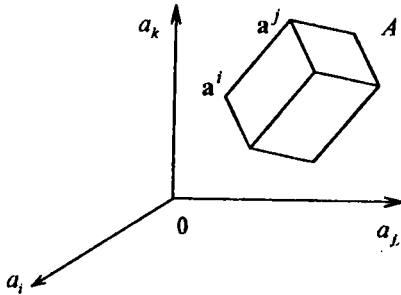


Рис.3.3.

Необходимость условий реберной теоремы очевидна. В достаточности условий реберной теоремы можно легко убедиться на основе частотного подхода к исследованию устойчивости. Осуществим замену $q = e^{-j\bar{\omega}}$ и проанализируем поведение области $Q(\bar{\omega}) = \{D(e^{-j\bar{\omega}}, \mathbf{a}) : \mathbf{a} \in A\}$ при изменении $\bar{\omega}$ от $-\pi$ до π . Выделим вещественную и мнимую части годографа $D(e^{-j\bar{\omega}}, \mathbf{a})$:

$$U(\bar{\omega}) = \operatorname{Re} D(e^{-j\bar{\omega}}, \mathbf{a}) = a_0 + a_1 \cos \bar{\omega} + \dots + a_n \cos n\bar{\omega}, \quad (3.11)$$

$$V(\bar{\omega}) = \operatorname{Im} D(e^{-j\bar{\omega}}, \mathbf{a}) = a_1 \sin \bar{\omega} + \dots + a_n \sin n\bar{\omega}.$$

Область $Q(\bar{\omega})$ представляет собой на плоскости (U, jV) многоугольник, стороны которого соответствуют ребрам области A в пространстве коэффициентов (рис. 3.4).

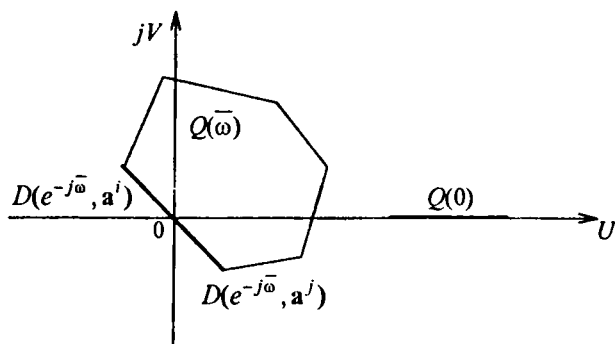


Рис. 3.4.

Если область A , ребра которой соответствуют устойчивым характеристическим полиномам, содержит хотя бы один вектор \mathbf{a}^r , соответствующий неустойчивому полиному, то в силу связанности множества A и непрерывной зависимости корней характеристического полинома от его коэффициентов в области A найдется хотя бы один вектор \mathbf{a}^* , соответствующий границе устойчивости, т.е. полином $D(q, \mathbf{a}^*)$ будет иметь хотя бы один корень, расположенный на единичной окружности в плоскости корней $q_i = e^{-j\bar{\omega}_i}$, $-\pi \leq \bar{\omega}_i \leq \pi$, и при $\bar{\omega} = \bar{\omega}_i^*$ выполнится равенство $D(e^{-j\bar{\omega}_i^*}, \mathbf{a}^*) = 0$.

Очевидно, что при $\bar{\omega} = \bar{\omega}_i^*$ начало координат плоскости (U, jV) будет принадлежать области $Q(\bar{\omega})$. Но при $\bar{\omega} = 0$ область $Q(\bar{\omega})$ вырождается в

отрезок, точки которого определяются устойчивыми полиномами, соответствующими ребрам области A , и, следовательно, не содержит начало координат. В силу непрерывности функций $U(\bar{\omega})$, $V(\bar{\omega})$ и связности множества A , при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до $\bar{\omega}_i^*$ точка $(0,0)$ обязательно попадет на одну из сторон $(D(e^{-j\bar{\omega}}, a^i), D(e^{-j\bar{\omega}}, a^j))$ многоугольника $Q(\bar{\omega})$, что означает неустойчивость одного из полиномов, соответствующих ребру (a^i, a^j) области A .

Как видно из приведенных выше рассуждений, исследование робастной устойчивости семейства (3.9) на основе частотного подхода может быть сведено к анализу поведения области $Q(\bar{\omega})$ на комплексной плоскости (U, jV) . Так же, как и для непрерывных систем, в основе частотного подхода к исследованию робастной устойчивости линейных дискретных систем лежит принцип исключения нуля. Пусть задан некоторый номинальный полином семейства (3.9)

$$D(q, a^0) = a_n^0 q^n + a_{n-1}^0 q^{n-1} + \dots + a_0^0, \quad a^0 \in A.$$

В этом случае семейство (3.9) робастно устойчиво тогда и только тогда, когда устойчив номинальный полином и выполняется условие

$$0 \notin Q(\bar{\omega}), \quad -\pi \leq \bar{\omega} \leq \pi. \quad (3.12)$$

Принцип исключения нуля используется при формулировке критериев робастной устойчивости линейных дискретных систем. При этом, как и в случае непрерывных систем, разрабатываются эффективные процедуры совместной оценки устойчивости номинального полинома и условия отделимости нуля.

3.3. КРИТЕРИЙ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу исследования робастной устойчивости линейных дискретных систем для случая, когда область неопределенности коэффициентов характеристического уравнения A представляет собой выпуклое множество [15]. Пусть задан вектор коэффициентов номинального полинома $\mathbf{a}^0 \in A$. Требуется оценить робастную устойчивость семейства

$$D(q, \mathbf{a}) = D(q, \mathbf{a}^0) + \gamma D(q, \Delta \mathbf{a}), \quad \Delta \mathbf{a} \in \Delta A, \quad (3.13)$$

где $\gamma \geq 0$ - размах параметрических возмущений; $\Delta \mathbf{a} = (\Delta a_n, \Delta a_{n-1}, \dots, \Delta a_0)$ - вектор параметрических возмущений; ΔA - выпуклое множество параметрических возмущений.

В плоскости (U, jV) множеству неопределенности ΔA соответствует область $\Delta Q(\bar{\omega})$, которая в силу линейности преобразования (3.11) также является выпуклым множеством (рис. 3.5). Поэтому условие отделимости нуля (3.12) в данном случае будут выполнено при следующем соотношении:

$$\frac{|OD|}{|CD|} > \gamma, \quad \text{где } OD\text{-вектор номинального годографа; } CD\text{- вектор, проведенный}$$

из ближайшей к началу координат точки C области $\Delta Q(\bar{\omega})$ в точку номинального полинома D .

Сформируем следующие вспомогательные функции:

$$\psi(\bar{\omega}, \varphi) = \operatorname{Re} D(e^{-j\bar{\omega}}, \mathbf{a}^0) e^{-j\varphi}; \quad (3.14)$$

$$\eta(\bar{\omega}, \varphi) = \max_{\Delta \mathbf{a} \in \Delta A} \operatorname{Re} D(e^{-j\bar{\omega}}, \Delta \mathbf{a}) e^{j(\pi - \varphi)}; \quad (3.15)$$

$$\tau(\bar{\omega}) = \max_{0 \leq \varphi \leq 2\pi} \frac{\psi(\bar{\omega}, \varphi)}{\eta(\bar{\omega}, \varphi)}. \quad (3.16)$$

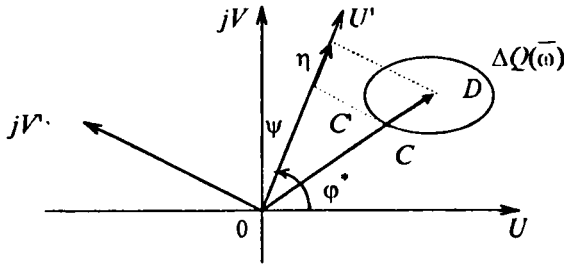


Рис. 3.5.

Геометрический смысл вспомогательных функций поясняется на рис. 3.5. Функции $\psi(\bar{\omega}, \varphi)$ и $\eta(\bar{\omega}, \varphi)$ представляют собой соответственно проекции на повернутую на угол φ вещественную ось (OU') вектора номинального годографа OD и вектора $C'D$, проведенного в точку номинального полинома D из точки C области $\Delta Q(\bar{\omega})$ с минимальной относительно оси (OU') абсциссой. Функция $\tau(\bar{\omega})$ определяет угол $\varphi^* \in [-\pi, \pi]$, при котором точки C и C' совпадают, т.е. $\tau(\bar{\omega}) = \frac{\psi(\bar{\omega}, \varphi^*)}{\eta(\bar{\omega}, \varphi^*)} = \frac{|OD|}{|CD|}$. Условие отделимости

будет выполнено, если

$$\tau(\bar{\omega}) > \gamma, \quad -\pi \leq \bar{\omega} \leq \pi. \quad (3.17)$$

Конкретизируем выражение (3.13) для случая интервальной параметрической неопределенности:

$$D(q, \mathbf{a}) = D(q, \mathbf{a}^0) + \gamma D(q, \Delta \mathbf{a}), \quad -\alpha_i \leq \Delta a_i \leq \alpha_i, \quad i = \overline{0, n}, \quad (3.18)$$

где $a_i \geq 0$ - масштаб параметрических возмущений коэффициентов.

В этом случае

$$\tau(\bar{\omega}) = \max_{-\pi \leq \varphi \leq \pi} \frac{\sum_{i=0}^n a_i^0 \cos(i\bar{\omega} + \varphi)}{\sum_{i=0}^n \alpha_i^0 |\cos(i\bar{\omega} + \varphi)|}, \quad \bar{\omega} \neq -\pi, 0, \pi;$$

$$\tau(0) = \frac{\left| \sum_{i=0}^n a_i^0 \right|}{\sum_{i=0}^n |\alpha_i^0|}; \quad \tau(-\pi) = \tau(\pi) = \frac{\left| \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^0 \right|}{\sum_{i=0}^n |\alpha_i^0|}.$$

Анализируя максимизируемое выражение для $\tau(\bar{\omega})$, можно сделать вывод, что из интервала $\varphi \in [-\pi, \pi]$ достаточно рассмотреть значения $\varphi_k = \pm \frac{\pi}{2} - k\bar{\omega}$, $k = \bar{0}, n$. При этом

$$\tau(\bar{\omega}) = \max_{0 \leq \kappa \leq n} \frac{\left| \sum_{i=0}^n a_i^0 \sin(\kappa - i)\bar{\omega} \right|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i^0 |\sin(\kappa - i)\bar{\omega}|}. \quad (3.19)$$

Максимальный допустимый размах параметрических возмущений может быть определен следующим образом:

$$\gamma_{\text{пых}} = \min(\tau(0), \tau(\pi), \min_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \tau(\omega)). \quad (3.20)$$

Для того чтобы совместить проверку устойчивости номинального полинома и отделимости нуля сформируем годограф $Z(\bar{\omega}) = \tau(\bar{\omega}) e^{j \arg D(e^{-j\bar{\omega}}, a^0)}$, модуль которого определяется отношением длин векторов OD и CD , а аргумент совпадает с аргументом номинального годографа.

Сформулируем критерий робастной устойчивости линейных дискретных систем. Семейство (3.13) робастно устойчиво тогда и только тогда, когда

годограф $Z(\bar{\omega})$ при изменении $\bar{\omega}$ от $-\pi$ до π не охватывает γ - круга, а также выполняются условия $\tau(0) > \gamma$, $\tau(\pi) > \gamma$.

Пример 3.3. Рассмотрим задачу исследования робастной устойчивости семейства дискретных характеристических полиномов при $n = 5$.

$$a^0 = (1 \quad -0,7 \quad 0,6 \quad -0,198 \quad 0,0664 \quad -0,0052),$$

$$\alpha = (0 \quad 1 \quad 4 \quad 0,5 \quad 2 \quad 0,5).$$

На рис.3.6 приведен годограф $Z(\bar{\omega})$, анализ которого показывает, что номинальный полином семейства устойчив, условия отделимости нуля выполняются при $0 \leq \gamma < \gamma_{\max}$, где $\gamma_{\max} = 0,087$ - радиус круга, вписанного в годограф $Z(\bar{\omega})$. Вычисляем $\tau(0) = 0,24$, $\tau(\pi) = 0,62$. Таким образом, рассматриваемое семейство робастно устойчиво при размахе параметрических возмущений $0 \leq \gamma < 0,087$.

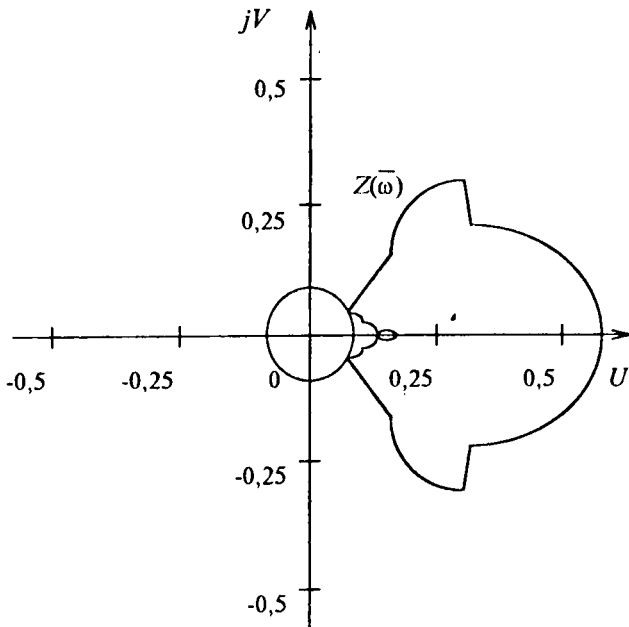


Рис. 3.6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Особенностью постановки задач анализа робастной устойчивости, рассмотренных в учебном пособии, является то, что во-первых, исследовалось размещение корней семейства характеристических полиномов в левой полуплоскости или вне единичного круга, и во-вторых, семейство характеристических полиномов задавалось принадлежностью его коэффициентов прямоугольному параллелепипеду или выпуклому многограннику (для замкнутых систем). Однако в теории робастной устойчивости решен целый ряд задач, отличающихся по постановке, но близких по смыслу и использующих тот же научно-методический аппарат. Перечислим некоторые из них.

В задачах анализа робастной модальности необходимо проверить, принадлежат ли корни семейства характеристических полиномов некоторой области плоскости корней. В зависимости от вида данной области различают понятия робастной апериодичности, робастной степени устойчивости, робастной колебательности и т.д. Формулировки и доказательства критериев робастной модальности можно найти в работах [16 - 18].

Задача анализа робастной устойчивости систем, характеристический полином которых представляет собой сумму произведений интервальных полиномов, имеет большое практическое значение, но ее решение ввиду нелинейной зависимости характеристического полинома от параметров в общем виде еще не найдено. Некоторые частные случаи данной задачи рассмотрены в [19, 20].

Важное место в теории робастной устойчивости занимают задачи анализа устойчивости систем с эллиптической неопределенностью параметров [3, 17]. Указанный вид неопределенности характеризуется тем, что коэффициенты семейства характеристических полиномов принадлежат многомерному эллипсоиду. Такие ограничения на область неопределенности параметров получают, например, при оценке параметров динамического объекта по

результатам обработки экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

Наряду с параметрической неопределенностью в задачах исследования робастной устойчивости рассматривается неопределенность частотных характеристик системы. Различают аддитивную и мультипликативную неопределенность. В первом случае накладываются ограничения на модуль абсолютного отклонения комплексной частотной характеристики системы от номинальной, во втором - на модуль относительного отклонения. Для данной постановки задачи получен аналог критерия Найквиста [21].

Перечисленные задачи охватывают проблематику устойчивости неполностью определенных динамических систем. Вместе с тем в настоящее время развиваются и другие разделы теории робастных систем, связанные с проблемами синтеза и оптимизации [22-24].

Следует отметить, что в целом теория робастного управления развивается в направлении "робастизации" методов классической теории автоматического управления. Указанная тенденция обеспечивает преемственность методов анализа и синтеза динамических систем и существенно расширяет диапазон практической применимости теоретических результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харитонов В. Л. Асимптотическая устойчивость семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. - 1978. - Т. 14. - N11. - С. 2086-2088.
2. Цыпкин Я. З., Поляк Б. Т. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. - М.: ВИНТИ, 1991. - С. 3-31.
3. Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З. Частотные критерии робастной устойчивости и аperiodичности линейных систем // АиТ. - 1990. - N9. - С. 45-54.
4. Tsypkin Ya. Z., Polyak B. T. Frequency domain approach to robust stability of continuous systems // Systems and Control: Topics in Theory and Applications. - Osaka: MITA Press, 1991. - P. 389-399.
5. Теория автоматического управления: В 2-х ч. Ч.1. Теория линейных систем автоматического управления / Под. ред. А. А. Воронова. - М.: Высшая школа, 1986.
6. Петров И. П., Поляк Б. Т. Робастное Д-разбиение // АиТ. - 1991. - N11. - С. 41-53.
7. Лекус В. Д., Ровинский В. Э. Оценка устойчивости систем с запаздыванием. - Л.: Энергоатомиздат, 1982.
8. Жабко А. П., Харитонов В. Л. Устойчивость квазиполиномов нейтрального типа // АиТ. - 1993. - N1. - С. 92-107.
9. Varma S. P., Shi Z. Robust stability of perturbed systems with time-delay // Automatica. - 1989. - V.25. - P. 371-381.
10. Подлесный В. Н., Рубанов В. Г. Простой частотный критерий робастной устойчивости одного класса линейных интервальных динамических систем с запаздыванием // АиТ. - 1996. - N9. - С. 131-139.
11. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. - М.: Гостехиздат, 1954.

12. В о р о н о в А. А. Основы теории автоматического управления: Особые линейные и нелинейные системы. - М.: Энергоиздат, 1981.
13. Ц ы п к и н Я. З. Частотные критерии модальности линейных дискретных систем // Автоматика. - 1990. - №3. - С. 3 - 9.;
14. Д ж у р и Е. И. Робастность дискретных систем. Обзор // АиТ. -1990. - N5. - С. 3-28.
15. П о л я к Б. Т., Ц ы п к и н Я. З. Робастная устойчивость линейных дискретных систем // ДАН СССР. - 1991. - Т.316. - N4. - С. 842-846..
16. П о л я к Б. Т., Ц ы п к и н Я. З. Робастная аperiodичность // ДАН. - 1994. - Т. 335. - №3. - С. 304 - 307.
17. Ц ы п к и н Я. З., П о л я к Б. Т. Частотные критерии робастной модальности линейных дискретных систем // Автоматика. - 1990. - №4. - С.3-8.
18. П о л я к Б. Т., Ц ы п к и н Я. З. Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров //АиТ. - 1991. - №8. - С. 45 - 55.
19. К и с е л е в О. Н., П о л я к Б. Т. Робастная устойчивость цепочки простых звеньев // АиТ. - 1993. - №12. - С. 115 - 127.
20. К и с е л е в О. Н., П о л я к Б. Т. Критический коэффициент усиления для последовательности неопределенных звеньев // АиТ.-1995.- №9.- С. 93-103.
21. П о л я к Б. Т., Ц ы п к и н Я. З. Робастный критерий Найквиста // АиТ. - 1992. - №7. - С. 25 - 31.
22. Г у с е в Ю. М., Е ф а н о в В. Н., К р ы м с к и й В. Г., Р у т к о в с к и й В. Ю. Анализ и синтез интервальных динамических систем (состояние проблемы). 2. Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов // Техническая кибернетика ИАН СССР. -1991.- №2.- С.3-30.
23. З а х а р о в А. В., Ш о к и н Ю. И. Синтез систем управления при интервальной неопределенности параметров их математических моделей // ДАН СССР. - 1988. - Т.299. - №2. - С. 292 - 295.
24. Ц ы п к и н Я. З. Синтез робастно оптимальных систем управления объектами в условиях ограниченной неопределенности // АиТ. - 1992. - №9. - С. 139 - 159

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Робастная устойчивость линейных непрерывных систем	5
1.1. Основные определения и постановка задачи	5
1.2. Теоремы Харитоновы и принцип исключения нуля	12
1.3. Критерий робастной устойчивости интервальных полиномов	18
1.4. Критерий робастной устойчивости замкнутых систем	23
1.5. Робастное D-разбиение	29
2. Робастная устойчивость линейных непрерывных систем с запаздыванием	39
2.1. Основные определения и постановка задачи	39
2.2. Критерий робастной устойчивости систем с несколькими запаздываниями	43
2.3. Достаточный критерий робастной устойчивости систем с интервальным запаздыванием	53
3. Робастная устойчивость линейных дискретных систем	61
3.1. Основные определения и постановка задачи	61
3.2. Реберная теорема и принцип исключения нуля	66
3.3. Критерий робастной устойчивости линейных дискретных систем	70
Заключение	74
Список литературы	76

Доп. к плану 1997 г.

Учебное издание

Маматов Александр Васильевич
Подлесный Владимир Николаевич
Рубанов Василий Григорьевич

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор *В.Б. Белоусова*
Корректор *Т.В. Кучеренко*

Изд. лиц. № 020946 от 29.11.94. Подписано в печать 8.12.97.

Формат 60×84/16. Уч.-изд. л. 4. Тираж 100 экз.

Заказ *112* Цена 12 400 руб.

Отпечатано в Белгородской государственной технологической академии
строительных материалов.

308012, г. Белгород, ул. Костюкова, 46