



SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Tesi per il conseguimento del titolo di dottore di ricerca
Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica

XXX ciclo

**Interpretazione del comportamento meccanico di
terreni limosi mediante l'impiego di un modello
costitutivo elastoplastico**

Dottoranda:

Ilaria Del Brocco

Supervisore:

Prof. Ing. Luigi Callisto

Anno accademico 2016/2017

Sommario

Interpretazione del comportamento meccanico di terreni limosi mediante l'impiego di un modello costitutivo elastoplastico	
Introduzione	1
1. Comportamento meccanico dei terreni di transizione	7
1.1. Comportamento delle sabbie in condizioni non drenate	7
1.2. Effetto del contenuto in fine	19
1.3. Alcuni aspetti del comportamento meccanico dei limi	32
2. Il modello costitutivo di Taiebat e Dafalias (2008)	41
2.1. Introduzione	41
2.2. Elementi di teoria dell'elastoplasticità con incrudimento	44
2.2.1. Matrice di cedevolezza elasto-plastica	47
2.2.2. Matrice di rigidità elasto-plastica	49
2.3. Formulazione del modello	51
2.3.1. Definizioni e concetti di base	51
2.3.2. Deformazioni elastiche	58
2.3.3. Legge di flusso	59
2.3.4. Leggi di incrudimento	64
2.4. Alcune considerazioni sulle equazioni del modello	68
2.5. Parametri del modello	74
3. Implementazione numerica del modello SANISAND di Taiebat e Dafalias (2008)	75
3.1. Integrazione delle equazioni costitutive in forma incrementale	75
3.2. L'algoritmo di RKF-23 a passo adattativo con controllo dell'errore	85
3.2.1. La procedura di integrazione delle equazioni del legame	85
3.2.2. La Matrice di rigidità tangente consistente	88
3.3. Verifica dell'implementazione	90
3.4. Modellazione della risposta meccanica in prove triassiali	102
4. Illustrazione di un caso di studio	108
4.1. Descrizione dell'opera e delle condizioni in sito del materiale	108

5. Calibrazione del legame costitutivo per un limo	117
5.1. Inizializzazione della variabile di incrudimento isotropo	117
5.1.1. Analisi dell'approccio impiegato dagli autori	117
5.1.2. Proposta di due criteri alternativi	120
5.2. Condizioni iniziali dei campioni prelevati dalla discarica mineraria	123
5.3. Definizione dei parametri del modello costitutivo	132
5.3.1. Parametri determinabili dall'elaborazione delle prove di laboratorio	132
5.3.1.1. Stato critico	132
5.3.1.2. Curva di compressione limite isotropa LCC-ISO	136
5.3.1.3. Costanti adimensionali delle leggi elastiche	138
5.3.1.4. Parametri n_d e n_b	141
5.3.2. Calibrazione e confronto con i risultati sperimentali	143
5.3.3. Effetto dell'inizializzazione della variabile di incrudimento isotropo p_0	150
5.3.4. Effetto di alcuni parametri sulla risposta prevista dal modello	158
5.3.4.1. Parametri n m V	158
5.3.4.2. Calibrazione con il primo criterio	161
5.3.4.3. Calibrazione con il secondo criterio	179
5.3.5. Appendice al capitolo 5	182
Conclusioni	191
Appendice	197
Bibliografia	201

Introduzione

Il comportamento meccanico di terreni con una importante frazione limosa è oggetto di un ampio dibattito nella comunità scientifica, presentando caratteri intermedi e variabili fra quelli dei terreni a grana grossa e quelli dei terreni a grana fine. In effetti, le evidenze sperimentali mostrano che anche modeste differenze nell'assortimento granulometrico e nelle caratteristiche di plasticità della frazione fine possono influenzare sensibilmente la risposta del materiale. Gli studi di letteratura sembrano indicare tre diversi comportamenti a seconda delle caratteristiche di plasticità del terreno limoso:

- per limi di bassa plasticità, numerosi studi indicano un'analogia con il comportamento meccanico delle sabbie, compresa la suscettibilità alla liquefazione;
- per limi molto plastici, il comportamento meccanico può essere invece ritenuto sostanzialmente sovrapponibile a quello dei terreni a grana fine;
- d'altro canto, per un ristretto intervallo di plasticità, il comportamento meccanico dei limi sembra assumere caratteri del tutto particolari.

Diversamente dalle sabbie, anche per limi di bassa plasticità la compressibilità non può ritenersi trascurabile, almeno nelle condizioni incontrate più frequentemente nei problemi applicativi. Inoltre, essendo caratterizzati da una bassa permeabilità, questi terreni possono trovarsi in condizioni sostanzialmente non drenate anche per effetto dell'applicazione di azioni statiche. In questi materiali sembrano coesistere quindi aspetti della risposta meccanica sia delle sabbie, sia delle argille.

L'attenzione di questo studio è rivolta alla descrizione del comportamento meccanico di limi di plasticità media e bassa. Questo tema è trattato prendendo a riferimento la risposta di un particolare legame costitutivo, che nonostante sia stato originariamente proposto per sabbie, appare in grado di descrivere anche le caratteristiche di compressibilità di un terreno limoso, prevedendo lo sviluppo di deformazioni plastiche lungo percorsi tensionali proporzionali. Prendendo spunto dalle osservazioni sperimentali disponibili per un deposito limoso di origine artificiale, si è valutata la

capacità del modello costitutivo selezionato nel descrivere il comportamento meccanico di questi terreni e sono state definite le procedure più adeguate per la calibrazione del modello, con particolare riguardo ai valori iniziali assunti dalle variabili di stato.

Mentre nella quasi totalità dei casi i modelli costitutivi formulati per argille e per sabbie presentano formulazioni ben distinte, e in particolare i modelli per terreni a grana grossa sono applicati prevalentemente a sabbie pulite, questo lavoro fornisce un contributo alla selezione e all'uso di legami costitutivi per i terreni di granulometria intermedia, che così spesso si incontrano nella pratica applicativa. Se da un lato interessa valutare l'applicabilità di un particolare modello, che effettivamente sembra adattarsi anche alla simulazione di un comportamento meccanico che potrebbe dirsi intermedio, nello stesso tempo il confronto tra le osservazioni sperimentali disponibili per un terreno prevalentemente limoso e le previsioni del modello costitutivo offre un'interessante occasione per lo studio del comportamento meccanico di queste terre, consentendo di valutarne in modo quantitativo e oggettivo l'eventuale analogia o scostamento da quello delle sabbie.

Capitolo 1

Dal momento che il legame scelto è formulato originariamente per sabbie e che i modelli costitutivi per terreni a grana grossa si distinguono da quelli proposti per le argille anche per la possibilità di riprodurre il fenomeno della liquefazione, un paragrafo del primo capitolo è dedicato a riassumere i caratteri della risposta non drenata delle sabbie, evitando di riepilogare lo stato dell'arte sull'argomento ma approfondendo la distinzione fra aspetti intrinseci della risposta meccanica, variabili di stato e caratteristiche indotte dalla storia di deposizione del materiale.

In letteratura il problema legato all'identificazione dei caratteri "*sand like*" e "*clay like*" del comportamento meccanico dei limi e delle terre assortite granulometricamente è stato affrontato soprattutto nell'ambito della valutazione della suscettibilità alla liquefazione e in effetti la letteratura sull'argomento può forse essere classificata proprio in base all'approccio seguito nel ricercare una risposta a questa domanda. Un primo insieme di studi è quello incentrato sull'analisi dell'effetto prodotto dall'addizione di fine non plastico nella sabbia pulita. Un secondo è quello della ricerca

di correlazioni fra caratteristiche intrinseche del materiale determinabili in modo speditivo (indice di plasticità e limite liquido) e segni dell'avvenuta liquefazione in sito. Una corrente più recente si concentra sull'analisi della risposta non drenata in prove di laboratorio eseguite in condizioni di carico sia statico che ciclico.

Nel secondo paragrafo vengono approfonditi alcuni studi relativi alle miscele di sabbia e fine non plastico. I motivi per i quali si è dedicato spazio a questo argomento sono diversi. Un primo motivo risiede nel fatto che l'indice dei vuoti intergranulare viene spesso proposto come un parametro di stato arricchito, nel tentativo di risolvere alcune difficoltà nell'individuazione delle caratteristiche intrinseche dei materiali oggetto di interesse. In secondo luogo, proprio il modello costitutivo scelto è stato formulato in versioni che includono il concetto di indice dei vuoti intergranulare. Gli studi sull'argomento consentono di apprezzare la variazione degli stati di addensamento possibili al variare della composizione granulometriche del materiale e offrono degli schemi di riferimento per i tipi di strutture intergranulari anch'essi spesso ritrovati nelle ricerche e utili per individuare la frazione che governa la risposta meccanica dell'insieme. Alcune terre assortite, oltre a un comportamento tipo sabbia, possono manifestare maggiore compressibilità a causa delle strutture intergranulari possibili per la loro composizione granulometrica. Nel paragrafo inoltre si mostra come la mancanza di un modello concettuale di riferimento abbia determinato nel tempo conclusioni discordanti sui caratteri della risposta meccanica delle terre assortite.

Il terzo paragrafo raccoglie alcuni risultati relativi al comportamento più specificatamente dei limi. Oltre a toccare il tema della compressibilità e dei tipi di comportamenti ravvisabili, in questo paragrafo si accenna al comportamento meccanico definito "di transizione". Un argomento molto dibattuto e di interesse crescente riguarda l'impossibilità di inquadrare il comportamento meccanico di alcuni limi nell'ambito della meccanica dello stato critico, a causa della mancata individuazione delle due proprietà intrinseche del terreno: la linea dello stato critico e la curva di compressione limite.

Nonostante i comportamenti meccanici oggetto di interesse siano ritenuti possibili, in letteratura, per un campo ristretto di caratteristiche di plasticità, i limi che manifestano queste caratteristiche sono frequenti. Nella realtà inoltre i tipi di comportamento

meccanico che per brevità si indicheranno di transizione, si manifestano anche per caratteristiche di plasticità diverse da quelle indicate in letteratura. Il dibattito relativo alla previsione del comportamento meccanico dei limi non è quindi tuttora esaurito. Ne è un esempio il limo artificiale preso ad esame nel lavoro di tesi.

Capitolo 2

Nella prima parte del secondo capitolo vengono richiamati alcuni concetti della plasticità con incrudimento. Il modello costitutivo impiegato è infatti un modello elastoplastico incrudente, formulato nel contesto della teoria dello stato critico, anche se le leggi di incrudimento e la legge di flusso possono essere interpretate secondo una logica di tipo *bounding surface*. Nella descrizione del modello costitutivo vengono mostrati gli aspetti caratteristici della formulazione finalizzati a riprodurre la compressibilità delle terre a grana grossa. Un paragrafo del capitolo è dedicato a ricostruire l'origine dell'espressione proposta dagli autori per la legge di incrudimento isotropo e per il modulo di rigidità volumetrica elastica. Gli approfondimenti sono utili per capire a fondo alcune complicazioni nell'uso del modello derivanti dalla sua formulazione analitica.

Per poter utilizzare il modello, in una fase successiva della ricerca, nella simulazione di un problema al finito è stato necessario implementare il comportamento di materiale in un codice di calcolo agli elementi finiti, adeguato a svolgere analisi accoppiate in mezzi porosi. L'integrazione non è stata limitata alla versione del modello valida per sole condizioni triassiali ma è stata estesa anche a stati di sforzo e deformazione generali.

Capitolo 3

Il terzo capitolo è quindi dedicato all'implementazione del modello costitutivo nel codice di calcolo agli elementi finiti. Nel primo paragrafo si richiamano concetti teorici relativi all'integrazione delle equazioni costitutive scritte in forma incrementale. Successivamente viene descritto l'algoritmo di Runge Kutta Fehlberg di terzo ordine RKF-23. Questa procedura è stata scelta tenendo conto della sua applicazione da parte di altri autori nella integrazione delle versioni precedenti del modello SANISAND. La logica di alcuni algoritmi di tipo esplicito viene descritta attraverso schemi concettuali

utili per controllare la struttura, piuttosto complessa, delle espressioni previste dai metodi di RK per la matrice di rigidità secante. Il capitolo si chiude con la verifica dell'implementazione, mostrando i confronti fra i risultati ottenuti nella simulazione di prove di laboratorio e quelli ottenuti dagli autori. Un controllo sul funzionamento dell'algoritmo è condotto anche attraverso la redazione di mappe di iso-errore. Le previsioni della risposta in condizioni di deformazione piana sono confrontate con quelle fornite da modelli simili a SANISAND.

Capitolo 4

Nel capitolo 4 si descrive il caso di studio di un bacino per la discarica di residui minerari, illustrandone brevemente le modalità di costruzione e le caratteristiche dei depositi di accumulo. Nello stesso capitolo vengono fornite indicazioni riguardo alle date e alla collocazione dei punti di prelievo dei campioni necessari per la calibrazione del modello costitutivo.

Capitolo 5

Il capitolo 5 si apre con un primo paragrafo dedicato alla variabile di incrudimento isotropo del modello. In primo luogo vengono ricostruite le scelte effettuate da Taiebat e Dafalias riguardo al valore iniziale attribuito alla variabile interna nelle simulazioni numeriche di prove di laboratorio su campioni ricostituiti della *Toyoura sand*. Nella seconda parte del primo paragrafo sono invece proposte due possibili modalità di inizializzazione della variabile di incrudimento isotropo del modello p_0 .

Nel capitolo 5 viene progressivamente delineata una procedura finalizzata a calibrare il modello con esplicito riferimento alla sua applicazione per la simulazione di un problema al finito. Un paragrafo è dedicato alla ricerca delle condizioni iniziali del materiale sottoposto alle prove di laboratorio.

I parametri del modello vengono distinti in tre gruppi e la loro determinazione è discussa separatamente: parametri determinabili dalla sola analisi delle prove di laboratorio, parametri la cui ricerca richiede la simulazione numerica delle prove di laboratorio e parametri il cui valore è in qualche modo vincolato dagli stessi principi sui quali si basa la formulazione analitica del modello.

Il valore iniziale assunto per la simulazione delle prove di laboratorio è trattato nel paragrafo dedicato alla determinazione del primo tipo di parametri.

È successivamente mostrato il confronto tra i risultati sperimentali e quelli ottenuti dalle simulazioni numeriche effettuate impiegando la calibrazione ritenuta più soddisfacente. Il confronto è mostrato separatamente in base al criterio seguito per la definizione della variabile interna. Si illustra quindi l'influenza del criterio di scelta per il valore iniziale della variabile di incrudimento sulla risposta prevista dal modello. Questo processo di confronto e analisi permette di procedere alla delineazione delle effettive capacità predittive del modello e dell'ampiezza del campo di impiego. Nei due paragrafi finali si discute l'effetto di alcuni parametri costitutivi sulle previsioni del modello in base al criterio adottato per inizializzare la variabile di incrudimento isotropo.

1. Comportamento meccanico dei terreni di transizione

1.1. Comportamento delle sabbie in condizioni non drenate

Per effetto dell'applicazione di una sollecitazione deviatorica, in assenza di drenaggio le sabbie possono manifestare una risposta meccanica fragile. Le tipologie di risposte sperimentali ottenibili da prove di compressione triassiale non drenata, eseguite su provini consolidati isotropicamente, sono numerose. Sulla base dell'andamento della tensione deviatorica le diverse varianti possono però essere raggruppate in tre classi:

- nella prima classe l'andamento del deviatore è caratterizzato da un picco e da una successiva riduzione monotona che si arresta al raggiungimento di un valore finale.
- nella seconda classe l'andamento del deviatore, dopo il raggiungimento di un valore picco, è caratterizzato da un punto di minimo locale, al quale segue un incremento
- nella terza classe l'andamento del deviatore è monotonamente crescente.

La Fig. 1-1 mostra alcuni schemi qualitativi di percorsi tensionali e relazioni tensioni-deformazioni riconducibili al primo tipo di comportamento. Nel piano di compressibilità i punti A e B rappresentano gli stati iniziali di due campioni normal-consolidati. Gli andamenti del deviatore dei due provini, sia nel piano $p':q$ che $\varepsilon_a:q$, sono accomunati dal raggiungimento di un picco poco dopo l'inizio della fase di compressione triassiale (punti A_p B_p) e dal fatto che, successivamente, manifestano una riduzione monotona della tensione deviatorica. Verrà definita liquefazione statica solo la condizione di completo annullamento della resistenza a taglio del terreno, manifestata dal provino B (Yamamuro e Covert (2001), Carrera et al. (2011)). I comportamenti meccanici non drenati caratterizzati da andamenti del deviatore riconducibili alla prima classe di comportamento saranno complessivamente identificati come instabili. Dai percorsi tensionali mostrati nella Fig. 1-1 si può apprezzare che il picco del deviatore non è associato alla mobilitazione della resistenza del materiale. La resistenza a taglio mobilitata cresce monotonamente fino al raggiungimento dello stato critico. In ogni caso però l'innescò del fenomeno di instabilità conduce nelle prove triassiali non drenate alla rottura del campione. Il comportamento meccanico non drenato assume un rilievo applicativo nelle sabbie soprattutto nel caso di sollecitazioni sismiche. Se il

comportamento instabile viene mobilitato per effetto di una sollecitazione ciclica transitoria, nelle condizioni post sismiche si determina l'attivazione di un fenomeno di collasso solo se il deviatore a stato critico risulta inferiore a quello derivante dai carichi statici preesistenti. Invece, dal momento che nelle prove di laboratorio spesso la condizione iniziale e finale è caratterizzata da uno stato tensionale isotropo, in laboratorio l'attivazione in condizioni cicliche di un comportamento instabile non dà luogo a una rottura.

Nel contesto degli studi sul comportamento non drenato delle sabbie, la condizione di “stato critico” viene spesso indicata come “stato stazionario” (Castro (1969), Casagrande (1975), Castro e Pulos (1977), Poulos et al. (1985)); di fatto, lo stato critico è una condizione stazionaria nella quale il provino continua a sviluppare deformazioni deviatoriche plastiche senza che si osservino variazioni dello stato tensionale efficace.

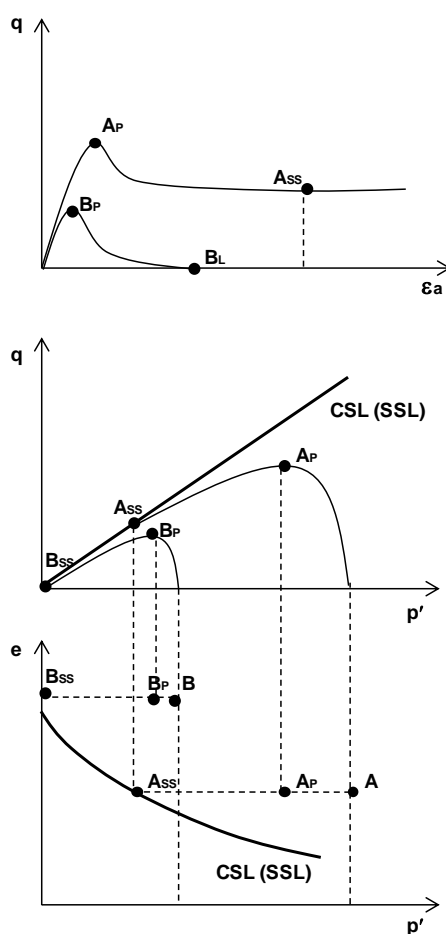


Fig. 1-1 Esempificazione di comportamenti meccanici instabili in prove triassiali consolidate non drenate.

La doppia definizione è stata impiegata in passato per distinguere le condizioni di stabilizzazione riscontrate nelle prove drenate da quelle ottenute in assenza di drenaggio; esse infatti sembravano non coincidenti sul piano di compressibilità. La nomenclatura è rimasta in uso nonostante alcuni studi (Verdugo e Ishihara (1996) e Been e Jefferies (1991)) abbiano appurato che, eseguendo prove a controllo di deformazione, il luogo geometrico degli stati stazionari determinati sperimentalmente prescinde dalle condizioni di drenaggio. In questo paragrafo sono impiegate entrambe le definizioni, nonostante nella tesi verrà usata prevalentemente la definizione di stato critico. In questo capitolo sono infatti richiamati i risultati di studi condotti sul comportamento non drenato delle sabbie nei quali viene adottata l'espressione "stato stazionario", inoltre la definizione di "stato stazionario" mantiene un'analogia con la definizione di "stato quasi stazionario", impiegata in letteratura ad indicare la temporanea stabilizzazione dello stato tensionale efficace che si manifesta in corrispondenza di un minimo locale del deviatore e che non va confusa con lo stato critico.

Le risposte sperimentali incluse nella seconda classe di comportamento si caratterizzano per la presenza di una temporanea riduzione del deviatore. L'andamento post picco del deviatore di tensione manifesta una condizione di minimo locale definita, come anticipato, "stato quasi stazionario (QSS)" nella quale si osserva un cambiamento di segno dell'incremento di sovrappressione interstiziale evidenziato dal fatto che il percorso tensionale, nel piano degli invarianti, inverte la propria direzione. La condizione di stato quasi stazionario è la duale di quella denominata "trasformazione di fase" nelle prove drenate. Nell'ambito della seconda classe, in base alla proporzione reciproca fra la tendenza contraente e quella dilatante, si possono distinguere due tipi di risposte non drenate. Nella Fig. 1-2 a. è mostrata la risposta sperimentale di un provino che esibisce un comportamento prevalentemente contraente. Al termine della prova, dopo la fase dilatante, la tensione media efficace a stato critico $p'_{D,SS}$ è infatti inferiore alla tensione di consolidazione iniziale p'_D . Nella Fig. 1-2 b. sono riportati invece i risultati di una prova eseguita su un provino che manifesta un comportamento prevalentemente dilatante. In questo caso la tensione media efficace a stato critico $p'_{E,SS}$ risulta maggiore di quella di fine consolidazione p'_E .

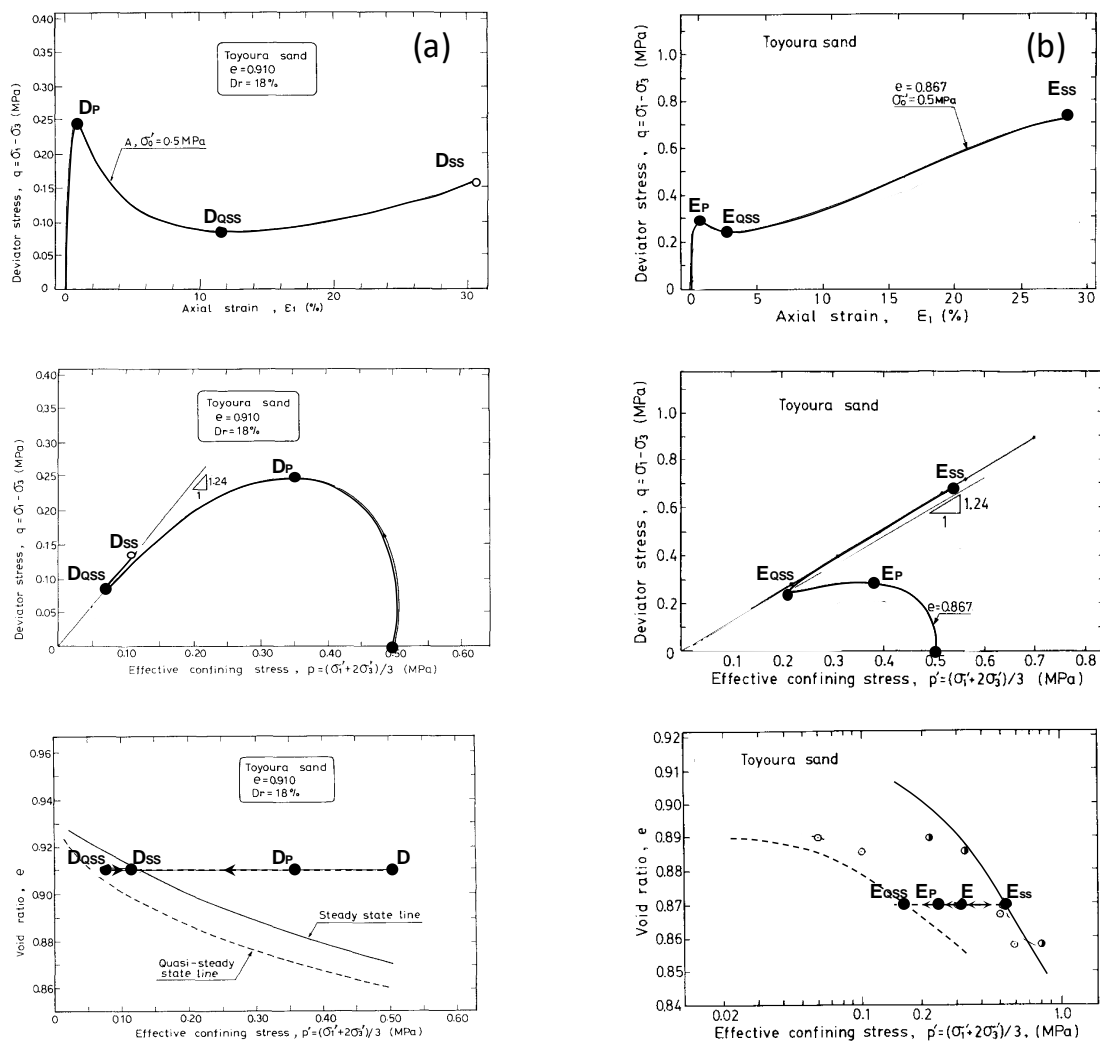


Fig. 1-2 Risposte sperimentali riconducibili alla seconda classe esibite, in prove triassiali consolidate non drenate, da provini di sabbia Toyoura (Ishihara (1993)): (a) prevalentemente contraente (quasi instabile) (b) prevalentemente dilatante (quasi liquefazione).

Nei piani di compressibilità mostrati nella Fig. 1-2 lo stato iniziale del provino che manifesta un comportamento prevalentemente contraente è rappresentato da un punto che giace al di sopra della linea dello stato stazionario mentre il comportamento prevalentemente dilatante si osserva quando il punto cade sotto la linea dello stato critico (stato stazionario). Per i campioni riportati nella Fig. 1-2 lo stato critico, indicato con SS, si manifesta in corrispondenza di deformazioni assiali molto elevate. L'entità di queste deformazioni è un aspetto da tenere in considerazione quando si voglia determinare sperimentalmente la linea dello stato critico. Il valore delle deformazioni

assiali cumulative fino alla condizione di minimo locale del deviatore dipende invece da quanto è marcata la tendenza a contrarre del provino.

Le risposte sperimentali riconducibili alla terza classe di comportamento non drenato saranno indicate nel testo come stabili; in questo caso il deviatore di tensione cresce in modo monotono fino al raggiungimento della condizione stazionaria. La Fig. 1-3 mostra un esempio di risposta sperimentale che rientra nella terza classe di comportamento.

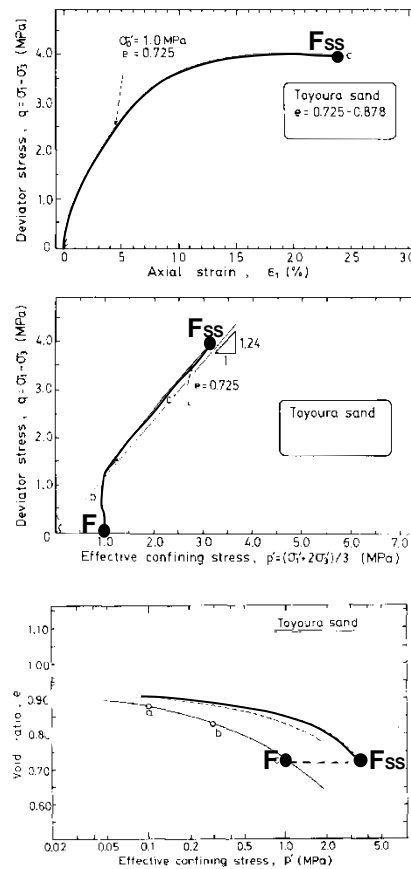


Fig. 1-3 Comportamento meccanico stabile esibito da un provino di sabbia Toyoura in una prova triassiale consolidata non drenata (Ishihara (1993)).

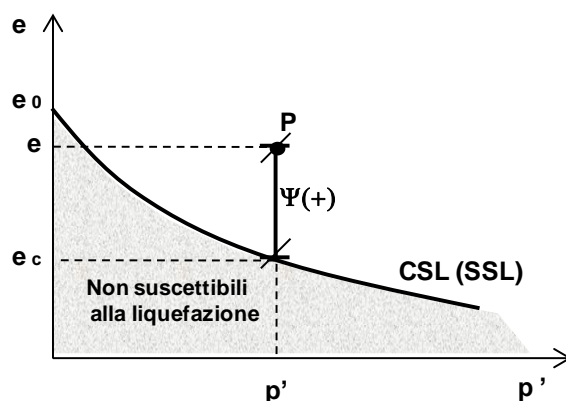


Fig. 1-4 Esemplificazione della definizione di Ψ (parametro di stato).

Una indicazione sul tipo di comportamento meccanico deviatorico che un campione di sabbia può esibire in condizioni non drenate è fornita dal valore iniziale del parametro di stato ψ (Been e Jefferies (1985)) definito dalla seguente espressione:

$$\psi = e - e_c \quad (1.1.1)$$

Come mostrato nella Fig. 1-4, ψ esprime una misura della distanza, valutata nel piano di compressibilità, fra l'indice dei vuoti corrente e quello calcolato sulla linea dello stato critico in corrispondenza della tensione media efficace corrente. Sulla base delle evidenze sperimentali, sono considerati suscettibili di manifestare liquefazione statica i campioni di sabbia i cui stati iniziali siano rappresentati sul piano di compressibilità da punti collocati al di sopra della linea dello stato critico (o stato stazionario).

Un valore iniziale positivo di ψ implica che nel corso della fase deviatorica di una prova triassiale non drenata verranno accumulate sovrappressioni interstiziali positive. Il solo valore iniziale del parametro di stato (Been e Jefferies, 1985) costituisce un indicatore significativo della possibilità che, all'applicazione di un carico deviatorico monotonamente crescente, un campione manifesti una risposta meccanica caratterizzata da un picco del deviatore e da una successiva riduzione, ma non permette di prevedere se si verificherà liquefazione statica, un comportamento instabile oppure localmente instabile. La Fig. 1-5 mostra che ad uno stesso valore di ψ non necessariamente corrisponde una stessa tipologia di risposta non drenata; mentre il provino B liquefa il provino A ha un comportamento instabile.

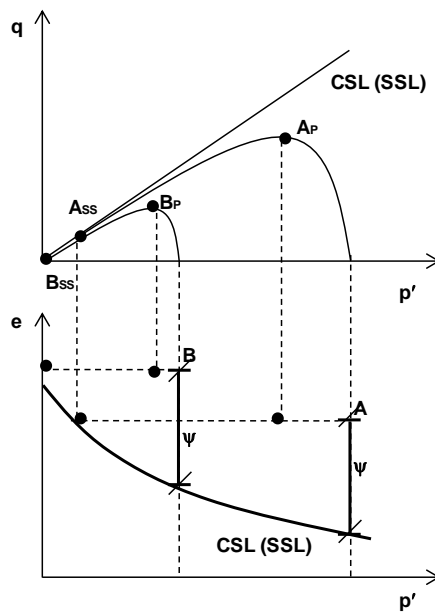


Fig. 1-5 Esempificazione di diverse risposte non drenate (instabili) mostrate, in prove triassiali, da provini consolidati a stati iniziali caratterizzati dallo stesso valore del parametro di stato.

Nell'ambito di una campagna sperimentale di prove triassiali consolidate non drenate eseguite su provini di sabbia Toyoura realizzati con la tecnica del Moist Placement (MP), Ishihara (1993) propone la definizione di un parametro di stato il cui valore nella condizione di fine consolidazione consente di prevedere quale tipo di risposta meccanica esibirà il provino nel corso della fase deviatorica. Questo parametro dipende da due distanze, valutate sul piano di compressibilità in corrispondenza del valore corrente della tensione media efficace; una fra l'indice dei vuoti corrente e quello nella condizione "quasi stazionaria", l'altra fra l'indice dei vuoti corrente e un indice dei vuoti di riferimento.

L'indice dei vuoti di un provino, ricostituito, di sabbia normal-consolidata dipende dal livello di tensione applicato nel corso della fase di compressione ma anche dalla tecnica di preparazione e dall'energia impiegata per realizzare il campione. I provini sono inizialmente preparati a tensioni medie efficaci pressoché nulle. Le pressioni di confinamento vengono applicate successivamente, dopo la fase di saturazione. Come mostrato nella Fig. 1-6 a., il confinamento induce una riduzione dell'indice dei vuoti di entità dipendente sia dalla densità relativa iniziale che dalla tensione di confinamento, ma in generale non molto marcata; è infatti rilevabile facilmente che la compressione isotropa non costituisce il modo più efficace per alterare il volume di un materiale a grana grossa.

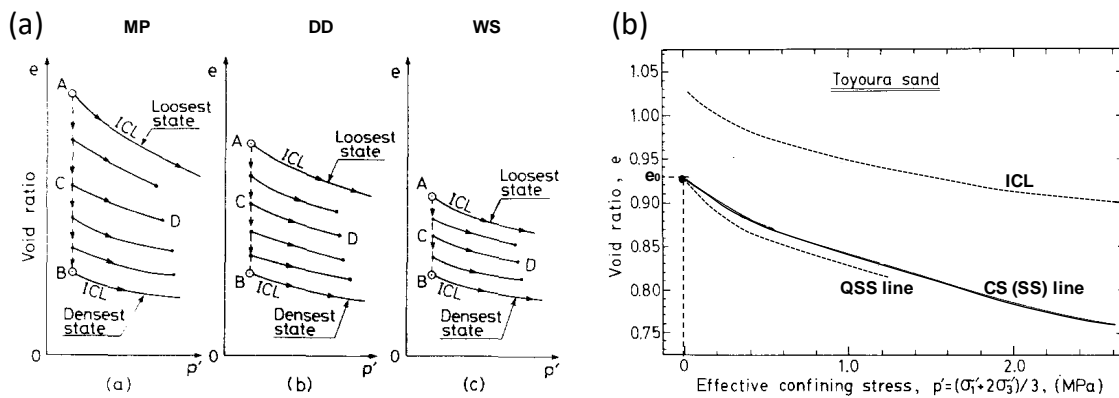


Fig. 1-6 (a) Linee di normal-consolidazione isotropa di provini preparati con le tecniche: del Moist Placement (MP) della Dry Deposition (DD) e della Water Sedimentation (WS). (b) Confronto fra la ICL Loosest state, la Linea dello Stato Critico e la Linea dello Stato Quasi Stazionario ottenute su provini preparati con la tecnica del Moist Placement. (Ishihara (1993)).

La Fig. 1-6 a. mostra un confronto fra gli indici dei vuoti iniziali prodotti con le tecniche del *Moist Placement* (MP), della *Dry Deposition* (DD) e della *Water Sedimentation* (WS). Si può notare che ad ogni tecnica è associato uno stato di addensamento iniziale minimo; la linea di normal consolidazione che parte da tale indice dei vuoti è contrassegnata nella Fig. 1-6 a. e verrà indicata nel seguito del testo con ICL *loosest state*.

La Fig. 1-6 (b) mostra la linea dello stato quasi stazionario e la linea dello stato critico ottenute dalla campagna di prove; nella Fig. 1-6 (b) viene indicato con e_0 l'indice dei vuoti corrispondente, sulla linea dello stato critico, a una pressione media efficace pari a zero. Dalla Fig. 1-6 (b) si può notare che la linea dello stato quasi stazionario, determinata dalle prove suddette, ha un indice dei vuoti in corrispondenza di $p' = 0$ coincidente con e_0 .

Premesse queste considerazioni è possibile definire in modo più rigoroso il parametro indice di stato iniziale. I_s è definito dalla seguente espressione:

$$I_s = \frac{e_{rif} - e}{e_{rif} - e_{qss}} \quad (1.1.2)$$

Per illustrare il significato dei termini che compaiono nella (1.1.2) si può fare riferimento alle Fig. 1-7.

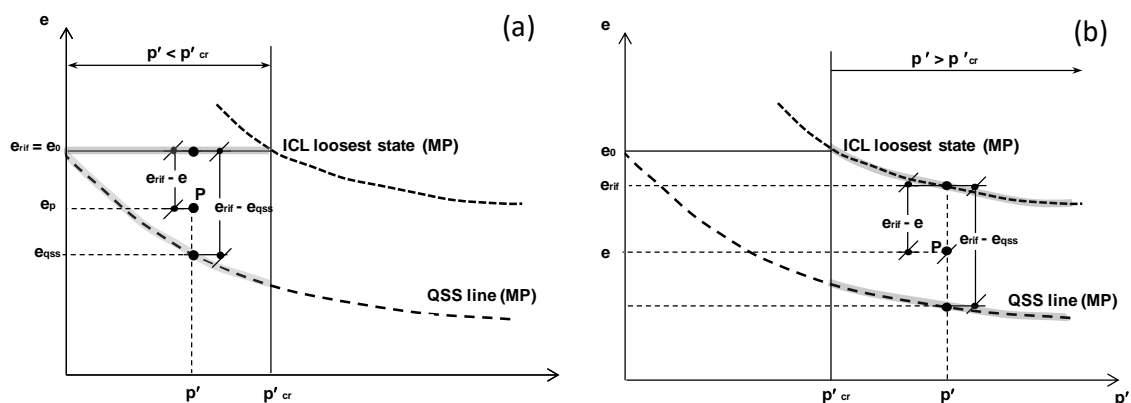


Fig. 1-7 Esempificazione della definizione dell'Indice di Stato Iniziale.

Nella Fig. 1-7 la linea identificata con *ICL loosest state* è relativa alla tecnica del *Moist Placement* (MP). Come è possibile rilevare dalla Fig. 1-6 a. questa linea di normal-consolidazione è anche il luogo degli stati in assoluto più sciolti per la sabbia Toyoura. L'indice dei vuoti indicato con e_0 nella Fig. 1-6 b. è definito, come anticipato, indice dei vuoti limite; e_0 è un valore comune, per tensione media efficace nulla, alla linea dello stato critico e a quella dello stato stazionario ottenuta dalle prove di laboratorio sui provini realizzati con la tecnica del *Moist Placement*.

Il valore della tensione media efficace p' calcolato sulla *ICL loosest state* in corrispondenza di e_0 è definito “pressione media efficace critica p'_{cr} ”. Per tutti gli stati di normal consolidazione caratterizzati da p' inferiore a p'_{cr} l'indice dei vuoti di riferimento e_{rif} nella (1.1.2) è pari ad e_0 . Per p' maggiore di p'_{cr} e_{rif} è l'indice dei vuoti calcolato sulla *ICL loosest state*.

Per gli stati che giacciono sulla *ICL loosest state* viene assunto, a prescindere dalla formula, che $I_s=0$. Per gli stati non appartenenti alla *ICL loosest state* I_s viene calcolato con la (1.1.2) tenendo conto del significato di e_{rif} a sinistra e a destra di p'_{cr} , come evidenziato anche nelle Fig. 1-7.

Ishihara (1993) rileva che i valori dell'indice di stato iniziale individuano i possibili comportamenti non drenati e precisamente:

- per p' minore di p'_{cr} quando $I_s \leq 0$ si ha liquefazione statica (Fig. 1-7 b.).
- per p' maggiore di p'_{cr} non sono possibili valori negativi di I_s visto che la *ICL loosest state* MP costituisce il luogo degli stati in assoluto più sciolti; quando $I_s=0$

l'andamento post picco è decrescente monotonamente fino a un valore stazionario diverso da 0 (comportamento instabile).

- Per I_s compreso tra 0 e 0.72 l'andamento del deviatore manifesta un minimo locale (condizione quasi stazionaria) che si presenta accoppiato con deformazioni di considerevole entità (comportamento prevalentemente contraente). Quando I_s è compreso tra 0.72 e 1 il minimo locale si presenta a livelli deformativi minori (comportamento prevalentemente dilatante).
- I_s maggiore di 1 implica una risposta con deviatore monotonamente crescente (comportamento stabile).

La Fig. 1-8 mostra le isolinee di I_s valutate per gli stati normalmente consolidati (simboli vuoti) di provini della sabbia Toyoura confezionati con la tecnica del MP. Gli andamenti permettono di visualizzare quali stati iniziali possono originare analoghe risposte non drenate.

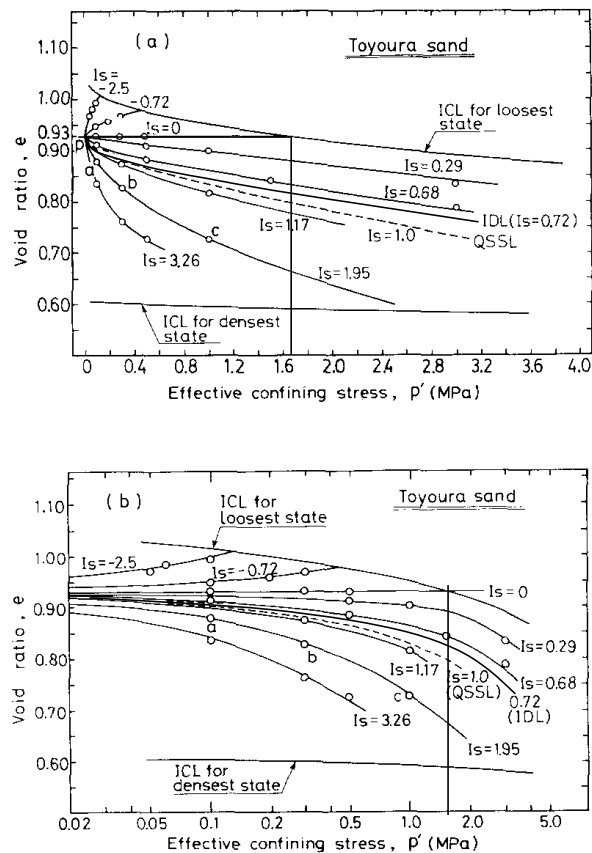


Fig. 1-8 Isolinee di I_s per gli stati di fine consolidazione (simboli vuoti) di provini realizzati con la tecnica del MP. Andamenti: (a) nel piano $e:p'$ (b) nel piano $e:\log p'$. (Ishihara (1993)).

Nella Fig. 1-9 sono riportati i percorsi tensionali e le relazioni tra tensioni e deformazioni esibite da provini ai quali, nella condizione che precede la fase di rottura non drenata, è associato uno stesso valore di I_s .

Nell'analisi di Ishihara (1993) il comportamento non drenato delle sabbie viene descritto e inquadrato nella prospettiva dello stato critico. Il parametro I_s definito nell'ambito dello studio per identificare analoghi comportamenti meccanici non drenati, non si configura come un parametro dal risvolto applicativo visto che la determinazione del valore iniziale presuppone la conoscenza dell'intero comportamento meccanico del materiale. Per calcolare I_s è infatti necessario che siano state determinate sperimentalmente: la Linea dello Stato Critico, la Linea dello Stato Quasi Stazionario e la linea di normal-consolidazione isotropa corrispondente alla minima densità relativa iniziale di formazione del provino, ICL *loosest state*.

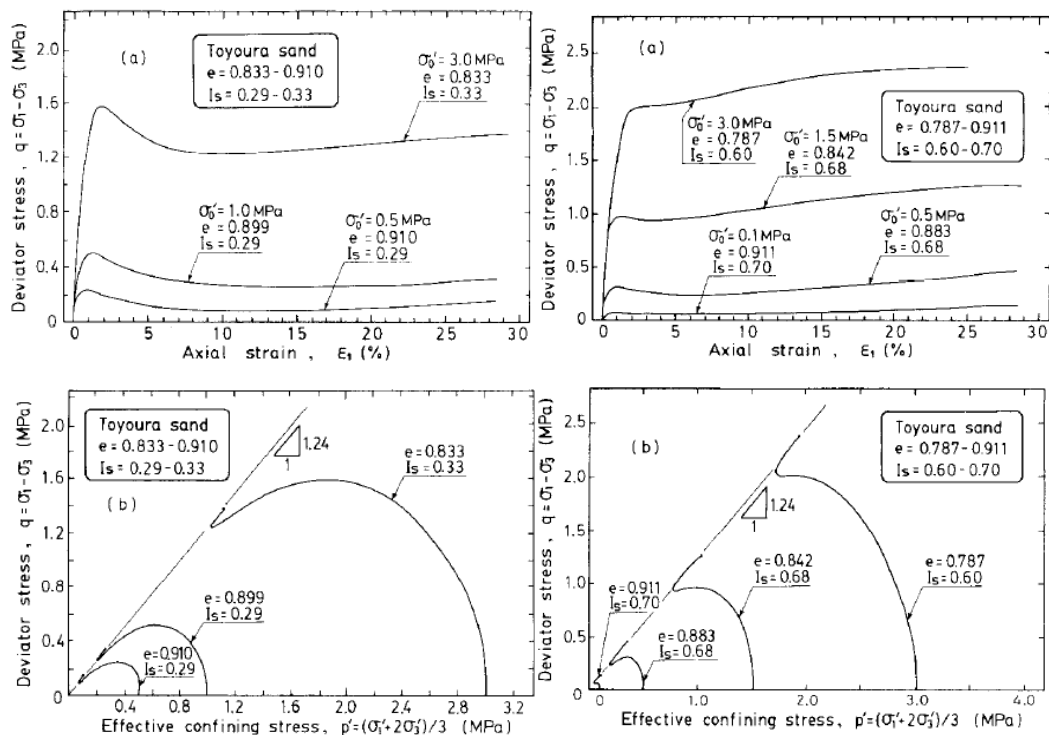


Fig. 1-9 Risultati sperimentali relativi alla fase deviatorica di prove triassiali consolidate non drenate su provini di sabbia Toyoura realizzati con tecnica del Moist Placement MP. Esempi di risposte meccaniche di provini caratterizzati dallo stesso valore iniziale di I_s : (a) $I_s=0.30$ (b) $I_s=0.68$ (Ishihara 1993).

Il valore assunto dall'indice di stato iniziale è inoltre significativo solo nel confronto delle risposte di provini ottenuti con la stessa tecnica; se a provini realizzati con metodi diversi fosse associato lo stesso valore dell'indice di stato iniziale, questo non implicherebbe una stessa tipologia di comportamento. I_s consente di apprezzare che la risposta non drenata di un provino è determinata dalla posizione del punto rappresentativo del suo stato iniziale rispetto alla linea dello stato critico e a quella dello stato quasi stazionario. L'impossibilità di effettuare confronti sul tipo di comportamento non drenato a parità di I_s , nel caso di provini confezionati con tecniche diverse, dipende dal fatto che, diversamente dalla linea dello stato critico, la linea dello stato quasi stazionario non è una proprietà intrinseca e, insieme agli stati iniziali possibili, dipende dalla tecnica di preparazione dei campioni. Nonostante questo, è interessante confrontare i risultati ottenuti da Ishihara (1993) per provini realizzati con tecniche differenti.

Nella Fig. 1-10 a. sono confrontati nel piano di compressibilità i campi nei quali ricadono gli stati iniziali, caratterizzati da I_s compreso fra 0 e 1, di provini normalmente consolidati realizzati con le tecniche: Moist Placement (MP) e Dry Deposition (DD). I risultati mostrati nella Fig. 1-10 a. confermano che la tecnica del MP permette di realizzare campioni con densità iniziali molto variabili (si noti l'ampiezza del campo di stati di addensamento possibili) e generalmente basse. La tecnica della DD consente invece di realizzare campioni con indici dei vuoti meno variabili e sempre inferiori a quelli dei campioni confezionati con la tecnica MP (Fig. 1-10 a.).

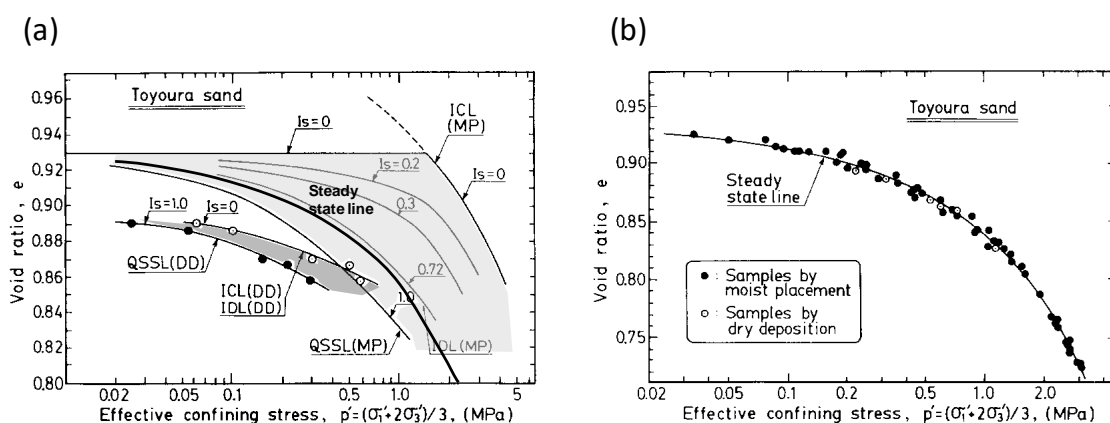


Fig. 1-10 Risultati sperimentali di prove triassiali consolidate isotropicamente non drenate su provini di sabbia Toyoura (Ishihara 1993): (a) Confronto fra le ICL e le Linee Quasi Stazionarie di provini preparati con i metodi del Moist Placement e della Dry Deposition (b) Linea dello Stato Critico.

Nella Fig. 1-10 a. sono riportate le linee sulle quali si posizionano gli stati quasi stazionari dei provini confezionati con le due tecniche. La Fig. 1-10 b. mostra i punti corrispondenti al raggiungimento dello stato critico (condizione stazionaria) dei provini confezionati con le due tecniche. Dalle Fig. 1-10 si può quindi apprezzare che la Linea dello Stato Stazionario è una caratteristica intrinseca al materiale mentre la posizione e la forma, nel piano di compressibilità, della Linea dello Stato Quasi Stazionario dipendono invece dalla tecnica usata per confezionare i provini. In corrispondenza del raggiungimento della linea quasi stazionaria la condizione del provino risente ancora dello stato iniziale. La tecnica di formazione può quindi essere ritenuta rappresentativa di una struttura iniziale. Nell'ambito di una stessa struttura (identificata dalla relativa ICL) la condizione quasi stazionaria rappresenta gli stati in corrispondenza dei quali si manifesta la trasformazione di fase.

Nei provini di sabbia Toyoura realizzati con la *Dry Deposition*, come mostrato nella Fig. 1-10 a., poiché il campo delle linee di normal-consolidazione, non solo è inferiore a quello associato al MP ma è anche collocato interamente al di sotto della Linea dello Stato Critico, non si potrà osservare liquefazione e, nell'intervallo di stati riportati in Fig. 1-10 a., neppure un comportamento instabile.

1.2. Effetto del contenuto in fine

Le Fig. 1-11 e Fig. 1-12 mostrano i risultati, Ishihara (1993), ottenuti da prove non drenate di compressione triassiale, effettuate sui provini isotropicamente consolidati della sabbia limosa di Tia Juana e del limo sabbioso di Lagunillas.

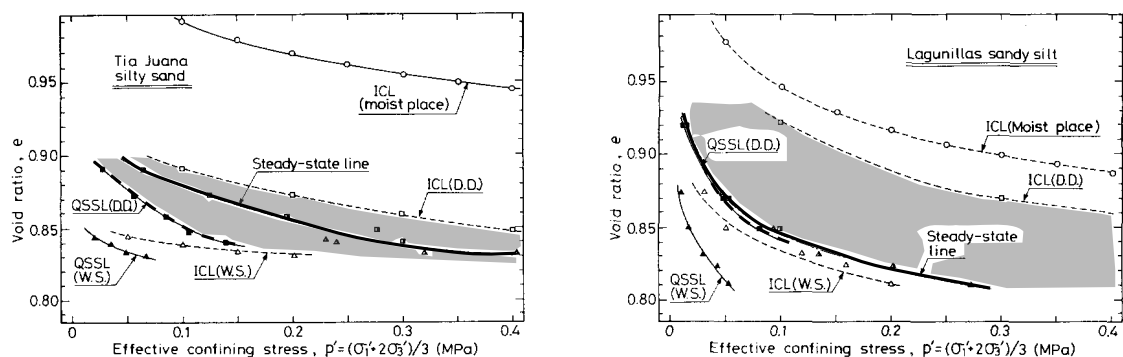


Fig. 1-11 Confronto nel piano $p':e$ fra le ICL e le linee Quasi Stazionarie di provini preparati con diversi metodi Risultati sperimentali relativi: (a) alla sabbia limosa Tia Juana (b) al limo sabbioso Lagunillas.

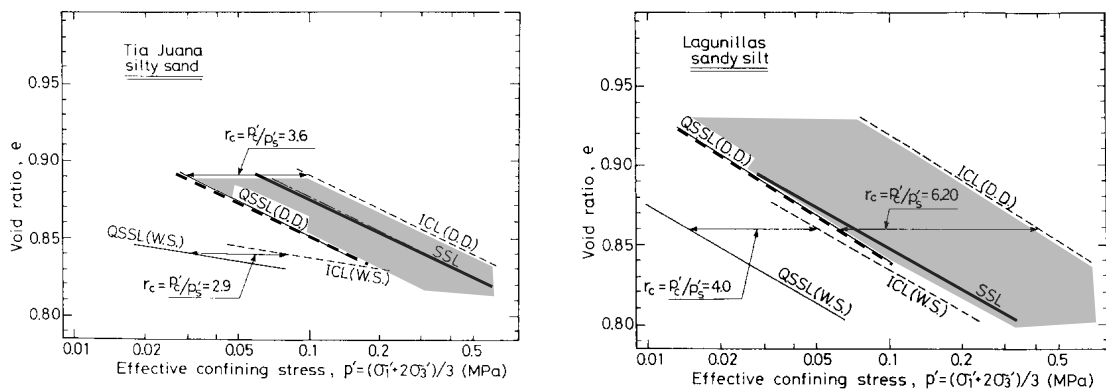


Fig. 1-12 Confronto nel piano $\log(p'):e$ fra le ICL e le linee Quasi Stazionarie di provini preparati con diversi metodi. Risultati sperimentali relativi: (a) alla sabbia limosa Tia Juana (b) al limo sabbioso Lagunillas.

Nelle Fig. 1-11 e Fig. 1-12 sono evidenziati i campi nei quali ricadono le linee di normal-consolidazione di provini realizzati con la tecnica della *Dry Deposition*. Dal confronto fra le Fig. 1-11 e Fig. 1-12 e la Fig. 1-10 è possibile rilevare che la stessa tecnica produce strutture più aperte nei campioni di sabbia contenente fine. Dalle Fig. 1-11 e Fig. 1-12 si può inoltre rilevare che per il limo sabbioso e la sabbia limosa, a differenza di quanto avviene per la sabbia pulita, nel piano di compressibilità la linea dello stato critico cade all'interno del campo tra la ICL *loosest state* e la Linea dello Stato Quasi Stazionario dei provini ottenuti con la *Dry Deposition*. Appare perciò che in presenza di fine la compressione triassiale non drenata può dar luogo a risposte localmente instabili anche in campioni preparati con la DD.

Nello studio di Ishihara (1993), il comportamento delle sabbie contenenti fine è interpretato, analogamente a quello delle sabbie pulite, nel contesto della teoria dello stato critico; come unica particolarità, rispetto alle sabbie pulite, viene evidenziato che le miscele granulari e i limi possono presentarsi con maggiore facilità in strutture caratterizzate da assetti interparticellari più aperti.

Nel paragrafo precedente si è mostrato che la liquefazione statica del terreno (resistenza a stato critico nulla) si manifesta, a prescindere dalla tensione media efficace iniziale, solo se l'indice dei vuoti iniziale è superiore al valore limite e_0 . Si è visto inoltre che non tutte le tecniche di preparazione consentono di confezionare campioni con indici dei vuoti tali da far manifestare comportamenti instabili.

La modalità di deposizione in sito ha un effetto sulla natura degli stati iniziali nei quali può trovarsi un materiale analogo a quello prodotto dalla tecnica di preparazione del

campione in laboratorio e quindi la effettiva pericolosità di comportamenti rilevati in laboratorio dipende da quanto è realistica l'assetto iniziale dei grani prodotto dalla tecnica di confezionamento del campione. Lade e Yamamuro (1997) ad esempio ritengono che le strutture originate in laboratorio con la tecnica della DD, con buona approssimazione, possano essere ritenute rappresentative di quelle determinate dalle più comuni modalità di deposizione naturale dei terreni a grana grossa. La (Fig. 1-10) mostra che per le sabbie pulite le linee di normal-consolidazione associate alla tecnica della DD sono sempre posizionate al di sotto della linea dello stato stazionario indicando in qualche modo (come afferma lo stesso Ishihara 1993) che nei depositi naturali di sabbia pulita è difficile riscontrare fenomeni di liquefazione.

Poiché in sito è molto più frequente che le sabbie si presentino assortite con significative percentuali di limo e in numerosi casi sono riportati episodi di liquefazione in depositi di sabbia mista a fine non plastico (Ishihara 1993), diversi autori hanno indagato l'effetto del fine non plastico sul comportamento meccanico delle sabbie.

Numerosi studi, essendo incentrati sull'analisi specifica del fenomeno della liquefazione, indagano il comportamento meccanico a densità relative estremamente basse. I risultati riportati in letteratura sull'effetto del fine sono spesso contrastanti; questo anche a causa del fatto che gran parte delle indagini vengono impostate al di fuori dalla prospettiva dello stato critico che invece ha il pregio di evidenziare quali siano gli aspetti intrinseci di un determinato materiale consentendo un confronto fra i risultati di studi effettuati su materiali diversi.

Kuerbis et al. (1988) sono tra i primi autori ad aver indagato, con analisi sperimentali in laboratorio, l'effetto della presenza di fine non plastico sulla suscettibilità alla liquefazione delle sabbie; essi hanno esaminato l'effetto del limo sul comportamento non drenato di una sabbia prodotta dalle operazioni di estrazione mineraria, avente granulometria compresa fra i diametri dei setacci 20 e 200. Pitman et al. (1994) hanno lavorato sulla Ottawa sand C109. Lade e Yamamuro (1997) hanno impiegato la sabbia Nevada e la sabbia Ottawa, entrambe, in una versione con grani appartenenti al fuso 50/200 e in un'altra al 50/80. Nello studio di Lade e Yamamuro (1997), la suscettibilità alla liquefazione è definita proporzionale al rapporto fra l'ampiezza del campo di indici dei vuoti in corrispondenza dei quali (a parità di tensione media efficace iniziale) si osserva la liquefazione statica e la differenza fra il massimo e minimo indice dei vuoti.

Nei vari studi le miscele di sabbia e limo vengono realizzate assumendo ipotesi diverse; Kuerbis et al. (1988) ad esempio, mantengono inalterato l'indice dei vuoti tra i grani di sabbia mentre incrementano la quantità di limo. Lade e Yamamuro (1997) adottano il criterio di mantenere invariato il metodo di preparazione dei provini e scelgono quello che ritengono essere più adeguato a riprodurre la modalità di deposizione naturale dei materiali a grana grossa.

La Fig. 1-13, tenendo conto delle diverse ipotesi, mostra il confronto fra gli indici dei vuoti ai quali sono state effettuate le prove. Con il criterio seguito da Kuerbis et al. (1988) e Pitman et al. (1994) al crescere della percentuale di fine aumenta automaticamente anche la densità relativa: per questo essi, in modo opposto a Lade e Yamamuro (1997), affermano che al crescere del contenuto di limo si riduce il potenziale di liquefazione statica.

Lade e Yamamuro (1997) nel giustificare le incongruenze fra le conclusioni tratte nei loro studi e quelle di Kuerbis e Pitmann impiegano come parametro di stato la densità relativa. Lade e Yamamuro (1997), ad esempio mostrano che nei mix la liquefazione si verifica anche a densità molto elevate che potrebbero invece indurre, erroneamente, ad escluderne la possibilità di innesco.

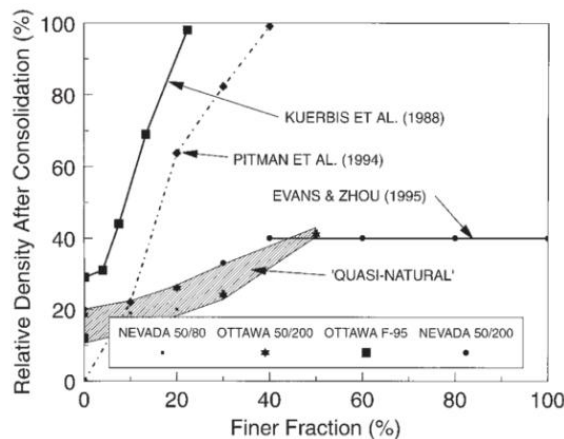


Fig. 1-13 Densità relativa dopo la consolidazione corrispondente a diversi contenuti di fine in alcuni studi sull'effetto del limo sul comportamento meccanico delle sabbie Lade e Yamamuro (1997)

Il valore della densità relativa, prima dell'applicazione di un carico monotonamente crescente in condizioni non drenate, non è però sufficiente a prevedere la risposta del campione di terra; non fornisce alcuna indicazione neppure sulla sola possibilità che possa manifestarsi una risposta fragile. Le conclusioni riguardanti l'effetto della presenza di percentuali crescenti di un tipo di fine su una particolare sabbia, se tratte impiegando come parametro di stato la densità relativa, sono influenzate dalla scelta del parametro che viene fissato mentre si fa variare la quantità di fine. In secondo luogo, senza l'impiego di opportuni parametri adimensionali, i risultati ottenuti per un determinato mix, anche partendo dalla stessa ipotesi, non possono comunque essere considerati validi in generale per tutte le terre a grana grossa contenenti fine non plastico.

A prescindere dalle conclusioni ottenute sulla suscettibilità alla liquefazione, gli studi mettono in luce correttamente gli effetti della presenza di limo in una sabbia sul campo degli indici dei vuoti raggiungibili. La Fig. 1-14 .a rappresenta una sintesi di questi effetti (Lade e Yamamuro (1997)).

Nella Fig. 1-14 .b è riportata una schematizzazione grafica del modo in cui l'aggiunta di fine modifica l'indice dei vuoti minimo (Yamamuro e Covert (2001)).

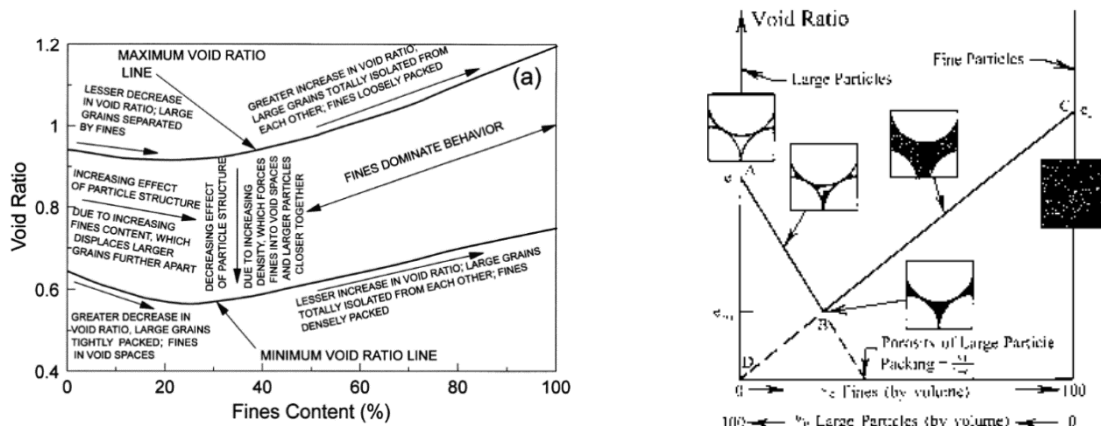


Fig. 1-14 (a) Andamenti dell'indice dei vuoti massimo e minimo di una sabbia al crescere del contenuto di fine e descrizione qualitativa dell'effetto sulla struttura intergranulare Lade e Yamamuro (1997) (b) Schema rappresentativo degli assetti intergranulari nelle condizioni di minimo indice dei vuoti corrispondenti a diverse composizioni percentuali di miscele con due componenti monogranulari Yamamuro e Covert (2001).

Un aspetto interessante della ricerca di Lade e Yamamuro (1997) è anche quello di aver scelto una tecnica che riproducesse condizioni di deposizione realistiche mostrando così il posizionamento degli indici dei vuoti naturali (almeno per la Nevada Sand e Ottawa Sand) all'interno del campo di densità realizzabili. La Fig. 1-15 riporta i risultati sperimentali ottenuti sull'indice dei vuoti nelle ricerche di Lade e Yamamuro (1997).

Sul finire degli anni settanta, allo scopo di unificare il comportamento meccanico della sabbia contenente fine e quello della relativa sabbia pulita, alcuni autori (Mitchell (1976) e Kenny (1977)) hanno proposto un parametro alternativo all'indice dei vuoti.

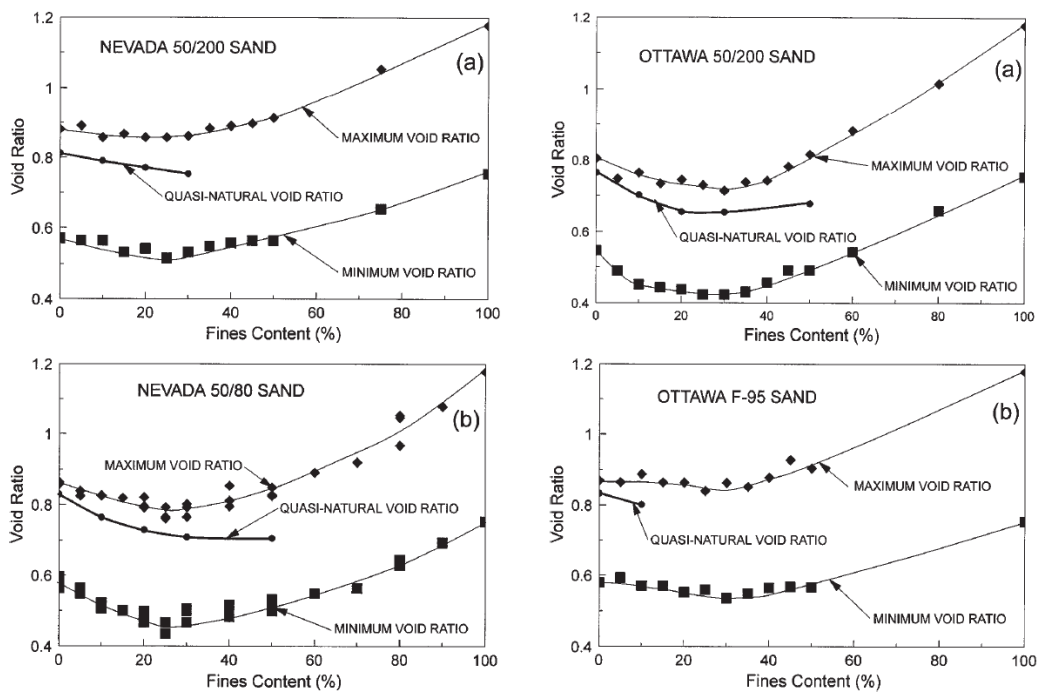


Fig. 1-15 Indice dei vuoti massimo, minimo e quasi naturale al variare del contenuto di fine: a sinistra in alto per la sabbia Nevada 50/200 e in basso per la sabbia Nevada 50/80, nella colonna di destra per la sabbia Ottawa (Lade e Yamamuro (1997)).

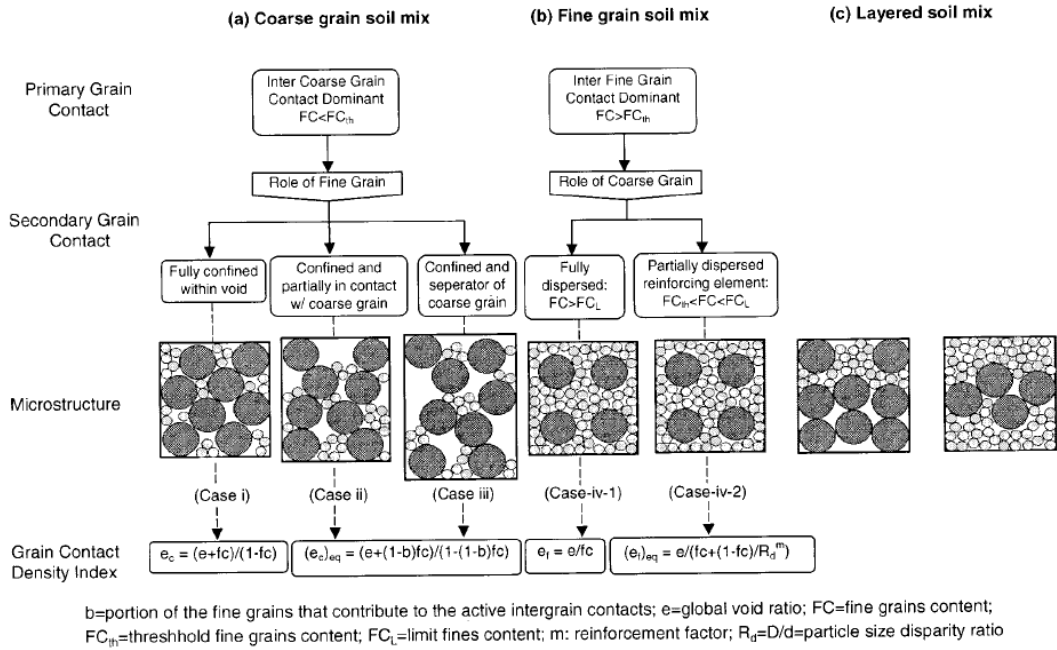


Fig. 1-16 Classificazione delle strutture interparticellari per le miscele di sabbia e fine (Thevanayagam (2002)).

Diversi autori hanno contribuito alla formulazione di espressioni per il calcolo dell'indice dei vuoti intergranulare (Thevanayagam et al. (2002), Ni et al. (2004), Rahaman et al. (2008), Benahmed et al. (2015)). Alla base delle definizioni c'è l'individuazione di strutture distinte in base alla natura dei contatti intergranulari. Assumendo per semplicità che il materiale sia composto da due frazioni monogranulari, le principali tipologie di strutture possono essere descritte con l'aiuto della rappresentazione schematica definita da Thevanayagam et al. (2002) e riportata nella Fig. 1-16.

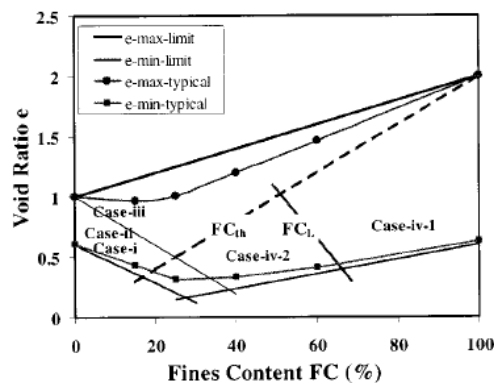


Fig. 1-17 Schema delle strutture intergranulari raggiungibili sulla base della percentuale di fine nella sabbia e indice dei vuoti globale Thevanayagam et al.(2002)

La Fig. 1-17 riporta l'andamento degli indici dei vuoti massimo e minimo teorici insieme a quelli che si determinano sperimentalmente e l'indicazione di quali strutture possono presentarsi in base alla composizione granulometrica del materiale.

Nelle Fig. 1-16 e Fig. 1-17, con l'ipotesi sottintesa che il peso specifico dei grani sia lo stesso per le due frazioni, il contenuto di fine è definito come:

$$FC = \frac{V_{del_solido_fine}}{V_{totale_del_solido}} \quad (1.2.1)$$

Esiste un contenuto limite di fine, indicato con FC_{th} , "di transizione", al di sotto del quale possono formarsi strutture caratterizzate dalla prevalenza di contatti fra le particelle di dimensioni maggiori. Una ulteriore soglia, indicata con FC_L , divide, all'interno delle strutture caratterizzate dalla prevalenza di contatti fra le particelle di dimensioni minori, quelle nelle quali i grani più grandi continuano ad avere un effetto nella trasmissione degli sforzi da quelle nelle quali può ritenersi del tutto dominante l'effetto del fine.

Le espressioni per il contenuto di fine di transizione FC_{th} sono state definite da Rahaman e Lo (2008), Thevanayagam et al. (2002), Yang et al. (2008). Senza entrare eccessivamente nel dettaglio, il contenuto di fine di transizione esprime il quantitativo di fine in corrispondenza del quale si riscontra una inversione di tendenza nell'andamento di un particolare aspetto del comportamento meccanico della terra. Rahaman e Lo (2008) definiscono FC_{th} come il contenuto di fine superato il quale la resistenza ciclica inizia a decrescere, e propongono l'espressione:

$$FC_{th} = 0.40 \left(\frac{1}{1 + \exp(0.5 - 0.13\chi)} + \frac{1}{\chi} \right) \quad (1.2.2)$$

Con

$$\chi = \frac{D_{10}}{d_{50}} \quad (1.2.3)$$

La (1.2.2), rispetto alle espressioni presentate dagli altri autori, è applicabile anche per miscele non monogranulari e introduce la dipendenza della soglia di fine dalle dimensioni relative della sabbia e del limo. Nella (1.2.2) χ è il rapporto di forma, D_{10} e

d_{50} rappresentano rispettivamente il diametro corrispondente al 10% e al 50% del passante. La (1.2.2) è stata ricavata interpolando i valori di FC_{th} in funzione di χ che Rahaman e Lo (2008) hanno ricavato analizzando i risultati riportati in letteratura di studi riguardanti l'effetto sulla resistenza ciclica della presenza di fine non plastico nelle sabbie.

La Fig. 1-17 permette di rilevare che, mantenendo costante l'indice dei vuoti globale, il passaggio da un tipo di struttura all'altra si può produrre incrementando la quantità di limo. La stessa Fig. 1-17 evidenzia anche come, fissando un valore più grande dell'indice dei vuoti cresce il valore di FC_{th} e si riduce quello di FC_L .

Thevanayagam et al. (1994) e Vaid et al. (1998) hanno definito l'indice dei vuoti intergranulare:

$$e_g = \frac{e + FC}{1 - FC} \quad (1.2.4)$$

Sotto la soglia FC_{th} l'indice dei vuoti intergranulare può essere usato solo quando il fine è interamente confinato all'interno degli spazi fra i grani di sabbia, Thevanayagam et al. (2002) hanno quindi definito l'indice dei vuoti intergranulare equivalente:

$$e_{g,eq} = \frac{e + (1 - \beta)FC}{1 - (1 - \beta)FC} \quad (1.2.5)$$

Nella (1.2.5) β esprime la frazione del fine che contribuisce al trasferimento dei carichi. Sulla base del significato fisico, β può assumere valori compresi fra 0 e 1. In letteratura sono proposti diversi criteri e procedure per la scelta di questo fondamentale parametro. Quando $FC > FC_L$ si può usare l'indice dei vuoti tra i grani di limo:

$$e_f = \frac{e}{FC} \quad (1.2.6)$$

Per $FC_{th} \leq FC \leq FC_L$, poiché i grani di sabbia influenzano la trasmissione degli sforzi viene impiegato un indice dei vuoti equivalente per il fine, ad esempio:

$$e_{f,eq} = \frac{e}{f + \frac{1 - FC}{R_d^m}} \quad (1.2.7)$$

Nei casi in cui $FC < FC_{th}$, scegliendo in modo opportuno il valore del parametro β per le diverse miscele di sabbia e limo, in un piano di compressibilità $p': e_{g, equ}$, le rispettive linee dello stato critico si sovrappongono a quella della sabbia di base. La Fig. 1-18 mostra alcuni esempi.

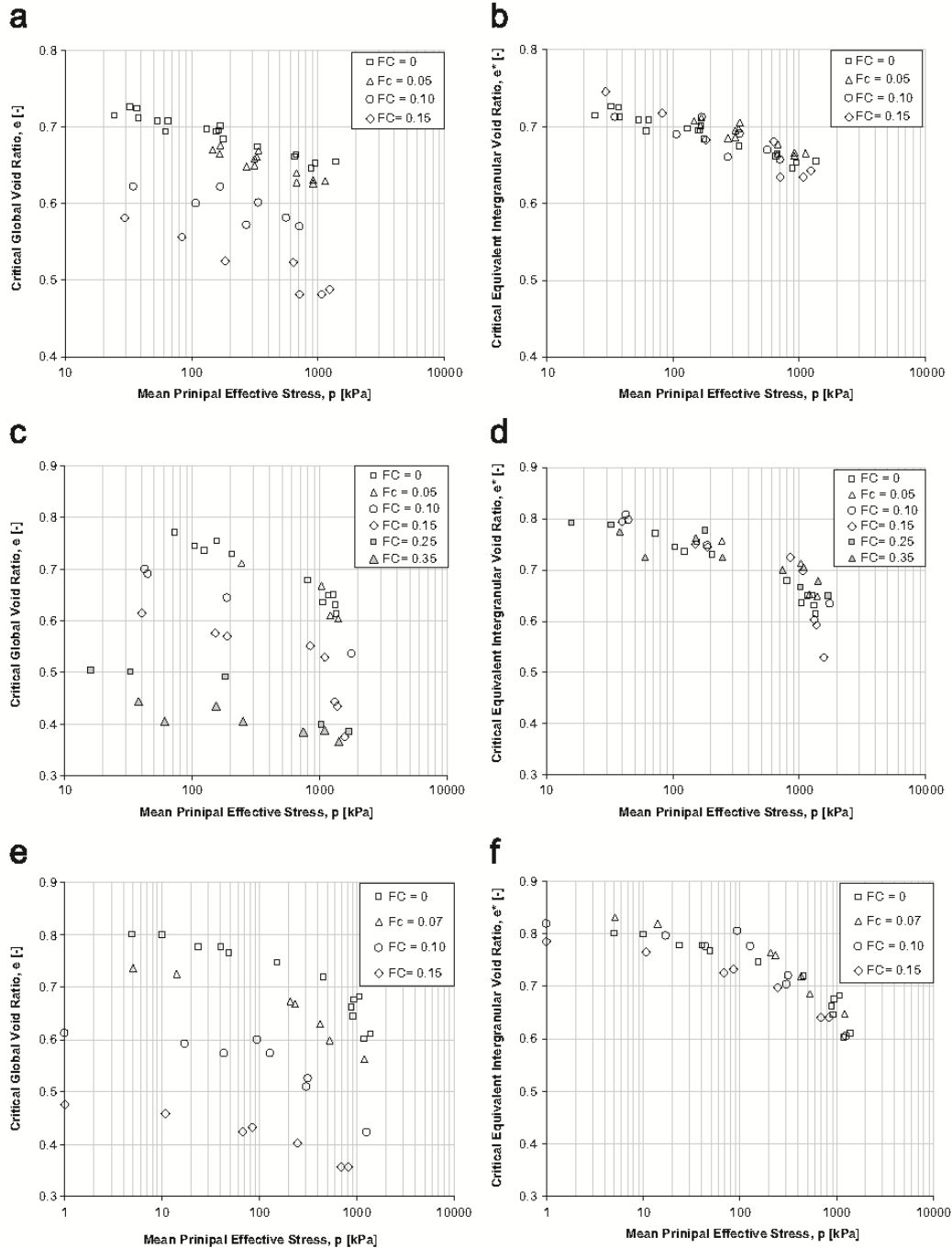


Fig. 1-18 Linee dello Stato Critico rappresentate in termini di indice dei vuoti globale e indice dei vuoti intergranulare equivalente: (a) e (b) per la sabbia Ottawa mista a Sil Co Sil 106, (c) e (d) per la sabbia M31 quarzo mista a limo Assyros, (e) (f) F55 sabbia Foundry -Sil-Co-Sil 40 Lashkari (2014)

Anche se in questi studi si tenta di includere nell'indice dei vuoti alcune informazioni sulle caratteristiche intrinseche della terra, di fatto, quest'ultimo deve essere considerato solo come uno dei parametri di stato. Una descrizione o previsione del comportamento meccanico basata solo sul parametro di stato iniziale (come evidenziato dallo studio di Ishihara (1993)) non appare adeguata neppure per le sabbie pulite.

Rahman et al. (2014) e Lashkari (2014) hanno proposto l'impiego dell'indice dei vuoti intergranulare in un modello costitutivo formulato nel contesto della teoria dello stato critico. Impiegando un modello costitutivo di questo tipo nell'analisi di un problema al finito in cui la composizione del materiale varia nello spazio, ai fini della caratterizzazione meccanica, si può effettuare la determinazione sperimentale della linea dello stato critico per la sola frazione sabbiosa.

Dal lavoro di Lashkari (2014) sembrerebbe che l'uso dell'indice dei vuoti intergranulare equivalente al posto dell'indice dei vuoti non consenta però, da solo, di unificare completamente il comportamento meccanico delle miscele a quello della sabbia di base. Se due campioni, uno costituito da sabbia pulita e l'altro composto da un assortimento di sabbia e limo, si trovassero in una condizione iniziale alla quale fosse associato lo stesso valore dell'indice dei vuoti intergranulari equivalente, ad essi corrisponderebbe anche lo stesso valore di $\psi_{equ} = e_{g,equ} - e_{cr,sabbia}$. Nel paragrafo precedente la descrizione basata sull'indice di stato iniziale metteva in luce che la risposta non drenata di una terra non dipende solo dalla distanza dalla linea dello stato critico ma anche dalla distanza dalla linea dello stato quasi stazionario e di fatto da tutte le caratteristiche del comportamento meccanico.

Nella versione del modello SANISAND modificata da Lashkari (2014) non solo si sostituisce l'indice dei vuoti con l'indice dei vuoti intergranulare equivalente $e_{g,equ}$ ma vengono così definite relazioni che esprimono la dipendenza dalle proprietà dei grani e dal quantitativo di fine anche di altre caratteristiche meccaniche come ad esempio la pendenza della linea dello stato critico nel piano degli invarianti $p':q$. Nella espressione del modulo di taglio:

$$G = G_0 p_{ref} F(e) \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^n \quad (1.2.8)$$

Nella (1.2.8) G_0 rimane una costante adimensionale valutata per la sabbia pulita ma per l'esponente n viene definita una relazione che lo lega sia a FC che alle caratteristiche geometriche dei grani. Nel modello vengono fatte dipendere da FC anche le caratteristiche di anisotropia intrinseca e il modulo di incrudimento plastico.

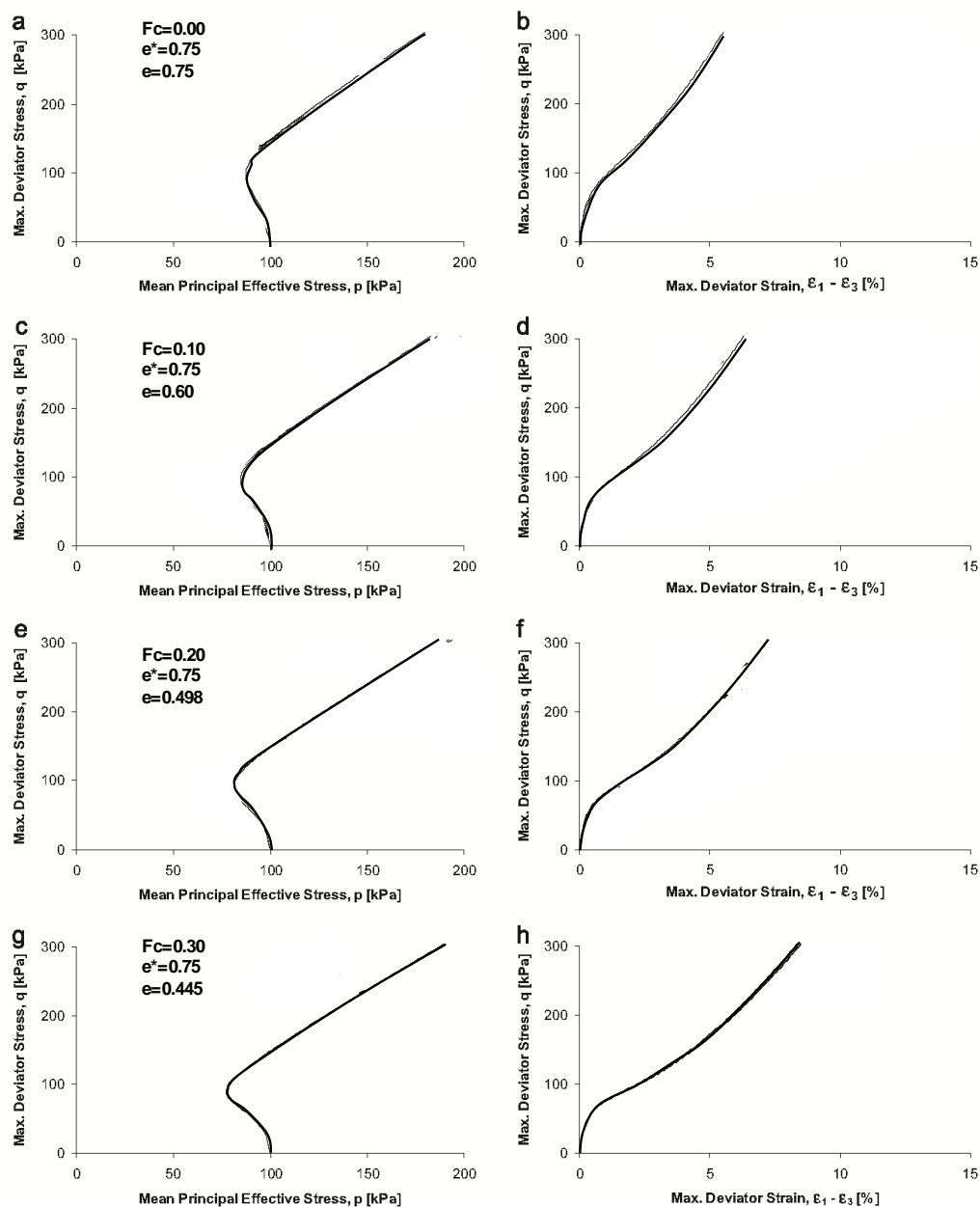


Fig. 1-19 Risultati di simulazioni numeriche di prove di taglio torsionale ciclico su provini a sezione cava eseguite su diverse miscele di sabbia e limo caratterizzate dalla stessa tensione efficace e indice dei vuoti intergranulare equivalente con il modello costitutivo proposto da Lashkari (2014)

La Fig. 1-19 riporta i percorsi tensionali e le relazioni tensioni deformazioni ottenute da simulazioni numeriche eseguite con il modello di Dafalias et al. (2004) modificato da Lashkari (2014) delle prove di taglio torsionale ciclico (*hollow cylinder cyclic torsional shear apparatus*) effettuate su campioni di sabbia Firoozkuh mista a diverse percentuali di limo non plastico Firoozkuh (Bahadori et al.). Tutti i provini sono caratterizzati dallo stesso valore di $e_{g,eq}$ e di p' . La Fig. 1-17 permette di rilevare che, nonostante la variazione del contenuto di fine composti di fatto un cambiamento del materiale, le risposte dei provini appaiono pressoché coincidenti.

L'uso in un modello costitutivo dell'indice dei vuoti intergranulare equivalente consente di determinare sperimentalmente la linea dello stato critico solo per la sabbia pulita: se da un lato questo introduce una semplificazione relativa alla caratterizzazione delle miscele, perché permette di non ripetere la onerosa determinazione sperimentale della CSL per le varie miscele composte da percentuali diverse della stessa sabbia e dello stesso limo (divenendo esse coincidenti con quella della sabbia pulita), comunque comporta altre difficoltà. Tra le difficoltà vi è il fatto che la determinazione del valore di β non è immediata e va ripetuta per ognuna dei FC. Per alcune condizioni iniziali, se il valore assegnato a β non comporta la perfetta coincidenza delle linee dello stato critico si possono ravvisare deviazioni anche considerevoli fra le risposte previste dal modello e quelle sperimentali. Allo stato attuale le relazioni del legame costitutivo sono state formulate solo per miscele caratterizzate da FC inferiore ad FC_{th} .

Per concludere, si sottolinea che tra le diverse caratteristiche intrinseche che vengono corrette in funzione della quantità di fine, in questi modelli costitutivi, non ci sono le densità minime e massime. Queste grandezze intrinseche infatti condizionano solo la possibilità che un mix possa trovarsi in un determinato stato ma non la risposta che manifesterà all'applicazione di un carico non drenato.

1.3. Alcuni aspetti del comportamento meccanico dei limi

Nel paragrafo precedente sono stati esaminati alcuni aspetti del comportamento meccanico di quei mix granulari nei quali la trasmissione degli sforzi avviene prevalentemente attraverso i grani di dimensioni maggiori. In questi casi il comportamento meccanico sotto carichi con prevalente componente deviatorica può essere ricondotto a quello della sabbia pulita. L'analogia con il comportamento meccanico delle sabbie è confermata dalla possibilità di ricondurre la risposta meccanica delle miscele a quella della frazione sabbiosa con l'uso dell'indice dei vuoti intergranulare. La Fig. 1-17 evidenzia tra l'altro che in questa categoria di comportamento ricade anche la risposta meccanica di assortimenti caratterizzati da elevate quantità di fine e caratterizzati da basse densità relative. Le miscele contenenti fine non plastico possono presentarsi con assetti intergranulari che determinano una maggiore compressibilità rispetto a quella alle sabbie.

I mix granulari caratterizzati da curve granulometriche discontinue e materiale non plastico costituiscono semplificazioni estreme delle terre assortite naturali. L'introduzione del parametro rapporto di forma χ , sostituendo le due dimensioni delle particelle con quelle rappresentative della frazione grossa e fine consente di estendere le considerazioni valide per mix di due frazioni mono-granulari anche a terre caratterizzate da curve granulometriche continue.

Un modo ulteriore per estendere alle terre reali la classificazione delle strutture intergranulari di Thevanayagam et al. (1994) è quello dello schema bifase proposto da Mitchell (1976). Per studiare il comportamento meccanico di terre composte da sabbia limo e argilla, come illustrato in Fig. 1-20 viene individuata una frazione granulometrica che include sabbia e limo (*grain*) e una seconda che ingloba argilla e acqua (*clay*). Il mezzo bifase equivalente così identificato viene trattato come un mix composto da due frazioni mono-granulari per il quale la struttura intergranulare verrà individuata tra quelle identificate da Thevanayagam et al. (1994): sabbia pulita, fine in sabbia e sabbia in fine. Biscontin et al. (2007) hanno usato questo approccio per studiare la compressibilità delle terre presenti nella Laguna di Venezia.

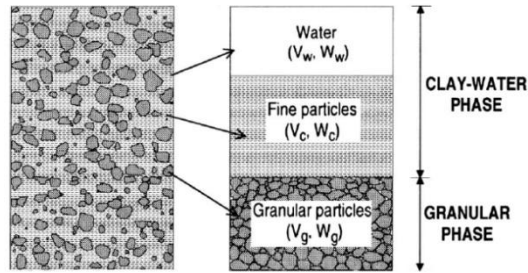


Fig. 1-20 Schema bifase Biscontin et al. (2007)

La Fig. 1-21 a rappresenta tre fusi granulometrici nei quali sono state raggruppati i materiali prelevati nei siti Lido e Malomocco durante indagini geotecniche effettuate nella laguna di Venezia. La Fig. 1-21 .b riporta la composizione mineralogica del materiale e evidenzia una netta prevalenza di Quarzo Calcite e Dolomia in tutte le frazioni granulometriche. Il materiale indicato con ML è un limo sabbioso non plastico. Nell'articolo di Biscontin et al. (2007), applicando l'equivalenza proposta da Mitchell, (1976), il limo e la sabbia vengono identificati come la sabbia dello schema di Tevanayagam et al. 2002, mentre l'acqua e la frazione argillosa (nel caso specifico definita come il passante a $5\mu\text{m}$) sono assimilati al fine (limo). Una volta applicata l'equivalenza, e ricondotta la granulometria a quella di una miscela bifase, sia il limo sabbioso (ML) che la sabbia limosa (SP-SM) risultano caratterizzati da strutture intergranulari nelle quali la frazione fine (*clay*) non condiziona il comportamento meccanico. Nonostante l'analisi delle strutture intergranulari lasci intuire un'analogia del comportamento meccanico del limo ML con quella delle sabbie, dalla Fig. 1-22 è possibile notare che la compressibilità del limo ML, diversamente da quella della sabbia SP-SM, può risultare significativa anche a livelli tensionali di interesse ingegneristico. La Fig. 1-22 mostra infatti le curve di normal-consolidazione di provini ricostituiti di ML e SP-SM. I provini di limo non plastico possono essere confezionati a diversi indici dei vuoti e analogamente a quanto avviene per le sabbie manifestano curve di compressibilità distinte in base alla densità relativa iniziale. Nel campo dei livelli tensionali di più comune interesse ingegneristico i limi sono generalmente più comprimibili delle sabbie. Biscontin et al. (2007) riscontrano che nei limi le curve di compressibilità convergono verso il regime LCC in modo molto più graduale che nelle sabbie. Nello lavoro di Biscontin et al. (2007) sono mostrati anche risultati di prove edometriche eseguite su campioni indisturbati delle stesse terre; gli autori mostrano che,

se rappresentate in un piano semilogaritmico, le curve di compressione dei limi indisturbati non evidenziano un gomito definito che segnali il passaggio dallo stato di sovra-consolidazione allo stato normal-consolidato (forse anche a causa del disturbo subito dal campione). Per riprodurre la compressibilità dei limi prelevati a Venezia Biscontin et al. (2007) ritengono opportuno l'uso del modello costitutivo sviluppato da Pestana e Whittle, (1995).

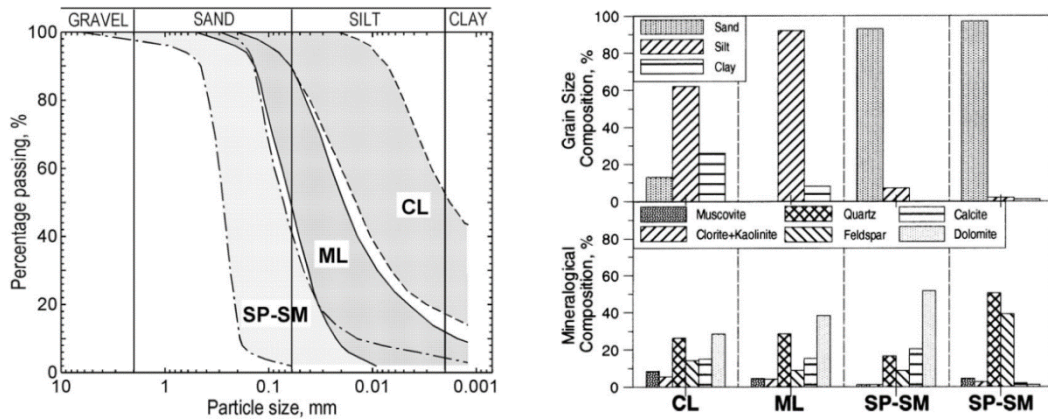


Fig. 1-21 Caratteristiche granulometriche e mineralogiche dei limi di Venezia Biscontin et al. (2007)

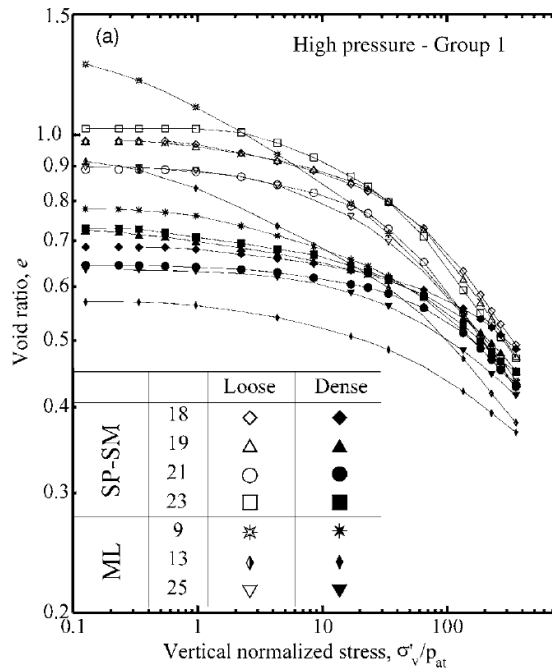


Fig. 1-22 Confronto fra le caratteristiche di compressibilità dei materiali appartenenti al fuso SP-SM (Sabbia limosa) e ML (limo sabbioso) Biscontin et al. (2007)

Nell'articolo di Ponzoni et al. (2014) vengono analizzati le risposte meccaniche del limo argilloso prelevato a Venezia. Nella Fig. 1-23 sono mostrati i risultati di prove di compressione triassiale consolidate drenate e non drenate che evidenziano la difficoltà di individuare, nel piano di compressibilità, una linea di Stato Critico unica. Nonostante questa difficoltà, gli andamenti rappresentati nel piano p' - q sembrano analoghi a quelli rilevati nelle sabbie pulite. Lo stesso tipo di comportamenti è stato rilevato anche in limi argillosi di media plasticità da Nocilla et al. (2006). Nello studio di Nocilla et al. (2006) la difficoltà nel ricavare sperimentalmente l'andamento della CSL nel piano di compressibilità si associa anche alla difficoltà nell'individuare la curva di compressione limite. I due fenomeni appena richiamati delineano il comportamento meccanico, spesso definito in letteratura, "di transizione".

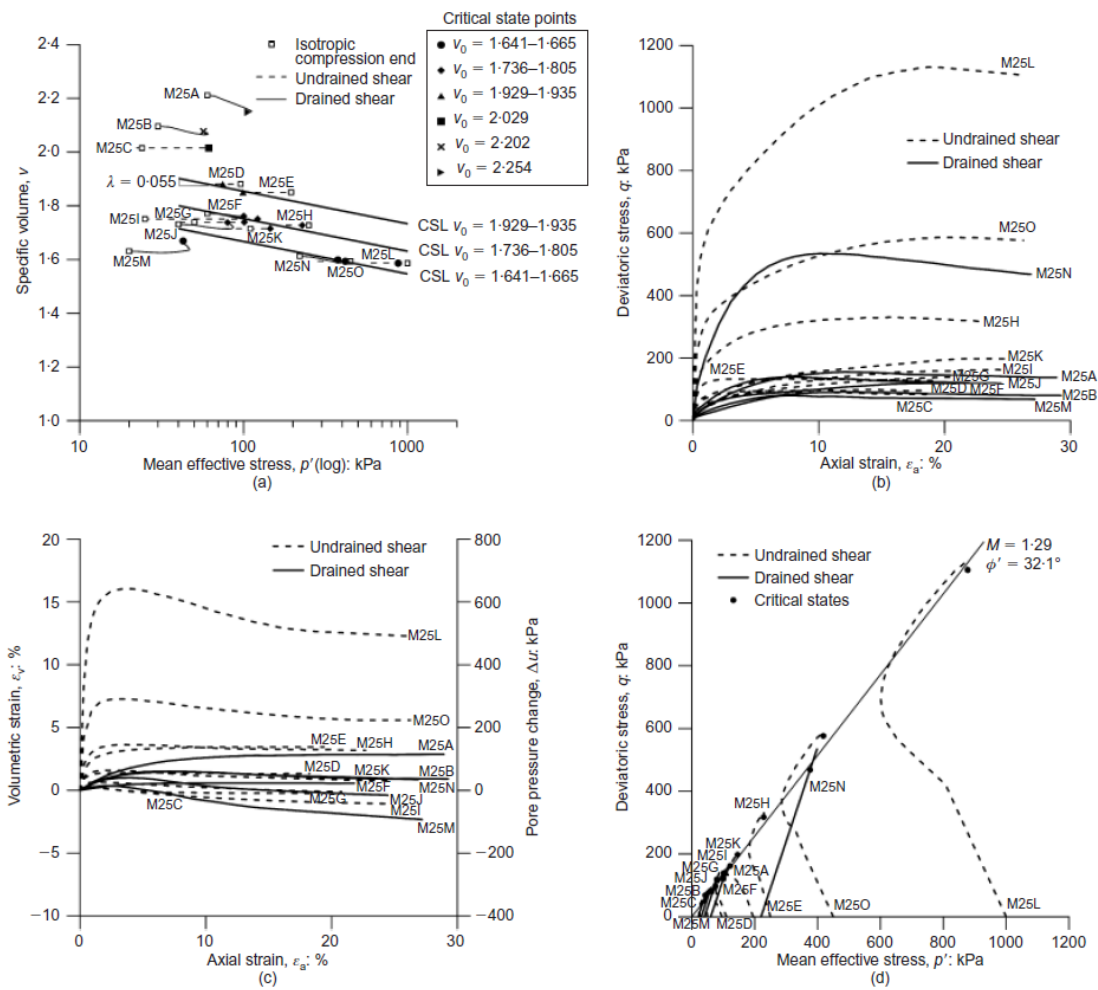


Fig. 1-23 Risultati delle prove triassiali consolidate drenate – e non drenate ottenute da Ponzoni et al. (2014) per provini di limo contenente quantità di argilla comprese fra 20%-30%

Boulanger e Idriss, (2006) evidenziano che il comportamento meccanico deviatorico dei limi può assumere, in base al campo della carta di plasticità nel quale ricadono le proprietà del materiale (Fig. 1.24), aspetti tipici di quello delle sabbie (comportamento *sand like*), delle argille (*clay like*) o caratteri particolari (*intermediate*). Boulanger e Idriss, (2006) mostrano che le caratteristiche di plasticità del materiale influenzano le possibili posizioni reciproche fra la linea di normal-consolidazione e linea dello stato critico. Dalla Fig. 1.25 si può notare che per il limo con $I_p=10.5$ la linea di normal-consolidazione è parallela alla linea dello stato critico e questo comporta risposte non drenate caratterizzate da un unico tipo di percorso tensionale, del tutto analogo a quello tipico delle argille normalmente consolidate (comportamento *clay like*). La stessa Fig. 1.25 mostra che nel limo non plastico la linea di normal-consolidazione non solo non è parallela ma è collocata al di sotto della linea dello stato critico, in modo analogo a quanto avviene nelle sabbie (comportamento *sand like*), per questo il limo normalmente consolidato mostra un percorso tensionale stabile prevalentemente dilatante con intersezione della condizione di trasformazione di fase (Stato Quasi Stazionario) che non sarebbe possibile in un'argilla normalmente consolidata. Gli autori mostrano inoltre che i limi con $I_p < 7$, esibendo un comportamento deviatorico *sand like* possono quindi manifestare anche risposte non drenate instabili e completa liquefazione statica.

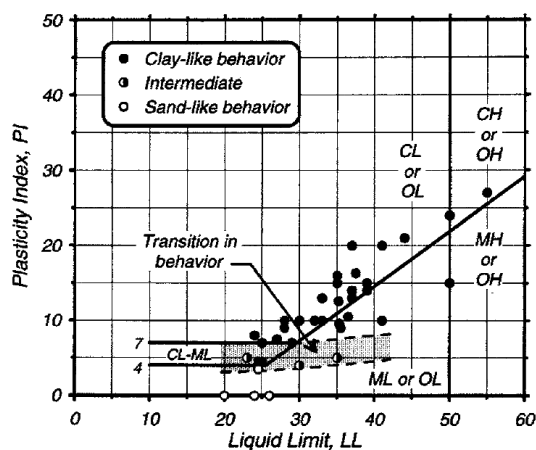


Fig. 1-24 Relazione fra caratteristiche di plasticità e tipi di comportamento meccanico Boulanger e Idriss, (2006).

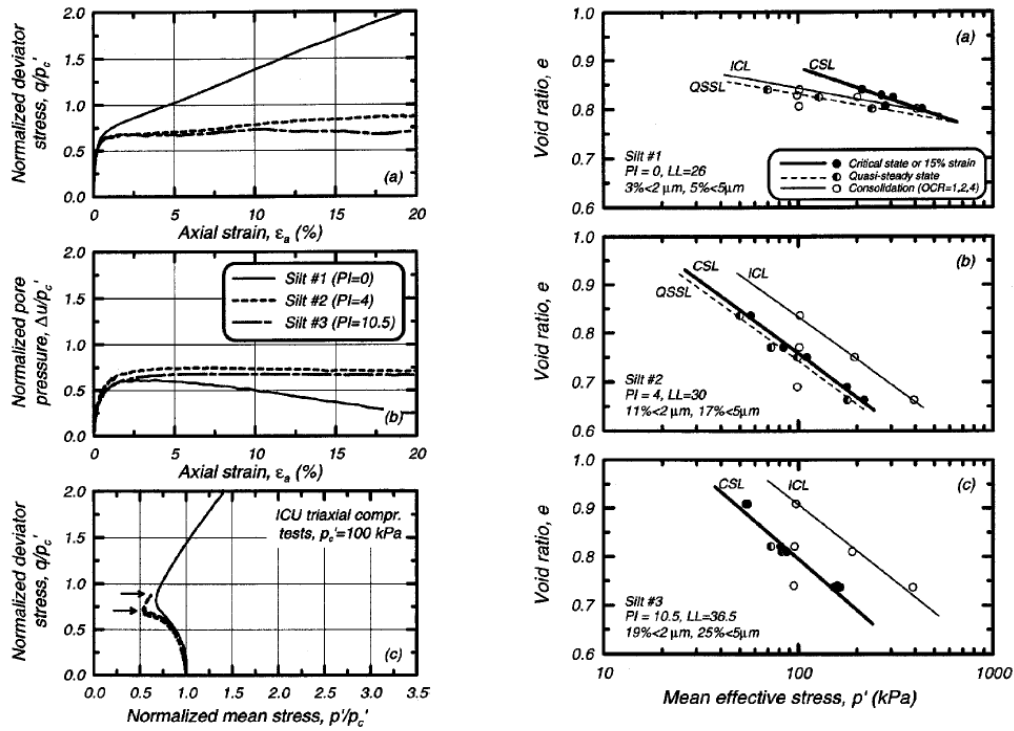


Fig. 1-25 Relazione fra posizione reciproca degli stati iniziali normalmente consolidati rispetto alla CSL, nel piano di compressibilità, e i tipi di percorsi tensionali mostrati nella fase deviatorica di prove triassiali non drenate, rappresentati nel piano p' - q . Boulanger e Idriss, (2006).

Boulanger e Idriss, (2006) evidenziano che in limi normalmente-consolidati caratterizzati da I_p appartenenti al ristretto intervallo campito nella Fig. 1.24 si ravvisa un comportamento meccanico deviatorico intermedio perché caratterizzato, a partire da ψ positivo, da un percorso tensionale stabile ma caratterizzato dall'intersezione con la trasformazione di fase.

Sono riportati in letteratura anche casi nei quali la risposta non drenata di limi con $I_p < 7$ non sembra essere analoga a quella delle sabbie. Hyde et al. (2006) riportano i risultati ottenuti da prove triassiali consolidate non drenate eseguite su provini di limo di bassa plasticità realizzati con la tecnica della sedimentazione. Come evidenziato in Fig. 1.26 gli stati iniziali di campioni preparati con questa tecnica e consolidati a tensioni medie efficaci superiori a 100kPa giacciono a destra della linea dello stato critico.

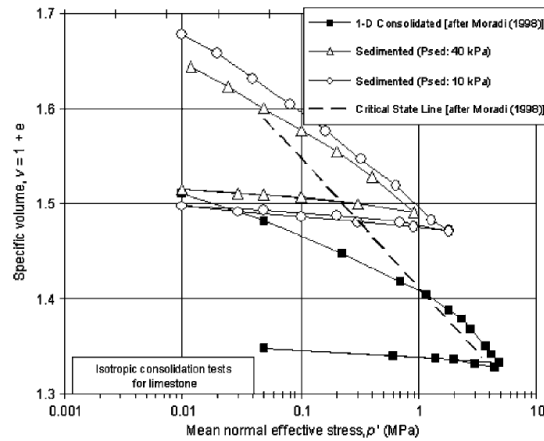


Fig. 1-26 Posizione relativa fra le linee di normal-consolidazione e la linea dello stato critico determinate per il Limo di bassa plasticità contenente meno del 5% di sabbia e quantitativi di argilla inferiori al 20% da Hyde et al. 2006

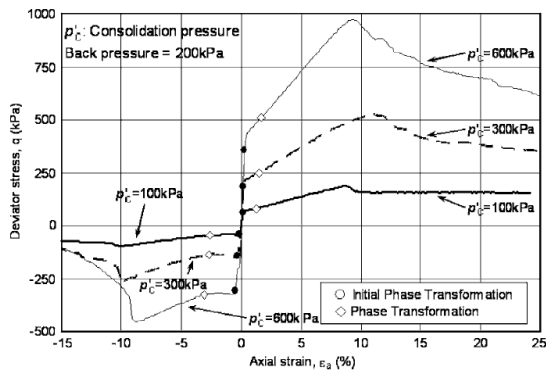


Fig. 4. Deviator stress versus axial strain for sedimented samples ($P_{sed}=40$ kPa)

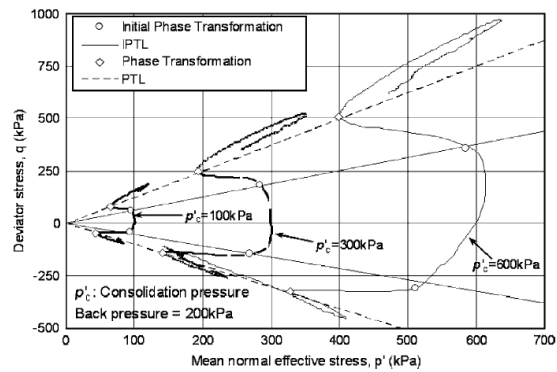


Fig. 5. Monotonic stress paths for sedimented samples ($P_{sed}=40$ kPa)

Fig. 1-27 Andamenti delle risposte meccaniche manifestate in prove triassiali non drenate nel Limo di bassa plasticità contenente meno del 5% di sabbia e quantitativi di argilla inferiori al 20% da Hyde et al. 2006

In presenza di un comportamento meccanico analogo a quello di una sabbia, i percorsi tensionali relativi alla fase deviatorica di prove triassiali non drenate, mostrati nella (Fig. 1.27) dovrebbero denotare una risposta localmente instabile. Dalla Fig. 1.27 si può invece notare che lo stato critico viene raggiunto dopo la mobilitazione di una resistenza di picco. Nella fase successiva al picco del deviatore, in questo casi si osserva un andamento decrescente del rapporto di tensione (Fig. 1.27). Un comportamento simile viene riscontrato anche da Wong e Ong, (2015) (Figure 1.28 e 1.29) in un limo poco assortito granulometricamente composto mineralogicamente da caolino e classificato come limo di alta plasticità.

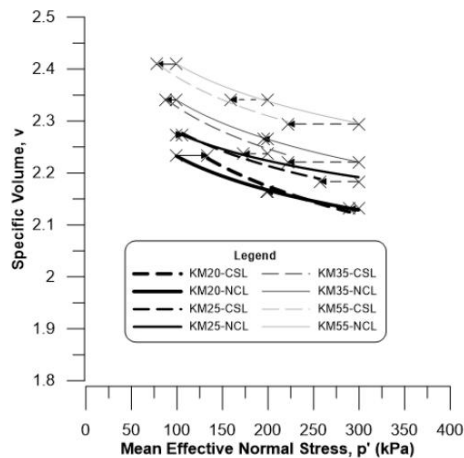


Fig. 1-28 Rappresentazione nel piano di compressibilità delle condizioni iniziali e dei percorsi di diversi provini di limo caolinitico nel corso della fase deviatorica di prove triassiali consolidate non drenate Wong e Ong 2015.

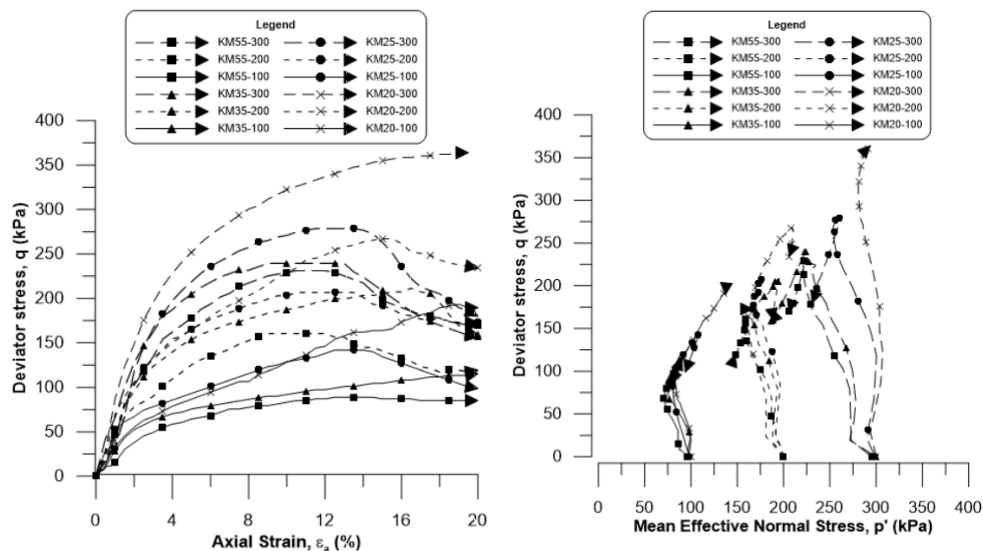


Fig. 1-29 Rappresentazione della risposta meccanica in termini di relazioni tensioni deformazioni e di percorsi tensionali rilevata in prove triassiali consolidate non drenate sul limo caolinitico da Wong e Ong 2015.

In considerazione dei comportamenti meccanici esibiti dai limi, in questa tesi è stato condotto un approfondimento riguardante il legame costitutivo SANISAND (Taiebat e Dafalias (2008)). Il modello costitutivo di Taiebat e Dafalias (2008) appartiene alla categoria dei legami sviluppati per riprodurre il comportamento meccanico delle sabbie, ma si caratterizza per la possibilità di simulare lo sviluppo di deformazioni plastiche anche in percorsi tensionali proporzionali e quindi di riprodurre la compressibilità.

In effetti gli studi richiamati nei paragrafi precedenti mettono in luce una forte analogia del comportamento meccanico deviatorico dei limi non plastici e di bassa plasticità (materiali a grana fine) con quello delle sabbie pulite (materiali a grana grossa). In alcuni lavori questa analogia è anche chiaramente individuata e giustificata nel contesto della teoria dello stato critico (Ishihara, (1993), Been e Jefferies, (2006), Carrera et al., (2011)).

Il fatto che nelle sabbie normalmente consolidate si possano riscontrare diversi tipi di risposte non drenate (come richiamato nel §1.1) è dovuto all'indipendenza fra l'indice dei vuoti e la tensione efficace. Proprio l'indipendenza fra e e p' differenzia i materiali a grana grossa dalle argille ed è un elemento che distingue i modelli costitutivi sviluppati per le argille da quelli proposti per le sabbie. Nei modelli costitutivi sviluppati per le argille la linea di normalmal-consolidazione e la linea dello stato critico sono vincolate ad essere parallele, nei modelli per sabbie, gli stati iniziali rappresentativi di condizioni di normal-consolidazione possono invece essere posizionati sia sopra che sotto la linea dello stato critico.

La flessibilità offerta dai modelli per sabbie nel definire la posizione reciproca fra gli stati iniziali (normalmente consolidati) e la linea dello stato critico può consentire di tener conto delle modalità di deposizione dei limi e degli effetti che esse producono sulla risposta non drenata. Il legame costitutivo di Taiebat e Dafalias (2008), rispetto ad un classico modello per sabbie, può consentire inoltre di tener conto dell'influenza prodotta dalle modalità di deposizione sulle caratteristiche di compressibilità, che nei limi, si è visto, può essere significativa anche in presenza di un comportamento meccanico deviatorico *sand like*, (Brandon et al (2006), Biscontin et al (2007)).

2. Il modello costitutivo di Taiebat e Dafalias (2008)

2.1. Introduzione

SANISAND, Simple ANIsotropic Sand model, è il nome della famiglia di modelli costitutivi elastoplastici incrudenti, formulati per simulare il comportamento meccanico delle sabbie nell'ambito della teoria dello stato critico, alla quale appartiene la versione sviluppata da Taiebat e Dafalias nel 2008.

Gli autori ritengono semplice la formulazione del modello perché tutti gli aspetti chiave possono essere descritti relativamente al caso di stati di sforzo e deformazioni triassiali (in senso geotecnico). La versione del modello valida per condizioni di sforzo e deformazione generali viene infatti illustrata dagli stessi con un parallelismo. L'anisotropia alla quale si fa riferimento nel titolo è quella indotta dall'incrudimento cinematico (Becker e Desai, (1984)). Un tensore di struttura rappresentativo dell'anisotropia intrinseca è stato invece introdotto solo in una delle versioni del modello (Dafalias et al., (2004)).

La descrizione unitaria del comportamento meccanico delle sabbie sciolte e dense è una conquista relativamente recente e si basa sulla individuazione e distinzione delle proprietà intrinseche del materiale dai parametri di stato. Tutti i modelli costitutivi che prevedono il parametro di Been e Jefferies (1985) tra quelli che definiscono lo stato corrente del materiale godono di questa generalità e consentono di descrivere il comportamento meccanico delle sabbie con un unico set di parametri, a prescindere dalla densità iniziale. Nei modelli della famiglia SANISAND lo stato del materiale è descritto dal parametro ψ (Been e Jefferies (1985)), che sintetizza l'effetto di confinamento e indice dei vuoti, e dal rapporto $q/p' = \eta$, pendenza indicativa della componente deviatorica dello stato tensionale corrente. La descrizione unitaria del comportamento meccanico delle sabbie nell'ambito della teoria dello stato critico richiede che le equazioni del modello (nello specifico la legge di incrudimento cinematico e la legge di flusso) rispettino dei vincoli dovuti alla necessità che la condizione di stato critico si verifichi quando sono soddisfatte entrambe le condizioni $\psi = 0$ e $\eta = M_c$. L'obiettivo viene conseguito introducendo la dipendenza da ψ dei valori di η in corrispondenza dei quali si mobilitano la (potenziale) trasformazione di

fase (o stato quasi stazionario) e la (potenziale) resistenza di picco. (Manzari e Dafalias, (1997), Li e Dafalias (2000)).

Tutte le versioni del modello SANISAND precedenti a quella sviluppata da Taiebat e Dafalias (2008) (Manzari e Dafalias, (1997), Dafalias e Manzari, (2004), Dafalias et al., (2004)) prevedono una superficie di plasticizzazione di forma conoidale, aperta lungo il proprio asse nello spazio delle tensioni e consentono di riprodurre lo sviluppo di deformazioni plastiche solo in percorsi tensionali ad η variabile.

La prima versione del modello (Manzari e Dafalias, (1997)) presenta una limitata capacità di riprodurre i fenomeni di mobilità ciclica caratterizzati da una repentina degradazione della rigidità ad ogni attingimento temporaneo di valori nulli della resistenza a taglio.

Nella successiva versione (Dafalias e Manzari 2004) è stato quindi introdotto un tensore che, permettendo di includere e memorizzare i cambiamenti di risposta meccanica che si producono all'inversione del percorso di carico, migliora la previsione della risposta ciclica.

Nella versione proposta da Dafalias et al. (2004) è invece presente un tensore di struttura, in questo caso, finalizzato a modellare l'anisotropia intrinseca del materiale.

La versione proposta da Taiebat e Dafalias nel 2008, implementata e utilizzata nella tesi, tra gli aspetti di novità presenta: la superficie di plasticizzazione chiusa lungo il proprio asse, nello spazio delle tensioni, l'introduzione, nel piano di compressibilità, della *Limiting Compression Curve* (LCC), e di una formulazione ispirata a quella presente nel modello costitutivo di tipo *bounding surface* (Pestana e Whittle, (1995)) sviluppato per riprodurre solo il comportamento meccanico delle sabbie in soli percorsi tensionali proporzionali (ad η costante) e nel modello MIT-S1 (Pestana e Whittle, (1999)). Nella versione del 2008, al parametro di stato di ψ (Been e Jefferies (1985)) si aggiunge il parametro di stato $\delta=(p'-p'_{LCC})$ distanza dalla LCC (luogo dei punti nel piano di compressibilità lungo il quale si ripristina una correlazione di tipo biunivoco tra e e p').

La nuova formulazione consente quindi di modellare lo sviluppo di deformazioni volumetriche plastiche in percorsi di carico con η costante. Nelle sabbie tali deformazioni plastiche non sono trascurabili, a livelli tensionali medio – bassi, se

l'indice dei vuoti iniziale è particolarmente elevato e, a pressioni estremamente elevate, quando si determina la rottura dei grani. In questa versione di SANISAND, le deformazioni volumetriche plastiche sono costituite da due contributi: il primo rappresenta la parte indotta da variazioni di η , l'altro è determinato da carichi ad η costante (e p crescente).

Nella versione di SANISAND di Taiebat e Dafalias (2008) non è incluso il tensore presente nel modello Dafalias e Manzari (2004), che può essere introdotto apportando una modifica della legge di dilatanza. Poiché il modello verrà usato in condizioni di carico sostanzialmente statiche e monotone, è stata però implementata, in un codice di calcolo agli elementi finiti, la formulazione presentata nell'articolo di Taiebat e Dafalias (2008), che non contempla la presenza del tensore pensato per migliorare la simulazione del comportamento ciclico. In effetti, nonostante questa modifica, i modelli della classe SANISAND mantengono il limite di prevedere per la descrizione della parte elastica della risposta meccanica una legge di tipo ipoelastico che determina la modellazione di dissipazioni di energia irrealistiche in condizioni sismiche e che ne limita le capacità previsionali del comportamento meccanico sotto carichi di natura ciclica.

2.2. Elementi di teoria dell'elastoplasticità con incrudimento

In questo paragrafo, anche allo scopo di introdurre la notazione usata successivamente, si richiamano le equazioni fondamentali della teoria dell'elastoplasticità con incrudimento, formulata nell'ipotesi di piccoli livelli di deformazione.

Nell'ipotesi di piccoli livelli di deformazione, la prima relazione fondamentale esprime la decomponibilità additiva dell'incremento di deformazione nella somma della parte elastica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}$ e della parte plastica $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad (2.2.1)$$

Nella (2.2.1) i simboli denotano le velocità di deformazione. Se non specificato esplicitamente, nel testo le derivate materiali rispetto al tempo verranno identificate con gli incrementi, ad esse legati dalla relazione $dc = \dot{c}dt$.

Per un materiale elastoplastico incrudente lo stato $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ è definito dalla variabile esterna, stato tensionale, $\boldsymbol{\sigma}$ e dall'insieme delle variabili interne indicate genericamente con il vettore \mathbf{q} . Le variabili di incrudimento possono consistere in grandezze scalari (nel caso di incrudimento isotropo) e variabili tensoriali (nel caso di incrudimento cinematico); a prescindere dalla loro natura esse si immaginano raccolte nel vettore \mathbf{q} . La dipendenza delle variabili di incrudimento dalle deformazioni plastiche verrà indicata con $\mathbf{q}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl})$.

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (2.2.2)$$

La (2.2.2) esprime la definizione analitica della superficie di plasticizzazione, in funzione delle variabili di stato. La funzione di plasticizzazione consente di distinguere gli stati elastici, in corrispondenza dei quali essa assume valori negativi, da quelli plastici.

$$df(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (2.2.3)$$

L'equazione (2.2.3) esprime la condizione di consistenza. Il rispetto della (2.2.3) garantisce che nel corso del flusso plastico lo stato tensionale appartenga alla superficie di plasticizzazione corrente.

La relazione tra l'incremento di tensione e la parte elastica dell'incremento di deformazione è definita dal legame elastico:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} = \mathbf{C}^e \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} \quad (2.2.4)$$

Nella (2.2.5) \mathbf{C}^e e \mathbf{D}^e rappresentano i tensori del quarto ordine rispettivamente definiti di cedevolezza e di rigidità elastica.

La completa definizione di un modello costitutivo elastoplastico richiede la definizione, della legge di flusso e della legge di incrudimento. La legge di flusso descrive il rapporto tra le componenti della deformazione plastica e può essere espressa dalla seguente relazione:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \langle L \rangle \mathbf{R} \quad (2.2.6)$$

nella (2.2.6) $\mathbf{R} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ è il gradiente della funzione potenziale plastico $g(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ e definisce la direzione dell'incremento di deformazione plastica.

La legge di incrudimento può essere espressa dalla seguente relazione:

$$\dot{\mathbf{q}} = \langle L \rangle \bar{\mathbf{q}} \quad (2.2.7)$$

Nella (2.2.7) il tensore $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\sigma}, q)$, in alcuni casi definito modulo di incrudimento generalizzato, rappresenta la legge con la quale le variabili di incrudimento evolvono nel corso del processo di carico in campo plastico. Nelle (2.2.6) e (2.2.7) il simbolo L indica il moltiplicatore plastico. Le parentesi di Macauley $\langle \rangle$ denotano la funzione segno. $\langle L \rangle = 0$ se $L \leq 0$ $\langle L \rangle = L$ se $L > 0$. In condizioni di plasticizzazione il moltiplicatore plastico può assumere valore positivo o al più nullo. Proprio per evidenziarne il significato fisico, L viene spesso definito *Loading index* o indice di carico. Le (2.2.6) e (2.2.7) definiscono che l'evoluzione delle deformazioni plastiche e delle variabili interne può svilupparsi solo se L è maggiore di 0 e cioè solo se sussistono condizioni di carico plastico.

L'uso della funzione segno di L nelle relazioni precedenti costituisce un modo sintetico per tener conto delle condizioni di Khun – Tucker:

$$L \geq 0 \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad Lf(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (2.2.8)$$

Il rispetto simultaneo delle (2.2.8) individua quando può o non può esserci incrudimento e accumulo di deformazioni plastiche a seguito di una perturbazione dello stato iniziale.

Se lo stato tensionale è elastico, $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) < 0$, per il rispetto della terza condizione (2.2.8) (condizione di complementarità) L deve essere posto uguale a zero. In campo elastico non possono svilupparsi deformazioni plastiche (2.2.6) e neppure cambiamenti delle variabili interne (2.2.7), che da esse dipendono.

Se lo stato tensionale è in campo plastico, il soddisfacimento della condizione di consistenza implica che $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$, per questo la terza condizione (2.2.8) è rispettata a prescindere dal valore di L ; nel rispetto della prima delle (2.2.8) si distinguono le due possibilità:

- se L vale zero sussistono condizioni di carico neutro e non si sviluppano deformazioni plastiche né incrudimento della superficie di plasticizzazione
- se L risulta maggiore di zero sussistono condizioni di carico plastico e si sviluppano deformazioni plastiche e variazioni delle variabili interne.

Nel corso di un processo di carico plastico L quantifica solo il modulo dell'incremento di deformazione plastica e della variazione delle variabili di incrudimento, mentre la direzione e il verso sono definiti da $\mathbf{R} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ e $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\sigma}, q)$.

Nelle relazioni che definiscono il legame costitutivo elasto-plastico incrudente appena richiamate, assumendo noti lo stato iniziale e la variazione dello stato deformativo oppure dell'incremento di deformazione, l'unica incognita è caratterizzata dal moltiplicatore plastico L . Nei paragrafi successivi, seguendo la linea illustrativa di Dafalias (1986), si ricavano le espressioni di L sia in funzione dell'incremento di deformazione totale che dell'incremento di tensione. La prima espressione è utile ai fini dell'integrazione e implementazione del legame costitutivo in un codice di calcolo, perché permette di ricavare l'espressione della matrice di rigidità elastoplastica. Dal momento che le equazioni del modello sono presentate, nell'articolo di Taiebat e Dafalias (2008) nella forma inversa, sono richiamati anche i passaggi per ricavare la matrice di cedevolezza elastoplastica.

2.2.1. Matrice di cedevolezza elasto-plastica

La condizione di consistenza (2.2.3), tenendo conto della dipendenza della funzione di plasticizzazione dalle variabili di incrudimento e dalla tensione espressa dalla (2.2.2), può essere esplicitata nella seguente forma:

$$(\mathbf{L})^T \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.2.9)$$

Nella (2.2.9) è indicato con $\mathbf{L} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ il gradiente della superficie di plasticizzazione.

Nella (2.2.9) si adotta una notazione matriciale e i tensori simmetrici del secondo ordine \mathbf{L} e $\boldsymbol{\sigma}$ vengono rappresentati secondo la notazione di Voigt da vettori a sei componenti. Nella (2.2.9) \mathbf{q} può contenere le componenti di tensori (anch'essi rappresentati in notazione di Voigt da vettori a sei o nove componenti in base all'eventuale simmetria) o scalari, in base alle caratteristiche della legge di incrudimento.

Sostituendo la legge di incrudimento (2.2.7) nella condizioni di consistenza scritta nella forma (2.2.9) si può esplicitare il moltiplicatore plastico in funzione dell'incremento di tensione:

$$\langle L \rangle = \left\langle - \frac{(\mathbf{L})^T}{\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \bar{\mathbf{q}}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \right\rangle \quad (2.2.10)$$

Nell'ambito della teoria della plasticità viene definito modulo plastico (come in Dafalias, (1986) o, più correttamente, modulo di incrudimento, la quantità:

$$K_p = - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \bar{\mathbf{q}} \quad (2.2.11)$$

K_p assume segno positivo o negativo in condizioni di *hardening* e *softening* e vale zero in assenza di incrudimento locale della superficie. Tenendo conto della definizione di K_p la (2.2.10) può essere riscritta nella forma:

$$\langle L \rangle = \left\langle \frac{(\mathbf{L})^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{K_p} \right\rangle \quad (2.2.12)$$

Il segno di K_p nella (2.2.12) consente di distinguere una condizione di *softening* da una di scarico elastico in un processo a controllo di tensioni. In entrambi i casi suddetti, il numeratore della (2.2.12) risulta negativo, il segno di K_p determina un valore positivo o negativo di L e permette di distinguere le due condizioni. In ogni caso, operando a controllo di tensione non è possibile distinguere sempre il valore di L . L'espressione del moltiplicatore plastico in funzione di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ può essere sostituita nella legge di flusso (2.2.6) che diventa:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \left\langle \frac{(\mathbf{L})^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{K_p} \right\rangle \mathbf{R} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \mathbf{R} \left\langle \frac{(\mathbf{L})^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{K_p} \right\rangle \quad (2.2.13)$$

Sostituendo nella relazione (2.2.1), che esprime la decomponibilità additiva dell'incremento di deformazione totale nella parte elastica e plastica, sia l'espressione della parte elastica dell'incremento di deformazione, rappresentata dalla prima equazione del legame elastico (2.2.4), che la parte plastica, espressa dalla legge di flusso riscritta nella forma (2.2.13), si ottiene la seguente espressione dell'incremento di deformazione totale:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{R} \frac{(\mathbf{L})^T \dot{\boldsymbol{\sigma}}}{K_p} + \mathbf{C}^e \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.2.14)$$

Riorganizzando i termini nella (2.2.14) si ottiene l'espressione:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\mathbf{R}\mathbf{L}^T}{K_p} + \mathbf{C}^e \right) \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.2.15)$$

Nella (2.2.15) si distingue la matrice di cedevolezza elasto-plastica espressa dalla:

$$\mathbf{C}^{ep} = \frac{\mathbf{R}\mathbf{L}^T}{K_p} + \mathbf{C}^e \quad (2.2.16)$$

2.2.2. Matrice di rigidità elasto-plastica

Per pervenire alla espressione della matrice di rigidità elasto-plastica, nella condizione di consistenza, scritta nella forma (2.2.9), si sostituisce l'espressione di $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ in funzione dell'incremento di deformazione elastica, rappresentata dalla prima relazione elastica (2.2.4). Operando la sostituzione si ottiene la seguente espressione della condizione di consistenza:

$$(\mathbf{L})^T (\mathbf{D}^e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el}) + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.2.17)$$

Includendo nella (2.2.17) anche la relazione di decomposizione additiva dell'incremento di deformazione totale (2.2.1), la condizione di consistenza diventa:

$$(\mathbf{L})^T \left[\mathbf{D}^e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}) \right] + \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.2.18)$$

Operando le ulteriori sostituzioni della legge di flusso (2.2.6) e della legge di incrudimento (2.2.7) nella (2.2.18), la condizione di consistenza diviene:

$$(\mathbf{L})^T \left[\mathbf{D}^e (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle L \rangle \mathbf{R}) \right] + \langle L \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \bar{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.2.19)$$

Tenendo conto della definizione (2.2.11) del modulo di incrudimento K_p , la (2.2.19) può essere riscritta nella forma seguente:

$$(\mathbf{D}^e \mathbf{L})^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \langle L \rangle \mathbf{L}^T (\mathbf{D}^e \mathbf{R}) - \langle L \rangle K_p = 0 \quad (2.2.20)$$

Dalla (2.2.20) si può quindi esplicitare il moltiplicatore plastico in funzione dell'incremento di deformazione totale:

$$\langle L \rangle = \frac{(\mathbf{D}^e \mathbf{L})^T}{K_p + \mathbf{L}^T (\mathbf{D}^e \mathbf{R})} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.2.21)$$

Sostituendo l'espressione di L così trovata nell'equazione che esprime il legame elastico (2.2.4 b) tenendo conto della decomposizione additiva dell'incremento di deformazione totale (2.2.1) e della legge di flusso $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = [\mathbf{D}^e(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl})]$ si può ricavare la relazione tra $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ e $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\mathbf{D}^e - \frac{(\mathbf{D}^e \mathbf{R})(\mathbf{D}^e \mathbf{L})^T}{K_p + \mathbf{L}^T (\mathbf{D}^e \mathbf{R})} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.2.22)$$

Dalla quale si deduce l'espressione della matrice di rigidezza elastoplastica:

$$\mathbf{D}^{ep} = \left[\mathbf{D}^e - \frac{(\mathbf{D}^e \mathbf{R})(\mathbf{D}^e \mathbf{L})^T}{K_p + (\mathbf{D}^e \mathbf{R}) \mathbf{L}} \right] \quad (2.2.23)$$

Sostituendo l'espressione del moltiplicatore plastico (2.2.21) nella legge di incrudimento espressa dalla relazione (2.2.7) $\dot{\mathbf{q}} = \langle L \rangle \bar{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ si ottiene la seguente espressione della variazione dei parametri di incrudimento in funzione di $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \left\{ \frac{(\mathbf{D}^e \mathbf{L})^T}{K_p + (\mathbf{D}^e \mathbf{R}) \mathbf{L}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\} \bar{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (2.2.24)$$

Definendo con \mathbf{H} la matrice:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \frac{1}{H_p} \bar{\mathbf{q}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \{ \mathbf{L}^T \mathbf{D}^e \} \quad (2.2.25)$$

l'incremento delle variabili di incrudimento può essere espresso in modo analogo a quanto avviene per il tensore incremento di tensione con la (2.2.22)

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.2.26)$$

2.3. Formulazione del modello

2.3.1. Definizioni e concetti di base

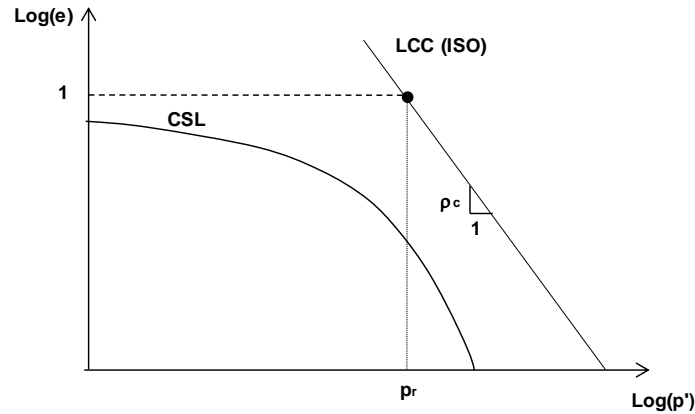


Fig. 2-1 Andamenti, nel piano di compressibilità rappresentato in scala bi-logaritmica, della proiezione della Linea dello Stato Critico e della Limiting Compression Curve isotropa.

Nella **versione triassiale** del modello lo stato tensionale è rappresentato dai due invarianti della tensione:

$$p = \frac{\sigma_v + 2\sigma_r}{3} \qquad q = (\sigma_v - \sigma_r) \qquad (2.3.1)$$

Analogamente, per rappresentare lo stato di deformazione vengono impiegati gli invarianti:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \qquad \varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3) \qquad (2.3.2)$$

Nel modello costitutivo, l'andamento nel piano di compressibilità della Linea dello Stato Critico (CSL) è descritto dalla seguente equazione (Li e Wang, (1998)):

$$e_c = e_0 - \lambda \left(\frac{p_c}{p_{at}} \right)^\xi \qquad (2.3.3)$$

Nella (2.3.3) e_0 , λ e ξ sono tre parametri del modello mentre p_{at} rappresenta una pressione di riferimento. La (2.3.3) coglie bene la forma delle CSL rilevate sperimentalmente in sabbie (Fig. 2-1). La Curva di Compressione Limite delle sabbie costituisce, nel piano di compressibilità, il luogo degli stati in corrispondenza dei quali

si ripristina una relazione di tipo biunivoco tra la tensione e l'indice dei vuoti. La LCC-ISO è descritta dalla seguente equazione:

$$e = \left(\frac{p}{p_r} \right)^{-\rho_c} \quad (2.3.4)$$

Nella (2.3.4) ρ_c e p_r sono due parametri del modello. La (2.3.4) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\log e = -\rho_c \log \left(\frac{p}{p_r} \right) \quad (2.3.5)$$

La (2.3.5) consente di apprezzare meglio che la LCC-ISO assume un andamento lineare nel piano $\log(e) - \log(p)$ e che, come mostrato anche in Fig. 2-1, in questo piano ρ_c ne rappresenta la pendenza. Il parametro p_r costituisce la tensione media efficace che nella condizione di ricompressione corrisponde a un indice dei vuoti pari a 1. La Fig. 2-1 mostra che a elevati livelli tensionali la LCC non è parallela alla CSL.

Nel piano $q - p$ la superficie di plasticizzazione del modello (Fig. 2-2) è rappresentata dalla seguente equazione:

$$f = (q - p\alpha)^2 - m^2 p^2 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^n \right] = 0 \quad (2.3.6)$$

Nella (2.3.6) n e m sono due parametri del modello.

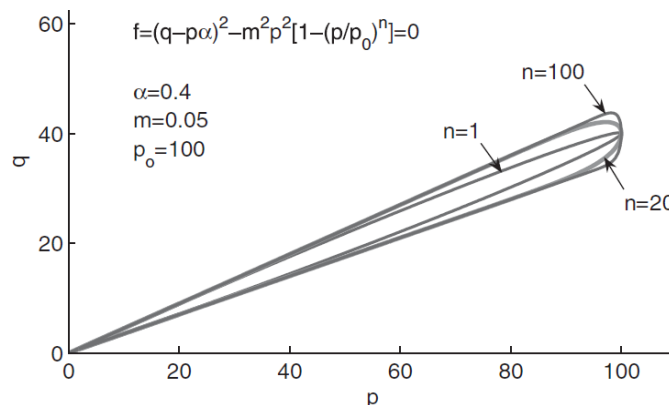


Fig. 2-2 Rappresentazione nel piano p - q dell'effetto prodotto sulla forma della superficie di plasticizzazione da variazioni del parametro n (Taiebat e Dafalias, 2008).

Come mostrato nella Fig. 2-2 n influisce sulla forma della superficie, mentre m ne definisce l'apertura all'origine.

Nella (2.3.6) p_0 e α rappresentano le variabili interne (di incrudimento) del modello. La superficie può subire incrudimento rotazionale e isotropo. La variabile di incrudimento isotropo p_0 nel piano $q - p$ definisce l'estensione della superficie di plasticizzazione (la posizione della estremità) mentre la variabile di incrudimento cinematico α , anche detta back-stress, definisce la pendenza dell'asse della superficie. Per stati distanti dal *cap* (p/p_0 piccolo) la superficie è pressoché lineare e ha semiapertura circa pari ad m . Il fatto che la superficie sia sottile è un requisito necessario per la modellazione della risposta meccanica sotto carichi ciclici. La forma della superficie implica che il *cap* viene coinvolto in percorsi di carico ad η costante o in percorsi deviatorici, se p è prossima a p_0 . I punti della superficie di plasticizzazione sono caratterizzati da valori del rapporto di tensione $\eta = \frac{q}{p}$ variabili con p . In corrispondenza di $p = p_0$ $\eta = \alpha$.

La superficie di plasticizzazione può essere alternativamente espressa in termini di η e p dalla seguente equazione:

$$\eta = \alpha \pm m \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^n \right]^{1/2} \quad (2.3.7)$$

La Fig. 2-3 mostra una rappresentazione nel piano $q - p$ delle quattro superfici previste dal modello. Nel piano $q - p$ la Superficie di Stato Critico (CSS) è identificata da un cono con centro nell'origine e apertura in compressione pari a:

$$M_c^c = \alpha_c^c + m \quad (2.3.8)$$

Nel modello, la resistenza di stato critico in compressione triassiale viene considerata mobilitata quando la pendenza dell'asse della superficie di plasticizzazione attinge il valore α_c^c (parametro del modello); di conseguenza, non è detto che in tale circostanza $\eta = M_c^c$. Nel modello, in sostanza, la pendenza M_c^c viene approssimata con α_c^c .

$$c = \frac{\alpha_e^c}{\alpha_c^c} \quad (2.3.9)$$

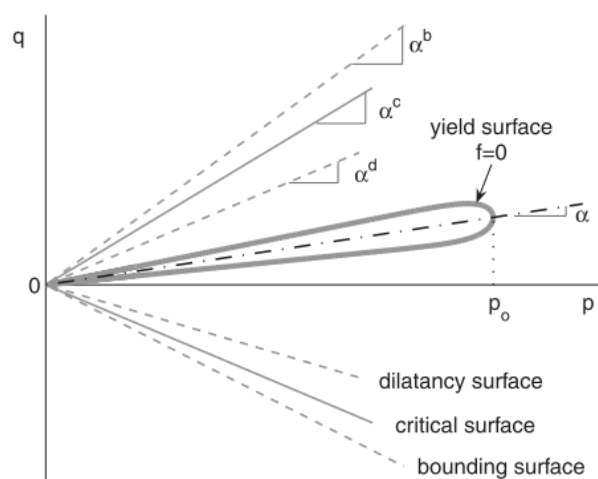


Fig. 2-3 Rappresentazione nel piano $q-p$ delle superfici del modello (Taiebat e Dafalias, 2008).

Il rapporto definito nella (2.3.9) costituisce un parametro del modello. Nella (2.3.9) la quantità α_c^c , insieme ad m , definisce la pendenza della proiezione della Linea dello Stato critico sul piano $q-p$ in estensione.

Nel modello sono definite anche la Bounding (BS) e la Dilatancy Surface (DS); tali superfici hanno apertura continuamente variabile in funzione del valore assunto dal parametro di stato del materiale. L'apertura in compressione è rispettivamente espressa da:

$$\alpha_c^b = \alpha_c^c \exp(-n_b \psi) \quad (2.3.10)$$

$$\alpha_c^d = \alpha_c^c \exp(n_d \psi) \quad (2.3.11)$$

Nelle (2.3.10) (2.3.11) n_b e n_d sono dei parametri del modello e incidono sull'evoluzione dell'apertura delle due superfici in funzione del valore corrente di ψ .

Tradizionalmente, nelle condizioni di assial-simmetria l'invariante q è definito come differenza fra la tensione assiale e radiale. Il segno di q (e analogamente quello di η e α) risulta quindi negativo nelle condizioni di estensione e positivo in compressione. Nella formulazione triassiale del modello viene mantenuta questa convenzione e di conseguenza le pendenze della CSS, BS e DS hanno segno negativo in estensione e positivo in compressione. In condizioni triassiali esiste un criterio che definisce, per un dato valore di η e di α , se i valori di riferimento della resistenza di picco, della

resistenza a stato critico e della dilatanza debbano essere quelli in compressione o in estensione. In notazione compatta il criterio esprime che:

$$\alpha^{c,b,d} = sg \alpha_c^{c,b,d} \quad (2.3.12)$$

Con s e g che assumono valore:

$$s = +1 \quad g = +1 \quad \text{per i casi nei quali } \eta - \alpha > 0 \quad (2.3.13)$$

$$s = -1 \quad g = c \quad \text{per i casi nei quali } \eta - \alpha < 0 \quad (2.3.14)$$

La quantità $\eta - \alpha$ che compare nelle (2.13) e (2.14) viene definita *effective stress ratio* e nelle condizioni di plasticizzazione vale:

$$r_{ef} = |\eta - \alpha| = m \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^n \right]^{1/2} \quad (2.3.15)$$

Stante la forma della superficie di plasticizzazione, in condizioni di plasticizzazione si possono avere diversi valori r_{ef} che vanno da 0, per $p = p_0$, fino a m , in prossimità dell'origine degli assi.

Nella **versione generalizzata** del modello il tensore della tensione $\boldsymbol{\sigma}$ viene decomposto nelle sue componenti isotropa e deviatorica:

$$p\mathbf{1} \qquad \qquad \qquad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{1} \quad (2.3.16)$$

$$\text{con } p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{tr\boldsymbol{\sigma}}{3}$$

Analogamente, il tensore della deformazione $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\frac{\varepsilon_v}{3} \mathbf{1} \qquad \qquad \qquad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_v}{3} \mathbf{1} \quad (2.3.17)$$

$$\text{con } \varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = tr\boldsymbol{\varepsilon}$$

La traccia di un tensore deviatorico, indicato genericamente con \mathbf{t} , è per definizione nulla. Un tensore deviatorico simmetrico, rappresentato in un sistema di riferimento

principale, ha componenti non nulle solo lungo la diagonale principale e queste rispettano la condizione:

$$t_2 = t_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)t_1 \quad (2.3.18)$$

Nelle condizioni triassiali, che in geotecnica implicano tensioni principali verticali e orizzontali e condizioni di assial simmetria dello stato di sforzo e deformazione, il deviatore di tensione $q = \sqrt{3J_{2s}}$ (essendo $J_{2s} = \frac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s}$) risulta $q = (\sigma_1 - \sigma_3)$.

Dalla considerazione precedente, per tutti i tensori ottenuti da \mathbf{s} la relazione tra il quadrato della norma del tensore e il quadrato della grandezza in condizioni triassiali è analoga a quella valida per q che è:

$$\frac{3}{2}\mathbf{s} : \mathbf{s} = q^2 \quad (2.3.19)$$

L'invariante della deformazione usato in geotecnica, definito come $\varepsilon_q = \sqrt{\frac{4}{3}J_{2e}}$, in condizioni triassiali risulta $\varepsilon_q = \frac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$; per tutti i tensori ottenuti da \mathbf{e} (tensore deviatorico della deformazione) la relazione è analoga a:

$$\frac{2}{3}\mathbf{e} : \mathbf{e} = \varepsilon_q^2 \quad (2.3.20)$$

Le semplici considerazioni precedenti giustificano l'espressione generalizzata della superficie di plasticizzazione:

$$f = \frac{3}{2}(\mathbf{s} - p\mathbf{a}) : (\mathbf{s} - p\mathbf{a}) - m^2 p^2 \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^n \right] = 0 \quad (2.3.21)$$

Il tensore $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{s}}{p}$ è il tensore del rapporto di tensione deviatorica e costituisce l'analogo di η in condizioni triassiali. Nella Fig. 2-4, nel piano deviatorico normalizzato avente sugli assi le componenti principali di \mathbf{r} è rappresentata la traccia della superfici del modello. La traccia della superficie di plasticizzazione è costituita da una circonferenza

centrata in α il cui raggio dipende dal rapporto p/p_0 . In corrispondenza del valore corrente di $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{s}}{p}$ e α , in condizioni di plasticizzazione la quantità scalare r_{ef} indicata con il nome di *effective stress ratio* rappresenta di fatto questo raggio. Nella versione generalizzata del modello r_{ef} può essere calcolato come:

$$r_{ef} = \frac{3}{2} [(\mathbf{r} - \alpha) : (\mathbf{r} - \alpha)]^{1/2} = m \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^n \right]^{1/2} \quad (2.3.22)$$

Le tracce delle superfici CS, BS e DS sono centrate nell'origine del sistema di riferimento e hanno raggio $\alpha^{c,b,d}$ variabile in funzione dell'angolo di Lode $[0$ e $60^\circ]$ secondo l'equazione di Argyris (1974) $g(\theta, c)$.

$$\alpha^{c,b,d} = g(\theta, c) \alpha_c^{c,b,d} \quad (2.3.23)$$

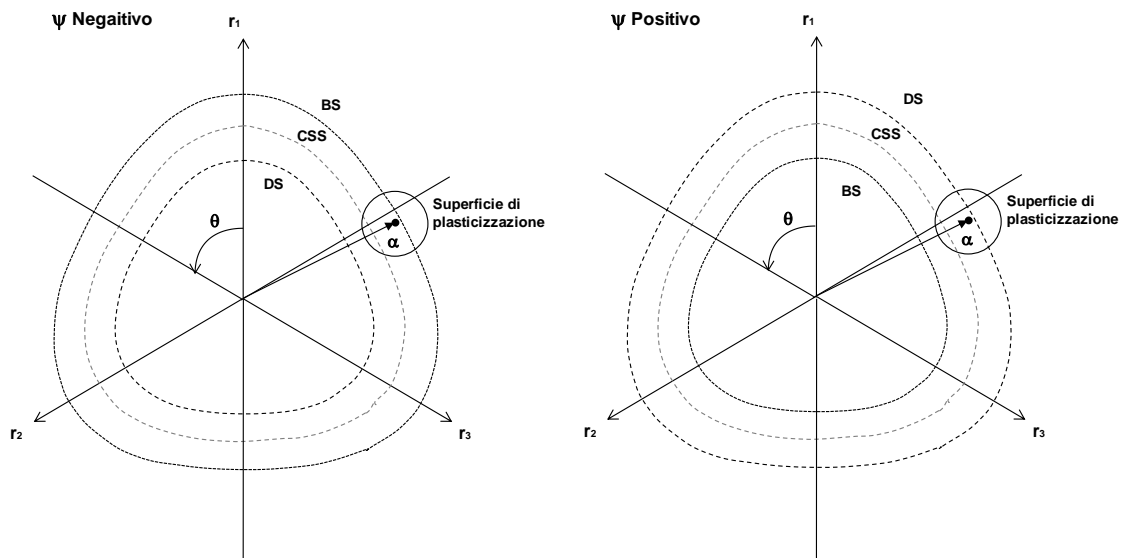


Fig. 2-4 Rappresentazione nel piano deviatorico normalizzato della traccia delle superfici del modello.

2.3.2. Deformazioni elastiche

Nel modello costitutivo il modulo di rigidità volumetrica, K , è una funzione delle due variabili indipendenti: indice dei vuoti e tensione media efficace. K è definito dalla seguente espressione:

$$K = K_0 p_{at} \frac{1+e}{e} \left(\frac{p}{p_{at}} \right)^{2/3} \quad (2.3.24)$$

Il modulo di taglio G dipende anch'esso dalle variabili e e p ed è espresso dalla seguente equazione:

$$G = G_0 p_{at} \frac{(2.97-e)^2}{1+e} \left(\frac{p}{p_{at}} \right)^{1/2} \quad (2.3.25)$$

Nelle relazioni (2.3.24) e (2.3.25) K_0 e G_0 rappresentano due costanti adimensionali e costituiscono due parametri del modello che non vanno confusi con i moduli di rigidità a piccoli livelli di deformazione. L'ipotesi di isotropia della risposta elastica consente di scrivere la relazione che lega l'incremento di deformazione elastica all'incremento di tensione come relazioni tra $\dot{\epsilon}_v^e$ e \dot{p} e tra $\dot{\epsilon}_q^e$ e \dot{q} :

$$\dot{\epsilon}_v^e = \frac{\dot{p}}{K} \quad \dot{\epsilon}_v^e = \frac{\dot{p}}{K_0 p_{at}} \frac{e}{1+e} \left(\frac{p}{p_{at}} \right)^{-2/3} \quad (2.3.26)$$

$$\dot{\epsilon}_q^e = \frac{\dot{q}}{3G} \quad \dot{\epsilon}_q^e = \frac{\dot{q}}{3G_0 p_{at}} \frac{1+e}{(2.97-e)^2} \left(\frac{p}{p_{at}} \right)^{-1/2} \quad (2.3.27)$$

In condizioni generalizzate la variazione della componente deviatorica del tensore della deformazione è legata alla componente deviatorica del tensore incremento di tensione dalla espressione:

$$\dot{\epsilon}^e = \frac{\dot{\mathbf{s}}}{2G} \quad (2.3.28)$$

2.3.3. Legge di flusso

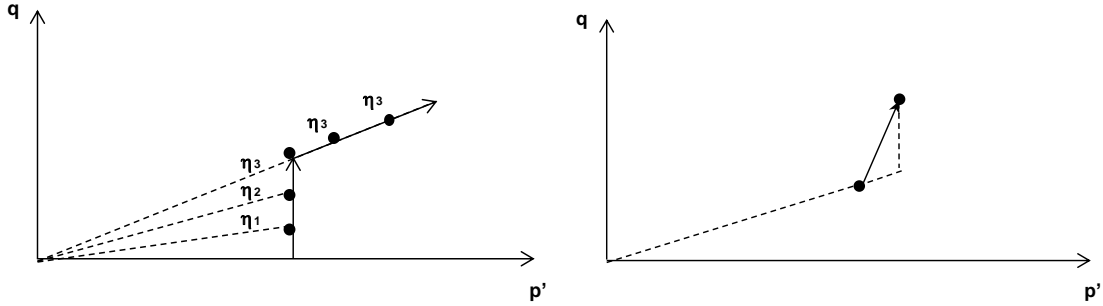


Fig. 2-5 Esempio di percorso tensionale puramente deviatorico e ad η costante. Componente ad η costante e puramente deviatorica di un generico incremento di tensione.

Nella versione del modello SANISAND (Taiebat e Dafalias (2008)), il tensore incremento di deformazione plastica è definito come somma di due contributi. La componente deviatorica e isotropa del tensore $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$ possono quindi essere scritte come:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P)_1 + (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P)_2 \quad (2.3.29)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^P = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^P)_1 + (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^P)_2 \quad (2.3.30)$$

La Fig. 2-5 a illustra un percorso tensionale caratterizzato da un primo tratto puramente deviatorico, a p costante, lungo il quale η varia, e un tratto ad η costante. Il contributo tipo 1 di $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$ è quello prodotto in percorsi di tensione ad η variabile, mentre il contributo tipo 2 viene associato a percorsi ad η costante. Questo secondo contributo alle deformazioni plastiche può originarsi grazie al fatto che la superficie di plasticizzazione del modello è chiusa lungo il proprio asse.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P = \langle L \rangle \mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}, q) \quad (2.3.31)$$

Nella legge di flusso (2.3.31) (§2.2) \mathbf{R} definisce il gradiente del potenziale plastico e L il moltiplicatore plastico (o *loading index*). Il modello prevede una legge di flusso non associata e il gradiente del potenziale plastico è definito dalla seguente espressione:

$$\mathbf{R} = \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, q) = \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n}_{r_{ef}} + \frac{3}{2} X \mathbf{r} \exp^{-V_{r_{ef}}} \right] + \frac{1}{3} \left[D r_{ef} + \exp^{-V_{r_{ef}}} \right] \mathbf{I} \quad (2.3.32)$$

La normale alla superficie di plasticizzazione, \mathbf{L} , è definita dalla seguente equazione:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, q) = 3(\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha}) + \frac{1}{3} \left[-3\boldsymbol{\alpha} : (\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha}) - 2m^2 p + (2+n)m^2 p \left(\frac{p}{p_0} \right) \right] \mathbf{I} \quad (2.3.33)$$

Stante la definizione di $\mathbf{R}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$, la legge di flusso può essere riscritta evidenziando le espressioni dei contributi 1 e 2:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \langle L \rangle \left[\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{n} r_{ef} \right) + \left(\frac{3}{2} X \mathbf{r} \exp^{-V r_{ef}} \right) \right] \quad (2.3.34)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v^p = \langle L \rangle \left[(D r_{ef}) + (\exp^{-V r_{ef}}) \right] \quad (2.3.35)$$

Nelle (2.3.34) e (2.3.35) r_{ef} è l'*effective stress ratio*, già definito nel paragrafo precedente, D è la dilatanza (contributo 1) (la cui definizione verrà fornita in seguito), X è una proprietà intrinseca del materiale (il cui significato verrà definito tra poco), V è un parametro che ha segno positivo e al quale si assegna generalmente un valore assoluto molto grande, $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{s}}{p}$ e \mathbf{n} è il tensore deviatorico unitario definito come:

$$\mathbf{n} := \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}}{\left[(\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}) : (\mathbf{r} - \boldsymbol{\alpha}) \right]^{1/2}} \quad (2.3.36)$$

Come mostrato in Fig. 2-6, nel piano deviatorico normalizzato, i tensori \mathbf{r} e $\boldsymbol{\alpha}$ (componente deviatorica normalizzata dello stato tensionale e tensore di *back stress*) individuano lo stato corrente e il centro della traccia della superficie di plasticizzazione. Il tensore \mathbf{n} individua la direzione normale alla traccia della superficie di plasticizzazione in \mathbf{r} .

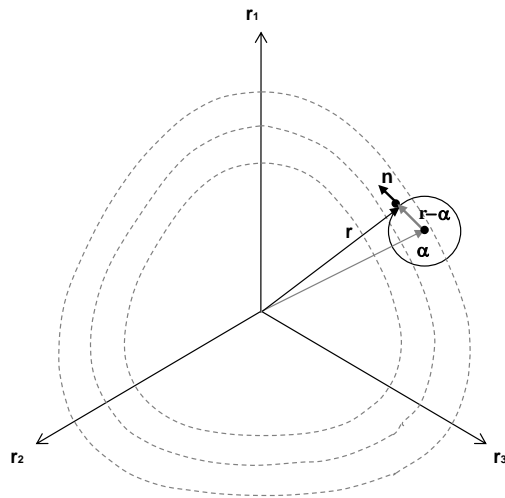


Fig. 2-6 Rappresentazione nel piano deviatorico dei tensori r , n , α .

I termini tra parentesi nelle (2.3.34) e (2.3.35) consentono di capire in quali casi si originano i due contributi alle componenti isotropa e deviatorica dell'incremento di deformazioni plastica.

- I **contributi 1** sono nulli se si impongono percorsi tensionali del tipo ad η costante perché in questi casi $r_{ef} = 0$ e $\exp(-Vr_{ef}) = 1$. In questo caso la componente volumetrica dell'incremento di deformazione plastica è una conseguenza diretta del carico imposto. L'entità della componente deviatorica dell'incremento di deformazione plastica è legata al valore del parametro X . X può essere visto come una quantità duale della dilatanza D .
- I **contributi 2** alle deformazioni plastiche tendono a zero quando i percorsi tensionali sono caratterizzati da η variabile, tanto più velocemente quanto r_{ef} , che in questo caso è diverso da zero, è grande; essendo V grande, $\exp(-Vr_{ef})$ tende a zero. L'entità delle deformazioni volumetriche plastiche, in questo caso, è legata al valore della dilatanza D .

In condizioni triassiali la dilatanza è definita dal rapporto tra la componente volumetrica e deviatorica dell'incremento di deformazione plastica. Nelle precedenti versioni del modello, che prevedono una superficie di plasticizzazione conoidale aperta, deformazioni volumetriche plastiche possono svilupparsi solo in percorsi tensionali ad η variabile, in queste versioni D (nella 2.3.34) rappresenta la dilatanza. Nel modello SANISAND di Taiebat e Dafalias D rappresenta il contributo 1 alla dilatanza, poiché,

come si nota dalle (2.3.34) (2.3.35), esprime il rapporto fra la componente volumetrica e deviatorica degli incrementi di deformazione plastica del tipo 1. Nel modello di Taiebat e Dafalias (2008) D è definita dall'espressione, del tutto analoga alla dilatanza delle precedenti versioni, che deriva da Rowe, (1962):

$$D = A_d (\alpha_c^c \exp(+n_d \psi) - \alpha) \quad (2.3.37)$$

Nella (2.3.37) α_c^c è il parametro che definisce la resistenza mobilitata a stato critico in compressione triassiale 2.3.8, A_d e n_d sono due parametri del modello.

La (2.3.37) ha una struttura simile alle relazioni impiegate nelle due versioni del modello di Cam Clay (Roscoe e Schofield, (1963) e (Roscoe e Burland, (1968)), che derivano dalla relazione di Taylor, (1948) e sono rispettivamente definite dalle seguenti espressioni:

$$D = (M - \eta) \quad D = \frac{(M^2 - \eta^2)}{2\eta} \quad (2.3.38)$$

nelle (2.3.38) M indica il livello tensionale a stato critico in compressione triassiale.

La differenza fra la (2.3.37) e le (2.3.38) sta nel fatto che nella relazione valida per le sabbie D è funzione di entrambi i parametri η e ψ (Li e Dafalias, (2000)). Nei modelli costitutivi formulati per argille, ψ e η sono invece dipendenti e infatti nelle (2.3.38) compare solo η . Dalla prima delle (2.3.38) si può apprezzare che D dipende dalla distanza di η dallo stato critico.

Nei modelli costitutivi formulati per le sabbie viene introdotto il concetto della *Dilatancy Surface* (DS), in questo modo la dilatanza può essere descritta come una funzione della distanza fra lo stato corrente e la sua immagine sulla superficie DS che, in condizioni triassiali, è rappresentata nel piano $p:q$ da una linea di pendenza α^d , variabile con ψ . Con l'introduzione del concetto di DS, la (2.3.37) può essere riscritta in una forma estremamente simile alla (2.3.38):

$$D = A_d (\alpha^d - \alpha) \quad (2.3.39)$$

Nel modello la condizione di trasformazione di fase (descritta da Ishihara et al. (1975)) è mobilitata quando lo stato raggiunge l'immagine sulla Superficie di Dilatanza, cioè se

$\alpha = \alpha^d$ (Manzari e Dafalias (1997)). La (2.3.39) tiene conto correttamente del fatto che nelle sabbie si può avere dilatanza nulla non solo se $\alpha = \alpha_c^c$ (come previsto dalla (2.3.38)) ma ogni volta che $\alpha = \alpha^d$. La (2.3.39) consente anche la realizzazione della condizione di stato critico poiché α^d (2.3.11), tende ad α_c^c quando ψ tende a 0. In questo modo si rispetta il vincolo di indice dei vuoti costante al raggiungimento della condizione di stato critico

Per condizioni di sforzo generali il modello prevede una legge di mappatura che associa allo stato corrente \mathbf{r} un punto immagine sulla superficie di dilatanza α^d (Fig. 2-7). In primo luogo viene determinato il tensore \mathbf{n} nello stato corrente. Il tensore immagine α^d è quindi definito come:

$$\alpha^d = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha^d \mathbf{n} \quad (2.3.40)$$

Nella (2.3.40) α^d è il raggio della traccia della superficie di dilatanza sul piano deviatorico, $\alpha^d = g(\theta, c) \alpha_c^c$ è funzione dell'angolo di Lode, e dell'apertura in compressione triassiale della Superficie di Dilatanza che è $\alpha_c^d = \alpha_c^c \exp(+n_d \psi)$.

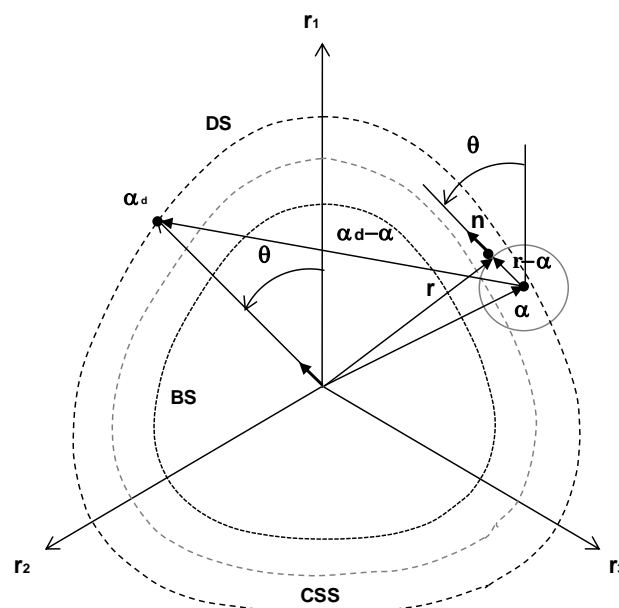


Fig. 2-7 Costruzione grafica che schematizza il procedimento per ricavare l'immagine dello stato corrente sulla superficie di dilatanza DS.

Come illustrato nel piano deviatorico di Fig. 2-7, α^d è quindi il punto individuato sulla traccia della Superficie di Dilatanza dall'angolo di Lode di un vettore unitario avente la stessa direzione di \mathbf{n} ma centrato nell'origine del sistema di riferimento $r_1 r_2 r_3$. Tenendo conto della (2.3.40), la (2.3.39) può essere riscritta nella forma coerente con l'interpretazione di tipo *Bounding Surface* adottata nel modello:

$$D = \sqrt{\frac{3}{2}} A_d (\alpha^d - \alpha) : \mathbf{n} \quad (2.3.41)$$

2.3.4. Leggi di incrudimento

La superficie di plasticizzazione è soggetta a due tipi di incrudimento: isotropo e rotazionale. Le variabili di incrudimento sono il parametro scalare p_0 e le componenti del tensore di *back stress* α . Le variazioni di p_0 dipendono dal valore corrente di p_0 e dal contributo 2 all'incremento di deformazione volumetrica plastica (§2.3.3); questa dipendenza è espressa sinteticamente come:

$$\dot{p}_0 = \langle L \rangle \bar{p}_0 \left((\dot{\varepsilon}_v^p)_2, p_0 \right) \quad (2.3.42)$$

La funzione indicata con $\bar{p}_0 \left((\dot{\varepsilon}_v^p)_2, p_0 \right)$ è definita come:

$$\dot{p}_0 = \langle L \rangle \frac{(1+e)p_0 \exp^{-Vr_{ef}}}{e \left[\left(\rho_c - \frac{1}{K_0} \left(\frac{p_0}{p_{at}} \right)^{1/3} \right) \left(1 - (\text{sgn } \delta) |\delta|^\theta \right) \right]} \quad (2.3.43)$$

La (2.3.43) mostra che l'incrudimento isotropo è massimo quando l'*effective stress ratio* r_{ef} tende a zero e tende a zero quando r_{ef} è non nullo. Prima di illustrare il significato dei termini che compaiono nella (2.3.43) è opportuno definire l'immagine, p_b , dello stato corrente sulla LCC isotropa. La tensione media efficace p_b (Fig. 2-8) viene valutata sulla LCC(ISO) in corrispondenza dell'indice dei vuoti corrente e può essere calcolata dall'equazione della LCC:

$$p_b = p_r e^{-1/\rho_c} \quad (2.3.44)$$

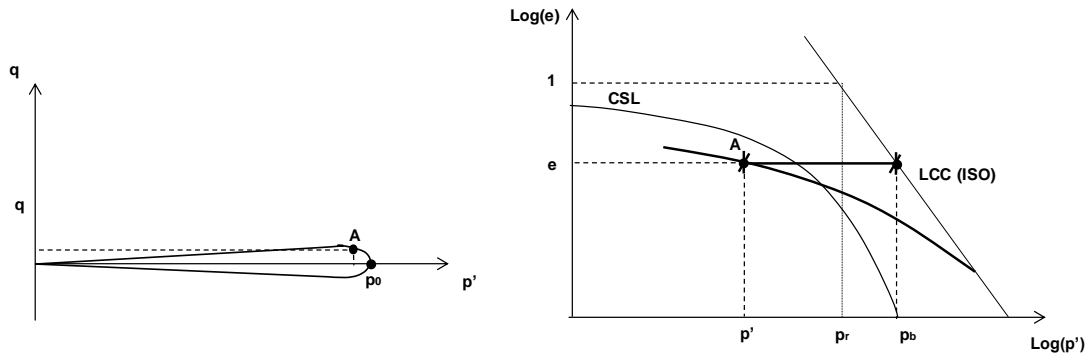


Fig. 2-8 Significato del parametro adimensionale δ nel caso di compressione isotropa.

Nel caso di un percorso tensionale proporzionale caratterizzato da $\eta = 0$ (compressione isotropa) la quantità δ nella (2.3.43) assume la seguente espressione:

$$\delta = 1 - \frac{p}{p_b} \quad (2.3.45)$$

Come illustrato nella Fig. 2-8, δ è legato alla distanza, valutata nel piano di compressibilità, in termini di p , tra lo stato corrente e la sua immagine sulla LCC isotropa p_b .

La definizione di δ presente nel legame di Taiebat e Dafalias (2008) è però più generale, per tener conto del fatto che le linee di normal-consolidazione corrispondenti a percorsi di carico caratterizzati da η costante ma diverso da zero sono più interne rispetto a quella isotropa (Fig. 2-9). Il δ che compare nella (2.3.43) è definito:

$$\delta = 1 - \frac{p}{p_b} \left[1 + 2 \frac{\alpha^2}{(g\alpha_c^c)^2} \right] \quad (2.3.46)$$

Nella (2.3.46) si tiene conto dell'anisotropia dello stato di sforzo includendo il valore di α nella definizione di δ . La funzione di Argyris $g(\theta, c)$ nella (2.3.46) deve essere calcolata assumendo per \mathbf{n} la seguente espressione:

$$\mathbf{n} := \frac{\boldsymbol{\alpha}}{[\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha}]^{1/2}} \quad (2.3.47)$$

Gli autori specificano che è possibile omettere il calcolo di $g(\theta, c)$ e porlo pari a 1 dal momento che $g(\theta, c)$ influenza marginalmente il valore di δ .

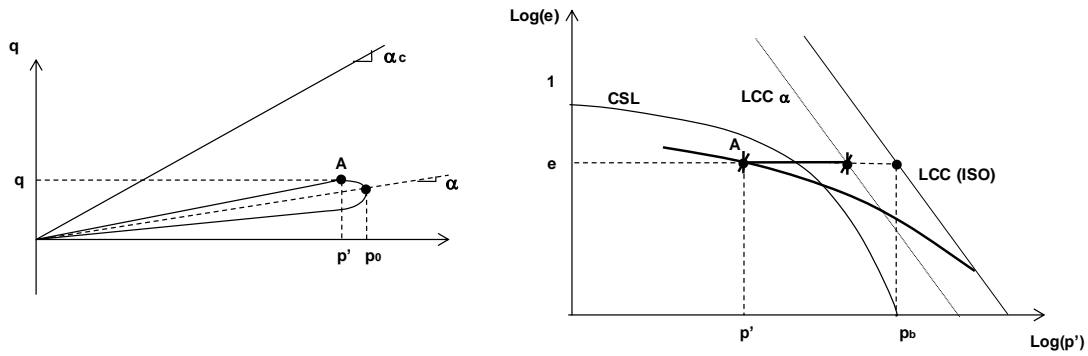


Fig. 2-9 Significato del parametro adimensionale δ nel caso di compressione monodimensionale.

Tenendo conto dell'assunzione su $g(\theta, c)$, la versione triassiale e generalizzata della (2.3.46) sono rispettivamente:

$$\delta = 1 - \frac{p}{p_b} \left[1 + 2 \frac{\alpha^2}{(\alpha^c)^2} \right] \quad \delta = 1 - \frac{p}{p_b} \left[1 + 3 \frac{\alpha : \alpha}{(\alpha^c)^2} \right] \quad (2.3.48)$$

δ può assumere valori negativi quando le condizioni di compressione non sono isotrope. La seconda variabile di incrudimento della superficie è rappresentata dal tensore α ; in condizioni triassiali il significato di α può essere visualizzato nella Fig. 2-3. In condizioni di sforzo generali α individua il centro della traccia della superficie di plasticizzazione nel piano deviatorico, (Fig. 2-10). L'evoluzione di α è prodotta dal contributo 1 agli incrementi di deformazione plastica. Questa dipendenza è sinteticamente espressa come:

$$\dot{\alpha} = \langle L \rangle \bar{\alpha} \left(\dot{\epsilon}^p \right)_1, \alpha \quad (2.3.49)$$

$$\dot{\alpha} = \langle L \rangle h r_{ef} (\alpha^b - \alpha) \quad (2.3.50)$$

In questo contesto r_{ef} è definito termine attrattore. Le variazioni di α si originano quando r_{ef} è diverso da zero, per questo, ogni volta che $\eta = \alpha$ (che equivale a $p = p_0$), $\dot{\alpha} = 0$. La variazione di α è inoltre limitata dal valore di α^b , anch'esso variabile. Nel caso del raggiungimento della resistenza di picco ($\alpha = \alpha^b$), l'annullamento delle variazioni di α è solo temporaneo; rimane zero solo se contemporaneamente $\psi = 0$. Infine α^b può anche essere superato da α ma al suo superamento α inizia a ridursi tendendo ad α^b dall'alto. Nella (2.3.50) h è una quantità positiva definita come:

$$h = \frac{b_0}{\frac{3}{2}[(\mathbf{b}_{ref} - (\boldsymbol{\alpha}_b - \boldsymbol{\alpha})) : \mathbf{n}]^2} \quad (2.3.51)$$

Nella (2.3.51):

$$\boldsymbol{\alpha} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha \mathbf{n} \quad (2.3.52)$$

$$b_0 = G_0 h_0 (1 - c_h e) \left(\frac{p_{at}}{p} \right)^{1/2} \quad (2.3.53)$$

$$\mathbf{b}_{ref} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\alpha_c^b + \alpha_e^b) \mathbf{n} \quad (2.3.54)$$

La struttura della (2.3.51) è analoga a quella del modello Manzari e Dafalias (2004). Differenze notevoli sono costituite dalla presenza del termine attrattore r_{ef} (introdotto in precedenza nei modelli SANICLAY) e dal modo in cui è definito h . La quantità costante \mathbf{b}_{ref} al denominatore di h sostituisce il parametro discreto $\boldsymbol{\eta}_{ini}$ perché sia possibile l'incrudimento di p_0 in assenza di incrudimento cinematico.

Il tensore $\boldsymbol{\alpha}^b$ nella (2.3.51) rappresenta l'immagine sulla BS dello stato corrente ed è definito dalla espressione:

$$\boldsymbol{\alpha}^b = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha^b \mathbf{n} \quad (2.3.55)$$

Come illustrato nella Fig. 2-10, calcolato \mathbf{n} e determinato l'angolo, θ , formato da \mathbf{n} con la verticale nel sistema di riferimento centrato in $\boldsymbol{\alpha}$, si determina il raggio $\alpha^b = g(\theta, c) \alpha_c^b$ della traccia della Bounding Surface (BS) sul piano deviatorico. Il raggio α^b è funzione dell'angolo di Lode e dell'apertura in compressione triassiale della (BS) $\alpha_c^b = \alpha_c^c \exp(-n_b \psi)$. Come illustrato nella Fig. 2-10; nel piano deviatorico, $\boldsymbol{\alpha}^b$ è il punto individuato sulla traccia della (BS) dall'angolo di Lode di un vettore unitario avente la stessa direzione di \mathbf{n} ma centrato nell'origine del sistema di riferimento $r_1 r_2 r_3$.

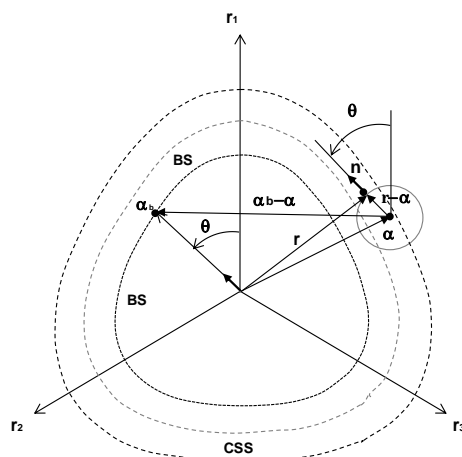


Fig. 2-10 Costruzione grafica che schematizza il procedimento per ricavare l'immagine dello stato corrente sulla superficie di dilatanza DS.

2.4. Alcune considerazioni sulle equazioni del modello

Nell'introduzione al capitolo 2 si è accennato al fatto che il modello costitutivo integra le versioni precedenti di SANISAND con una formulazione mutuata dal modello di Pestana e Whittle, (1995) e l'introduzione di una superficie di plasticizzazione chiusa. Le modifiche sono state apportate per includere la possibilità di riprodurre lo sviluppo di deformazioni plastiche anche in percorsi tensionali ad η costante.

In questo paragrafo si illustra come è stata ricavata la legge di evoluzione della variabile di incrudimento isotropo p_0 del modello di Taiebat e Dafalias (2008) e si evidenziano le caratteristiche della compressibilità del materiale introdotte e contemplate dal modello. A questo scopo si richiamano alcune assunzioni fatte da Pestana e Whittle, (1995). per ricavare la formulazione del loro modello.

Il modello di Pestana e Whittle, (1995) è finalizzato a simulare la risposta meccanica di terre a grana grossa in soli percorsi di compressione. La Fig. 2-11 mostra, nel piano di compressibilità in scala semilogaritmica con ascissa normalizzata rispetto alla pressione atmosferica, curve di compressione edometrica sperimentali ottenute da campioni ricostituiti di tre sabbie. Dalla Fig. 2-11 si notano alcuni aspetti della compressibilità delle terre a grana grossa riprodotti dal modello di Pestana e Whittle, (1995).

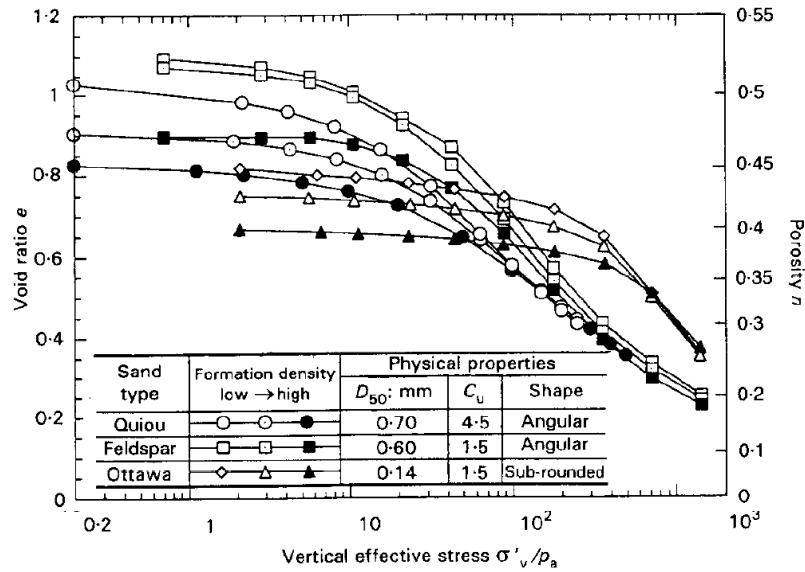


Fig. 2-11 Risultati sperimentali di prove di compressione edometrica su diversi tipi di sabbia (da Pestana e Whittle, (1995)).

- In generale, le curve di normal - consolidazione sono molteplici e distinte in base alle densità iniziali di formazione dei provini. La compressibilità è influenzata dall'indice dei vuoti iniziale. L'indice dei vuoti ha un effetto persistente sulla compressibilità che viene rimosso solo a livelli tensionali molto alti, dove infatti le molteplici curve convergono verso quella che è definita LCC (*Limiting Compression Curve*)
- le curve di compressione, soprattutto se osservate su un intervallo tensionale molto ampio, sono non lineari (nel piano semilogaritmico). La compressibilità intesa come $de/d\log(\sigma'_v)$ dipende dalla tensione efficace
- i particolari andamenti delle curve di compressione edometrica dipendono, oltre che dalla densità di formazione del provino, dalla mineralogia forma e assortimento dei grani (eventuale presenza di asperità)
- gli stati tensionali in corrispondenza dei quali si raggiunge la LCC e la gradualità con la quale le curve vi convergono dipendono dal particolare materiale. Per alcune sabbie, (Ottawa Sand) la compressibilità (intesa come pendenza nel piano semilogaritmico con asse delle ascisse normalizzato) tende a crescere, al crescere del livello tensionale, fino ad un valore massimo, analogo a quello tipico delle argille normalmente consolidate, quando viene raggiunta, con un gomito molto netto, la LCC. In altre (Feldspar) la convergenza verso la LCC

si sviluppa con un gomito molto graduale e la compressibilità aumenta gradualmente fino a raggiungere un massimo prima della LCC (che ha un andamento non lineare).

- Lungo il regime LCC la compressibilità ($de/d\log(\sigma'_v)$) tende a ridursi con un andamento che prescinde dall'effetto del confinamento iniziale (Fig. 2-12 a).

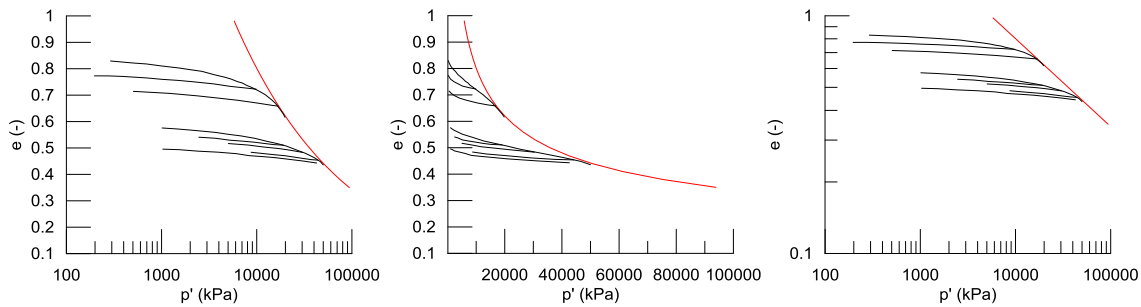


Fig. 2-12 Rappresentazione nel piano di compressibilità di linee di normal-consolidazione isotropa della Toyoura Sand. In rosso è evidenziata la LCC.

Nella Fig. 2-13, in un piano bilogarithmico, il modulo edometrico tangente M , normalizzato rispetto alla pressione atmosferica, è rappresentato in funzione della tensione verticale efficace, anch'essa normalizzata rispetto alla stessa tensione di riferimento. A sinistra nella Fig. 2-13 sono mostrati gli andamenti sperimentali di M lungo le curve di compressibilità della Fig. 2-11. Pestana e Whittle, (1995) estendono le osservazioni sperimentali relative alle curve edometriche sperimentali, appena richiamate, alle curve di compressione isotropa. A destra nella Fig. 2-13 è quindi mostrato il modello da essi assunto per riprodurre l'andamento del modulo di rigidità volumetrica di K in prove di compressione isotropa (che è poi quello del loro modello). La rappresentazione alternativa della compressibilità di Fig. 2-13 consente di cogliere l'effetto, indipendente, dell'indice dei vuoti e della tensione verticale efficace su M :

- in un piano bilogarithmico il modulo edometrico cresce non linearmente al crescere di σ'_v con un andamento che è influenzato dall'indice dei vuoti di formazione iniziale, infatti le curve traslano e ruotano al ridursi di e .
- Raggiunto il regime LCC l'andamento del modulo edometrico in funzione della pressione di confinamento può essere rappresentato da una relazione del tipo

$$\log\left(\frac{M}{P_a}\right) = \log a + b \log\left(\frac{\sigma'_v}{P_a}\right) \rightarrow \frac{M}{P_a} = a + \left(\frac{\sigma'_v}{P_a}\right)^b \quad \text{con } b = 1 \quad (2.4.1)$$

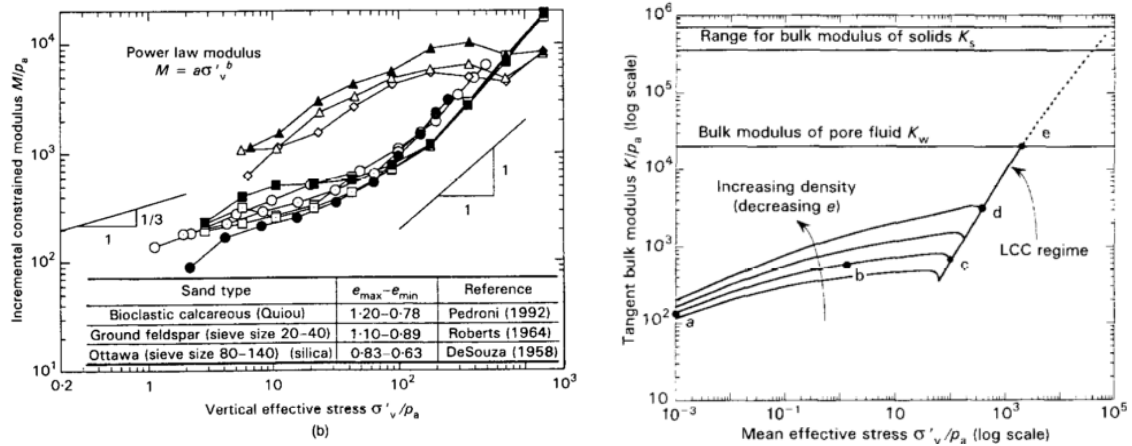


Fig. 2-13 (a) Risultati sperimentali: andamento del modulo edometrico normalizzato in funzione della tensione verticale efficace anch'essa normalizzata rispetto a una tensione di riferimento. (b). Schema interpretativo degli andamenti (del modulo di rigidità volumetrico) assunto da Pestana e Whittle, 1995.

L'espressione della LCC e delle diverse linee di normal consolidazione proposte da Pestana e Whittle, (1995) sono ricavate partendo da due ipotesi:

1. Il primo carico di sabbie di deposizione recente sia elastoplastico;
2. Il modulo di rigidità volumetrico tangente sia una funzione a variabili separate di e e σ' e soddisfi entrambe le condizioni:

$$\left. \frac{\partial K}{\partial \sigma'} \right|_e > 0 \quad \left. \frac{\partial K}{\partial e} \right|_{\sigma} < 0 \quad (2.4.2)$$

Il modulo volumetrico tangente, in modo coerente con le evidenze sperimentali, cresce al crescere della tensione di confinamento e decresce al crescere dell'indice dei vuoti. Rispetto alla prima ipotesi Pestana e Whittle richiamano gli studi di molti autori concordi nel ritenere che una componente plastica delle deformazioni prodotte da carichi di compressione sia sempre presente nelle sabbie, fin da bassi livelli tensionali e che ciò che varia con il livello tensionale sia l'entità rispetto alla componente elastica e la causa di queste deformazioni (il riassetamento o la rottura dei grani). Per rispettare la condizione (2.4.2) il modulo di rigidità volumetrico adimensionalizzato viene espresso in funzione della tensione media efficace σ' normalizzata rispetto a una tensione di riferimento da una relazione del tipo:

$$\frac{K}{p_a} = \frac{1}{p_a} \frac{d\sigma'}{d\varepsilon} = C f_1(e) f_2\left(\frac{\sigma'}{p_a}\right) \quad (2.4.3)$$

Per esprimere la dipendenza separata da σ' ed e , le due funzioni scelte sono:

$$f_2(\sigma) = \left(\frac{\sigma'}{p_a} \right)^b \quad f_1(e) = \frac{1}{n} \quad (2.4.4)$$

con la posizione $\frac{K}{p_a} = \frac{1}{p_a} \frac{d\sigma'}{d\varepsilon}$ gli autori pervengono all'espressione delle deformazioni volumetriche elastoplastiche cumulate nel corso di una compressione isotropa:

$$d\varepsilon = \frac{1}{C \frac{1}{n} \left(\frac{\sigma'}{p_a} \right)^b p_a} d\sigma' \quad (2.4.5)$$

Nel modello di Pestana e Whittle, (1995) viene previsto un comportamento puramente elastico solo in scarico isotropo e per il modulo elastico volumetrico è definita una dipendenza da p ed e secondo la relazione:

$$K = K_0 p_{at} \frac{1+e}{e} \left(\frac{p}{p_{at}} \right)^{2/3} \quad (2.4.6)$$

Le deformazioni volumetriche elastiche sono quindi espresse dalla:

$$d\varepsilon^e = \frac{n}{C_b} \left(\frac{\sigma'}{p_{at}} \right)^{-1/3} \frac{d\sigma'}{p_{at}} \quad (2.4.7)$$

Nella (2.4.7) l'esponente 1/3 è stato scelto da correlazione empiriche. La relazione (2.4.7) è stata ripresa nel modello di Dafalias e Taiebat (2008).

Le deformazioni elastoplastiche lungo il regime LCC sono fornite dall'equazione (2.4.5) nella quale sia posto $b = 1$. Le deformazioni puramente plastiche nel regime LCC vengono ricavate sottraendo la (2.4.7) alla (2.4.5):

$$d\varepsilon^p = n \left(\rho_c - \frac{1}{C_b} \left(\frac{\sigma'}{p_a} \right)^{2/3} \right) \frac{d\sigma'}{\sigma'} \quad (2.4.8)$$

Definendo la quantità:

$$\delta_b = 1 - \left(\frac{\sigma'}{\sigma'_b} \right) \quad (2.4.9)$$

Nella (2.4.9) σ'_b è l'immagine dello stato corrente già definita nel §2.3.4. La quantità adimensionale δ_b definisce la distanza dello stato dal regime LCC. L'entità delle deformazioni volumetriche plastiche sviluppate nel corso di un percorso di compressione ad η costante, nella transizione elastoplastica verso il regime LCC, sono assunte proporzionali a quelle che si verificherebbero nel regime LCC:

$$d\varepsilon^p = n \left(\rho_c - \frac{1}{C_b} \left(\frac{\sigma'}{p_a} \right)^{2/3} \right) (1 - \delta_b) \frac{d\sigma'}{\sigma'} \quad (2.4.10)$$

Poiché il modello di Pestana e Whittle, (1995) è sviluppato per simulare solo la risposta del terreno in percorsi tensionali ad η costante, queste deformazioni rappresentano le deformazioni volumetriche plastiche del tipo (2) del modello SANISAND, (2008) (che iniziano a svilupparsi solo se p è prossima a p_0) di seguito richiamate:

$$\left(\dot{\varepsilon}_v^p \right)_2 = \frac{e}{1+e} \left(\rho_c - \frac{1}{K} \left(\frac{p}{p_{at}} \right)^{1/3} \right) \left(1 - (\text{sgn } \delta) \delta^\theta \right) \frac{\dot{p}}{p} \quad (2.4.11)$$

Il confronto tra le (2.4.10) (2.4.11) consente di apprezzarne l'analogia. La legge di incrudimento per il parametro p_0 del modello SANINSAND è stata ricavata proprio sostituendo p con p_0 nella (2.4.11) e sostituendo $\left(\varepsilon_v^p \right)_2$ con la sua espressione in funzione del moltiplicatore plastico $\left(\dot{\varepsilon}_v^p \right)_2 = \langle L \rangle \exp^{-Vr_{\sigma'}}$, ricavata dalla legge di flusso.

Integrando per parti la (2.4.3), con l'assunzione di $b=1$ si ottiene l'equazione della LCC:

$$\ln(e) = -\frac{1}{C} \ln \left(\frac{\sigma'}{\sigma'_r} \right) \quad (2.4.12)$$

Ponendo $\rho_c = \frac{1}{C}$ la (2.4.12) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\ln(e) = -\rho_c \ln \left(\frac{\sigma'}{\sigma'_r} \right) \quad (2.4.13)$$

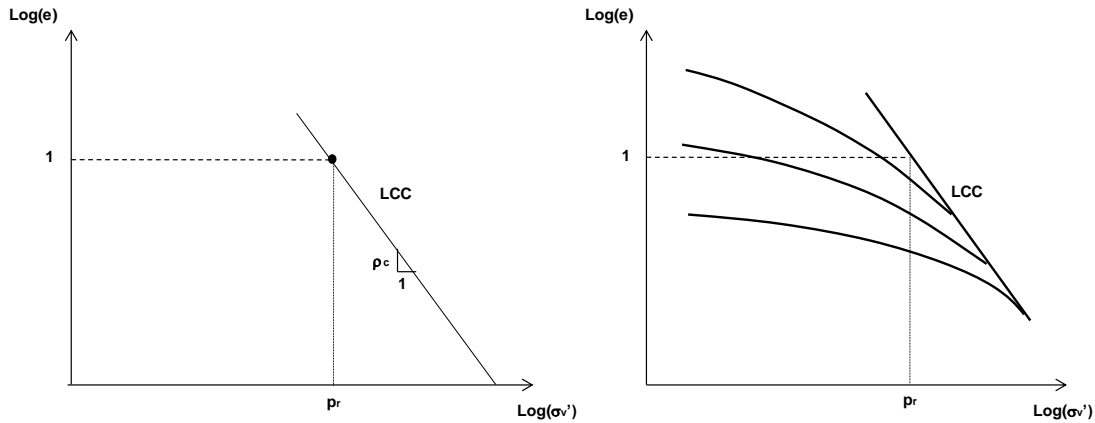


Fig. 2-14 Esempificazione dell'andamento delle linee di normal-consolidazione nel regime LCC e nella fase di transizione verso il regime LCC.

2.5. Parametri del modello

Tabella 2.1 Parametri del modello

<i>Parametro</i>	<i>descrizione</i>
e_0	andamento della proiezione CSL nel piano di compressibilità
λ	
ξ	
α_c^c	livello tensionale a stato critico (sull'estremità della superficie di plasticizzazione) (Fig. 2.3)
c	rapporto tra resistenza mobilitata a stato critico in estensione tx e in compressione tx
m	semiapertura (all'origine) della superficie di plasticizzazione
G_0	costante adimensionale - modulo di taglio in funzione di e e p
K_0	costante adimensionale - modulo di rigidità volumetrica in funzione di e e p
h_0	costante legge di inrudimento cinematico
c_h	costante legge di inrudimento cinematico
n_b	effetto di ψ sulla BS (effetto di ψ sul livello di mobilitazione della resistenza di picco)
A_d	costante di dilatanza
n_d	effetto di ψ sulla DS (effetto di ψ sul livello di mobilitazione della condizione di trasformazione di fase)
p_r	andamento della LCC-ISO nel piano di compressibilità
ρ_c	
θ	andamento curve di compressibilità verso la LCC
X	rapporto fra $\varepsilon_1^{p_2}/\varepsilon_2^{p_2}$
n	forma della superficie di plasticizzazione
V	dipendenza da r_{ef} della funzione peso dei contributi del tipo 2 alla formulazione del modello

3. Implementazione numerica del modello SANISAND di Taiebat e Dafalias (2008)

3.1. Integrazione delle equazioni costitutive in forma incrementale

Le equazioni del legame costitutivo (funzione di plasticizzazione, leggi elastiche, legge di flusso, leggi di evoluzione delle variabili interne) consentono di ricavare, come mostrato nel §2.2, l'espressione della matrice di rigidità elastoplastica tangente. Le equazioni del legame esprimono infatti la relazione fra gli incrementi infinitesimi della tensione e delle variabili di incrudimento e gli incrementi infinitesimi di deformazione. Per determinare l'effetto di una variazione finita del tensore di deformazione è necessario integrare il set di equazioni differenziali del legame costitutivo, corredate dalla condizione iniziale sullo stato. Eccetto il caso di relazioni costitutive estremamente semplici, l'integrazione viene generalmente effettuata in modo approssimato adottando tecniche di integrazione numerica.

Nella prima parte di questo paragrafo si richiamano le ipotesi generalmente introdotte per ricavare la formulazione del problema ai valori iniziali più conveniente ai fini della scrittura di un algoritmo di integrazione di punto di Gauss, sufficientemente accurato e robusto, per l'implementazione del modello in un codice di calcolo agli elementi finiti. Scrivendo le equazioni del legame in forma incrementale il problema ai valori iniziali può essere espresso nella seguente forma:

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})d\boldsymbol{\varepsilon} \\ d\mathbf{q} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})d\boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Con: $\boldsymbol{\sigma}_{ini} \mathbf{q}_{ini}$

Nella (3.1.1) il significato dei simboli è quello illustrato nei §2.2 e §2.2.2. Nel §2.2.2 le espressioni generali delle equazioni costitutive sono state definite come relazioni fra velocità. Si è già accennato al fatto che in un materiale non viscoso il tempo può essere introdotto con la sola funzione di parametro evolutivo e che incrementi e *rate* delle grandezze di interesse sono legati dalle seguenti relazioni:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt}; \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt}; \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \quad (3.1.2)$$

Sostituendo le (3.1.2) nelle (3.1.1) si effettua una parametrizzazione in funzione di t . Il sistema (3.1.1) può dunque essere scritto, in modo equivalente, nella forma già mostrata nel §2.2.2 e riportata di seguito:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}_{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{cases} \quad (3.1.3)$$

$$\text{Con: in } t = t_n \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t_n) = \boldsymbol{\sigma}_n \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(t_n) = \mathbf{q}_n$$

Nella forma (3.1.3) il problema legato alla determinazione dello stato aggiornato si traduce concettualmente nel ricercare, noto lo stato del materiale al tempo t , lo stato del materiale conseguente all'applicazione della storia di velocità di deformazione $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ per un tempo Δt .

Nei codici di calcolo agli elementi finiti, l'informazione trasferita come input, a livello di punto di Gauss, all'algoritmo per l'integrazione delle legame costitutivo, è costituita dallo stato iniziale e dalla variazione finita, $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, del tensore della deformazione. Assumendo l'ipotesi che la velocità di deformazione sia costante in $[t_n; t_{n+1}]$ la velocità di deformazione $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ nella (3.1.3) può essere ricavata, a partire da $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, dalla seguente espressione:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t} \quad (3.1.4)$$

Sostituendo la (3.1.4) nella (3.1.3) il sistema di equazioni si riscrive come:

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \mathbf{D}_{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t} \\ \frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}{\Delta t} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

$$\text{Con: in } t = t_n \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(t_n) = \boldsymbol{\sigma}_n \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(t_n) = \mathbf{q}_n$$

Ai fini dell'integrazione numerica è utile sostituire al tempo t , che assume valori compresi tra t_n e t_{n+1} , un parametro adimensionale che vari fra 0 e 1.

$$T := \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{t - t_n}{\Delta t} \quad (3.1.6)$$

Dalla definizione (3.1.6) è immediato verificare che T assume valori compresi fra 0 e 1 poiché $T(t_n)=0$ e $T(t_{n+1})=1$. La sostituzione di t con il parametro adimensionale T consente, a livello di punto di Gauss, di eseguire la procedura di integrazione sempre fra gli estremi 0 e 1, a prescindere dai valori correnti del parametro t_n e dall'ampiezza dell'intervallo Δt sul quale deve essere effettuata l'integrazione.

$$dT := \frac{dt}{\Delta t} \quad (3.1.7)$$

La definizione (3.1.7), sostituita nella (3.1.5) consente di porre il problema ai valori iniziali (3.1.5) nella forma seguente:

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dT} = \mathbf{D}_{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \frac{d\mathbf{q}}{dT} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

$$\text{Con: in } T = 0 \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_n \quad q = q(0) = q_n$$

La forma (3.1.5) richiede il trasferimento a livello di punto di Gauss delle tre informazioni: t_n , Δt e $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Nella (3.1.8) compaiono in modo conveniente solo t_n e $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. Il vantaggio della forma (3.1.8) deriva dal fatto che le ipotesi dalle quali essa discende fanno coincidere la velocità di deformazione con l'incremento di deformazione.

Per descrivere la procedura di integrazione è utile riscrivere il sistema (3.1.8) in una forma estremamente sintetica. A questo scopo si definisce il vettore \mathbf{y} e la funzione \mathbf{f} .

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{Bmatrix} \quad (3.1.9)$$

Nella (3.1.9), la variabile \mathbf{y} definisce lo stato del materiale. \mathbf{y} include sia le variabili esterne che interne. Nel caso specifico del modello SANISAND (Taiebat e Dafalias, (2008)) il vettore \mathbf{q} lista le componenti indipendenti del tensore $\boldsymbol{\alpha}$, la variabile p_0 , (variabili interne del modello) e l'indice dei vuoti e . La matrice di rigidità elastoplastica tangente e la matrice di incrudimento delle variabili interne concorrono a definire la legge di evoluzione dello stato del materiale sintetizzata da $\mathbf{f}(\mathbf{y})$.

Tenendo conto delle definizioni (3.1.9) il sistema (3.1.8) si modifica nella seguente equazione:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dT} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (3.1.10)$$

$$\text{Con: in } T = 0 \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_n$$

La forma (3.1.10) si presta a descrivere il problema della soluzione di un sistema di equazioni differenziali come un problema monodimensionale, descritto da una sola equazione. Ponendo $\frac{d\mathbf{y}}{dT} = \mathbf{y}'$ il sistema di equazione si pone nella forma:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (3.1.11)$$

$$\text{Con: in } T = 0 \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_n$$

In linea teorica la soluzione esatta della (3.1.11) in corrispondenza di $T = 1$, dovrebbe essere ricavata risolvendo:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \int_0^1 \mathbf{f}(\mathbf{y}) dT \quad (3.1.12)$$

Nella (3.1.12) \mathbf{y}_{n+1} rappresenta $\mathbf{y}(T + \Delta T)$. Avendo posto $\Delta T = 1$ $\mathbf{y}(T + \Delta T) = \mathbf{y}(1)$.

L'espressione analitica di $f(\mathbf{y})$ è nota dalle equazioni del legame costitutivo e descrive la legge di evoluzione della tangente alla funzione y , incognita, parametrizzata in funzione di T . La Fig. 3-1 mostra schematicamente $y(T)$ e la sua tangente in $T = 0$.

In linea teorica, come mostrato in Fig. 3-1, il valore esatto di y in $T = 1$ potrebbe essere calcolato, senza risolvere l'integrale (3.1.12), se si conoscesse il valore assunto dal rapporto incrementale indicato in Fig. 3-1 con $\Delta(y(T); \Delta T)$.

$$\Delta(y(T); \Delta T) = \frac{\mathbf{y}(T + \Delta T) - \mathbf{y}(T)}{\Delta T} \quad (3.1.13)$$

Nella (3.1.13) $\mathbf{y}(T + \Delta T)$ indica il valore assunto dalla funzione incognita alla fine dell'intervallo di integrazione $\Delta T = 1$. La soluzione esatta della (3.1.11), noto il valore esatto della rigidità secante, rappresentato dal rapporto incrementale $\Delta(y(T); \Delta T)$, potrebbe essere ricavato come:

$$y(T + \Delta T) := y(T) + \Delta T \Delta(\mathbf{y}; dT, f) \quad (3.1.14)$$

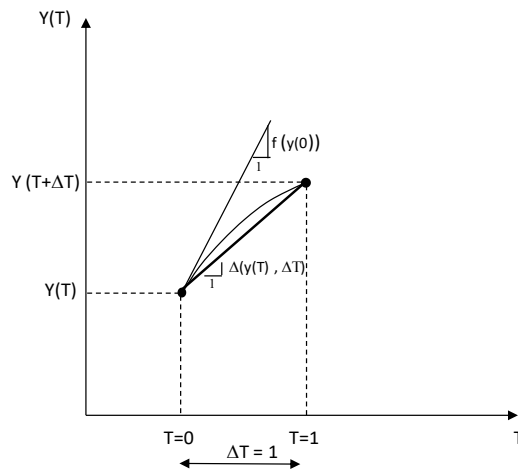


Fig. 3-1 Differenza fra rigidezza tangente calcolata in $T=0$ e rapporto incrementale esatto.

Gli **schemi di integrazione espliciti** forniscono un'approssimazione della soluzione esatta sulla base del valore iniziale della funzione (per ora immaginato esatto) e di una espressione approssimata, indicata con $\phi(y; dT, f)$ della rigidezza secante il cui valore esatto è rappresentato dal rapporto incrementale $\Delta(y(T); \Delta T)$.

La soluzione approssimata viene ottenuta come:

$$\hat{y}(T + \Delta T) := y(T) + \Delta T \phi(y; \Delta T, f) \quad (3.1.15)$$

I metodi di integrazione espliciti si distinguono in base all'espressione fornita per $\phi(y(T), \Delta T, f(y(T)))$. Essi non richiedono necessariamente una procedura iterativa per il calcolo dello stato aggiornato. La soluzione approssimata viene ottenuta a partire dal valore iniziale e dal calcolo della matrice di rigidezza secante.

L'errore di integrazione locale, indicato con $\tau(y; \Delta T)$ definisce la differenza fra il rapporto incrementale (la rigidezza secante esatta) e il valore assunto dalla espressione approssimata della rigidezza secante prevista dallo schema.

$$\tau(y; \Delta T) := \Delta(y(T); \Delta T) - \phi(y(T); \Delta T, f(y(T))) \quad (3.1.16)$$

L'errore locale (3.1.16) dipende da ΔT e della non linearità della funzione stessa. L'ordine di un metodo di integrazione è definito dall'esponente più basso con il quale ΔT compare nell'espressione in serie di Taylor dell'errore di integrazione locale.

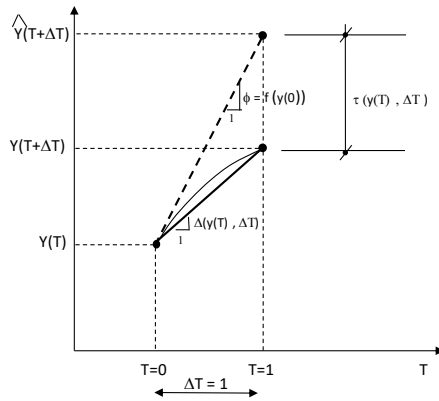


Fig. 3-2 Differenza fra la rigidità secante assunta dal metodo di Eulero esplicito al primo ordine e il rapporto incrementale esatto. Differenza conseguente τ fra la soluzione approssimata e la soluzione esatta.

La Fig. 3-2 mostra una esemplificazione dell'errore locale per il metodo di Eulero al primo ordine. Tale metodo assume la rigidità secante uguale alla rigidità tangente calcolata nel primo punto dell'intervallo di integrazione:

$$\phi(y(T)) := f(y(T)) \quad (3.1.17)$$

Poiché la tangente calcolata nel punto iniziale non coincide, eccetto il caso di y lineare, con Δ , la soluzione approssimata calcolata con il metodo di Eulero al primo ordine, con la (3.1.15), differisce da quella esatta (Fig. 3-2).

Il valore esatto della funzione y in $(T + \Delta T)$, nota la funzione $y' = f(y)$ e il valore di y in T , può essere ottenuto, in linea teorica, considerando infiniti termini nello sviluppo in serie di Taylor di y :

$$y(T + \Delta T) = y(T) + \Delta T y'(T) + \frac{\Delta T^2}{2!} y''(T) + \frac{\Delta T^3}{3!} y'''(T) + \dots + \frac{\Delta T^q}{q!} y^{(q)}(T) \quad (3.1.18)$$

Nella (3.1.18):

$$y'(T) = \frac{d}{dT} y(T) = f(y(T)) \quad (3.1.19)$$

$$y''(T) = \frac{d}{dT} f(y(T)) = \frac{d}{dy} f(y(T)) \frac{d}{dT} y(T) = f_y(y(T)) y' = f_y(y(T)) f(y(T)) \quad (3.1.20)$$

$$y'''(x) = f_y(y) y'' + f_{yy}(y) [f(y)] \quad (3.1.21)$$

La (3.1.18) consente di ricavare lo sviluppo in serie del rapporto incrementale $\Delta(y; \Delta T)$ che risulta :

$$\Delta(y; \Delta T) = f(y) + \frac{\Delta T}{2!} [f_y(y)f(y)] + \frac{\Delta T^2}{3!} [f_y(y)y'' + f_{yy}(y)[f(y)]^2] + \dots + O(\Delta T^p) \quad (3.1.22)$$

Sostituendo la (3.1.22) nella (3.1.16) si ricava la seguente espressione dell'errore locale:

$$\tau(y; \Delta T) = \frac{\Delta T}{2!} [f_y(y)f(y)] + \frac{\Delta T^2}{3!} [f_y(y)y'' + f_{yy}(y)[f(y)]^2] + \dots + O(\Delta T^p). \quad (3.1.23)$$

Nel caso del metodo di Eulero esplicito al primo ordine la (3.1.23) assume la seguente espressione:

$$\tau(y; \Delta T) = \frac{\Delta T}{2!} [f_y(y)f(y)] + \frac{\Delta T^2}{3!} [f_y(y)y'' + f_{yy}(y)[f(y)]^2] + \dots + O(\Delta T^p). \quad (3.1.24)$$

La (3.1.24) è ottenuta sostituendo nella definizione dell'errore locale (3.1.16) la (3.1.22) e l'espressione (3.1.17) della rigidità secante prevista dal metodo. È immediato rilevare dall'espressione che ΔT compare con esponente minimo 1.

Metodi di integrazione di ordine superiore consentono di aumentare la velocità con la quale la soluzione approssimata, al ridursi di ΔT , tende a quella esatta. Nel caso in cui il valore iniziale della funzione incognita sia esatto e l'intervallo di integrazione non sia suddiviso in sotto-step, i metodi di ordine superiore consentono di ridurre l'errore locale. L'espressione dell'errore (3.1.23) suggerisce che, in linea teorica, per aumentare l'ordine del metodo sarebbe sufficiente assumere una espressione approssimata della rigidità secante nella quale compaia la derivata prima $y' = f(y)$ ad esempio:

$$\phi(y; \Delta T) := f(y) + \frac{\Delta T}{2!} [f_y(y)f(y)] \quad (3.1.25)$$

La (3.1.25) fa elidere il termine proporzionale a ΔT nella (3.1.23). Lo svantaggio della (3.1.25) consiste nel fatto di richiedere la derivata della funzione $y' = f(y)$. In sostanza la (3.1.25) richiederebbe anche le derivate delle equazioni costitutive.

I **metodi di Runge Kutta** prevedono per la rigidità secante una espressione costituita dalla combinazione lineare di valori assunti dalla funzione $y'=f(y)$ (tangente) in più punti dell'intervallo di integrazione del tipo:

$$\phi(y; \Delta T) := a_1 f(y) + a_2 f(y + p_2 \Delta T f(y)) \quad (3.1.26)$$

Dalla (3.1.26) si può notare come i metodi di Runge Kutta consentano di ottenere soluzioni di ordine superiore senza richiede il calcolo delle derivate seconde di y' .

È possibile verificare che i metodi di Runge Kutta risultano del secondo ordine quando i coefficienti $a_1 a_2 p_2$ rispettano le seguenti condizioni:

$$(a_1 + a_2) = 1 \quad (a_2 p_2) = \frac{1}{2} \quad (3.1.27)$$

Sostituendo al termine $f(y + p_2 \Delta T f(y))$ il suo sviluppo in serie di Taylor, la (3.1.26) può essere riscritta nella seguente forma:

$$\phi(y; \Delta T) := (a_1 + a_2) f(y) + a_2 \Delta T [p_2 f_y(y) f(y)] + o(\Delta T^2) \quad (3.1.28)$$

Considerando le (3.1.27) l'errore locale risulta essere:

$$\tau(y; \Delta T) = \frac{\Delta T^2}{3!} [f_{yy}(y) y'' + f_{yy}(y) [f(y)]^2] + \dots + O(\Delta T^p) \quad (3.1.29)$$

Dalla (3.1.29), poiché ΔT compare elevato al quadrato si verifica che il metodo è del secondo ordine per qualunque scelta dei coefficienti $a_1 a_2 p_2$, rispettosa delle (3.1.27).

- Il metodo di Runge Kutta del secondo ordine (Fig. 3-3) ad esempio assume come coefficienti i seguenti valori:

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad p_2 = 1$$

La matrice di rigidità secante risulta quindi espressa dalla seguente equazione:

$$\phi(y; \Delta T) := \frac{1}{2} f(y) + \frac{1}{2} f(y + \Delta T f(y)) \quad (3.1.30)$$

- Il metodo di Eulero modificato del secondo ordine (Fig. 3-4) assume per i coefficienti che compaiono nella espressione della rigidezza secante $\phi(y;h):=c_1f(y)+c_2f(y+\beta_{21}\Delta Tf(y))$ (per i quali si mantiene la notazione tipica del metodo) i seguenti valori:

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 1 \quad \beta_{21} = \frac{1}{2}$$

La matrice di rigidezza secante risulta quindi espressa dalla seguente equazione:

$$\phi(y;\Delta T) = f\left(y + \frac{1}{2}\Delta Tf(y)\right) \quad (3.1.31)$$

Le considerazioni precedenti, limitate all'integrazione su un singolo intervallo di tempo, e basate sull'assunzione che lo stato di partenza sia esatto, mettono già in evidenza che impiegando un metodo esplicito si commette un errore e che questo errore tende a zero al ridursi del ΔT tanto più rapidamente quanto è elevato l'ordine del metodo. L'errore sviluppato su un singolo intervallo di tempo tende a cumularsi al progredire del calcolo. Per controllare che non diventi eccessivo si può introdurre una procedura che prevede una eventuale suddivisione del ΔT a fronte della valutazione di un indicatore dello scostamento dalla soluzione esatta. Nei metodi di Fehlberg, un controllo dell'errore viene effettuato confrontando due soluzioni ottenute con lo stesso ΔT ma con diversi ordini di approssimazione. L'uso del tempo adimensionale si rivela utile per impostare una strategia che consenta di operare il controllo dell'errore.

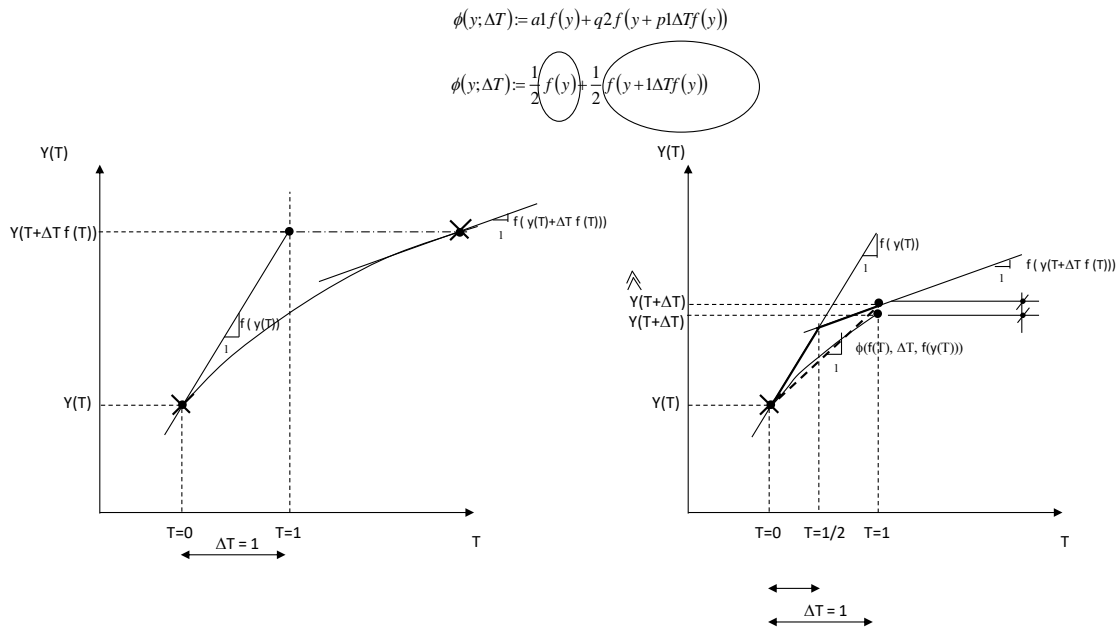


Fig. 3-3 Illustrazione della procedura che porta al calcolo della matrice secante in $T=0$ per il metodo di RK2 del secondo ordine. I punti indicano i valori di y nei quali viene calcolata la derivata prima $f(y) = y'$. Il secondo punto è individuato moltiplicando la tangente calcolata in $T=0$ per ΔT .

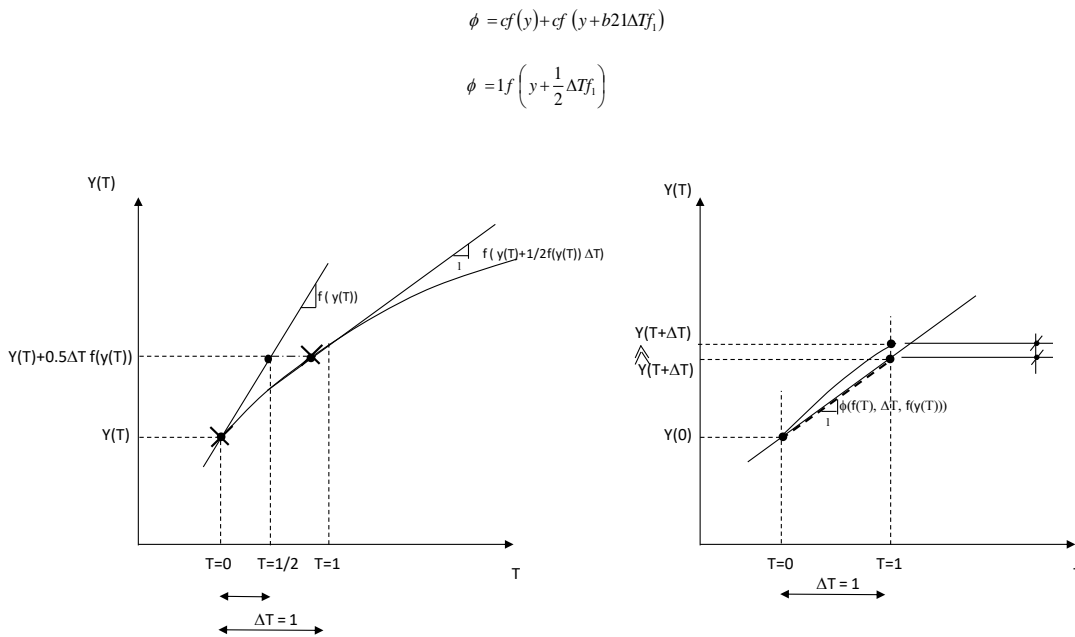


Fig. 3-4 Illustrazione della procedura che porta al calcolo della matrice secante in $T=0$ per il metodo di Eulero modificato (del secondo ordine) I punti indicano i valori di y nei quali viene calcolata la derivata prima $f(y) = y'$. Il secondo punto è individuato moltiplicando la tangente calcolata in $T=0$ per ΔT .

3.2. L'algoritmo di RKF-23 a passo adattativo con controllo dell'errore

3.2.1. La procedura di integrazione delle equazioni del legame

L'algoritmo esplicito adattativo di Runge Kutta Fehlberg di ordine tre, RKF-23, prevede il calcolo e il confronto di due soluzioni di ordine diverso (secondo e terzo) ottenute sullo stesso passo di calcolo. Sulla base del metodo di Fehlberg, il confronto fornisce una stima dell'errore locale commesso nell'integrazione sul singolo passo di calcolo e consente di valutarne l'adeguata ampiezza.

Il modello costitutivo è stato implementato nel codice di calcolo agli elementi finiti Abaqus Standard 6.10 attraverso una User MATerial subroutine scritta in linguaggio Fortran 77, come richiesto dal programma. L'impianto della subroutine scritta per integrare le equazioni costitutive è basato sulla procedura delineata da Sloan et al., (2001). Per l'integrazione elastoplastica è stato utilizzato l'algoritmo RKF-23, dato il suo utilizzo da Miriano, (2011) e Martinelli, (2012) per l'integrazione di precedenti versioni del modello SANISAND.

Nel paragrafo precedente si è assunto che l'integrazione venisse eseguita sul singolo passo ΔT di ampiezza unitaria e si è mostrato che i metodi di integrazione espliciti, a prescindere dall'ordine, comportano un errore nella valutazione della soluzione. Alcuni algoritmi, per evitare che l'accumulo dell'errore nel corso del processo di integrazione sui successivi passi di calcolo possa compromettere l'attendibilità della soluzione, includono una procedura che prevede la possibilità di modificare l'ampiezza del ΔT a fronte di un controllo sullo scostamento dalla soluzione esatta. Questi metodi consentono la suddivisione dell'intervallo di integrazione $\Delta T = 1$ in sotto step di ampiezza dT_k soggetta a continua verifica.

In questo paragrafo al ΔT si sostituisce un dT_k tale da rispettare la condizione:

$$\sum_{k=1}^{n_s} dT_k = 1 \quad (3.2.1)$$

Nella (3.2.1) n_s indica il numero degli eventuali sotto-step o sotto incrementi del ΔT ed esprime un vincolo nella scelta dei dT_k .

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + dT_k \phi_{Ij}(\mathbf{y}_k; dT_k) \quad (3.2.2)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + dT_k \phi_{IIj}(\mathbf{y}_k; dT_k) \quad (3.2.3)$$

Nella (3.2.2) $\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$ e $\phi_{Ij}(\mathbf{y}_k; dT_k)$ indicano rispettivamente la soluzione e la matrice di rigidità secante relative al metodo di ordine due, e nella (3.2.3) $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ e $\phi_{IIj}(\mathbf{y}_k; dT_k)$ indicano rispettivamente la soluzione e la matrice di rigidità secante ottenuta con lo schema di ordine tre.

$$\phi_I(\mathbf{y}_k; dT_k) := \sum_{K=1}^2 c_K f_K(\mathbf{y}_k; dT_k) \quad (3.2.4)$$

$$\phi_{II}(\mathbf{y}_k; dT_k) := \sum_{K=1}^3 \hat{c}_K f_K(\mathbf{y}_k; dT_k) \quad (3.2.5)$$

Con:

$$f_K(\mathbf{y}_k; dT_k) = f\left(\mathbf{y}_k + dT_k \sum_{l=1}^{K-1} \beta_{Kl} \mathbf{f}_l\right) \quad (3.2.6)$$

La matrice di rigidità secante per lo schema di ordine due è quella prevista dallo schema di Eulero modificato, già mostrato nel precedente paragrafo. I coefficienti nelle (3.2.4) e (3.2.6) in questo caso sono $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

Lo schema di ordine 2 prevede il calcolo della matrice di rigidità tangente in due punti dell'intervallo di integrazione dT_k . I valori della rigidità tangente sono:

$f_1 = f_1(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}_k)$ e $f_2 = f\left(\mathbf{y}_k + \frac{1}{2}dT_k \mathbf{f}_1\right)$. La soluzione di ordine 2, esplicitando i termini si scrive:

$$\bar{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + dT_k f\left(\mathbf{y}_k + \frac{1}{2}dT_k \mathbf{f}_1\right) \quad (3.2.7)$$

La matrice di rigidità secante per la soluzione di ordine tre è quella prevista dallo schema di Runge Kutta 3 che assume coefficienti $\beta_{21} = \frac{1}{2}$, $\beta_{31} = -1$, $\beta_{32} = 2$, $\hat{c}_1 = \frac{1}{6}$,

$\hat{c}_2 = \frac{2}{3}$, $\hat{c}_3 = \frac{1}{6}$. La determinazione della soluzione di ordine tre richiede un terzo calcolo della matrice di rigidità tangente $f_3 = f(\mathbf{y}_k - dT_k \mathbf{f}_1 + 2dT_k \mathbf{f}_2)$ in un punto comunque noto, perché determinato sulla base delle determinazioni precedenti. Sostituendo nella (3.2.5):

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{1}{6} dT_k f(\mathbf{y}_k) + \frac{2}{3} dT_k f\left(\mathbf{y}_k + \frac{1}{2} dT_k \mathbf{f}_1\right) + \frac{1}{6} dT_k f(\mathbf{y}_k - dT_k \mathbf{f}_1 + 2dT_k \mathbf{f}_2) \quad (3.2.8)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{1}{6} dT_k \mathbf{f}_1 + \frac{2}{3} dT_k \mathbf{f}_2 + \frac{1}{6} dT_k \mathbf{f}_3 \quad (3.2.9)$$

La procedura impostata sul metodo di Fehlberg per l'eventuale modifica dell'ampiezza del sotto step prevede: l'inizializzazione a uno del contatore dei sub step ($k = 1$), l'inizializzazione dello stato $\mathbf{y}_k|_{k=1} = \mathbf{y}_n$, l'inizializzazione del tempo $T = 0$ e una prima ipotesi per dT_k . Può essere conveniente assumere:

$$dT_k = DT = 1 \quad (3.2.10)$$

Calcolate $\bar{\mathbf{y}}_{k+1}$ (3.2.2) e $\hat{\mathbf{y}}_{k+1}$ (3.2.3), si valuta la differenza fra le due soluzioni:

$$R_{k+1} = \|\bar{\mathbf{y}}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}\| \quad (3.2.11)$$

La (3.2.11) viene impiegata nel calcolo dell'errore:

$$ERR_{k+1} = \frac{R_{k+1}}{\|\mathbf{y}_{k+1}\|} \quad (3.2.12)$$

L'errore viene quindi confrontato con la tolleranza prefissata per verificare se:

$$ERR_{k+1} \leq TOL \quad (3.2.13)$$

- Se la (3.2.13) è verificata, allora l'aggiornamento del vettore \mathbf{y} è accettato e delle due soluzioni calcolate si impiega quella di ordine superiore (3.2.3):

$$\mathbf{y}_{k+1} \rightarrow \hat{\mathbf{y}}_{k+1}$$

Viene calcolato il dT_{k+1} da usare nello step successivo come:

$$dT_{k+1} = \min \left\{ 0.9 dT_k \sqrt[3]{\frac{TOL}{ERR_{k+1}}}; 4 dT_k \right\}$$

Qualora la soluzione \hat{y}_{k+1} non rispetti la condizione di consistenza, a questo livello, viene operata la procedura "di correzione del *drift*" (Sloan et al. (2001)).

- Se la (3.2.13) non è soddisfatta l'aggiornamento dello stato non è accettato. Viene quindi ricalcolato il dT_k come:

$$dT_k = \max \left\{ 0.9 dT_k \sqrt[3]{\frac{TOL}{ERR_{k+1}}}; \frac{1}{4} dT_k \right\}$$

Il dT_k così calcolato è impiegato per ripetere il calcolo delle (3.2.2) (3.2.3).

3.2.2. La Matrice di rigidità tangente consistente

La procedura descritta precedentemente viene effettuata a livello di punto di Gauss ed è finalizzata ad integrare le equazioni del legame costitutivo (per fornire lo stato aggiornato (3.1.9)) sulla base dello stato iniziale \mathbf{y}_n e del tensore incremento di deformazione finita. Lo stato aggiornato è espresso come:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \\ \mathbf{a}_{n+1} &= \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{a}_{n+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Oltre all'aggiornamento del vettore \mathbf{y} , la sub-routine deve fornire anche la matrice di rigidità tangente consistente che è impiegata dai codici di calcolo agli elementi finiti nel calcolo della matrice di rigidità di elemento. La matrice di rigidità tangente consistente entra quindi anche nel calcolo della matrice di rigidità globale e incide per questo sulla convergenza della procedura iterativa finalizzata a risolvere il sistema di equazioni di equilibrio linearizzate, scritte in termini di spostamenti nodali, che caratterizza il metodo agli elementi finiti (*de Souza Neto* (2008)). Indicando con k l'iterazione della procedura di soluzione delle equazioni di equilibrio, la matrice di rigidità tangente consistente è definita dalla seguente espressione:

$$\tilde{\mathbf{D}}^{(k)} \equiv \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \right)^{(k)} \quad (3.2.15)$$

Come mostrato nel paragrafo precedente, l'integrazione delle equazioni costitutive è stata effettuata per via numerica numericamente impiegando un algoritmo di punto di

Gauss esplicito. Per gli algoritmi espliciti la matrice tangente consistente non può essere ricavata analiticamente ma viene calcolata in modo approssimato, sulla base del concetto di derivata direzionale di *Frechet*. Indicando con $\boldsymbol{\eta}$ un tensore unitario nello spazio delle deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, la variazione della soluzione $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ nella direzione $\boldsymbol{\eta}$, prodotta da una perturbazione infinitesima θ del modulo di $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ in tale direzione può essere espressa con la seguente:

$$D\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\eta}) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left\{ \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \theta\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \right] \right\} \quad (3.2.16)$$

Nella precedente, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \theta\boldsymbol{\eta})$ e $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})$ rappresentano lo stato tensionale aggiornato in $(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \theta\boldsymbol{\eta})$ e in $(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})$. Scegliendo le sei direzioni dello spazio a sei dimensioni di seguito elencate:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_1 &= \{100000\}^T & \boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_2 &= \{010000\}^T & \boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_3 &= \{001000\}^T \\ \boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_4 &= \{000100\}^T & \boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_5 &= \{000010\}^T & \boldsymbol{\eta} = \mathbf{e}_6 &= \{000001\}^T \end{aligned}$$

i vettori colonna della matrice $\tilde{\mathbf{D}}^{(k)}$ possono essere ricavati determinando le derivate rispetto alle sei direzioni dello spazio. Con riferimento alla direzione 1, ad esempio:

$$\tilde{\mathbf{D}}_1 = D\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\mathbf{e}_1) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta} \left\{ \left[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \theta\mathbf{e}_1) - \boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) \right] \right\} \quad (3.2.17)$$

Dalla espressione precedente si deduce che la derivata rispetto alla direzione 1 può essere calcolata dalle soluzioni $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})$ e $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \theta\mathbf{e}_1)$ entrambe calcolate con l'algoritmo impiegato a livello di punto di Gauss. Per calcolare le sei colonne della matrice $\tilde{\mathbf{D}}^{(k)}$, l'algoritmo RKF-23 viene quindi interrogato una volta per calcolare la soluzione $\mathbf{y}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})$ e quindi $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})$ e sei volte per calcolare le soluzioni perturbate $\mathbf{y}_{n+1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} + \theta\mathbf{e}_{n+1})$. Il calcolo della matrice tangente consistente è necessario ad evitare un eccessivo deterioramento del tasso di convergenza quadratico che caratterizza le soluzioni determinate con il metodo di Newton Raphson che è spesso impiegato proprio nei codici di calcolo agli elementi finiti per determinare la soluzione del sistema di equazioni di equilibrio. Nel presente lavoro la perturbazione θ è stata definita seguendo le indicazioni fornite in Fellin e Ostermann (2002).

3.3. Verifica dell'implementazione

Per verificare l'implementazione sono stati eseguiti controlli alla scala del singolo elemento finito. Sono state effettuate simulazioni (in Abaqus con un singolo elemento finito e con il driver costitutivo scritto da Niemunis (2007), nella versione aggiornata al 2010) delle stesse prove di laboratorio riprodotte dagli autori del modello e pubblicate nell'articolo di riferimento (Taiebat e Dafalias (2008)). Gli autori hanno simulato le prove di laboratorio con un driver costitutivo da loro implementato (basato sull'algoritmo di Bardet e Choucair (1989)) e hanno integrato le equazioni differenziali del legame con il metodo di Eulero esplicito al primo ordine. Questo algoritmo richiede passi di integrazione estremamente piccoli affinché non si producano errori eccessivi. Nelle Fig. 3-5, Fig. 3-6 e Fig. 3-7 sono riportati anche gli andamenti ottenuti con una implementazione basata su un algoritmo implicito (sviluppata da Losacco N.). Le Fig. 3-5, Fig. 3-6, Fig. 3-7 sono riferite ai risultati ottenuti con la calibrazione proposta da Taiebat e Dafalias per la Toyoura sand. Dalle Fig. 3-5, Fig. 3-6 e Fig. 3-7 si nota un ottimo accordo sia tra le simulazioni delle prove triassiali (drenate e non drenate) che delle prove di compressione isotropa.

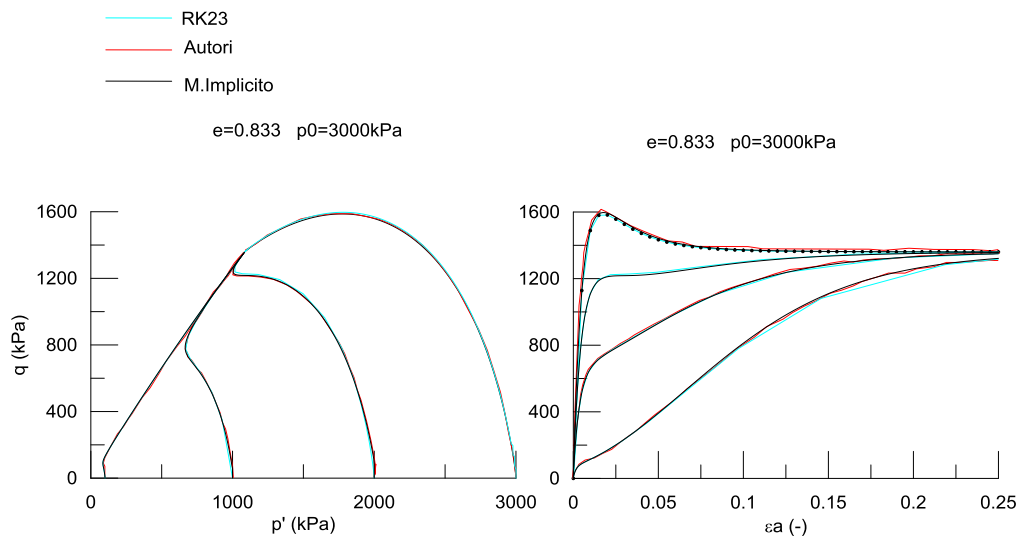


Fig. 3-5 Confronto fra i risultati delle simulazioni di prove triassiali consolidate non drenate ottenuti con implementazioni basate su diversi algoritmi di integrazione delle equazioni del legame costitutivo.

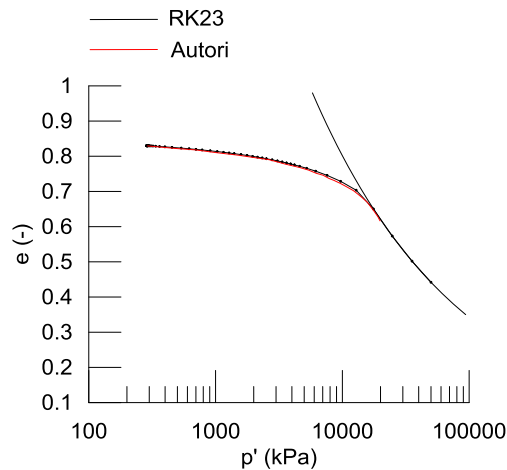


Fig. 3-6 Confronto fra i risultati delle simulazioni di prove di compressione isotropa eseguite con diversi algoritmi di integrazione delle equazioni del legame costitutivo ($p_{0mi}=p'_{ini}$).

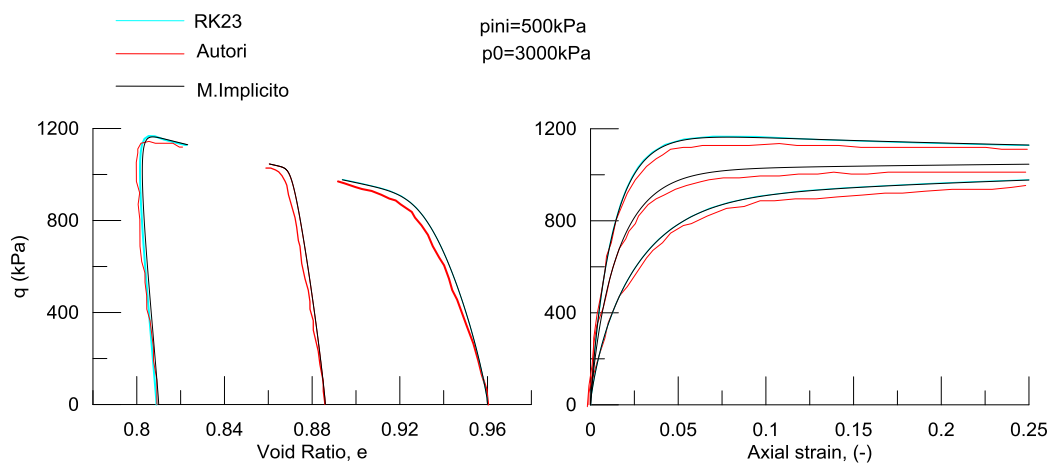


Fig. 3-7 Confronto fra i risultati delle simulazioni di prove triassiali drenate eseguite con diversi algoritmi di integrazione delle equazioni del legame costitutivo.

Sono state inoltre prodotte delle mappe di iso-errore. Questo tipo di elaborati consente di valutare come varia l'accuratezza della soluzione numerica al variare del tipo e dell'intensità di una perturbazione dello stato iniziale. Si è scelto di realizzare mappe nelle quali la perturbazione consistesse nell'applicazione di stati di deformazione assial-simmetrici. Nella Fig. 3-8 sono rappresentati i due stati iniziali scelti, entrambi sono caratterizzati da ψ positivo, uno giace in prossimità della parte lineare e uno sull'estremità della superficie di plasticizzazione.

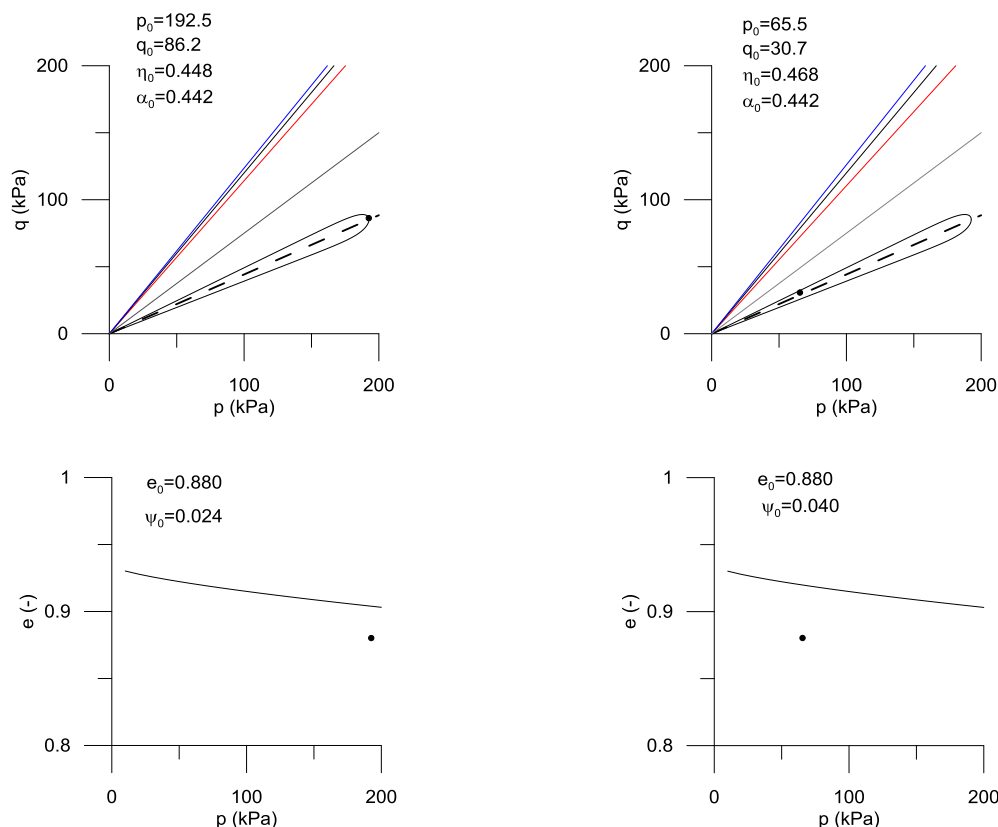


Fig. 3-8 Riepilogo degli stati iniziali a partire dai quali sono stati imposti i percorsi di carico monotoni e di varia ampiezza. (a) Stato iniziale prossimo all'estremità della superficie di plasticizzazione. (b) Stato iniziale prossimo alla parte lineare della superficie di plasticizzazione.

Il modulo della perturbazione applicata in un solo step è indicato con R :

$$R = \sqrt{(\varepsilon_a)^2 + 2(\varepsilon_r)^2} \quad (3.1.1)$$

L'angolo α è definito dalla seguente espressione:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\varepsilon_a}{\sqrt{2}\varepsilon_r}\right) \quad (3.1.2)$$

nelle (3.1.1) e (3.1.1) ε_a ed ε_r rappresentano rispettivamente la componente assiale e radiale della deformazione imposta (Fig. 3-9).

L'ampiezza della risultante R (dell'incremento di deformazione applicato) è stata assunta variabile fra 10^{-5} e 10^{-3} , per questo si è scelto di esprimerla attraverso $\log(R)$. Sono state eseguite prove per intensità della perturbazione diverse, con $\log(\Delta R) = -0.2$. Per ogni valore di R sono state variate le proporzioni tra la componente assiale e radiale della deformazione, nello specifico si è scelto $\Delta\alpha = 5^\circ$.

Indicando con y la stima delle generica quantità incognita (nello specifico caratterizzata da $\dot{\sigma}$, $\dot{\alpha}$, \dot{p}_0), l'errore nella valutazione della singola grandezza incognita è stato definito dalla seguente espressione:

$$ERR_n = \frac{|y - y^*|}{|y^*|} \quad (3.1.3)$$

nella (3.1.3) y^* indica genericamente la soluzione esatta, che è stata assunta uguale a quella calcolata impostando la tolleranza dell'algoritmo di Runge Kutta a $TOL = 10^{-8}$. La soluzione, y , è stata ottenuta impostando $TOL = 10^{-3}$ e $TOL = 10^{-5}$.

L'errore rappresentato in Fig. 3-10 è definito dalla seguente espressione:

$$ERR = ERR_{\dot{\alpha}} + ERR_{\dot{\sigma}} + ERR_{p_0} \quad (3.1.4)$$

Dalla (3.1.4) ERR è ottenuto come somma degli errori commessi nella stima delle singole incognite. Poiché l'errore, ERR , è generalmente molto basso, per agevolare la rappresentazione, in Fig. 3-10 è stato rappresentato il logaritmo del suo modulo.

La Fig. 3-9 mostra gli involuipi degli stati tensionali conseguenti all'applicazione dei diversi incrementi di deformazione a partire dalle due condizioni iniziali mostrate nella Fig. 3-8. La figura permette di apprezzare l'anisotropia della rigidezza prevista dal modello. A seguito dell'applicazione delle perturbazioni di intensità $R = 10^{-5}$, dall'ingrandimento della superficie di plasticizzazione nell'intorno dello stato iniziale si può notare che, nel caso dello stato iniziale collocato in prossimità della parte lineare della superficie stessa, la risposta è completamente elastica Fig. 3-9 (d).

Come evidenziato nella Fig. 3-10, rendendo più stringente la tolleranza prevista nell'algoritmo RK23 diminuisce lo scarto rispetto alla soluzione esatta. In generale, a parità di tipo di perturbazione, l'errore cresce al crescere dell'intensità.

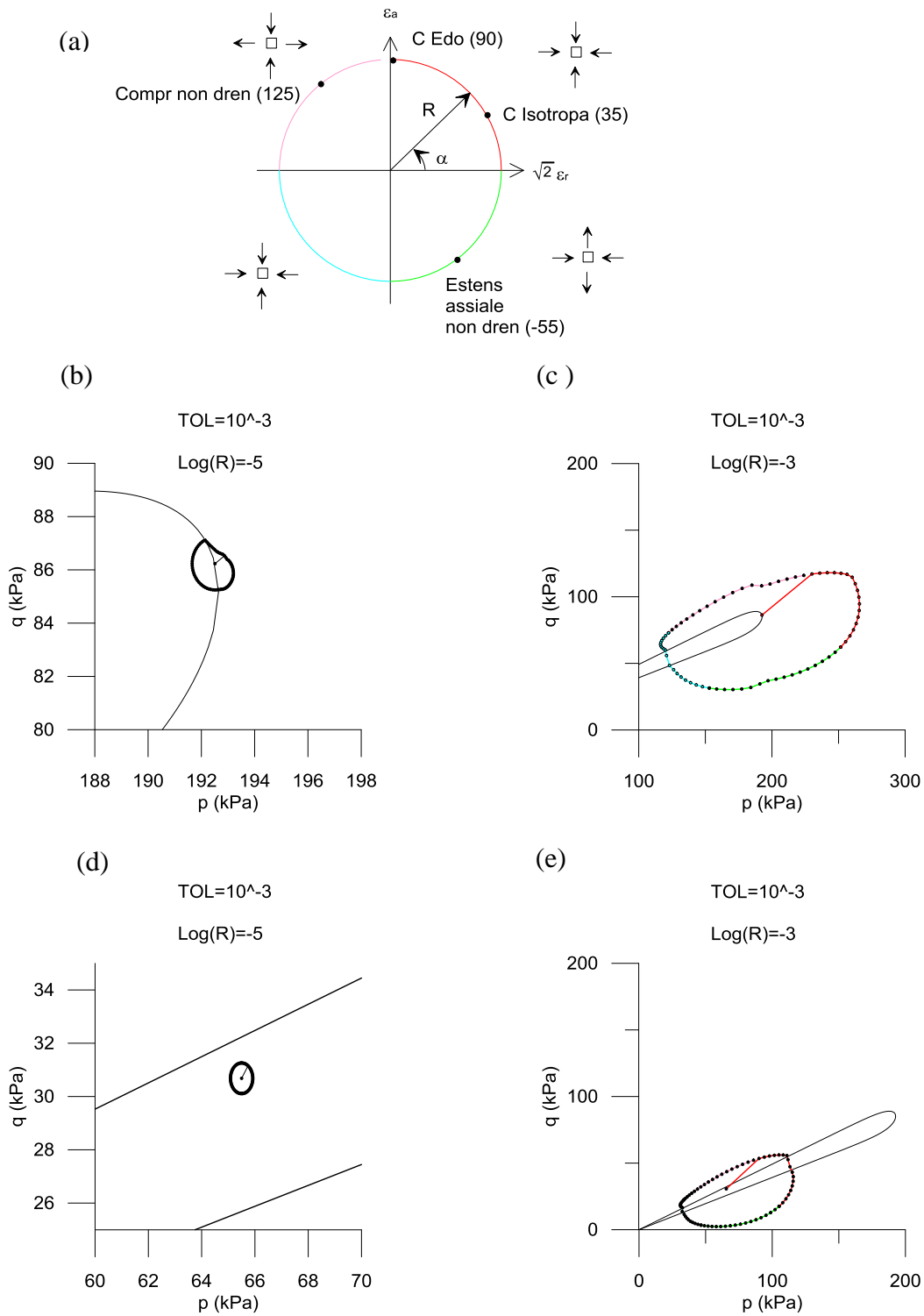


Fig. 3-9 (a) Esempificazione del tipo di stati di deformazione applicati. Involuppi degli stati tensionali ottenuti come output, impostando la tolleranza dell'algoritmo RK23 al valore 10^{-3} , sia nel caso di una perturbazione di modulo $R=10^{-5}$ che di intensità $R=10^{-3}$ rispettivamente. (b) (c) per lo stato iniziale posizionato sul cap. (d), (e) per lo stato iniziale posizionato sulla parte lineare.

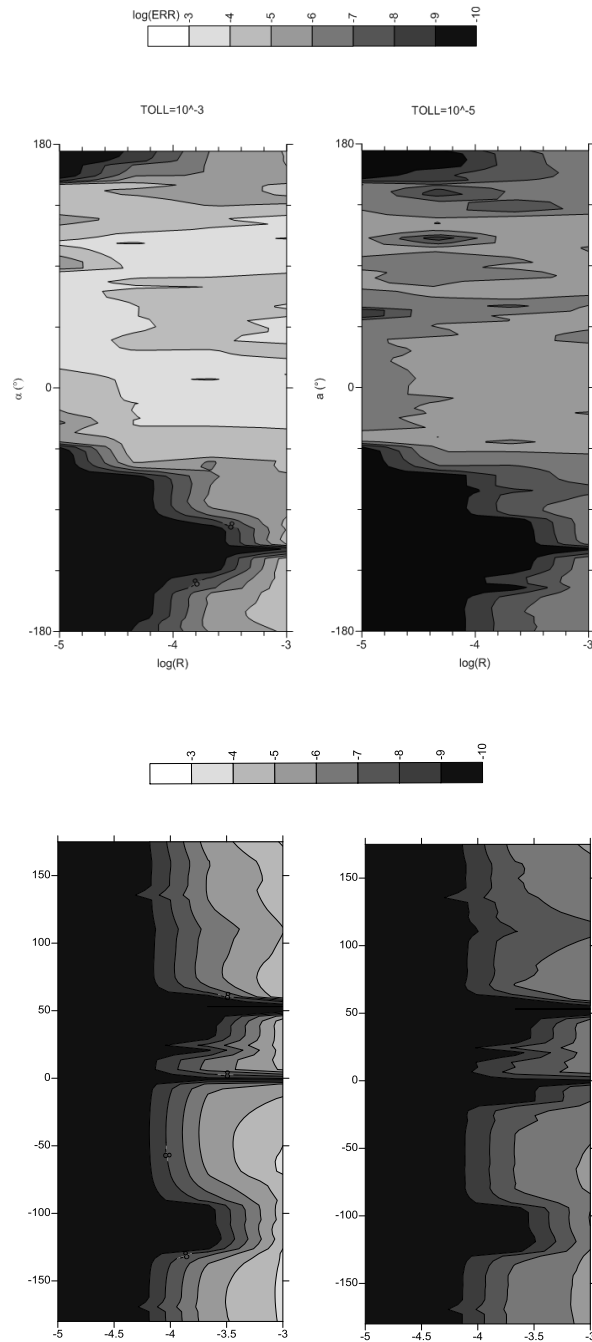


Fig. 3-10 Mappe di isoerrore: (Figura in alto) risultati ottenuti nel caso di stato iniziale posizionato sul cap. (Figura in basso) risultati ottenuti nel caso di stato iniziale posizionato sulla parte lineare.

Per verificare che la *subroutine* fornisca soluzioni corrette anche in condizioni di sforzo e deformazione non assial-simmetriche sono state eseguite alcune simulazioni numeriche di prove biassiali, anche dette prove di taglio piano. Le prove sono state effettuate in Abaqus impiegando un modello costituito da un singolo elemento finito. Nella Fig. 3-11b. sono schematizzate le condizioni al contorno della prova. L'elemento è vincolato a deformarsi nel piano 1-3. Le prove sono eseguite, a controllo misto, mantenendo costante la tensione totale applicata sulla faccia 5 e imponendo una deformazione controllata alla faccia 1. I risultati sono ottenuti impiegando la calibrazione del modello per la Toyoura sand (Taiebat e Dafalias (2008)).

Le Fig. 3-12 e Fig. 3-13 mostrano i risultati delle simulazioni eseguite in condizioni drenate e non drenate. La simulazione delle due condizioni di drenaggio è stata effettuata eseguendo, in Abaqus, prove statiche sull'elemento non poroso (C3D8) e prove di consolidazione impedendo il flusso attraverso le facce dell'elemento considerato poroso (C3D8P). Le condizioni iniziali delle prove sono riportate nelle Fig. 3-12 e Fig. 3-13.

Allo scopo di effettuare una verifica qualitativa dei risultati ottenuti, non avendo a disposizione risultati di simulazioni di prove piane eseguite con il modello SANISAND, si è ricercato un confronto con i risultati di prove di taglio piano effettuate con un modello costitutivo analogo a quello SANISAND. Nelle Fig. 3-14 e Fig. 3-15 sono mostrate le previsioni del modello costitutivo Severn Trent, calibrato per la Hostun sand, (Gajo e Wood (1999)) nella simulazione di prove di taglio piano eseguite, sia in condizioni drenate che non drenate, su un provino caratterizzato da uno stato iniziale sciolto (ψ positivo). Le Fig. 3-14 e Fig. 3-15 mostrano l'effetto che la forma assunta per le superfici Bounding e Dilatancy, a parità di forma della superficie di plasticizzazione (Drucker), produce sulle previsioni del modello.

Per il confronto si prendono a riferimento i risultati relativi al caso, che presenta maggiore analogia con le assunzioni presenti nel modello di Taiebat e Dafalias (2008), di funzione di Argyris combinata alla funzione di Drucker. La condizione iniziale della prova drenata (Fig. 3-14) è stata scelta in modo che lo stato fosse caratterizzato dallo stesso valore iniziale di $\psi = 0.053$ della prova effettuata da Gajo e Wood (1999) (Fig. 3-14). Evidentemente un confronto diretto non è possibile, a causa della differenza fra i

modelli costitutivi e il materiale studiato, ma nel caso della prova drenata, nel piano deviatorico normalizzato si riscontra un percorso tensionale efficace analogo a quello ottenuto da Gajo e Wood (1999). Nella simulazione eseguita con il modello di Taiebat e Dafalias (2008) è stato estremizzato il livello di deformazione finale della prova (evidentemente irrealistico) solo allo scopo di verificare la capacità del modello di prevedere la convergenza verso la condizione di stato critico. In questo contesto non interessa valutare l'adeguatezza della calibrazione (effettuata dagli autori) ma solo la correttezza dell'integrazione numerica delle equazioni. Il percorso tensionale ottenuto dalla simulazione della prova biassiale drenata sembra però mostrare che la calibrazione proposta dagli autori per la Toyora *sand* non consenta di riprodurre in modo molto soddisfacente la risposta drenata della sabbia. I confronti fra i risultati numerici e sperimentali di prove triassiali riportati nel lavoro degli autori (Taiebat e Dafalias (2008)) mostrano che la calibrazione da essi proposta consente di riprodurre la risposta non drenata sperimentale su un amplissimo intervallo di stati iniziali, mentre la simulazione del comportamento drenato non è altrettanto soddisfacente.

La simulazione della prova biassiale non drenata (Fig. 3-12) è stata effettuata a partire dallo stesso stato iniziale della prova drenata. In questo caso il valore iniziale di ψ non coincide con quello della Fig. 3-15.

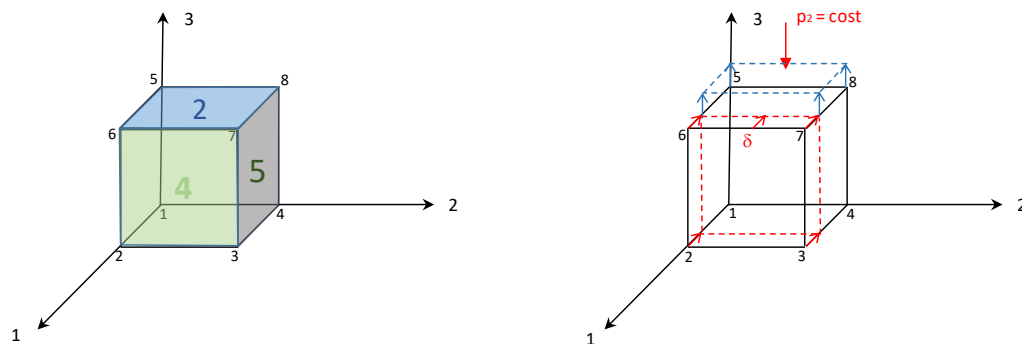


Fig. 3-11 Modello usato per la simulazione delle prove di taglio piano. Sulla destra sintesi delle condizioni al contorno e delle modalità di applicazione dei carichi.

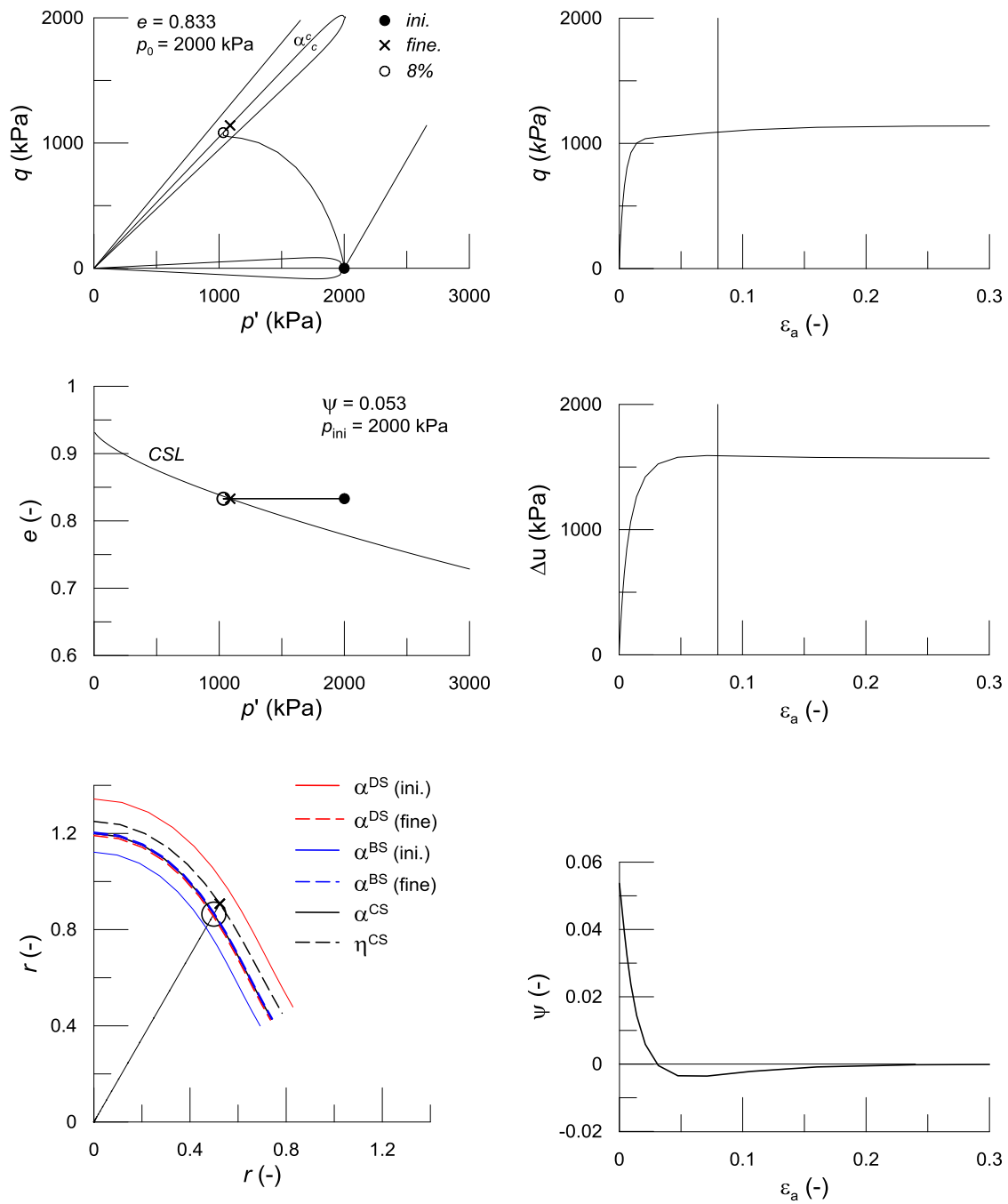


Fig. 3-12 Risultati della simulazione di una prova biassiale non drenata eseguita con Abaqus impiegando il modello calibrato per la Toyoura sand.

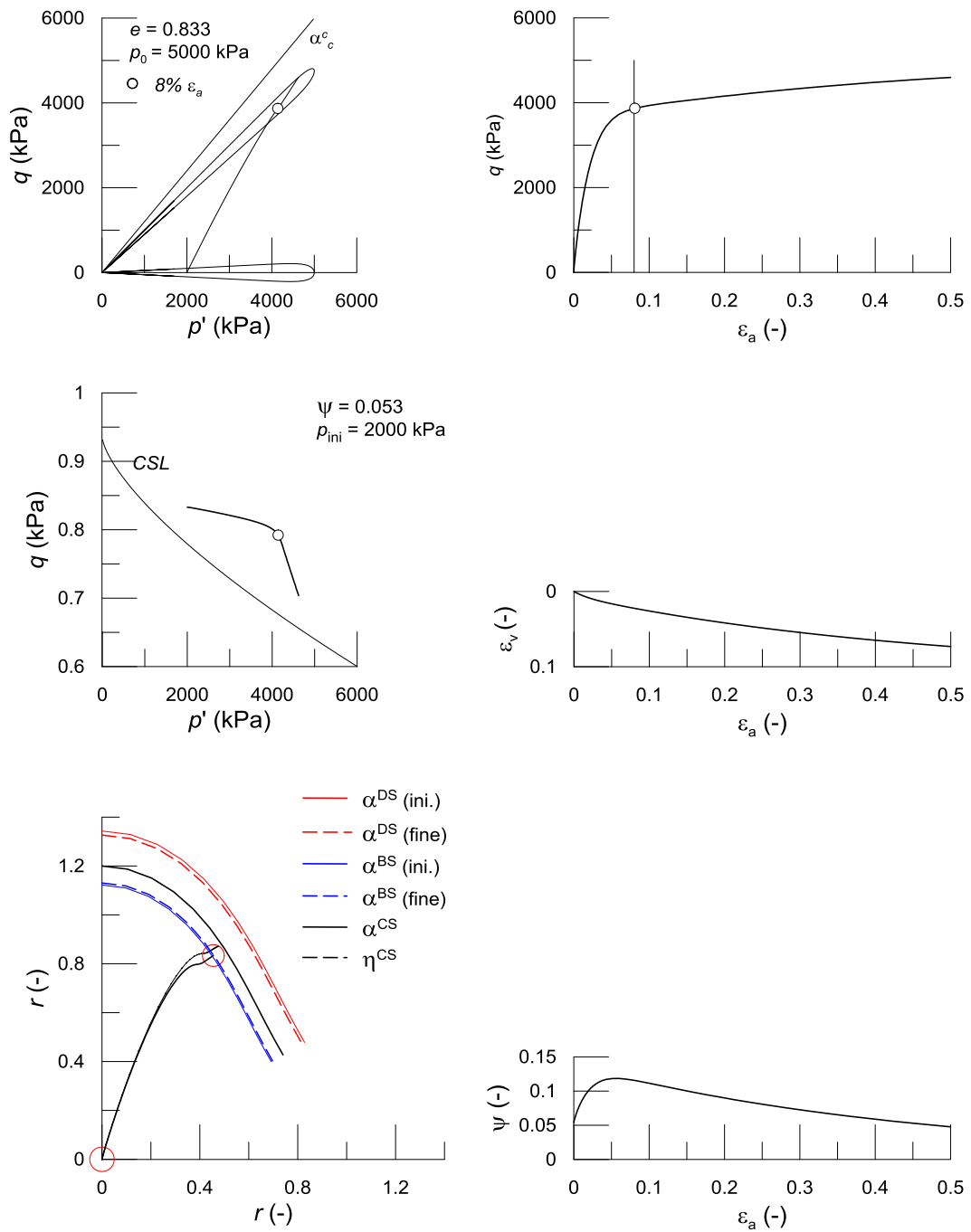


Fig. 3-13 Risultati ottenuti dalla simulazione della prova drenata. Le deformazioni sono state spinte a livelli irrealistici solo allo scopo di controllare la convergenza verso la condizione di stato critico.

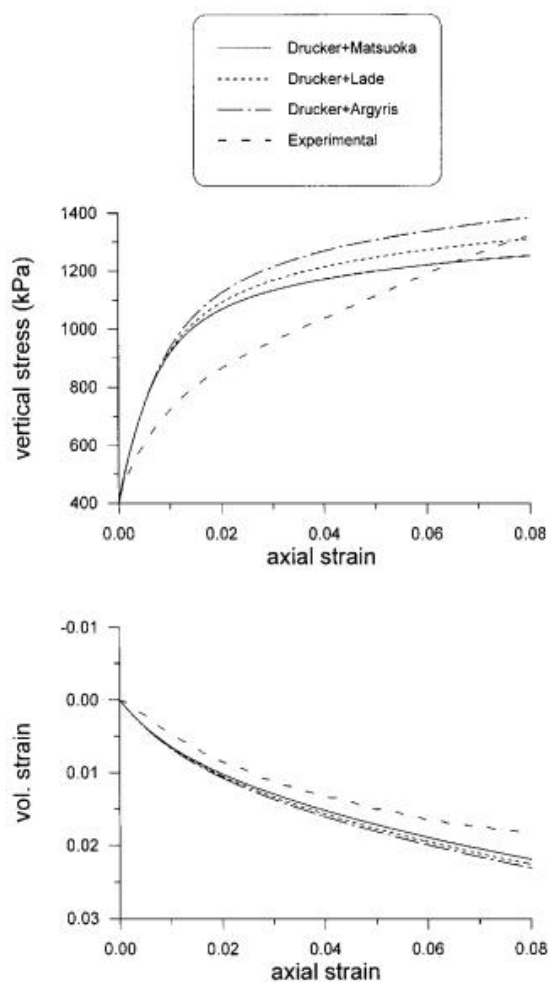
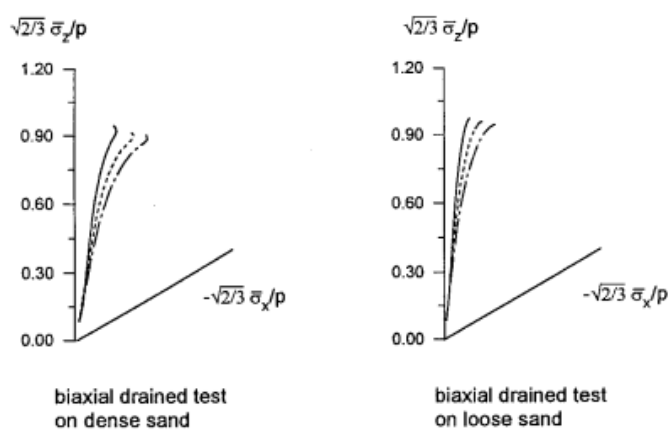


Figure 18. Comparison of experimental results and model simulations obtained with different strength surfaces, concerning a drained biaxial test on loose sand ($e_0 = 0.840$, $p_0 = 400$ kPa)

Fig. 3-14 Previsioni del modello Severn Trent in prove biassiali drenate al variare della funzione scelta per descrivere la superficie Buonding: (a) Confronto fra percorsi tensionali efficaci ottenuti nel caso di stato iniziale sciolto e denso. (b) Confronto delle relazioni $\sigma'_v:\varepsilon_a$ e $\varepsilon_v:\varepsilon_a$ con i risultati sperimentali relativamente al caso di stato iniziale sciolto. Gajo e Wood (1999).

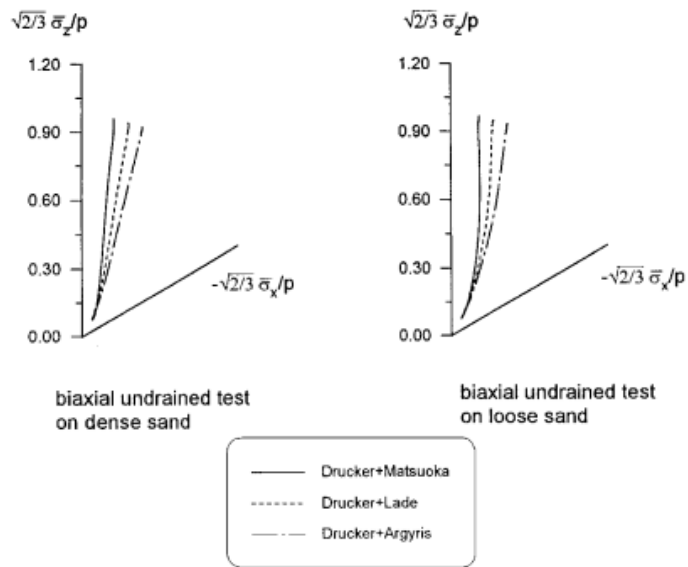


Figure 21. The effects induced by the different strength surfaces on the stress paths followed by the biaxial tests on the 'normalized' deviatoric plane

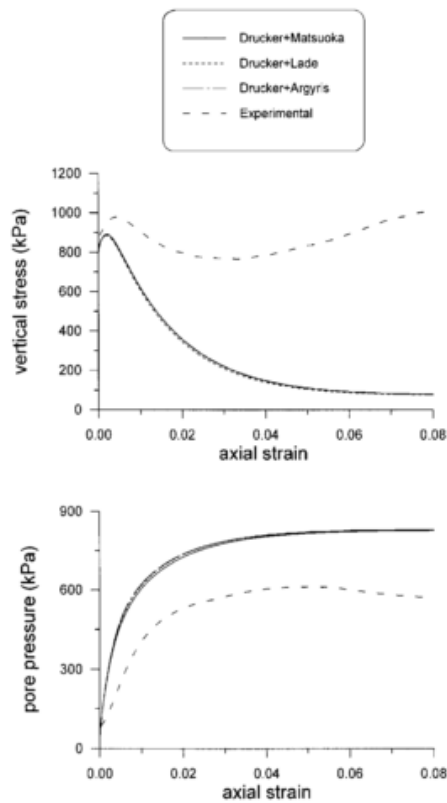


Figure 20. Comparison of experimental results and model simulations obtained with different strength surfaces, concerning an undrained biaxial test on loose sand ($e_0 = 0.850$, $p_0 = 800$ kPa)

Fig. 3-15 Previsioni del modello Severn Trent in prove biassiali non drenate al variare della funzione scelta per descrivere la superficie Buonding: (a) Confronto fra percorsi tensionali efficaci ottenuti nel caso di stato iniziale sciolto e denso. (b) Confronto delle relazioni $\sigma'_v:\varepsilon_a$ e $\varepsilon_v:\varepsilon_a$ con i risultati sperimentali relativamente al caso di stato iniziale sciolto. Gajo e Wood (1999).

3.4. Modellazione della risposta meccanica in prove triassiali

In questo paragrafo sono mostrati i risultati di alcune simulazioni numeriche, effettuate con la calibrazione del modello presentata nell'articolo di riferimento (Taiebat e Dafalias (2008)) per la sabbia Toyoura. Nelle Fig. 3-16 e Fig. 3-17 sono mostrati i risultati ottenuti dalla simulazione della fase deviatorica di tre prove triassiali consolidate drenate. Le rappresentazioni delle relazioni ε_a - ε_v sono distorte allo scopo di rendere più evidenti alcuni punti notevoli degli andamenti. Nelle Fig. 3-16 e Fig. 3-17, oltre ad essere specificato lo stato iniziale del materiale, sono mostrati gli andamenti della pendenza dell'asse della superficie di plasticizzazione e delle *dilatancy* (DS) e *bounding* (BS) *surfaces*. Gli andamenti consentono di apprezzare che le condizioni di trasformazione di fase e di completa mobilitazione della resistenza di picco si raggiungono all'intersezione del valore corrente della variabile di incrudimento cinematico con le superfici di dilatanza e *bounding*. I valori correnti di α^d e α^b rappresentano, per questo, solo potenziali pendenze della linea di trasformazione di fase e potenziali valori dell'angolo di resistenza a taglio di picco. Le figure mostrano che nella fase finale delle tre simulazioni non è stata raggiunto lo Stato Critico.

Nelle Fig. 3-18 Fig. 3-19 e Fig. 3-20 sono mostrati i risultati delle simulazioni numeriche della fase deviatorica di tre prove triassiali consolidate non drenate. Il percorso tensionale efficace nel piano $p':q$ e gli andamenti di α , α^d , e α^b consentono di apprezzare il diverso significato fisico associato al raggiungimento di un valore di picco del deviatore in condizioni drenate e non drenate. È evidente dalla Fig. 3-18 che il percorso tensionale instabile si associa a un progressivo incremento di α . In corrispondenza del valore di ε_a relativo al raggiungimento del picco di q , α è inferiore sia ad α^d che a α^b denotando una non completa mobilitazione della resistenza. Nel caso delle simulazioni mostrate nelle Fig. 3-19 e Fig. 3-20 si osserva la mobilitazione della condizione di trasformazione di fase. Nel caso di ψ iniziale positivo il legame prevede un comportamento stabile associato al raggiungimento della trasformazione di fase, mentre la prova sperimentale (non riportata) mostra una locale riduzione del deviatore che è tipica delle sabbie.

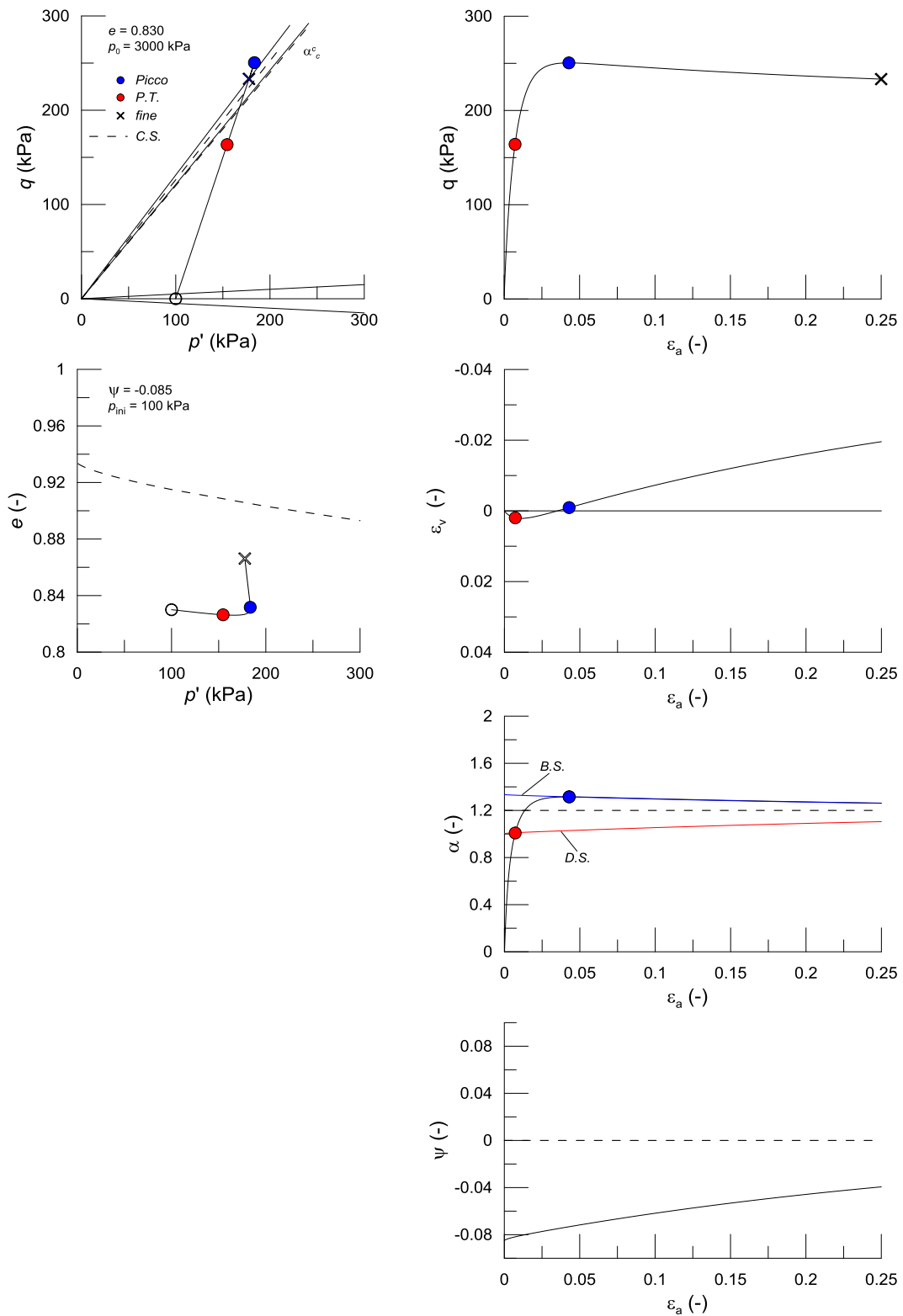


Fig. 3-16 Simulazione di una prova triassiale drenata eseguita su un provino caratterizzato da ψ iniziale negativo.

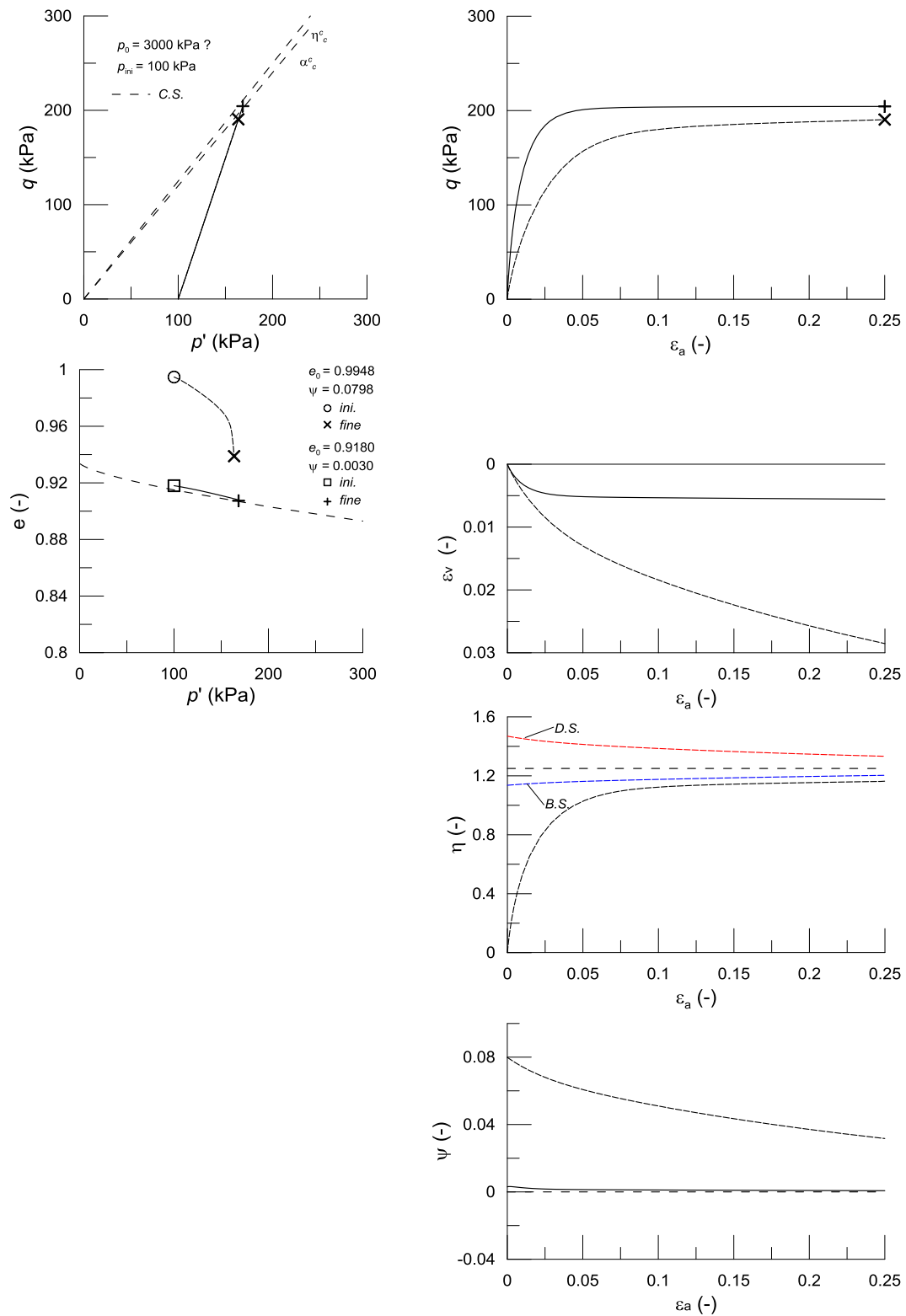


Fig. 3-17 Confronto fra le simulazioni numeriche di due prove triassiali drenate caratterizzate da due diversi valori iniziali di ψ . Gli andamenti di η , per chiarezza della rappresentazione sono riportati solo per il caso di $\psi = 0.0798$.

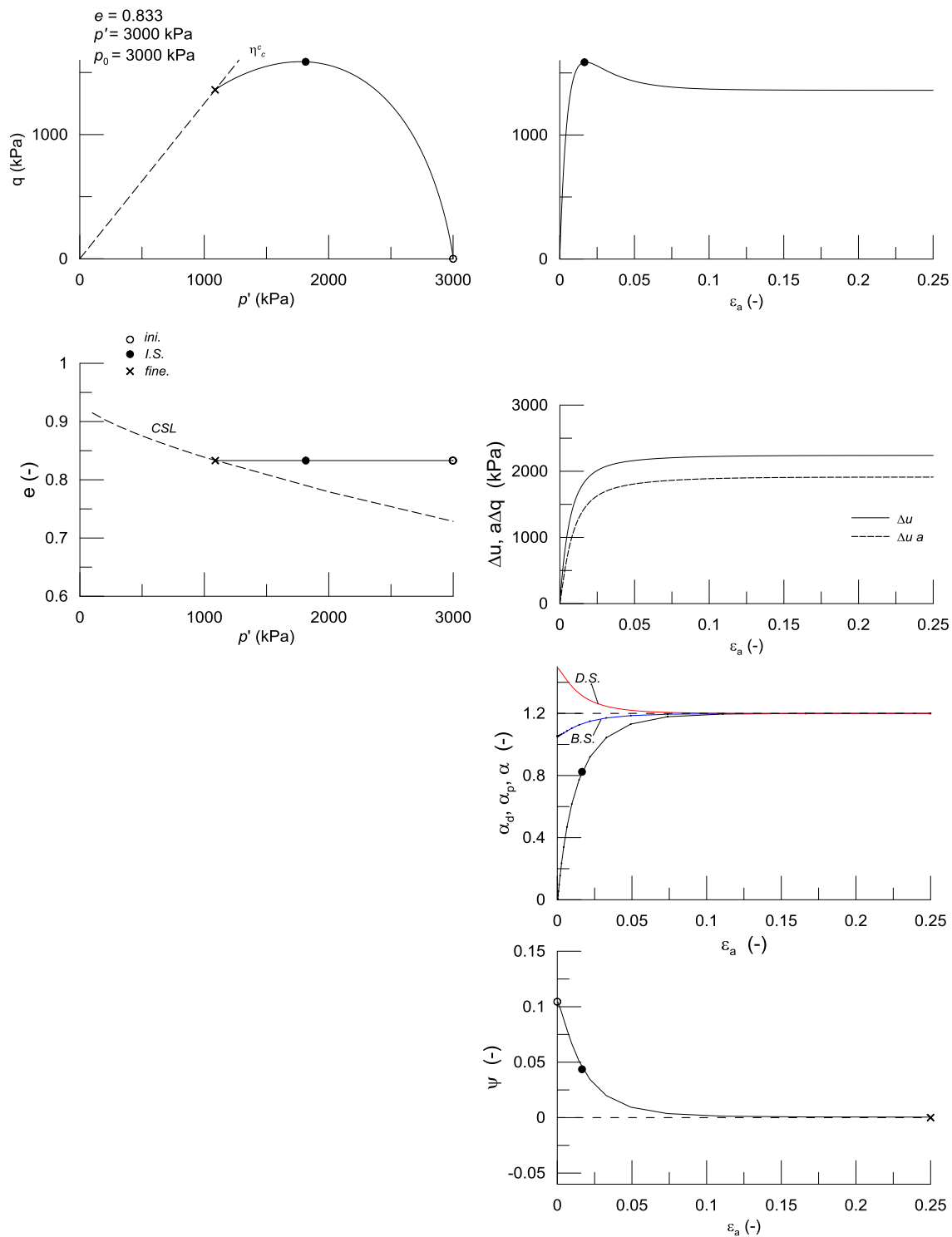


Fig. 3-18 Prova triassiale non drenata relativa a una condizione iniziale caratterizzata da ψ positivo nella quale si riscontra una risposta instabile. Il picco del deviatore non è associato alla completa mobilitazione della resistenza perché le linee blu e nera si toccano solo nella condizione di stato critico.

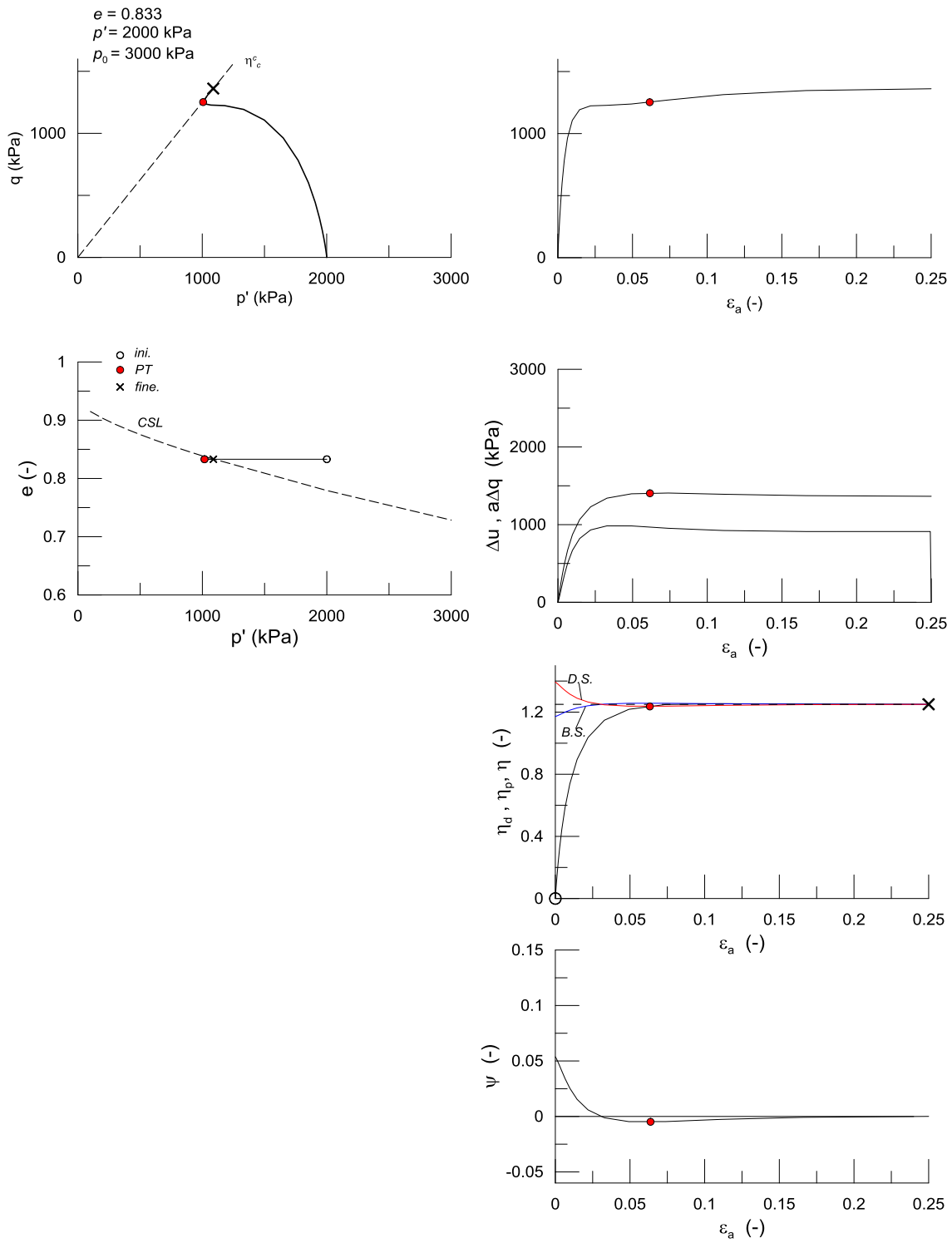


Fig. 3-19 Prova triassiale non drenata relativa a una condizione iniziale caratterizzata da ψ positivo nella quale viene mobilitata la condizione di trasformazione di fase.

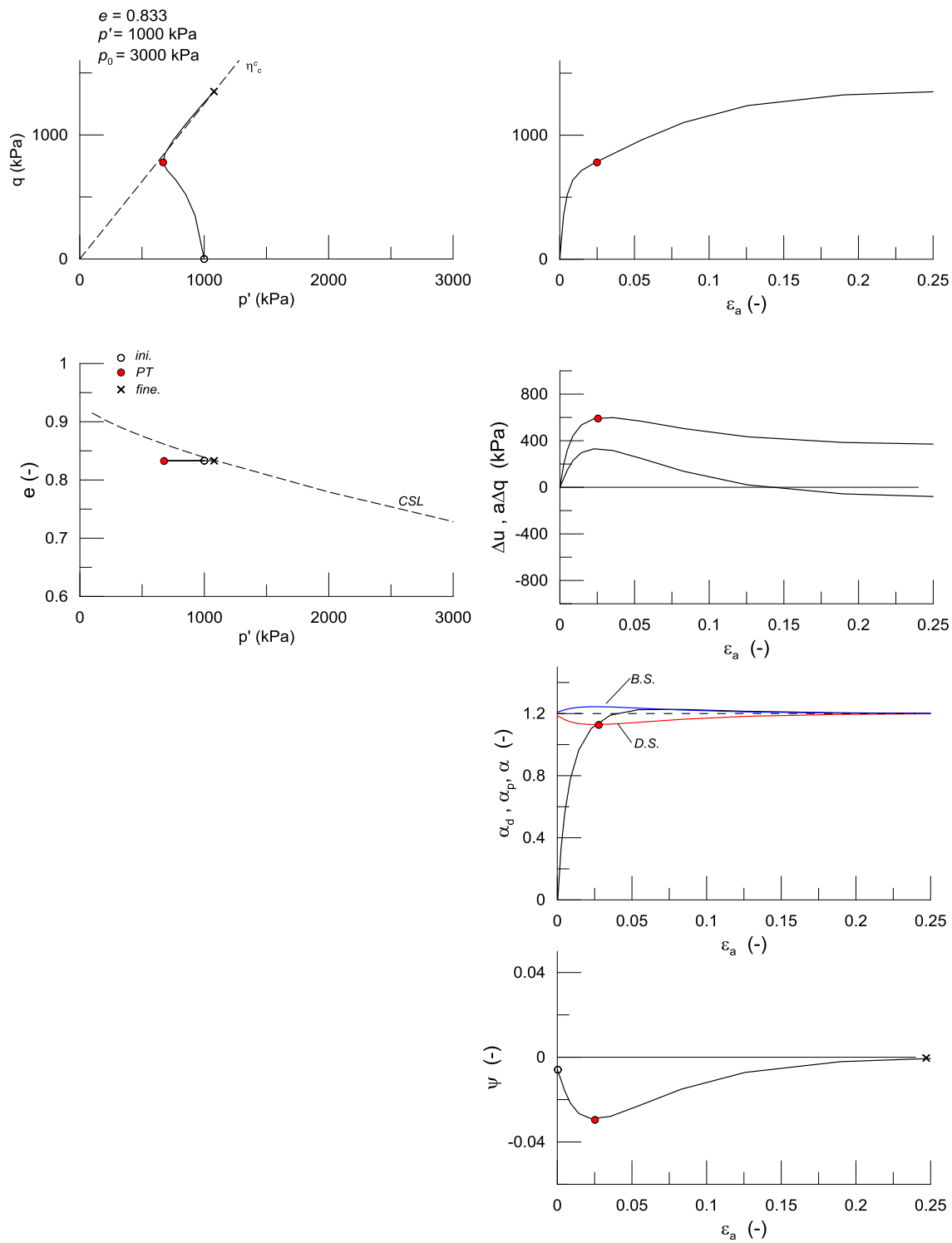


Fig. 3-20 Prova triassiale non drenata relativa a una condizione iniziale caratterizzata da ψ negativo nella quale si riscontra un comportamento marcatamente dilatante.

4. Illustrazione di un caso di studio

4.1. Descrizione dell'opera e delle condizioni in sito del materiale

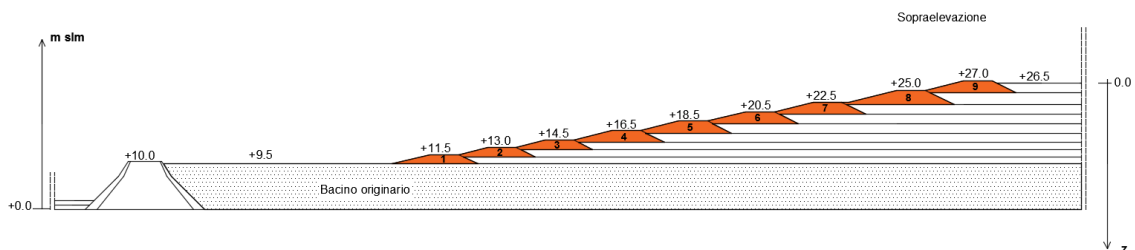


Fig. 4-1 Sezione trasversale tipo del bacino e sistemi di riferimento delle quote e delle profondità.

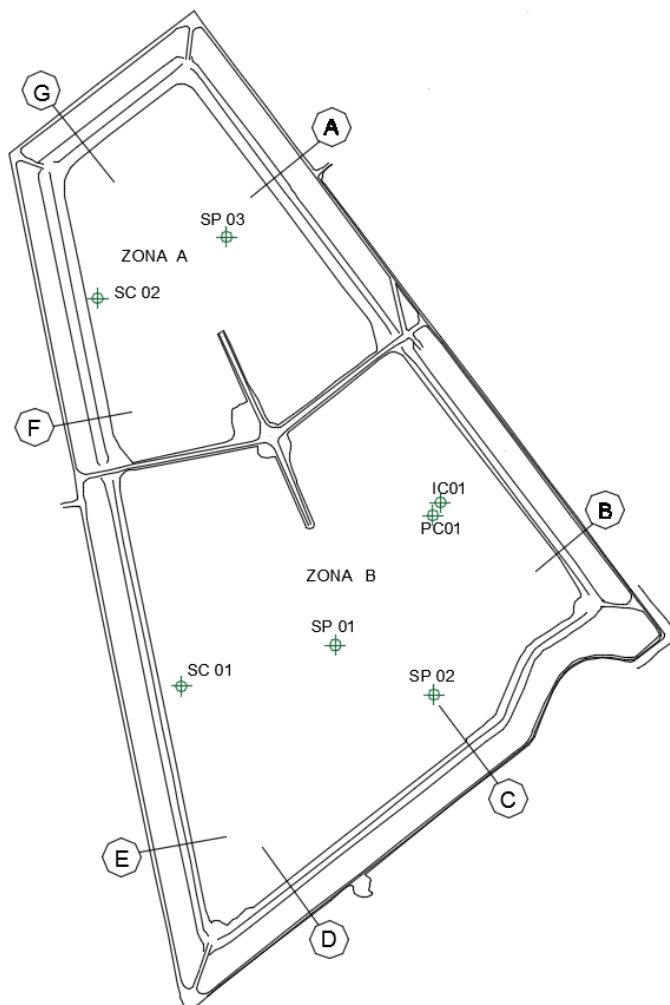


Fig. 4-2 Planimetria del bacino e ubicazione dei sondaggi.

Tabella 4.1 Cronologia delle fasi costruttive per la ZONA A

Argine	da	a	Tempo	Esercizio	da	a	Tempo
			(mesi)				(mesi)
1		1994		1	1994	1995	
2		1996		2	1996	1997	
3	1997	1998		3	1998	1998	
4	mar-99	lug-99	4	4	ago-99	feb-00	6
5	feb-01	mag-01	3	5	giu-01	nov-01	5
6	giu-02	ott-02	4	6	dic-02	mag-03	5
7	set-03	feb-04	5	7	mar-04	set-04	6
8	mag-06	gen-07	8	8	feb-07	mag-07	3
9	apr-08	giu-08	2	9	giu-08	set-08	3

Tabella 4.2 Cronologia delle fasi costruttive per la ZONA B

Argine	da	a	Tempo	Esercizio	da	a	Tempo
			(mesi)				(mesi)
1		1994		1	1995	1996	
2		1996		2	1997	1998	
3	1997	1998		3	1998	1999	
4	mar-99	feb-00	7	4	mar-00	mag-01	14
5	feb-01	nov-01	6	5	dic-01	nov-02	11
6	giu-02	mag-03	7	6	giu-03	feb-04	8
7	set-03	set-04	7	7	set-04	giu-05	9
8	mag-06	apr-07	3	8	mag-07	dic-07	7
9	apr-08	set-08	3	9	ott-08	mar-09	5

Il terreno studiato in questo lavoro è il residuo sterile di un impianto in cui si estrae l'allumina dai minerali della bauxite attraverso il processo Bayer. Per la sua origine artificiale, le proprietà fisiche e meccaniche del terreno dipendono dalle caratteristiche del processo produttivo, dalle materie prime e sono poi condizionate anche dalla tecnica di deposizione e dalle caratteristiche del bacino nel quale viene conferito.

Il terreno oggetto di studio è depositato in un bacino realizzato con una tecnica di costruzione di tipo *up-stream*. La Fig. 4-1 mostra la sezione trasversale tipo del paramento e una porzione del deposito. Come mostrato nella Fig. 4-1, l'opera di contenimento è costituita da un bacino di base, delimitato da un argine di altezza 10 m, il cui livello di riempimento raggiunge la quota di 9.5 m slm e da un bacino sopraelevato, costruito per livelli successivi, che raggiunge la quota massima di 27 m slm. Il bacino originario ha un'estensione in pianta di circa un milione di metri quadrati ed è stato realizzato a partire dal 1975, mentre il riempimento è stato ultimato

nel 1994. I nove livelli di arginature che delimitano il bacino attuale hanno altezza media di 2.3 m e sono stati innalzati e riempiti progressivamente nel tempo. Il bacino sopraelevato, realizzato per aumentare i volumi di invaso dell'impianto originario, è costituito (Fig. 4-2) da due zone separate e adiacenti di diversa estensione che coprono complessivamente, al primo livello, una superficie utile di circa 800 000 metri quadrati. Le zone identificate con A è relativa alla parte del bacino di estensione minore mentre sarà indicata con B la zona più estesa. Le quote di sommità dei vari argini si mantengono lungo il perimetro al valore indicato nella sezione.

Le Tabella 4.1 e Tabella 4.2 riportano le date di inizio e fine della fase di costruzione di ogni livello di arginatura e le date di inizio e fine delle fasi di riempimento dei diversi livelli di contenimento.

Per l'entità dei volumi immagazzinati e la modalità costruttive, l'opera è stata oggetto nel corso degli anni di numerose campagne di indagine nell'ambito delle quali sono state eseguite prove in sito penetrometriche e scissometriche e sono stati prelevati campioni indisturbati per l'esecuzione di prove di laboratorio. Il bacino è inoltre interessato da un fitto sistema di monitoraggio delle pressioni interstiziali e degli spostamenti.

La calibrazione del modello costitutivo, illustrata nel Capitolo successivo, viene condotta sulla base delle prove di laboratorio eseguite sui campioni indisturbati prelevati nell'ambito di tre campagne di indagine che hanno interessato le zone A e B del bacino nel corso degli anni dal 2010 al 2015. Tutti i prelievi relativi a questo periodo sono stati effettuati quando il bacino ha raggiunto la sua configurazione attuale, perché, come mostrato nella Tabella 4.2 le attività di lavorazione e il conseguente accumulo degli scarti sono terminate nel 2009 (zona B). Le indagini risalenti all'anno 2010 riguardano gli allineamenti verticali denominati SP01 SP02 (zona B) SP03 (zona B). La verticale più interna al bacino è la SP01, distante circa 150 m dall'argine di sommità. La SP03 e SP02 sono collocate in avanzamento da esso di circa 60 m. I prelievi effettuati nell'anno 2012 sono avvenuti lungo le verticali denominate SC01 (zona A) SC02 (zona B) a circa dieci metri in avanzamento dall'argine 9 lato mare. I sondaggi PC01 e IC01 relativi al 2015 sono entrambi collocati nella zona B, a distanza di circa 7 m dalla sommità dell'argine 9, in questo caso sul lato interno. I sondaggi sono stati eseguiti a

partire dalla superficie dei fanghi, posta alla quota 26.5 m slm e raggiungono una profondità massima di 25 m.

Nella sezione trasversale di Fig. 4-1 si possono distinguere tre tipologie di materiali. Il limo oggetto dello studio comprende sia il materiale di deposizione più vecchia, campito nella sezione, che quello di deposizione più recente, mostrato in bianco. Gli argini sono realizzati con un materiale a grana grossa e caratterizzati da un paramento interno realizzato in argilla di bassissima permeabilità.

La Fig. 4-3 .a fornisce una panoramica delle caratteristiche fisiche e granulometriche del deposito. La composizione granulometrica è globalmente piuttosto uniforme e caratterizzata da limo (50%), argilla (35%) e sabbia (15%). Il limite liquido w_L varia fra il 50 e il 65% mentre l'indice di plasticità IP è compreso tra il 10% e il 20%.

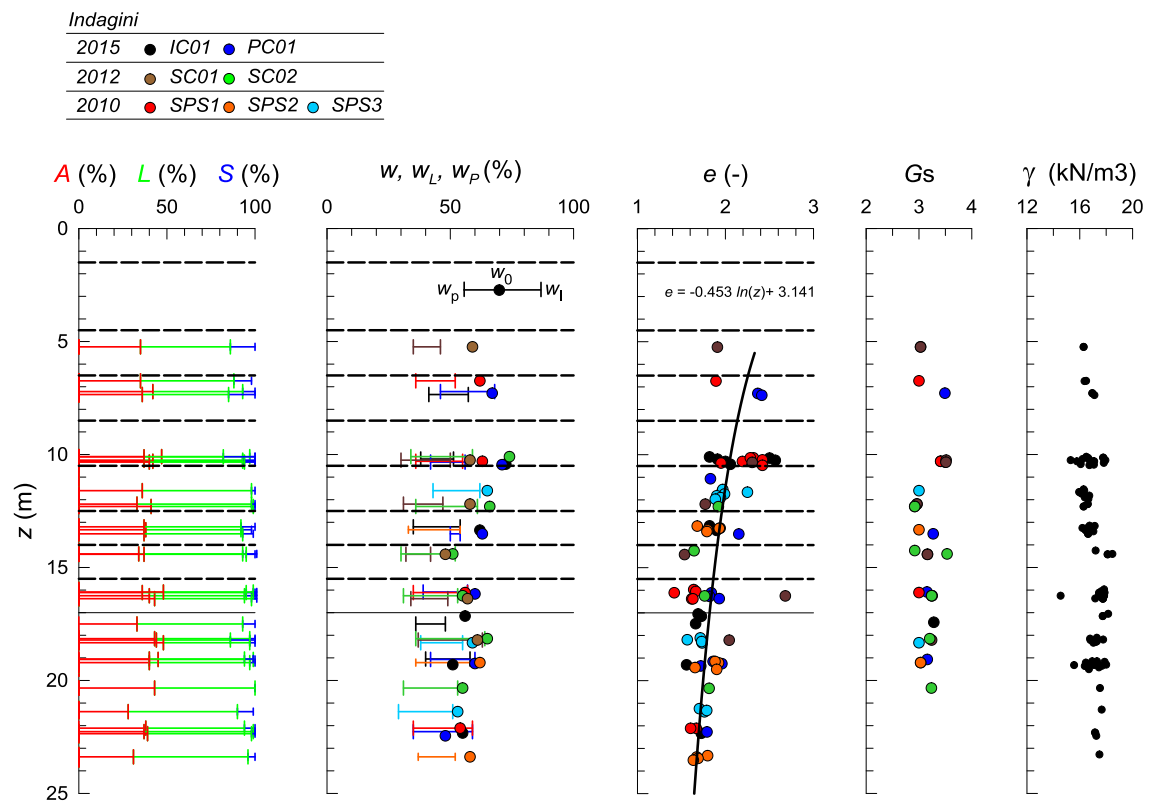


Fig. 4-3 Profilo delle caratteristiche fisiche, granulometriche e delle proprietà indice.

Complessivamente il materiale può essere classificato come un limo di alta plasticità molto compressibile. Stando alle indicazioni fornite da Boulanger e Idriss (2006) sul tipo di comportamento meccanico che ci si può attendere per un limo sulla base delle caratteristiche di plasticità, questo materiale dovrebbe manifestare un comportamento meccanico assimilabile a quello di un'argilla. Per la sua particolare origine esso combina però aspetti tipici dei terreni a grana grossa ad altri più comuni per le argille.

Dalla Fig. 4-3.b si può notare che in gran parte del deposito il contenuto d'acqua w è maggiore del limite liquido, diventando appena inferiore al limite liquido a profondità maggiori di 15 m. Questa caratteristica sembra indipendente dalla posizione in pianta e dalla data di esecuzione delle prove. Determinazioni del contenuto d'acqua effettuate nell'ambito di precedenti campagne di indagine (non riportate nel testo) mostrano ancora valori del contenuto in acqua prossimi al 60% e sistematicamente maggiori del limite liquido.

Si potrebbe erroneamente pensare che il valore elevato del contenuto d'acqua sia effettivamente connesso allo stato di consistenza. Anche se il materiale viene depositato nel bacino allo stato fluido (al 23% di solido), il prelievo di campioni e la costruzione degli argini indicano che il materiale ha effettivamente assunto uno stato di consistenza plastica. Esaminando meglio i dati disponibili nel bacino di base sembrerebbe che nel tempo sia cambiato più che w il w_L . Il valore elevato del contenuto d'acqua, associato a uno stato di consistenza plastico del materiale è un risultato riportato in letteratura per i fanghi ottenuti nel processo Bayer e non del tutto compreso. In parte viene giustificato dalla struttura microscopica capace di trattenere acqua internamente. Si potrebbe quindi supporre che i limiti di Atterberg non siano, per questi materiali, molto significativi nel fornire indicazioni sullo stato di consistenza del materiale.

L'indice dei vuoti, diagrammato in Fig. 4-3.c, mostra un andamento chiaramente decrescente con la profondità, seppure con una certa dispersione. La regressione ai minimi quadrati che meglio approssima il profilo dell'indice dei vuoti è di tipo logaritmico e viene riportata nella Fig. 4-3.c.

Il peso specifico dei grani G_s è coerente con l'origine del materiale e dipende dalla presenza di minerali ferrosi, mentre il peso di volume saturo è relativamente basso a causa del valore molto elevato dell'indice dei vuoti.

La Fig. 4-4 mostra gli andamenti con la profondità del carico idraulico (in m slm) e delle pressioni interstiziali ricavati per diverse sezioni dalle letture, effettuate nel 2009, di una serie di piezometri di Casagrande collocati lungo il paramento del bacino di contenimento. In ognuno dei diagrammi sono rappresentati tutti i valori del carico idraulico determinati al di sotto di ciascun argine in sette sezioni trasversali. Per gli argini 8 e 9 non sono disponibili letture. Nei grafici è rappresentato in nero un andamento approssimato del carico idraulico, caratterizzato da un gradiente unitario.

I dati relativi agli argini 2, 3, 4 e 6 appaiono in accordo con l'andamento tracciato, evidenziando la presenza di un moto di filtrazione, sostanzialmente monodimensionale, diretto verso il basso. La stazionarietà del moto è dedotta dal confronto con i valori ricavati dalle letture degli stessi piezometri effettuate nell'anno 2008 che risultano del tutto sovrapponibili a quelle riportate nei grafici della Fig. 4-4

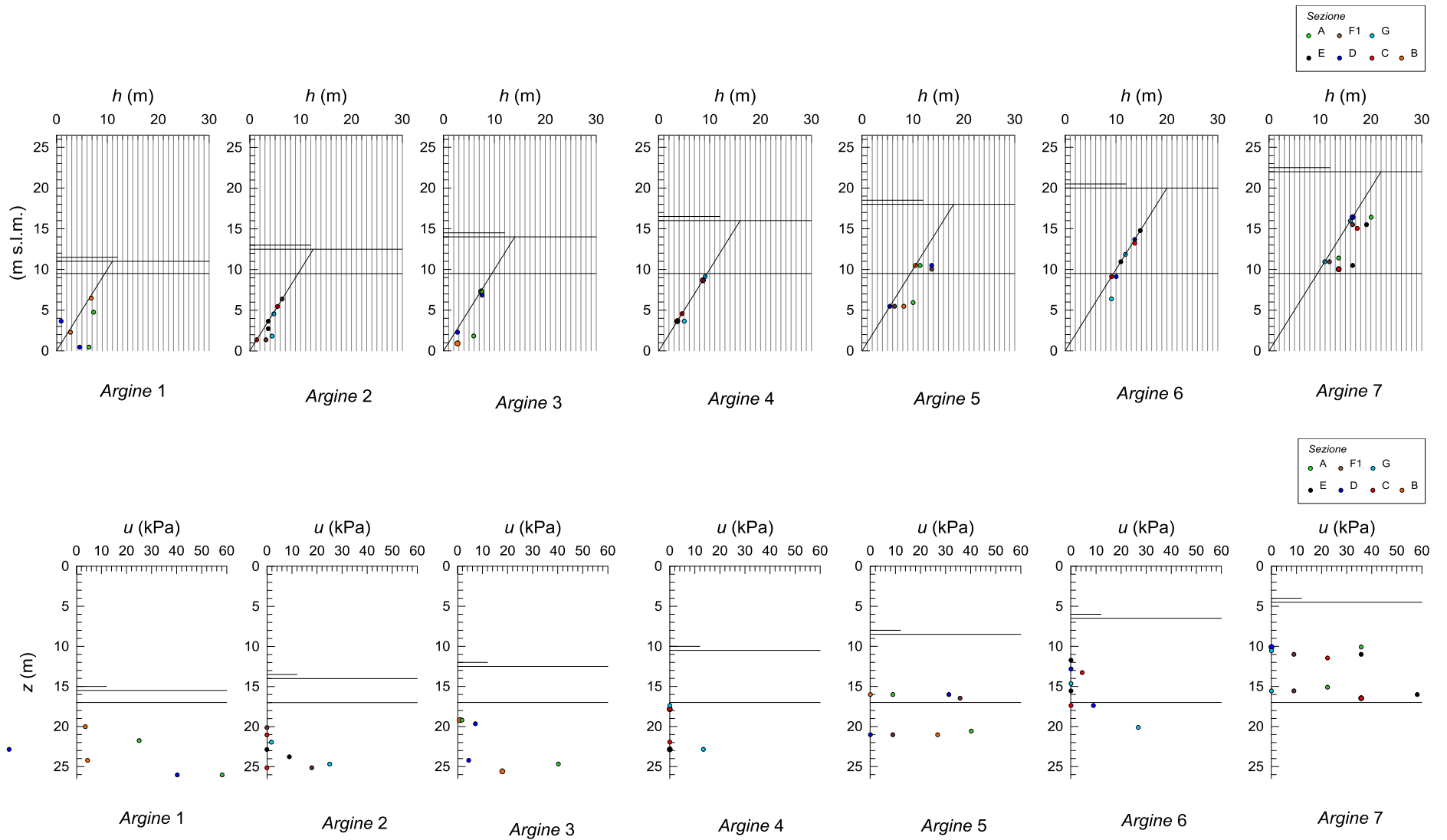


Fig. 4-4

Lo scostamento maggiore dall'andamento lineare si osserva al di sotto dell'argine 7, e in particolare nelle sezioni della zona B del bacino. Una spiegazione relativamente semplice può essere trovata nel fatto che la costruzione e la fine del riempimento del livello 9 nella zona B sono avvenuti proprio nel 2009. Lo scostamento dall'andamento lineare può essere quindi attribuito alla presenza di sovrappressioni interstiziali non ancora dissipate alla data in cui sono state effettuate le misure. Il fatto che nella zona sia in corso un processo di consolidazione è confermato dal confronto fra le letture effettuate nel 2008 e nel 2009, che in questa zona differiscono. Nella valutazione dell'entità delle sovrappressioni è necessario tenere in conto la considerevole distanza fra il paramento interno dell'argine 9 e il punto di misura.

Sotto gli altri argini, la presenza di un moto di filtrazione stazionario sembrerebbe giustificata in parte dalla distanza ancora maggiore che riduce ulteriormente l'entità delle sovrappressioni indotte dalle operazioni effettuate in corrispondenza dell'argine 9 e in parte dal fatto che tra la fine della fase di esercizio del livello 7 e l'inizio della realizzazione dell'argine 8 sono intercorsi mediamente due anni, durante i quali eventuali processi di consolidazione progressivi hanno avuto modo di progredire (Tabella 4.1).

Le misure piezometriche, interpretate tenendo conto della scansione delle fasi costruttive, forniscono l'ulteriore informazione che il processo di consolidazione, indotto dalla costruzione di un argine e dal riempimento, fino a spessori di 15 m, si esaurisce al massimo nell'arco di 2 anni. L'aumento dello spessore di materiale rallenta inevitabilmente il processo di consolidazione e, anche nel caso in cui si scelga di procedere con velocità di accrescimento annue relativamente basse e tali da garantire condizioni sostanzialmente drenate, quando si raggiungono spessori considerevoli il processo di dissipazione delle Δu e la sussistenza di condizioni parzialmente drenate non può essere trascurato e permane a lungo. Se è possibile ritenere che il regime stazionario delle pressioni interstiziali sia caratterizzato, anche al di sotto degli argini 8 e 9 e in avanzamento da pressioni interstiziali pressoché nulle, non è possibile affermare con certezza che alla data del prelievo dei campioni oggetto delle prove di laboratorio siano state raggiunte tali condizioni stazionarie. Infatti, come accennato all'inizio del Capitolo 4, la prima campagna di indagini per la quale sono disponibili risultati di prove in laboratorio è stata effettuata nel 2010. Dal momento che il termine della fase di

esercizio del livello 9 risale a marzo del 2009 per la parte B e al 2008 per la parte A, non è detto che alla data del prelievo dei campioni le sovrappressioni interstiziali indotte dalle operazioni costruttive fossero completamente dissipate. Si può invece ritenere che i campioni prelevati nel 2012 e 2015 interessino un materiale che ha raggiunto condizioni drenate.

Nella Fig. 4-5 sono mostrate le caratteristiche di plasticità dei campioni sottoposti alle prove di laboratorio e alcune curve granulometriche. I campioni oggetto delle prove triassiali sono stati prelevati fra le profondità di 10 e 13 m. Essi sono caratterizzati da curve granulometriche continue, con un contenuto di argilla di circa il 30% e percentuali di sabbia variabili, che raggiungono un massimo del 30%. La frazione granulometrica rimanente, compresa fra il 40 e il 60%, è costituita da materiali classificabili come limi fini e medi (Fig. 4-5). Nell'insieme il materiale è classificabile come un limo di alta compressibilità. Le profondità di prelievo dei campioni oggetto delle prove edometriche coprono invece un intervallo molto più ampio che va dai 7 ai 22 m di profondità (Fig. 4.1).

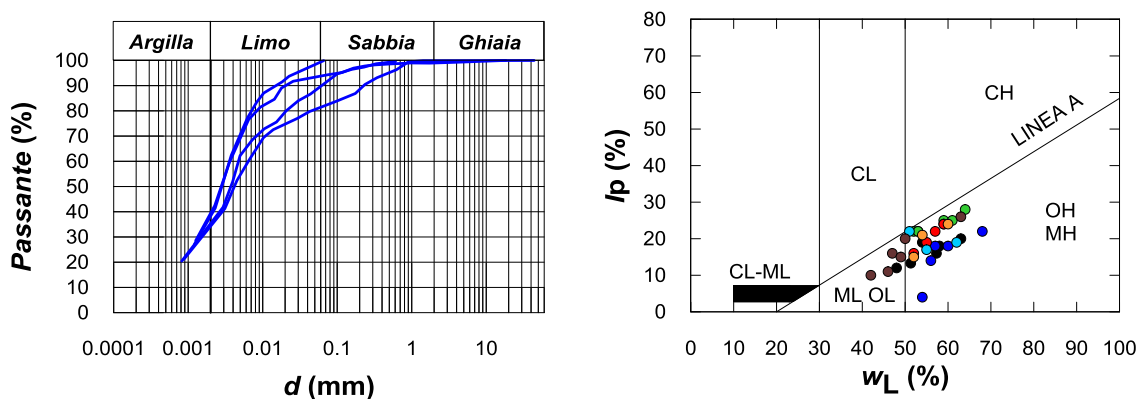


Fig. 4-5 Curve granulometriche e carta di plasticità dei campioni di terreno sottoposti alle prove sperimentali in cella triassiale.

5. Calibrazione del legame costitutivo per un limo

5.1. Inizializzazione della variabile di incrudimento isotropo

5.1.1. Analisi dell'approccio impiegato dagli autori

La Fig. 5-1 .a mostra nel piano $e-p'$ due curve di compressione isotropa previste dal modello di Taiebat e Dafalias (2008) calibrato per la sabbia di Toyoura. Le simulazioni si distinguono solo per il valore iniziale attribuito alla variabile di incrudimento isotropo p_0 . La curva rappresentata con tratto sottile è ottenuta assumendo $p_{0,ini}$ pari alla tensione media efficace iniziale della prova p'_{ini} . La curva riportata con linea marcata è ottenuta assumendo $p_{0,ini} = 3000$ kPa.

Le due assunzioni per $p_{0,ini}$ sono quelle effettuate dagli autori per riprodurre numericamente alcune prove sperimentali sulla sabbia di Toyoura e mostrare l'adeguatezza della calibrazione. Gli autori assumono sistematicamente $p_{0,ini} = p'_{ini}$ per simulare numericamente una serie di prove sperimentali di compressione isotropa su campioni ricostituiti. Per simulare la fase deviatorica di una serie di prove triassiali non drenate eseguite su provini consolidati a diverse tensioni medie efficaci e caratterizzati dallo stesso indice dei vuoti iniziale della prova di compressione isotropa di Fig. 5-1 .a, gli autori assumono sempre $p_{0,ini} = 3000$ kPa (§3.3).

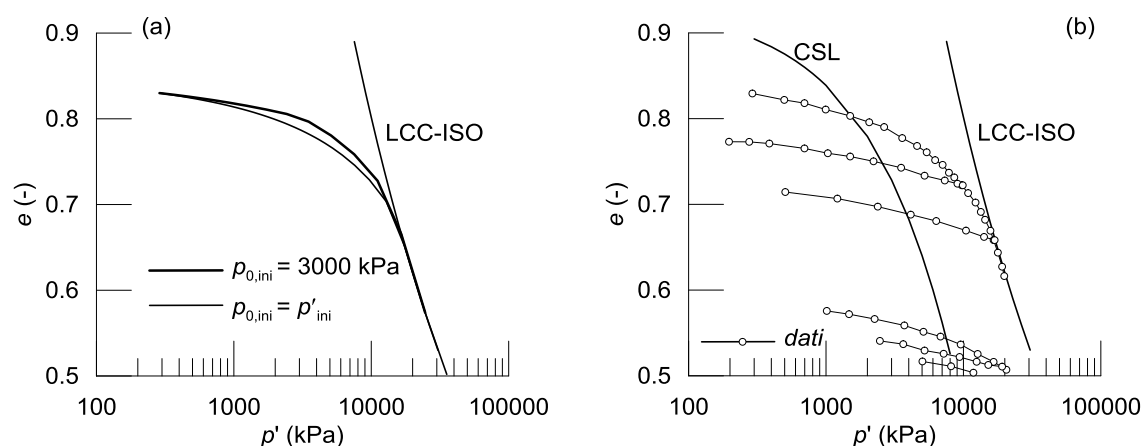


Fig. 5-1 Prove di compressione isotropa sulla sabbia di Toyoura: (a) curve simulate numericamente con il modello assumendo due diversi valori iniziali della variabile di incrudimento isotropo. (b) Curve di compressione isotropa sperimentali (Miura 1979) LSC (Verdugo e Ishihara 1996) LCC del modello.

La curva sottile della Fig. 5-1 .a rappresenta quindi la simulazione effettuata con l'ipotesi realmente assunta dagli autori per riprodurre numericamente la prova di compressione. Tra le diverse simulazioni delle prove triassiali si prende ad esame quella relativa al provino consolidato alla tensione media efficace di 100 kPa, che è la più prossima alla tensione media efficace iniziale della prova di compressione isotropa di Fig. 5-1 .a (130 kPa). La curva riportata con tratto marcato nella Fig. 5-1 .a rappresenta quindi la simulazione ripetuta assumendo per $p_{0,ini}$ il valore scelto dagli autori per riprodurre numericamente la fase deviatorica di una prova triassiale non drenata eseguita sul campione consolidato ad uno stato, sostanzialmente, coincidente con quello iniziale della prova di compressione isotropa.

La Fig. 5-1 .b mostra nel piano $e-p'$ la posizione reciproca fra le curve di compressione isotropa sperimentali e la Linea dello Stato Critico della sabbia di Toyoura; dalla Fig. 5-1 .b si può apprezzare che lo stato iniziale della prova di compressione è caratterizzato da ψ negativo. La possibilità che in condizioni di normal-consolidazione lo stato iniziale sia rappresentato, nel piano di compressibilità, da un punto collocato sotto la linea dello stato critico è un aspetto tipico delle sabbie.

Il riesame dei valori attribuiti dagli autori a p_0 per la simulazione delle prove di compressione isotropa e della fase deviatorica di prove triassiali non drenate ha permesso di verificare che gli autori simulano la fase deviatorica delle prove non drenate assumendo $p_{0,ini} = p'_{ini}$ (con p'_{ini} tensione media efficace di fine consolidazione) solo se lo stato iniziale è caratterizzato da valore positivo di ψ . Dalla Fig. 5-1 .b si può inoltre rilevare che in corrispondenza dell'indice dei vuoti iniziale dei due tipi di simulazioni ($e = 0.830$), le assunzioni $p_0 = p'_{ini}$ e $p_{0,ini} = 3000$ kPa comportano il posizionamento della variabile di incrudimento isotropo a sinistra oppure a destra della linea dello stato critico.

Nella Fig. 5-2 è mostrato il confronto fra i risultati sperimentali e due simulazioni numeriche della prova triassiale non drenata eseguita sul provino consolidato isotropicamente allo stato ($p'_c = 100$ kPa $e_0 = 0.830$) più prossimo a quello iniziale del campione sottoposto alla prova di compressione isotropa. Anche in questo caso i percorsi tensionali efficaci (Fig. 5-2 .a) e le relazioni ε_a-q (Fig. 5-2 .b) sono ottenuti sia con l'ipotesi $p_{0,ini} = 3000$ kPa (linea marcata) che con $p_{0,ini} = p'_{ini}$ (linea sottile).

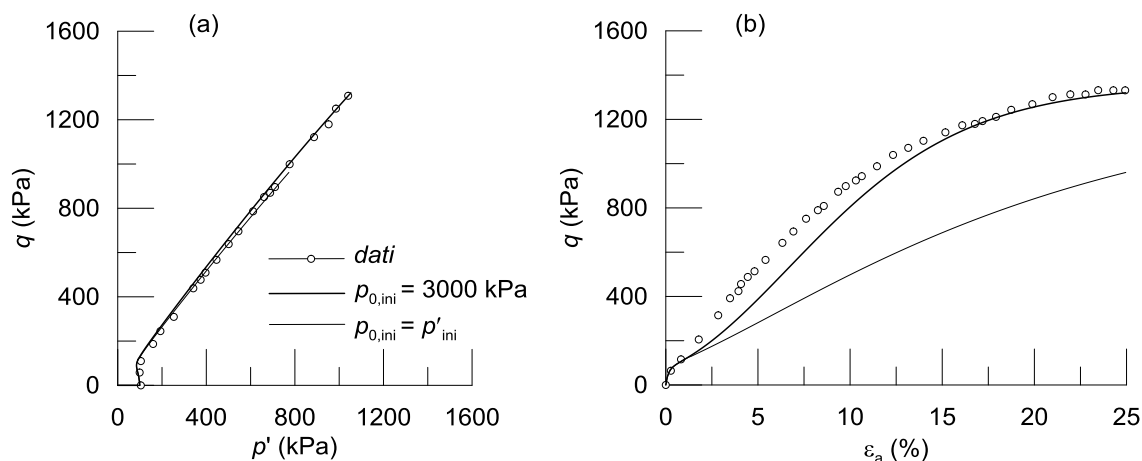


Fig. 5-2 Prova triassiale non drenate su un campione di Toyoura sand consolidato isotropicamente alla tensione media efficace di 100 kPa: confronto fra risultati sperimentali e simulazioni numeriche effettuate con diversi valori iniziali di p_0 (a) Percorsi tensionali efficaci. (b) relazioni ε_a - q .

Dalle Fig. 5-1 e Fig. 5-2 è evidente che a parità di calibrazione, il valore iniziale attribuito a $p_{0,ini}$ influenza le previsioni del modello. Nella previsione della compressibilità, nonostante la differenza sia contenuta, l'accordo migliore con i risultati sperimentali è ottenuto assumendo $p_{0,ini} = p'_{ini}$. Nella simulazione della prova triassiale, il valore iniziale di p_0 modifica considerevolmente la relazione ε_a - q , e in questo caso l'accordo migliore con i risultati sperimentali si rileva per $p_{0,ini} = 3000$ kPa. In entrambi i casi l'accordo migliore con i risultati sperimentali si ottiene assumendo per $p_{0,ini}$ il valore effettivamente adottato dagli autori. Dal momento che lo stato iniziale delle due prove è sostanzialmente coincidente, la scelta di due criteri distinti appare contraddittoria. Nella simulazione della prova di compressione isotropa, a p_0 sembrerebbe attribuito il significato di una tensione di preconsolidazione. Invece, nella simulazione delle prove triassiali non drenate si potrebbe pensare che a p_0 sia attribuito il significato di tensione in corrispondenza della quale viene mobilitata la resistenza dei grani.

La scelta di assumere $p_{0,ini} = 3000$ kPa non può però essere giustificata da considerazioni legate alla compressibilità. Associarla alla resistenza dei grani, con la giustificazione che solo dopo quella soglia si riscontra una considerevole compressibilità, non sembra corretto visto che la simulazione della prova di compressione isotropa effettuata con $p_{0,ini} = p_{ini}$ non mostra alcuna sovrastima della compressibilità e al contrario conferma che la compressibilità del materiale viene simulata correttamente su un amplissimo intervallo di stati tensionali (Pestana e Whittle

1995). Visto che la compressibilità è modellata tanto più correttamente quanto più la variabile di incrudimento è prossima allo stato iniziale del materiale, la scelta appare quindi legata alla volontà di non deteriorare la previsione della risposta non drenata, che per la calibrazione in esame è migliore quando la variabile di incrudimento viene inizializzata a destra della linea dello stato critico. Gli stessi risultati di Taiebat e Dafalias 2008, riesaminati nel modo illustrato, confermano un principio di validità generale, ovvero: non è opportuno adattare l'inizializzazione di p_0 alla specifica tipologia di prova di laboratorio perché potrebbe accadere che la bontà della calibrazione e l'accordo con i risultati sperimentali si dimostrino, nella pratica, meno soddisfacente di quanto possa apparire inizialmente. Quando si affronta un problema al finito è infatti necessario definire una scelta univoca della variabile di stato.

5.1.2. Proposta di due criteri alternativi

In questo paragrafo vengono definiti due criteri per inizializzare la variabile di incrudimento isotropo.

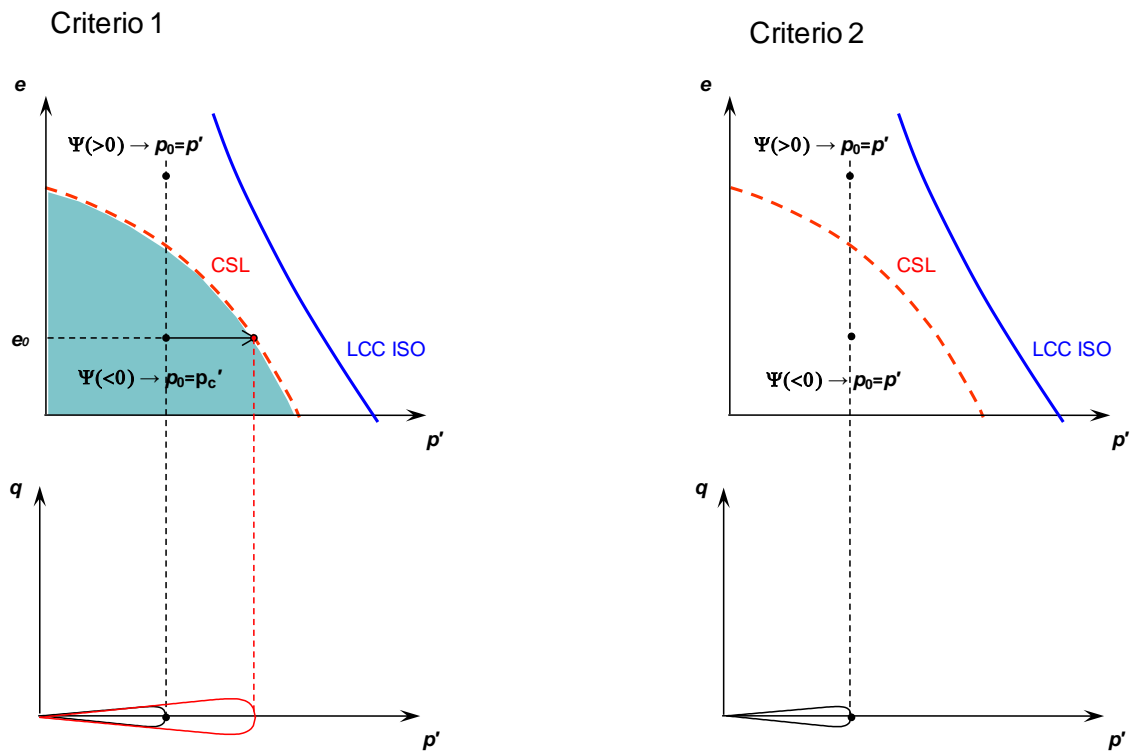


Fig. 5-3 Schema illustrativo delle procedura per inizializzare p_0 sulla base dello stato di riferimento (a) per il criterio 1. (b) per il criterio 2

1. Il primo criterio prevede la distinzione fra condizioni iniziali caratterizzate da valori positivi o negativi del parametro di stato. Per gli stati caratterizzati, nella condizione di preconsolidazione, da ψ negativo si assume p_0 uguale alla tensione media efficace a stato critico, valutata, nel piano di compressibilità, in corrispondenza dell'indice dei vuoti iniziale. Nel caso di ψ positivo si assume $p_0 = p'$.
2. Il secondo criterio attribuisce a p_0 il significato di una tensione di preconsolidazione. Il valore iniziale della variabile di incrudimento isotropo è assunto sempre coincidente con la massima tensione media efficace alla quale si ritiene sia stato assoggettato il materiale.

Le simulazioni numeriche delle prove di laboratorio finalizzate a calibrare i parametri del modello verranno condotte inizializzando la variabile di incrudimento isotropo con un criterio omogeneo, definito a priori, indipendente dalla specifica prova, ma che correla p_0 allo stato iniziale del materiale. Il presupposto per l'applicazione di entrambi consiste in una stima dell'indice dei vuoti, della tensione media efficace iniziale e di preconsolidazione del materiale.

Nelle Fig. 5-4 .a Fig. 5-5 e Fig. 5-6 sono mostrate in rosso le simulazioni numeriche delle diverse prove di laboratorio effettuate inizializzando p_0 come previsto dal primo criterio. Nella Fig. 5-4 .b il simbolo in rosso evidenzia nel piano di compressibilità l'ipotesi sul valore iniziale di p_0 coerente con il primo criterio.

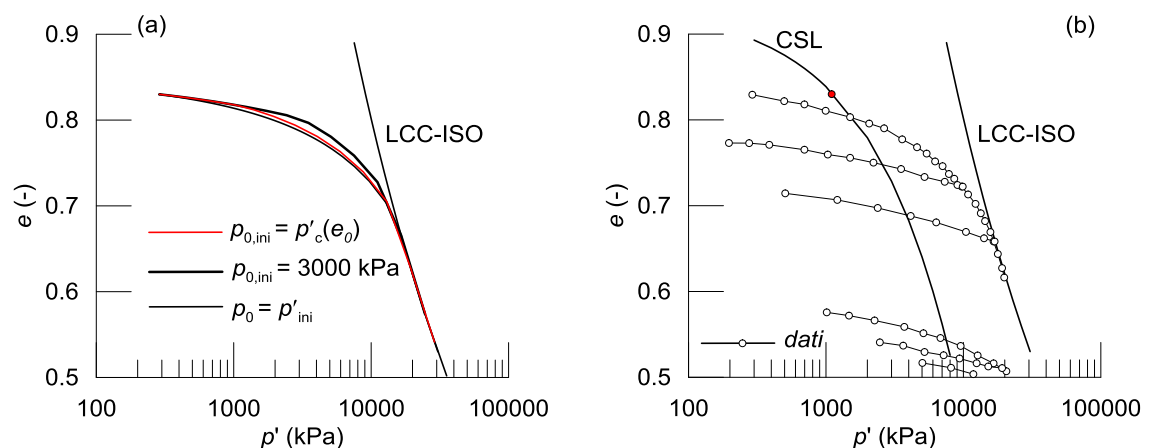


Fig. 5-4 Prove di compressione isotropa sulla sabbia di Toyoura: (a) curve simulate numericamente con il modello assumendo tre diversi valori iniziali della variabile di incrudimento isotropo. (b) Curve di compressione isotropa sperimentali (Miura 1979) LSC (Verdugo e Ishihara 1996) LCC-ISO del modello.

Analizzando i risultati delle simulazioni si può notare che il criterio 1 consente di ottenere una buona previsione della compressibilità (Fig. 5-4) e permette di simulare (Fig. 5-5) la stessa risposta non drenata prevista con l'ipotesi $p_0 = 3000$ kPa che, rispetto al caso di $p_0 = p'_{ini}$, dà luogo a un accordo migliore con i risultati sperimentali. La risposta prevista in prove triassiali consolidate drenate (Fig. 5-6) è poco alterata dalla scelta effettuata nel definire p_0 .

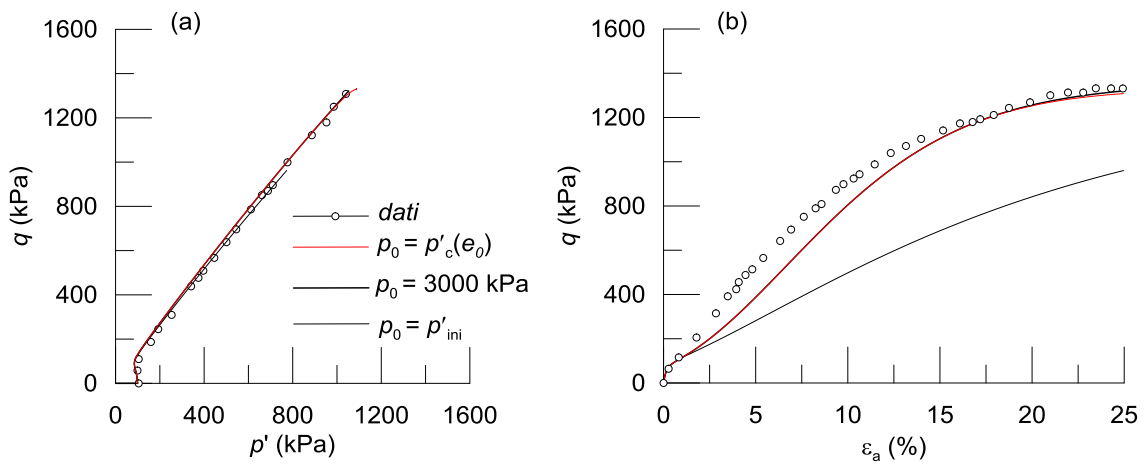


Fig. 5-5 Prova triassiale non drenata su un campione di Toyoura sand consolidato isotropicamente alla tensione media efficace di circa 100 kPa: confronto fra risultati sperimentali e simulazioni numeriche effettuate con diversi valori iniziali di p_0 (a) Percorsi tensionali efficaci. (b) relazioni ε_a - q .

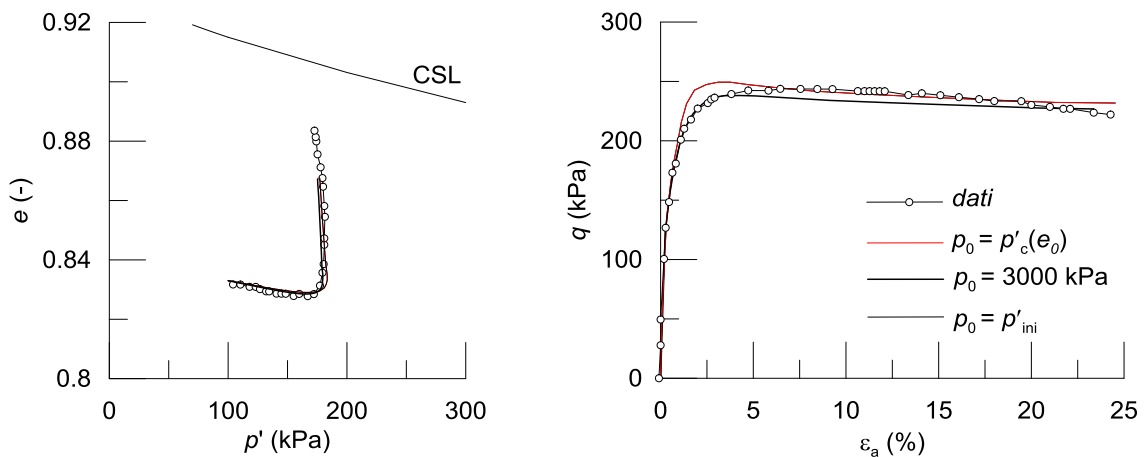


Fig. 5-6 Prova triassiale drenata su un campione di Toyoura sand consolidato isotropicamente alla tensione media efficace di 100 kPa: confronto fra risultati sperimentali e simulazioni numeriche effettuate con diversi valori iniziali di p_0 (a) Percorsi nel piano di compressibilità. (b) relazioni ε_a - q

In alcuni casi il criterio 1 potrebbe determinare un deterioramento nella capacità del modello di prevedere la compressibilità: si pensi ad esempio a sabbie caratterizzate da basse densità relative e sottoposte a tensioni medie efficaci iniziali considerevolmente inferiori a quella valutata a stato critico in corrispondenza dell'indice dei vuoti iniziale. In questo caso la compressibilità verrebbe trascurata in un campo di tensioni nel quale avrebbe invece senso modellarla. Assumendo p_0 coincidente con la tensione media efficace massima sperimentata dal materiale si può ottenere che la compressibilità sia considerata già a partire da stati prossimi a quello iniziale. In questo caso la risposta non drenata viene ad essere influenzata non solo dalle caratteristiche di dilatanza ma anche dai parametri che influenzano la compressibilità del materiale. Facendo ancora riferimento ai risultati illustrati in questo paragrafo, le simulazioni mostrano che per applicare il secondo criterio al fine di migliorare l'accordo con i risultati sperimentali sarebbe stato necessario assumere una diversa calibrazione dei parametri.

I criteri presentati in questo paragrafo sono stati definiti tenendo conto del modo in cui i due contributi che caratterizzano le formulazioni del modello costitutivo modificano i gruppi di parametri che maggiormente influenzano la risposta nei diversi percorsi tensionali. Nell'illustrare la procedura con la quale sono stati calibrati i parametri del modello si cercherà di far emergere queste motivazioni.

5.2. Condizioni iniziali dei campioni prelevati dalla discarica mineraria

Nel paragrafo precedente, sono stati mostrati due criteri, alternativi, per inizializzare la variabile di incrudimento isotropo del modello, da adottare sia per eseguire le simulazioni numeriche finalizzate alla calibrazione che per la simulazione di un problema al finito. Entrambi i criteri richiedono la conoscenza delle variabili esterne del materiale (stato tensionale ed indice dei vuoti) e di una proprietà intrinseca (l'andamento della proiezione della linea dello stato critico nel piano di compressibilità).

Le prove di laboratorio sulla base delle quali è stata effettuata, dagli autori, la calibrazione del modello per la sabbia di Toyoura riguardavano campioni ricostituiti, per i quali le condizioni iniziali (stato tensionale e indice dei vuoti) erano quindi note.

Le prove di laboratorio disponibili per i fanghi sono state eseguite su campioni indisturbati, prelevati dal bacino al termine della fase di costruzione. Per ricavare lo stato tensionale iniziale dei campioni è quindi necessaria una preliminare analisi del regime delle pressioni interstiziali, una valutazione del grado di sovraconsolidazione del materiale, del coefficiente di spinta in quiete e anche alcune considerazioni sull'indice dei vuoti iniziale. L'attenzione è incentrata sulla sola variabile di incrudimento isotropo dal momento che l'apertura modesta della superficie di plasticizzazione permette di assumere, nella condizione iniziale, α coincidente con η . Per la simulazione delle prove di laboratorio l'isotropia dello stato tensionale post campionamento permette di assumere $\alpha = 0$.

Le Tabella 5.1, Tabella 5.2 riepilogano le profondità di prelievo, le condizioni in sito e le condizioni relative alla fine della fase di consolidazione isotropa delle prove triassiali, drenate e non drenate. La Tabella 5.3 riassume le condizioni in sito e alcuni risultati ottenuti dall'elaborazione delle prove edometriche.

Tabella 5.1 Proprietà prove triassiali consolidate isotropicamente drenate

<i>Sondaggio</i>	<i>Campione</i>	<i>z</i> (m)	<i>Provino</i>	γ_v (kN/m ³)	u^* (kPa)	$\sigma'_{v,sito}$ (kPa)	p'^* (kPa)	e_{sito} (-)	$e_{sito,reg.$ (-)	e_c (-)	$e_{c,reg}$ (-)	p'_c (kPa)
IC01	3	13.25	1	16.45	0	217.9	136.9	1.82	1.93	1.76	1.87	70.0
			2					1.94		1.8	1.79	140.0
			3					1.9		1.68	1.71	280.0
SP03	1	11.65	1	16.13	36	151.8	93.1	1.97	1.99	1.92	1.94	60.0
			3					1.99		1.72	1.72	240.0

Tabella 5.2 Proprietà prove triassiali consolidate isotropicamente non drenate

<i>Sondaggio</i>	<i>Campione</i>	<i>z</i> (m)	<i>Provino</i>	γ_v (kN/m ³)	u^* (kPa)	$\sigma'_{v,sito}$ (kPa)	p'^* (kPa)	e_{sito} (-)	$e_{sito,reg.$ (-)	e_c (-)	$e_{c,reg}$ (-)	p'_c (kPa)
IC01	2	10.2	1	16.07	0	163.9	102.9	1.91	2.05	1.81	1.95	60.0
			2					1.82		1.65	1.88	105.0
			3					2.00		1.72	1.77	210.0
SP02	2	13.27	1	16.90	24	200.3	121.1	1.68	1.93	1.61	1.86	70.0
			2					1.93		1.68	1.68	258.0
			3					1.79		1.65	1.79	130.0

Tabella 5.3 Condizioni iniziali prove edometriche su campioni indisturbati

<i>Sondaggio</i>	<i>Campione</i>	z_p (m)	u^* (kPa)	$\sigma'_{v,sito}$ (kPa)	k_0 (-)	p'^* (kPa)	e (-)	$e_{,regr}$ (-)	$\sigma'_{v,y}$ (kPa)	OCR (-)	$\sigma'_{v,y}$ (kPa)	OCR (-)
IC01 (B)	2	10.4	0	167.2	0.442	105.0	2.06	2.04	118	0.71		1
	4	17.5	0	280.7	0.442	176.3	1.66	1.81	340	1.21		1
	6	22.3	0	357.7	0.442	224.7	1.73	1.70	300	0.84		1
PC-01 (B)	1	7.3	0	117.1	0.432	72.8	2.37	2.20	90	0.77		1
	3	13.5	0	216.5	0.432	134.5	2.15	1.92				1
	6	22.3	0	357.7	0.432	222.2	1.79	1.70	250	0.70		1
SC01- N (E)	1	5.2	0	83.4	0.432	11.2	1.91	2.35	160	1.92	18	0.22
	2	10.3	0	165.2	0.432	62.1	2.3	2.05	180	1.09	100	0.61
	3	12.2	0	195.7	0.432	31.1	1.77	1.97	195	1.00	50	0.26
	4	14.4	0	231.0	0.432	143.5	1.54	1.90	290	1.26	-	1
	6	18.2	0	291.9	0.432	118.1	2.04	1.79	280	0.96	190	0.65
SC02- N (F1)	2	12.3	0	197.3	0.432	67.7	1.92	1.97	160	0.81	109	0.55
	4	16.3	0	261.5	0.432	118.1	1.76	1.84	250	0.96	190	0.73
	6	20.3	0	325.6	0.432	242.3	1.82	1.74	350	1.07	390	1.20
SP-S1 (C)	1	6.7	14	93.5	0.432	58.1	1.89	2.24	78	0.83	-	1
	2	10.3	22	143.2	0.432	33.6	2.19	2.05	125	0.87	54	0.38
	3	16.1	38	220.2	0.432	67.7	1.42	1.85	270	1.2	109	0.49
SP02 (C)	2	13.3	24	189.3	0.509	121.1	1.8	1.93	180.0	0.95	180	0.95
	3	19.2	45	263.0	0.509	68.0	1.92	1.77	159.0	0.60	101	0.38
	4	23.4	45	330.3	0.509	255.7	1.67	1.68	350.0	1.06	380	1.15
SP03 (A)	1	11.6	34	152.1	0.419	93.2	1.96	1.99	180	1.18	-	1
	2	18.3	40	253.5	0.419	122.5	1.74	1.79	280	1.10	200	0.79
	3	21.4	50	293.3	0.419	232.8	1.76	1.72	380	1.30	380	1.30

Relativamente alla conoscenza del regime delle pressioni interstiziali, come spiegato nel Capitolo 4, i campioni oggetto delle prove di laboratorio esaminate in questo lavoro sono stati prelevati in corrispondenza della sommità dell'argine 9 o al centro del bacino di accumulo. Le misure piezometriche sono invece disponibili fino all'argine 7. La prima campagna di indagini per la quale si dispongono risultati è stata effettuata nel 2010, a un solo anno dalla fine delle attività di riempimento del livello 9 (terminate nel marzo del 2009 per la parte B e al 2008 per la parte A) quando non è detto che fossero completamente dissipate le sovrappressioni interstiziali indotte. Gli altri prelievi sono stati effettuati nel 2012 e 2015 e quindi interessano un materiale che dovrebbe aver raggiunto condizioni drenate.

Non essendo disponibili letture dei piezometri concomitanti con il prelievo dei campioni oggetto delle prove, le pressioni interstiziali in sito sono state stimate sulla base delle ultime misure disponibili, riportate nel paragrafo precedente, tenendo conto della data di prelievo e della collocazione in pianta della verticale di indagine. Dal momento che le letture dei piezometri riguardano solo l'anno 2009 le informazioni dedotte da queste probabilmente non possono essere applicate allo stesso modo per l'anno 2010 e 2015.

Per i campioni prelevati nel 2015 e 2012 si è ipotizzato il raggiungimento di una condizione drenata associata a un regime delle pressioni interstiziali che è stato ricavato estrapolando le informazioni disponibili al 2009 sotto gli argini da 1 a 7 anche al di sotto degli argini 8 e 9 e nella zona interna al bacino. Il regime stazionario delle pressioni interstiziali è stato approssimato con una distribuzione caratterizzata da valori nulli delle pressioni interstiziali. Per i campioni prelevati nel 2009 la vicinanza temporale con le operazioni di riempimento del nono livello ha indotto ad assumere pressioni interstiziali ricavate interpolando le valutazioni disponibili nello stesso anno in corrispondenza delle sezioni più prossime al sondaggio. I valori assunti per la pressione interstiziale sono riportati nelle Tabella 5.1, Tabella 5.2 e Tabella 5.3.

Alcune considerazioni devono essere effettuate anche a proposito dell'indice dei vuoti. Nelle Tabella 5.1, Tabella 5.2 e Tabella 5.3 sono riportati due valori dell'indice dei vuoti iniziale, indicando con e quello riportato nel certificato della prova e con e_{regr} quello calcolato, in funzione della profondità, con l'equazione ottenuta dalla regressione delle determinazioni sperimentali mostrata nel paragrafo precedente. La Fig. 4-3 (del capitolo precedente) mostra che le determinazioni sperimentali dell'indice dei vuoti, in corrispondenza di alcune profondità, sono alquanto disperse. Questa dispersione si rileva anche negli indici dei vuoti iniziali della tripletta di provini sottoposti alle prove triassiali (Tabella 5.1 e Tabella 5.2). Non è chiaro se questa dispersione dipenda dalla procedura seguita nel determinare il contenuto d'acqua, dal quale esso è stato ricavato. In alcuni casi è stato adottato come indice dei vuoti iniziale della prova quello ottenuto dalla regressione.

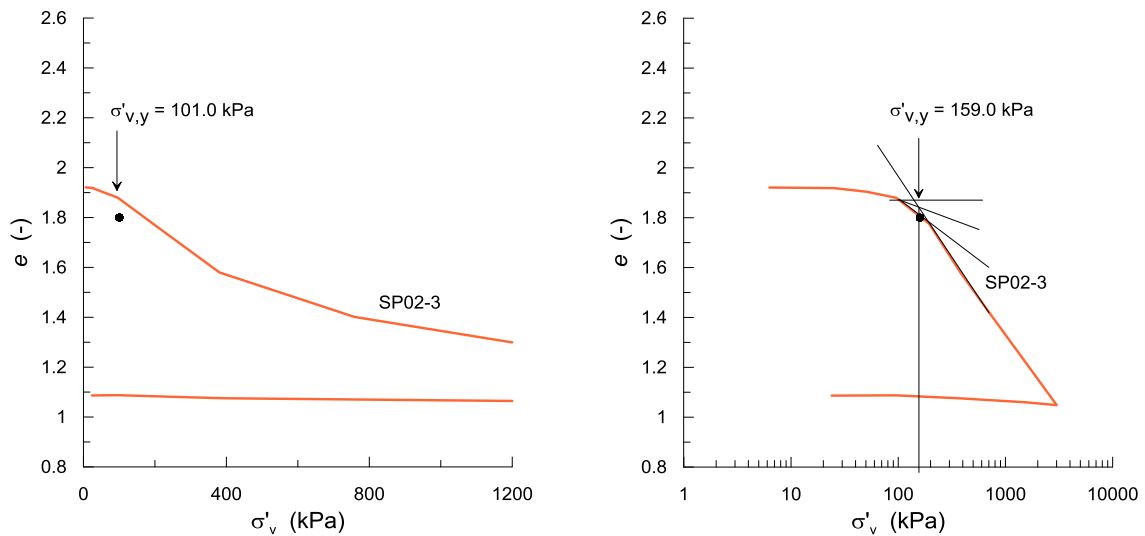


Fig. 5-7 Valutazione della tensione di preconsolidazione dalle curve di compressione edometrica sperimentali: (a) ingrandimento del primo tratto delle curve rappresentate in scala lineare (b) Costruzione di Casagrande.

Nella Tabella 5.3 sono riportati sia i valori della tensione di preconsolidazione calcolati con la costruzione di Casagrande che quelli ricavati esaminando le stesse curve di compressione edometrica rappresentate in scala lineare. Un esempio di calcolo è mostrato nella Fig. 5-7 mentre tutte le curve disponibili sono mostrate in appendice al capitolo. La tensione verticale efficace di preconsolidazione è valutata in modo sicuramente più attendibile nel caso sia ricavata come mostrato in Fig. 5-7. a. Dal momento che in un materiale normalmente consolidato ci si attende che il modulo edometrico aumenti progressivamente con la tensione verticale efficace, eventuali riduzioni di rigidità denotano il passaggio da una condizione di sovraconsolidazione a una di normal consolidazione oppure, in un materiale normalmente consolidato, il raggiungimento di una tensione verticale efficace prossima a quella in sito. Nelle ultime due colonne della Tabella 5.3 in corrispondenza di un grado di sovraconsolidazione OCR unitario non è riportato alcun valore della tensione di preconsolidazione. In questi casi le curve di compressione edometrica mostrano un continuo incremento del modulo edometrico, come se il materiale fosse ricostituito. In questi casi il campione ha probabilmente subito un disturbo dell'indice dei vuoti iniziale. Un eventuale rigonfiamento, spostando l'indice dei vuoti iniziale della prova a un valore più alto, comporta una maggiore deformabilità iniziale del provino che occulta la condizione di passaggio attraverso la tensione massima già sperimentata dal materiale. La

rappresentazione in scala semilogaritmica induce a determinare una tensione di preconsolidazione che in questi casi è da ritenersi apparente (e per questo non è stata considerata).

Laddove sia stato possibile determinare una tensione di preconsolidazione, dall'analisi delle curve in scala lineare, essa risulta leggermente inferiore rispetto a quella ricavata con la costruzione di Casagrande. In questi casi il materiale appare, al netto di qualche eccezione, sistematicamente sottoconsolidato.

È verosimile che anche questo risultato possa essere influenzato da un disturbo del campione ma è anche realistico il fatto che il materiale possa essere sottoconsolidato, soprattutto nel caso dei provini ricavati dai campioni prelevati nella campagna del 2010. Da un esame complessivo dei risultati riportati nella Tabella 5.3 e dal profilo di *OCR* rappresentato nella Fig. 5-8 si può sicuramente escludere che il materiale sia sovraconsolidato, come d'altronde ci si aspetta dalla storia di deposizione artificiale e dalla posizione dei punti di prelievo. Si può inoltre probabilmente affermare che la tensione efficace verticale non abbia raggiunto il valore riportato nella Tabella 5.3 come tensione efficace in sito.

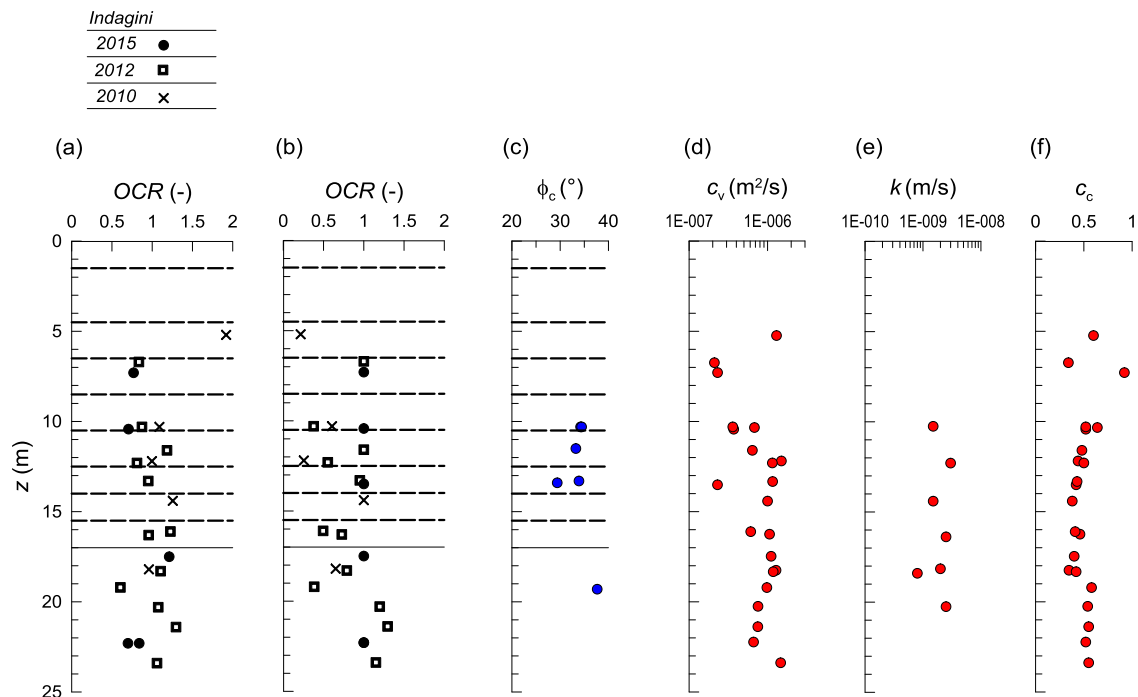


Fig. 5-8 Profili (a) *OCR* basato sulla σ'_{vy} ricavata dalla costruzione di Casagrande (b) *OCR* basato sulla σ'_{vy} ricavata all'esame delle curve edometriche in scala lineare. (c) Angolo di resistenza al taglio di stato critico. (d) coefficiente di consolidazione primaria. (e) Coefficiente di permeabilità. (f) indice di compressibilità.

Questa circostanza è in parte supportata da una certa coerenza fra le stime di OCR e le date di prelievo dei campioni Fig. 5-8. Ad esempio, il materiale prelevato nel 2012 appare (da OCR attendibile e cioè delle curve in scala lineare) spesso sottoconsolidato avendo assunto l'ipotesi di regime delle pressioni interstiziali stazionario. Se è vero che anche il materiale prelevato nel 2010 appare sottoconsolidato, per questi campioni il grado di sottoconsolidazione è maggiore di quello stimato per i campioni prelevati nel 2012 visto che per essi sono stati considerate nel calcolo le pressioni interstiziali misurate e non quelle stazionarie (assunte 0).

La tensione verticale efficace in sito del materiale sottoposto alle prove triassiali ed edometriche è stata ipotizzata uguale alla tensione di preconsolidazione ricavata dall'esame delle curve rappresentate in scala lineare oppure, quando queste non mostrino una condizione di passaggio, pari (convenzionalmente) alla tensione verticale efficace stimata. Si ricorda ancora che, anche se, quando inferiore a 1, il grado di sovraconsolidazione OCR è probabilmente da ritenersi superiore a quello riportato nella Tabella 5.3 a causa di un certo disturbo dell'indice dei vuoti, in ogni caso è altrettanto probabile che la tensione verticale efficace non arrivi alle stime riportate nella stessa Tabella 5.3.

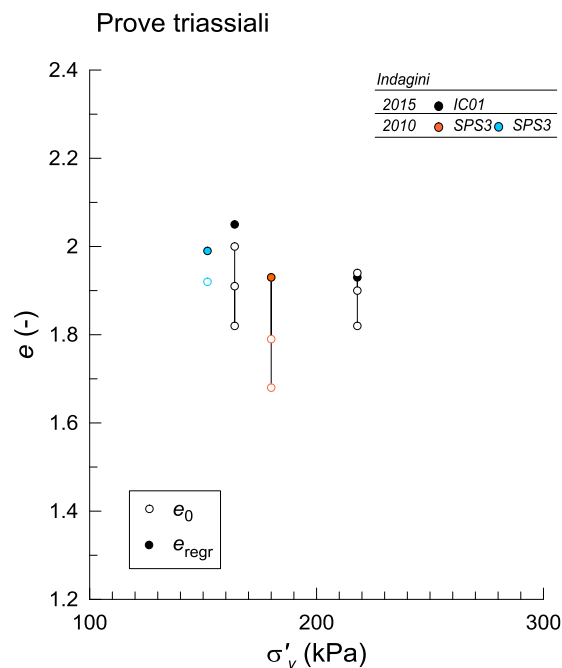


Fig. 5-9 Stime delle condizioni in sito dei campioni sottoposti alle prove triassiali.

Il grado di sovraconsolidazione è disponibile anche per il materiale sottoposto alle prove triassiali, dal momento che dal campione di provenienza sono stati ricavati sia provini per le triassiali che per le edometriche Tabella 5.3.

Nella Fig. 5-9 sono rappresentati nel piano $\sigma'_v - e$ gli stati in sito del materiale sottoposto alle prove triassiali. Dalla Fig. 5-9 .a si può notare, come già accennato all'inizio del paragrafo, che l'indice dei vuoti iniziale dei provini sottoposti alle prove triassiali (simbolo vuoto) è considerevolmente disperso. Sembra improbabile che provini distanziati di pochi centimetri possano presentare una variabilità di e_0 così grande. Nei certificati di prova non è segnalata la presenza di inclusioni o di particolari eterogeneità e neppure un marcato disturbo del campione.

Nella stessa Fig. 5-9 .a sono rappresentati con simbolo pieno gli indici dei vuoti calcolati con la regressione logaritmica, discussa nel paragrafo precedente, in corrispondenza della profondità di prelievo media delle triplette di provini. Si è assunto come maggiormente rappresentativo fra le tre valutazioni di e quello più prossimo al valore stimato dalla regressione. Nel caso del campione IC01-2, dal momento che la regressione fornisce un ulteriore valore rispetto ai tre misurati e che una correzione dell'indice dei vuoti in questo caso renderebbe non coerenti i percorsi tensionali esibiti dai provini nel corso delle prove triassiali consolidate non drenate, si è lasciato ad ognuno dei tre provini l'indice dei vuoti riportato nel certificato di prova. Nelle Tabella 5.1e Tabella 5.2 sono evidenziati in grassetto gli indici dei vuoti assunti nell'elaborazione della prova.

Nella stima delle condizioni in sito dei campioni sottoposti alle prove edometriche, come evidenziato nella Tabella 5.3, è stato corretto l'indice dei vuoti dei soli campioni per i quali si è modificato l'indice dei vuoti iniziale delle prove triassiali.

Tabella 5.4 Angoli di resistenza a taglio a stato critico ricavati dalle prove triassiali esaminate.

<i>Sondaggio</i>	<i>Campione</i>	$z_{provino}$ (m)	ϕ' (°)
IC01	2	10.4	33.89
SP02	2	13.3	29.39
SP03	1	11.6	35.52

Nel grafico della Fig. 5-8 c sono riportati i valori dell'angolo di resistenza al taglio di stato critico ϕ_c ricavati dall'interpretazione di una serie di prove triassiali. Nonostante il materiale sia classificabile come un limo, i valori risultano elevati, in accordo con quanto osservato nei fanghi rossi da Newson et al. (2006), evidenziando un'analogia con i terreni a grana grossa. I valori di ϕ_c riportati nella Tabella 5.4, insieme all'assunzione di un $OCR = 1$, sono stati impiegati per ricavare una stima del coefficiente di spinta in quiete k_0 con l'espressione $k_0 = (1 - \tan\phi) OCR^{\tan\phi}$ (Mayne e Khulawy (1982)) e riportati nella Tabella 5.3 per i sondaggi corrispondenti. Quando possibile, per ricavare k_0 si è scelto di usare le informazioni ricavate sul materiale più vicino a quello di interesse, allo scopo di evitare l'introduzione di ulteriori ipotesi. Nel caso dei campioni sui quali non sono state eseguite prove triassiali, si è scelto il valore di ϕ_c assunto nella calibrazione e ricavato dall'interpretazione complessiva delle prove triassiali disponibili, come illustrato nel paragrafo successivo.

La Fig. 5-8 .d mostra i profili del coefficiente di consolidazione verticale primaria c_v valutato in corrispondenza di tensioni comprese fra i 100 e i 200 kPa, e la Fig. 5-8 .e il coefficiente di permeabilità k ricavato a tensioni medie efficaci di 100 kPa con prove di permeabilità diretta in cella triassiale. La Fig. 5-8.f mostra infine il profilo del coefficiente di compressibilità. Diversamente degli angoli di resistenza a taglio di stato critico, i coefficienti di consolidazione, di compressibilità e anche le permeabilità sono sicuramente molto più prossimi a quelli tipici delle argille. Un primo esame delle caratteristiche meccaniche del materiale mostra la coesistenza di aspetti tipici delle sabbie ad altri più tipici delle argille. Anche questo risultato è ritrovato da Newson et al. (2006) che ne hanno spiegato le ragioni sulla base della natura chimica derivante dal processo produttivo nel quale il materiale si origina.

5.3. Definizione dei parametri del modello costitutivo

5.3.1. Parametri determinabili dall'elaborazione delle prove di laboratorio

5.3.1.1. Stato critico

Come illustrato nel §2.3.1, nel modello di Taiebat e Dafalias, (2008) lo Stato Critico costituisce una proprietà da fornire come input. La proiezione della Linea dello Stato Critico nel piano di compressibilità, indicata con CSL, è descritta dall'equazione 2.3.3, proposta da Li e Wang, (1998) per le sabbie. La pendenza della proiezione nel piano p' - q , come mostrato dalla 2.3.8, non è definita direttamente ma attraverso la pendenza a stato critico dell'asse della superficie di plasticizzazione α_c^c e il parametro m (§2.3.1 e §5.3.4.1). La traccia della Superficie di Stato Critico nel piano deviatorico dello spazio delle tensioni principali è rappresentata con la funzione proposta da Argyris et al. (1974). Lo stato critico è quindi completamente definito una volta ricavati i tre parametri che compaiono nell'equazione di Li e Wang, (1998), α_c^c , m , e il parametro c (2.3.9 §2.3.1). Nel piano p' - e mostrato nella Fig. 5-10.a i simboli in nero rappresentano gli stati finali della fase di consolidazione isotropa dei quattro set di prove triassiali drenate e non drenate.

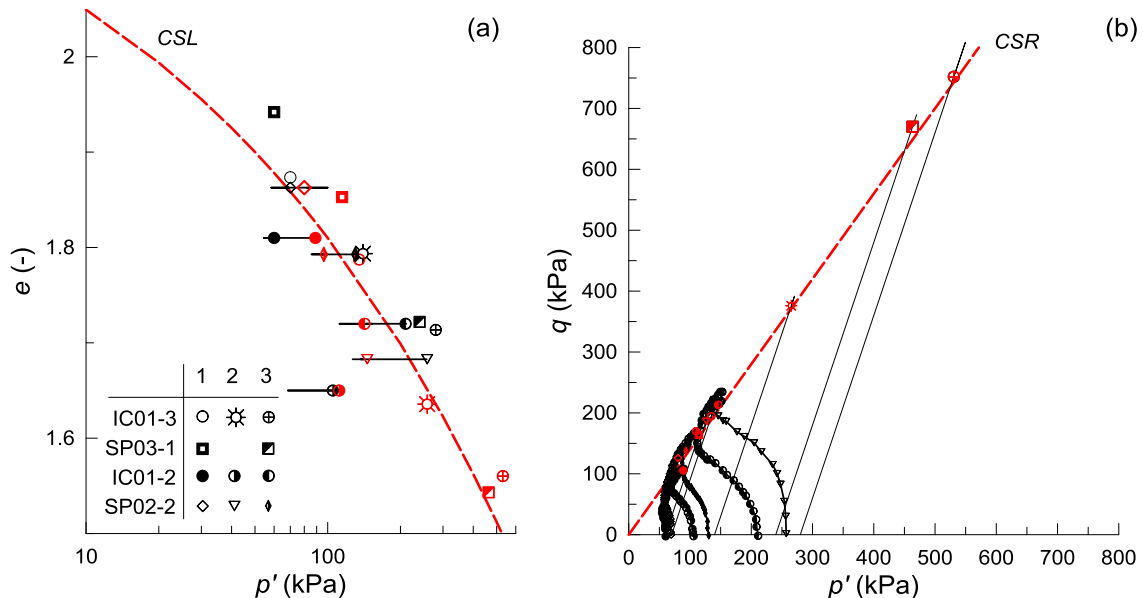


Fig. 5-10 Prove triassiali consolidate drenate e non drenate eseguite sui fanghi rossi: (a) stati iniziali e finali della fase deviatorica e CSL assunta nella calibrazione. (b) Percorsi tensionali, condizioni finali della fase deviatorica, CSL assunta.

Nel piano $p'-q$ mostrato nella Fig. 5-10 .b, con gli stessi simboli in nero, sono rappresentati i percorsi delle tensioni efficaci relative alla fase deviatorica delle quattro prove. Nelle due Fig. 5-10. i simboli in rosso evidenziano gli stati finali della fase deviatorica, assunti rappresentativi della condizione di stato critico. Le Fig. 5-11 mostrano le relazioni $\varepsilon_a - q$, distinte per le prove drenate e non drenate. Le Fig. 5-12 mostrano gli andamenti $\varepsilon_a - \varepsilon_v$ e $\varepsilon_a - \Delta u$.

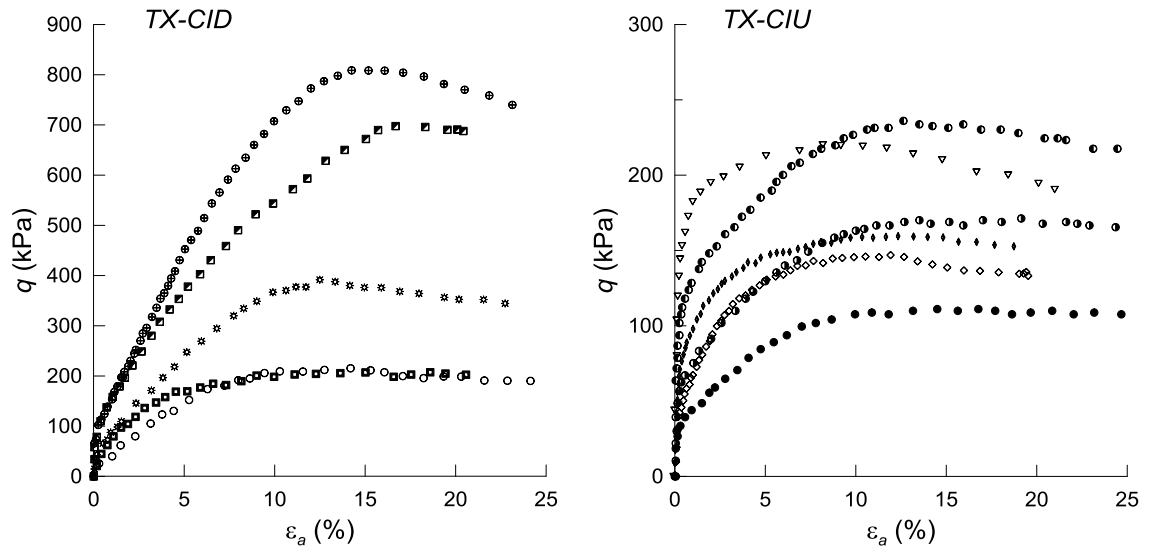


Fig. 5-11 Relazioni tensioni deformazioni da prove triassiali sperimentali sui fanghi rossi: (a) risultati delle prove consolidate drenate. (b) risultati delle prove consolidate non drenate.

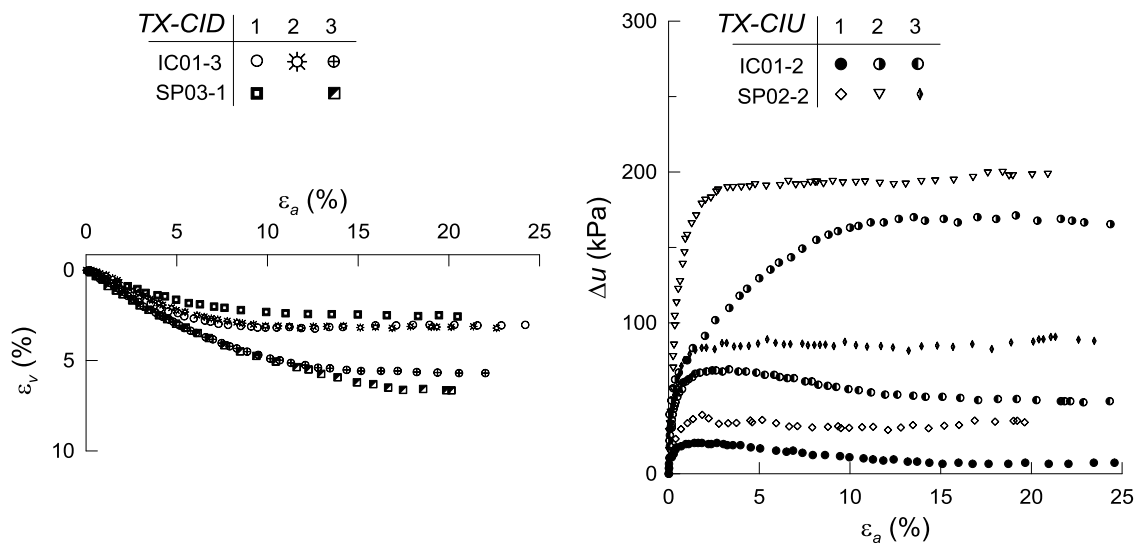


Fig. 5-12 Risultati sperimentali di prove triassiali sui fanghi rossi: (a) deformazioni volumetriche . (b) sovrappressioni interstiziali.

Dalla Fig. 5-11 a. si può notare che alcuni provini, nel corso della fase deviatorica della prova triassiale drenata, esibiscono una risposta leggermente fragile che però è associata a una risposta completamente contraente in termini di deformazioni volumetriche (Fig. 5-12 .a). Per il provino IC01 – 3 - (3) la fase finale della prova non individua esattamente la condizione di stato critico dal momento che q non ha ancora raggiunto un valore stazionario.

Nella Fig. 5-10 .a è rappresentata la linea dello stato critico scelta per effettuare le simulazioni.

La ricerca dell'andamento sperimentale della CSL, come spiegato nei paragrafi precedenti, oltre a consentire la definizione dei 3 parametri dell'equazione di Li e Wang, (1998), costituisce anche l'ultimo elemento necessario per poter inizializzare la variabile di incrudimento isotropa nel rispetto dei criteri introdotti nel § 5.1.2.

Per simulare, ad esempio, la fase deviatorica delle prove triassiali, entrambi i criteri richiedono che sia valutato il grado di sovraconsolidazione al termine della fase di consolidazione isotropa della prova. Scegliendo di seguire il criterio 1 è inoltre necessario calcolare ψ in corrispondenza del punto caratterizzato dall'indice dei vuoti corrente e dalla p' di preconsolidazione: se ψ risultasse negativo l'andamento della CSL servirebbe inoltre a calcolare il valore iniziale di p_0 . Anche se a rigore è il solo criterio 1 a richiedere la determinazione della CSL, la scelta tra i due criteri dovrebbe basarsi sul tipo di percorsi tensionali che si intende simulare e sulla valutazione della posizione reciproca, nel piano di compressibilità, fra lo stato iniziale di riferimento e la CSL.

Nella Fig. 5-13 sono quindi mostrati con simbolo in verde le condizioni iniziali stimate (con la procedura seguita nel § 5.2) per i provini sottoposti alle prove triassiali. Per la tripletta IC01-2, dal momento che non si è operata una correzione (cfr § 5.2) sono stati mantenuti gli stessi simboli per permettere di apprezzare la corrispondenza con gli stati a fine consolidazione isotropa (simboli in nero). Per le altre triplette lo stato iniziale è rappresentato con simbolo pieno, per ricordare (Fig.5.9 .a del § 5.2) che l'indice dei vuoti è stato corretto.

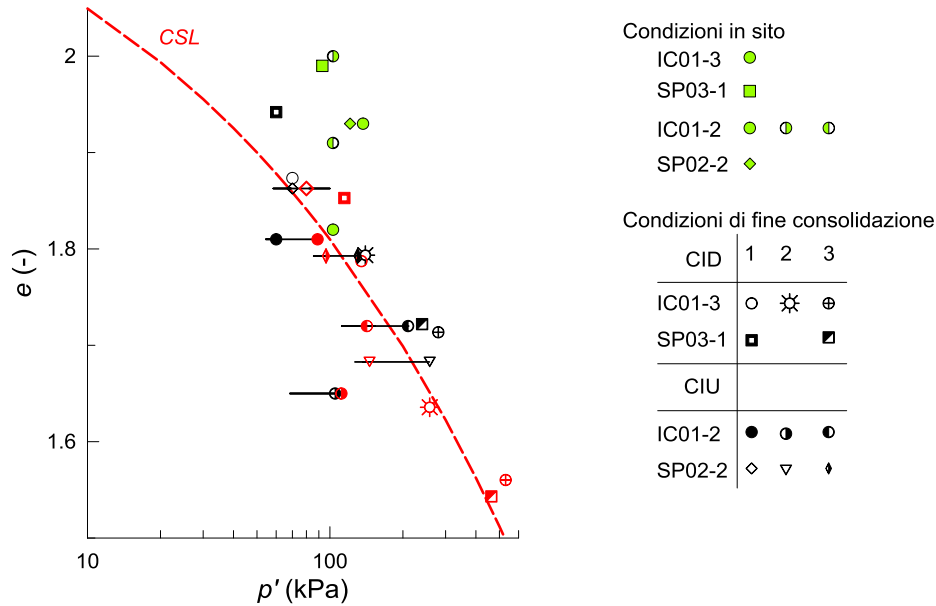


Fig. 5-13 Confronto fra assunzione relative alle condizioni in sito, condizioni di fine consolidazione isotropa dei provini sottoposti alle prove triassiali.

Dal confronto fra la tensione media efficace iniziale e quella relativa alla fine della fase di consolidazione isotropa potrebbe sembrare che i provini consolidati alle tensioni più basse si trovino in uno stato di sovraconsolidazione. In realtà, come discusso nel § 5.2, essendo la tensione media efficace iniziale influenzata dall'ipotesi sul coefficiente di spinta e soprattutto dal margine di incertezza associato alla determinazione della tensione di preconsolidazione, essa è probabilmente più bassa di quella inizialmente prevista.

Anche considerando la probabile riduzione della tensione media efficace nella fase post campionamento rispetto a quella in sito, non sarebbe comunque giustificata l'entità delle deformazioni volumetriche positive rilevate durante la fase di compressione isotropa che dovrebbero essere scontate dal materiale in uno stato pressoché elastico. Le considerevoli deformazioni volumetriche riscontrate nella fase di compressione isotropa consentono di ritenere che la tensione media efficace massima sperimentata dal materiale sia per tutti i provini quella raggiunta alla fine della fase di fine consolidazione.

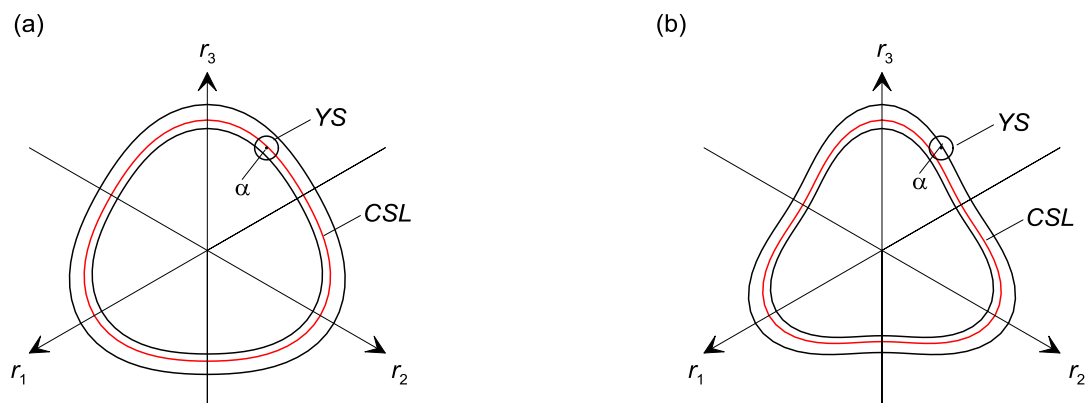


Fig. 5-14 (a) Effetto del parametro c sulla funzione proposta da Argyris (1974): (a) Traccia delle superfici con il valore assunto $c=0.85$ (b) Traccia delle superfici con $c=0.7$

L'ulteriore parametro necessario a definire l'andamento della Superficie di Stato Critico nello spazio delle tensioni rappresenta la proporzione fra il rapporto tensionale valutato a stato critico in condizioni di estensione e il corrispondente valore determinato in compressione triassiale, indicato con c . Mancando prove in estensione, il parametro è stato assunto in modo tale da garantire la convessità della funzione proposta da Argyris et al (1974) (Fig. 5-14)

5.3.1.2. Curva di compressione limite isotropa LCC-ISO

La Curva di Compressione Limite isotropa (equazione 2.3.4 del §2.3.1) rappresenta una proprietà intrinseca del materiale e dovrebbe essere individuata attraverso prove di compressione isotropa condotte fino a livelli tensionali sufficientemente elevati. Quando però le caratteristiche di compressibilità del materiale, come nel caso in esame, sono indagate attraverso prove edometriche, i parametri che definiscono l'andamento della LCC-ISO nel piano $p'-e$ devono essere ricercati iterativamente. Si può procedere ricercando inizialmente la pendenza nel piano $p'-e$, rappresentato in scala bilogarithmica, della LCC-EDO, che in questo piano assume andamento lineare ed è parallela alla LCC-ISO e successivamente variare iterativamente la tensione di riferimento fino a riprodurre in modo soddisfacente i risultati delle prove edometriche.

La Fig. 5-15 mostra le curve di compressione edometrica ottenute sui campioni per i quali sono state eseguite anche prove triassiali.

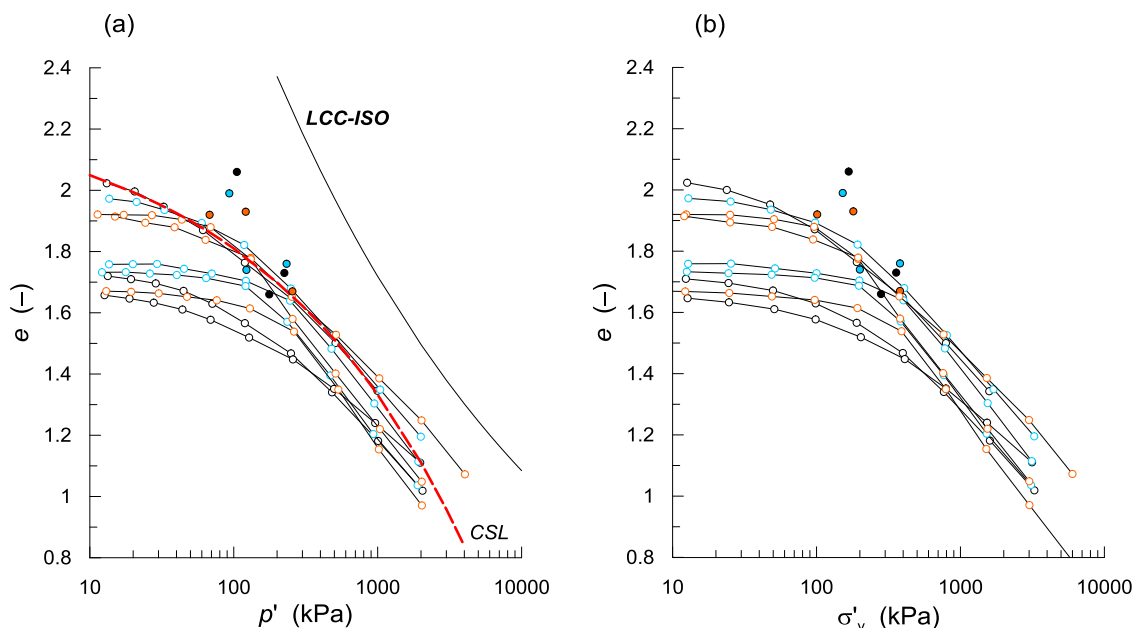


Fig. 5-15 Curve di compressione edometrica sperimentali sui campioni indisturbati di fanghi rossi per i quali sono disponibili prove triassiali e condizioni in sito (a) Risultati sul piano $p'-e$ (b) Risultati sul piano σ'_v-e .

Nella Fig. 5-15 b. le stesse curve sono rappresentate nel piano $e-\sigma'_v$. In entrambi i grafici, i simboli rappresentano gli stati in sito del materiale sottoposto alle diverse prove. I tratti delle curve rappresentativi delle condizioni di ricompressione, che in alcuni casi tendono a intersecarsi, sembrano rimanere sostanzialmente paralleli o al più convergere a gruppi sulla base dell'indice dei vuoti iniziale.

Dalla Fig. 5-15 a si può notare che i tratti rappresentativi delle condizioni di normal-consolidazione risultano posizionati anche al di sotto della linea dello stato critico, in modo analogo a quanto accade nelle sabbie e tendono a rimanere sostanzialmente paralleli ad essa. La mancata convergenza verso una unica linea e la collocazione delle curve nel piano di compressibilità allontanano il comportamento di questo limo, caratterizzato da elevata plasticità, da quello delle argille nonostante si rilevi una elevata compressibilità. Gli stati iniziali in sito dei campioni risultano anch'essi collocati sia sopra che sotto la linea dello stato critico.

Nella Fig. 5-16 sono rappresentati sul piano $e-p'$ e $e-\sigma'_v$ tutte le curve di compressione edometrica disponibili. I risultati sperimentali esaminati complessivamente confermano quanto rilevato dal gruppo più ristretto di curve. Dal momento che un'unica linea di normal consolidazione edometrica non sembra essere stata raggiunta, per questo limo artificiale anche l'inclinazione della LCC-ISO è stata ricercata iterativamente.

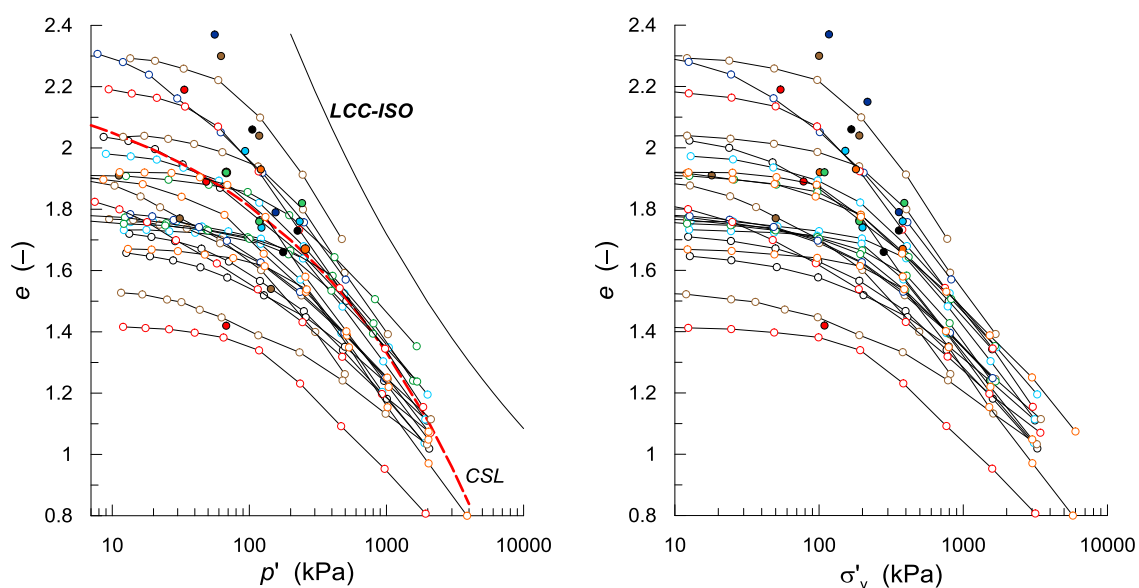


Fig. 5-16 Curve di compressione edometrica: (a) risultati sperimentali e andamento assunto nella calibrazione per la LCC-ISO (b) Risultati sperimentali nel piano $e-\sigma'_v$

Nella Fig. 5-16 a è rappresentata la LCC-ISO ritenuta soddisfacente al termine del processo di calibrazione.

In linea teorica le prove edometriche potrebbero consentire, nel caso in cui venissero eseguite misure delle tensioni radiali, di valutare direttamente anche il parametro X (che compare nell'equazione 2.3.32 § 2.3.3).

5.3.1.3. Costanti adimensionali delle leggi elastiche

La costante adimensionale G_0 compare nella relazione che esprime la dipendenza del modulo di taglio G dall'indice dei vuoti e dalla tensione media efficace

$$G = G_0 p_{at} \frac{(2.97 - e)^2}{(1 + e)} \left(\frac{p}{p_{at}} \right)^{1/2} \quad (2.3.25 \text{ § 2.3.2}).$$

Come suggerito da Taiebat e Dafalias, (2008), G_0 può essere ricercato esaminando la pendenza del tratto iniziale delle relazioni $\varepsilon_q - q$ ottenute dalle prove triassiali drenate. Seguendo questa procedura G_0 viene valutato in modo deterministico e una volta trovato un valore accettabile esso può essere fissato. Con questo approccio il parametro non viene determinato da una rigidità calcolata in corrispondenza di uno stato di riferimento. Nel contesto del legame è definito in modo strumentale a riprodurre correttamente il tratto iniziale delle prove di

laboratorio. Il parametro G_0 non rappresenta quindi il modulo di taglio a piccoli livelli di deformazione

La costante adimensionale K_0 compare nella relazione che esprime la dipendenza del modulo di rigidezza volumetrico K dall'indice dei vuoti e dalla tensione media efficace

$$K = K_0 p_{at} \frac{1+e}{e} \left(\frac{p}{p_{at}} \right)^{2/3} \quad (2.3.24 \text{ § 2.3.1}).$$

Poiché nell'espressione $K = K_0 p_{at} f(e) f(p)$

la funzione $f(e)$ non consente di individuare un valore di e che soddisfi $f(e) = 1$, il parametro K_0 non può essere ricondotto a una rigidezza misurata in corrispondenza di uno stato di riferimento. È particolarmente importante scegliere il parametro K_0 in modo

che il coefficiente di Poisson $\nu = \frac{3K - 2G}{2G + 6K}$ assuma valori realistici in tutto l'intervallo di

stati oggetto del problema applicativo. Fissato G_0 dalle prove triassiali, per definire K_0 è necessaria una valutazione preliminare del campo di indici dei vuoti e tensioni medie efficaci in sito.

Nella simulazione numerica delle prove edometriche il rapporto tra i valori assunti per K_0 e G_0 , influenzando il coefficiente di Poisson, incide sull'evoluzione del coefficiente di spinta nel corso di processi di compressione e scarico. Se il coefficiente di Poisson assume valori eccessivamente elevati possono essere modellate risposte non realistiche e si possono manifestare problemi di carattere numerico, come verrà mostrato nel paragrafo successivo.

La Fig. 5-17 mostra il profilo dell'indice dei vuoti approssimato con la regressione riportata in Fig. 4-3. L'indice dei vuoti è stato assunto costante nell'intervallo di profondità esterno a quello nel quale sono state effettuate le misure sperimentali sulle quali si basa la regressione. L'andamento logaritmico estrapolato in superficie fornirebbe infatti valori eccessivamente elevati. Il valore di K_0 per il quale sono tracciati gli andamenti di K e G è quello assunto nella calibrazione definitiva.

Il valore di K_0 può essere inizialmente ipotizzato nel rispetto di questo vincolo e successivamente modificato, una volta definiti gli altri parametri, in modo da migliorare l'accordo nella simulazione dello scarico delle prove di compressione isotropa. Il parametro K_0 influenza inoltre la pendenza nel piano di compressibilità del tratto di

carico delle curve di compressione edometrica e isotropa finché $p' < p_0$. Il parametro è inoltre molto influente sull'inclinazione nel piano $p' - q$ dei percorsi in tensioni efficaci relativi alle prove triassiali non drenate finché $p' < p_0$. È quindi necessario verificare l'adeguatezza del valore assunto.

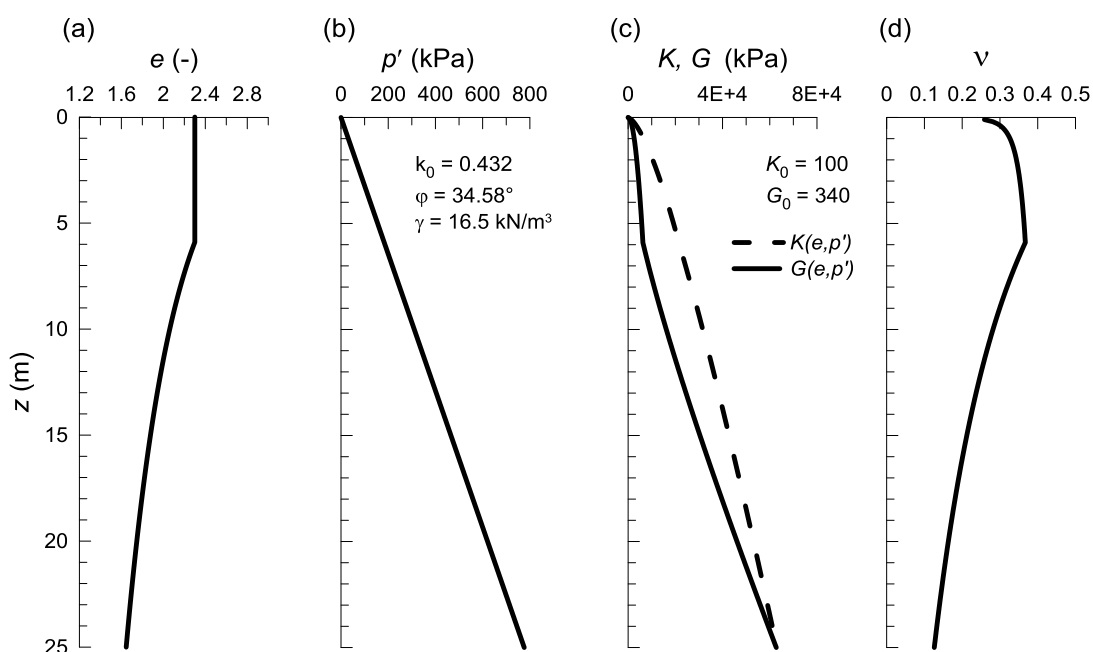


Fig. 5-17. Profili nel bacino: (a) andamento approssimato assunto per l'indice dei vuoti, (b) tensione media efficace stimata assumendo la distribuzione delle pressioni interstiziali di lungo termine (c) andamenti del modulo di rigidezza volumetrica e di taglio ottenuti con le equazioni del modello (d) andamento del coefficiente di Poisson ricavato da K e G.

5.3.1.4. Parametri n_d e n_b

Il parametro n_d può essere calcolato da prove triassiali drenate e non drenate nelle quali si manifesti il passaggio attraverso la condizione di trasformazione di fase. La relazione che lega il rapporto tensionale α al parametro di stato ψ nella condizione di trasformazione di fase è espressa dalla seguente equazione:

$$n^d = \frac{\ln\left(\frac{\alpha^d}{\alpha^c}\right)}{\psi^d} \quad (5.3.1)$$

La (5.3.1) è ricavata eguagliando a zero il contributo alla dilatanza espresso dalla 2.3.37 (§2.3.3). Nella (5.3.1) il pedice d è usato per evidenziare il valore attinto dalle variabili in corrispondenza della trasformazione di fase. Dall'elaborazione della singola prova triassiale si ottiene una coppia di valori α e ψ relativi al raggiungimento della condizione di trasformazione di fase. Più precisamente, dall'elaborazione della prova si ricava η , ma avendo già definito m si può determinare α . Il parametro n_d può essere quindi ricavato tramite una regressione lineare che passi per l'origine del sistema di riferimento $\ln(\alpha^d / \alpha^c) : \psi^d$. Nel rispetto della (5.3.1) i dati sperimentali dovrebbero mostrare che, quanto più, nel piano di compressibilità, la trasformazione di fase si manifesta vicino alla CSL (in termini di ψ) tanto più, nel piano $p'-q$, è basso il rapporto di tensione corrispondente al raggiungimento della condizione.

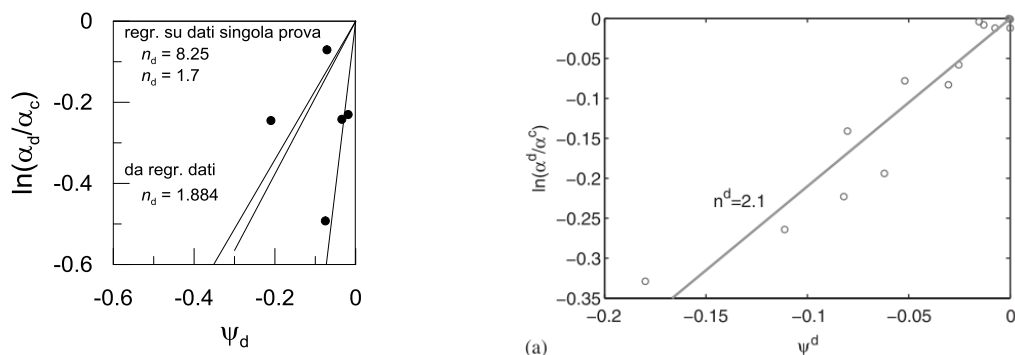


Fig. 5-18 Determinazione di n_d dall'elaborazione delle prove triassiali drenate: (a) per i campioni indisturbati di limo (b) per i campioni ricostituiti di Toyoura sand (Taiebat e Dafalias (2008)).

La procedura suggerita dagli autori appare lineare dal punto di vista teorico, ma non è in realtà immediato seguire questo approccio per determinare n_d . In primo luogo non è semplicissimo individuare il valore di α in corrispondenza del quale avviene il passaggio attraverso la transizione di fase. In alcuni casi i percorsi tensionali mostrano un tratto quasi verticale nel quale α continua a crescere a parità di p' che ne rende incerta la valutazione. In secondo luogo, le prove devono aver consentito di ottenere in modo particolarmente preciso le proiezioni della Linea dello Stato Critico su entrambi i piani $e-p'$ e $p'-q$. Inoltre, per effettuare la regressione è importante disporre di un elevato numero di prove nelle quali si manifesti questo tipo di comportamento. Nel caso di prove eseguite su campioni indisturbati di un materiale assortito granulometricamente la previsione di n_d può risultare dispersa e nel caso in cui la base di dati sia limitata non si riesce a tracciare la regressione. La Fig. 5-18 mostra ad esempio che nel caso del limo in esame, la regressione nel piano $\psi_d : \ln(\alpha_d / \alpha_c)$ fornisce $n_d = 1.884$. Il valore stimato per il parametro è però poco significativo a causa del fatto che, i dati, già poco numerosi, appaiono anche alquanto dispersi. La trasformazione di fase si verifica nel limo in due prove triassiali, se si elaborassero separatamente i dati relativi alle due prove si otterrebbero i valori di n_d riportati nella Fig. 5-18 .a. Il valore di n_d assunto nella calibrazione è stato ricavato modificando la prima ipotesi fino a raggiungere il miglior accordo nella simulazione numerica della fase deviatorica delle prove triassiali.

Un discorso analogo a quello fatto per n_d vale anche per il parametro n_b , che può essere ricavato solo da prove triassiali drenate nelle quali si manifesti un comportamento fragile associato a una risposta dilatante. In corrispondenza della mobilitazione della resistenza di picco il parametro α eguaglia $\alpha_c^b = \alpha_c^c \exp(-n_b \psi)$ (con riferimento a compressione triassiale), imponendo quindi tale l'uguaglianza si ricava la seguente espressione:

$$n^b = \frac{\ln\left(\frac{\alpha^c}{\alpha^b}\right)}{\psi^b} \quad (5.3.2)$$

Nella (5.3.2) il pedice b è usato per evidenziare il valore attinto dalle variabili in corrispondenza della mobilitazione della resistenza di picco. Come nel caso della

trasformazione di fase, la condizione resistenza di picco si mobilitata per valori negativi del parametro ψ . Nel caso del limo oggetto dello studio, una risposta leggermente fragile è stata riscontrata in provini che manifestano un comportamento completamente contraente e che alla fine della fase di consolidazione hanno un valore positivo del parametro ψ . Per tali ragioni, poiché nel caso in esame non si hanno informazioni sulla risposta meccanica esibita dal materiale in prove triassiali drenate eseguite a partire da stati iniziali caratterizzati da ψ negativo, n_b è stato ricavato iterativamente. Nel §5.3.4.2, si mostra l'effetto prodotto da variazioni di n_b (e n_d) sulla risposta prevista dal modello nella simulazione di prove triassiali drenate e non drenate. Una descrizione fenomenologia degli effetti che i parametri producono sulla risposta prevista dal modello può essere utile nell'ambito della procedura iterativa, che si rende necessaria per effettuare la calibrazione, a capire come definirli in modo da conseguire il miglior accordo con la risposta sperimentale.

5.3.2. Calibrazione e confronto con i risultati sperimentali

Nella Tabella 5.5 sono riportati i parametri assunti nella calibrazione definitiva. I parametri che definiscono lo stato critico e la costante adimensionale G_0 sono stati definiti dalle prove di laboratorio come illustrato rispettivamente nei paragrafi precedenti. I parametri n , m , V , il cui significato è chiarito nel §5.3.4.1, poco influenti sulle previsioni, sono stati assunti tenendo conto dei valori tipici. I restanti parametri sono stati definiti attraverso un procedimento iterativo basato sul confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali, mantenendo fisso il criterio secondo il quale si inizializza p_0 .

Tabella 5.5. Parametri calibrazione definitiva

Calibrazione Ultima LCC																		
e_0	λ	ξ	α_c	c	m	G_0	K_0	h_0	c_h	n_b	A_d	n_d	p_r	ρ_c	θ	X	n	V
(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(kPa)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)
2.29	0.48	0.3	1.4	0.85	0.1	340	100	2.0	0.4	1.4	0.2	6	9 000.0	0.2	0.9	1	20	500

Le considerazioni svolte nel paragrafo §5.2 consentono di affermare che il materiale sottoposto alle prove triassiali, al termine della fase di consolidazione, è in condizioni di normal-consolidazione. Nel caso delle prove triassiali, la tensione media efficace e l'indice dei vuoti di riferimento per la scelta del valore iniziale di p_0 sono quelli di fine consolidazione (Tabella 5.1 Tabella 5.2). Noto l'andamento della linea dello stato critico nel piano di compressibilità è inoltre immediato valutare il segno di ψ_0 .

Sulla base del criterio 1, la simulazione delle prove triassiali, drenate e non drenate, per tutti i provini caratterizzati, al termine della fase di consolidazione isotropa, da ψ negativo viene condotta assumendo per p_0 il valore di p'_c calcolato a stato critico in

corrispondenza dell'indice dei vuoti di fine consolidazione $p'_c = \left[\frac{p_a^\zeta (e - e_c)}{\lambda} \right]^{\frac{1}{\zeta}}$. Per i provini caratterizzati da ψ positivo p_0 viene assunta coincidente con p'_c .

Il confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali delle prove triassiali drenate e non drenate è quindi mostrato rispettivamente nelle Fig. 5-19 e Fig. 5-20.

La Fig. 5-19 .b mostra in tutti i casi una previsione soddisfacente delle deformazioni volumetriche fino a livelli deformativi del 5%. La previsione è ottima su tutto il campo di deformazioni assiali per il provino SP03-1-(3). Nei restanti casi le previsioni comportano una sovrastima della deformazione a stato critico. È anche opportuno notare che questa sovrastima è in realtà dovuta alla previsione relativamente dispersa della LSC. La sovrastima delle deformazioni volumetriche è dovuta al fatto che lo stato finale delle prove triassiali è scostato dall'andamento analitico assunto per la CSL. La previsione delle relazioni ε_a - q è migliore nel caso dei provini maggiormente confinati. Globalmente la previsione può ritenersi accettabile dal momento che l'accordo fino a livelli di deformazione assiale del 3% e la previsione del deviatore al 25% di deformazioni sono buoni. Il picco di resistenza esibito da alcuni provini (ad esempio IC01-3-(3)) non può d'altronde essere riprodotto con il modello visto che lo stato di fine consolidazione del materiale è caratterizzato da ψ positivo.

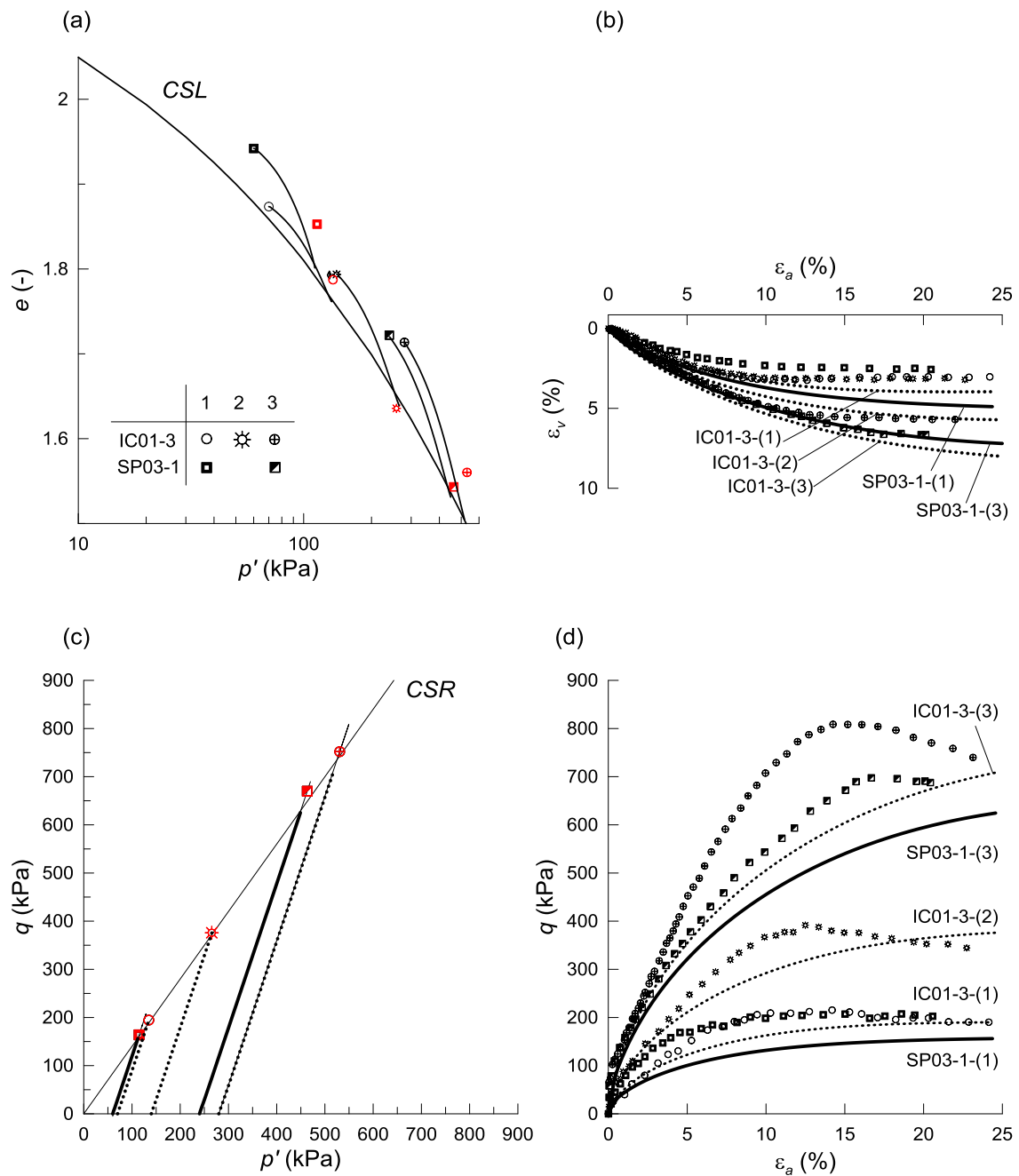


Fig. 5-19 Prove triassiali consolidate drenate eseguite sui fanghi rossi: confronto fra i risultati sperimentali e le simulazioni numeriche effettuate con la calibrazione definitiva assumendo il criterio 1 (per la definizione di p_0). (a) Previsioni nel piano e - p' . (b) Relazioni fra deformazioni volumetriche e assiali (c) Percorsi tensionali efficaci. (d) Relazioni ε_a - q .

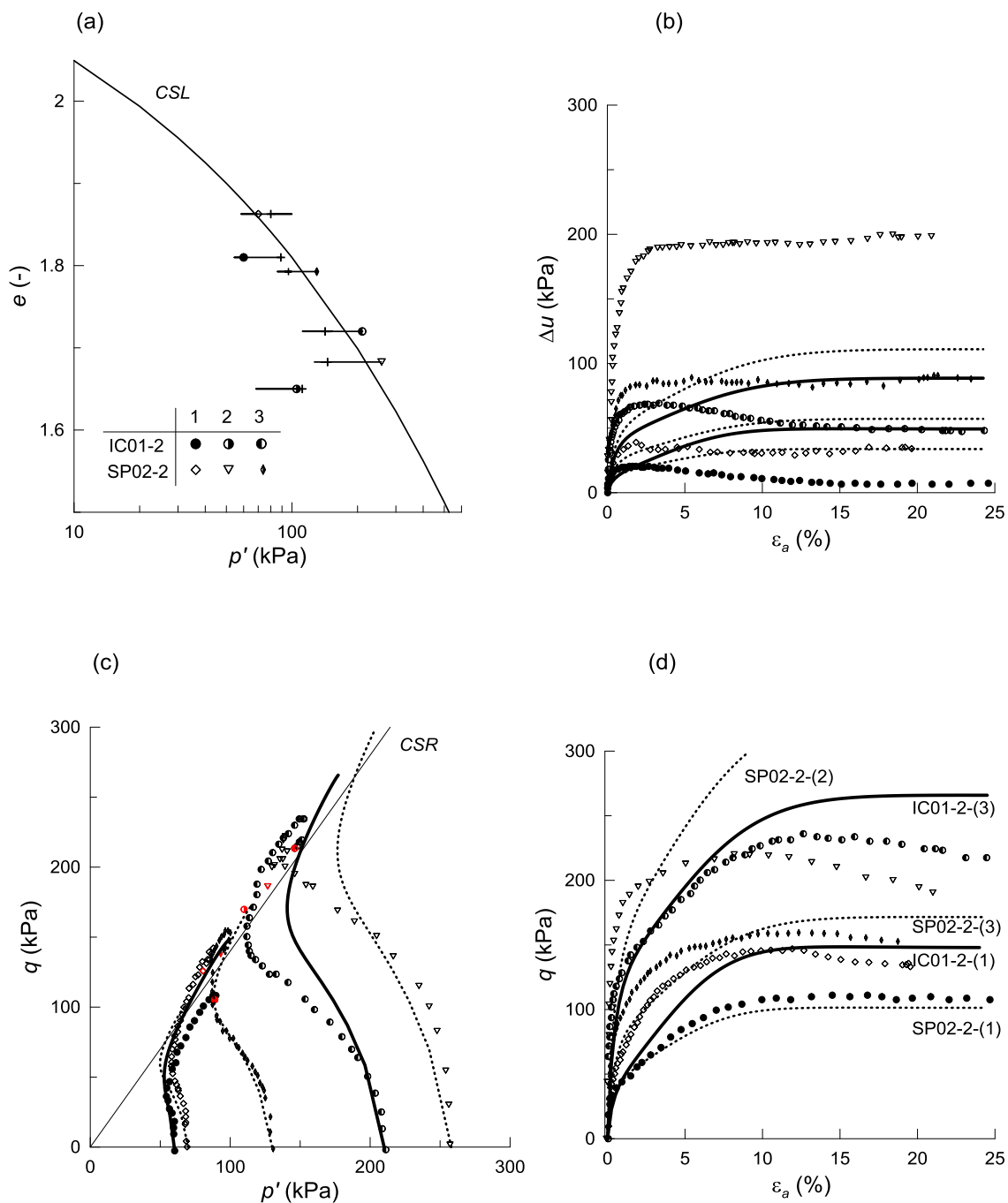


Fig. 5-20 Prove triassiali consolidate non drenate eseguite sui fanghi rossi: confronto fra i risultati sperimentali e le simulazioni numeriche effettuate con la calibrazione definitiva assumendo il criterio 1 (per la definizione di p_0). (a) Previsioni nel piano e - p' . (b) Relazioni fra deformazioni sovrappressioni interstiziali e deformazioni assiali (c) Percorsi tensionali efficaci. (d) Relazioni ε_a - q .

La Fig. 5-20.c. mostra il confronto fra i risultati sperimentali e i percorsi tensionali efficaci previsti per cinque delle sei prove triassiali non drenate. Il confronto per il provino IC01-2-(2) è omesso per rendere più chiara la rappresentazione. Dalla Fig. 5-20.a, per il provino IC01-2) è infatti evidente che la tensione media efficace nella

condizione di stato critico rilevata sperimentalmente è molto minore del valore che verrebbe previsto dal modello, a causa della CSL assunta nella calibrazione. A causa della differenza è facile immaginare che il percorso tensionale efficace numerico, dopo un iniziale accordo, tende a discostarsi dall'andamento sperimentale, comportando in ultimo una grande sovrastima della resistenza a stato a critico. Al netto delle differenze determinate dalla dispersione nella previsione della LSC, il legame costitutivo sembra adatto a riprodurre i caratteri della risposta non drenata di questo limo. È riprodotta sia la tendenza marcatamente dilatante esibita dal provino IC01-2-(1) che il comportamento caratterizzato dal raggiungimento della condizione di trasformazione di fase e associato a un deviatore monotonamente crescente esibito dai provini caratterizzati da ψ iniziale positivo, che frequentemente è ritrovato nei limi. Per i provini SP02-2-(1) e IC01-2-(1) si rilevano una considerevole sottostima e sovrastima della resistenza del terreno a causa, ancora, della dispersione nella valutazione sperimentale dello Stato Critico nei piani $p':q$ e $p'-e$.

La Fig. 5-21 mostra il confronto fra quattro curve di compressione edometrica sperimentali e i risultati ottenuti dalle relative simulazioni numeriche (effettuate con i parametri della Tabella 5.5 e il criterio 1). Le curve edometriche sperimentali, nello specifico, sono relative ai campioni denominati IC01-4, PC01-1, SP03-1, SP03-2, le cui condizioni iniziali coprono un ampio intervallo di indici dei vuoti iniziali.

Nelle simulazioni numeriche, si è ipotizzato che lo stato tensionale efficace del campione rimanga isotropo anche dopo l'inizio della prova sperimentale; con questa approssimazione la tensione media efficace iniziale è assunta coincidente con il primo valore della tensione verticale efficace riportato nel certificato di prova.

Nella Fig. 5-21.a i simboli in nero individuano lo stato di riferimento per l'inizializzazione della variabile di incrudimento isotropo. La tensione media efficace di riferimento è la stima della massima tensione media efficace che si suppone il provino abbia sperimentato. Nel caso delle prove edometriche la suddetta tensione coincide con la tensione media efficace di preconsolidazione ricavata dall'elaborazione delle curve edometriche sperimentali. Nel § 5.2 si è spiegato che in alcuni campioni l'esame del primo tratto delle curve edometriche sperimentali, rappresentate in scala lineare, ha messo in luce un possibile disturbo dell'indice dei vuoti iniziale (frequente in tali

materiali, ad es. Hoeg et al.(2000)). I campioni disturbati sono riconoscibili nella Tabella 5.3 perché in tali casi non è riportato il valore della σ'_{vy} . Assumendo che il disturbo abbia rimosso gli effetti indotti dalla storia tensionale, i campioni disturbati sono stati assimilati a campioni ricostituiti, per i quali la tensione di preconsolidazione è stata assunta coincidente con quella iniziale.

I simboli in rosso nella Fig. 5-21 evidenziano infine il valore assunto per p_0 nel caso di stati di riferimento caratterizzati da ψ negativo.

I risultati riportati nella Fig. 5-21 consentono di affermare che, nonostante dai risultati sperimentali non sia stato possibile individuare la LCC-EDO, la posizione della LCC-ISO ricercata iterativamente e il valore del parametro θ , influente sull'andamento del tratto di transizione verso il regime LCC, possono ritenersi adeguati a riprodurre il comportamento sperimentale. L'applicazione del criterio 1 per l'inizializzazione della variabile di incrudimento isotropo comporta un deterioramento della previsione della compressibilità solo nel caso del campione più denso, per il quale la tensione di riferimento risulta considerevolmente più bassa rispetto a quella valutata a stato critico sulla CSL. Il mancato accordo deve in genere ritenersi trascurabile sino al raggiungimento della tensione di preconsolidazione visto che il tratto rappresentativo della prova dovrebbe essere quello successivo al raggiungimento della $\sigma'_{v,y}$.

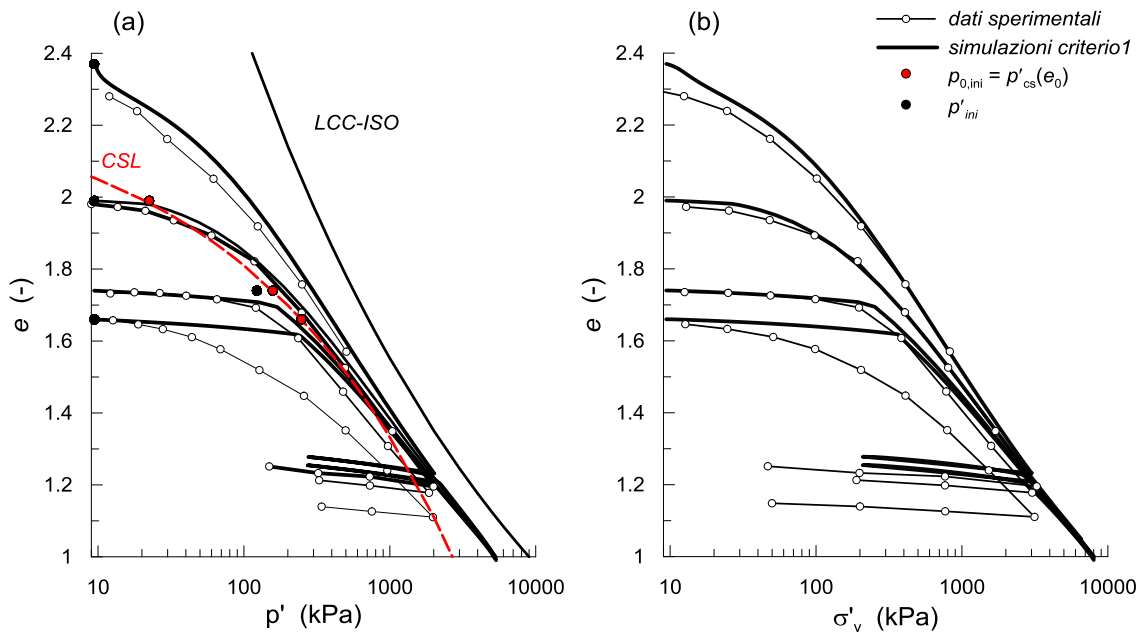


Fig. 5-21 Confronto fra i risultati sperimentali di prove edometriche e le relative simulazioni numeriche effettuate con il criterio 1, nel piano di compressibilità: (a) $\log(p')$: e (b) $\log(\sigma'_v)$: e .

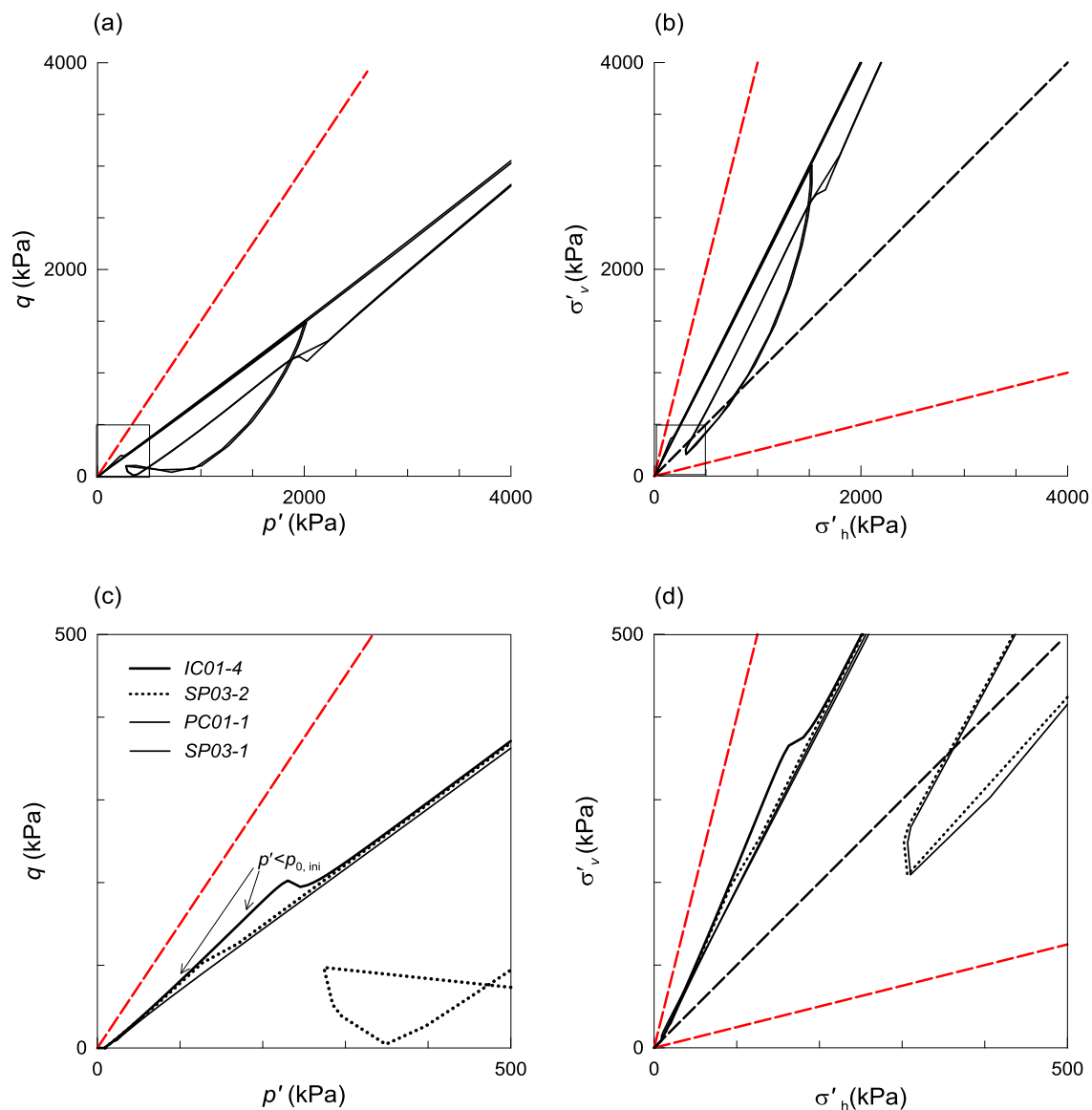


Fig. 5-22. Confronto fra i risultati sperimentali di prove edometriche e le relative simulazioni numeriche effettuate con il criterio I (per inizializzare p_0). Percorsi tensionali nel piano: (a) p' - q (b) σ'_h - σ'_v . (c) Ingrandimento dei percorsi nel piano: (c) p' - q (d) σ'_h - σ'_v .

Nelle Fig. 5-22 a. e b., i risultati ottenuti dalle simulazioni numeriche delle prove edometriche sono rappresentati nei piani p' - q e σ'_h - σ'_v . Dalle Fig. 5-22 .a e .b si può notare che i percorsi tensionali efficaci relative alle quattro prove risultano analoghi. Nei casi in cui sono state simulate le fasi di scarico e ricarica sperimentali, si nota che il percorso tende progressivamente verso la linea a η costante (o k_0 costante) raggiunta prima dello scarico. Nelle Fig. 5-22 .a e .b sono ben visibili i valori di p' e σ'_v in corrispondenza dei quali, nella fase di carico, viene nuovamente raggiunta p_0 , rimasta costante al valore della tensione media efficace in corrispondenza della quale è stato

eseguito lo scarico. Il modello riproduce correttamente la dipendenza, riscontrata sperimentalmente nelle sabbie (Lee et al. (2013), del coefficiente di spinta in quiete k_0 dall'indice dei vuoti e dalla tensione media efficace.

Nelle Fig. 5-21 .c.d sono mostrati ingrandimenti dei tratti iniziali dei percorsi tensionali previsti dal modello. La linea marcata e quella tratteggiata evidenziano le simulazioni relative ai campioni IC01-4 e SP03-1 (simulazioni caratterizzate da una maggiore differenza fra p_{ini} e $p_{0,ini}$). Nei casi in discussione, si nota la transizione del percorso tensionale da una condizione nella quale il contributo del tipo 2 alle deformazioni plastiche previste dal modello è nullo, poiché $p' < p_{0, ini}$, a una condizione η (o k_0) costante che si associa a una risposta governata proprio dalle caratteristiche di compressibilità.

La calibrazione, oltre a mostrare un accordo soddisfacente con i risultati sperimentali garantisce una previsione verosimile dei percorsi tensionali efficaci in prove di compressione edometrica. La calibrazione scelta non è stata infatti definita solo sulla base del confronto con i risultati sperimentali disponibili, ma anche cercando di raggiungere una modellazione verosimile dei percorsi tensionali, di interesse applicativo, per i quali non si hanno informazioni (come sarà mostrato nel § 5.3.4.2).

5.3.3. Effetto dell'inizializzazione della variabile di incrudimento isotropo p_0

Il secondo criterio per l'inizializzazione della variabile di incrudimento isotropo prevede che p_0 sia assunta coincidente con la tensione massima alla quale si pensa sia stato assoggettato il materiale, a prescindere dal segno di ψ .

In questo sotto-paragrafo, nel mostrare l'effetto prodotto sulle previsioni del modello, calibrato con i parametri della Tabella 5.5, dalla modifica del criterio con il quale si inizializza la variabile di incrudimento p_0 , si pone l'attenzione solo sulle simulazioni effettuate sui provini il cui stato iniziale di riferimento è rappresentato, nel piano di compressibilità, da un punto posto sotto la linea dello stato critico. I criteri 1 e 2 differiscono infatti solo nel caso in cui lo stato iniziale è caratterizzato da ψ negativo. Le simulazioni effettuate a partire da condizioni iniziali caratterizzate da ψ positivo sono identiche a quelle mostrate nel §5.3.2.

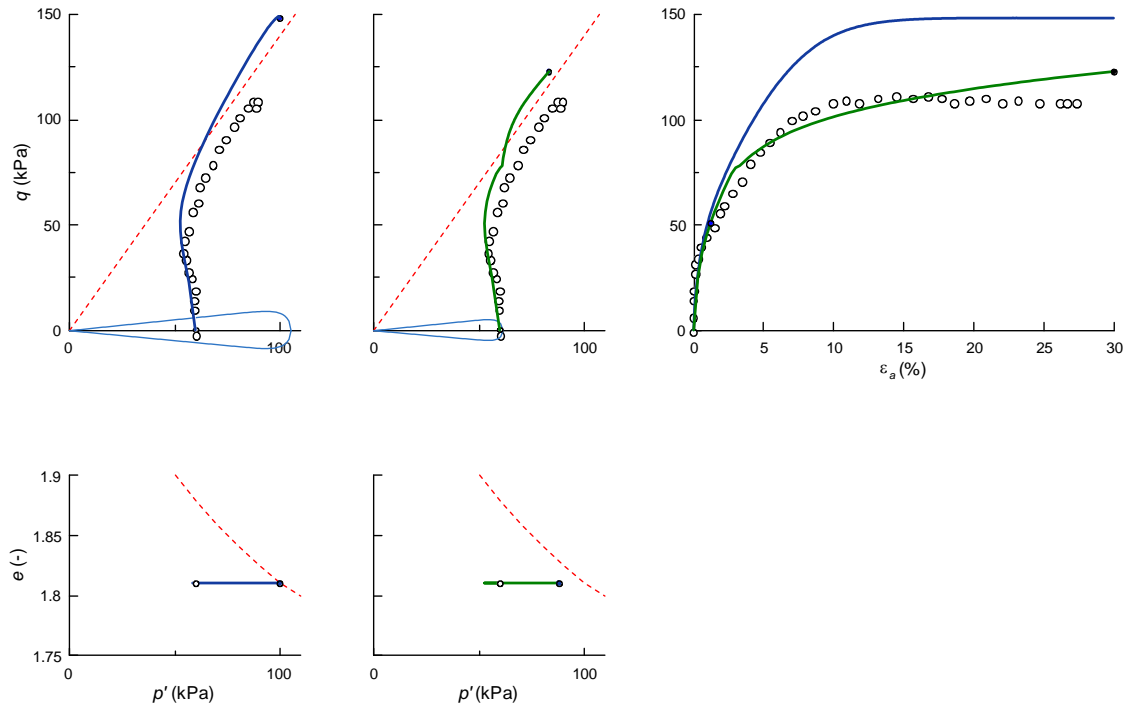


Fig. 5-23 Confronto fra i risultati sperimentali e le simulazioni numeriche della prova IC02-2-(1) effettuate (con la stessa calibrazione) assumendo il criterio 1 e 2 per la definizione di p_0 .

Per la simulazione numerica delle prove triassiali, avendo appurato (§5.3.1.1) che alla fine della fase di consolidazione isotropa il materiale non è sovraconsolidato, nel rispetto del criterio 2, p_0 è stata sempre assunta uguale alla tensione media efficace di consolidazione del provino.

Relativamente al caso delle prove non drenate, la Fig. 5-23 mostra in dettaglio i risultati della simulazione numerica della prova IC01 – 2 (1). Il percorso tensionale rappresentato in blu nella Fig. 5-23 .a è il percorso previsto dal modello costitutivo, calibrato con i parametri della Tabella 5.5, per il provino IC01 – 2 (1), normalmente consolidato e caratterizzato da ψ iniziale negativo, quando p_0 è inizializzato al valore di p' calcolato a stato critico. Il percorso è quello già mostrato nel sotto paragrafo precedente. Nella Fig. 5-23 .b è mostrato in verde il percorso previsto, per lo stesso provino, a parità di calibrazione, quando p_0 è assunta coincidente con la tensione media efficace di fine consolidazione. Nonostante la risposta prevista riproduca globalmente il comportamento sperimentale, cogliendo sia la tendenza dilatante che l'evoluzione della rigidità nel piano ε_a - q , nella Fig. 5-23 sono evidenti delle discontinuità sia del percorso in tensioni efficaci che della relazione $\varepsilon_a : q$.

La Fig. 5-24 consente di spiegare la causa di queste discontinuità. Nel caso in cui, per i provini normalmente consolidati caratterizzati da ψ iniziale negativo, p_0 viene considerata come una tensione di preconsolidazione, nella fase dilatante, mentre la tensione media efficace si approssima a raggiungere il valore iniziale di p_0 , per il soddisfacimento della condizione di consistenza, lo stato del materiale tende a collocarsi sull'asse della superficie. La riduzione della distanza dello stato dall'asse della superficie, come mostrato meglio nel sottoparagrafo successivo, determina da un lato l'attivazione dell'incrudimento isotropo di p_0 e dall'altro una forte attenuazione dell'effetto della dilatanza (del tipo1) sulla risposta meccanica. L'attivazione dei contributi di tipo 2 alla formulazione implica che nel corso della fase dilatante, la variazione di p' , inizialmente governate dalla sola dilatanza del vecchio modello SANISAND, dipendente dal valore corrente di ψ , passa ad essere governata prevalentemente dalla compressibilità, dipendente dalla distanza, nel piano p' - e , dello stato dalla LCC.

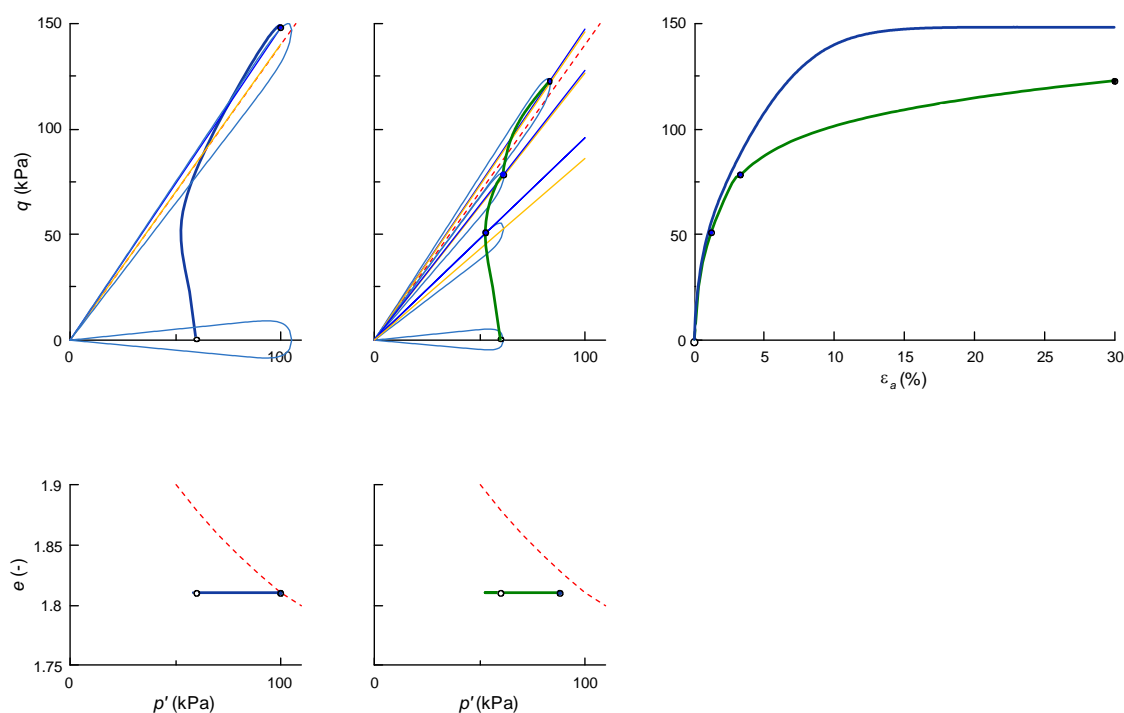


Fig. 5-24 Dettaglio relativo all'effetto del criterio assunto per inizializzare la variabile di incrudimento isotropo sulla risposta non drenata di un campione normalmente consolidato. La linea tratteggiata in rosso rappresenta la proiezione della linea dello stato critico, in giallo è evidenziata la posizione corrente dell'asse della superficie di plasticizzazione e in blu il livello tensionale corrente η .

Le discontinuità mostrate nelle Fig. 5-23 e Fig. 5-24 dipendono quindi dalla formulazione del modello. Nel caso della simulazione eseguita per il limo il passaggio tra la risposta governata dai contributi del tipo 1 e due alla formulazione è ben visibile, ma il fenomeno è presente anche nel percorso mostrato nella Fig. 5-2.

La ragione della distinzione nel modo di inizializzare p_0 prevista dal criterio 1, che si basa sulla verifica del segno di ψ nella condizione iniziale di normal-consolidazione, nasce dal tentativo di risolvere questa discontinuità derivante dalla formulazione del modello. Poiché la discontinuità si produce quando la tensione media efficace raggiunge il valore iniziale di p_0 prima di quello a stato critico, evitando che questo accada essa viene eliminata. In questo modo, l'effetto sulla risposta del contributo di tipo 1 alla dilatanza non viene improvvisamente attenuato nel corso della prova e si impedisce che le caratteristiche di compressibilità inizino ad incidere sulla risposta prevista.

I percorsi tensionali relativi alla fase deviatorica della prova non drenata risultano privi di discontinuità assumendo un valore iniziale di p_0 maggiore della tensione media efficace valutata a stato critico in corrispondenza di e_{ini} . Il fatto di assumere per p_0 proprio il valore di p' calcolato in corrispondenza dello stato critico costituisce la scelta che minimizza il deterioramento delle capacità previsionali della compressibilità. La penalizzazione delle capacità predittive della compressibilità, che sono tanto migliori quanto più p_0 è prossima allo stato iniziale, viene così circoscritta al caso delle sabbie sciolte o dei limi poco consistenti, soggetti a bassi stati tensionali (e questo dipende anche dalla forma della linea dello stato critico).

Nel caso di ψ iniziale positivo, poiché la risposta deviatorica non drenata è complessivamente contraente, la tensione media efficace non può attingere il valore iniziale di p_0 prima di quello valutato a stato critico e il contributo di tipo 2 alla formulazione non può essere attivato nel corso delle prove non drenate. Per gli stati iniziali caratterizzati da ψ positivo è per questo che il criterio 1 continua ad attribuire a p_0 il significato di tensione di preconsolidazione. Non sussistono infatti buone ragioni che giustifichino l'allontanamento di p_0 da tale tensione media efficace. Quando ψ iniziale è positivo, i percorsi tensionali raggiungono lo stato critico in corrispondenza di p' minore di quello iniziale. Ai fini della modellazione della compressibilità appare logico e conveniente (nel caso di ψ iniziale è positivo) assumere p_0 coincidente con la tensione media efficace di preconsolidazione.

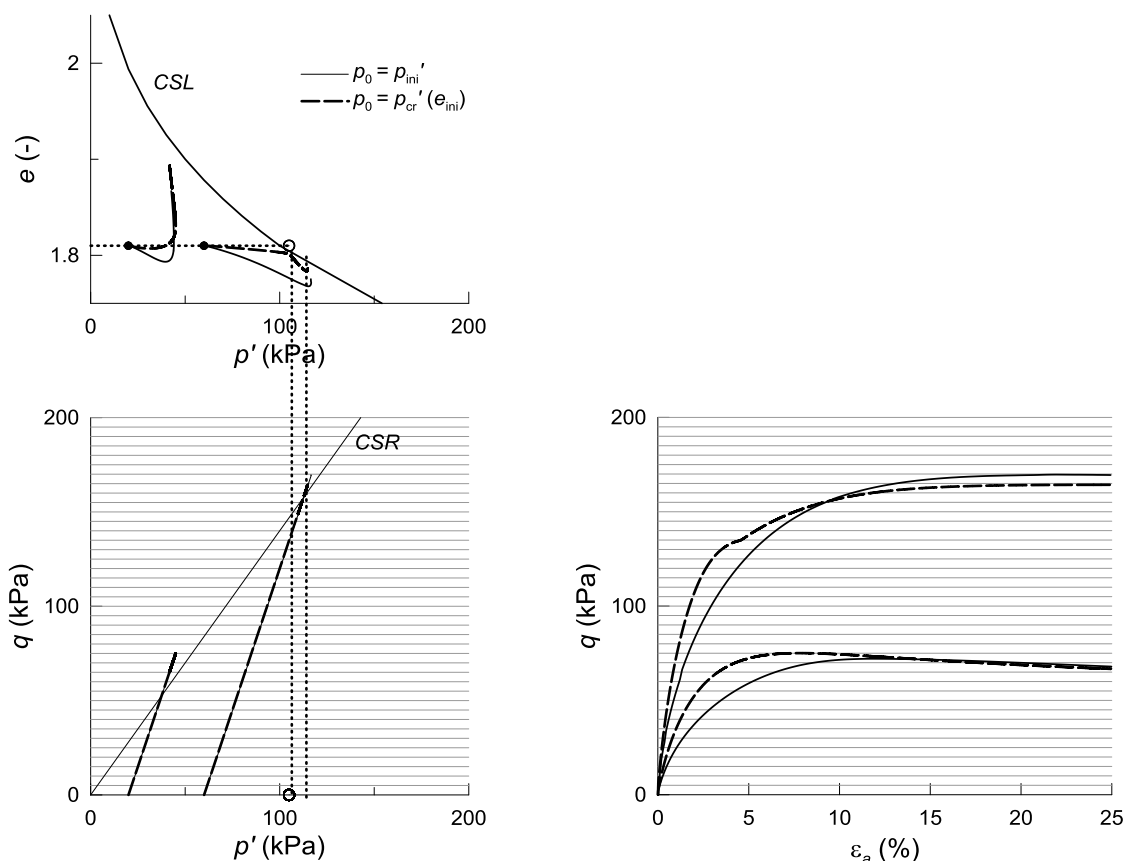


Fig. 5-25 Prove triassiali consolidate drenate: confronto fra le simulazioni numeriche effettuate con la calibrazione riportata nella Tabella 5.5 assumendo due diverse ipotesi sul valore iniziale di p_0 rispettivamente coerenti con il primo e secondo criterio.

Nella Fig. 5-25 sono rappresentate con linea continua i risultati relativi alle simulazioni numeriche della fase deviatorica di due prove triassiali drenate effettuate con la calibrazione definitiva (Tabella 5.5), iniziando $p_{0,ini} = p'_{ini}$ (criterio 2). Con linea tratteggiata sono invece rappresentati i risultati delle simulazioni effettuate adottando il criterio 1 ($p_{0,ini} = p'_{cr}(e_{ini})$). Nel caso delle simulazioni che iniziano dalla p'_{ini} più bassa l'ipotesi sul valore iniziale di p_0 determina effetti solo quantitativi sulle deformazioni volumetriche e sul valore della resistenza di picco. Nel caso di p'_{ini} più alto, la simulazione effettuata assumendo il criterio 1 mostra una discontinuità sia nel piano di compressibilità che nel piano $\epsilon_a \cdot q$. In questo caso si verifica il passaggio da una condizione $p' < p_0$ a $p' = p_0$ poiché il valore di p'_{cr} calcolato in corrispondenza di e iniziale risulta inferiore a quello raggiunto in condizioni drenate. Le discontinuità possono essere evitate, ancora mantenendo il criterio 1, ma assumendo per p_0 un valore incrementato rispetto a $p'_{cr}(e_0)$. Dalle simulazioni si conferma che le discontinuità si originano nel passaggio da una condizione $p' < p_0$ a $p' = p_0$. Il fatto che nella fase

deviatorica delle prove drenate le variazioni di p' siano imposte, essendo uguali alle tensioni totali, comporta che nell'eventuale passaggio da $p' < p_0$ a $p' = p_0$ la risposta non viene modificata qualitativamente: ciò che si nota è un incremento delle deformazioni volumetriche. In assenza di prove sperimentali eseguite su provini inizialmente caratterizzati da ψ negativo non è possibile stabilire quale delle due previsioni sia più adeguata.

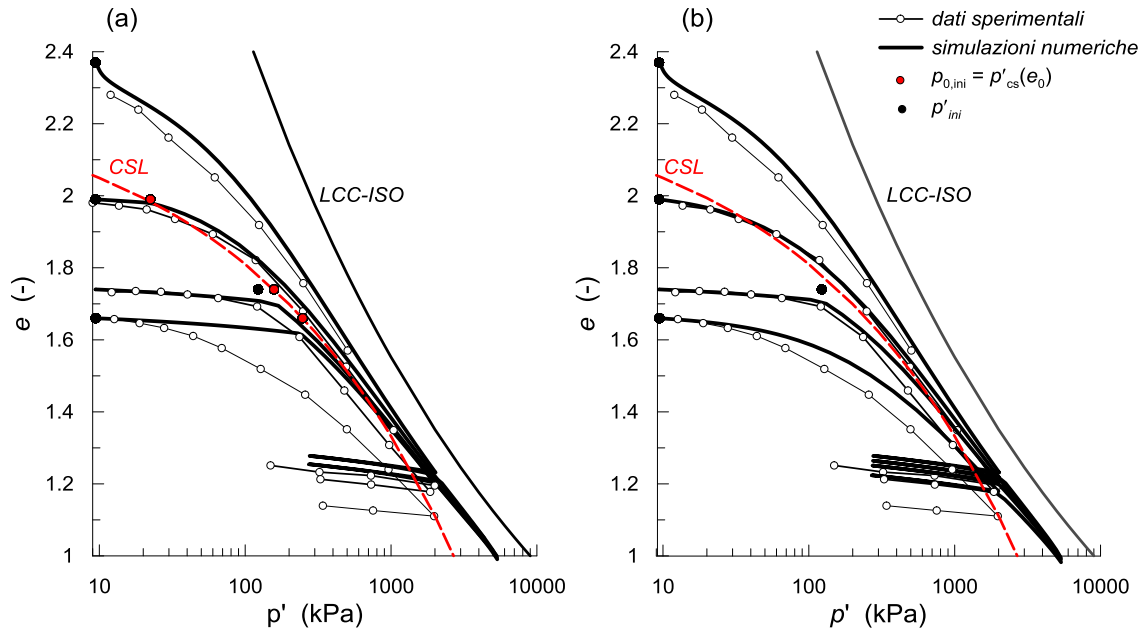


Fig. 5-26 Confronto fra i risultati sperimentali di prove edometriche e le relative simulazioni numeriche effettuate: (a) Con il criterio 1 (b) Con il criterio 2.

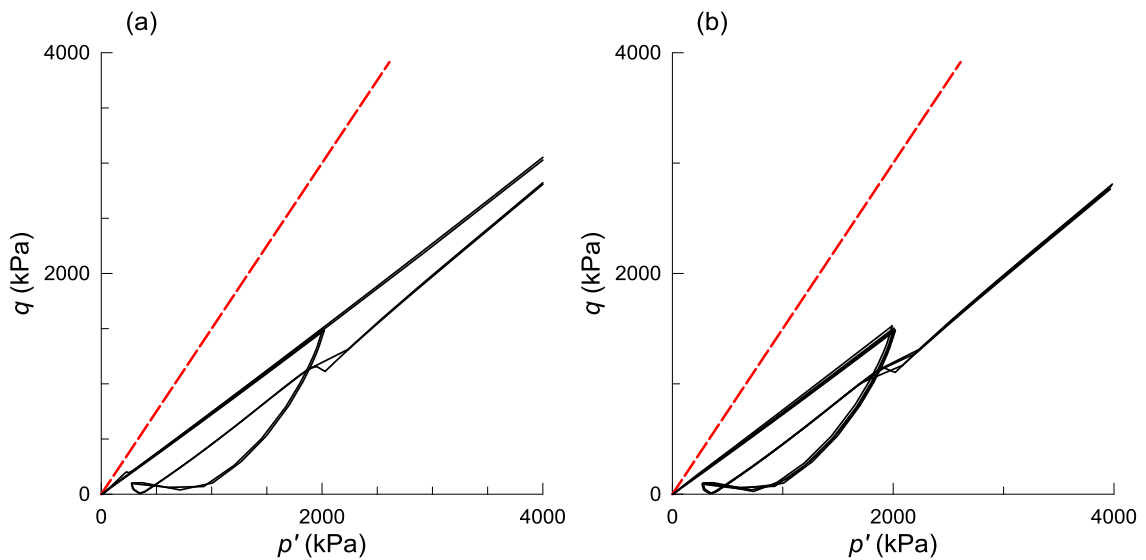


Fig. 5-27. Percorsi tensionali efficaci previsti dal modello nelle simulazioni di prove di compressione edometrica: (a) Con il criterio 1 (b) Con il criterio 2.

Nella Fig. 5-26 .b sono mostrati i risultati sperimentali di quattro prove di compressione edometrica e le relative simulazioni numeriche effettuate inizializzando p_0 con il criterio 2. Nella Fig. 5-26 .a le linee continue rappresentano i risultati delle simulazioni numeriche effettuate con il criterio 1 (e già mostrate nel paragrafo § 5.3.2) delle stesse prove edometriche sperimentali. Il confronto fra le Fig. 5-26 .a e Fig. 5-26 .b mostra che le simulazioni numeriche si differenziano solo quando lo stato iniziale di riferimento (simbolo nero pieno) è caratterizzato da ψ negativo. In questi casi, con l'impiego del criterio 2, che assume p_0 coincidente con lo stato di riferimento, si nota un accordo sistematicamente maggiore con i dati sperimentali. Il miglioramento della simulazione è minimo quando lo stato iniziale è prossimo alla linea dello stato critico mentre è considerevole quando esso è caratterizzato da tensione media efficace molto minore di quella valutata a stato critico in corrispondenza dell'indice dei vuoti iniziale.

Le simulazioni mostrano un accordo soddisfacente con i risultati sperimentali. La buona previsione delle caratteristiche di compressibilità è già stata evidenziata nel paragrafo precedente anche se, in quel caso, l'adozione del criterio 1, allontanando p_0 dalla tensione media efficace di preconsolidazione, penalizzava l'accordo nel primo tratto delle simulazioni. La Fig. 5-27 mostra i percorsi tensionali efficaci corrispondenti alle curve di compressibilità riportate nella Fig. 5-26. Sul fronte della modellazione della compressibilità, il secondo criterio comporta l'ulteriore vantaggio di evitare la discontinuità del percorso tensionale efficace da un andamento sostanzialmente governato dalla rigidità volumetrica elastica al tratto η costante plastico.

I risultati mostrati in questo sotto-paragrafo evidenziano che la calibrazione ritenuta soddisfacente può essere utilizzata sia con il criterio 1 che con il criterio 2. Il criterio 1 privilegia la simulazione della risposta non-drenata, mentre il criterio 2 privilegia la modellazione della compressibilità. La scelta dell'uno o l'altro dipende dagli obiettivi più importanti ai quali si rivolge la modellazione.

Nel modello elastoplastico SANISAND (Taiebat e Dafalias, 2008), la legge di evoluzione della variabile di incrudimento isotropo della superficie di plasticizzazione è stata derivata dalla legge che descrive l'evoluzione delle deformazioni totali, in percorsi tensionali ad η costante, di un modello di tipo *bounding surface* (privo di un campo elastico) pensato proprio per riprodurre una natura sempre elastoplastica delle

deformazioni volumetriche che si sviluppano, nelle sabbie, in questi percorsi tensionali (§2.4).

Un elemento del modello costitutivo che ha consentito di riprodurre la compressibilità esibita dal limo nelle prove edometriche, come mostrano i risultati della Fig. 5-26, è risultato essere la presenza nel piano di compressibilità di un riferimento aggiuntivo rispetto allo stato critico, la LCC-ISO. Il limite del modello nella simulazione della compressibilità è costituito dal fatto che, in percorsi tensionali proporzionali, il campo elastico può assumere dimensioni considerevoli quando, per evitare le discontinuità nella risposta non drenata, si debba inizializzare la variabile di incrudimento isotropo con il criterio 1. Per non dover ricorrere a una soluzione di compromesso fra la simulazione della compressibilità e della risposta deviatorica, si potrebbe allora pensare a una modifica del legame costitutivo, introducendo una formulazione di tipo *bounding surfaces* solo per definire la risposta in percorsi tensionali proporzionali, eventualmente del tutto analoga a quella del modello di Pestana e Whittle, (1995). L'obiettivo potrebbe essere raggiunto sostituendo la superficie chiusa con una superficie di plasticizzazione aperta lungo il proprio asse oppure vincolando la variabile interna della superficie chiusa al valore di p' calcolato in corrispondenza dell'indice dei vuoti corrente sulla LCC-ISO. In entrambi i casi si potrebbe riprodurre un comportamento plastico, in percorsi ad η costante, introducendo una logica di tipo *Bounding Surfaces* per definire la legge di evoluzione delle deformazioni plastiche (come nel modello al quale si ispira il legame costitutivo di Taiebat e Dafalias (2008)), e non più per definire l'evoluzione di p_0 . Le deformazioni risulterebbero così in modo conveniente sempre elastoplastiche in percorsi tensionali proporzionali anche se lo stato risulterebbe posizionato in un campo elastico. Per eliminare la presenza delle funzioni peso (§ 5.3.4.1), che servono a far coesistere la parte della formulazione pensata per riprodurre la risposta in percorsi tensionali proporzionali con quella pensata per percorsi ad η variabile, causa delle discontinuità, si potrebbe introdurre la definizione di un doppio moltiplicatore plastico, come proposto in Wang et al. (1990).

Un motivo ulteriore che potrebbe rendere vantaggiosa la riformulazione consiste nel fatto che, nonostante i criteri introdotti consentano di rimuovere le discontinuità se i percorsi tensionali sono monotoni, nell'applicazione in un codice di calcolo agli

elementi finiti, la procedura iterativa di Newton Raphson passa come input alla UMAT variazioni del tensore deformazione che possono tradursi localmente in scarichi tensionali; per questo, nel corso del calcolo non si può escludere il passaggio ripetuto attraverso la condizione $p' = p_0$ che causa forti discontinuità nella rigidezza e rallenta il processo di convergenza anche globale della soluzione.

5.3.4. Effetto di alcuni parametri sulla risposta prevista dal modello

5.3.4.1. Parametri n m V

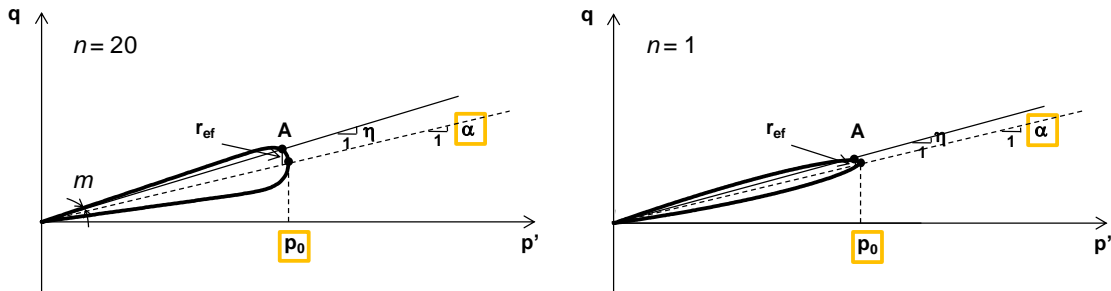


Fig. 5-28 (a) Effetto del parametro n sulla forma della superficie di plasticizzazione.

I parametri n e m compaiono nell'espressione (2.3.6) che definisce la superficie di plasticizzazione: il primo incide sulla forma della superficie (Fig. 5-28) mentre l'altro ne descrive la semi-apertura all'origine. Affinché sia possibile riprodurre un comportamento meccanico elastoplastico anche in scarico e sotto carichi di natura ciclica la superficie di plasticizzazione deve essere molto "appiattita". Nel rispetto di questo vincolo, al parametro m vengono attribuiti valori piccoli (0.05-0.1).

Come mostrato in Fig. 5-28, lungo la superficie di plasticizzazione il rapporto $\eta = q/p'$ non è costante e coincide con α solo per $p' = p_0$. La differenza fra η (stato corrente) e α (pendenza dell'asse della superficie di plasticizzazione) definisce la quantità r_{ef} . Lungo la superficie di plasticizzazione r_{ef} assume valori compresi tra m e 0. La variabile r_{ef} , rappresentativa della distanza dello stato dall'asse della superficie, gioca un ruolo chiave nella formulazione del modello. r_{ef} determina il peso reciproco tra i due tipi di

incrudimento e i due contributi alle deformazioni plastiche previsti dal modello (e illustrati nel Capitolo 2).

$$\dot{\alpha} = \langle L \rangle r_{ef} \bar{\alpha} \qquad \dot{p}_0 = \langle L \rangle \exp^{-V r_{ef}} \bar{p}_0 \qquad (3.1)$$

$$\dot{\varepsilon}_p = r_{ef} (\dot{\varepsilon}_p)_1 + \exp^{-V r_{ef}} (\dot{\varepsilon}_p)_2 \qquad (3.2)$$

Le espressioni (3.1) e (3.2) richiamano, in una forma estremamente sintetica e schematica, il modo in cui la parte nuova della formulazione, derivante dal modello di Pestana e Whittle, (1995), coesiste con la parte tipica delle precedenti versioni del modello SANISAND. Nelle (3.1) e (3.2) si distingue la funzione $\exp(-V r_{ef})$ che “pesa” l’incrudimento della variabile p_0 e l’entità del contributo alle deformazioni plastiche che si originano in percorsi tensionali proporzionali (contributo tipo 1 alla formulazione). In modo analogo, nelle (3.1) e (3.2), r_{ef} può essere interpretato come una funzione “peso” dell’incrudimento rotazionale e della parte delle deformazioni plastiche che si originano in percorsi ad η variabile (contributo tipo 2 alla formulazione).

Nella funzione peso che premoltiplica i contributi del tipo 2 compare il parametro V . La logica sulla quale è impostata la formulazione del modello richiede che a V sia attribuito un valore positivo e sufficientemente grande, cosicché i contributi del tipo 2 non entrino in gioco quando lo stato è distante dall’estremità della superficie di plasticizzazione (cioè p/p_0 basso) e, come mostrato in Fig. 5-29, r_{ef} è prossimo a m . Poiché, come spiegato, m è un numero piccolo, la funzione $\exp(-V r_{ef})$ tende a zero per $r_{ef} = m$ solo se V è molto grande.

Dalla Fig. 5-29.c, nella quale $m = 0.1$, si può notare che attribuendo a V il valore 1000 la funzione $\exp(-V r_{ef})$ assume però valore 0 non solo in corrispondenza di $r_{ef} = m$, ma su un intervallo molto ampio di valori di r_{ef} , ai quali corrispondono tensioni medie efficaci anche prossime a p_0 . Valori non nulli di $\exp(-V r_{ef})$, come mostrato in Fig. 5-29.c, si apprezzano infatti solo in corrispondenza di $r_{ef} < 0.001$, cioè per p/p_0 uno (Fig. 5-29 b). L’esempio mostrato per il caso di $V = 1000$ e $n = 20$ evidenzia che il contributo del tipo 2 alla formulazione (legato alla simulazione della compressibilità) si attiva solo quando lo stato si colloca sull’asse della superficie di plasticizzazione e quindi solo se p' coincide con p_0 .

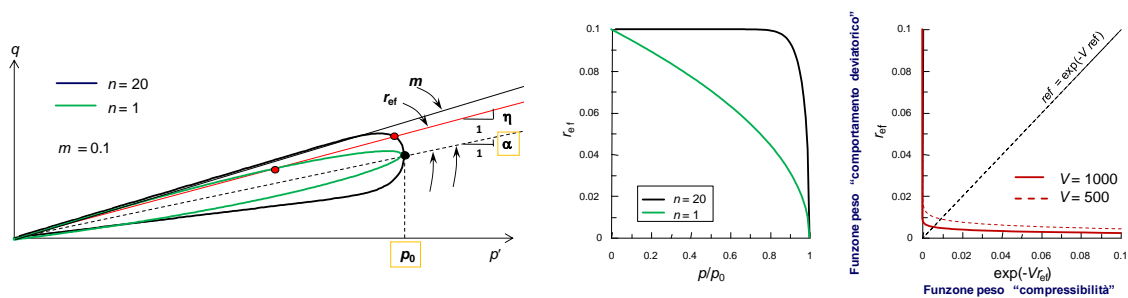


Fig. 5-29 Effetto del parametro n : (a) sulla forma della superficie di plasticizzazione (b) sull'andamento di r_{ef} lungo la superficie di plasticizzazione. (c) Influenza del parametro V sulla variazione con r_{ef} delle funzioni peso dei contributi 1 e 2.

Dalla Fig. 5-29 .b (curva verde) si può notare che assumendo $n = 1$, lungo la superficie di plasticizzazione, il campo di valori di p' / p_0 per i quali $r_{ef} < m$ risulta molto più ampio. I valori $r_{ef} < 0.01$ (ai quali corrispondono valori non nulli di $\exp(-Vr_{ef})$) continuano a riscontrarsi comunque in corrispondenza di p' / p_0 unitario. Allo scopo di ampliare il campo di p' / p_0 in corrispondenza del quale entra in gioco il contributo 2 alla formulazione o nel quale le due formulazioni hanno lo stesso peso, la modifica della forma della superficie è poco rilevante.

Per ampliare il campo di stati tensionali in corrispondenza dei quali la modellazione della compressibilità assume rilievo, si potrebbe pensare di ridurre il valore di V , ancora nel rispetto del criterio suddetto. La curva tratteggiata nella Fig. 5-29.c mostra che assumendo $V = 500$ vi è un ampliamento del campo di r_{ef} in corrispondenza del quale $\exp(-Vr_{ef})$ assume valori non nulli, che si riflette leggermente sull'intervallo di valori di p' / p_0 .

Inoltre, in una eventuale transizione dello stato da una condizione $p' / p_0 \ll 1$ a $p' / p_0 \approx 1$ l'intervallo di r_{ef} entro il quale $\exp(-Vr_{ef})$ passa da 0 a valori non nulli si verifica per variazioni di p' / p_0 molto piccole e questo implica le discontinuità nella risposta prevista dal modello mostrate precedentemente. La risposta meccanica passa dall'essere governata dal comportamento deviatorico (contributi tipo 1) all'essere governata dalle caratteristiche di compressibilità (contributi tipo 2). Il valore di 500 assunto per V nella calibrazione riportata nella Tabella 5.5 è stato scelto per tentare di mitigare la discontinuità riscontrata nei percorsi tensionali non drenati, nel caso di ψ iniziale negativo, illustrata nel §5.3.3. Escludendo l'aspetto delle discontinuità, i parametri V e n sono poco influenti sulle previsioni della risposta meccanica.

Il parametro m è il primo a dover essere definito. Anche se i valori ammissibili per m sono poco variabili, valori leggermente più alti facilitano la stabilità delle analisi numeriche. Poiché nel modello è stata introdotta l'approssimazione che lo stato critico è mobilitato quando $\alpha = \alpha_c$, si deve tener conto che un m maggiore aumenta la differenza fra i valori di η a stato critico in relazione alla distanza da p_0 .

5.3.4.2. Calibrazione con il primo criterio

Nel presente paragrafo si mostra l'effetto che alcuni parametri determinano sulla risposta prevista dal modello quando la variabile di incrudimento isotropo p_0 viene inizializzata con il primo criterio (§5.1.2).

Da un lato si vuole esplicitare la logica con la quale sono stati assunti alcuni parametri del modello e dall'altro fornire delle indicazioni, di validità generale, sulla strategia da seguire per calibrare il legame costitutivo. Poiché non è stata esplorata, dagli autori del modello costitutivo, l'interazione tra la formulazione nuova e quella preesistente, sembra inoltre utile evidenziare come i singoli parametri influenzino la risposta, anche in base a quale delle due formulazioni prevalga. Nel paragrafo successivo verranno fornite alcune indicazioni utili nel caso in cui si scelga di applicare il secondo criterio.

Tabella 5.6. Parametri adottati nella prima calibrazione.

Calibrazione Iniziale															
e_0	λ	ξ	α_c	c	m	G_0	K_0	h_0	c_h	n_b	A_d	n_d	p_r	ρ_c	θ
(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(-)	(kPa)	(-)	(-)
2.29	0.48	0.3	1.4	0.85	0.1	340	500	2.0	0.4	0.9	0.02	10.5	100 000.0	0.1	0.5

X	n	V
(-)	(-)	(-)
1	20	500

Nella Tabella 5.6 è mostrata una prima ipotesi di calibrazione. Tra i parametri della Tabella 5.6 devono essere ritenuti fissati: i cinque parametri che definiscono la Superficie di Stato Critico e la proiezione della Linea dello Stato Critico nel piano di

compressibilità, la costante G_0 , (perché ricavati dalle prove di laboratorio), e i parametri n , m , V .

I parametri p_r , ρ_c (che definiscono l'equazione della LCC-ISO), θ , K_0 , n_d , seppure assunti sulla base di un primo esame dei risultati delle prove di laboratorio, sono da verificare nel corso della calibrazione. I parametri che invece vanno necessariamente definiti per via iterativa sono c_h e h_0 . A questi, a causa della mancanza di opportune prove di laboratorio, nel caso specifico, si aggiungono anche n_b e A_d .

Nella prima parte del paragrafo, l'effetto prodotto da modifiche del singolo parametro è valutato sulle previsioni numeriche della fase deviatorica delle prove triassiali drenate e non drenate. Per ogni prova, le simulazioni sono effettuate sia a partire da uno stato iniziale caratterizzato da ψ_0 positivo che da ψ_0 negativo. Le curve ottenute dalle analisi numeriche sono confrontate anche con i risultati sperimentali, quando disponibili.

Le considerazioni sviluppate nel §5.3.1.1, hanno portato a ritenere che, al termine della fase di consolidazione delle prove triassiali tutti i campioni sono in condizioni di normal-consolidazione. Di conseguenza, per la simulazione delle prove triassiali, lo stato iniziale di riferimento per la valutazione di ψ_0 coincide proprio con la condizione di fine consolidazione isotropa (riepilogata nella Tabella 5.1 e Tabella 5.2).

Nelle Fig. 5-30 e Fig. 5-31 sono confrontati i risultati ottenuti dalle simulazioni di prove triassiali, rispettivamente, non drenate e drenate, assumendo i tre valori di n_d riportati nelle figure. Un esame complessivo dei risultati mostra che variazioni, anche considerevoli, del solo parametro n_d comportano effetti modesti sulla risposta prevista dal modello.

Osservando più in dettaglio i risultati riportati nella Fig. 5-30, si rileva un effetto sui percorsi in tensioni efficaci, atteso tenendo conto della relazione (5.3.1) fra ψ_d e α_d (o η_d). In corrispondenza di valori decrescenti di n_d , in tutte le simulazioni la trasformazione di fase si mobilita a livelli tensionali leggermente maggiori. I percorsi tensionali confermano che, a prescindere dal segno iniziale di ψ , la trasformazione di fase è raggiunta sempre in corrispondenza di ψ negativo (come apprezzabile anche tenendo conto della proiezione della linea dello stato critico nel piano di compressibilità di Fig. 5-31). Poiché tutti i percorsi tensionali, al decrescere di n_d , mostrano una fase

contrante complessivamente più pronunciata; aumentando ψ_d , coerentemente con la (5.3.1) aumenta anche η_d . Gli effetti sugli andamenti nel piano ε_d-q sono una conseguenza di queste piccole variazioni.

Dalla Fig. 5-31 si può notare che anche in condizione drenate la trasformazione di fase è mobilitata in corrispondenza di ψ_d negativo anche se in questo caso si manifesta solo nella prova caratterizzata da ψ iniziale negativo.

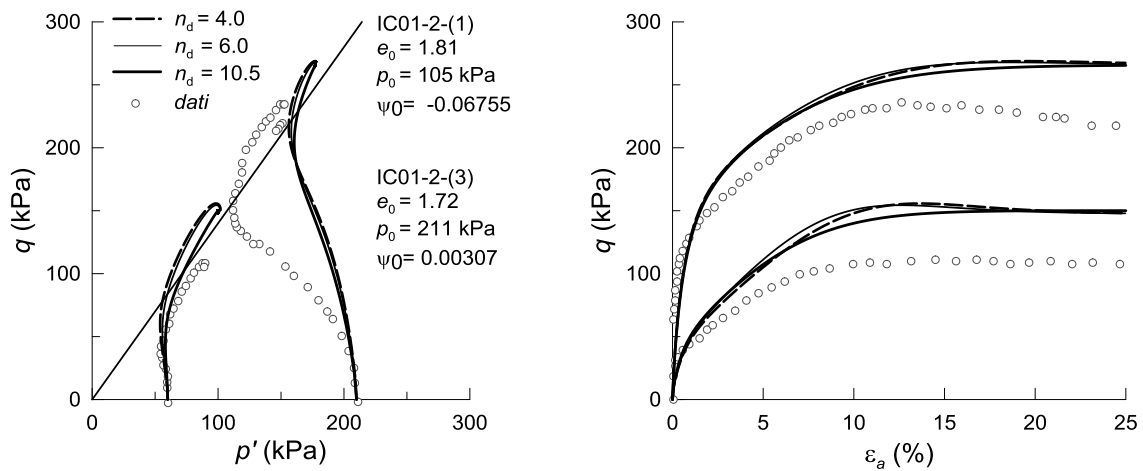


Fig. 5-30. Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate non drenate effettuate con la calibrazione iniziale e il criterio 1 per la definizione di p_0 , al variare del parametro n_d . (a) Percorsi in tensioni efficaci (b) Relazioni tra tensioni e deformazioni.

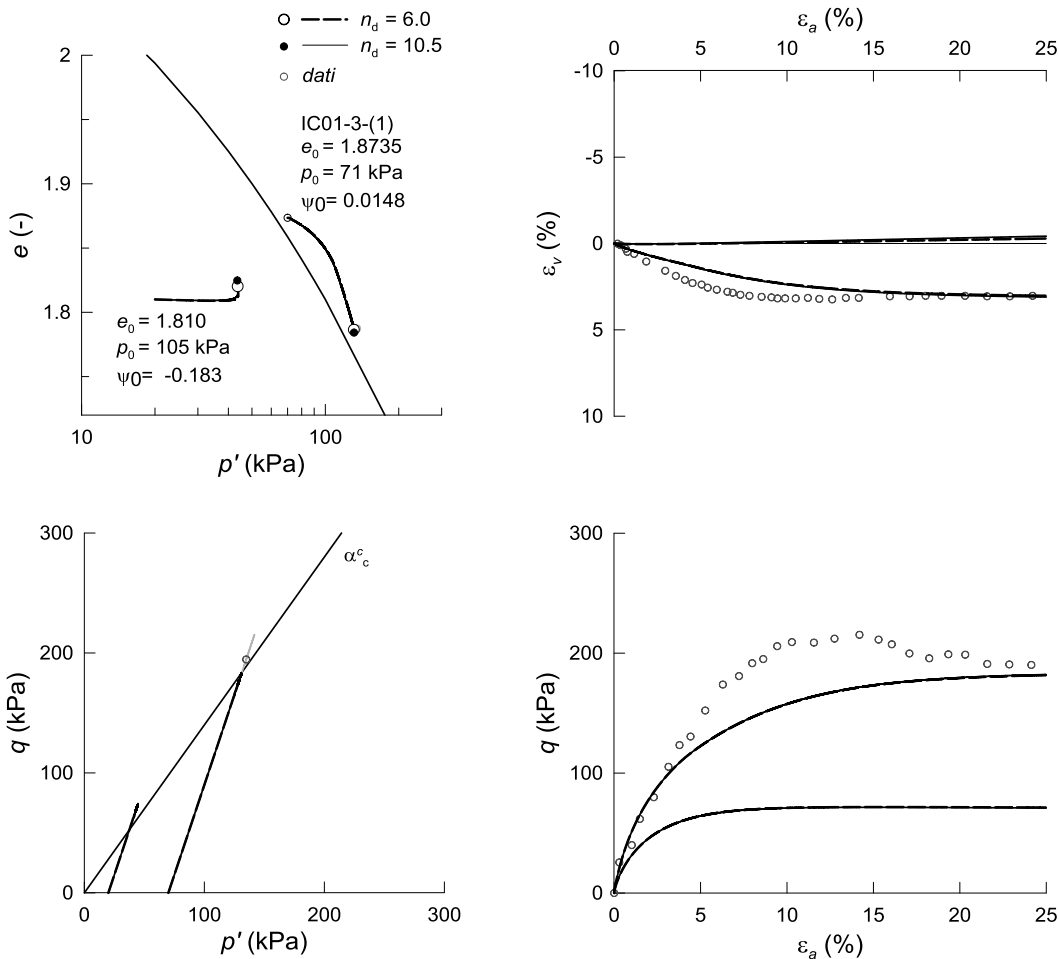


Fig. 5-31. Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate drenate effettuate con la calibrazione iniziale e il criterio 1 per la definizione di p_0 , al variare del parametro n_d .

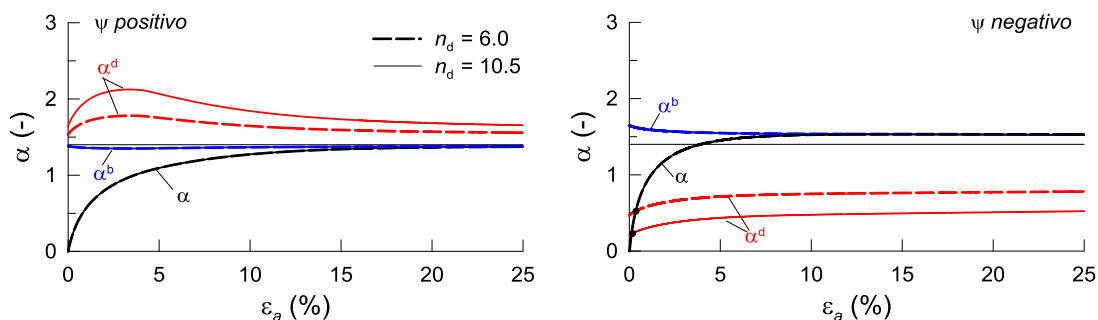


Fig. 5-32. Confronto fra la pendenza nel piano degli invarianti p' - q : dell'asse della superficie di plasticizzazione (nero), della superficie di picco (blu), di dilatanza (rosso) e di stato critico, nel corso di prove triassiali consolidate drenate eseguite con la calibrazione iniziale e il criterio 1 al variare di n_d . (a) Effetti sulla simulazione caratterizzata da ψ iniziale positivo (b) Effetti sulla simulazione caratterizzata da ψ iniziale negativo.

L'effetto di n_d sulla trasformazione di fase è impercettibile dalla Fig. 5-31; per questo, nella Fig. 5-32, oltre al livello tensionale a stato critico, sono rappresentati gli andamenti della superficie di dilatanza, della *bounding* e dello stato corrente. Dalla Fig. 5-32.b si nota che la riduzione di n_d fa mobilitare la condizione di trasformazione di fase (evidenziata con simbolo pieno) in corrispondenza di un maggiore livello tensionale, a un livello di deformazione assiale maggiore.

Dalla Fig. 5-32 si può apprezzare l'effetto di variazioni del parametro n_d sull'entità del contributo di tipo 1 alle deformazioni volumetriche plastiche previste dal modello. Tale contributo alle deformazioni volumetriche plastiche è proporzionale alla distanza dello stato dalla superficie di dilatanza (equazioni (2.3.39) e (2.3.35)). Nel caso di comportamento contraente si può dedurre che la riduzione di n_d determina, in generale, una riduzione della tendenza contraente. Quando il comportamento è interessato dalla trasformazione di fase, aumenta la tendenza contraente e si riduce quella a dilatare. Si nota quindi che per favorire il raggiungimento dello stato critico, si dovrebbe aumentare n_d .

Dalla Fig. 5-31 si può notare che il limite principale della calibrazione riportata nella Tabella 5.6 è quello di non consentire, nel caso in cui lo stato iniziale sia caratterizzato da ψ negativo, il raggiungimento dello stato critico in corrispondenza di livelli di deformazione assiale realistici. In mancanza di prove eseguite su provini che mostrano comportamento dilatante, il confronto con i risultati sperimentali disponibili avrebbe potuto indurre a ritenere soddisfacente la calibrazione riportata nella Tabella 5.6 sulla quale n_d ha un modesto effetto. Nel caso delle prove drenate il criterio 1 comporta che la

risposta prevista è influenzata dalle caratteristiche di compressibilità solo se ψ iniziale è positivo. Sui risultati delle prove non drenate non incidono in alcun modo i parametri correlati alle caratteristiche di compressibilità del materiale. Questo perché in entrambi i casi i percorsi tensionali non determinano il raggiungimento del valore iniziale del parametro p_0 .

I percorsi in tensioni efficaci, rappresentati nel piano $p'-q$, e le relazioni ε_a-q di Fig. 5-33 sono ottenuti dalle simulazioni numeriche delle stesse prove triassiali non drenate commentate precedentemente, questa volta variando il parametro n_b , a parità di altre condizioni (parametri e criterio per l'inizializzazione di p_0).

Dai risultati rappresentati nella Fig. 5-33 si può apprezzare che n_b è sostanzialmente ininfluenza sulla risposta non drenata. Il parametro n_b incide infatti principalmente sul valore della resistenza di picco, che non si mobilita completamente in condizioni non drenate.

La Fig. 5-34 mostra i risultati delle simulazioni di prove triassiali drenate. Nel caso di ψ iniziale negativo, si osserva il raggiungimento di una resistenza di picco. È interessante notare come l'incremento del parametro n_b determini, in questo caso, un considerevole incremento della resistenza di picco (si noti che q_{\max} è superiore a q_{cs}) ma non influenzi la condizione post picco nella quale non si osserva un decadimento della resistenza verso la condizione a stato critico.

Nel caso di ψ iniziale positivo la resistenza massima viene mobilitata in corrispondenza dello stato critico, ancora non raggiunto nella simulazione effettuata con il valore maggiore di n_b .

Variazioni di n_b determinano effetti opposti sulle curve ε_a-q nel caso di ψ iniziale positivo e negativo. Per ψ iniziale negativo, al crescere di n_b le curve nel piano ε_a-q appaiono più rigide nel tratto che precede il raggiungimento della resistenza di picco. Nel caso di ψ iniziale positivo avviene l'opposto, per valori più alti del parametro la rigidità è minore. Il parametro non altera solo la risposta dilatante ma incide anche su quella contraente. I risultati possono essere spiegati facilmente esaminando (in Fig. 5-35) gli andamenti della *bounding surface*, della superficie di dilatanza e del livello tensionale corrente, distinti per il caso di ψ iniziale positivo e negativo, nel corso delle simulazioni effettuate con i valori estremi del parametro.

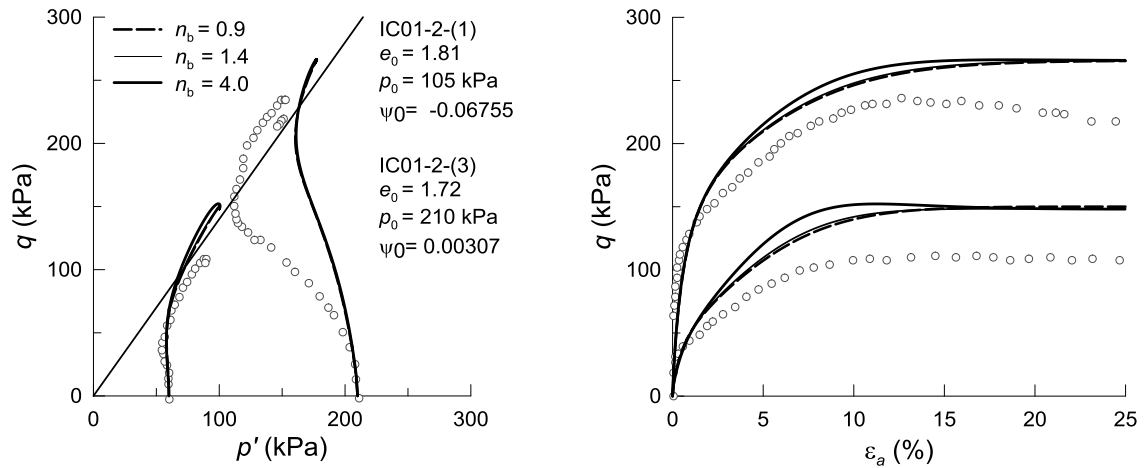


Fig. 5-33. Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate non drenate effettuate con la calibrazione iniziale e il criterio 1 per la definizione di p_0 , al variare del parametro n_b . (a) Percorsi in tensioni efficaci (b) Relazioni tra tensioni e deformazioni.

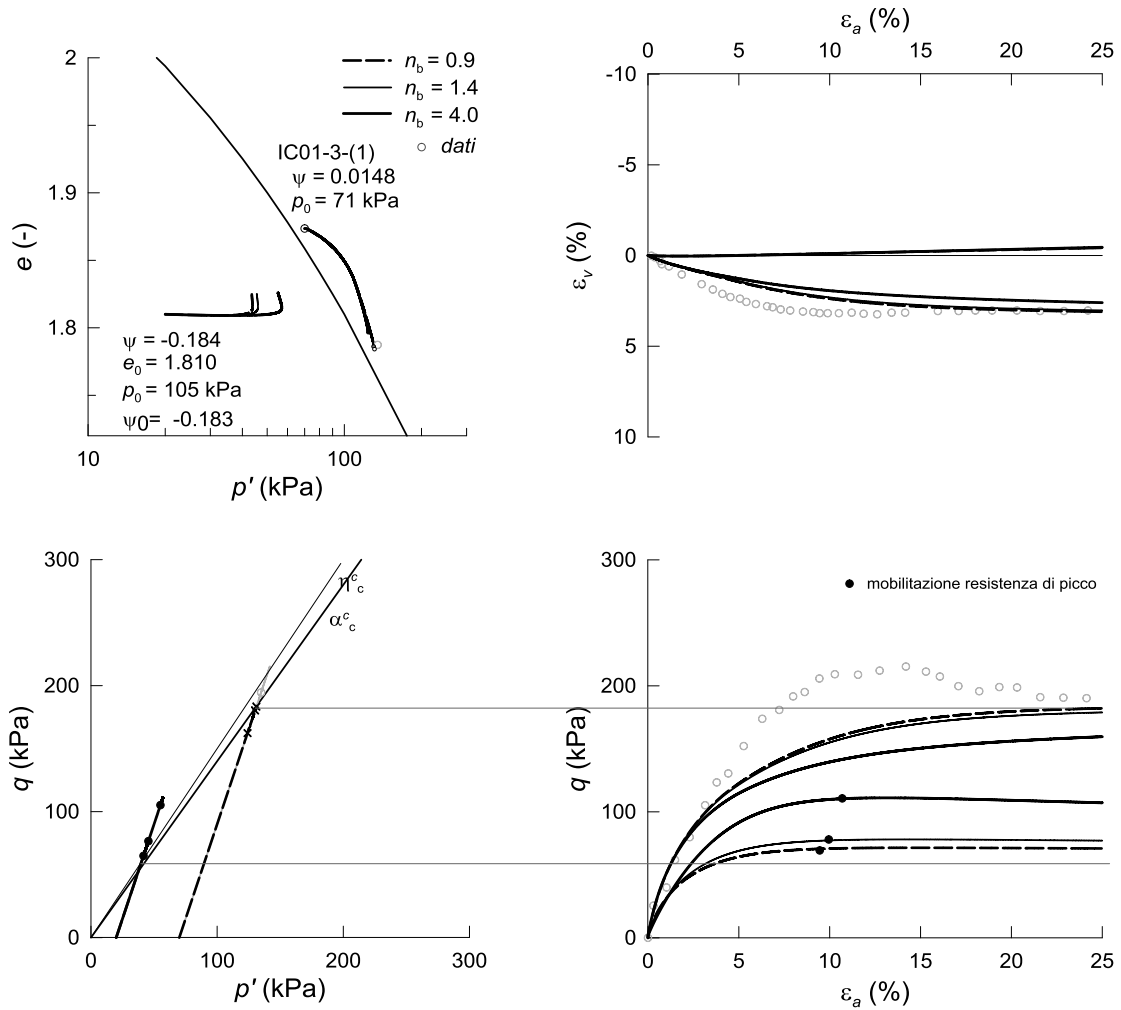


Fig. 5-34. Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate drenate effettuate con la calibrazione iniziale e il criterio 1 per la definizione di p_0 , al variare del parametro n_b .

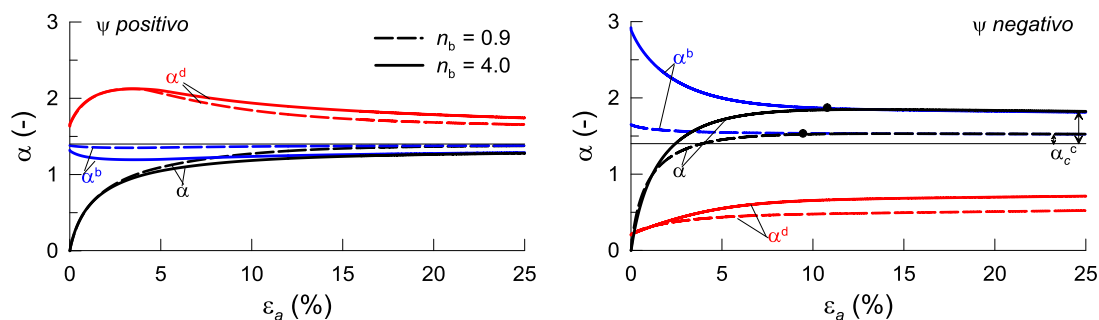


Fig. 5-35. Confronto fra la pendenza nel piano degli invarianti p' - q : dell'asse della superficie di plasticizzazione (nero), della superficie di picco (blu), di dilatanza (rosso) e di stato critico, nel corso di prove triassiali consolidate drenate eseguite con la calibrazione iniziale e il criterio 1 al variare di n_b . (a) Effetti sulla simulazione caratterizzata da ψ iniziale positivo (b) Effetti sulla simulazione caratterizzata da ψ iniziale negativo.

Le Fig. 5-35 mostrano che una riduzione di n_b determina l'avvicinamento della *bounding surface* allo stato critico. Riducendo n_b , nel caso di ψ positivo la superficie risulta quindi inizialmente più distante dallo stato iniziale e meno distante da esso nel caso di ψ negativo. Poiché l'incrudimento cinematico è proporzionale alla distanza fra lo stato (linea nera) e la *bounding surface* (linea blu), e in particolare è tanto maggiore quanto la distanza è maggiore. Assumendo valori più bassi di n_b , l'incrudimento cinematico è più grande nel caso di ψ positivo e minore nel caso di ψ negativo. In questo modo risultano giustificate le differenze di rigidità della Fig. 5-34. Nel caso di comportamento dilatante, oltre ad una curva meno rigida si osserva per più basso n_b il raggiungimento di una resistenza di picco inferiore.

Le Fig. 5-36 e Fig. 5-37 mostrano gli effetti determinati da variazioni del parametro A_d sulla risposta prevista in prove triassiali consolidate drenate e non drenate. Nel caso delle prove drenate l'effetto principale di un incremento di A_d è quello di produrre un incremento delle deformazioni volumetriche plastiche, visibile nelle Fig. 5-37. L'aumento delle deformazioni volumetriche consente il raggiungimento della condizione di stato critico o di picco in corrispondenza di deformazioni assiali più basse.

Nel caso delle prove non drenate, la riduzione di A_d determina una verticalizzazione dei percorsi tensionali efficaci, con la conseguenza che la condizione di trasformazione di fase viene attinta in corrispondenza di tensioni medie efficaci più prossime a quella iniziale.

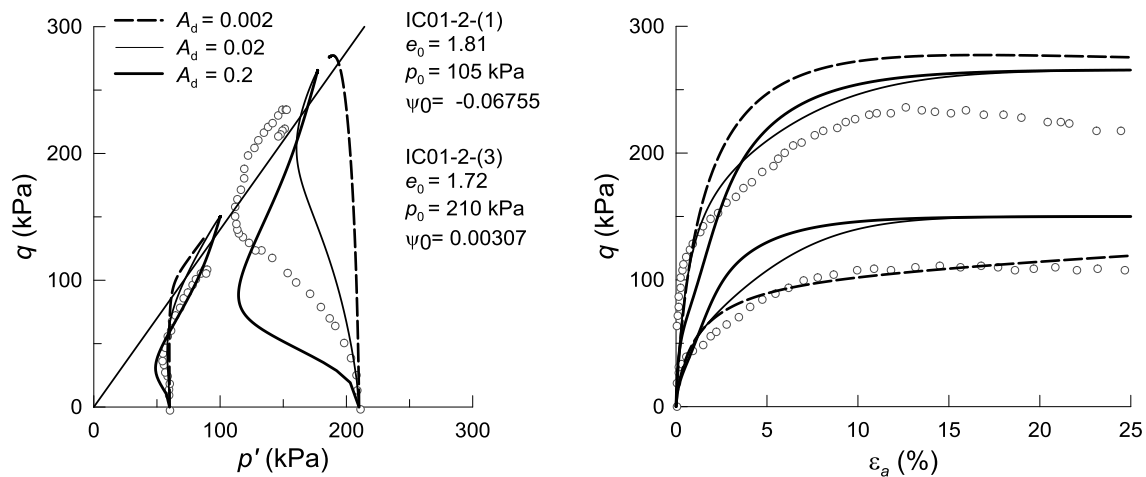


Fig. 5-36 Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate non drenate effettuate con la calibrazione iniziale e il criterio 1 per la definizione di p_0 , al variare del parametro A_d . (a) Percorsi in tensioni efficaci (b) Relazioni tra tensioni e deformazioni.

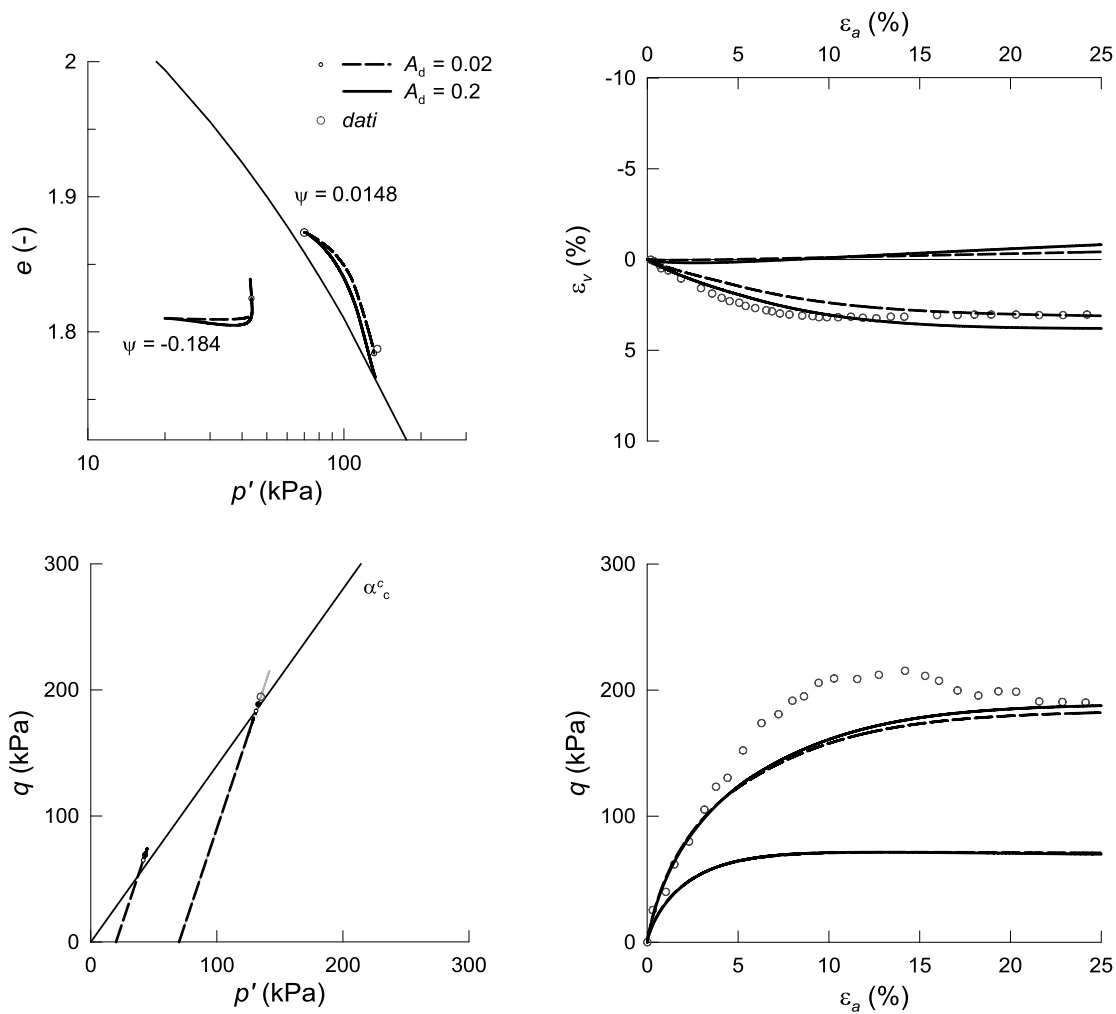


Fig. 5-37 Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate drenate effettuate con la calibrazione iniziale e il criterio 1 per la definizione di p_0 , al variare del parametro n_b .

Aumentando A_d , la fase iniziale contraente diviene più pronunciata, in questo modo la condizione di transizione di fase viene attinta in corrispondenza di un valore maggiore in modulo di ψ e si può apprezzare che, nel rispetto della (5.3.1), a parità di n_d il rapporto tensionale relativo è più basso. Il fatto che la transizione di fase si verifica per η molto minore di M implica che il percorso in tensioni efficaci nella fase dilatante tende alla condizione di stato critico dal basso, determinando una convessità dell'andamento dei percorsi tensionali efficaci non compatibile con le evidenze sperimentali sul comportamento delle sabbie e dei limi.

Questo effetto collaterale che un incremento del parametro A_d può produrre sulla risposta deve essere tenuto in conto dal momento che, in generale, la formulazione analitica del modello tende a richiedere valori elevati di A_d , come verrà spiegato meglio nel seguito.

Se si confronta l'effetto sulla risposta drenata dilatante prodotto dalla variazione del parametro A_d con quello indotto dalla modifica di n_d si può notare che A_d altera considerevolmente le variazioni di indice dei vuoti.

Le Fig. 5-38 e Fig. 5-39 mostrano l'effetto determinato da variazioni del parametro h_0 . È opportuno precisare che i risultati mostrati nella figura sono stati ottenuti assumendo un diverso K_0 (150) rispetto a quello iniziale. La simulazione relativa al caso di $h_0=2$ infatti differisce leggermente da quella mostrata in precedenza (Fig. 5-34 e Fig. 5-37) che invece è effettuata con i parametri della Tabella 5.6.

L'effetto di un incremento di h_0 è immediato da visualizzare, non dipende dal segno di ψ né dal tipo di prova. In generale, incrementando h_0 si produce un aumento dell'incrudimento cinematico, con la conseguenza che le relazioni ε_a-q mostrano una maggiore rigidità. In condizioni non drenate, i percorsi in tensioni efficaci, rappresentati nel piano $p'-q$ tendono a diventare più verticali nella fase contraente.

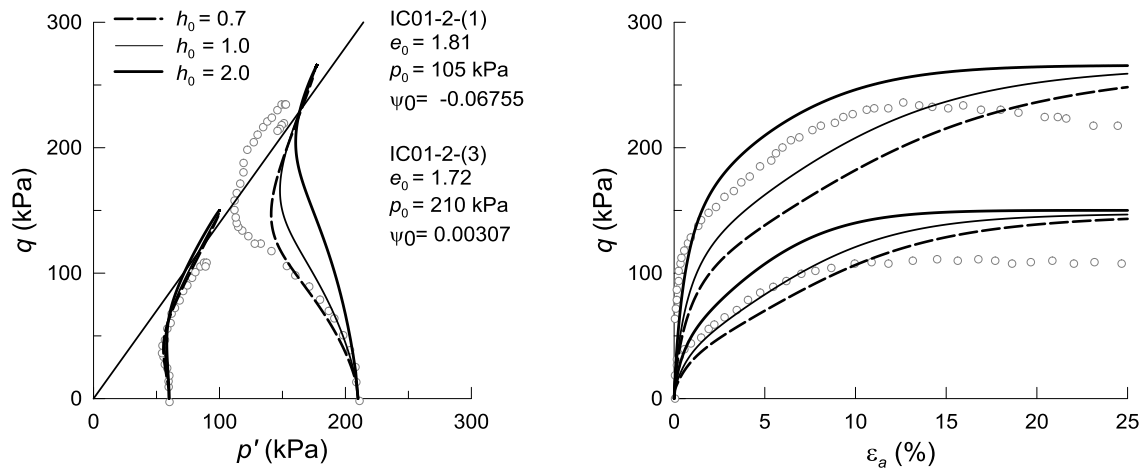


Fig. 5-38 Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate non drenate effettuate con la calibrazione iniziale e il criterio 1 per la definizione di p_0 , al variare del parametro h_0 . (a) Percorsi in tensioni efficaci (b) Relazioni tra tensioni e deformazioni

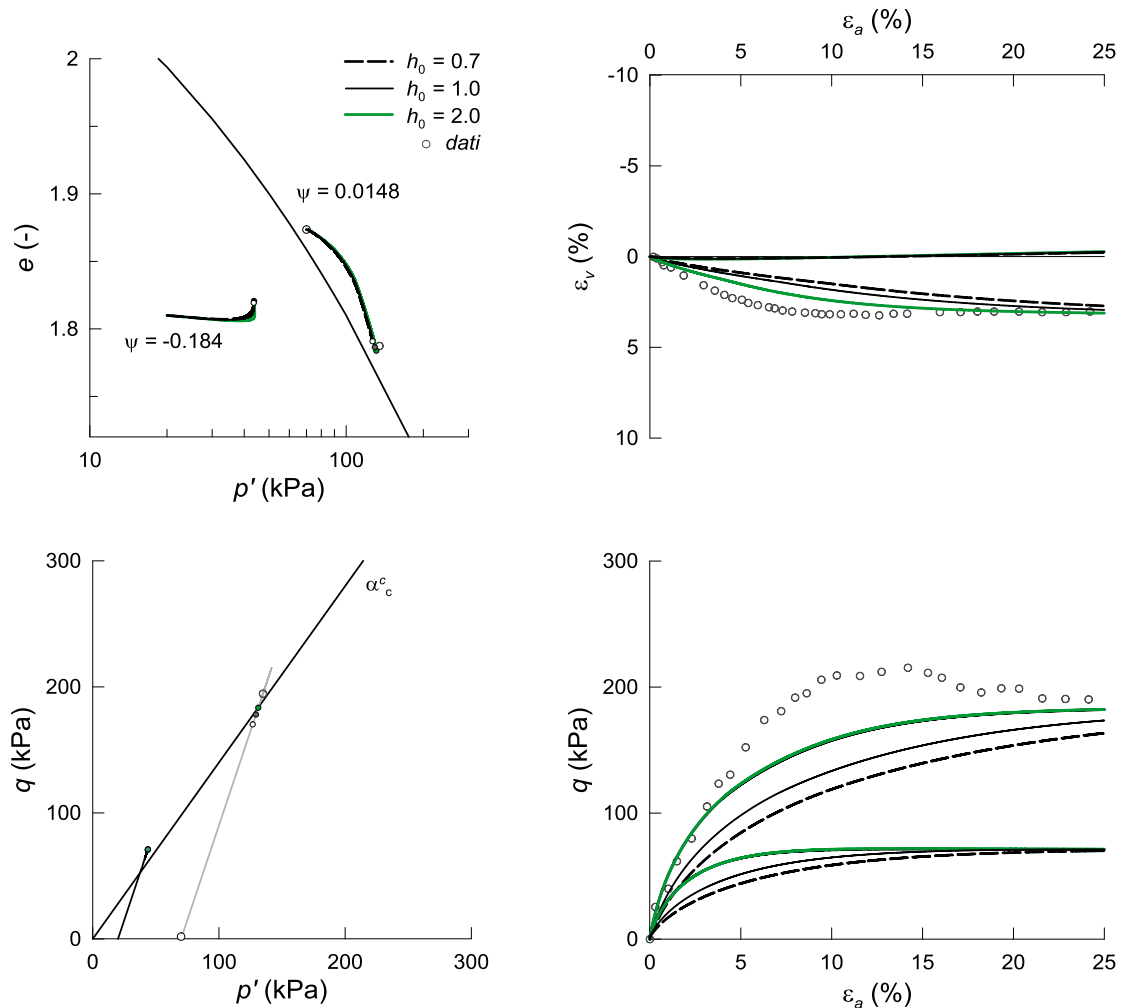


Fig. 5-39 Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate drenate effettuate con la calibrazione iniziale e il criterio 1 per la definizione di p_0 , al variare del parametro n_b .

Per modellare correttamente la risposta drenata di provini con comportamento dilatante, rispetto alla calibrazione iniziale (Tabella 5.6) sono stati modificati i parametri riportati nella Tabella 5.7. Grazie all'incremento di A_d e n_b la simulazione numerica effettuata a partire da ψ iniziale negativo, nel piano di compressibilità di Fig. 5-40, durante la fase dilatante mostra lo sviluppo di deformazioni volumetriche che portano l'indice dei vuoti in prossimità del valore a stato critico. Viene inoltre riprodotto il decadimento della resistenza dopo il raggiungimento del valore di picco. In tutte le simulazioni mostrate in precedenza, dopo il valore di picco la resistenza rimaneva sostanzialmente costante. Con il nuovo set di parametri il raggiungimento della resistenza di stato critico sembra poter avvenire anche se non al 25% di deformazione assiale, come mostrato dai risultati sperimentali, a un valore verosimile.

Nella Fig. 5-41.b la *bounding surface* relativa a questa seconda calibrazione (linea continua) mostra un andamento che decresce maggiormente, dopo l'intersezione con lo stato corrente, e tende a valori più prossimi ad α_c . La modifica dei parametri lascia sostanzialmente inalterata la previsione della risposta per il provino con comportamento contraente.

Nella Fig. 5-42 è mostrata la simulazione delle stesse prove di laboratorio triassiali non drenate con i valori dei parametri riportati nella Tabella 5.7. La modifica dei parametri h_0 e n_d è stata apportata per cercare di limitare la concavità verso l'alto dei percorsi tensionali rappresentati nel piano $p' - q$.

Tabella 5.7. Parametri modificati a valle delle analisi

<i>Calibrazione</i>	h_0 (-)	n_b (-)	A_d (-)	n_d (-)
Iniziale	2.0	0.9	0.02	10.5
Ultima	2.5	1.4	0.2	6

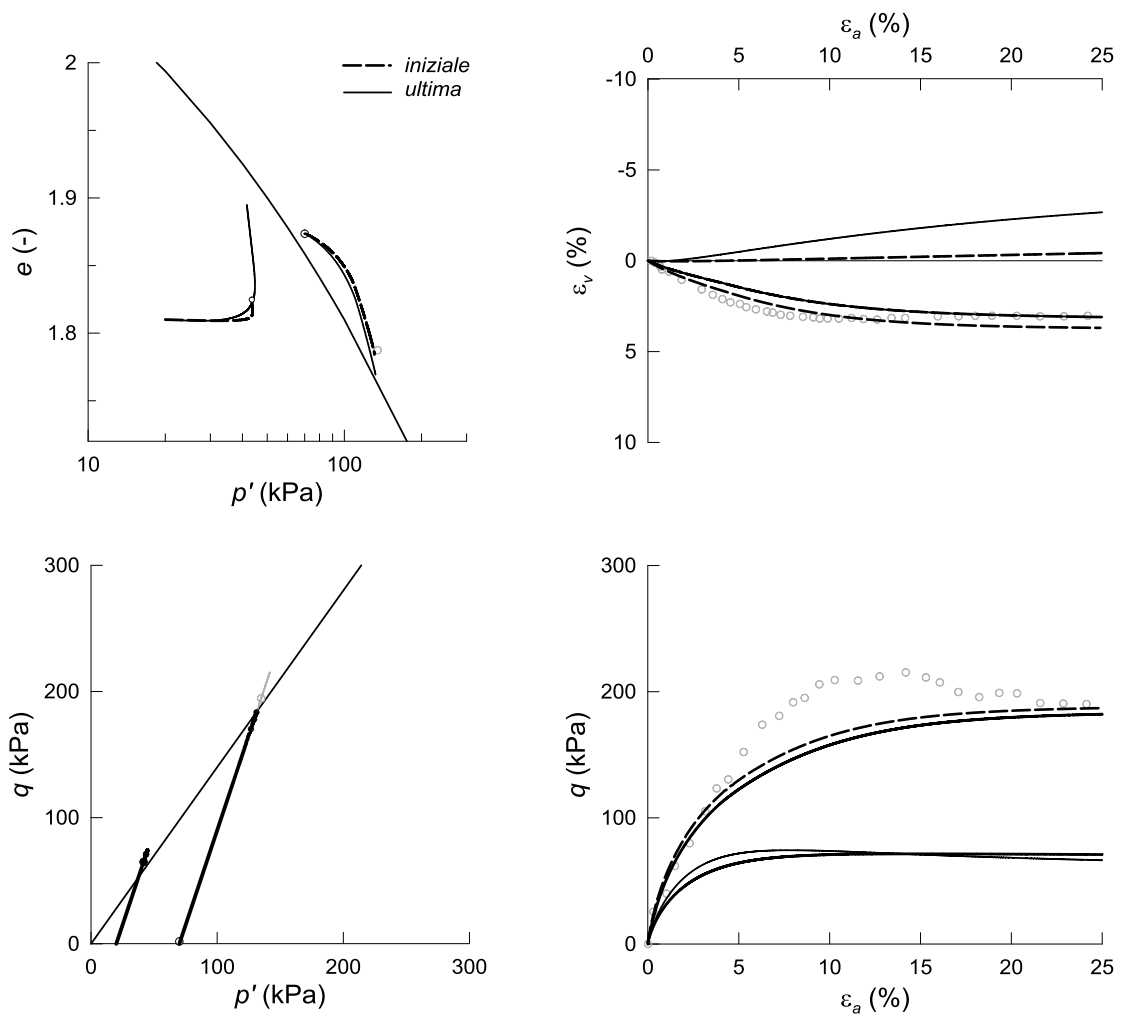


Fig. 5-40 Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate drenate effettuate con la calibrazione iniziale e ultima il criterio 1 per la definizione di p_0 . (a) Risultati nel piano di compressibilità (b) Deformazioni volumetriche (c) Percorsi in tensioni efficaci (d) Relazioni tra tensioni e deformazioni.

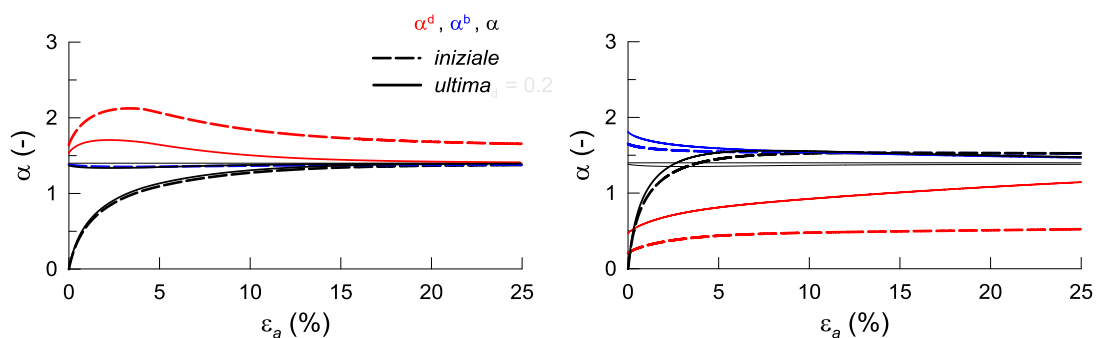


Fig. 5-41 Confronto fra la pendenza nel piano degli invarianti $p' q$: dell'asse della superficie di plasticizzazione (nero), della superficie di picco (blu), di dilatanza (rosso) e di stato critico, nel corso di prove triassiali consolidate drenate eseguite con la calibrazione iniziale e ultima assumendo il criterio 1. (a) Effetti sulla simulazione caratterizzata da ψ iniziale positivo (b) Effetti sulla simulazione caratterizzata da ψ iniziale negativo.

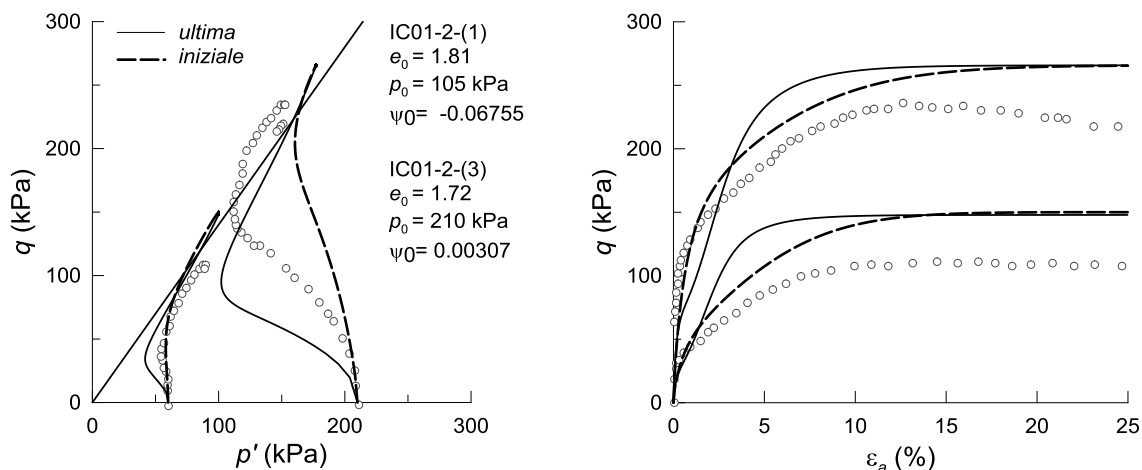


Fig. 5-42 Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate non drenate effettuate con la calibrazione iniziale e ultima (assumendo il criterio 1 per la definizione di p_0). (a) Percorsi in tensioni efficaci (b) Relazioni tra tensioni e deformazioni

Ad eccezione della prova drenata effettuata sul provino caratterizzato da ψ positivo, le previsioni della risposta in prove triassiali illustrate fino a questo punto non sono influenzate dall'ipotesi sui parametri p_r , ρ_c e θ . Avendo infatti inizializzato p_0 con il criterio 1 la variabile di incrudimento isotropo non viene intercettata dalla tensione media efficace nel corso della prova e quindi non si attiva di fatto la parte 2 della formulazione (§2.3.3 e §5.3.4.1) del modello. Per verificare l'adeguatezza dei parametri (Tabella 5) associati alla compressibilità nella Fig. 5-43 è mostrata, con tratto continuo, la simulazione di una prova edometrica. Confrontando la simulazione con i risultati sperimentali si può notare che l'ipotesi sull'andamento della LCC-ISO (parametri p_r , ρ_c) non consente di riprodurre il tratto finale della curva edometrica sperimentale del campione.

Nella Fig. 5-44 i risultati della simulazione della prova edometrica (effettuata assumendo i parametri riportati in Tabella 5.6) sono mostrati, con tratto continuo, nei piani $p':q$ e $\sigma'_v:\sigma'_h$. Gli andamenti nella Fig. 5-44, evidenziano una previsione anomala dell'evoluzione del coefficiente di spinta k_0 in scarico, che si riduce invece di aumentare. Il risultato dipende dal valore assunto dal coefficiente di Poisson a causa dell'ipotesi di $K_0=500$. Le simulazioni effettuate con un valore più basso di K_0 (linea tratteggiata) appaiono infatti più verosimili. Aumentando K_0 si simulano (nel piano di compressibilità) risposte più rigide (Fig. 5-43).

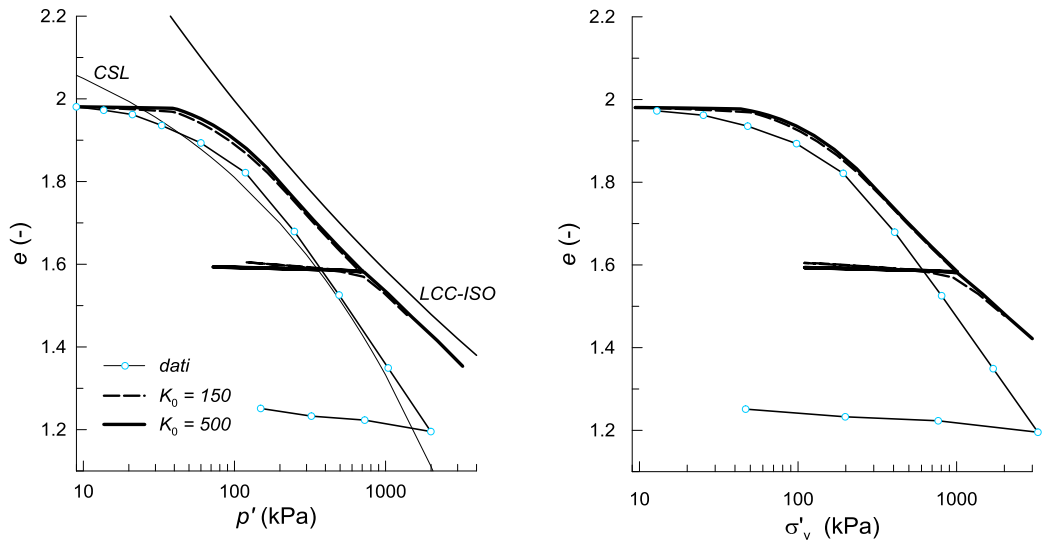


Fig. 5-43 Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali della prova di compressione edometrica sul campione SP03-1 effettuate con la calibrazione ultima al variare di K_0 . (a) Piano di compressibilità $\log(p'):e$ (b) Piano di compressibilità $\log(\sigma'_v):e$.

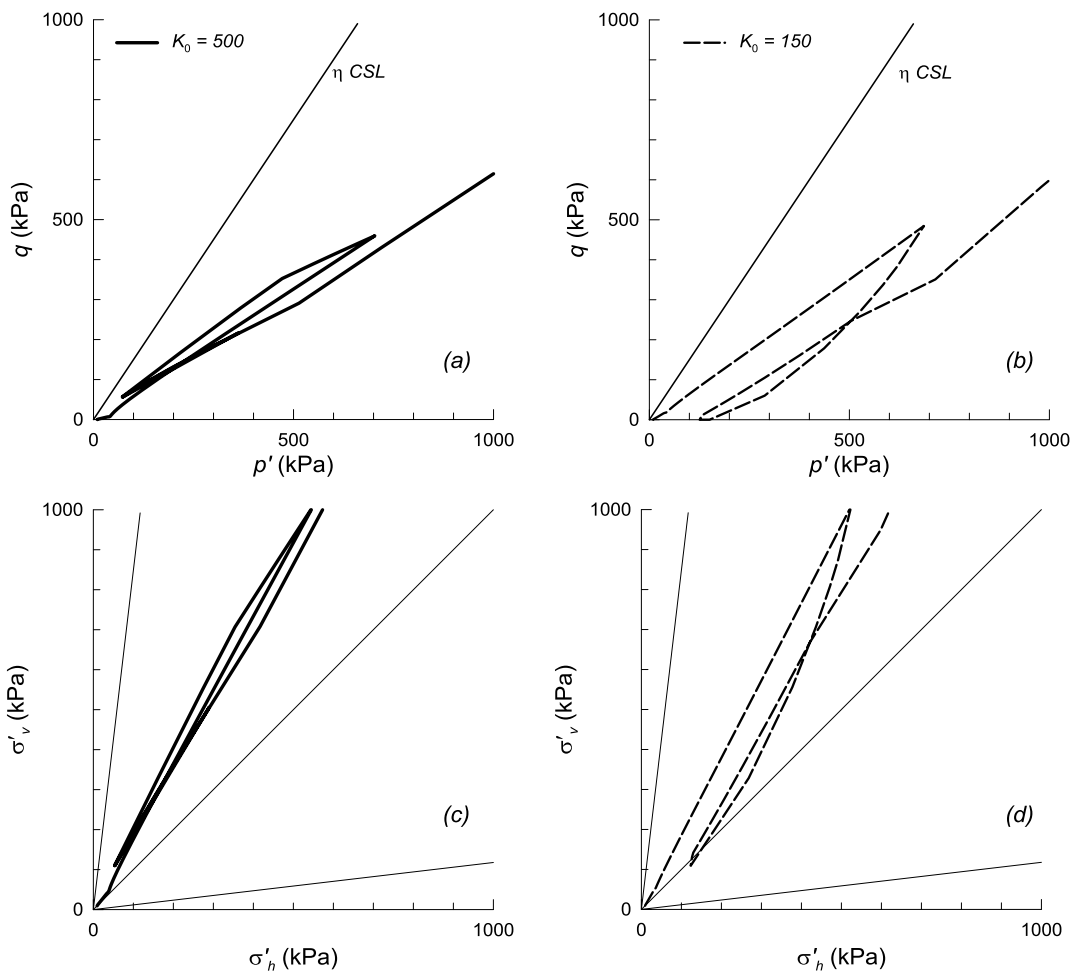


Fig. 5-44 Confronto fra le simulazioni numeriche della prova di compressione edometrica sul campione SP03-1 effettuate con la calibrazione ultima al variare di K_0 . (a) (b) Percorsi tensionali nel piano $p':q$. (c) (d) Percorsi tensionali nel piano $\sigma'_v:\sigma'_h$.

In alcuni casi un valore troppo alto di K_0 (rispetto a quello ipotizzato per G_0) può dar luogo, come visto, a risposte poco realistiche in scarico che possono comportare anche problemi di carattere numerico. In tutti i tratti della simulazione nei quali $p' < p_0$ il comportamento volumetrico è sostanzialmente elastico. Dalla Fig. 5-45 si può notare che assumendo $K_0 = 500$ il profilo di $K(e, p')$ nel deposito risulta correttamente maggiore di $G(e, p')$, il coefficiente di Poisson si mantiene però relativamente costante con la profondità e ben superiore a un valore realistico per le terre in condizioni drenate, che al massimo è approssimativamente pari a 0.35. Il fatto che v elastico risulti poco dipendente da e, p' (per $K_0 = 500$) è il motivo per il quale il percorso tensionale efficace, riportato nella Fig. 5-44.a, in scarico e ricarico rimane sostanzialmente lineare.

Della Fig. 5-46 si può apprezzare che un valore più basso del rapporto K_0/G_0 determina valori di v più realistici, sia per le condizioni della prova che nel deposito, e questo comporta la più verosimile simulazione delle fasi di scarico e ricarico mostrata con linea tratteggiata nella Fig. 5-44.

La simulazione delle prove edometriche ha evidenziato la necessità di modificare sia la LCC-ISO che il valore della costante K_0 riportati nella Tabella 5.6. Come chiarito nel § 5.3.4.1, l'andamento della LCC-ISO influenza la risposta prevista dal modello costitutivo solo se la tensione media efficace ne attinge il valore corrente. Assumendo il criterio 1 per l'inizializzazione della variabile di incrudimento isotropo, la variazione dei parametri p_r, ρ_c, θ non incide sulle previsioni della risposta non drenata perché il criterio è pensato per evitare che la tensione media efficace, proprio nel corso di queste prove, possa raggiungere il valore corrente di p_0 . Conseguentemente, con il criterio 1, nel corso delle prove triassiali non drenate il comportamento volumetrico rimane governato dalla risposta elastica. Per le ragioni appena chiarite, nel seguito si valuta l'effetto dovuto alla sola variazione di K_0 sulla risposta prevista nelle prove triassiali simulate assumendo il criterio 1. I valori attribuiti agli altri parametri (inclusi p_r, ρ_c, θ) sono ancora quelli della calibrazione ultima.

Nella Fig. 5-47 a sono mostrati gli effetti dovuti alle variazioni di K_0 sulla risposta prevista in prove triassiali non drenate. Riducendo K_0 , a parità di altre condizioni, i percorsi tensionali tendono a divenire più verticali, la fase contraente appare meno pronunciata. Nel piano ε_a-q (Fig. 5-47 b) la riduzione di K_0 produce una maggiore rigidezza nel tratto contraente e una maggiore riduzione di rigidezza nella successiva

fase dilatante. Gli andamenti apparentemente non sistematici acquisiscono coerenza se si tiene conto che varia il deviatore in corrispondenza del quale si manifesta la transizione di fase.

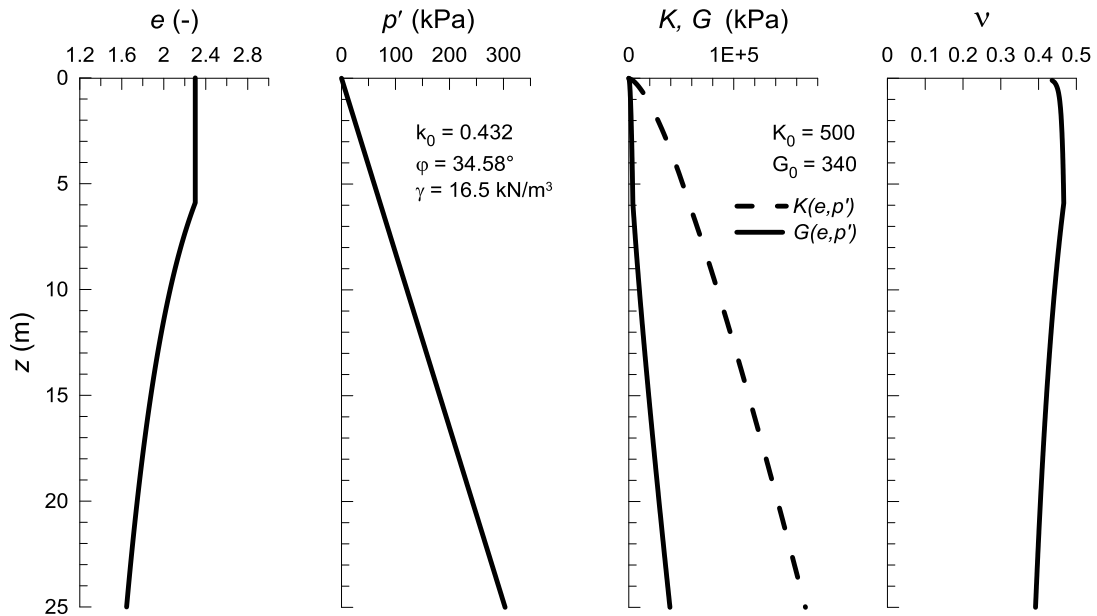


Fig. 5-45 Profili con la profondità: (a) andamento approssimato assunto per l'indice dei vuoti, (b) tensione media efficace stimata assumendo una distribuzione idrostatica delle pressioni interstiziali (c) Moduli di rigidezza elastici (d) andamento del coefficiente di Poisson ricavato da K e G.

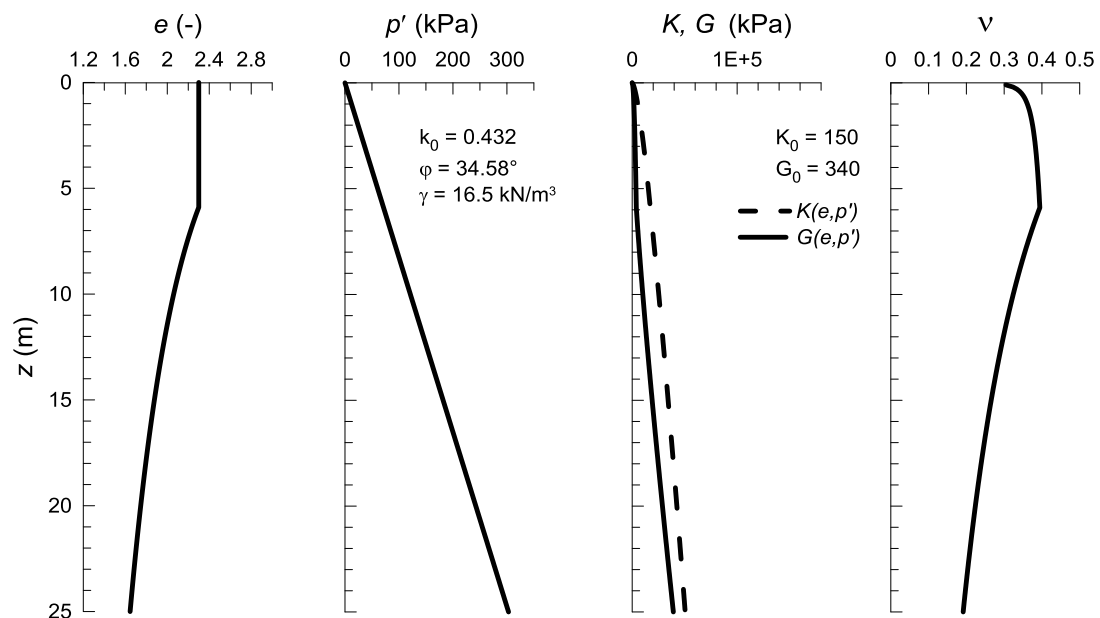


Fig. 5-46 Profili con la profondità: (a) andamento approssimato assunto per l'indice dei vuoti, (b) tensione media efficace stimata assumendo una distribuzione idrostatica delle pressioni interstiziali (c) Moduli di rigidezza elastici (d) andamento del coefficiente di Poisson ricavato da K e G.

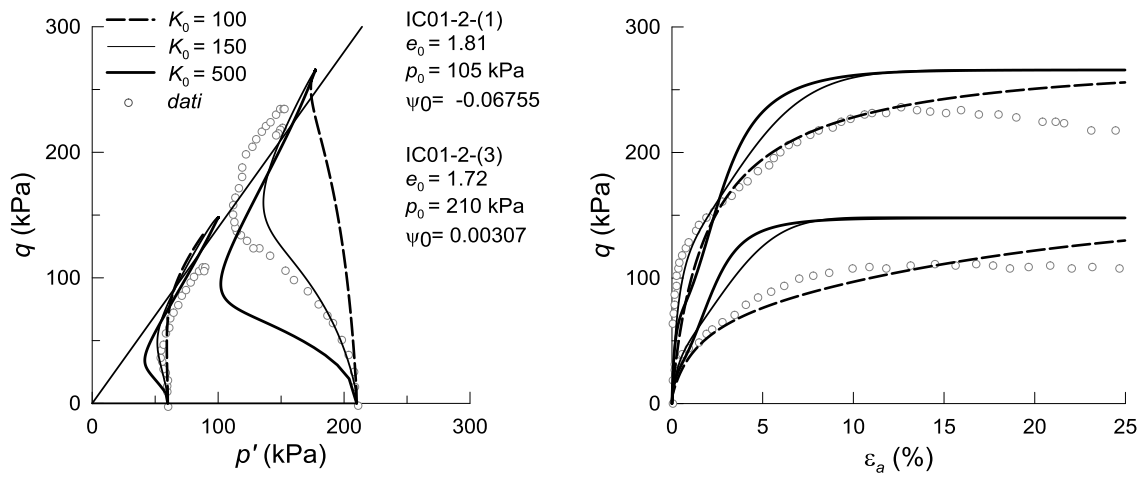


Fig. 5-47 Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate non drenate effettuate con la calibrazione ultima (assumendo il criterio 1 per la definizione di p_0) al variare di K_0 . (a) Percorsi tensionali efficaci (b) Relazioni tra tensioni e deformazioni

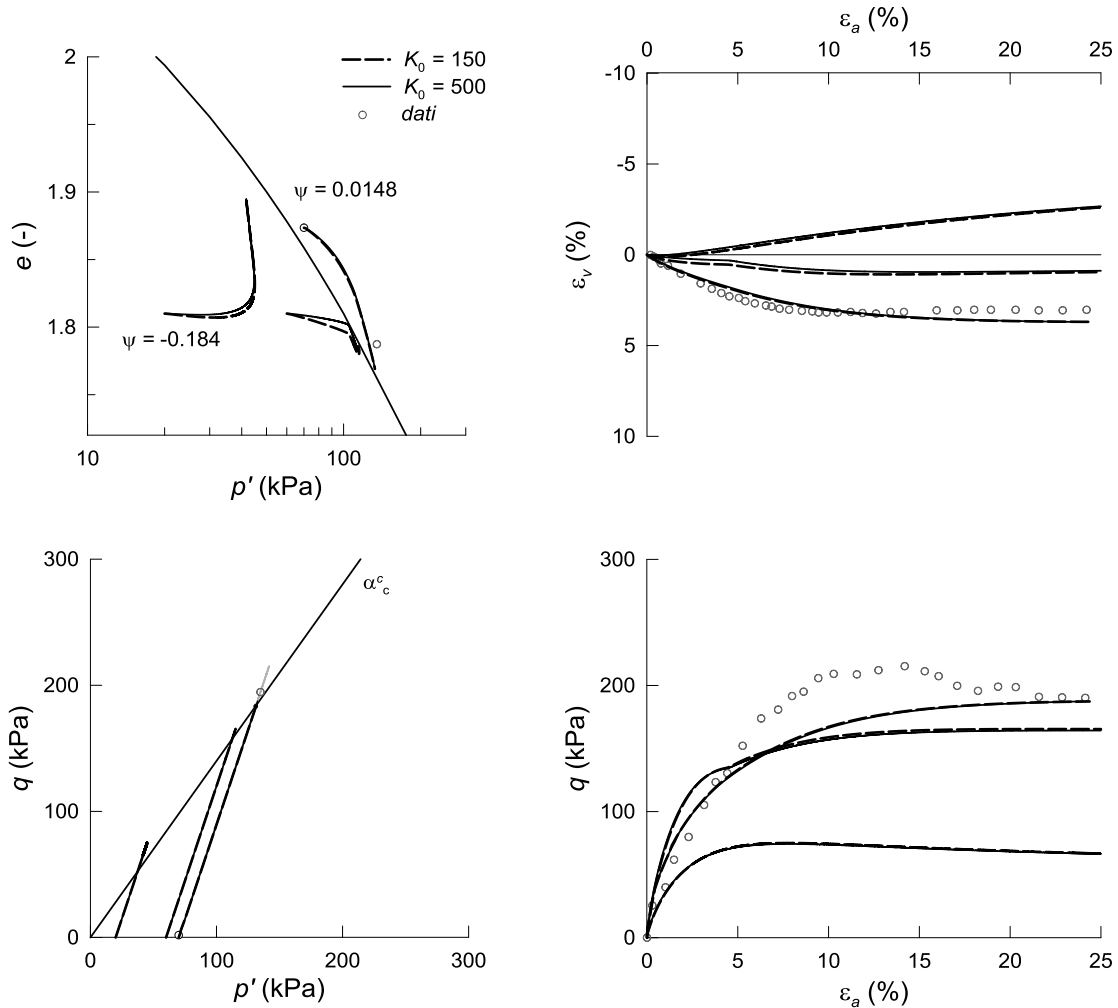


Fig. 5-48 Confronto fra le simulazioni numeriche e i risultati sperimentali di prove triassiali consolidate drenate effettuate con la calibrazione ultima (e il criterio 1 per la definizione di p_0) al variare di K_0 . (a) Risultati nel piano di compressibilità (b) Deformazioni volumetriche (c) Percorsi in tensioni efficaci (d) Relazioni tra tensioni e deformazioni.

Dalla Fig. 5-48, l'effetto di K_0 risulta molto meno rilevante sulla risposta drenata sia quando p_0 viene intercettata che quando rimane maggiore della tensione media efficace. Nel caso delle prove triassiali drenate prevale l'effetto del comportamento deviatorico e quindi del modulo di taglio. In ogni caso, in modo coerente con quanto ci si possa aspettare, anche per le prove drenate le variazioni di K_0 producono effetti maggiori quando $p' < p_0$ (Tenendo conto del criterio introdotto per inizializzare p_0 questo accade solo se lo stato iniziale della simulazione giace al di sotto della linea dello stato critico). Dalla Fig. 5-47 si nota che la riduzione di K_0 migliora decisamente i percorsi tensionali non drenati quando è necessario assumere un valore maggiore del parametro di dilatanza. Si noti infatti che la convessità dei percorsi in tensioni efficaci (Fig. 5-36) viene rimossa.

5.3.4.3. Calibrazione con il secondo criterio

I due criteri definiti per inizializzare p_0 consentono di effettuare la calibrazione dei parametri tenendo conto su quali aspetti della risposta essi incideranno. Il criterio 1 assicura che nella simulazione di un problema al finito i percorsi tensionali efficaci deviatorici non drenati non saranno influenzati dalla compressibilità. Il criterio 1 è da preferirsi quando interessa simulare la risposta non drenata ma non la compressibilità, oppure quando, volendo simulare anche la compressibilità, l'insieme degli stati iniziali del materiale in sito è rappresentato da punti la cui posizione nel piano di compressibilità, rispetto alla linea dello stato critico, sia tale che l'applicazione del criterio non ne degradi la modellazione. In ogni caso, è sempre preferibile verificare la risposta prevista dal modello nel caso di ψ iniziale negativo assumendo il criterio 2, così da evitare comportamenti inattesi.

Nella Fig. 5-49 ad esempio, si noti che assumendo il criterio 2 il percorso tensionale simulato con la calibrazione iniziale (linea rossa) mostra un andamento quasi verticale in cui le variazioni di p' sembrano annullarsi molto prima del raggiungimento dello stato critico. Dalla relazione $\varepsilon_a : q$, si noti inoltre che il deviatore sembra stabilizzarsi a un valore considerevolmente più basso di quello a stato critico.

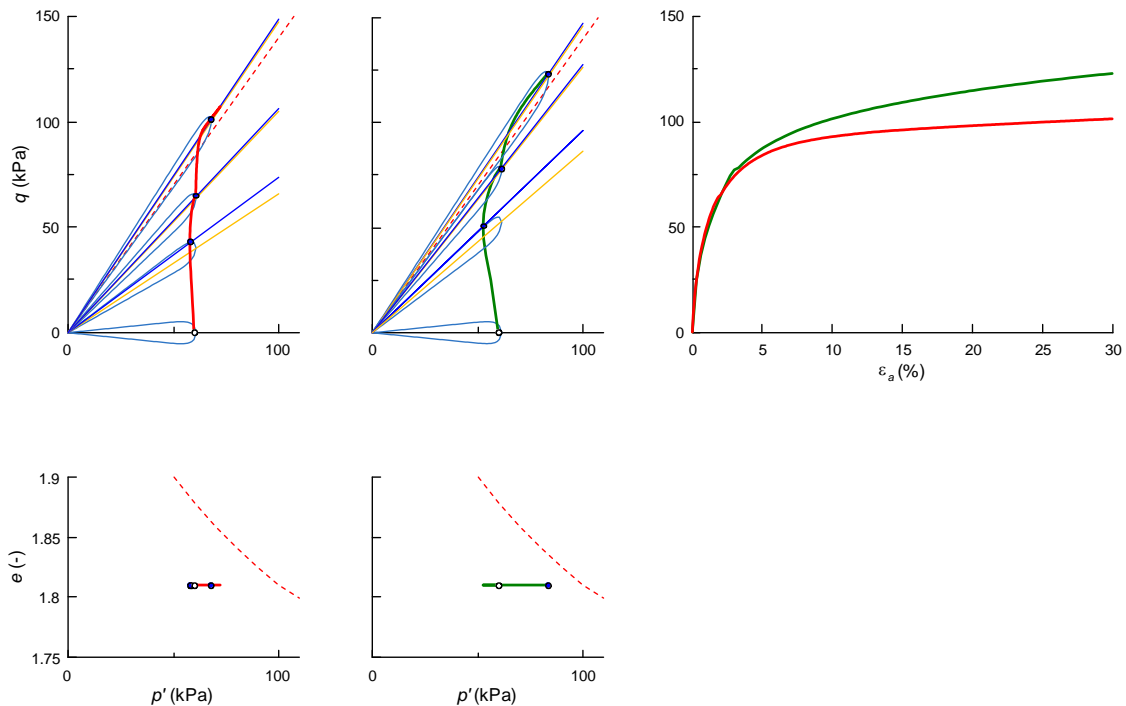


Fig. 5-49 Confronto fra i risultati sperimentali e le simulazioni numeriche della prova IC01-2 (2) effettuate assumendo il criterio 2, con due diverse calibrazioni.

Gli andamenti mostrati in verde nella Fig. 5-49 sono stati ottenuti, assumendo il criterio 2, con la calibrazione dei parametri ritenuta soddisfacente (Tabella 5.5). Nonostante si rilevi la discontinuità sia del percorso in tensioni efficaci che della relazione $\varepsilon_a : q$, il gradiente di q rispetto ad ε_a sembra consentire il raggiungimento dello stato critico a un livello di deformazione realistico e la previsione della risposta (Fig. 5-49) appare complessivamente in accordo con i risultati sperimentali (Fig. 5-23).

Poiché le variazioni di p' previste nelle prove non drenate sono completamente determinate dalle caratteristiche meccaniche del materiale, se si sceglie di inizializzare p_0 con il criterio 1, la calibrazione dei parametri risulta in qualche modo più agevole, perché sussiste un maggiore disaccoppiamento degli effetti determinati dai parametri legati alle caratteristiche di compressibilità e quelli maggiormente riconducibili alle caratteristiche del comportamento deviatorico.

Scegliendo di adottare il criterio 2, la calibrazione dei parametri deve essere effettuata tenendo conto che, nel corso della fase deviatorica, il peso che alcuni di essi hanno sulla risposta può cambiare. In caso contrario la previsione del comportamento meccanico non drenato può risultare anomala, come quella mostrata con linea rossa nella Fig. 5-49. Per ottenere una risposta adeguata nelle simulazioni effettuate, in condizioni non

drenate, a partire da stati iniziali caratterizzati da ψ negativo si deve scegliere innanzitutto un valore di A_d sufficientemente alto affinché si possa mantenere una influenza del contributo di tipo 1 alla dilatanza sulla risposta. Si deve inoltre assumere una LCC-ISO adeguata a cogliere la reale compressibilità del materiale, perché le variazioni di p' legate all'incrudimento isotropo possono contribuire a determinare una risposta complessivamente corretta.

La previsione insoddisfacente della risposta non drenata ottenuta con la calibrazione della Tabella 5.6 deriva sia dal valore basso assunto per A_d , sia dalla inadeguatezza della LCC-ISO (mostrata nella Fig. 5-43).

Tenendo conto di questo effetto durante la fase di calibrazione, è possibile ottenere una previsione che riproduca globalmente in modo corretto la risposta sperimentale, anche se la discontinuità nei percorsi tensionali e negli andamenti delle relazioni $\varepsilon_a:q$ continuerà a manifestarsi, perché essa dipende dall'attivazione della nuova formulazione in un percorso che non è ad η costante.

5.3.5. Appendice al capitolo 5

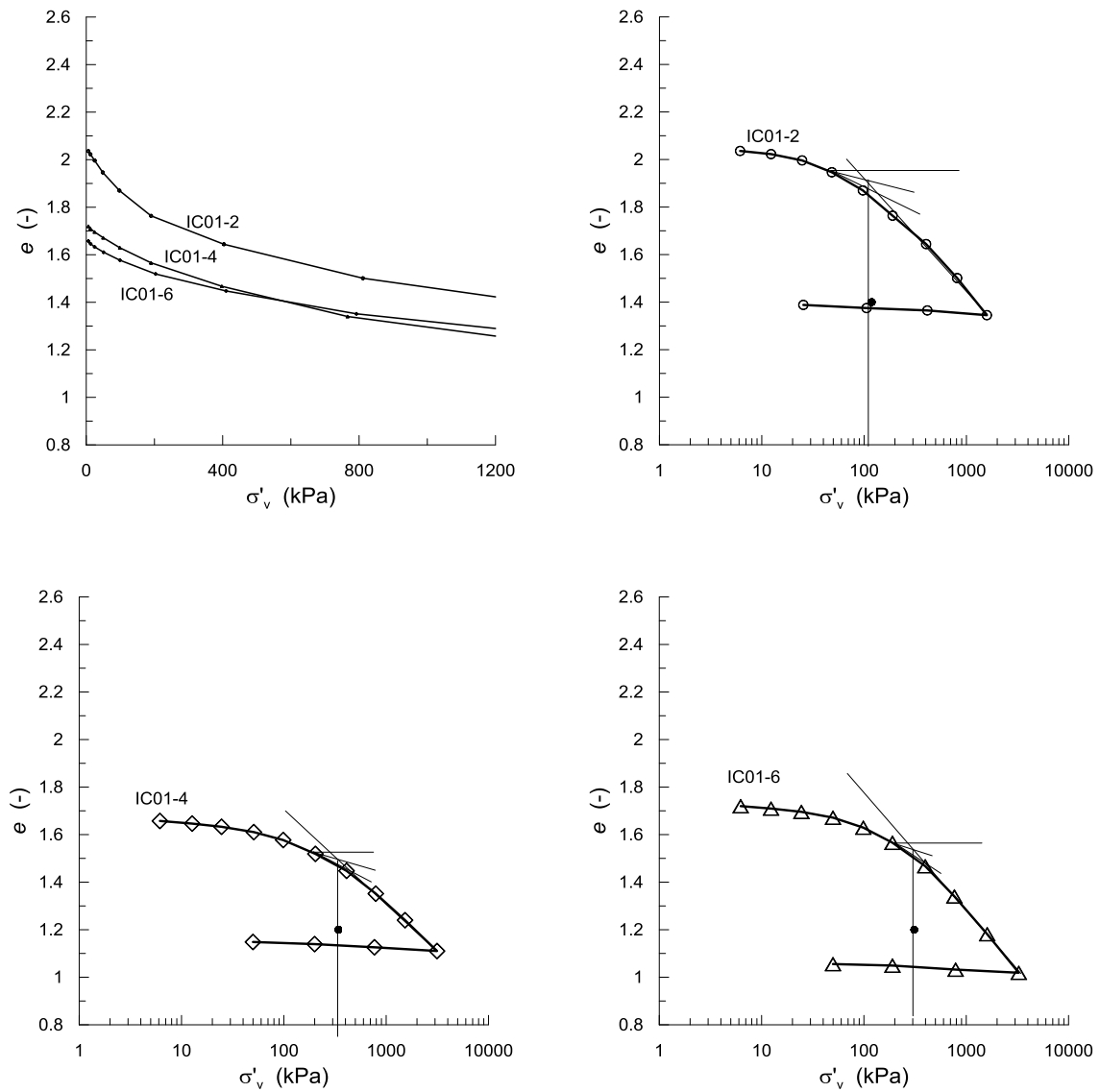


Fig. 5-50 Curve di compressione edometrica sperimentali: ingrandimento del primo tratto delle curve rappresentate in scala lineare e rappresentazione in scala semilogaritmica.

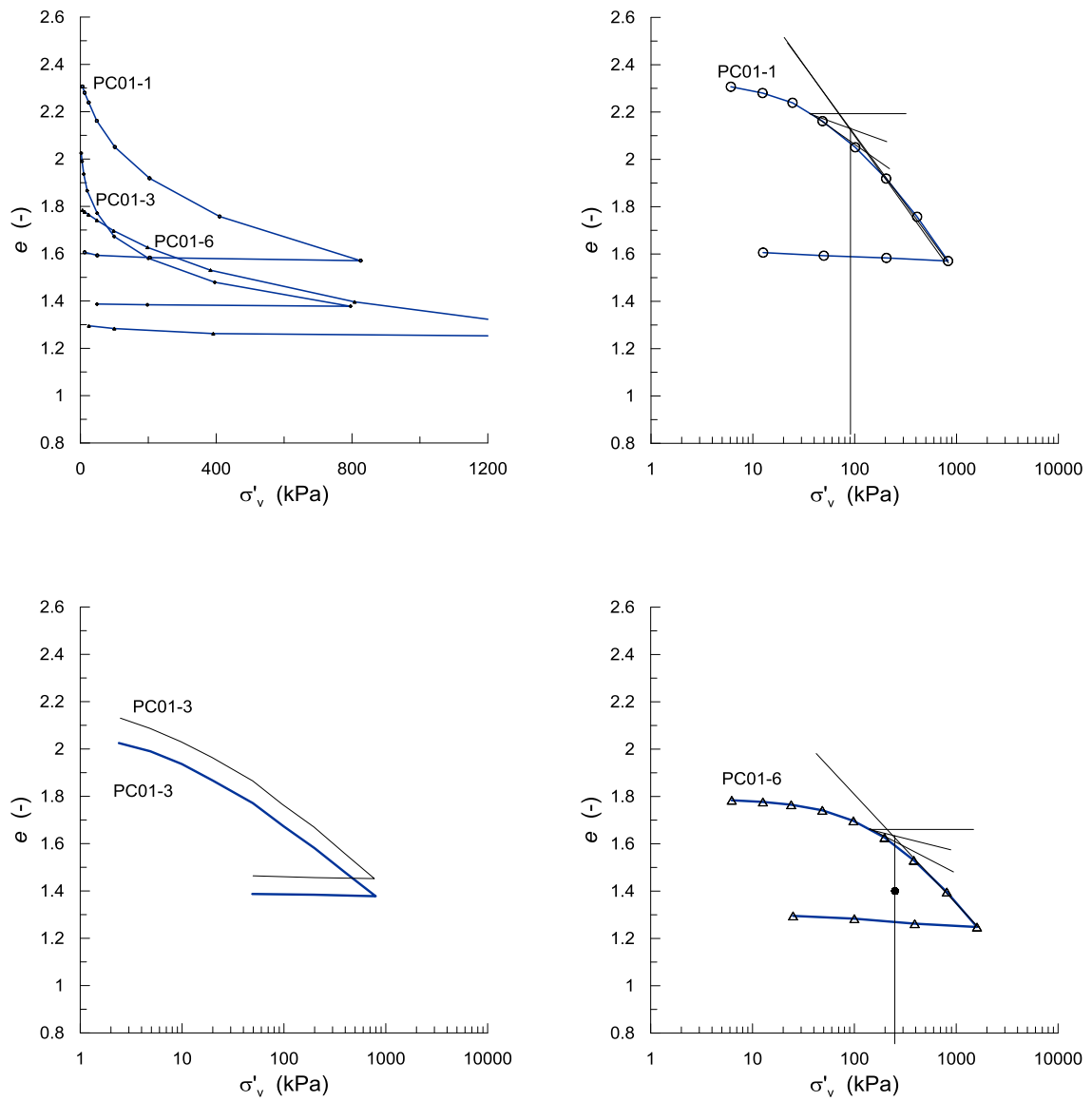


Fig. 5-51 Curve di compressione edometrica sperimentali: ingrandimento del primo tratto delle curve rappresentate in scala lineare e rappresentazione in scala semilogaritmica.

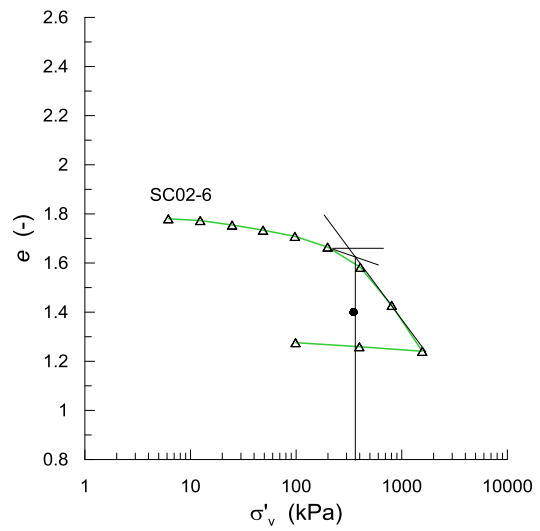
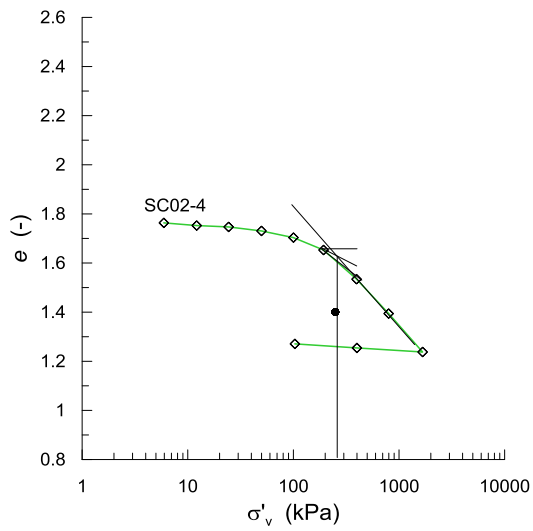
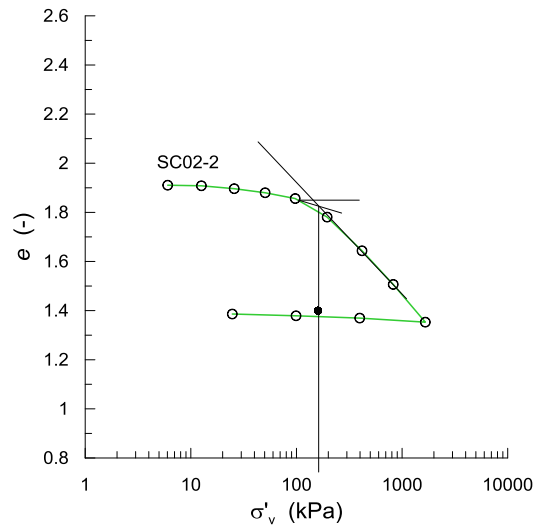
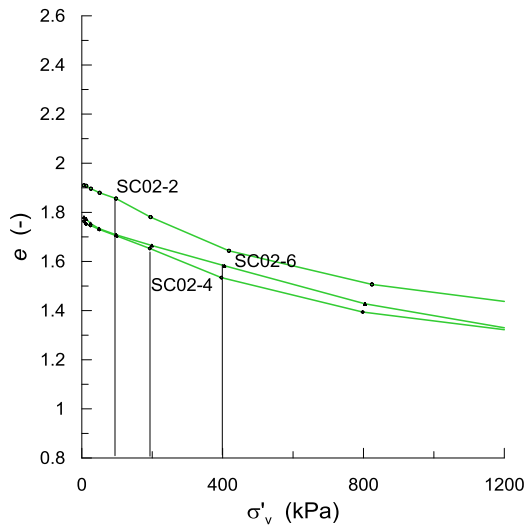


Fig. 5-52 Curve di compressione edometrica sperimentali: ingrandimento del primo tratto delle curve rappresentate in scala lineare e rappresentazione in scala semilogaritmica.

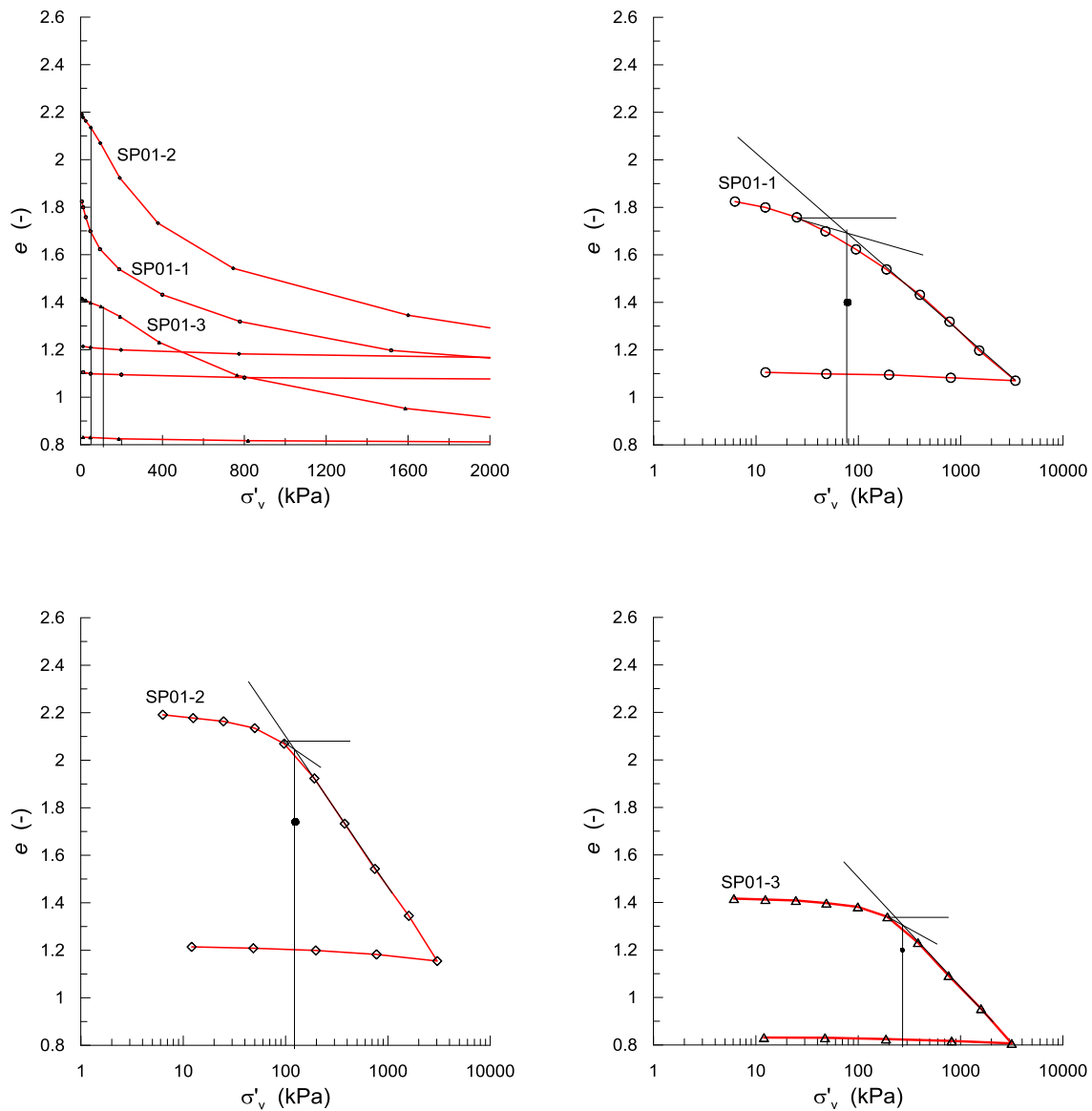


Fig. 5-53 Curve di compressione edometrica sperimentali: ingrandimento del primo tratto delle curve rappresentate in scala lineare e rappresentazione in scala semilogaritmica.

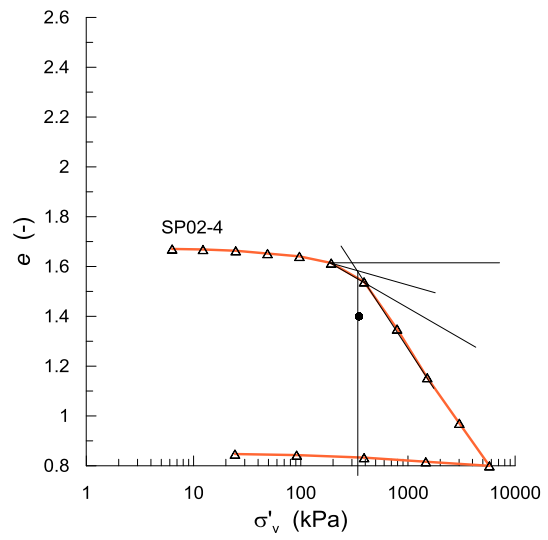
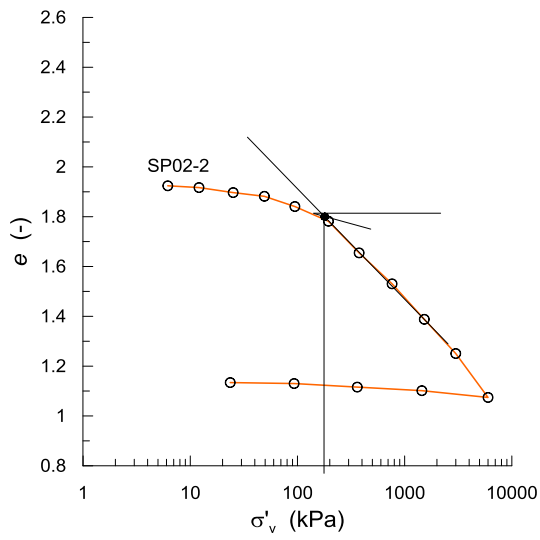
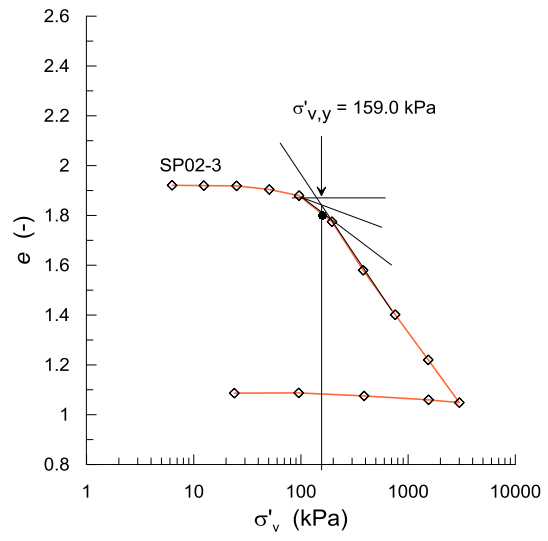
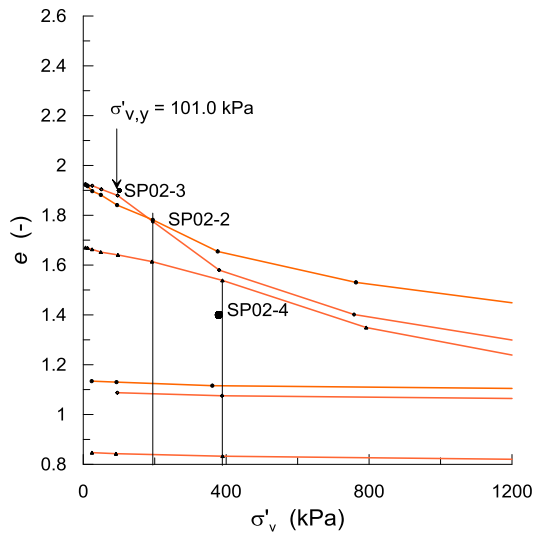


Fig. 5-54 Curve di compressione edometrica sperimentali: ingrandimento del primo tratto delle curve rappresentate in scala lineare e rappresentazione in scala semilogaritmica.

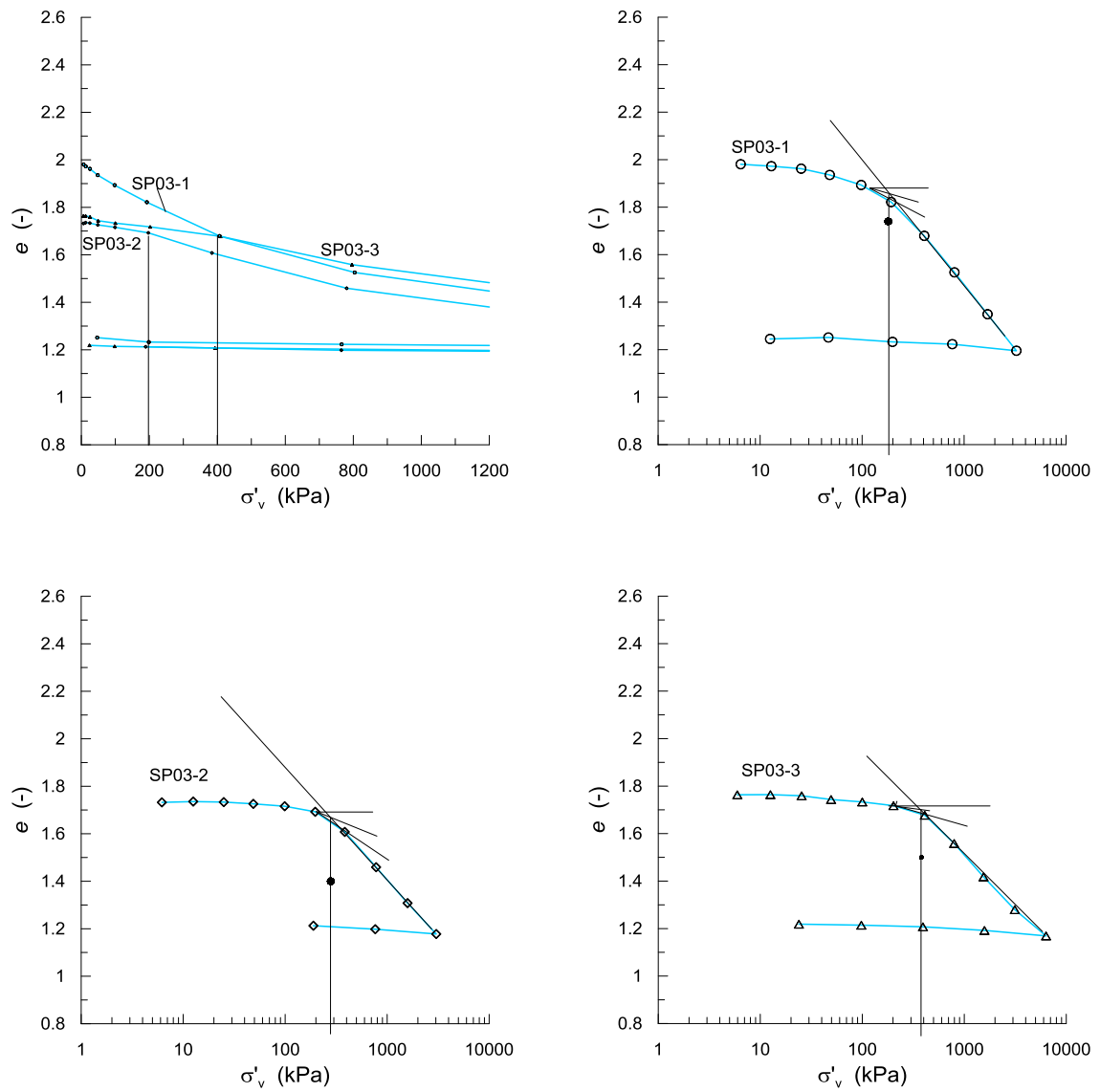
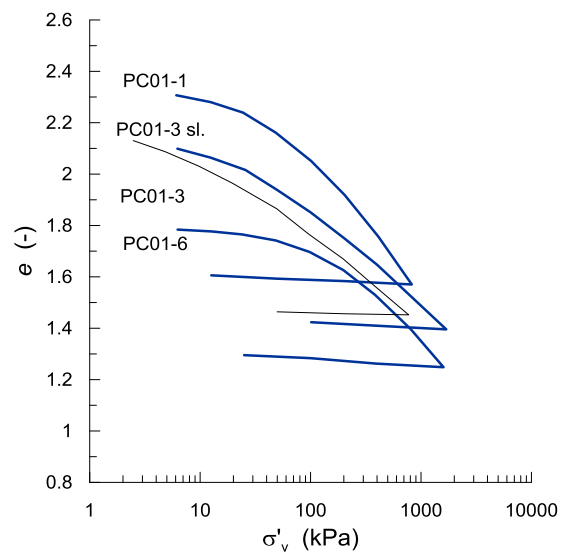
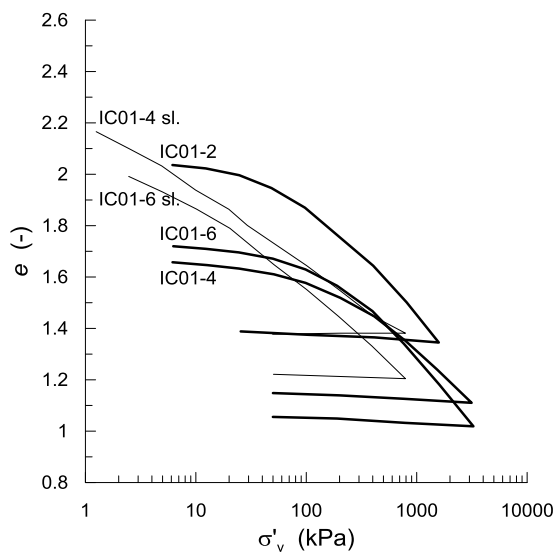
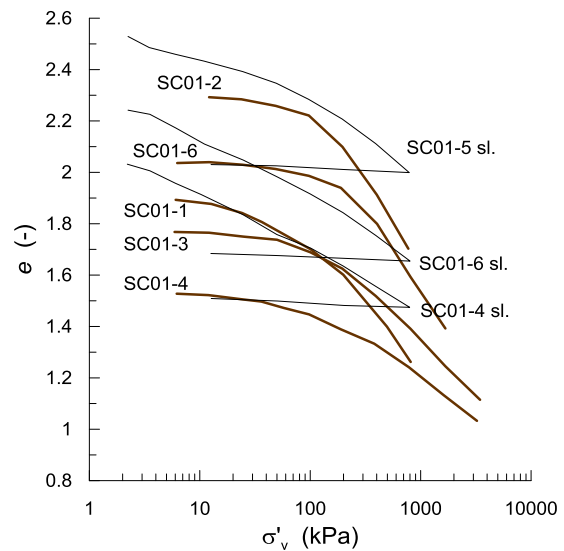
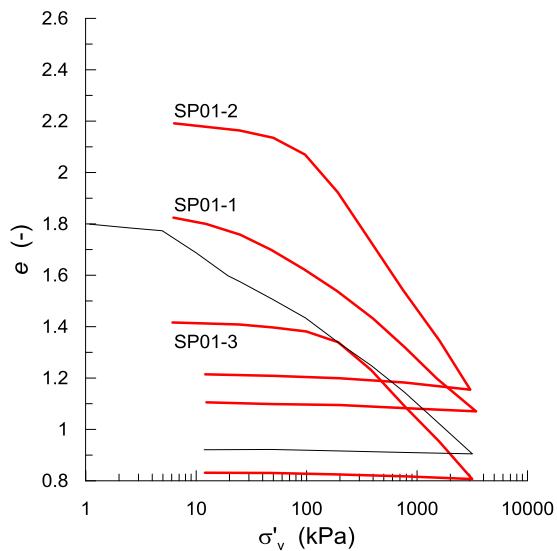
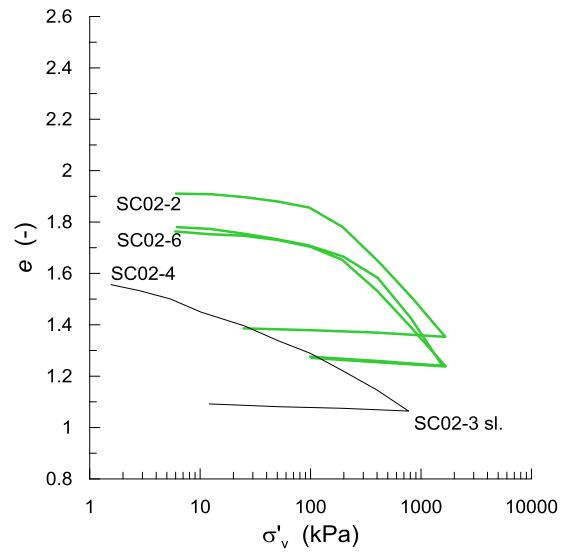
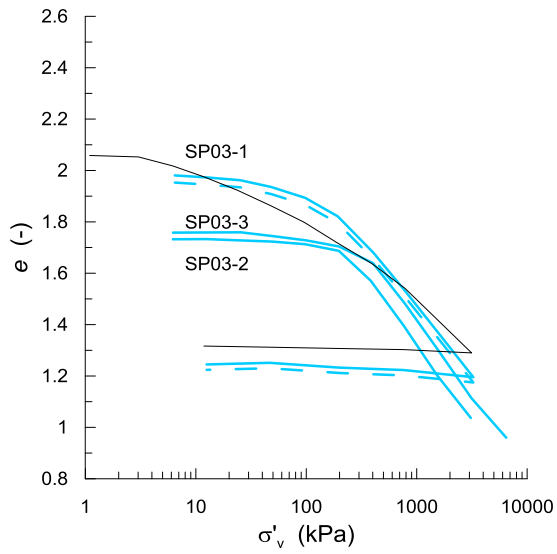


Fig. 5-55 Curve di compressione edometrica sperimentali: ingrandimento del primo tratto delle curve rappresentate in scala lineare e rappresentazione in scala semilogaritmica.



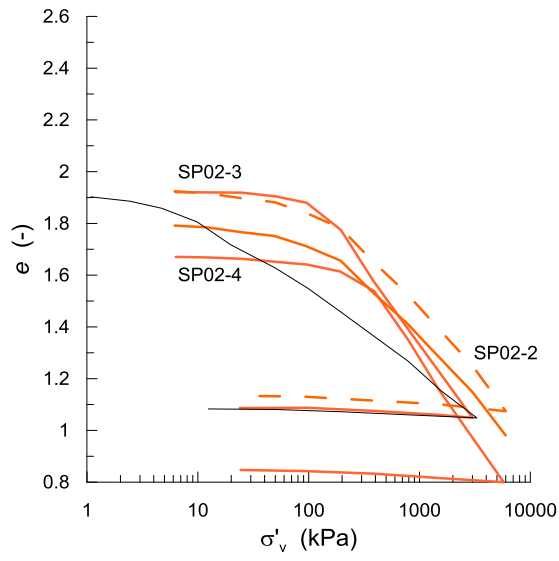


Fig. 5-56 Curve di compressione edometrica sperimentali: confronto fra le curve ottenute su campioni indisturbati e ricostituiti.

Conclusioni

Questo studio si è occupato del comportamento meccanico di terreni limosi, mediante la descrizione analitica fornita da un particolare modello costitutivo basato sulla plasticità con incrudimento. Il modello costitutivo individuato, seppure originariamente formulato per riprodurre il comportamento meccanico di terreni sabbiosi, può essere utilizzato per la simulazione del comportamento meccanico dei limi soprattutto grazie alla capacità di prevedere deformazioni plastiche anche per percorsi tensionali proporzionali. Si è mostrato che il modello può cogliere correttamente caratteri del comportamento di un terreno limoso, non solo nel caso di bassa plasticità (comportamento *sand like*) ma anche quando manifesti aspetti ritenuti più specifici dei terreni limosi, che non rientrino immediatamente nei consueti schemi di riferimento per le sabbie e le argille.

Il legame costitutivo impiegato è una particolare versione del modello costitutivo elastoplastico incrudente SANISAND sviluppata da Taiebat e Dafalias nel 2008. Proprio la possibilità di riprodurre lo sviluppo di deformazioni plastiche anche in percorsi tensionali proporzionali ha consentito di applicare il modello costitutivo ai limi. Infatti tali materiali, anche quando contraddistinti da un comportamento meccanico deviatorico *sand like*, manifestano compressibilità che, contrariamente a quanto accade nelle sabbie, non sono in genere trascurabili. Il legame prevede una superficie di plasticizzazione chiusa, soggetta a incrudimento rotazionale e isotropo. Il modo di inizializzare la variabile di incrudimento isotropo del modello, che in sostanza definisce l'estensione della superficie di plasticizzazione, determina la possibilità che i percorsi tensionali coinvolgano la parte chiusa della superficie, producendo un contributo aggiuntivo alle deformazioni plastiche, associato alle caratteristiche di compressibilità.

Il modello è stato implementato nel codice di calcolo agli elementi finiti Abaqus Standard e calibrato con riferimento a campioni di un limo artificiale prelevati dal bacino di accumulo di una discarica mineraria.

La ricerca condotta si è posta principalmente due obiettivi: in primo luogo valutare l'effettiva convenienza nell'impiegare il modello costitutivo per la simulazione del

comportamento meccanico dei limi; in secondo luogo, utilizzare il legame costitutivo come un riferimento concettuale che consenta di valutare quantitativamente e in modo oggettivo lo specifico comportamento dei limi, anche in relazione all'eventuale scostamento dai caratteri tipici delle sabbie.

Lo sviluppo della ricerca ha però aperto un terzo aspetto dello studio, relativo alle previsioni del modello nel caso in cui i percorsi tensionali producano il passaggio da un comportamento prevalentemente deviatorico a condizioni nelle quali siano chiamate in causa anche le caratteristiche di compressibilità del materiale. In questo caso, le deformazioni plastiche dipendono sostanzialmente dal parametro di stato δ , che definisce la distanza fra la tensione media efficace corrente e quella valutata in corrispondenza dell'indice dei vuoti corrente sulla curva di compressione limite.

Nello studio sono stati mostrati nel dettaglio i confronti tra i risultati sperimentali e le previsioni ottenute assumendo diverse ipotesi sui valori iniziali della variabile interna isotropa del modello, mostrando che l'inizializzazione di questa variabile di incrudimento può condurre a risposte anomale e indesiderate: se nel corso della simulazione di un percorso tensionale la tensione media efficace raggiunge il valore corrente della variabile di incrudimento, si determina infatti un brusco cambiamento nella risposta del materiale. In questo lavoro, la proposta di due criteri per l'inizializzazione della variabile interna di tipo isotropo non soddisfa solo un'esigenza di carattere concettuale, ma permette di eliminare o gestire le eventuali discontinuità individuate nella risposta prevista dal modello. Per tale motivo, nel capitolo 5, le indicazioni su come procedere alla calibrazione sono state fornite in base al criterio adottato per inizializzare la variabile di incrudimento. Poiché la ricerca di una correlazione tra le condizioni iniziali del materiale e il valore iniziale delle variabili di incrudimento costituisce una delle difficoltà che devono sempre essere affrontate quando si utilizzi un legame costitutivo elastoplastico incrudente nello studio di un problema al finito, i risultati ottenuti in questo lavoro possono indicare un chiaro modo di procedere.

In linea generale, il modello costitutivo impiegato, seppure originariamente proposto per le sabbie, si mostra complessivamente adeguato a riprodurre la risposta meccanica del limo artificiale di elevata plasticità esaminato nel lavoro. Il materiale studiato ha

infatti presentato diversi aspetti particolari della risposta meccanica che il modello è stato in grado di riprodurre. In primo luogo il limo ha mostrato diverse linee di normal consolidazione che non sembrano convergere. La mancanza di convergenza, seppure forse accentuata dal fatto che i livelli tensionali raggiunti nelle prove di compressione non sono sufficientemente elevati oppure da un probabile disturbo dei campioni, sembrerebbe comunque tale da far pensare a caratteristiche di compressibilità analoghe a quelle riscontrate nei materiali di transizione. Un aspetto di interesse consiste nel fatto che, nonostante il modello richieda la definizione dell'andamento della curva di compressione limite del materiale, e una unica linea di compressione limite non sia stata individuata, è stato possibile ricercarne iterativamente un andamento che ha consentito di riprodurre il particolare comportamento esibito dal materiale nel piano di compressibilità e quindi di gestire la mancanza di convergenza. Il tentativo di simulare il comportamento del limo con un modello per sabbie ha mostrato inoltre che il comportamento non drenato, definito intermedio in letteratura, mostrato spesso dai limi a partire da stati iniziali caratterizzati da ψ positivo può agevolmente essere riprodotto anche con un modello per sabbie.

La calibrazione basata sui dati sperimentali ottenuti da campioni indisturbati e finalizzata alla futura modellazione di un problema al finito ha richiesto di affrontare aspetti che possono fornire indicazioni di interesse generale anche per l'applicazione in problemi al finito delle precedenti versioni del modello SANISAND.

La formulazione del modello SANISAND (Taiebat e Dafalias, 2008) si caratterizza per essere costituita da due parti, finalizzate a riprodurre rispettivamente la risposta in percorsi tensionali proporzionali e in percorsi ad η variabile (quest'ultima quella tipica delle precedenti versioni di SANISAND). La presenza di un campo elastico nelle caratteristiche di compressibilità, che tra l'altro può divenire molto esteso, insieme all'aspetto della formulazione specificatamente pensato per combinare le due formulazioni, determinano una notevole complicazione nell'applicazione del modello proprio quando si voglia sfruttare sia la capacità di riprodurre la compressibilità che il comportamento deviatorico. Il confronto fra i risultati sperimentali e le simulazioni numeriche, condotto con metodo, definendo la variabile di incrudimento isotropo sulla base di un criterio omogeneo, associato alla valutazione delle condizioni iniziali del

materiale, ha comportato una chiara definizione del campo di impiego del modello e delle sue effettive potenzialità. La convenienza nell'impiego del legame per la simulazione del comportamento meccanico di un deposito di terreno può essere effettivamente valutata conoscendo la posizione reciproca, nel piano di compressibilità, fra tutti i punti rappresentativi delle condizioni di preconsolidazione del materiale nel deposito e la linea dello stato critico, oltre che dalla tipologia di percorsi tensionali di maggiore interesse nel problema applicativo. Per quanto affermato è evidente che la valutazione preliminare della convenienza di impiego del modello richiede di conoscere in partenza la correlazione tra condizioni in sito e caratteristiche intrinseche del materiale, in particolare l'andamento della linea dello stato critico. I criteri proposti, senza apportare modifiche alla formulazione del modello, consentono di sfruttare al massimo le potenzialità che il legame ha mostrato di possedere, anche nei casi nei quali non è possibile effettuare preventivamente questa valutazione. La scelta tra i due criteri si basa sul bilanciamento fra gli obiettivi principali della modellazione e potenzialità del modello.

Il legame costitutivo risulta in generale adeguato nella modellazione della compressibilità e della risposta deviatorica in percorsi tensionali monotoni che coinvolgano depositi normalmente consolidati il cui stato iniziale sia rappresentato nel piano di compressibilità da punti collocati sopra la linea dello stato critico. Nel caso di stato iniziale caratterizzato da ψ negativo le discontinuità riscontrate nella risposta non drenata possono essere eliminate adottando il primo criterio. Questo criterio propone di assumere il valore iniziale della variabile di incrudimento isotropo uguale a quello valutato a stato critico in corrispondenza dell'indice dei vuoti iniziale. Il criterio, se elimina le discontinuità della risposta deviatorica, comportando però una estensione del campo elastico, evidentemente limita le capacità del modello di prevedere la compressibilità nei casi nei quali la tensione media efficace iniziale è considerevolmente inferiore a quella a stato critico. Con riferimento al caso delle sabbie, questa penalizzazione ha poca rilevanza se si parla di stati iniziali densi, per i quali comunque la modellazione della compressibilità non è di interesse, ma potrebbe essere importante nel caso di sabbie sciolte. Per un limo come quello esaminato, la modellazione delle caratteristiche di compressibilità potrebbe essere compromessa anche nel caso di stato iniziale denso, poiché, come mostrato nella tesi, per questo

materiale le molteplici linee di normal consolidazione sono risultate caratterizzate da coefficienti di compressibilità elevati, anche sotto la LSC, a prescindere dall'indice dei vuoti iniziale.

Proprio dalle considerazioni sviluppate nella tesi emergono spunti chiari sugli aspetti della formulazione del legame costitutivo che, se modificati, fornirebbero uno strumento di ampio spettro di applicabilità nella modellazione dei limi. Tali considerazioni sono sviluppate in chiusura del paragrafo 5.3.3.

Appendice

Notazioni

Nei paragrafi 2.2 e 2.3 i simboli in grassetto: \mathbf{L} , \mathbf{R} , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{a} , \mathbf{r} , \mathbf{e} , \mathbf{s} , rappresentano tensori del secondo ordine. Nel paragrafo 2.2 (seguendo la notazione impiegata in Pots e Zdravkovic (2001)) gli stessi simboli sono impiegati per indicare i tensori del secondo ordine espressi nella notazione di Voigt, secondo la quale le componenti indipendenti del tensore simmetrico sono raccolte in un vettore colonna. Il tensore identità del secondo ordine è stato indicato con \mathbf{I} . Il simbolo $:$ denota il prodotto *double contraction of tensors (internal product of second order tensors)* $\mathbf{a}:\mathbf{b} = a_{ij}b_{ij}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}]^T \quad (\text{A.2})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{12} \quad \tau_{13} \quad \tau_{23}]^T \quad (\text{A.3})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} = (\gamma_{12}/2) \quad \varepsilon_{13} = (\gamma_{13}/2) \quad \varepsilon_{23} = (\gamma_{23}/2)]^T \quad (\text{A.5})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ab} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{23}]^T \quad (\text{A.6})$$

Nelle (A.3) e (A.6) le componenti dei tensori della tensione e della deformazione sono espresse in notazione ingegneristica. Tutte le relazioni del legame costitutivo correlano il tensore $\boldsymbol{\sigma}$ a $\boldsymbol{\varepsilon}$ (A.4) (A.5). Le relazioni elastiche in questo caso sono:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K + \frac{4G}{3} & K - \frac{2G}{3} & K - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2G}{3} & K + \frac{4G}{3} & K - \frac{2G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{2G}{3} & K - \frac{2G}{3} & K + \frac{4G}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \end{Bmatrix}$$

Il prodotto interno fra i tensori del secondo ordine $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}$) è uguale al prodotto matriciale $\boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ solo se le componenti dei vettori sono espresse in notazione ingegneristica. Tale notazione è impiegata in Abaqus e in altri codici di calcolo agli elementi finiti.

È importante tenere conto della relazione esistente tra i risultati del prodotto scalare fra tensori del secondo ordine e del prodotto matriciale fra le matrici vettore colonna che li rappresentano in notazione di Voigt (per maggiori dettagli si rimanda a de Souza Neto (2008)). Ad esempio, con riferimento al tensore, \mathbf{L} , gradiente della funzione di plasticizzazione $\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{L}$ non è uguale a $\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{L}$. Per garantire l'identità fra le due operazioni, le componenti del vettore \mathbf{L} possono essere premoltiplicate per due nel caso in cui si esegua il prodotto interno fra \mathbf{L} e $\boldsymbol{\sigma}$. Le componenti del tensore \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{21}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{31}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} & \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

nella notazione di Voigt possono assumere la seguente espressione:

$$\mathbf{L} = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{11}} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{22}} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{33}} \quad 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{12}} \quad 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{13}} \quad 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{23}} \right]^T \quad (\text{A.8})$$

Di seguito si richiamano alcune definizioni riportate nel testo e utili al calcolo della derivata della funzione di plasticizzazione $\mathbf{L} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{s}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$, riportata alla fine di questa appendice. Per le altre relazioni si rimanda a Desai e Siriwardane (1986) e Jeremic, B. F., (2008).

Invarianti della tensione

$$J_1 = tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} \quad (\text{A.9})$$

$$J_2 = \frac{1}{2} tr(\boldsymbol{\sigma})^2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji} \quad (\text{A.10})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma})^3 = \frac{1}{3} \sigma_{ik} \sigma_{kj} \sigma_{ji} \quad (\text{A.11})$$

Invarianti deviatorici

$$J_{1s} = tr(\mathbf{s}) = s_{ii} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$J_{2s} = \frac{1}{2} tr(\mathbf{s})^2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (\text{A.13})$$

$$J_3 = \frac{1}{3} tr(\mathbf{s})^3 = \frac{1}{3} s_{ik} s_{kj} s_{ji} \quad (\text{A.14})$$

Invarianti usati in geotecnica

$$p = \frac{1}{3} J_1 \quad (\text{A.15})$$

$$q = \sqrt{3J_{2s}} \quad (\text{A.16})$$

$$\vartheta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}}\right) \quad (\text{A.17})$$

L'angolo di Lode calcolato dalla seguente espressione:

$$\vartheta = \frac{1}{3} \arccos\left(\sqrt{6} tr \mathbf{n}^3\right) \quad (\text{A.18})$$

con \mathbf{n} tensore deviatorico unitario $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{a}) : (\mathbf{r} - \mathbf{a})}} = \frac{\bar{\mathbf{r}}}{\sqrt{\bar{\mathbf{r}} : \bar{\mathbf{r}}}}$. Si può dimostrare

che la (A.18) è equivalente alla (A.17):

$$\cos 3\vartheta = \sqrt{6} tr \mathbf{n}^3 = \sqrt{6} \frac{tr(\bar{\mathbf{r}}^3)}{|\bar{\mathbf{r}}|^3} = \sqrt{6} \frac{tr(\bar{\mathbf{r}}^3)}{(\bar{\mathbf{r}} : \bar{\mathbf{r}})^{3/2}} = \sqrt{6} \frac{3J_{3\bar{r}}}{(\sqrt{2}J_{2\bar{r}})^3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\bar{S}}{\sqrt{J_{2\bar{r}}}}\right)^3 \quad (\text{A.19})$$

nella (A.19) $\bar{S} = (J_{3\bar{r}})^{\frac{1}{3}}$

Derivate di alcuni invarianti:

$$\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{I} \right) = \left(\frac{1}{3} \mathbf{I} \right) \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} (\boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}) = \left(\mathbf{I}_{mnpq} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{mnpq} \right) \quad (\text{A.21})$$

Gradiente della funzione di plasticizzazione del modello:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3(\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha}) \left(\mathbf{I}_{mnpq} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{mnpq} \right) + \left[-3(\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha}) : \boldsymbol{\alpha} - m^2 (2+n) p \left(\frac{p}{p_0} \right)^n \right] \left(\frac{1}{3} \mathbf{I} \right) \quad (\text{A.22})$$

Nella (A.22) \mathbf{I}_{mnpq} e $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{mnpq}$ sono, rispettivamente, il tensore identità del quarto ordine e il tensore del quarto ordine tale che, se \mathbf{T} è un tensore del secondo ordine $(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I})_{mnpq} : \mathbf{T} = (\text{tr} \mathbf{T}) \mathbf{I}$.

$$\mathbf{L} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 3(\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha}) + \left[-3(\mathbf{s} - p\boldsymbol{\alpha}) : \boldsymbol{\alpha} - m^2 (2+n) p \left(\frac{p}{p_0} \right)^n \right] \left(\frac{1}{3} \mathbf{I} \right) \quad (\text{A.23})$$

Bibliografia

- Argyris J. H., Faust G., Szimmat J., Warnke E. P., Willam K. J., (1974). "Recent developments in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels", *Nuclear Engineering and Design*, 282, 42-75.
- Bardet e Choucair (1991) A linearized integration technique for incremental constitutive equations. *Int. J. Anal. Methods in Geomech.* (15), 1-19
- Been K., Jefferies M. G. (1985). "A state parameter for sands", *Géotechnique*, 35(2), 99-112.
- Been, K., Jefferies, M. G., & Hachey, J. (1992). Discussion: The critical state of sands. *Géotechnique*, 42(4), 655–663. doi:10.1680/geot.1992.42.4.655
- Been, K., Jefferies, M. G (2006) Soil liquefaction. A critical state approach. *Taylor & Francis*
- Becker e Desai (1984). Induced anisotropy during plastic straining. *Int. J. Anal. Methods in Geomech*, 2001; (8):167-185
- Biscontin G., Cola S., Pestana J. M., & Simonini P. (2007). Unified Compression Model for Venice Lagoon Natural Silts, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 133(8), 932–942.
- Bonin M.D., Nuth M., Dagenais A. M., Cabral A. R. (2014), Experimental study and numerical reproduction of self-weight consolidation behavior of thickened tailings. *J. Geotech. Geoenviron. Eng.* 140(12)
- Boulanger R. W., & Idriss I. M. (2006). Liquefaction Susceptibility Criteria for Silts and Clays. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 132(11), 1413–1426. [http://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2006\)132:11\(1413\)](http://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2006)132:11(1413))
- Brandon, T. L., Rose, A. T., & Duncan, J. M. (2006). Drained and Undrained Strength Interpretation for Low-Plasticity Silts. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 132(2), 250–257. [http://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2006\)132:2\(250\)](http://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2006)132:2(250))
- Carrera A., Coop M., Lancellotta R. (2011). "Influence of grading on the mechanical behaviour of Stava tailings", *Géotechnique*, 61(11), 935-946.
- Casagrande, A. (1975). "Liquefaction and cyclic deformation of sands: a critical review." *Proc., 5th Panam. Conf. on Soil Mech. and Found. Engrg., Buenos Aires, Argentina*, 80-133.
- Castro, G. (1969). "Liquefaction of sands," PhD dissertation, Harvard University, Cambridge, Mass

- Castro, G., and Poulos, S. J. (1977). Factors affecting liquefaction and cyclic mobility. *J. Geotech. Engrg. Div., ASCE*, 103(6),501-516.
- Dafalias, Y. F., (1986). Bounding surface plasticity. I: mathematical foundation and hipoplasticity, 112:966-987. *J. Engineering Mech.ASCE*
- Dafalias, Y. F., & Manzari, M. T. (2004). Simple Plasticity Sand Model Accounting for Fabric Change Effects, 622–634.
- Dafalias, Y. F., Papadimitriou, A. G., & Li, X. S. (2004). Sand Plasticity Model Accounting for Inherent Fabric Anisotropy. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(November), 1319–1333. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(2004)130:11(1319)
- Desai C. S., Siriwardane H. J. (1984) Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geologic materials. Prentice Hall
- de Souza Neto E. A., Peric D., Owen D. R. J. 2008 Computational methods for plasticity, theory and applications. Wiley
- El Takch, A., Sadrekarimi, A., & El Naggar, H. (2016). Cyclic resistance and liquefaction behavior of silt and sandy silt soils. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 83, 98–109. <http://doi.org/10.1016/j.soildyn.2016.01.004>
- Gajo A. e Wood M. (1999) A kinematic hardening constitutive model for sands: the multiaxial formulation *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 23, 925-965
- Gudehus G., Amorosi A., Gens A., Herle I., Kolymbas D., Masin D., Wood D.M., Niemunis A., Nova R., Pastor M., Tamagnini C., Viggiani G. (2007) The soilmodels.info project *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(12).
- Hoeg, K., Dyvik R., & Sandbaekken G. (2000). Strenght of Unditurbed Versus Reconstituted Silt and Silty Sand Specimens. . *Journal of Geotechnical and Geoenviromental Engineering*, 126(July), 606–617.
- Hyde, A. F., Higuchi, T., & Yasuhara, K. (2006). Liquefaction, CyclicMobility, and Failure of Silt. *Journal of Geotechnical and GeoenviromentalEngineering*, 132(6), 716–735. [http://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1090-0241\(2006\)132:6\(716\)](http://doi.org/10.1061/(ASCE)1090-0241(2006)132:6(716))
- Jeremic, B. F., (2008) Lecture notes on computational geomechanics: inelastic finite elements for pressure sensitive materials . University of California. Davis
- Kenny, T. C. (1977). Residual strengths of mineral mixtures. *Proc. 9th Int. Conf. Soil Mech.*, Tokyo 1. 155–160.
- Kuerbis, R., Negussey, D., and Vaid, Y.P. 1988. Effect of gradation and fines content on the undrained response of sand. In Hydraulic fill structures. Edited by D.J.A.

- Van Zylant S.G. Vick. Geotechnical Special Publication 21, American Society of Civil Engineers, New York, pp. 330–345.
- Ishihara, K. (1993). Liquefaction and flow failure during earthquakes. *Géotechnique*, 43(3), 351–451. doi:10.1680/geot.1993.43.3.351
- Lade P. V., Yamamuro J. A. (1997). Effects of non plastic fines on static liquefaction of sands. *Canadian Geotechnical Journal*, 34, 918–928. doi:10.1139/t97-052
- Lade P. V., Liggio C. D., & Yamamuro J. A. (1998). Effects of Non-Plastic Fines on Minimum and Maximum Void Ratios of Sand. *Geotechnical Testing Journal*, 21, 336–347. doi:10.1520/GTJ11373J
- Lashkari, A. (2014). Recommendations for extension and re-calibration of an existing sand constitutive model taking into account varying non-plastic fines content. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 61-62, 212–238. doi:10.1016/j.soildyn.2014.02.012
- Lee J., Yun T. S., Lee D., Lee J et al. (2013) Assesment of k_0 correlations to strength for granular materials. *Soils and Foundations* 53(4) 584-595
- Li, X. S., Wang Y. (1998). Linear representation of steady state line for sand. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 124(12), 1215–1217.
- Li, X. S., Dafalias Y. (2000). Dilatancy for cohesionless soils. *Géotechnique*, 50(4), 449–460.
- Manzari M. T. & Dafalias Y. F., (1997). A critical state two-surface plasticity model for sands, *Géotechnique*, 47(2), 255–272.
- Manzari M. T., Prachathananukit R. (2001) On integration of a cyclic soil plasticity model. *Int. J. Anal. Geomech.*, 2001; (25):525-549
- Martinelli M. (2012). “Comportamento dinamico di fondazioni su pali in sabbia”, Roma: Sapienza Università di Roma.
- Mayne, P. W. & Kulhawy, F. H. (1982). K_0 -OCR relationships in soil. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division* 108, No. 6, 851-872.
- Miriano C. (2011). “Modellazione numerica della risposta sismica di strutture di sostegno flessibili”, Roma: Sapienza Università di Roma.
- Mitchell, J. K. (1976). Fundamentals of soil behaviour. New York: Wiley.
- Miura N. (1979). “A consideration on the stress-strain relation of a sand under high pressures” *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers.*, 282 (2):127-130.

- Newson T., Dyer T., Adam C. (2006). “Effect of structure on the geotechnical properties of bauxite residue” *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental engineering*, 132 (2):
- Niemunis A. (2011) Preparing input for incremental driver.
- Ni Q., Tan T. S., Dasari G. R. & Hight D. W. (2004). Contribution of fines to the compressive strength of mixed soils, *Géotechnique*, 54(9), 561–569.
- Nocilla A., Coop M.R., Colleselli F. (2006) The mechanics of an Italian silt: an example of “transitional” behaviour, *Géotechnique*, 56(4), 261–271.
- Pestana, J. M., Whittle, A. J., (1995) Compression model for cohesionless soils. *Géotechnique*, 45(4), 611–631.
- Pestana, J. M., Whittle, A. J., (1999) Formulation of a unified constitutive model for clays and sands. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*; 124(12): 1215-1217
- Pestana, J. M., Whittle, A. J., & Salvati, L. a. (2002a). Evaluation of a constitutive model for clays and sands: Part I - Sand behaviour. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(February), 1097–1121. doi:10.1002/nag.237
- Pestana, J. M., Whittle, A. J., & Salvati, L. a. (2002b). Evaluation of a constitutive model for clays and sands: Part II - Clay behaviour. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(February), 1123–1146. doi:10.1002/nag.237
- Pitman, T.D., Robertson, P.K., and Sego, D.C. (1994). Influence of fines on the collapse of loose sands. *Canadian Geotechnical Journal*, 31: 728–739.
- Ponzoni E., Nocilla A., Coop M.R., Colleselli F. (2014). Identification and quantification of transitional behavior in sediments of Venice lagoon, *Géotechnique*, 64(9), 694–708.
- Pots D., Zdravkovic L. (2001) – Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering. Theory. Thomas Telford.
- Poulos, S. J., Castro, G., and France, J. W. (1985). Liquefaction evaluation procedure. *J. Geotech. Engrg.*, ASCE, 111(6), 772-792.
- Puzrin A.M. (2012), Constitutive modelling in geomechanics. Springer
- Rahman, M. M., Lo, S. R., & Gnanendran, C. T. (2008). On equivalent granular void ratio and steady state behaviour of loose sand with fines. *Canadian Geotechnical Journal*, 45(10), 1439–1456. doi:10.1139/T08-064

- Rahman, M. M., Lo, S. R., & Dafalias, Y. F. (2014). Modelling the static liquefaction of sand with low-plasticity fines. *Géotechnique*, 64(11), 881–894. doi:10.1680/geot.14.P.079
- Rowe, P. W. 1962. The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. Proc. R. Soc., London, Ser: A 269, 500-527.
- Sloan, S. W., Abbo, A. J., & Sheng, D. (2001). Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control. *Engineering Computations*, 18(1), 121–194. doi:10.1108/02644400110365842
- Stoer J., Bulirsh R. 1992, Intruduction to numerical and analysis, 2nd ed. Springer Verlag , New York.
- Taiebat M., & Dafalias Y. F. (2008). SANISAND: Simple anisotropic sand plasticity model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 32(August 2007), 915–948. doi:10.1002/nag.651
- Taiebat, M., Jeremić, B., Dafalias, Y. F., Kaynia, A. M., & Cheng, Z. (2010). Propagation of seismic waves through liquefied soils. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30(4), 236–257. <http://doi.org/10.1016/j.soildyn.2009.11.003>
- Thevanayagam, S., Shenthan, T., Mohan, S., & Liang, J. (2002). Undrained Fragility of Clean Sands, Silty Sands, and Sandy Silts. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 128(October), 849–859. doi:10.1061/(ASCE)1090-0241(2002)128:10(849)
- Verdugo R.& Ishihara K. (1996). “The steady state of sandy soils.” *Soils and Foundations.*, 36 (2):81-91.
- Vermeer P.A., Ehlers W., Hermann H.J., Ramm E. “Modelling of Cohesive-Frictional Materials: Proceedings of Second International Symposium on Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials (CDM 2004), held in Stuttgart 27-28 Sept. 2004
- Wang, Z., Dafalias, Y. F., & Shen, C. (1990). Bounding Surface Hypoplasticity Model for Sand. *Journal of Engineering Mechanics*, 116(5), 983–1001. [http://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1990\)116:5\(983\)](http://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1990)116:5(983))
- Wolfgang Fellin e Ostermann A. (2002) Consistent tangent operators for constitutive rate equations. *Int. J. Numer. Anal. Meth.*, 2002; (26): 1213-1233
- Wong S.T.Y. Ong D. E. L. (2015) Characterization of reconstituted Malaysian kaolinite silts with varying clay contents. The 15th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. Japanese Geotechnical Society Special Publication

- Wood D. M. (2007) *Soil Behaviour and critical state soil mechanics* Cambridge University Press. New York
- Wood, D. M., & Maeda, K. (2008). Changing grading of soil: Effect on critical states. *Acta Geotechnica*, 3, 3–14. doi:10.1007/s11440-007-0041-0
- Yamamuro, J. A. Covert K. M. (2001). Monotonic and cyclic liquefaction of very loose sands with high silt content, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 127 (April), 314–324.
- Yamamuro J. A, & Lade P. V. (1997). Static liquefaction of very loose sands. *Canadian Geotechnical Journal*, 36(34), 905–917. doi:10.1139/t99-027
- Yamamuro, J. a., & Wood, F. M. (2004). Effect of depositional method on the undrained behavior and microstructure of sand with silt. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 24, 751–760. doi:10.1016/j.soildyn.2004.06.004
- Yang, J., Wei, L. M., & Dai, B. B. (2015). State variables for silty sands: Global void ratio or skeleton void ratio? *Soils and Foundations*, 12(8), 1–13. doi:10.1016/j.sandf.2014.12.008