

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR
NUMERIKUS ANALÍZIS TANSZÉK

Szorzatrendszer-konstrukciók

DOKTORI ÉRTEKEZÉS

KIRÁLY BALÁZS

Témavezető: DR. SCHIPP FERENC DSc, professzor emeritus, ELTE

Külső témavezető: DR. PAP MARGIT habil., docens, PTE

Doktori Iskola: ELTE Informatika Doktori Iskola
Doktori Iskola vezetője: Dr. Csuha-Varjú Erzsébet, egyetemi tanár
Doktori Program: Numerikus és Szimbolikus számítások
Doktori Program vezetője: Dr. Weisz Ferenc, egyetemi tanár

Budapest, 2018.

Tartalomjegyzék

| | |
|--|-----------|
| Bevezetés | 5 |
| 1. UDMD-szorzatrendszerek és tulajdonságaik | 9 |
| 1.1. UDMD-szorzatrendszerek. A Rademacher- és a Walsh-rendszer | 9 |
| 2. Haar-függvények, Haar-skálázási függvények | 15 |
| 2.1. Haar-rendszer | 15 |
| 2.2. Gyors Haar-Fourier analízis, Haar-Fourier szintézis | 17 |
| 2.3. Haar-wavelet analízis | 19 |
| 2.3.1. Waveletek | 19 |
| 2.3.2. A Haar skálázási függvény és tulajdonságai | 19 |
| 2.3.3. A Haar wavelet és tulajdonságai | 21 |
| 2.4. Haar dekompozíció és rekonstrukció | 24 |
| 2.4.1. Haar dekompozíció | 24 |
| 2.4.2. Haar rekonstrukció | 26 |
| 2.5. Kétváltozós Haar-rendszer | 30 |
| 3. Általánosított szorzatrendszer konstrukciók | 37 |
| 3.1. Walsh-Csebisev rendszer és alkalmazásai | 37 |
| 3.1.1. Haar-Csebisev és Walsh-Csebisev rendszerek | 39 |
| 3.2. Walsh-szerű rendszerek konstrukciója | 41 |
| 3.2.1. Motiváció | 41 |
| 3.2.2. A Rademacher-rendszer általánosítása | 42 |
| 3.2.3. Példák | 45 |
| 3.2.4. További lehetőségek az általánosításra | 49 |
| 3.3. Kétváltozós Walsh-szerű rendszerek és tulajdonságaik | 50 |
| 3.3.1. Általánosított szorzatrendszer | 50 |
| 3.3.2. Szorzatrendszerek Kronecker-szorzata | 53 |
| 3.3.3. Példák | 55 |
| 3.4. Általánosított Haar-Fourier transzformáció | 55 |
| 3.4.1. Alapfogalmak | 55 |
| 3.4.2. Kétrétű leképezések, Rademacher-szerű függvények | 57 |
| 3.4.3. Walsh-szerű és Haar-szerű rendszerek | 58 |
| 3.4.4. Példák és speciális esetek | 60 |

| | |
|---|-----------|
| 4. Szorzatrendszerek konstrukciója | 61 |
| 4.1. Alapfogalmak, definíciók | 61 |
| 4.2. A konstrukció általánosítása | 63 |
| 4.2.1. Általánosított szorzatrendszer | 63 |
| 4.2.2. Súlyfüggvényre nézve biortogonális p -rétű leképezések | 63 |
| 4.2.3. Az X_n diszkretizációs halmaz | 64 |
| 4.3. Diszkrét biortogonális szorzatrendszerek | 65 |
| 4.3.1. Általánosított Haar skálázási függvények | 67 |
| 4.3.2. Haar-szerű biortogonális rendszer | 68 |
| 4.3.3. További általánosítási lehetőség | 69 |
| 5. Racionális interpoláció és alkalmazásai | 71 |
| 5.1. Bevezetés | 71 |
| 5.1.1. Motiváció | 71 |
| 5.1.2. Mintavételezés és interpoláció | 73 |
| 5.1.3. A felső- és az alsó-félsík Hardy-tere | 75 |
| 5.1.4. Speciális racionális függvényterekre vett projekciós operátorok tulajdonságai | 78 |
| 5.2. Racionális interpoláció | 79 |
| 5.2.1. A projekciós operátor interpolációs tulajdonsága | 79 |
| 5.2.2. A projekciós operátor pontonkénti konvergenciája | 80 |
| 5.2.3. A kiterjesztett Malmquist-Takenaka rendszer diszkrét ortogonalitása | 82 |
| 5.2.4. Racionális interpolációs operátor a valós számegyenesen elhelyezkedő osztópontokra | 86 |
| 5.2.5. Egy numerikus szempontból jól kezelhető speciális eset | 88 |
| Irodalomjegyzék | 91 |
| 6.1. Felhasznált irodalmak | 91 |
| 6.2. Saját források | 93 |

Bevezetés

Doktori disszertációm témája speciális szorzatrendszer-konstrukciók vizsgálata. Az ilyen rendszerek különösen fontosak a függvényapproximáció területén, ugyanis a rendszerre vonatkozó Fourier-együtthetők általánosított gyors Fourier transzformációval (GFFT) számolhatók, melyek műveletigénye ($\mathcal{O}(n \cdot \log n)$) lényegesen alacsonyabb a direkt formula által eredményezett ($\mathcal{O}(n^2)$) műveletszámmal.

Az elmúlt években elsősorban a Haar-szerű wavelet konstrukciók különböző általánosításával foglalkoztam. A konstrukciók három klasszikus rendszer – a Rademacher-, a Walsh-Paley- és a Haar-rendszer – speciális tulajdonságaira és kapcsolatára építenek. A Rademacher rendszer tekinthető a legegyszerűbb UDMD-rendszernek (unitér diadikus martingál differencia rendszer) és a Walsh-Paley rendszer, mint a Rademacher-rendszer szorzatrendszere, nevezhető a legegyszerűbb UDMD-szorzatrendszernek. A disszertációban diszkrét ortogonális és biortogonális rendszerek konstrukciójának egy egyszerű és eléggé általános módszerét alkalmazzuk, kiindulva a rendszer Dirichlet-féle magfüggvényeiből. Ezen az úton igazolhatjuk a diszkrét trigonometrikus rendszer, a diszkrét Malmquist-Takenaka-rendszer ortogonalitását. Az ortogonális polinomok Dirichlet-féle magfüggvényeire vonatkozó Christoffel-Darboux-formulák alapján diszkrét ortogonális polinomokat szerkeszthetünk. A Walsh-Paley-féle rendszer 2^n indexű magfüggvényei a Paley-től származó formula alapján egy jól kezelhető, egyszerű alakban írhatók fel. Ez a formula annak a következménye, hogy a Walsh-rendszer a Rademacher-rendszer szorzatrendszere. Ugyanez a formula a Haar-típusú rendszerek konstrukciójának az alapja. Az első fejezetben a Rademacher-rendszer egy általánosításából kiindulva ismertetjük az UDMD-rendszerekkel kapcsolatos alapvető fogalmakat és eredményeket, amelyek az önálló eredményeket tartalmazó későbbi fejezetek kiinduló pontjával szolgálnak. Itt a Paley-formula bizonyításával együtt azt is megmutatjuk, hogyan igazolható a formula alapján a szorzatrendszer ortogonalitása. Az UDMD szorzatrendszerek esetén az FFT-hez hasonló gyors algoritmusokkal számíthatók a rendszer szerinti Fourier-együtthetők, és rekonstruálhatók az eredeti függvények.

A Haar-rendszer többféleképpen is származtatható. A Haar-rendszerrel kapcsolatos kutatások az 1980-as évektől kezdődően megújultak. A rendszernek az a tulajdonsága, hogy egy alapfüggvényből transzlációval és dilatációval származtatható, arra inspirálta a kutatókat, hogy ilyen típusú rendszereket konstruáljanak. Kiderült, hogy ezek az úgynevezett waveletek nemcsak a függvényapproximáció hatékony eszközei, hanem a jel- és képfeldolgozás napjainkban leginkább elterjedt eljárásainak is az alapját képezik. Ezzel összefüggésben új, a gyakorlatban is jól használható fogalmak és technikák alakultak ki, mint pl. a multirezolúció, skálázási egyenlet, stb. Ezek a fogalmak és módszerek egyre növekvő mértékben bekerülnek a műszaki és informatikus szakemberképzésbe. A jeleknek ezekkel történő felbontására és visszaállítására igen hatékony algoritmusokat dolgoztak ki. A még előkészítő jellegű 2. fejezetben az oktatás szempontjait is figyelembe véve a Haar-rendszer modelljén mutatom be az említett fogalmakat és algoritmusokat.

A további, új önálló eredményeket tartalmazó fejezetekben az első két fejezetben ismertetett eredmények különböző típusú általánosításával foglalkozunk. Minden fejezet elején röviden emlékez-

tetünk azokra a fogalmakra és formulákra, amelyek kiterjesztéseit vizsgáljuk.

A Haar-rendszer a Walsh-Paley rendszer Dirichlet-féle magfüggvényeiből származtatható. Ez az összefüggés további konstrukciók kiinduló pontja lehet. Ezekkel a későbbi fejezetekben foglalkozunk. Ez a tulajdonság az alapja az úgynevezett skálázási egyenleteknek, melyek az FFT-algoritmusok elméleti háttérét biztosítják. A dolgozatom 2. fejezetében a Haar-rendszer tulajdonságaival foglalkozom és a fejezet végén kitérek a kétdimenziós Haar-rendszer ismertetésére is, melynek vizsgálatát a 2004-ben írt szakdolgozomban kezdtem el.

Az elmúlt években a szorzatrendszer konstrukció több általánosítását is bevezettük [45, 46, 47, 48] a [18] cikkben bemutatott Haar-szerű wavelet konstrukció alapötletéből kiindulva. Eljárásainkkal olyan adaptív biortogonális rendszerekhez jutottunk, melyek megőrizték a Haar-szerű waveletkonstrukció legfontosabb tulajdonságait, nevezetesen hogy a Haar-Fourier együtthatók általánosított FFT algoritmussal számolhatók. Így hatékony, jól kezelhető interpolációs eljárásokat konstruálhatunk, ráadásul az interpoláció alappont-rendszerét is a feladat igényeihez igazíthatjuk. Ezen általánosítások lépéseit követhetjük végig a 3. fejezetben. FFT típusú algoritmusok olyan ortogonális függvényrendszerek esetén szerkeszthetők, amelyek martingál differenciák szorzatrendszereiként állíthatók elő. Az első fejezetben olyan modellel foglalkoztunk, amelyben a sztochasztikus bázist atomos σ -algebrák generálják. A 3. fejezetben a sztochasztikus bázist kétrétű leképezések szuperpozíciójából kiindulva definiáljuk.

A 3.1. alfejezetben a [18] cikkben ismertetett konstrukció során a Csebisev polinomok 2^n indexű sorozata generálja a szorzatrendszert. Célunk az volt, hogy a diszkretizáció alappontjai a jól ismert és számos jó tulajdonsággal rendelkező Csebisev-abszcisszák legyenek. A [18] cikk lépéseit nem lehetett egy az egyben átmemelni, ezért a [45] cikkben a konkrét példa esetén biortogonális szorzat-rendszerpárt konstruáltunk. Az így készített polinomrendszert és a racionális függvényekből álló biortogonális rendszerpárját neveztük Walsh-Csebisev rendszernek. A Walsh-Csebisev rendszer tetszőleges f függvény esetén interpolál a Csebisev-abszcisszákon. Az eredményeket a 2006-os MaCS konferencián ismertettük és a Pure Mathematics and Applications folyóiratban publikáltuk [45].

A Walsh-Csebisev rendszerrel tapasztaltakkal összhangban vezettük be a 3.2. alfejezetben a szorzatrendszer fogalmának egy általánosítását, majd így konstruálunk Walsh-szerű rendszereket, melyek segítségével hatékony és adaptív interpolációs eljárás definiálható. Az ilyen rendszerekre vonatkozó Walsh-Fourier együtthatók általánosított gyors Walsh-transzformációval számolhatók. A témáról 2009-ben Dobogókőn a Workshop on Dyadic Analysis and Related Fields című konferencián tartottam előadást és az Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis De Rolando Eotvos Nominatae Sectio Computatorica folyóiratban jelent meg a cikk [46].

A [46] cikkben szereplő általánosítás lehetőséget adott az eljárás kiterjesztésére kétváltozós függvények esetére. A MaCS7 és MaCS8 konferenciákon erről a kétváltozós kiterjesztésről tartottam előadásokat. A két előadás anyagából készült [47] cikk a MaCS8 konferencia kötetében jelent meg 2011-ben. A dolgozat 3.3. alfejezete foglalkozik ezzel a témával.

A 3.4. alfejezetben a korábban bevezetett Walsh-szerű rendszerekből kiindulva Haar-szerű rendszereket és a Haar-skálázási függvények ilyen rendszerekhez kapcsolódó megfelelőit értelmeztük. Az ilyen rendszerek nagy előnye, hogy felírható rájuk a skálázási egyenletek megfelelője, mely az általánosított Haar-Fourier transzformáció alapját képezi. Az általánosított Haar-Fourier transzformációról tartottam előadást Siófokon a MaCS9 konferencián. Az Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis De Rolando Eotvos Nominatae Sectio Computatorica folyóirat konferenciakötetében jelent meg a [48] cikk az előadás anyagával.

A 4. fejezetben bevezetésre kerülő általánosítás lehetővé teszi a korábbi konstrukciók egységes tárgyalását. A fejezet a DARFA14 és 6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields kon-

ferenciákon tartott előadások anyagából készült és a *Mathematica Pannonica* folyóíráshoz leadásra került. Ebben a fejezetben, bevezetve a súlyfüggvényre ortogonális és biortogonális rendszer fogalmát, igen általános formában értelmezzük a Haar-típusú ortogonális rendszereket és leírjuk azokat az összefüggéseket, amelyek alapján multirezolúció és hatékony algoritmusok szerkeszthetők.

A dolgozat 5. fejezetében egy speciális racionális interpolációs eljárást mutatunk be az alsó-, illetve felső-félsík úgynevezett Malmquist-Takenaka rendszereinek segítségével, melyet 2014-ben Pap Margittal és Pilgermajer Ákossal közös cikkben publikáltunk[49]. Bár ez az eljárás nem illeszkedik szorosan az eddig tárgyalt konstrukciók körébe, a 3.2. alfejezet megjegyzései alapján – remélhetőleg csak kis módosítások árán – a két módszer ötvözhető és egy mindkét eljárás előnyös tulajdonságait megőrző adaptív racionális interpolációs operátor nyerhető. A fejezetben nem-korlátos sáv szélességű folytonos jelek frekvenciatartományait vizsgáljuk. Számos, gyakorlati szempontból fontos LTI-rendszer (lineáris idő-invariáns rendszer) reprezentálható N -edrendű konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletekkel. Az ilyen rendszerek transzfer függvényei racionális függvények. Így célunk olyan mintavételezési és interpolációs algoritmus konstruálása, amely a racionális függvények esetén jó konvergenciatulajdonságokkal rendelkezik. A konstrukcióban általánosított Fourier-típusú reprezentációt használunk, amelyet speciális racionális függvényekből álló ortogonális bázisok, az alsó-, illetve felső-félsík Malmquist-Takenaka rendszereinek segítségével írunk le. Ez a fajta reprezentáció sokkal hatékonyabb mint a Fourier típusú reprezentáció, különösen akkor, amikor a transzferfüggvény valamely apriori módon rögzített tulajdonsággal rendelkezik.

A Malmquist-Takenaka rendszer diszkrét ortogonalitását kihasználva egy új racionális interpolációs operátort vezetünk be, mind a felső-, mindpedig az alsó-félsík esetén. Ezt a két interpolációt kombinálva egzakt interpolációt készíthetünk racionális függvények igen széles osztályára, köztük a Runge-féle tesztfüggvényre is.

1. fejezet

UDMD-szorzatrendszerek és tulajdonságaik

1.1. UDMD-szorzatrendszerek.

A Rademacher- és a Walsh-rendszer

A következő definíciókon keresztül bevezetjük az UDMD- (unitér diadikus martingál differencia) rendszer fogalmát, elsősorban a [31] jegyzet 3. fejezetére építve.

Legyen $\Omega = [0, 1)$, ekkor n -edrendű ($n \in \mathbb{N}$) diadikus intervallumon egy $[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n})$ intervallumot értünk, ahol $0 \leq p < 2^n$. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges $a \in [0, 1)$ elem esetén pontosan egy olyan n -edrendű diadikus intervallum van, amely a -t tartalmazza. Jelöljük ezt az intervallumot $I_n(a)$ -val.

Jelöljük \mathcal{A}_n -nel az ilyen $I_n(a)$ ($a \in \Omega$) intervallumok által generált σ -algebrát. A szóban forgó intervallumokat az \mathcal{A}_n atomjainak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy \mathcal{A}_n minden eleme előáll az atomok véges diszjunkt uniójaként.

Az $f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ függvényt \mathcal{A}_n -mérhetőnek nevezzük, ha az \mathcal{A}_n atomjain konstans értékekkel rendelkezik, az Ω -n értelmezett \mathcal{A}_n -mérhető függvények halmazát $L(\mathcal{A}_n)$ jelöli. Könnyen látható, hogy ha f \mathcal{A}_n -mérhető, akkor integrálható is.

Vezessük be az $f \in L^1(\Omega)$ függvény \mathcal{A}_n -re vonatkozó $\mathcal{E}_n f$ feltételes várható értékét a következőképpen:

$$(\mathcal{E}_n f)(x) = \frac{1}{\lambda(I_n(x))} \int_{I_n(x)} f d\lambda \quad x \in \Omega.$$

A fent definiált $\mathcal{E}_n f$ feltételes várható érték függvény \mathcal{A}_n -mérhető minden $f \in L^1(\Omega)$ függvény esetén, továbbá $\mathcal{E}_n : L^1(\Omega) \rightarrow L(\mathcal{A}_n)$ lineáris leképezés. Minden $f \in L^1(\Omega)$ és $g \in L(\mathcal{A}_n)$ függvény esetén

$$\mathcal{E}_n(gf) = g\mathcal{E}_n f.$$

Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, ekkor

$$\mathcal{E}_n(\mathcal{E}_m(f)) = \mathcal{E}_m(\mathcal{E}_n(f)) = \mathcal{E}_{\min\{m,n\}}(f),$$

és minden $f \in L^1(\Omega)$ függvény esetén

$$(\mathcal{E}_0 f)(x) = \int_{\Omega} f d\lambda \quad x \in \Omega.$$

1.1.1. Definíció. Az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatot diadikus martingálnak nevezzük, ha

$$f_n \in L(\mathcal{A}_n) \quad \text{és} \quad \mathcal{E}_n(f_{n+1}) = f_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1.1.2. Definíció. A

$$\phi_n = f_{n+1} - f_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot az $(f_n, n \in \mathbb{N})$ martingál differencia sorozatának nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat pontosan akkor martingál differencia sorozat, ha minden ϕ_n eleme \mathcal{A}_{n+1} -mérhető és

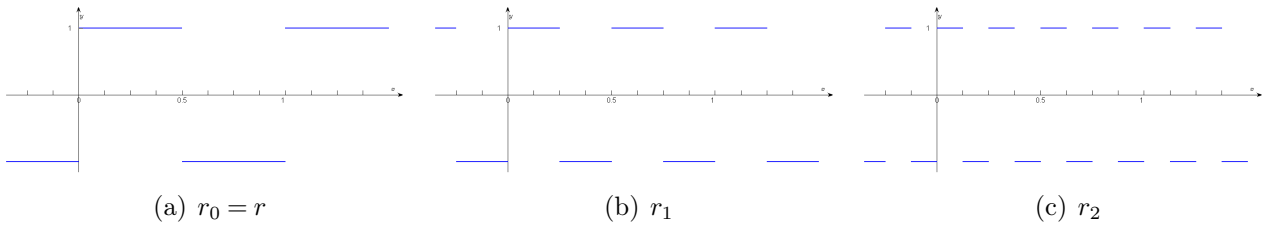
$$\mathcal{E}_n(\phi_n) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A legegyszerűbb ilyen rendszer a Rademacher-rendszer.

1.1.3. Definíció (Rademacher-rendszer). Tekintsük az $r: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ 1-szerint periodikus függvényt, ahol

$$r(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{ha } x \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

továbbá $r_n(x) = r(2^n x)$ ($x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$). Ekkor az $(r_n, n \in \mathbb{N})$ rendszert *Rademacher-rendszernek* nevezzük.



1.1. ábra. A Rademacher-rendszer első három eleme

1.1.4. *Megjegyzés.* A 1.1.3. Definícióban bevezetett Rademacher-rendszer valóban martingál differencia sorozat, azaz

i) $r_n \in L(\mathcal{A}_{n+1})$,

ii) $\mathcal{E}_n(r_n) = 0$.

1.1.5. *Megjegyzés.* Legyen $x \in [0, 1)$ és jelölje $(x_j, j \in \mathbb{N})$ az x bináris kifejtésének együttthatósorozatát, azaz

$$x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j \cdot 2^{-(j+1)}, \quad x_j \in \{0, 1\}.$$

Ekkor a Rademacher-függvényekre az alábbi igaz:

$$r_n(x) = (-1)^{x_n} \quad (x \in [0, 1), n \in \mathbb{N}).$$

Egyszerűen igazolható, hogy a Rademacher-rendszer ortogonális a szokásos skaláris szorzatra nézve, azaz

$$\langle r_k, r_\ell \rangle = \int_0^1 r_k(x) r_\ell(x) dx = 0 \quad (k, \ell \in \mathbb{N}, k \neq \ell).$$

1.1.6. *Megjegyzés.* A Rademacher-rendszer nem teljes az $L^2_{[0,1]}$ térben, ugyanis például az $f = r_0 r_1$ függvény minden Rademacher-függvényre ortogonális, azaz minden $k \in \mathbb{N}$ esetén

$$\langle r_k, f \rangle = 0.$$

1.1.7. *Megjegyzés.* Legyen $g \in L(\mathcal{A}_n)$, ekkor

$$\phi_n = r_n \cdot g_n \quad (1.1.1)$$

egy martingál differencia sorozat és minden martingál differencia sorozat felírható a fenti alakban, egy alkalmasan választott $g_n \in L(\mathcal{A}_n)$ függvény segítségével.

Igaz továbbá az is, hogy ha $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ martingál differencia sorozat, akkor a sorozat minden ϕ_n eleme konstans az $I_n(a)$ mindkét felében, és az intervallum két felében vett értékek azonos abszolútértékű, de különböző előjelű konstansok.

1.1.8. Definíció. A $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ diadikus martingál differencia sorozatot UDMD-rendszernek (unitary dyadic martingale difference) nevezzük, ha az (1.1.1) feltételen kívül

$$|\phi_n(x)| = 1 \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \Omega)$$

is teljesül.

1.1.9. *Megjegyzés.* A Rademacher-rendszer esetén ez a feltétel is teljesül, így a rendszert a legegyszerűbb UDMD-rendszernek tekinthetjük.

1.1.10. Definíció. Legyen $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ egy tetszőleges függvényrendszer, ekkor a $\Psi = (\psi_m, m \in \mathbb{N})$ rendszert, ahol

$$\psi_m = \prod_{j=0}^{\infty} \phi_j^{m_j},$$

a $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ rendszer szorzatrendszerének nevezzük.

1.1.11. *Megjegyzés.* A Rademacher-rendszer szorzatrendszere a Walsh-Paley rendszer, mely a legegyszerűbb UDMD-szorzatrendszer.

1.1.12. Definíció (Walsh-Paley-rendszer). Legyen $m \in \mathbb{N}$ egész szám és 2-es számrendszerbeli alakjának jegyei $(m_k, k \in \mathbb{N})$, azaz

$$m = \sum_{k=0}^{\infty} m_k 2^k.$$

Ekkor a

$$w_m := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{m_k} \quad (m \in \mathbb{N})$$

rendszert *Walsh-Paley-rendszernek* nevezzük, azaz a Walsh-Paley-rendszer a Rademacher-rendszer szorzatrendszere.

1.1.13. *Megjegyzés.* Mivel $w_{2^n} = r_n$ ($n \in \mathbb{N}$), ezért a Rademacher-rendszert tartalmazza a Walsh-Paley-rendszer.

1.1.14. Tétel ([31]). *Legyen a $\Psi = (\psi_m, m \in \mathbb{N})$ rendszer a $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ UDMD-rendszer UDMD-szorzatrendszere, ekkor Ψ ortonormált az $L^2(\Omega)$ térben.*

Bizonyítás. Mivel $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ UDMD-rendszer, azaz $|\phi_n(x)| = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in \Omega$ esetén, továbbá Ω mértéke 1, ezért Ψ biztosan normált.

Az ortogonalitás bizonyításához legyen $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$. Tekintsük az m és n indexek bináris kifejtéseit. Ekkor biztosan létezik egy i index, hogy $m_i \neq n_i$, de minden $j > i$ esetén $m_j = n_j$. Ekkor $\psi_n \cdot \overline{\psi_m}$ az alábbi formában írható:

$$\psi_n \cdot \overline{\psi_m} = \prod_{j=0}^{\infty} \phi_j^{n_j} \cdot \overline{\phi_j^{m_j}} = r_i \cdot h,$$

ahol h egy alkalmasan választott \mathcal{A}_i -mérhető függvény. A feltételes várható érték tulajdonságait felhasználva innen az állítás azonnal adódik:

$$\int_{\Omega} \psi_n \cdot \overline{\psi_m} d\lambda = \mathcal{E}_0(\mathcal{E}_i(r_i \cdot h)) = \mathcal{E}_0(h \cdot \mathcal{E}_i(r_i)) = 0.$$

□

1.1.15. Definíció. Legyen $\Phi = (\phi_n, n \in \mathbb{N})$ egy UDMD-rendszer és jelölje $\Psi = (\psi_m, m \in \mathbb{N})$ a Φ UDMD-szorzatrendszert, legyen $n \in \mathbb{N}$ és $x, y \in \Omega$ tetszőleges pontok, ekkor a Ψ rendszer Dirichlet-féle magfüggvénye az alábbi hozzárendeléssel definiált:

$$D_n^{\Psi}(x, t) = \sum_{j=0}^{n-1} \psi_j(x) \cdot \overline{\psi_j(t)} \quad (x, t \in \Omega).$$

1.1.16. Tétel ([31]). *Legyen a $\Psi = (\psi_m, m \in \mathbb{N})$ rendszer a $(\phi_n, n \in \mathbb{N})$ UDMD-rendszer UDMD-szorzatrendszere, ekkor a Ψ -rendszer Dirichlet-féle magfüggvénye*

$$D_{2^n}^{\Psi}(x, t) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \phi_j(x) \cdot \overline{\phi_j(t)}) = \begin{cases} 2^n, & \text{ha } t \in I_n(x), \\ 0, & \text{ha } t \notin I_n(x). \end{cases}$$

azaz $D_{2^n}^{\Psi}$ nem függ a Ψ rendszertől.

Bizonyítás. Az $n = 0$ esetben $D_1^{\Psi} = \psi_0(x) \cdot \overline{\psi_0(t)} = 1$, hiszen Ψ normált. A tételben szereplő szorzat ebben az esetben definíció szerint legyen egyenlő 1-gyel.

A bizonyítást $n \geq 1$ esetén teljes indukcióval folytatjuk. Az $n = 1$ esetben az állítás automatikusan igaz.

Tegyük fel, hogy az állítás valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén teljesül. A szorzatfüggvény definíciója miatt minden $0 \leq k < 2^n$ esetén $\psi_{2^n+k} = \phi_n \psi_k$ és így

$$\psi_{2^n+k}(x) \overline{\psi_{2^n+k}(t)} = \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)} \psi_k(x) \overline{\psi_k(t)}.$$

Innen tetszőleges $0 \leq \ell \leq 2^n$ esetén

$$D_{2^n+\ell}^{\Psi}(x, t) = D_{2^n}^{\Psi}(x, t) + \sum_{k=0}^{\ell-1} \psi_{2^n+k}(x) \overline{\psi_{2^n+k}(t)} = D_{2^n}^{\Psi}(x, t) + \phi_n(x) \overline{\phi_n(t)} D_{\ell}^{\Psi}(x, t).$$

Tekintsük az $\ell = 2^n$ esetet és alkalmazzuk az indukciós feltételt:

$$D_{2^{n+1}}^\Psi(x, t) = D_{2^n}^\Psi(x, t) + \phi_n(x)\bar{\phi}_n(t)D_{2^n}^\Psi(x, t) = D_{2^n}^\Psi(x, t)(1 + \phi_n(x)\bar{\phi}_n(t)) = \prod_{j=0}^n (1 + \phi_j(x) \cdot \bar{\phi}_j(t)).$$

Ezzel a szorzatalakot minden $n \in \mathbb{N}$ esetén igazoltuk. A $D_{2^{n+1}}^\Psi(x, t) = D_{2^n}^\Psi(x, t)(1 + \phi_n(x)\bar{\phi}_n(t))$ alakból az is azonnal látható, hogy $t \notin I_n(x)$ esetén $D_{2^{n+1}}^\Psi(x, t) = 0$.

Folytassuk a vizsgálódást esetszétválasztással. Legyen $t \in I_n(x)$ és jelölje $(t_k, k \in \mathbb{N})$ a t és $(x_k, k \in \mathbb{N})$ az x bináris jegyeinek sorozatát. A $t \in I_n(x)$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha ezen sorozatok első n eleme megegyezik, azaz ha $x_j = t_j$ minden $j < n$ esetén. Mivel létezik egy $h \mathcal{A}_n$ -mérhető függvény, melyre $|h| = 1$ és $\phi_n = r_n h$, ezért

$$\phi_n(x)\bar{\phi}_n(t) = r_n(x)r_n(t) = (-1)^{x_n+t_n} \quad (t \in I_n). \quad (1.1.2)$$

Az indukciós feltétel ($D_{2^n}^\Psi(x, t) = 2^n$, ha $t \in I_n(x)$) felhasználásával

$$D_{2^{n+1}}^\Psi(x, t) = D_{2^n}^\Psi(x, t)(1 + (-1)^{x_n+t_n}) \quad (t \in I_n)$$

adódik. A fenti formula eredménye $t \in I_{n+1}$ esetben $x_n = t_n$ miatt 2^{n+1} és $t \notin I_{n+1}$, de $t \in I_n$ esetben $x_n \neq t_n$ miatt 0. \square

1.1.17. *Megjegyzés.* A rendszer ortogonalitása bizonyítható lenne a Dirichlet magfüggvény felírásának következményeként is. Ehhez vezessük be a 2^n -elemű X_n diszkretizációs halmazt, amely \mathcal{A}_n minden atomjának pontosan egy elemét tartalmazza.

Legyen $A = [\psi_k(s)]_{k=0}^{2^n-1}$, $(s \in X_n)$ és $B = [\bar{\psi}_k(s)]_{k=0}^{2^n-1}$, $(s \in X_n)$. Ekkor a Dirichlet magfüggvényre kapott formula $AB = 2^n I$, alakban írható, ahol I a $\mathbb{R}^{2^n \times 2^n}$ -es egységmátrix.

A mátrixegyenletet adjungálva a következő összefüggés kapható

$$B^* A^* = 2^n I,$$

melyet kifejtve

$$\frac{1}{2^n} \sum_{s \in X_n} \psi_k(s)\bar{\psi}_\ell(s) = \delta_{k\ell},$$

azaz a függvények tényleg ortonormáltak.

1.1.18. Következmény. Legyen a $\Psi = (\psi_m, m \in \mathbb{N})$ rendszer a $\Phi = (\phi_n, n \in \mathbb{N})$ UDMD-rendszer szorzatrendszer. A Ψ rendszer teljes, azaz bármely $f \in L^1(\Omega)$ függvény esetén az

$$\int_{\Omega} f \cdot \bar{\psi}_n d\lambda = 0 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

feltételből következik, hogy az f függvény majdnem mindenütt 0 az Ω halmazon.

Bizonyítás. Vizsgáljuk az $\mathcal{E}_n f$ feltételes várható érték függvényt az Ω intervallum tetszőleges x pontjában. A 1.1.16. Tétel felhasználásával minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\mathcal{E}_n f(x) = \frac{1}{\lambda(I_n(x))} \int_{I_n(x)} f(t) d\lambda(t) = \int_{\Omega} f(t) D_{2^n}^\Psi(x, t) d\lambda(t) = \sum_{m=0}^{2^n-1} \psi_m(x) \cdot \int_{\Omega} f(t) \bar{\Psi}_m(t) d\lambda(t) = 0$$

adódik. Mivel a Lebesgue-tétel értelmében $\mathcal{E}_n f \rightarrow f$ majdnem mindenütt az Ω halmazon, ezért az f függvény majdnem mindenütt 0 az Ω halmazon. \square

1.1.19. Következmény. *A Walsh-Paley rendszer teljes ortonormált rendszer az $L^2(\Omega)$ térben.*

A következő tétel a Dirichlet-féle magfüggvényre ad formulát tetszőleges, nem csak kettőhatvány indexek esetén lásd[31].

1.1.20. Tétel ([31]). *Tetszőleges $m \in \mathbb{N}$ index és $x, t \in \Omega$ pontok esetén a $\Psi = (\psi_m, m \in \mathbb{N})$ rendszer Dirichlet-féle magfüggvénye:*

$$D_m^\Psi(x, t) = \psi_m(x)\overline{\psi_m(t)} \sum_{j=0}^{\infty} m_j r_j(x) r_j(t) D_{2^j}^\Psi(x, t) = \psi_m(x)\overline{\psi_m(t)} \sum_{j=0}^{\infty} m_j (D_{2^{j+1}}^\Psi(x, t) - D_{2^j}^\Psi(x, t)).$$

1.1.21. Következmény. *Tetszőleges Ψ UDMD-szorzatrendszer D_m^Ψ Dirichlet-féle magfüggvénye kifejezhető a Walsh-rendszer D_m^W Dirichlet-magfüggvényének segítségével:*

$$D_m^\Psi(x, t) = \psi_m(x)\overline{\psi_m(t)} w_m(x)w_m(t) D_m^W(x, t) \quad (x, t \in \Omega, m \in \mathbb{N}).$$

1.1.22. *Megjegyzés.* A Walsh-rendszer Dirichlet-féle magfüggvénye felírható egyváltozós függvényként is, ehhez felhasználjuk a Walsh-rendszer azon tulajdonságát, hogy

$$w_k(x)w_t(t) = w_k(x+t) \quad (x, t \in \Omega, k \in \mathbb{N}),$$

ahol az összeadás bitenkénti logikaiösszeadás műveletét jelöli, azaz

$$a + b = (c_n, n \in \mathbb{N}),$$

ahol $c_n = |a_n - b_n| = a_n + b_n \pmod{2}$, nevezetesen

$$D_m^W(x, t) = \tilde{D}_m(x+t).$$

Ennek felhasználásával a Walsh-Paley-rendszer Dirichlet-magfüggvénye az alábbi explicit alakba írható:

$$D_{2^N}(x) = \sum_{\ell=0}^{2^N-1} w_\ell(x) = \prod_{k=0}^{N-1} (1 + r_k(x)).$$

2. fejezet

Haar-függvények, Haar-skálázási függvények

2.1. Haar-rendszer

Hilbert a trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-szintézis problémáival összefüggésben feltette a kérdést, hogy egyáltalán létezik-e olyan teljes ortogonális rendszer, mely szerinti Fourier-sorfejtés minden folytonos függvény esetében konvergens. Haar Alfréd 1909-ben igenlő választ adott erre a kérdésre.

A Haar-függvények ortogonálisak az $L^2([0,1])$ térben a szokásos skalárszorzatra nézve, és egy $f \in L^1([0,1])$ függvény Haar-Fourier sora normában és majdnem mindenütt tart f -hez. Ha a függvény még folytonos is, akkor a konvergencia egyenletes. Ez a tulajdonság nem teljesül a trigonometrikus Fourier sorokra, ezért is játszott kitüntetett szerepet a Haar-rendszer. Később kiderült, hogy más tulajdonságaival is kitűnik a bázisok közül, sőt a Haar rendszer waveletekkel is kapcsolatos, hiszen a legegyszerűbb wavelet rendszerként is felfogható.

Ebben a fejezetben a Haar Alfréd által 1909-ben konstruált *Haar-féle ortogonális rendszerrel* és annak általánosításával foglalkozunk.

2.1.1. Definíció. A $[0,1)$ intervallumon értelmezett függvényekből álló

$$(h_{2^n+k} = h_{nk}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1)$$

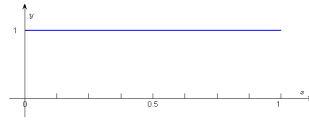
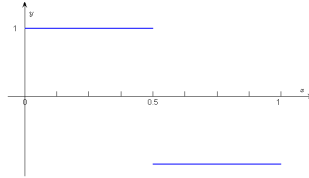
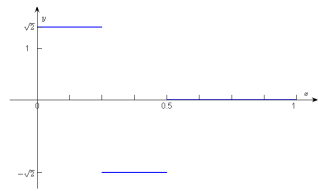
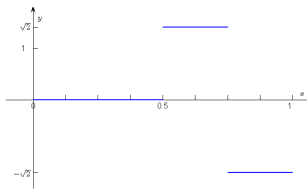
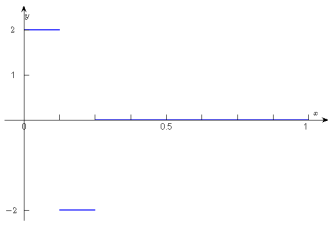
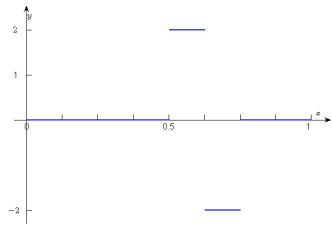
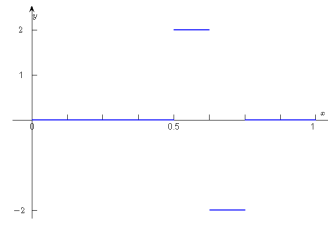
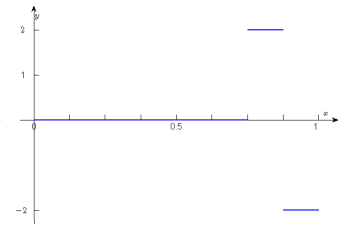
rendszert *Haar-rendszernek* nevezzük, ahol

$$h_0(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0,1), \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

és

$$h_{2^n+k}(x) = h_{nk}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}), \\ -2^{\frac{n}{2}}, & \text{ha } x \in [\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

2.1.2. Megjegyzés. A h_{nk} függvény tartója a $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ intervallum és értéke az intervallum első felében $2^{\frac{n}{2}}$, a második fél-intervallumban pedig $-2^{\frac{n}{2}}$. Igazolható, hogy a Haar-függvények és tartóik kölcsönösen egyértelmű módon megfeleltethetők egymásnak, azaz a h_{nk} függvény indexelhető a $I_{nk} = [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ tartóintervallumával is.

(a) $h_0 \chi_{[0,1]}$ (b) $h = h_1 = h_{00}$ (c) $h_2 = h_{10}$ (d) $h_3 = h_{11}$ (e) $h_4 = h_{20}$ (f) $h_5 = h_{21}$ (g) $h_6 = h_{22}$ (h) $h_7 = h_{23}$

2.1. ábra. A Haar-rendszer első néhány eleme

Ismeretes és egyszerűen igazolható [40], hogy

2.1.3. Tétel ([40]). A $(h_m, m \in \mathbb{N})$ rendszer ortonormált az $L^2_{[0,1]}$ térben a szokásos skaláris szorzatra nézve, azaz

$$\langle h_i, h_j \rangle = \int_0^1 h_i(x) h_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (i, j \in \mathbb{N}).$$

A korábbiakban a klasszikus definíció alapján bevezetett *Haar rendszer* wavelet konstrukcióval is származtatható a h anya-waveletből translációval és dilatációval:

$$h_{n,k}(x) = h_{2^n+k}(x) := 2^{n/2} h(2^n x - k) \quad (x \in [0,1], 0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}), \quad (2.1.1)$$

ahol

$$h(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

A Haar-rendszer származtatható továbbá a Walsh-Paley-rendszer Dirichlet magfüggvényeiből is. Az 1.1.16 Tétel alapján

$$2^{-n/2} r_n(t) D_{2^n}(k2^{-n}, t) = h_{2^n+k}(t) \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}, t \in [0,1)).$$

Innen következik, hogy

$$2^{-n/2} \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} w_k = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} h_k \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Felhasználva a Walsh-Paley rendszer teljességét, innen egyszerűen adódik, hogy a Haar-rendszer is teljes az $L^1[0,1)$ térre nézve.

2.2. Gyors Haar-Fourier analízis, Haar-Fourier szintézis

Az egyszerűbb számolás érdekében tekintsünk el a normálási konstansoktól, így a Haar-rendszer helyett vegyük az alábbi függvényrendszert:

$$a_m := \text{sign} h_m, \quad \text{azaz} \quad a_m(x) = a_{n,k}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right), \\ -1, & \text{ha } x \in \left[\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}\right), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ahogy a Haar-függvények indexezhetők a tartóikkal is, azaz

$$h_I := h_{2^n+k} \quad \left(I = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) \right)$$

és $h_\emptyset := h_0$, úgy igaz ez a most bevezetett nem-normált a rendszerre is.

Legyen χ_I az I intervallum karakterisztikus függvénye, azaz

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in I, \\ 0 & \text{különben,} \end{cases}$$

és legyen az I intervallum két részintervalluma I' és I'' (I' a baloldali félintervallum). Ekkor igazak a következő összefüggések:

$$\begin{aligned} \chi_I &= \chi_{I'} + \chi_{I''}, \\ a_I &= \chi_{I'} - \chi_{I''}. \end{aligned}$$

A Haar-Fourier együtthatók is indexezhetők az intervallumokkal és az alábbi skaláris szorzatokkal számolhatók:

$$\hat{f}_m = \hat{f}_I = \langle f, a_I \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot a_I(t) dt.$$

Mivel a_I az I intervallumon kívül azonosan 0, ezért a fenti integrálást elég az I intervallumon végezni.

Az előző összefüggéseket felhasználva az együtthatókra a következők írhatók fel:

$$\begin{aligned} \langle f, \chi_I \rangle &= \langle f, \chi_{I'} \rangle + \langle f, \chi_{I''} \rangle, \\ \langle f, a_I \rangle &= \langle f, \chi_{I'} \rangle - \langle f, \chi_{I''} \rangle. \end{aligned}$$

Jelölje \mathcal{I}_N a $\frac{1}{2^N}$ hosszúságú diadikus intervallumok halmazát, ahol $N \in \mathbb{N}$. Legyen f állandó az $I \in \mathcal{I}_N$ intervallumokon, ekkor minden $m \geq 2^{N+1}$ esetén $\langle f, a_m \rangle = 0$ és

$$\langle f, \chi_I \rangle = 2^{-N} \cdot f(x_I),$$

ahol $I \in \mathcal{I}_N$ és $x_I \in I$. Ezek az összefüggések egy rekurziót definiálnak a Haar-Fourier együtthatók kiszámítására.

2.2.1. *Megjegyzés.* 1.) Az $\langle f, \chi_I \rangle$ ($I \in \mathcal{I}_N$) skaláris szorzatok mindegyikében megjelenik a 2^{-N} együttható. A skaláris szorzat tulajdonságai és a rekurzió felépítése miatt nyilvánvaló, hogy ez a szorzó minden Haar-Fourier együtthatóban megjelenik. Célszerű a rekurzió során ettől a szorzótól eltekinteni és csak az együtthatók tárolásakor figyelembe venni.

2.) Mivel az a_I rendszer ortogonális, de nem ortonormált, így a rekonstrukció során az egyes elemek norma-négyzetével osztanunk kell, azaz

$$f = \sum_{I \in \mathcal{I}} \frac{\langle f, a_I \rangle \cdot a_I}{\langle a_I, a_I \rangle} = \sum_{I \in \mathcal{I}} \underbrace{\frac{\langle f, a_I \rangle}{\langle a_I, a_I \rangle}}_{\tilde{f}_I} \cdot a_I.$$

3.) Mind az analízis, mind a szintézis megvalósítható egy „helybenjáró” algoritmussal.

A probléma egy általánosításához jutunk, ha bináris, de nem diadikus esetet tekintünk. Az ilyen intervallumrendszer esetén $I = I' \cup I''$ és $I' \cap I'' = \emptyset$, ugyanúgy fennáll, mint a diadikus esetben, de $\mu(I') := \mu_1 \neq \mu(I'') := \mu_2$, ahol $\mu(I)$ az I intervallum mértékét jelöli.

Ekkor a következő összefüggések lesznek igazak: $\mu_1 + \mu_2 = \mu(I)$, továbbá $h_I = C_1 \cdot \chi_{I'} + C_2 \cdot \chi_{I''}$. Mivel $\mathcal{E}(h_I) = 0$, ezért $\mathcal{E}(C_1 \cdot \chi_{I'} + C_2 \cdot \chi_{I''}) = 0$, ahonnan $C_1 \cdot \mu_1 + C_2 \cdot \mu_2 = 0$. Így $C_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2} C_1$ és

$$h_I = C_1 \cdot \left(\chi_{I'} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \chi_{I''} \right).$$

C_1 -et érdemes úgy választani, hogy $\mathcal{E}(|h_I|^2) = 1$ az euklideszi normára teljesüljön, azaz

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(|h_I|^2) &= \mathcal{E} \left(\int_{\Omega} h_I \cdot h_I \, d\mu \right) = \mathcal{E} \left(C_1^2 \int_{\Omega} \chi_{I'}^2 - 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \chi_{I'} \chi_{I''} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \chi_{I''}^2 \, d\mu \right) = \\ &= \mathcal{E} \left(C_1^2 \int_{\Omega} \chi_{I'} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \chi_{I''} \, d\mu \right) = C_1^2 \left(\mu_1 + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} \cdot \mu_2 \right) = \frac{\mu_1 \mu_2 + \mu_1^2}{\mu_2} C_1^2 = 1. \end{aligned}$$

Ahonnan $C_1 = \pm \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 \cdot \mu_2 + \mu_1^2}}$. A pozitív együtthatót választva a függvényekre az alábbi rekurzió írható fel:

$$\begin{aligned} h_I &= \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 \cdot \mu_2 + \mu_1^2}} \cdot \chi_{I'} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \cdot \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1 \cdot \mu_2 + \mu_1^2}} \cdot \chi_{I''}, \\ \chi_I &= \chi_{I'} + \chi_{I''}. \end{aligned}$$

2.3. Haar-wavelet analízis

Jelen fejezet elsősorban a [4] könyv alapján készült.

2.3.1. Waveletek

A Haar-rendszert véve mintául az 1980-as évektől kezdve többen is konstruáltak a jelfeldolgozásban fontos szerepet játszó ortogonális rendszereket, úgynevezett wavelet rendszereket. Ebben a témakörben nélkülözhetetlen ötletek fűződnek Ingrid Daubechies [9] és Yves Meyer [21], [22] nevéhez is.

2.3.1. Definíció. Az L^2 -tér szokásos

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

skaláris szorzatára nézve ortonormált rendszereket, melyeket egyetlen $\psi \in L^2$ alapfüggvényből, az úgynevezett *anyawavelet*ből transzláció és dilatáció segítségével származtathatunk, *affin waveletek*nek nevezzük, azaz legyen

$$\psi_k^n(x) := 2^{n/2}\psi(2^n x - k) \quad (x \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}),$$

akkor

$$\langle \psi_k^n, \psi_\ell^m \rangle = \delta_{k\ell}\delta_{nm}.$$

2.3.2. Megjegyzés. A legegyszerűbb affin wavelet a 2.1. alfejezetben bemutatott Haar-rendszer. Könnyen látható az is, hogy ha az anyawavelet normált, azaz

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x)dx = 1,$$

akkor $\|\psi_k^n\| = 1$ is teljesül minden k és n esetén.

2.3.3. Megjegyzés. A wavelet-konstrukció felírásakor szokás használni a transzláció- és dilatáció operátorokat, melyek az alábbi összefüggésekkel definiálhatók:

$$\begin{aligned} (\tau_a f)(x) &:= f(x+a) \quad a, x \in \mathbb{R}, \\ (\delta_s f)(x) &:= f(sx) \quad x \in \mathbb{R}, s > 0. \end{aligned}$$

A fenti jelölésekkel a definícióban felírt affin wavelet ψ_k^n eleme $\psi_k^n = 2^{n/2} = \tau_k(\delta_{2^n}\psi)$ alakban írható.

2.3.2. A Haar skálázási függvény és tulajdonságai

Mint azt már a 2.3.2. Megjegyzésben említettük, a Haar-rendszer a

$$\psi(x) = h_{00}(x) = h_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1, & \text{ha } x \in [\frac{1}{2}, 1), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

függvényből, mint anyawaveletből származtatható.

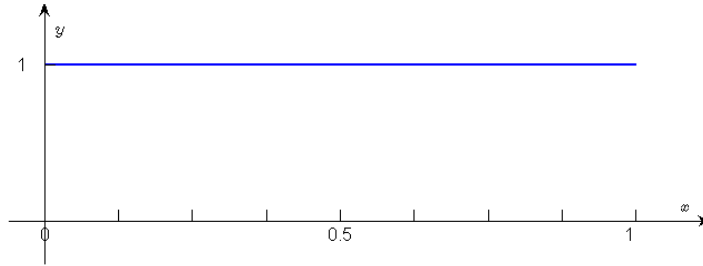
Szintén fontos szerepe van a waveletanalízisben az úgynevezett skálázási függvénynek, amelyet szokás apa-waveletnek is nevezni. A Haar-rendszer esetében ez a függvény az úgynevezett Haar skálázási függvény:

2.3.4. Definíció. A

$$\phi(x) = h_0(x) = \chi_{[0,1)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0,1), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

függvényt *Haar skálázási függvénynek* nevezzük.

A 2.2. ábrán szemléltettük a Haar skálázási függvény grafikonját.



2.2. ábra. A Haar skálázási függvény grafikonja

Legyen $Z \subset \mathbb{Z}$ egész számok egy véges halmaza. A

$$V_0 := \left\{ f \in L^2 : f(x) = \sum_{k \in Z} a_k \phi(x - k), a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz elemei olyan kompakt tartójú szakaszonként konstans függvények, melyek szakadásai csak egész helyeken lehetnek.

Hasonlóan legyen

$$V_1 := \left\{ f \in L^2 : f(x) = \sum_{k \in Z} a_k \phi(2x - k), a_k \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

A V_1 halmaz elemei a fél-egész helyeken lehetséges szakadásokkal rendelkező, kompakt tartójú, szakaszonként konstans függvények.

A fenti konstrukciót folytatva a következő általános definícióhoz juthatunk.

2.3.5. Definíció. Legyen $j \in \mathbb{N}$. A

$$V_j := \text{span}\{\phi(2^j x - k), k \in Z, x \in \mathbb{R}\}$$

halmazt a $\frac{k}{2^j}$ ($k \in Z$) helyeken lehetséges szakadásokkal rendelkező, kompakt tartójú, szakaszonként konstans függvények terének nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy a V_j halmazok között az alábbi tartalmazási reláció áll fenn:

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset \dots$$

Az is triviális, hogy a tartalmazás mindig szigorú, hiszen például $\phi(2x) \in V_1$, de $\phi(2x) \notin V_0$, ugyanis a szakadása $x = \frac{1}{2}$ -ben van. Ezt a tartalmazási relációt biztosítottuk azzal, hogy a dilatációs együtt-hatónak 2 hatványokat választottunk.

2.3.6. Tétel ([4]).

- Az f függvény pontosan akkor V_0 -beli, ha a $\delta_{2^j} f$ dilatáltja V_j -beli.
- Az f függvény pontosan akkor V_j -beli, ha a $\delta_{2^{-j}} f$ dilatáltja V_0 -beli.

Bizonyítás. Az első állítás igazolásához tegyük fel, hogy az f függvény V_0 -beli, ekkor f előáll a $\{\phi(x-k), k \in Z, x \in \mathbb{R}\} = \{\tau_{-k}\phi\}$ függvények lineáris kombinációjaként. Ekkor a $\delta_{2^j} f$ függvény nyilvánvalóan a $\{\phi(2^j x - k), k \in Z, x \in \mathbb{R}\} = \{\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi\}$ függvények lineáris kombinációjaként kapható, ami azt jelenti, hogy a $\delta_{2^j} f$ függvény V_j -beli.

A második állítás hasonlóan igazolható. □

2.3.7. Tétel ([4]). A $\{2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi, k \in Z\}$ függvényrendszer a V_j tér ortonormált bázisa.

Bizonyítás. Elegendő megmutatnunk, hogy $\{\tau_{-k}\phi, k \in Z\}$ ortonormált és hogy $\|2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi\| = 1$ minden $k \in Z$ és minden $j \in \mathbb{N}$ esetén, ugyanis ekkor a $\{2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi, k \in Z\}$ rendszer ortogonalitása a lineáritás nyilvánvaló következménye.

A $\tau_{-k}\phi \in L^2$ függvények egység normájúak, hiszen

$$\|\tau_{-k}\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x-k))^2 dx = \int_k^{k+1} 1 dx = 1$$

és ortogonálisak, azaz ha $k \neq \ell$, akkor

$$\langle \tau_{-k}\phi, \tau_{-\ell}\phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-k)\phi(x-\ell) dx = 0,$$

hiszen a $\tau_{-k}\phi$ függvény tartója a $[k, k+1)$ intervallum, a $\tau_{-\ell}\phi$ függvényé pedig az $[\ell, \ell+1)$ intervallum, azaz a függvények diszjunkt tartójúak, így a $\phi(x-k)\phi(x-\ell)$ szorzat minden $x \in \mathbb{R}$ esetén 0.

Legyen $j \in \mathbb{N}$ és $k \in Z$, számoljuk ki a $2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi$ függvény normáját

$$\|2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (2^{j/2}\phi(2^j x - k))^2 dx = 2^j \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} 1 dx = 1.$$

Ezzel az állítást igazoltuk, hiszen a $\{2^{j/2}\tau_{-k}\delta_{2^j}\phi, k \in Z\}$ rendszer definíció szerint a V_j tér generátor rendszere és most már az is nyilvánvaló, hogy lineárisan független (ugyanis bármely két különböző eleme ortogonális). □

2.3.3. A Haar wavelet és tulajdonságai

Legyen $j \in \mathbb{N}$ rögzített. Az előzőek alapján a V_j halmaz a V_{j-1} halmaz minden elemét tartalmazza. Keressük V_j azon elemeit, amelyek nem tartoznak a V_{j-1} halmazhoz, ehhez a V_j halmazt a V_{j-1} halmaz és a komplementerének ortogonális összegére bontjuk.

Legyen $j = 1$. Keressük a V_0 halmaz V_1 -re vonatkozó komplementer halmazát. A komplementer teret egy ψ függvény és eltoltsjai által szeretnénk generálni, ekkor a következő két tulajdonság együttes teljesülése szükséges:

- Mivel $\psi \in V_1$, ezért előáll

$$\psi(x) = \sum_{\ell} a_{\ell} \phi(2x - \ell) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol az $a_{\ell} \in \mathbb{R}$ együtthatók között csak véges sok nem nulla együttható van.

- A ψ függvény – mint az általa és az eltoltjai által generált komplementer tér bármely eleme – ortogonális V_0 -ra, ami ekvivalens azzal, hogy

$$\langle \psi, \tau_{-k}\phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\phi(x-k)dx = 0$$

minden $k \in Z$ esetén.

A legegyszerűbb függvény, amely mindkét fenti feltételt kielégíti a

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2(x - \frac{1}{2})) = \phi(2x) - \phi(2x - 1), \quad (x \in \mathbb{R})$$

ugyanis az előállítás alapján nyilvánvalóan $\psi \in V_1$ és

$$\langle \psi, \tau_{-k}\phi \rangle = 0,$$

mivel $k \neq 0$ esetén ψ és $\tau_{-k}\phi$ függvények tartói diszjunktak, így a skaláris szorzat által definiált integrál triviálisan 0. A $k = 0$ esetben pedig a

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\phi(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 1dx = 0$$

egyenlőség adódik. Hasonló módon igazolható, hogy a ψ függvény $\tau_{-\ell}\psi$ eltoltjai ugyanilyen tulajdonsággal rendelkeznek, azaz

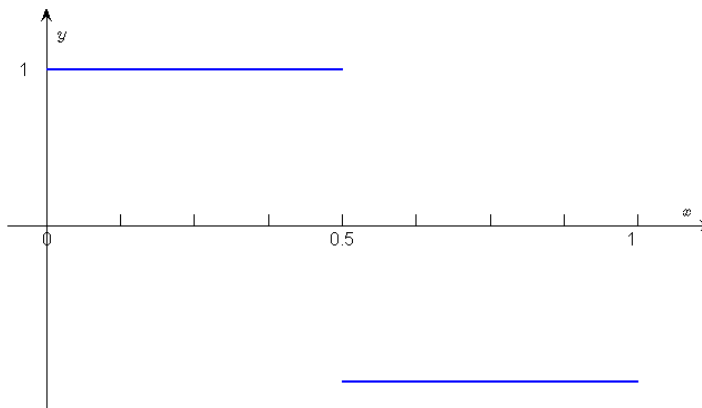
$$\langle \tau_{-\ell}\psi, \tau_{-k}\phi \rangle = 0 \quad (k, \ell \in Z).$$

2.3.8. Definíció. A $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\psi(x) := \phi(2x) - \phi(2x - 1), \quad (x \in \mathbb{R})$$

utasítással értelmezett függvényt *Haar waveletnek* nevezzük.

A 2.3. ábrán szemléltettük a Haar wavelet grafikonját.



2.3. ábra. A Haar wavelet grafikonja

2.3.9. Lemma ([4]). *Az*

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k) \quad x \in \mathbb{R}$$

V_1 -beli függvény pontosan akkor ortogonális a V_0 térre, – azaz minden $\tau_{-\ell}\phi$ ($\ell \in \mathbb{Z}$) függvényre – ha $a_{2m} = -a_{2m+1}$ minden $m \in \mathbb{Z}$ esetén.

Bizonyítás. Ha a feltétel teljesül, akkor

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k}(\phi(2x - 2k) - \phi(2x - 2k - 1)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k}\psi(x - k) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Az előzőek alapján $\langle \tau_{-k}\psi, \tau_{-\ell}\phi \rangle = 0$ minden $k, \ell \in \mathbb{Z}$ esetén, így

$$\langle f, \tau_{-\ell}\phi \rangle = 0.$$

Ha a feltétel nem teljesül, azaz létezik olyan $2m \in \mathbb{Z}$ index, hogy $a_{2m} \neq -a_{2m+1}$, akkor

$$\begin{aligned} \langle f, \tau_{-m}\phi \rangle &= a_{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - 2m)\phi(x - m)dx + a_{2m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x - 2m - 1)\phi(x - m)dx = \\ &= a_{2m} \int_m^{m+\frac{1}{2}} 1dx + a_{2m+1} \int_{m+\frac{1}{2}}^{m+1} 1dx = \frac{a_{2m} + a_{2m+1}}{2} \neq 0. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. □

Jelölje W_0 azon függvények összességét, amelyek előállnak

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(x - k) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, ahol az a_k együtthatók között legfeljebb véges sok nem nulla együttható szerepel. Az előbbieket alapján W_0 a V_0 halmaz V_1 -re vonatkozó ortogonális komplementere és $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

Hasonló módon igazolható a következő általános állítás.

2.3.10. Tétel ([4]). *Legyen $j \in \mathbb{N}$ rögzített. Jelölje W_j azon függvények összességét, amelyek előállnak*

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(2^j x - k) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban, ahol az a_k együtthatók között legfeljebb véges sok nem nulla szerepel. Ekkor a W_j halmaz a V_j halmaz V_{j+1} -re vonatkozó ortogonális komplementere és

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Bizonyítás. A tétel igazolásához az alábbi két állítás belátása szükséges:

- 1.) Bármely W_j -beli függvény ortogonális bármely V_j -beli függvényre.
- 2.) Minden olyan V_{j+1} -beli függvény, amely ortogonális V_j -re, szükségszerűen W_j -beli.

Az első állítás igazolásához tegyük fel, hogy a g függvény W_j -beli, azaz

$$g(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(2^j x - k) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

legyen továbbá $f \in V_j$. Meg kell mutatnunk, hogy ekkor

$$\langle g, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{f(x)} dx = 0.$$

Mivel $f \in V_j$, ezért 2.3.6. Tétel alapján $\delta_{2^{-j}} f \in V_0$. Így $\langle \delta_{2^{-j}} f, \tau_{-k} \psi \rangle = 0$, azaz

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(x - k) \overline{f(2^{-j}x)} dx = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(2^j y - k) \overline{f(y)} dy = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(y) \overline{f(y)} dy,$$

$y=2^{-j}x, \quad dx=2^j dy$

azaz a g függvény ortogonális minden V_j -beli f függvényre.

A második állítás igazolását $j=0$ esetre a bevezetőben elvégeztük. Az általános bizonyítás teljesen hasonlóan végezhető, ennek megfontolását az olvasóra bízuk. \square

Az előző tétel szerint, ha $j \in \mathbb{N}$ rögzített, akkor a V_j tér felbontható az alábbi módon:

$$V_j = W_{j-1} \oplus V_{j-1} = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} = \dots = W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus V_0,$$

azaz minden $f \in V_j$ -beli függvény egyértelműen felbontható

$$f = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0$$

összegre, ahol $w_\ell \in W_\ell$ ($0 \leq \ell < j$) és $f_0 \in V_0$.

A fenti gondolatmenetet $j \rightarrow \infty$ határátmenet alkalmazásával folytatva az alábbi tétel nyerhető, melyet bizonyítás nélkül közlünk.

2.3.11. Tétel ([4]). *Az L^2 függvénytér felbontható kompakt tartójú lépcsős függvények tereinek végtelen ortogonális direkt összegére:*

$$L^2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j \oplus \dots$$

azaz minden $f \in L^2$ függvény egyértelműen írható fel

$$f = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} w_j$$

alakban, ahol $f_0 \in V_0$ és $w_j \in W_j$ minden $j \in \mathbb{N}$ esetén.

2.4. Haar dekompozíció és rekonstrukció

2.4.1. Haar dekompozíció

Az L^2 -beli f függvény 2.3.11. Tétel szerinti felbontásának előállításánál először a függvényt egy

$$f_j(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_\ell \phi(2^j x - \ell) \tag{2.4.1}$$

alakú lépcsős függvénnyel approximáljuk, ahol j elegendően nagy.

A dekompozíciós algoritmus alapját a következő lemma szolgáltatja.

2.4.1. Lemma. Minden $x \in \mathbb{R}$ helyen és minden $j \in \mathbb{N}$ esetén igazak a következő összefüggések:

$$\phi(2^j x) = (\phi(2^{j-1} x) + \psi(2^{j-1} x))/2, \quad (2.4.2)$$

$$\phi(2^j x - 1) = (\phi(2^{j-1} x) - \psi(2^{j-1} x))/2. \quad (2.4.3)$$

Bizonyítás. A $j = 1$ esetben az igazolandó állítások

$$\phi(2x) = (\phi(x) + \psi(x))/2, \quad (2.4.4)$$

$$\phi(2x - 1) = (\phi(x) - \psi(x))/2 \quad (2.4.5)$$

alakúak, melyek a ϕ és ψ függvények definíciója alapján nyilvánvalóan teljesülnek.

Az összefüggések általános alakja azonnal nyerhető, ha a (2.4.4) és a (2.4.5) egyenlőségekben x helyére $2^{j-1}x$ -et írunk. \square

Válasszuk külön a (2.4.1) összeg páros és páratlan indexű tagjait

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} \phi(2^j x - 2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} \phi(2^j x - 2k - 1). \quad (2.4.6)$$

A (2.4.2) és (2.4.3) összefüggéseket x helyett $x - k2^{1-j}$ -re felírva a

$$\phi(2^j x - 2k) = (\phi(2^{j-1} x - k) + \psi(2^{j-1} x - k))/2, \quad (2.4.7)$$

$$\phi(2^j x - 1) = (\phi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k))/2 \quad (2.4.8)$$

egyenlőségeket nyerhetjük. Ezen eredményeket az (2.4.6) egyenlőségbe visszahelyettesítve

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} (\phi(2^{j-1} x - k) + \psi(2^{j-1} x - k))/2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} (\phi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k))/2 = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{a_{2k} - a_{2k+1}}{2} \psi(2^{j-1} x - k) + \frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \phi(2^{j-1} x - k) = w_{j-1} + f_{j-1}, \end{aligned}$$

ahol $w_{j-1} \in W_{j-1} = \text{span}\{\tau_{-k} \delta_{2^{j-1}} \psi, k \in \mathbb{Z}\}$ és $f_{j-1} \in V_{j-1} = \text{span}\{\tau_{-k} \delta_{2^{j-1}} \phi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Az előző tapasztalatokat foglaljuk össze a következő tételben.

2.4.2. Tétel ([4] Haar dekompozíció). *Az*

$$f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(j)} \tau_{-k} \delta_{2^j} \phi$$

V_j -beli függvény egyértelműen felbontható egy W_{j-1} -beli w_{j-1} és egy V_{j-1} -beli f_{j-1} függvény összegére, ahol

$$\begin{aligned} f_{j-1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(j-1)} \tau_{-k} \delta_{2^{j-1}} \phi \\ w_{j-1} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(j-1)} \tau_{-k} \delta_{2^{j-1}} \psi \end{aligned}$$

az együtthatókra pedig

$$a_k^{(j-1)} = \frac{a_{2k}^{(j)} + a_{2k+1}^{(j)}}{2} \quad \text{és} \quad b_k^{(j-1)} = \frac{a_{2k}^{(j)} - a_{2k+1}^{(j)}}{2}$$

teljesül.

Az eljárás folytatható és így f_{j-1} felbontható egy W_{j-2} -beli w_{j-2} és egy V_{j-2} -beli f_{j-2} függvény összegére és így tovább, egészen addig, míg az

$$f_j = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0$$

előállításához nem jutunk.

2.4.2. Haar rekonstrukció

Tegyük fel, hogy ismerjük az f függvény felbontását a V_0 és W_ℓ $0 \leq \ell < j$ halmazbeli elemek összegére, azaz

$$f = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0,$$

ahol

$$f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(0)} \tau_{-k} \phi$$

és

$$w_\ell = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(\ell)} \tau_{-k} \delta_{2^\ell} \psi \quad (0 \leq \ell < j).$$

Kérdés, hogyan tudjuk előállítani az $\{a_k^{(0)}, k \in \mathbb{Z}\}$ és $\{b_k^{(\ell)}, k \in \mathbb{Z}, 0 \leq \ell < j\}$ együtthatók ismeretében az f függvény

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m^{(j)} \tau_{-m} \delta_{2^j} \phi$$

alakját.

A rekonstrukciós algoritmus alapját a következő lemma szolgáltatja.

2.4.3. Lemma. Minden $x \in \mathbb{R}$ helyen és minden $j \in \mathbb{N}$ esetén igazak a következő összefüggések

$$\phi(2^{j-1}x) = (\phi(2^j x) + \phi(2^j x - 1))/2, \quad (2.4.9)$$

$$\psi(2^{j-1}x) = (\phi(2^j x) - \phi(2^j x - 1))/2. \quad (2.4.10)$$

Bizonyítás. A $j = 1$ esetben az igazolandó állítások

$$\phi(x) = (\phi(2x) + \phi(2x - 1))/2, \quad (2.4.11)$$

$$\psi(x) = (\phi(2x) - \phi(2x - 1))/2 \quad (2.4.12)$$

alakúak, melyek a ϕ és ψ függvények definíciója alapján nyilvánvalóan teljesülnek.

Az összefüggések általános alakja azonnal nyerhető, ha (2.4.11) és (2.4.12) egyenlőségekben x helyére $2^{j-1}x$ -et írunk. \square

Az f_0 függvény előállítását felírva és abban a (2.4.11) eredményt x helyett $x - k$ -ra alkalmazva minden $x \in \mathbb{R}$ helyen a következő összefüggésre jutunk:

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(0)} \phi(x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(0)} (\phi(2x - 2k) + \phi(2x - 2k - 1))/2.$$

Így f_0 minden $x \in \mathbb{R}$ helyen felírható az alábbi alakban

$$f_0(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{a}_\ell^{(1)} \phi(2x - \ell),$$

ahol

$$\hat{a}_\ell^{(1)} = \begin{cases} a_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ a_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

Hasonlóan, a w_0 függvény előállítását és a (2.4.12) egyenlőség x helyett $x-k$ -ra felírt alakját összevetve, minden $x \in \mathbb{R}$ helyen a következő összefüggés kapható:

$$w_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(0)} \psi(x-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(0)} (\phi(2x-2k) - \phi(2x-2k-1))/2.$$

Így w_0 minden $x \in \mathbb{R}$ helyen felírható az alábbi alakban:

$$w_0(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{b}_\ell^{(1)} \phi(2x-\ell),$$

ahol

$$\hat{b}_\ell^{(1)} = \begin{cases} b_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ -b_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

A kapott két eredményt összeadva

$$f_0(x) + w_0(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_\ell^{(1)} \phi(2x-\ell) \quad (x \in \mathbb{R})$$

kapható, ahol

$$a_\ell^{(1)} = \hat{a}_\ell^{(1)} + \hat{b}_\ell^{(1)} = \begin{cases} a_k^{(0)} + b_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ a_k^{(0)} - b_k^{(0)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

Az eljárás következő lépésében az előzőekhez hasonlóan az $f_0 + w_0$ összeg (2.4.9) felhasználásával

$$f_0(x) + w_0(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{a}_\ell^{(2)} \phi(4x-\ell), \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban írható, ahol

$$\hat{a}_\ell^{(2)} = \begin{cases} a_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ a_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

és a w_1 függvény (2.4.10) felhasználásával

$$w_1(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{b}_\ell^{(2)} \phi(4x-\ell) \quad (x \in \mathbb{R})$$

alakban írható, ahol

$$\hat{b}_\ell^{(2)} = \begin{cases} b_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ -b_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

A két eredményt összevetve

$$f_0(x) + w_0(x) + w_1(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_\ell^{(2)} \phi(2^2x-\ell) \quad (x \in \mathbb{R})$$

kapható, ahol

$$a_\ell^{(2)} = \hat{a}_\ell^{(1)} + \hat{b}_\ell^{(1)} = \begin{cases} a_k^{(1)} + b_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ a_k^{(1)} - b_k^{(1)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

A fenti eljárást folytatva az $a_\ell^{(m)}$ ($1 \leq m \leq j$) együtthatók számolására egy rekurzív algoritmus definiálható. Ezt a tapasztalatot foglaljuk össze a következő tételben:

2.4.4. Tétel ([4] Haar rekonstrukció). *Tegyük fel, hogy adott az*

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + \dots + w_{j-1}$$

előállítás, ahol

$$f_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{(0)} \tau_{-k} \phi$$

és

$$w_\ell = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{(\ell)} \tau_{-k} \delta_{2^\ell} \psi \quad (0 \leq \ell < j).$$

Ekkor f az

$$f = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_\ell^{(j)} \tau_{-k} \delta_{2^j} \phi$$

alakban írható, ahol az $a_\ell^{(j)}$ együtthatók az alábbi rekurzív utasítás alapján számolhatók minden $1 \leq m \leq j$ index esetén:

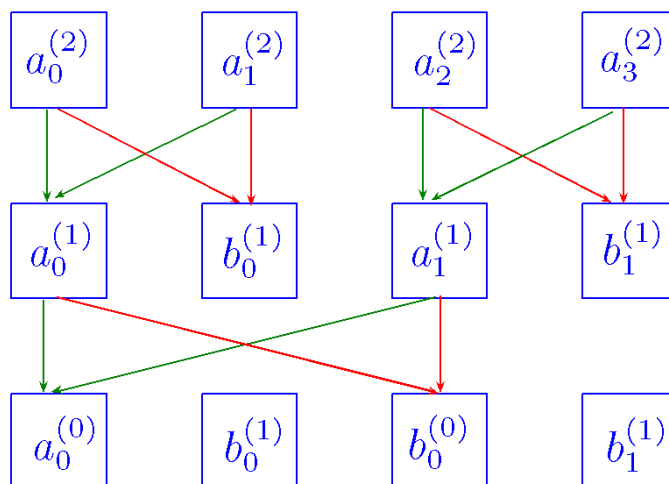
$$a_\ell^{(m)} := \begin{cases} a_k^{(m-1)} + b_k^{(m-1)}, & \text{ha } \ell = 2k, \\ a_k^{(m-1)} - b_k^{(m-1)}, & \text{ha } \ell = 2k+1. \end{cases}$$

Az alábbi MatLab program alkalmas a Haar-dekompozíció megvalósítására. Ezenkívül azt is demonstrálja, hogy a probléma egy úgynevezett *helybenjáró algoritmus*¹ segítségével is megoldható.

```
n=length(f);
for k=0:N-1
  for i=0:2^(k+1):n-2
    A=(f(i+1)+f(i+2^k+1))/2;
    B=(f(i+1)-f(i+2^k+1))/2;
    f(i+1)=A;
    f(i+2^k+1)=B;
  end;
end;
```

Ügyeljünk az adatok kiolvasási sorrendjére. Az eljárás során végzet számításokat és adattárolásokat szemléltettük a 2.4. ábrán. Az ábra minden egyes sora megfelel az algoritmus egy lépése során előállított vektornak. A legfelső sorban az induló adatok vektora, a legalsó sorban pedig az eredményvektor látható. A számításokat nyilakkal jelöltük, zöld nyillal az összeadást és pirossal a kivonást. (Például a $b_0^{(1)}$ elemhez piros nyilak érkeznek az $a_0^{(2)}$ és $a_1^{(2)}$ elemektől, ez a $b_0^{(1)} = \frac{a_0^{(2)} - a_1^{(2)}}{2}$ számolási utasításnak felel meg.)

¹Az ilyen algoritmusok során az eredmény a bemenő adatok helyén jelenik meg és az újonnan számolt értékekkel a régi adatokat felülírjuk. Ez azt jelenti, hogy az algoritmus tárhelyigénye gyakorlatilag ideális.



2.4. ábra. A Haar wavelet dekompozíció számolási sémája

2.5. Kétváltozós Haar-rendszer

Az ebben a fejezetben tárgyalt eljárást a 2004-ben írt [44] szakdolgozatomban ismertettem.

A következőkben bemutatjuk, hogyan lehet olyan kétváltozós $(\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R})$ függvény-rendszert szerkeszteni, amely az előbb tárgyalt rendszerhez hasonló tulajdonságokkal rendelkezik. Magát a konstrukciót fogjuk átültetni magasabb dimenzióba. Ehhez tekintsük a diadikus négyzeteket, definiáljunk olyan függvényeket, melyeknek ezek a tartóik. (Egy-egy diadikus négyzeten rendelkeznek csak nemnulla értékkel). Legyen \mathfrak{J} a diadikus intervallumok halmaza, ekkor a függvény-rendszer elemeit a következőképpen adjuk meg:

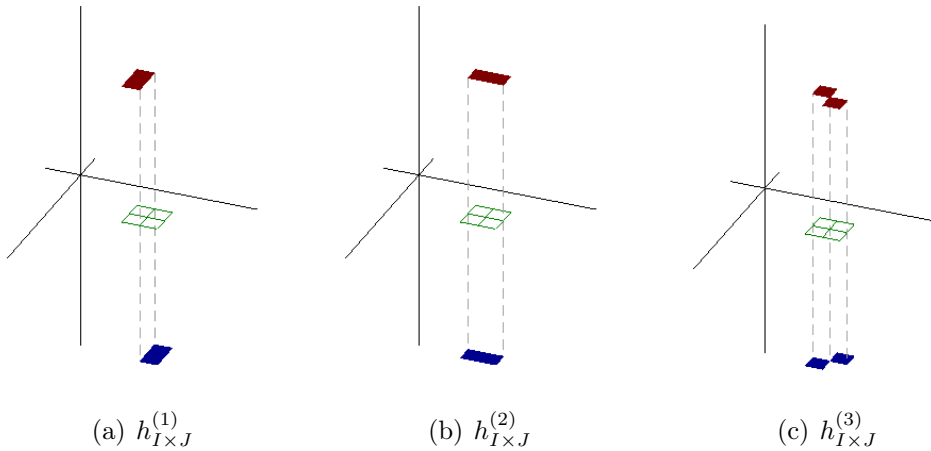
Legyen $I, J \in \mathfrak{J}$ valamint teljesüljön, hogy $|I| = |J|$. Konkrétan legyen $I := [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ és legyen $J := [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m+1}{2^n})$.

$$h_{I \times J}^{(1)}(x, y) := \begin{cases} -2^{n-1}, & \text{ha } \frac{k-1}{2^n} \leq x < \frac{k+1}{2^n}, \text{ és } \frac{m-1}{2^n} \leq y < \frac{m}{2^n}, \\ 2^{n-1}, & \text{ha } \frac{k-1}{2^n} \leq x < \frac{k+1}{2^n}, \text{ és } \frac{m}{2^n} \leq y < \frac{m+1}{2^n}, \\ 0, & \text{az egység-négyzet többi pontjában.} \end{cases}$$

$$h_{I \times J}^{(2)}(x, y) := \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{ha } \frac{k-1}{2^n} \leq x < \frac{k}{2^n}, \text{ és } \frac{m-1}{2^n} \leq y < \frac{m+1}{2^n}, \\ -2^{n-1}, & \text{ha } \frac{k}{2^n} \leq x < \frac{k+1}{2^n}, \text{ és } \frac{m-1}{2^n} \leq y < \frac{m+1}{2^n}, \\ 0, & \text{az egység-négyzet többi pontjában.} \end{cases}$$

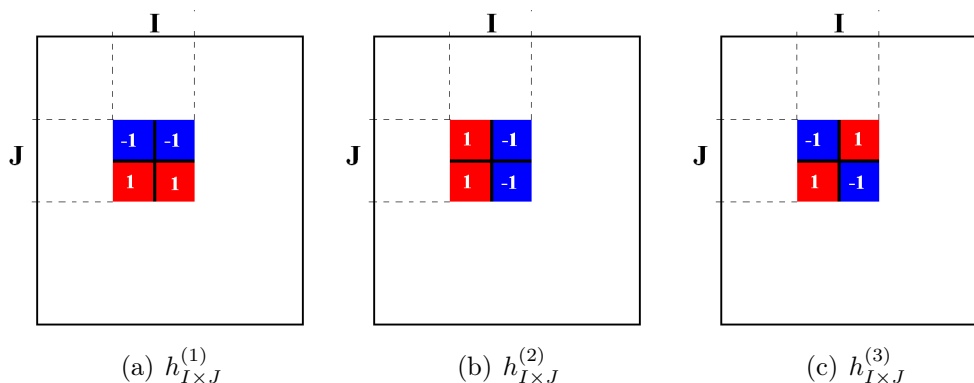
$$h_{I \times J}^{(3)}(x, y) := \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{ha } x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \text{ és } y \in [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}), \\ & \text{vagy } x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}) \text{ és } y \in [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}), \\ -2^{n-1}, & \text{ha } x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}) \text{ és } y \in [\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}), \\ & \text{vagy } x \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}) \text{ és } y \in [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}), \\ 0, & \text{az egység-négyzet többi pontjában.} \end{cases}$$

Ily módon tehát bármely $(I, J) \in \mathfrak{J}^2 (|I|=|J|)$ négyzethez három Haar-függvény tartozik, melyeknek a tartója éppen ez a négyzet.



2.5. ábra. Az $I \times J$ négyzethez tartozó kétváltozós Haar-függvények

Az alábbi stilizált ábrák segítenek elképzelni ezeket a kétváltozós függvényeket.

2.6. ábra. Az $I \times J$ négyzethez tartozó kétváltozós Haar-függvények sematikus ábrái

A fenti függvények származtathatóak az egyváltozós Haar-függvényekből is. Ehhez értelmezni kell két függvény egy speciális szorzatát a következőképpen:

$$(f \times g)(x, y) := f(x) \cdot g(y).$$

Könnyen igazolható az alábbi állítások helyessége.

$$h_{I \times J}^{(1)}(x, y) = -\sqrt{2^n} \chi_I \times h_J = -(|h_I| \times h_J)(x, y),$$

$$h_{I \times J}^{(2)}(x, y) = \sqrt{2^n} h_I \times \chi_J = (h_I \times |h_J|)(x, y),$$

$$h_{I \times J}^{(3)}(x, y) = -(h_I \times h_J)(x, y).$$

Vegyük észre, hogy az ortogonalitás az egydimenziós esethez analóg módon látható be. Mivel ez a diszjunkt tartójú függvénpár esetén triviálisan teljesül, elég olyan függvényeket vizsgálni, melyek tartója közös, vagy az egyik függvény tartója tartalmazza a másik függvényét. Az utóbbi eset tárgyalása analóg módon történik, mint az egydimenziós bizonyítás. Az újdonságot a közös tartójú függvénpárok jelentik, hiszen ilyenek nem voltak egydimenzióban. Ezért egy ilyen eset vizsgálatát részletezzük, a másik két eset teljesen analóg módon tárgyalható:

$$\langle h_{I \times J}^{(1)}, h_{I \times J}^{(2)} \rangle = \iint_{\Omega} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy,$$

ahol Ω az egység-négyzet. Mindkét függvény a közös tartón ($I \times J$ -n) kívül azonosan nulla, így a skaláris szorzatban az integrálást elegendő az $I \times J$ négyzetre elvégezni.

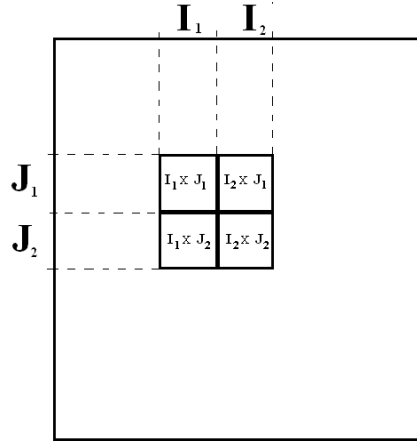
Legyen ez a négyzet a következő: $I := [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$; $J := [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$. Ekkor

$$\langle h_{I \times J}^{(1)}, h_{I \times J}^{(2)} \rangle = \iint_{I \times J} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy.$$

A fenti integrál kiszámításához célszerű az $I \times J$ négyzetet 4 további négyzetre bontani, úgy mint

$$I_1 \times J_1; I_1 \times J_2; I_2 \times J_1; I_2 \times J_2,$$

ahol $I_1 = [\frac{k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}]$; $I_2 = [\frac{k+1}{2^{n+1}}, \frac{k+1}{2^n}]$; $J_1 = [\frac{m}{2^n}, \frac{2m+1}{2^{n+1}}]$; $J_2 = [\frac{m+1}{2^{n+1}}, \frac{m+1}{2^n}]$, melyek az alábbi módon helyezkednek el:

2.7. ábra. Az $I \times J$ négyzet felosztása

Ez szintén az egyváltozós eljárás átültetése. Ezt a módszert a későbbiek során még fogjuk használni.

$$\begin{aligned} \langle h_{I \times J}^{(1)}, h_{I \times J}^{(2)} \rangle &= \iint_{I_1 \times J_1} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy + \iint_{I_1 \times J_2} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy + \\ &+ \iint_{I_2 \times J_1} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy + \iint_{I_2 \times J_2} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy. \end{aligned}$$

Könnyen látható, hogy ezekre az integrálokra igaz a következő:

$$\begin{aligned} \iint_{I_1 \times J_1} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy &= \iint_{I_2 \times J_2} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy = \\ &= - \iint_{I_1 \times J_2} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy = - \iint_{I_2 \times J_1} h_{I \times J}^{(1)} \cdot h_{I \times J}^{(2)} dx dy. \end{aligned}$$

Így valóban igaz, hogy $\langle h_{I \times J}^{(1)}, h_{I_1 \times J_1}^{(2)} \rangle = 0$.

A további két eset igazolása hasonlóan végezhető. A fenti gondolatmenethez analóg módon, számolással igazolható a függvényrendszer normáltsága is.

Legyen h_0 az egységnyezeten azonosan 1 függvény. Vezessük be a kétváltozós Haar-rendszer szerinti sorfejtés $S_{2^n}^{(2D)}$ részletösszeg-operátorát!

$$S_{2^n}^{(2D)} f := \langle f, h_0 \rangle h_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{I, J \in \mathfrak{J}_k} (\langle f, h_{I \times J}^{(1)} \rangle h_{I \times J}^{(1)} + \langle f, h_{I \times J}^{(2)} \rangle h_{I \times J}^{(2)} + \langle f, h_{I \times J}^{(3)} \rangle h_{I \times J}^{(3)}),$$

ahol \mathfrak{J}_k az $\frac{1}{2^k}$ hosszú intervallumok halmaza.

2.5.1. Tétel (KB[44]). *Legyen $f \in L^2(\Omega)$ az Ω egységnyezeten négyzetesen integrálható függvény, ekkor*

$$(S_{2^n}^{(2D)} f)(x, y) = 2^{2n} \iint_{I \times J} f(t, u) dt du, \quad \text{ahol } x \in I, y \in J \text{ és } I, J \in \mathfrak{J}_n.$$

Bizonyítás. A tétel bizonyítása az egydimenziós esethez hasonlóan, teljes indukcióval történik, az eltérés mindössze annyi, hogy a diszkusszió során több esetet kell vizsgálnunk. $n = 0$ esetén az állítás nyilvánvaló, hiszen

$$(S_{2^0}^{(2D)} f)(x, y) = (S_1^{(2D)} f)(x, y) = \langle f, h_0 \rangle \overbrace{h_0(x, y)}^1 = \iint_{\Omega} f(t, u) h_0(t, u) dt du = \iint_{[0,1] \times [0,1]} f(t, u) dt du.$$

Tegyük fel most, hogy minden n -nél kisebb n' esetén az állítást már igazoltuk. Ekkor

$$(S_{2^n}^{(2D)} f)(x, y) = \langle f, h_{I \times J}^{(1)} \rangle h_{I \times J}^{(1)}(x, y) + \langle f, h_{I \times J}^{(2)} \rangle h_{I \times J}^{(2)}(x, y) + \langle f, h_{I \times J}^{(3)} \rangle h_{I \times J}^{(3)}(x, y) + S_{2^{n-1}}^{(2D)} f(x, y),$$

ahol $I \times J$ az a $\frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2^{n-1}}$ -es négyzet, amelyre $(x, y) \in I \times J$. Nyilvánvaló, hogy

$$\langle f, h_{I^* \times J^*}^{(i)} \rangle h_{I^* \times J^*}^{(i)} = 0,$$

minden olyan esetben, ha $I^* \neq I$ vagy $J^* \neq J$, mert a $\frac{1}{2^{n-1}} \times \frac{1}{2^{n-1}}$ nagyságú négyzeten nem-nulla értékkel rendelkező kétdimenziós Haar-függvények közül csak a fent felsorolt három függvényre igaz, hogy $h_{I \times J}^{(i)}(x, y) \neq 0$.

Így

$$(S_{2^n}^{(2D)} f)(x, y) = h_{I \times J}^{(1)}(x, y) \iint_{\Omega} f(t, u) h_{I \times J}^{(1)}(t, u) dt du + h_{I \times J}^{(2)}(x, y) \iint_{\Omega} f(t, u) h_{I \times J}^{(2)}(t, u) dt du + \\ + h_{I \times J}^{(3)}(x, y) \cdot \iint_{\Omega} f(t, u) h_{I \times J}^{(3)}(t, u) dt du + 2^{2(n-1)} \iint_{I \times J} f(t, u) dt du.$$

A $h_{I \times J}$ függvények tulajdonságai miatt a skaláris szorzatokhoz elég csak az $I \times J$ négyzeten integrálnunk, vagyis

$$(S_{2^n}^{(2D)} f)(x, y) = h_{I \times J}^{(1)}(x, y) \iint_{I \times J} f(t, u) h_{I \times J}^{(1)}(t, u) dt du + h_{I \times J}^{(2)}(x, y) \iint_{I \times J} f(t, u) h_{I \times J}^{(2)}(t, u) dt du + \\ + h_{I \times J}^{(3)}(x, y) \iint_{I \times J} f(t, u) h_{I \times J}^{(3)}(t, u) dt du + 2^{2(n-1)} \iint_{I \times J} f(t, u) dt du.$$

Célszerű, az egydimenziós esethez hasonlóan az integrálási tartományt részekre bontani. Legyenek ezek a részek a következők:

$$I_1 \times J_1, \quad I_1 \times J_2, \quad I_2 \times J_1, \quad I_2 \times J_2.$$

Ekkor pedig

$$(S_{2^n}^{(2D)} f)(x, y) = h_{I \times J}^{(1)}(x, y) \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) h_{I \times J}^{(1)}(t, u) dt du + h_{I \times J}^{(1)}(x, y) \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) h_{I \times J}^{(1)}(t, u) dt du + \\ + h_{I \times J}^{(1)}(x, y) \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) h_{I \times J}^{(1)}(t, u) dt du + h_{I \times J}^{(1)}(x, y) \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) h_{I \times J}^{(1)}(t, u) dt du + \\ + h_{I \times J}^{(2)}(x, y) \iint_{I \times J} f(t, u) h_{I \times J}^{(2)}(t, u) dt du + h_{I \times J}^{(3)}(x, y) \iint_{I \times J} f(t, u) h_{I \times J}^{(3)}(t, u) dt du + \\ + 2^{2(n-1)} \iint_{I \times J} f(t, u) dt du,$$

Amint közelebbről megvizsgáljuk a fenti integrálokat, egyből kiderül, hogy valóban praktikus volt a felosztás, hiszen egy-egy integrál kiszámítása során a $h_{I \times J}^{(1)}$ függvény konstans, értéke $\pm 2^{n-1}$, a tartománytól függően. A többi függvény is hasonlóan viselkedik, könnyen meggondolható a következő:

$$\begin{aligned}
(S_{2^{n-1}}^{(2D)} f)(x, y) &= h_{I \times J}^{(1)}(x, y) \left(-2^{n-1} \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du - 2^{n-1} \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) dt du + 2^{n-1} \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) dt du + \right. \\
&\quad \left. + 2^{n-1} \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) dt du \right) + h_{I \times J}^{(2)}(x, y) \left(+ 2^{n-1} \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du - 2^{n-1} \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) dt du + \right. \\
&\quad \left. + 2^{n-1} \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) dt du - 2^{n-1} \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) dt du \right) + h_{I \times J}^{(3)}(x, y) \left(- 2^{n-1} \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du + \right. \\
&\quad \left. + 2^{n-1} \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) dt du + 2^{n-1} \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) dt du - 2^{n-1} \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) dt du \right) + 2^{2(n-1)} \iint_{I \times J} f(t, u) dt du.
\end{aligned}$$

A kiemelt konstansok értéke csak attól függ, hogy az (x, y) pont melyik tartományban van, ez alapján négy esetet kell megkülönböztetni, melyek közül azt részletezem, ahol $(x, y) \in I_1 \times J_1$, a másik három eset teljesen analóg módon tárgyalható. Tegyük fel továbbá, hogy $I \times J = I_1^* \times J_1^*$. A bizonyítást erre az esetre konkretizálom, végig szem előtt tartva, hogy a további esetek ezzel megegyező módon, más-más konstansok felhasználásával tárgyalhatóak.

Ha $(x, y) \in I_1 \times J_1$, akkor

$$h_{I \times J}^{(1)}(x, y) = -2^{n-1}, \quad h_{I \times J}^{(2)}(x, y) = 2^{n-1}, \quad h_{I \times J}^{(3)}(x, y) = -2^{n-1}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
(S_{2^n}^{(2D)} f)(x, y) &= 2^{2(n-1)} \cdot \left(\iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du + \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) dt du - \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) dt du - \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) dt du + \right. \\
&\quad \left. + \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du - \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) dt du + \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) dt du - \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) dt du + \right. \\
&\quad \left. + \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du - \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) dt du - \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) dt du + \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) dt du \right) + \\
&\quad + 2^{2(n-1)} \iint_{I \times J} f(t, u) dt du.
\end{aligned}$$

Összevonás után pedig:

$$\begin{aligned}
(S_{2^n}^{(2D)} f)(x, y) &= 2^{2(n-1)} \cdot \left(3 \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du - \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) dt du - \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) dt du - \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) dt du \right) + \\
&\quad + 2^{2(n-1)} \iint_{I \times J} f(t, u) dt du.
\end{aligned}$$

Bontsuk most szét az utolsó integrált is, az előbbi módszerrel:

$$\begin{aligned}
(S_{2^n}^{(2D)} f)(x, y) &= 2^{2(n-1)} \cdot \left(3 \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du - \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) dt du - \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) dt du - \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) dt du \right) + \\
&\quad + 2^{2(n-1)} \cdot \left(\iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du + \iint_{I_2 \times J_1} f(t, u) dt du + \iint_{I_1 \times J_2} f(t, u) dt du + \iint_{I_2 \times J_2} f(t, u) dt du \right)
\end{aligned}$$

Látható, hogy csak az $I_1 \times J_1$ négyzetten értelmezett integrál nem esik ki, tehát:

$$(S_{2^n}^{(2D)} f)(x, y) = 2^{2(n-1)} \cdot 4 \cdot \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du = 2^{2n} \cdot \iint_{I_1 \times J_1} f(t, u) dt du.$$

Ahonnán az állítás már következik. □

Az eddig használt indexezés hasznos, mikor el szeretnénk képzelni az egyes függvényeket, mert rögtön leolvasható az indexből a függvény tartója. Praktikus akkor is, amikor beszélni szeretnénk a függvényeinkről, hiszen egy-egy függvény beazonosítására két ismertető jelet használunk, az egyik egy négyzet, ahol nem-nulla értékekkel rendelkezik, a másik azonosító pedig azt mutatja meg, hogy a három azonos tartójú függvény közül melyikről van szó. Az iteráció során viszont könnyebben algoritmizálható indexezésre van szükségünk. Most is az egydimenzióban már használt módszert alakítjuk a problémához.

$$h_{2^{2n+(m-1-2^{n-1}) \cdot 2^{n-1}+(k-1-2^{n-1})}} := h_{I \times J},$$

ha $I = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right)$ és $J = \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n} \right)$.

Az algoritmizálás a fenti formula segítségével már nem jelent sokkal nagyobb problémát, mint az egydimenziós esetben, ezért a részletes magyarázattól most el is tekintünk.

3. fejezet

Általánosított szorzatrendszer konstrukciók

Az ebben a fejezetben bemutatásra kerülő konstrukciók alapötletét a [18] cikkben bemutatott Haar-szerű wavelet konstrukció adta. A [45] cikkben ezt a konstrukciót alkalmaztuk a Csebisev polinomok 2^n indexű sorozata, mint 2^n -rétű leképezés sorozat felhasználásával. Célunk az volt, hogy a diszkrétizáció alappontjai a jól ismert és számos jó tulajdonsággal rendelkező Csebisev-abszcisszák legyenek. A [18] cikk lépéseit nem lehetett egy az egyben átemelni, ezért a [45] cikkben a konkrét példa esetén biortogonális szorzat-rendszert konstruáltunk. A konstrukció során tapasztaltak felhasználásával a későbbi cikkekben [46, 47, 48] az eljárást tovább általánosítottuk, így olyan adaptív biortogonális rendszerekhez jutottunk, melyek megőrizték a Haar-szerű waveletkonstrukció legfontosabb tulajdonságait, nevezetesen hogy a Haar-Fourier együtthatók általánosított FFT algoritmussal számolhatók. Így hatékony, jól kezelhető interpolációs eljárásokat konstruálhatunk, ráadásul az interpoláció alappont-rendszerét is a feladat igényeihez igazíthatjuk.

3.1. Walsh-Csebisev rendszer és alkalmazásai

Jelen fejezet a 2006. nyarán a MaCS6 konferencián tartott előadásom és az ott elhangzottakból készült [45] cikkem alapján készült. A konstrukció során a kettőhatvány indexű Csebisev-polinomok, mint 2^n -rétű leképezések segítségével készítünk biortogonális szorzatrendszer-párt.

3.1.1. Definíció. Legyen X egy nem üres halmaz. Az X -en értelmezett $A: X \rightarrow X$ függvényt **kétrétű leképezésnek** nevezzük, ha minden $x \in X$ elemhez pontosan két X -beli elem létezik – jelöljük ezeket x' -vel és x'' -vel, – melyekre

$$A(x') = A(x'') = x.$$

A Rademacher-függvények konstrukciója során cseréljük le a

$$\delta(x) := 2x \pmod{1}$$

dilatációt egy $A: X \rightarrow X$ kétrétű leképezésre, az alapfüggvényt pedig egy $\phi: X \rightarrow \mathbb{T}$ függvényre, ahol $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ és melyre minden $x \in X$ esetén igaz, hogy az $x \in X$ elem két ősképen – x' -ben illetve x'' -ben – különböző előjelű, de azonos abszolútértékű függvényértékekkel rendelkezik, azaz

$$\phi(x') = -\phi(x''). \tag{3.1.1}$$

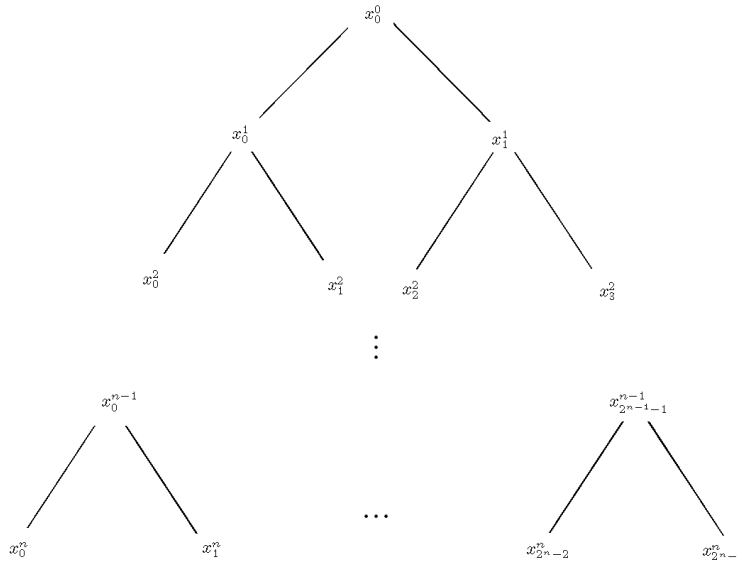
Ilyen módon Haar-szerű függvényekhez jutunk.

Készítsünk a kétrétű leképezésünk iterált használatával 2^n -rétű leképezést a következő módon:

$$A_0(x) := x, \quad A_n(x) := A(A_{n-1}(x)) \quad (n \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}, \quad x \in X)$$

Egy rögzített $x_0^0 \in X$ elem A_n leképezésben vett ősképei az alábbi 2^n -elemű halmazt alkotják:

$$X^n := \{x \in X : A_n(x) = x_0^0\} = \{x_k^n : k = 0, 1, \dots, 2^n - 1\}.$$



3.1. ábra. Az X^n diszkrét halmaz

A diszkrét Haar-szerű függvényeket ezen az X^n halmazon fogjuk értelmezni.

Az így értelmezett Rademacher-szerű ϕ_n függvények szorzatrendszerként származtathatók a Walsh-szerű rendszerek és azokból nyerhetjük a Haar-szerű függvényeket az alábbi módon:

$$H_{k,n}(x) := \phi_n(x) \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \phi_j(x) \overline{\phi_j(x_k^n)}) \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}). \quad (3.1.2)$$

Természetesen az

$$X = [0, 1), \quad A(x) = 2x \pmod{1} \quad (x \in X) \quad (3.1.3)$$

speciális esetben a

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 & (x \in [0, 1/2)), \\ -1 & (x \in [1/2, 1)) \end{cases}$$

alapfüggvény választása mellett visszakaphatjuk az eredeti Haar-rendszert:

$$h_{k,n} = H_{k,n} \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}).$$

Továbbá az X^n diszkrét halmaz pontjain a két függvény általános esetben is megegyezik:

$$h_{k,n}(\ell 2^{-N}) = H_{k,n}(x_\ell^N) \quad (0 \leq k < 2^n, 0 \leq n < N, 0 \leq \ell < 2^N). \quad (3.1.4)$$

3.1.1. Haar-Csebisev és Walsh-Csebisev rendszerek

Tekintsük az $X = [-1, 1]$ halmazon az

$$A(x) := 2x^2 - 1 \quad (x \in X) \quad (3.1.5)$$

kétrétű leképezést. Az alapfüggvény pedig legyen a $\phi(x) := x$ ($x \in X$) identitás.

A Csebisev-polinomok $T_{2^n}(x)$ ($x \in X, n \in \mathbb{N}$) részrendszere az $A(x) = T_2(x) = \cos(2 \arccos x)$ kétrétű leképezés önmagával vett iteratív kompozícióiként származtatható:

$$T_{2^n}(x) = A_n(x) \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}). \quad (3.1.6)$$

A fenti állítás teljes indukcióval egyszerűen igazolható.

Definíció szerint $A_1(x) = T_2(x)$. Tegyük fel, hogy az állítást valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén igazoltuk. Ekkor

$$A_{n+1}(x) = A(A_n(x)) = \cos(2 \arccos(A_n(x))) = \cos(2 \arccos(\cos(2^n \arccos x))) = \cos(2^{n+1} \arccos x).$$

A $\phi_n = T_{2^n}$ ($n \in \mathbb{N}$) rendszer

$$\psi_m = \prod_{k=0}^{n-1} \phi_k^{m_k},$$

szorzatrendszerének előállításában az m_k kitevők az m index bináris jegyei, azaz $m_k \in \{0, 1\}$ és $m = \sum_{k=0}^{n-1} m_k 2^k$.

(A 3.1.3)-ban bemutatott speciális esetben a ϕ_n rendszer az eredeti *Rademacher-rendszer*, a ψ_m ($m \in \mathbb{N}$) szorzatrendszer pedig az ortonormált *Walsh-Paley rendszer* lenne.

A $\phi_n = T_{2^n}$ függvények ψ_m szorzatrendszerének elemei m -edfokú polinomok, de ezek akkor és csak akkor esnek egybe a megfelelő indexű Csebisev-polinommal, ha m kettőhatvány.

Mivel a Csebisev-polinomok nem alkotnak UDMD-rendszert, ezért a szorzatrendszer nem ortonormális.

Egy másik, Ψ_m ($m \in \mathbb{N}$) szorzatrendszert konstruáltunk, amely biortogonális párt alkot az eredeti ψ_m ($m \in \mathbb{N}$) rendszerrel az X^n halmazon

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2^n} \sum_{x \in X^n} f(x)g(x). \quad (3.1.7)$$

diszkrét skaláris szorzatára nézve.

3.1.2. Tétel (KB[45]). *Legyen $\Phi_k = 2\phi_k / (\phi_{k+1} + 1)$ ($k \in \mathbb{N}$) és jelölje Ψ_m az így származtatott rendszer szorzatrendszerét:*

$$\Psi_m = \prod_{k=0}^{n-1} \Phi_k^{m_k} \quad (0 \leq m < 2^n).$$

Ekkor a $(\psi_m, 0 \leq m < 2^n)$ és a $(\Psi_m, 0 \leq m < 2^n)$ rendszerek biortogonálisak, azaz

$$\langle \psi_k, \Psi_\ell \rangle = \delta_{k\ell} \quad (0 \leq k, \ell < 2^n). \quad (3.1.8)$$

A tétel bizonyítására később visszatérünk. Egyelőre annyit jegyeznénk meg, hogy a fenti konstrukció során a $\phi_{k+1}(t) + 1$ nevező az X^n diszkrét halmazon semelyik t pontjában nem egyenlő nullával.

3.1.3. Definíció. A $(\psi_m, m \in \mathbb{N})$ és a $(\Psi_m, m \in \mathbb{N})$ szorzatrendszerek vegyes Dirichlet-féle magfüggvényét az alábbiak szerint értelmezzük

$$D_{2^n}(s, t) := \sum_{m=0}^{2^n-1} \psi_m(s) \Psi_m(t) \quad (s, t \in X^n). \quad (3.1.9)$$

3.1.4. Definíció. Tetszőleges $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény esetén bevezethető a függvény

$$S_{2^n} f := \sum_{m=0}^{2^n-1} \langle f, \Psi_m \rangle \psi_m$$

biortogonális sorfejtése.

Nyilvánvaló, hogy $S_{2^n} f$ egy $2^n - 1$ -edfokú polinom.

3.1.5. Tétel (KB[45]). *A szorzatrendszerek (3.1.9)-ben definiált vegyes magfüggvényére igaz a következő tulajdonság:*

$$D_{2^n}(s, t) = 2^n \delta_{st} \quad (s, t \in X^n).$$

Továbbá az $S_{2^n} f$ biortogonális sorfejtés interpolálja az f függvényt az X^n halmazon, azaz

$$(S_{2^n} f)(x) = f(x) \quad (x \in X^n).$$

Bizonyítás. A vegyes magfüggvény

$$D_{2^n}(s, t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_k(s) \Psi_k(t) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \phi_k(s) \frac{2\phi_k(t)}{\phi_{k+1}(t) + 1} \right)$$

szorzatalakját felírva, az alábbi esetszétválasztást végezhetjük.

Ha $s \neq t$, akkor létezik a pontoknak egy első közös őse, amit jelöljünk x -szel. Ekkor létezik p index ($0 \leq p \leq n-1$), hogy $x' := A^p(s) \neq A^p(t) =: x''$, de $x = A^{p+1}(s) = A^{p+1}(t)$.

Ekkor a Dirichlet magfüggvény szorzatalakjának p -edik tényezője

$$1 + \phi_p(s) \frac{2\phi_p(t)}{\phi_{p+1}(t) + 1} = 1 + x' \frac{2x''}{x+1}. \quad (3.1.10)$$

alakban írható.

Mivel $x = A(x') = A(x'')$, ezért x' és x'' a $2z^2 - 1 = x$ másodfokú egyenlet gyökeiként kaphatók, így

$$x' \cdot x'' = z_1 \cdot z_2 = \frac{-x-1}{2}.$$

A kapott eredményt (3.1.10) egyenletbe visszaírva a tényezőre

$$1 + \frac{2 \frac{-x-1}{2}}{x+1} = 0$$

adódik, ahonnan következik, hogy a szorzat nullával egyenlő.

Az $s = t$ esetben vezessük be az $x' := \phi_k(s) = \phi_k(t)$ és $x := \phi_{k+1}(t) = 2x'^2 - 1$ jelöléseket. Ekkor a szorzat minden tényezője

$$1 + \frac{2x'^2}{x+1} = 1 + \frac{x+1}{x+1} = 2,$$

így a szorzat 2^n -nel egyenlő.

Fontos ismételten kiemelni, hogy az $S_n f$ biortogonális sorfejtés egy n -edfokú polinom, így egy speciális interpolációs polinomot állítottunk elő. \square

Most már visszatérhetünk a 3.1.2. tétel bizonyítására.

Bizonyítás. A tétel a 3.1.5. tétel következménye.

A Dirichlet-magfüggvényre kapott

$$D_{2^n}(s, t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \psi_k(s) \Psi_k(t) = 2^n \delta_{st} \quad (3.1.11)$$

összefüggést mátrix-egyenlet formájában fogjuk felírni, amihez vezessük be a következő jelöléseket.

Legyen $A = [\psi_k(s)]_{k=0}^{2^n-1}$, $(s \in X_n)$ és $B = [\Psi_k(s)]_{k=0}^{2^n-1}$, $(s \in X_n)$. Ekkor a (3.1.11) egyenlőség az alábbi alakban írható:

$$AB = 2^n I,$$

ahol $I \in \mathbb{R}^{2^n \times 2^n}$ az egységmátrix.

Az adjungálás műveleti tulajdonságait kihasználva kapható a következő összefüggés:

$$B^* A^* = 2^n I,$$

melynek részletes kiírása után azonnal adódik a bizonyítandó biortogonalitás:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{s \in X_n} \psi_k(s) \Psi_l(s) = \delta_{kl}.$$

□

A

$$c_m := \langle f, \Psi_m \rangle \quad (0 \leq m < 2^n)$$

együtthetők számolására FFT-algoritmust használva $O(n2^n)$ műveletre van szükség és ugyanennyi műveletet igényel a rekonstrukció is.

3.2. Walsh-szerű rendszerek konstrukciója

Ebben az alfejezetben kétrétű leképezésekből kiindulva konstruálunk Walsh-szerű rendszereket. Az itt definiált rendszerek speciális esetként adják vissza az előző alfejezetben tárgyalt rendszereket és az általános esetben is megőrzik azt a tulajdonságot, hogy a Walsh-Fourier együtthetők egy általánosított Gyors-Fourier transzformációval számolhatók, a biortogonális sorfejtés segítségével most is hatékony és adaptív interpolációs eljárás definiálható. Az alfejezet a [46] cikk alapján készült.

3.2.1. Motiváció

Az r_n ($n \in \mathbb{N}$) Rademacher-függvények származtathatók az r alapfüggvényből dilatáció segítségével:

$$r_n(x) := r(2^n x) \quad (x \in [0,1), n \in \mathbb{N}),$$

ahol

$$r(x) := \begin{cases} 1, & x \in [k, k + \frac{1}{2}), k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1), k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Bevezetve az $A(x) = 2x \pmod{1}$ ($x \in [0,1)$) kétrétű leképezést az r_n függvény az $r_0 = r, r_{n+1} = r \circ A$ ($n \in \mathbb{N}$) rekurzióval származtatható. Mint azt korábban említettük, a Walsh-Paley rendszer a Rademacher-rendszer szorzatrendszereként is előállítható, azaz

$$w_m = \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{m_k}, \quad m = \sum_{k=0}^{\infty} m_k 2^k, \quad m_k \in \{0, 1\}. \quad (3.2.2)$$

A w_m ($m \in \mathbb{N}$) Walsh-rendszer teljes ortonormált rendszer a szokásos

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot \bar{g}(t) dt \quad (3.2.3)$$

skaláriszorzatra nézve.

Tekintsük a w_m ($m < 2^N$) részrendszert. A részrendszer ortonormált az alábbi diszkrét skaláris szorzatra nézve:

$$[f, g]_{X_N} = \frac{1}{2^N} \sum_{x \in X_N} f(x) \cdot \bar{g}(x), \quad (3.2.4)$$

ahol X_N a következő diszkretizációs ponthalmaz:

$$X_N = \left\{ \frac{k}{2^N} : 0 \leq k < 2^N \right\}. \quad (3.2.5)$$

A diszkrét Walsh-rendszer szintén teljes az $f : X_N \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét függvények terén.

Gyors Walsh Transzformációval (FWT) a $c_n(f) = [f, w_n]_{X_N}$ ($0 \leq n < 2^N$) diszkrét Walsh-Fourier együtthatók (DWFC) $\mathcal{O}(N \cdot 2^N)$ művelettel számolhatók. Az $f : X_N \rightarrow \mathbb{R}$ diszkrét függvény diszkrét Walsh-Fourier együtthatóiból való előállítására ugyanennyi műveletre van szükségünk, azaz a Walsh dekompozícióhoz illetve a Walsh rekonstrukcióhoz ugyanannyi műveletre van szükség, mint a diszkrét Fourier transzformációhoz FFT algoritmust használva.

3.2.2. A Rademacher-rendszer általánosítása

A Walsh-rendszer konstrukciójának általánosításához először a Rademacher-rendszer alapfüggvényének általánosítását fogjuk megadni. Ehhez a következő fogalmakra van szükségünk.

Legyen $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ egy valós intervallum. Az $A : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ leképezést kétrétű leképezésnek nevezzük, ha minden $y \in \mathcal{I}$ esetén pontosan két olyan pont létezik, melyeknek képe az A leképezésben y , azaz létezik $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$, $x_1 \neq x_2$, hogy

$$A(x_1) = A(x_2) = y, \quad (3.2.6)$$

ezt a két pontot az y elem ősképeinek fogjuk nevezni.

A $\varphi^{(0)}$, $[\varphi^{(1)}]$ függvényt páros [páratlan] függvénynek nevezzük az A kétrétű leképezésre nézve, ha minden y pont két ősképeben ($A(x') = A(x'') = y$ és $x' \neq x''$) a függvényértékekre

$$\varphi^{(j)}(x') = (-1)^j \varphi^{(j)}(x'') \quad (j = 0, 1) \quad (3.2.7)$$

teljesül.

Legyen A_0 az identikus leképezés az \mathcal{I} intervallumon. Készítsük el az A leképezés önmagával vett iteratív kompozícióit, azaz legyen $A_{n+1}(x) := A(A_n(x))$ minden $x \in \mathcal{I}$ esetén.

Nyilvánvaló, hogy az $A_n : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ leképezés egy 2^n -rétű leképezés.

A $\varphi_n^{(1)}(x) := \varphi^{(1)}(A_n(x))$ ($n \in \mathbb{N}$) függvényeket Rademacher-szerű függvényeknek nevezzük.

Konstrukciónkban az A kétrétű leképezés hasonló szerepet fog betölteni, mint az eredeti Rademacher-konstrukcióban a $2x \pmod{1}$ függvény, az r alapfüggvény szerepét pedig a $\varphi^{(1)}$ páratlan függvény veszi át.

A következőkben a szorzatrendszer definícióját is általánosítani fogjuk. Induljunk ki rendezett függvénpárok alábbi rendszeréből:

$$\phi_n = \{\varphi_n^{(0)}, \varphi_n^{(1)}\}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.2.8)$$

Ekkor a

$$\Phi_\ell := \prod_{k=0}^{N-1} \varphi_k^{(\ell_k)}, \quad \ell = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k \cdot 2^k, \quad \ell_k \in \{0, 1\}$$

rendszer a (3.2.8) rendszer általánosított szorzatrendszerének nevezzük.

A fenti definíció valóban a szorzatrendszer fogalmának általánosítása, hiszen $\varphi_m^{(0)} = 1$ választás mellett a hagyományos szorzatrendszer definícióhoz jutunk. Így, ha az említett speciális esetben a Rademacher-szerű függvényeket az eredeti Rademacher-rendszer megfelelő elemeire cseréljük ($\varphi_m^{(1)} = r_m$) visszkapjuk az eredeti Walsh-Paley rendszert.

Jelölje $\{\Phi_\ell, 0 \leq \ell < 2^N\}$ a $\{\phi_n, 0 \leq n < N\}$ rendszer szorzatrendszerét és $\{\Psi_\ell, 0 \leq \ell < 2^N\}$ az $\{\Upsilon_n = \{\psi_n^{(0)}, \psi_n^{(1)}\}, 0 \leq n < N\}$ rendszer szorzatrendszerét. Ekkor a szorzatrendszerek vegyes Dirichlet-féle magfüggvénye:

$$D_{2^N}(s, t) := \sum_{\ell=0}^{2^N-1} \Phi_\ell(s) \bar{\Psi}_\ell(t). \quad (3.2.9)$$

A szorzatrendszerek definícióját felhasználva a vegyes Dirichlet magfüggvényre az alábbi explicit formula írható:

$$D_{2^N}(s, t) = \sum_{\ell=0}^{2^N-1} \Phi_\ell(s) \bar{\Psi}_\ell(t) = \sum_{\ell=0}^{2^N-1} \prod_{k=0}^{N-1} \varphi_k^{(\ell_k)}(s) \cdot \bar{\psi}_k^{(\ell_k)}(t) = \prod_{k=0}^{N-1} \left(\varphi_k^{(0)}(s) \cdot \bar{\psi}_k^{(0)}(t) + \varphi_k^{(1)}(s) \cdot \bar{\psi}_k^{(1)}(t) \right).$$

A Rademacher-szerű függvények tehát az alábbi módon definiálhatók:

$$\phi_n(x) = \{\varphi_n^{(0)}(x), \varphi_n^{(1)}(x)\} := \{\varphi^{(0)}(A_n(x)), \varphi^{(1)}(A_n(x))\}. \quad (3.2.10)$$

Egy rögzített $x_0 \in \mathcal{I}$ pont A_N leképezésben vett 2^N különböző ősképeinek halmaza legyen

$$Y_N := \{x \in \mathcal{I} : A_N(x) = x_0\} = \{x_k^N : k = 0, 1, \dots, 2^N - 1\}. \quad (3.2.11)$$

A függvényeket a fenti Y_N halmazra szűkítve az általános szorzatrendszer diszkretizálható.

Jelölje $\{\Phi_\ell, 0 \leq \ell < 2^N\}$ a (3.2.10)-ben definiált $\{\phi_n = \{\varphi_n^{(0)}, \varphi_n^{(1)}\}, 0 \leq n < N\}$ rendszer általánosított szorzatrendszerét, azaz

$$\Phi_\ell := \prod_{k=0}^{N-1} \varphi_k^{(\ell_k)}, \quad \ell = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k \cdot 2^k, \quad \ell_k \in \{0,1\}. \quad (3.2.12)$$

Tegyük fel, hogy az Y_N diszkrét halmaz pontjaiban sem $\varphi^{(0)}$, sem pedig $\varphi^{(1)}$ nem tűnik el, azaz minden $x \in Y_N$ esetén $\varphi^{(0)}(x) \neq 0$ és $\varphi^{(1)}(x) \neq 0$. Kezdjük újra a konstrukciós eljárást az alábbi függvénpárból kiindulva:

$$\Upsilon := \{\psi^{(0)}, \psi^{(1)}\} = \left\{ \frac{1}{\varphi^{(0)}}, \frac{1}{\varphi^{(1)}} \right\}. \quad (3.2.13)$$

Jelölje $\{\Psi_\ell, 0 \leq \ell < 2^N\}$ az

$$\Upsilon_n(x) = \{\psi_n^{(0)}(x), \psi_n^{(1)}(x)\} = \{\psi^{(0)}(A_n(x)), \psi^{(1)}(A_n(x))\} \quad (0 \leq n < N) \quad (3.2.14)$$

rendszer általánosított szorzatrendszerét, azaz

$$\Psi_\ell := \prod_{k=0}^{N-1} \psi_k^{(\ell_k)}, \quad \ell = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k \cdot 2^k, \quad \ell_k \in \{0,1\}. \quad (3.2.15)$$

3.2.1. Tétel (KB[46]). *A fent definiált általánosított szorzatrendszerek – $\{\Phi_\ell, 0 \leq \ell < 2^N\}$, amit a (3.2.12) összefüggéssel definiáltunk és $\{\Psi_\ell, 0 \leq \ell < 2^N\}$, melynek definíciója (3.2.15)-ben található – biortogonálisak az Y_N halmaz diszkrét skalárisszorzatára nézve, azaz*

$$[\Phi_\ell, \Psi_m]_{Y_N} = \delta_{\ell m} \quad (0 \leq \ell, m < 2^N).$$

Bizonyítás. Tekintsük a szóban forgó szorzatrendszerek vegyes Dirichlet-féle magfüggvényét:

$$D_{2^N}(s, t) := \sum_{m=0}^{2^N-1} \Phi_m(s) \cdot \bar{\Psi}_m(t) \quad (s, t \in Y_N). \quad (3.2.16)$$

A bizonyítandó biortogonalitás ekvivalens a Dirichlet magfüggvény következő tulajdonságával:

$$D_{2^N}(s, t) = 2^N \delta_{s,t} \quad (s, t \in Y_N). \quad (3.2.17)$$

A Dirichlet-féle magfüggvény korábban már felírt szorzatalakjának és a szorzatrendszerek definícióinak felhasználásával, kihasználva a (3.2.13) kapcsolatot, a

$$\begin{aligned} D_{2^N}(s, t) &= \sum_{m=0}^{2^N-1} \Phi_m(s) \cdot \bar{\Psi}_m(t) = \prod_{k=0}^{N-1} \left(\varphi_k^{(0)}(s) \cdot \bar{\psi}_k^{(0)}(t) + \varphi_k^{(1)}(s) \cdot \bar{\psi}_k^{(1)}(t) \right) = \\ &= \prod_{k=0}^{N-1} \left(\varphi_k^{(0)}(s) \cdot \frac{1}{\varphi_k^{(0)}(t)} + \varphi_k^{(1)}(s) \cdot \frac{1}{\varphi_k^{(1)}(t)} \right) \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

alakot kaphatjuk, melyet esetszétválasztással vizsgálunk tovább.

Az $s = t$ esetben a szorzat minden tényezőjére, azaz minden m ($0 \leq m < 2^N$) esetén

$$\varphi_m^{(0)}(s) \cdot \frac{1}{\varphi_m^{(0)}(t)} = \varphi_m^{(1)}(s) \cdot \frac{1}{\varphi_m^{(1)}(t)} = 1 \quad (3.2.19)$$

adódik, ahonnan $D_{2^N}(s, t) = 2^N$.

Ha $s \neq t$, akkor létezik s -nek és t -nek egy első közös őse, nevezzük ezt x -nek és ennek kapcsán létezik egy p ($0 \leq p < N$) index, hogy

$$x' = A_p(s) \neq A_p(t) = x'', \quad (3.2.20)$$

ugyanakkor $x = A_{p+1}(s) = A_{p+1}(t)$.

Tudjuk, hogy a $\varphi^{(0)}$ az A leképezésre nézve páros függvény, azaz $\varphi^{(0)}(x') = \varphi^{(0)}(x'')$ és mivel $\varphi^{(1)}$ páratlan függvény ugyanerre az A leképezésre nézve, ezért $\varphi^{(1)}(x') = -\varphi^{(1)}(x'')$. Innen

$$\begin{aligned} \varphi_p^{(0)}(s) \cdot \frac{1}{\varphi_p^{(1)}(t)} + \varphi_p^{(1)}(s) \cdot \frac{1}{\varphi_p^{(1)}(t)} &= \varphi^{(0)}(A_p(s)) \cdot \frac{1}{\varphi^{(0)}(A_p(t))} + \varphi^{(1)}(A_p(s)) \cdot \frac{1}{\varphi^{(1)}(A_p(t))} = \\ &= \varphi^{(0)}(x') \cdot \frac{1}{\varphi^{(0)}(x'')} + \varphi^{(1)}(x') \cdot \frac{1}{\varphi^{(1)}(x'')} = 1 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a (3.2.18) szorzat egyik tényezője nulla, így tehát maga a szorzat is: $D_{2^N}(s, t) = 0$, ha $s \neq t$. \square

3.2.2. Tétel (Interpolációs formula, KB[46]). *Legyen*

$$S_{2^N} f := \sum_{m=0}^{2^N-1} [f, \Psi_m]_{Y_N} \psi_m \quad (3.2.22)$$

a biortogonális szorzatrendszer-pár szerinti biortogonális sorfejtés 2^N -edik részletösszege. Ekkor az $S_{2^N} f$ interpolálja az f függvényt az Y_N halmaz pontjain, azaz

$$(S_{2^N} f)(x) = f(x), \quad x \in Y_N. \quad (3.2.23)$$

Bizonyítás. A diszkrét skaláris szorzat definícióját és a vegyes Dirichlet-féle magfüggvény 3.3.11. Tétel bizonyítása során belátott tulajdonságát felhasználva minden $x \in Y_N$ esetén az alábbi összefüggésre jutunk:

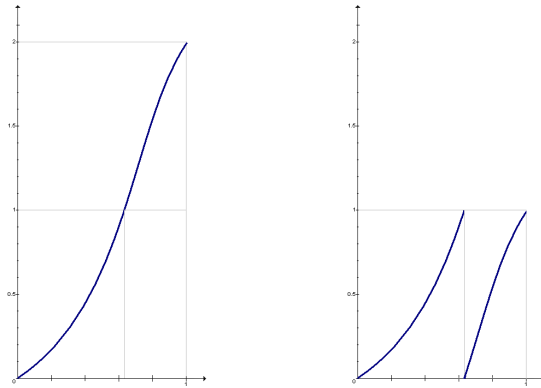
$$\begin{aligned} S_{2^N} f(x) &= \sum_{m=0}^{2^N-1} [f, \Psi_m]_{Y_N} \psi_m(x) = \sum_{m=0}^{2^N-1} \left(\frac{1}{2^N} \sum_{y \in Y_N} f(y) \bar{\Psi}_m(y) \right) \psi_m(x) = \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{y \in Y_N} f(y) \sum_{m=0}^{2^N-1} \psi_m(x) \bar{\Psi}_m(y) = \frac{1}{2^N} \sum_{y \in Y_N} f(y) D_{2^N}(x, y) = f(x). \end{aligned}$$

\square

3.2.3. Példák

A fent bemutatott konstrukció meglehetősen általános. Megfelelő, speciális ϕ függvények használatával visszanyerhetjük a jólismert ortonormált vagy biortogonális szorzatrendszerünket, de új, adaptív biortogonális rendszereket is konstruálhatunk a vizsgált problémához igazodva.

- I. Legyen $\gamma: [0, 1) \rightarrow [0, 2)$ szigorúan monoton folytonos bijekció és $\gamma_1(x) := \{\gamma(x)\}$, ahol $\{a\}$ jelöli az a valós szám törtrészét. Szokás a γ_1 függvényre a $\gamma_1(x) = \gamma(x) \pmod{1}$ jelölést használni. A $\gamma_1: [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ függvény $\mathcal{I} = [0, 1)$ intervallumon kétrétű leképezés.

A γ függvény és az általa generált γ_1 kétrétű leképezés

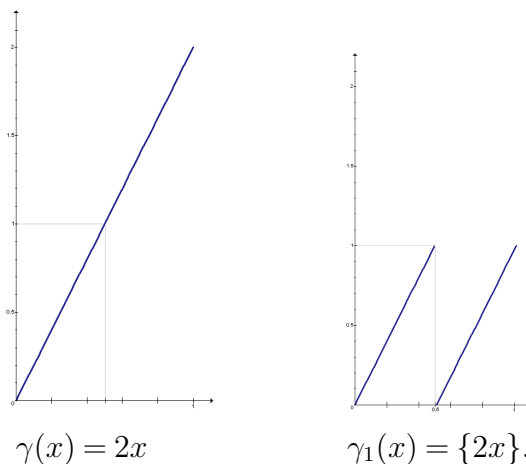
A konstrukció folytatásához szükségünk lesz egy páros $\varphi^{(0)}$ és egy páratlan $\varphi^{(1)}$ függvényre a most bevezetett kétrétű γ_1 leképezésre nézve. Legyen $\xi \in [0, 1)$ az a pont, amelyre $\gamma(\xi) = 1$. A ξ pont két részintervallumra bontja a $[0, 1)$ intervallumot, nevezetesen legyen \mathcal{I}_1 a $[0, \xi)$ intervallum és \mathcal{I}_2 a $[\xi, 1)$ intervallum. A φ függvény \mathcal{I}_1 intervallumon vett értékei egyértelműen meghatározzák az \mathcal{I}_2 intervallumon vett értékeket.

Speciálisan, ha $\varphi^{(0)}(x) = 1$ minden $x \in [0, 1)$ esetén és

$$\varphi^{(1)}(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \xi \\ -1, & \xi \leq x < 1 \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases} \quad (3.2.24)$$

egy ortonormált rendszerhez jutunk.

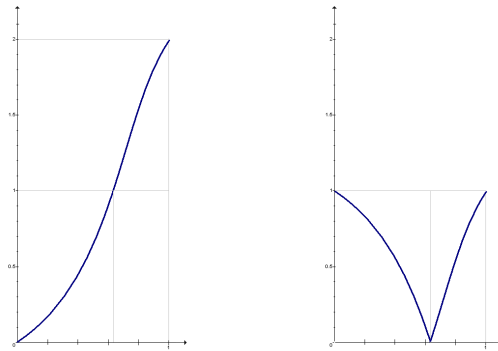
- Tovább konkretizálva, ha a $\gamma(x) = 2x$ függvényt használjuk a kétrétű leképezés létrehozására, az alábbi függvényekhez jutunk.



Az így megadott γ_1 úgynevezett fűrészfog-függvényt használva kétrétű leképezésként, akkor a fenti speciális esetben felírt ϕ függvényből kiindulva a konstrukció az eredeti Rademacher-rendszert állítja elő, majd pedig annak általánosított szorzatrendszereként megkaphatjuk a Walsh-rendszert.

- Az eljárásunk ugyanakkor alkalmas egy könnyen hangolható adaptív interpolációs eljárás konstruálására is. A példa kedvéért tegyük fel, hogy a vizsgálandó függvény tulajdonságaira az \mathcal{I} intervallum második felében vagyunk kíváncsiak. Ekkor olyan Y_N diszkrét pontrendszerre van szükségünk, amelynek pontjai az intervallum második felében sűrűbben helyezkednek el. Ha a γ_1 kétrétű leképezésünket egy olyan γ függvényből származtatjuk, ahol ha $\xi \gg \frac{1}{2}$, akkor a pontok sűrűsége az \mathcal{I}_2 sokkal nagyobb lesz, mint az \mathcal{I}_1 -en, hiszen Y_N -nek ugyanannyi pontja van mindkét részintervallumon.

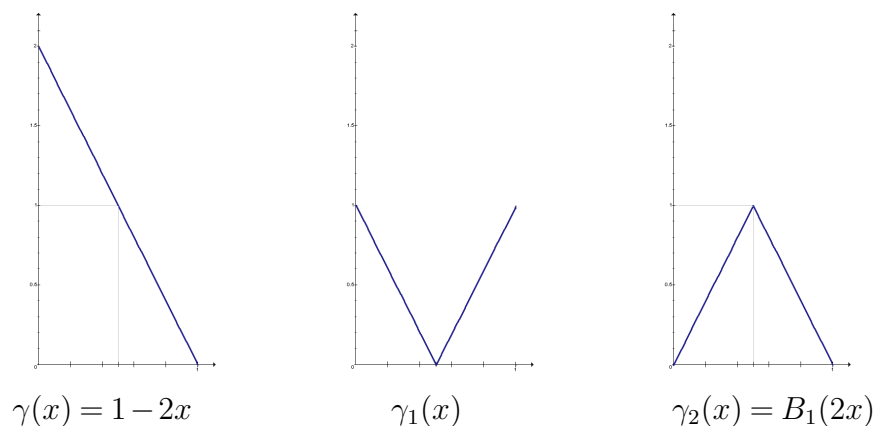
II. Legyen $\gamma : [0, 1) \rightarrow [0, 2)$ most is szigorúan monoton folytonos bijekció, de $\gamma_1(x) := |\gamma(x) - 1|$.



A γ függvény és a belőle származtatott γ_1 függvény

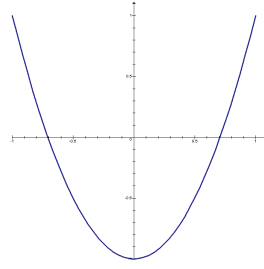
A ϕ alapfüggvény az előző esethez hasonlóan választható.

- Speciálisan, ha $\gamma(x) = 1 - 2x$, akkor $\gamma_1(x) := |\gamma(x) - 1|$ is egy kétrétű leképezés a $(0, 1]$ intervallumon, de generálható a $[0, 1)$ -en kétrétű leképezés a $\gamma_2 := 1 - \gamma_1$ transzformációval, így a jól ismert B_1 Basic-splinehoz jutunk.



A konstrukciót a γ_2 kétrétű leképezésre építve a Schauder-függvényeket kapjuk vissza.

- III. Tekintsük az $\mathcal{I} = (-1, 1)$ intervallumon értelmezett $A(x) = 2x^2 - 1$ kétrétű leképezést. Ha a konstrukció során a $\varphi^{(0)}(x) = 1$ és a $\varphi^{(1)}(x) = \varphi(x) = x$ alapfüggvényeket használjuk, akkor a [45] cikkben bemutatott Walsh-Csebisev rendszert állíthatjuk elő.



$$A(x) = T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Az említett cikkben a

$$\varphi_k(x) = \varphi(A_k(x)) = T_{2^k}(x) = \cos(2^k \arccos x), \quad x \in \mathcal{I}$$

függvényeket állítottuk elő. A 3.2.13 konstrukciót és a 3.3.11.Tétel állítását használva ugyanazt a biortogonális párt állíthatjuk elő, amelyet a [45] cikkben a konkrét függvényrendszer speciális tulajdonságait kihasználva kaptunk.

Szintén a [45] cikkben igazoltuk, hogy a

$$\Phi_k = \frac{2\varphi_k}{\varphi_{k+1} + 1}$$

rendszer Ψ_m szorzatrendszere biortogonális a φ_k rendszer ψ_m szorzatrendszerére a Csebisev-abszcisszák X_N halmazának diszkrét skalárisszorzatára nézve.

Legyen $\psi^{(0)} = 1$ és $\psi^{(1)} = \frac{1}{\varphi^{(1)}}$, ahogyan a 3.3.11.Tétel szerint szükséges.

$$\begin{aligned} \psi_k^{(1)}(x) &= \frac{1}{\varphi_k(x)} = \frac{1}{\varphi_k(x)} = \frac{1}{\cos(2^k \arccos x)} = \frac{2 \cos(2^k \arccos x)}{2 \cos^2(2^k \arccos x)} = \\ &= \frac{2 \cos(2^k \arccos x)}{\cos^2(2^k \arccos x) - \sin^2(2^k \arccos x) + \cos^2(2^k \arccos x) + \sin^2(2^k \arccos x)} = \\ &= \frac{2 \cos(2^k \arccos x)}{\cos(2 \cdot (2^k \arccos x)) + 1} = \frac{2\varphi_k(x)}{\varphi_{k+1}(x) + 1}. \end{aligned}$$

3.2.3. *Megjegyzés.* A III. Példa az \mathcal{I} transzformációjával a II. Példából is származtatható.

IV. Legyen $a \in \mathbb{D}$ és $z \in \mathbb{T}$, azaz a a komplex nyílt körlemezről, z pedig az egységkörből. Ekkor a

$$B_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

függvényeket Blaschke-függvényeknek nevezzük. Tudjuk [29], hogy

$$B_a(e^{it}) = e^{i\beta_a(t)},$$

ahol

$$\beta_a(t) = \theta + \phi + \gamma_s(t - \phi), \quad s := \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right), \quad (a = (re^{i\phi}, e^{i\theta}) \in \mathbb{B}, t \in \mathbb{R})$$

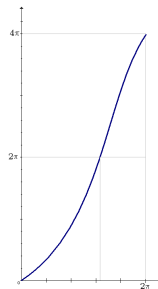
és $\gamma_s(t) := 2 \arctan(e^s \tan t)$. Mivel $\beta_a: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ egy folytonos szigorúan monoton bijekció, ezért, B_a bijektív leképezés a tóruszon.

Legyen B_{a_1} és B_{a_2} két Blaschke-függvény. Ekkor

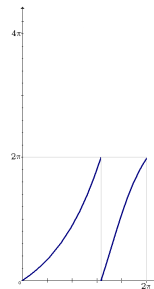
$$B_{a_1}(z) \cdot B_{a_2}(z) = e^{i(\beta_{a_1}(t) + \beta_{a_2})(t)} = e^{i\beta(t)},$$

ahol $\beta: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 4\pi]$ folytonos szigorúan monoton bijekció.

Legyen $\beta_1(t) := \beta(t) \pmod{2\pi}$. Nyilvánvaló, hogy $\beta_1: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ kétrétű leképezés.



a $\beta(x)$ függvény



a $\beta_1(x)$ függvény

Az

$$A(t) = e^{i\beta_1(t)}$$

kétrétű leképezésből kiindulva racionális szorzatrendszereket konstruálhatunk.

3.2.4. További lehetőségek az általánosításra

- I. Az eredeti konstrukcióban az A_n 2^n -rétű leképezést az A kétrétű leképezés önmagával vett iteratív kompozíciójaként kaptuk. Ehelyett használhatunk egy kétrétű leképezésekből álló (a_n) sorozatot és ekkor a 2^n -rétű leképezés $A_n = a_n \circ a_{n-1} \circ \dots \circ a_1$ kompozícióként kapható.
- II. Tovább általánosítható a szorzatrendszer definíciója is. Legyen $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$ egész szám és a függvénypárok rendszere helyett induljunk ki a rendezett függvény m -esek alábbi rendszeréből:

$$\phi_n = \{\varphi_n^{(0)}, \varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(m-1)}\}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.2.25)$$

Ekkor a

$$\Phi_\ell := \prod_{k=0}^{N-1} \varphi_k^{(\ell_k)}, \quad \ell = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k \cdot m^k, \ell_k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

rendszer lesz a (3.2.25) rendszer általánosított szorzatrendszere. Speciálisan $m = 2$, $\varphi_n^{(0)} = 1$ és $\varphi_n^{(1)} = \varphi_n$ választás mellett visszanyerhető a szorzatrendszer eredeti definíciója.

Jelölje $\{\Phi_\ell, 0 \leq \ell < m^N\}$ a $\{\phi_n, 0 \leq n < N\}$ rendszer általánosított szorzatrendszerét és $\{\Psi_\ell, 0 \leq \ell < m^N\}$ az $\{\Upsilon_n = \{\psi_n^{(0)}, \psi_n^{(1)}, \dots, \psi_n^{(m-1)}\}, 0 \leq n < N\}$ rendszerét. Ekkor a szorzatrendszerek vegyes Dirichlet-féle magfüggvénye az alábbi alakban írható:

$$D_{m^N}(s, t) := \sum_{\ell=0}^{m^N-1} \Phi_\ell(s) \bar{\Psi}_\ell(t). \quad (3.2.26)$$

3.2.4. *Megjegyzés.* A vegyes Dirichlet-féle magfüggvény ebben az esetben is felírható szorzatalakban is:

$$D_{m^N}(s, t) = \sum_{\ell=0}^{m^N-1} \Phi_\ell(s) \bar{\Psi}_\ell(t) = \sum_{\ell=0}^{m^N-1} \prod_{k=0}^{N-1} \varphi_k^{(\ell_k)}(s) \cdot \bar{\psi}_k^{(\ell_k)}(t) = \prod_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{m-1} \varphi_k^{(j)}(s) \cdot \bar{\psi}_k^{(j)}(t).$$

3.3. Kétváltozós Walsh-szerű rendszerek és tulajdonságaik

A szorzatrendszer definíciójának további általánosításával fogunk biortogonális Walsh-szerű rendszereket konstruálni. A diszkrét biotogonális sorfejtésről be fogjuk látni, hogy az alappontokon interpolálja a függvényt. Az ilyen rendszerekre vonatkozó diszkrét Fourier-együtthatók és a rekonstrukció során az alappontokon vett függvényértékek egy általánosított Gyors Fourier Transzformációval számolhatók, hatékony interpolációs eljárást adva felületek közelítésére.

Korábbi konstrukciónk az X nem üres halmaz $A : X \rightarrow X$ kétrétű leképezéséből és az $r : X \rightarrow \mathbb{C}$ alapfüggvényből kiindulva iteratív függvénykompozíciót használva Rademacher-szerű rendszereket állított elő.

Legyen tehát $A_0(x) := x$, $A_{n+1}(x) := A(A_n(x))$ ($x \in X, n \in \mathbb{N}$); ekkor az $r_n(x) = r(A_n(x))$ ($x \in X, n \in \mathbb{N}$) rendszert neveztük Rademacher-szerű rendszernek.

A függvények diszkrétizálásához bevezettük az x_0 rögzített elem A_N 2^N -rétű leképezésben vett ősképeinek $X_N := \{x \in X \mid A_N(x) = x_0\} = \{x_k^N \mid k = 0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ halmazát.

A Rademacher-szerű rendszer

$$w_\ell := \prod_{k=0}^{N-1} r_k^{\ell_k}, \quad \ell = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k \cdot 2^k, \quad \ell_k \in \{0, 1\}$$

szorzatrendszerét Walsh-szerű rendszernek neveztük, majd az előbb bemutatott eljárással a w_ℓ ($0 \leq \ell < 2^N$) rendszerhez biortogonális párt konstruáltunk a X_N diszkrét halmazon.

Az általánosított konstrukció alkalmas kétváltozós függvények közelítésére interpoláció segítségével.

Az alfejezet a 2010. nyarán tartott MaCS8. előadás és az annak anyagát tartalmazó [47] cikk alapján készült.

3.3.1. Általánosított szorzatrendszer

Induljunk ki most is az $X \neq \emptyset$ halmazból és tekintsünk néhány, ezen a halmazon értelmezett függvényt: $f_n^{(j)} : X \rightarrow \mathbb{C}$ ($0 \leq j < m, 0 \leq n < N$), ahol $N, m \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}$ és $m \geq 2$.

Tekintsük ilyen függvényeknek az alábbi véges rendezett halmazát:

$$\mathcal{F}_n = \{f_n^{(0)}, f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(m-1)}\}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.3.1)$$

3.3.1. Definíció. Az $\mathcal{F} := \{F_\ell \mid 0 \leq \ell < m^N\}$ rendszert, melynek elemeire

$$F_\ell := \prod_{k=0}^{N-1} f_k^{(\ell_k)}, \quad \ell = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k \cdot m^k, \quad \ell_k \in \{0, 1, \dots, m-1\}, \quad (3.3.2)$$

az $(\mathcal{F}_n, n < N)$ függvény-kollekció által generált **általánosított szorzatrendszernek** nevezzük.

Az $m = 2$ speciális esetben az $f_n^{(0)} \equiv 1$ és $f_n^{(1)} = f_n$ függvényválasztással az eredeti szorzatrendszer definíciójához jutunk.

Az \mathcal{F} általánosított szorzatrendszer az \mathcal{F}_j ($0 \leq j < N$) rendezett függvényhalmazok szorzataként is megkapható:

$$\mathcal{F}_0 \cdot \mathcal{F}_1 \cdots \mathcal{F}_{N-1} = \{F_\ell \mid 0 \leq \ell < m^N\} = \mathcal{F}. \quad (3.3.3)$$

Jelölje $\mathcal{G} := \{G_\ell \mid 0 \leq \ell < m^N - 1\}$ a

$$\mathcal{G}_n = \{g_n^{(0)}, g_n^{(1)}, \dots, g_n^{(m-1)}\}, \quad 0 \leq n < N$$

függvénygyűjtemény általánosított szorzatrendszerét.

Az \mathcal{F} és \mathcal{G} rendszerek **vegyes Dirichlet magfüggvénye** az alábbi alakban írható:

$$D_n(s, t) := \sum_{\ell=0}^{n-1} F_\ell(s) \overline{G}_\ell(t) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3.3.4)$$

A vegyes magfüggvény következő tulajdonsága teljes indukcióval igazolható.

3.3.2. Lemma. *Ha $n = m^N$, akkor az \mathcal{F} és \mathcal{G} szorzatrendszerek vegyes Dirichlet magfüggvénye az alábbi szorzat alakban is felírható:*

$$D_{m^N}(s, t) = \sum_{\ell=0}^{m^N-1} \prod_{k=0}^{N-1} f_k^{(\ell_k)}(s) \cdot \overline{g}_k^{(\ell_k)}(t) = \prod_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{m-1} f_i^{(j)}(s) \cdot \overline{g}_i^{(j)}(t). \quad (3.3.5)$$

A fenti formula a [30]-ban és a [24]-ban bemutatott Paley azonosság általánosítása.

Szükségünk lesz még a kétrétű leképezések általánosítására.

3.3.3. Definíció. Legyen X egy nem üres halmaz és $m \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}$ egy rögzített egész szám. Az $A : X \rightarrow X$ függvényt X halmaz m -**rétű leképezésének** nevezzük, ha minden $y \in X$ elemhez létezik $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in X$, pontosan m darab különböző őskép. Az ősképekre igaz, hogy $A(x_0) = \dots = A(x_{m-1}) = y$, az $y \in X$ elem ősképeinek halmaza tehát:

$$A^{-1}(y) = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}.$$

3.3.4. Definíció. Az $\mathcal{F} := \{f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(m-1)}\}$ és $\mathcal{G} := \{g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(m-1)}\}$ rendszereket az X halmaz A m -**rétű leképezésére nézve biortogonálisnak** nevezzük, ha minden $y \in X$ esetén

$$\frac{1}{m} \sum_{x \in A^{-1}(y)} f^{(i)}(x) \overline{g}^{(j)}(x) = \delta_{ij} \quad (0 \leq i, j < m). \quad (3.3.6)$$

Ha a két rendszer egybeesik, azaz $\mathcal{F} = \mathcal{G}$, akkor azt mondjuk, hogy az \mathcal{F} rendszer **ortogonális az A m -rétű leképezésre nézve**.

A 3.1.2 tételhez hasonlóan igazolható, hogy a (3.3.6) összefüggés ekvivalens a következővel:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(u) \overline{g}^{(i)}(v) = \delta_{uv} \quad (u, v \in A^{-1}(y)). \quad (3.3.7)$$

Az $m = 2$ esetben célszerű a következőket bevezetni.

3.3.5. Definíció. Az $f^{(0)} : X \rightarrow \mathbb{C}$ függvényt A kétrétű leképezésre nézve párosnak nevezzük, ha $A(x') = A(x'')$ esetén $f^{(0)}(x') = f^{(0)}(x'')$ teljesül. Ha az $f^{(1)} : X \rightarrow \mathbb{C}$ függvényre $A(x') = A(x'')$ és $x' \neq x''$ esetén az $f^{(1)}(x') = -f^{(1)}(x'')$ egyenlőség áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy $f^{(1)}$ páratlan az A kétrétű leképezésre nézve.

Könnyen igazolható a következő állítás:

3.3.6. Következmény. Ha az $f^{(0)}$ függvény páros, az $f^{(1)}$ függvény pedig páratlan az A 2-rétű leképezésre nézve, továbbá $|f^{(0)}(x)| = |f^{(1)}(x)| = 1$ minden $x \in X$ esetén, akkor az $\mathcal{F} = \{f^{(0)}, f^{(1)}\}$ rendszer ortogonális az A leképezésre nézve.

A konstrukciónkhoz az A m -rétű leképezés következő iteratív kompozíciójára lesz szükségünk. Legyen A_0 az identikus leképezés X -en és $A_{n+1}(x) := (A \circ A_n)(x) := A(A_n(x))$ minden $x \in X$ esetén. Nyilvánvaló, hogy A_n egy m^n -rétű leképezés az X halmazon.

Az általánosított szorzatrendszer diszkrétizációjához bevezetjük az

$$X_N := \{x \in X : A_N(x) = x_0\} = \{x_k^N \mid k = 0, 1, \dots, m^N - 1\} \quad (3.3.8)$$

diszkrét halmazt és a rajta értelmezett diszkrét skaláris szorzatot:

$$[f, g]_{X_N} := \frac{1}{m^N} \sum_{x \in X_N} f(x) \bar{g}(x) \quad (f, g : X \rightarrow \mathbb{C}). \quad (3.3.9)$$

A biortogonális szorzatrendszer pár előállításához induljunk ki az előbbi \mathcal{F} és \mathcal{G} rendezett függvény halmazokból és az A m -rétű leképezés iterált alkalmazásával hozzuk létre az alábbi rendszereket:

$$\mathcal{F}_n := \{f \circ A_n \mid f \in \mathcal{F}\}, \quad \mathcal{G}_n := \{g \circ A_n \mid g \in \mathcal{G}\}. \quad (3.3.10)$$

Vezessük be az $\mathcal{F} := \{F_\ell, 0 \leq \ell < m^N\}$, illetve a $\mathcal{G} := \{G_\ell, 0 \leq \ell < m^N\}$ jelöléseket az általánosított szorzatrendszerekre, melyeket az $\{\mathcal{F}_n, 0 \leq n < N\}$ illetve a $\{\mathcal{G}_n, 0 \leq n < N\}$ rendszerek generálnak. Azt fogjuk mondani, hogy az \mathcal{F} illetve \mathcal{G} szorzatrendszereket a \mathcal{F} , illetve \mathcal{G} rendezett függvény- m -esek és az A m -rétű leképezés generálta.

3.3.7. Tétel (KB[47]). *Tegyük fel, hogy az \mathcal{F}_n és a \mathcal{G}_n rendszerek biortogonálisak az A m -rétű leképezésre nézve. Ekkor az \mathcal{F} , illetve \mathcal{G} rendezett függvény- m -esek és az A m -rétű leképezés által generált \mathcal{F} illetve \mathcal{G} szorzatrendszerek biortogonálisak az X_N halmaz diszkrét skaláris szorzatára nézve, azaz*

$$[F_\ell, G_k]_{X_N} = \delta_{\ell k} \quad (0 \leq \ell, k < m^N). \quad (3.3.11)$$

Továbbá az általánosított szorzatrendszer vegyes Dirichlet magfüggvénye a következő tulajdonsággal rendelkezik:

$$D_{m^N}(s, t) = m^N \delta_{st} \quad (s, t \in X_N). \quad (3.3.12)$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a (3.3.11) és a (3.3.12) állítások ekvivalensek. Továbbá (3.3.5) alapján

$$D_{m^N}(s, t) = \sum_{\ell=0}^{m^N-1} F_\ell(s) \cdot \bar{G}_\ell(t) = \prod_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{m-1} f_k^{(i)}(s) \cdot \bar{g}_k^{(i)}(t) \quad (3.3.13)$$

kapható.

Ismét esetsztékválasztást alkalmazunk. Ha $s \neq t$, akkor létezik egy y közös őskép és egy p ($0 \leq p < N$) index, hogy

$$y = A_{p+1}(s) = A_{p+1}(t), \quad u := A_p(s) \neq v := A_p(t), \quad u, v \in A^{-1}(y). \quad (3.3.14)$$

Az \mathcal{F}_p illetve a \mathcal{G}_p elemeinek definícióját felhasználva

$$f_p^{(i)}(s) = f^{(i)}(A_p(s)) = f^{(i)}(u), \quad g_p^{(i)}(t) = g^{(i)}(A_p(t)) = g^{(i)}(v)$$

kapható. Ha az eredményt összevetjük (3.3.7) állítással, a

$$\sum_{i=0}^{m-1} f_p^{(i)}(s) \cdot \bar{g}_p^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(u) \cdot \bar{g}^{(i)}(v) = \delta_{uv} = 0.$$

összefüggés adódik.

Ez pedig azt jelenti, hogy a vegyes Dirichlet-féle magfüggvény szorzat alakjában az egyik tényező 0, azaz $D_{m^N}(s, t) = 0$, ha $s \neq t$.

A $t = s$ esetben $u := A_p(s) = v := A_p(t)$ minden $0 \leq p < N$ indexre, továbbá (3.3.7) felhasználásával látható, hogy a szorzat minden tényezője m . \square

A 3.3.7.Tétel és a 3.3.6.Következmény összevetéséből adódik:

3.3.8. Következmény. *Ha a 3.3.6.Következmény feltételei teljesülnek az $\mathcal{F} = \{f^{(0)}, f^{(1)}\}$ rendszerre, akkor az \mathcal{F} általánosított szorzatrendszer, melyet az \mathcal{F} rendszer és az A kétrétű leképezés generál, ortonormált.*

Legyen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ rögzített függvény és tekintsük a 3.3.7.Tételben definiált \mathcal{F} és \mathcal{G} rendszerekre vonatkozó biortogonális sorfejtését. Jelölje a biortogonális sorfejtés n -edik részletösszegét

$$S_n f := \sum_{k=0}^{n-1} [f, G_k]_{X_N} F_k \quad (0 \leq n \leq m^N).$$

Ekkor a (3.3.12) alapján a következő állítás fogalmazható meg:

3.3.9. Következmény. *Az $S_{m^N} f$ részletösszeg interpolálja az f függvényt az X_N halmaz pontjaiban, azaz*

$$(S_{m^N} f)(x) = f(x) \quad (x \in X_N).$$

3.3.2. Szorzatrendszerek Kronecker-szorzata

Az $A_1, A_2 : X \rightarrow X$ függvények A Kronecker-szorzata az $X^2 := X \times X$ halmazon értelmezett és az alábbi módon definiálható:

$$A(x) := (A_1 \diamond A_2)(x) := (A_1(x_1), A_2(x_2)) \quad (x = (x_1, x_2) \in X^2). \quad (3.3.15)$$

Ekkor bármely $y = (y_1, y_2) \in X^2$ elem ősképe az alábbi formában adható meg.

$$A^{-1}(y) = \{(x_1, x_2) \in X^2 \mid A_1(x_1) = y_1, A_2(x_2) = y_2\} = A_1^{-1}(y_1) \times A_2^{-1}(y_2).$$

Ha tehát A_1 és A_2 is m -rétű leképezés az X halmazon, akkor az A egy m^2 -rétű leképezés X^2 -en.

Az $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ komplexértékű függvények **Kronecker-szorzata**:

$$(f \times g)(x) := f(x_1)g(x_2) \quad (x = (x_1, x_2) \in X^2)$$

és az \mathcal{F} és \mathcal{G} **rendezett függvényhalmazok Kronecker-szorzata** az alábbi módon értelmezhető:

$$\mathcal{F} \times \mathcal{G} := \{f \times g \mid f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}.$$

Jelöljük a szokásos módon az

$$\mathcal{F}_k := \{f_k^{(\ell)} : 0 \leq \ell < m\}, \quad \mathcal{G}_k := \{g_k^{(\ell)} : 0 \leq \ell < m\} \quad (0 \leq k < N).$$

rendszerek által generált szorzatrendszereket:

$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_0 \cdot \mathcal{F}_1 \cdots \mathcal{F}_{N-1}, \quad \mathcal{G} := \mathcal{G}_0 \cdot \mathcal{G}_1 \cdots \mathcal{G}_{N-1}.$$

Ekkor a szorzatrendszerek Kronecker-szorzata a generáló rendszerek Kronecker-szorzata által generált szorzatrendszer, azaz

$$\mathcal{F} \times \mathcal{G} = \left(\prod_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}_k \right) \times \left(\prod_{k=0}^{N-1} \mathcal{G}_k \right) = \prod_{k=0}^{N-1} (\mathcal{F}_k \times \mathcal{G}_k).$$

Az $A = A_1 \diamond A_2$ leképezés az A_1 illetve A_2 leképezésre való biortogonalitás (3.3.6) tulajdonságot örökli. Valóban, tegyük fel, hogy az $f_1 \in \mathcal{F}$ és $g_1 \in \mathcal{G}$ függvények biortogonálisak az A_1 , az $f_2 \in \mathcal{F}$ és $g_2 \in \mathcal{G}$ függvények pedig az A_2 leképezésre nézve. Ekkor a megfelelő függvények $f := f_1 \times f_2$ illetve $g := g_1 \times g_2$ Kronecker-szorzataira és az $y = (y_1, y_2)$ pont esetén

$$\begin{aligned} \frac{1}{m^2} \sum_{x \in A^{-1}(y)} f(x) \bar{g}(x) &= \frac{1}{m^2} \sum_{x \in A_1^{-1}(y_1) \times A_2^{-1}(y_2)} f_1(x_1) f_2(x_2) \bar{g}_1(x_1) \bar{g}_2(x_2) = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{x_1 \in A_1^{-1}(y_1)} f_1(x_1) \bar{g}_1(x_1) \cdot \frac{1}{m} \sum_{x_2 \in A_2^{-1}(y_2)} f_2(x_2) \bar{g}_2(x_2) = \delta_{f_1 g_1} \delta_{f_2 g_2}. \end{aligned}$$

adódik.

A fenti tulajdonságok alapján fogalmazható meg a következő állítás:

3.3.10. Következmény. *Ha az f_1 és a g_1 függvények biortogonálisak az A_1 leképezésre nézve és az f_2 és a g_2 függvények biortogonálisak az A_2 leképezésre, akkor az $f_1 \times f_2$ és $g_1 \times g_2$ Kronecker-szorzatok biortogonálisak az $A = A_1 \diamond A_2$ leképezésre nézve.*

A fenti eredményeket felhasználva általános eljárás adható a kétdimenziós biortogonális szorzatrendszer konstrukciójára.

3.3.11. Tétel (KB[47]). *Tegyük fel, hogy az \mathcal{F} és \mathcal{G} rendszerek biortogonálisak az X halmaz A m -rétű leképezésére nézve. Ekkor a rendszerek önmagukkal vett $\mathcal{F}^2 := \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, illetve $\mathcal{G}^2 := \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ Kronecker-szorzatai is biortogonálisak az X^2 halmaz $A^2 := A \diamond A$ m^2 -rétű leképezésére nézve, így az \mathcal{F}^2 és \mathcal{G}^2 rendszerek által generált szorzatrendszerek is biortogonálisak lesznek az A^2 leképezésre nézve.*

3.3.3. Példák

1. Legyen $\mathcal{I} := [0, 1)$ intervallum és $\xi \in (0, 1)$. Legyen $\mathcal{A}_1 : [0, \xi) \rightarrow [0, 1)$ egy szigorúan monoton függvény, továbbá $\mathcal{A}_2 : [\xi, 1) \rightarrow [0, 1)$ szintén szigorúan monoton függvény. Mindkét függvény értékkészlete legyen a $[0, 1)$ intervallum. Könnyen látható, hogy az

$$A(x) := \begin{cases} \mathcal{A}_1(x), & 0 \leq x < \xi, \\ \mathcal{A}_2(x), & \xi \leq x < 1. \end{cases} \quad (3.3.16)$$

kétrétű leképezés az \mathcal{I} intervallumon.

Egyszerűen konstruálhatunk páros illetve páratlan függvényeket a fenti kétrétű leképezésre nézve. Például legyen $f^{(0)}, f^{(1)} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ esetén $f^{(0)}(x) := 1$ minden $x \in \mathcal{I}$ helyen és

$$f^{(1)}(x) := \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \xi, \\ -1, & \xi \leq x < 1. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy az így készített $f^{(0)}$ páros, az $f^{(1)}$ pedig páratlan függvény az A kétrétű leképezésre nézve. Mivel az $\mathcal{F} = \{f^{(0)}, f^{(1)}\}$ függvény teljesíti a 3.3.6. Következmény feltételeit, ezért az \mathcal{F} ortogonális az A leképezésre, továbbá a \mathcal{F} szorzatrendszer, melyet az \mathcal{F} és a kétrétű leképezés generálnak, ortonormált.

3.3.12. *Megjegyzés.* Ha $\xi = \frac{1}{2}$, akkor $(\mathcal{F}_n, 0 \leq n < N)$ az eredeti Rademacher-rendszer, $(\mathcal{F}_m, 0 \leq m < 2^N)$ pedig a Walsh-Paley-rendszer.

2. Legyen A a kétrétű leképezés, amelyet az 1. Példában 3.3.16 megadással definiáltunk, ekkor az $\mathcal{A} := A \diamond A$ leképezés 4-rétű leképezés az egységnyezeten. Jelöljük \mathcal{F}^2 -tel a \mathcal{F} rendezett függvényhalmaz önmagával vett Kronecker-szorzatát, azaz

$$\mathcal{F}^2(x, y) := (\mathcal{F} \times \mathcal{F})(x, y) = \{1, f^{(1)}(x), f^{(1)}(y), f^{(1)}(x) \cdot f^{(1)}(y)\} \quad x, y \in [0, 1).$$

Mivel \mathcal{F}^2 kielégíti a 3.3.7. Tétel feltételeit, ezért az általa generált \mathcal{F}^2 szorzatrendszer ortonormált.

3.3.13. *Megjegyzés.* Ha $\xi = \frac{1}{2}$, akkor $(\mathcal{F}_n^2, 0 \leq n < N^2)$ a kétváltozós Rademacher-rendszer, a $(\mathcal{F}_k^2, 0 \leq k < 4^{N^2})$ szorzatrendszer pedig a kétdimenziós Walsh-Paley-rendszer.

3.4. Általánosított Haar-Fourier transzformáció

Ebben az alfejezetben a Haar-rendszer egy újabb általánosítását fogjuk bemutatni. Az általánosított konstrukció Walsh-szerű rendszerekből indul ki és az eredeti Walsh- és Haar-rendszer kapcsolatára épül. Az új rendszer bevezetésével a Haar-Fourier Transzformáció általánosítását is megadjuk. Az alfejezet a [48] cikk alapján készült.

3.4.1. Alapfogalmak

A Haar-rendszernek számos általánosítása ismert (ezekről részletesebben a következő cikkekben olvashatunk: [2], [34], [30]). A Haar-rendszer legelterjedtebb általánosításai a waveletek. A wavelet konstrukció során a rendszer függvényeit egy anyawaveletnek nevezett $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ alapfüggvényből

származtatjuk transláció és dilatáció segítségével: $\psi_{n,k}(x) := 2^{n/2}\psi(2^n x - k)$, ($x \in \mathbb{R}$, $0 \leq k < 2^n$, $n \in \mathbb{N}$). A Haar-rendszer esetén az anyawavelet az alábbi h függvény, mely az eredeti konstrukció során h_1 -ként szerepelt a rendszerben:

$$h(x) := \begin{cases} 1, & (0 \leq x < 1/2), \\ -1, & (1/2 \leq x < 1), \\ 0, & (1 \leq x < \infty). \end{cases} \quad (3.4.1)$$

Szerepet kapnak még a diadikus intervallumok $\chi_{n,k}$ karakterisztikus függvényei, melyeket szokás Haar-skálázási függvényeknek is nevezni. Ezek a függvények a Haar-függvényekhez hasonlóan származtathatók, a $\chi_{[0,1)} = \chi$ függvényből kiindulva:

$$\chi_{n,k}(x) = \chi(2^n x - k) \quad (x \in \mathbb{R}, 0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}).$$

A Haar-Fourier transzformáció szervezésénél különösen nagy jelentősége van a Haar-függvények és a Haar-skálázási függvények kapcsolatát leíró skálázási egyenleteknek:

$$\chi_{n,k} = \chi_{n+1,2k} + \chi_{n+1,2k+1}, \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}), \quad (3.4.2)$$

$$h_{n,k} = 2^{n/2}(\chi_{n+1,2k} - \chi_{n+1,2k+1}), \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}). \quad (3.4.3)$$

Legyen $f: [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ egy diszkrét függvény, mely a $[k2^{-N}, (k+1)2^{-N})$ ($k=0,1,\dots,2^N-1$) diadikus intervallumokon konstans függvényértékekkel rendelkezik, jelölje továbbá

$$\langle f, g \rangle := 2^{-N} \sum_{k=0}^{2^N-1} f(k2^{-N})g(k2^{-N})$$

az f és g függvények diszkrét skaláris szorzatát. Ekkor az f függvény Haar-Fourier együtthatóira fennállnak a következő összefüggések:

$$\langle f, h_{n,k} \rangle := 2^{n/2}(\langle f, \chi_{n+1,2k} \rangle - \langle f, \chi_{n+1,2k+1} \rangle), \quad (3.4.4)$$

$$\langle f, \chi_{n,k} \rangle := (\langle f, \chi_{n+1,2k} \rangle + \langle f, \chi_{n+1,2k+1} \rangle), \quad (0 \leq k < 2^n, 0 \leq n < N). \quad (3.4.5)$$

A Haar-Fourier analízis és szintézis ezen összefüggéseken alapul. Ezek direkt felhasználásával a Haar-Fourier együtthatók $O(2^N)$ művelettel számíthatók és ugyanennyi műveletre van szükség a függvény rekonstrukcióhoz is.

A (3.4.2) és (3.4.3) egyenletek waveletekre felírt megfelelője biztosítja a wavelet analízis hatékony felhasználhatóságát.

Ebben a fejezetben a Haar-rendszer egy további általánosítását fogjuk vizsgálni. A vizsgálódásunk alapja a Haar-, Walsh- és a Rademacher-rendszer közötti kapcsolat. Ilyen típusú általánosításokat vezetett be Alexits a [2], [3] cikkekben, de már Kaczmarz is említést tesz róluk 1929-ben [16]. A Haar-rendszer konstrukciója során a Rademacher rendszert különböző típusú multiplikatív rendszerekre cserélik, az ilyen konstrukció eredményeként Haar-szerű rendszerek kaphatók. Ezekről a rendszerekről belátták [34], [30], hogy ugyanolyan jó konvergencia tulajdonságokkal rendelkeznek, mint az eredeti Haar-rendszer.

Konstrukciónkban az eltolást fogjuk lecserélni, mégpedig egy megfelelő kétrétű leképezés iteráltjával. Az ilyen módon származtatott Haar-szerű függvények vizsgálata során be fogjuk mutatni, hogy ebben az általános esetben is fennáll az (3.4.2) és (3.4.3) összefüggéseknek megfelelő kapcsolat.

3.4.2. Kétrétű leképezések, Rademacher-szerű függvények

Ebben az alfejezetben Rademacher-szerű rendszert fogunk konstruálni, azáltal, hogy a wavelet-konstrukcióban a dilatációt egy kétrétű leképezés önmagával vett iteratív kompozíciójára cseréljük.

Induljunk ki egy rögzített $X \neq \emptyset$ halmazból és jelöljön $A : X \rightarrow X$ egy kétrétű leképezést X -en, azaz

$$\forall x \in X \exists |x'', x' \in X, x' \neq x'' : A(x') = A(x'') = x. \quad (3.4.6)$$

Az A leképezés iteráltjait az alábbi rekurzióval értelmezhetjük:

$$A^0(x) = x, A^n := A^{n-1} \circ A \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}^* := \{1, 2, \dots\}). \quad (3.4.7)$$

Könnyen látható, hogy az A^n leképezés egy 2^n -rétű leképezés az X halmazon. Egy rögzített $x_0^0 \in X$ elem A^n leképezésben vett ősképeinek diszkrét halmazát jelöljük X_n -nel, azaz

$$X_n := \{x \in X : A^n(x) = x_0^0\} = A^{-n}(\{x_0^0\}) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3.4.8)$$

Nyilvánvaló, hogy az X_n halmaz 2^n -elemű. Az $X_n = \{x_k^n : 0 \leq k < 2^n\}$ halmaz elemeit indexezhetjük úgy, hogy $A^{-1}(\{x_k^n\}) = \{x_{2k+1}^{n+1}, x_{2k}^{n+1}\}$ teljesüljön, illetve megfordítva a kapcsolatot, $A(x_{\ell}^{n+1}) = x_{[\ell/2]}^n$, ahol $[s]$ jelöli az s valós szám egészrészét. Indukcióval kapható az

$$A^j(x_{\ell}^n) = x_{[\ell 2^{-j}]}^{n-j} \quad (0 \leq \ell < 2^n, 0 \leq j \leq n) \quad (3.4.9)$$

összefüggés.

Legyen $N \in \mathbb{N}^*$ rögzített egész szám. Tekintsük az X_N halmaz következő részhalmazait:

$$I_{n,k} := A^{n-N}(\{x_k^n\}) \quad (0 \leq k < 2^n, 0 \leq n \leq N). \quad (3.4.10)$$

Az $I_{n,k}$ 2^{N-n} -elemű halmazt az X_N halmaz diadikus intervallumának nevezzük, mivel hasonló tulajdonságokkal rendelkezik, mint a valós $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ intervallumok:

$$\begin{aligned} I_{0,0} &= A^{-N}(\{x_0^0\}) = X_N, \quad I_{N,k} = A^0(\{x_k^N\}) = \{x_k^N\}, \\ I_{n+1,2k+1} \cup I_{n+1,2k} &= I_{n,k} \quad (0 \leq k < 2^n, 0 \leq n < N). \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

Fontos ismételten rávilágítanunk, hogy a fenti részhalmazok hasonlóan viselkednek, mint a valós diadikus intervallumok. Ezek a részhalmazok különleges kapcsolatban állnak egymással, hiszen két ilyen részhalmaz vagy diszjunkt, vagy az egyik tartalmazza a másikat.

A $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ függvényből kiindulva az $A : X \rightarrow X$ kétrétű leképezés iteráltját használva az alábbi függvényrendszer definiálható:

$$\varphi_n(x) := \varphi(A^n(x)) \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}). \quad (3.4.12)$$

Abban a speciális esetben, ha $X = [0,1)$, a kétrétű leképezés pedig $A(x) = 2x \pmod{1}$, a

$$\varphi(x) = h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq x < 1, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

függvényből kiindulva a Rademacher-rendszerhez jutunk. Ezért az általánosan eljárás eredményeként kapott $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ rendszert Rademacher-szerű rendszernek nevezzük.

A $\{\varphi^0, \varphi^1\}$, $\{\psi^0, \psi^1\}$ függvénpárokat, ahol $\varphi^j, \psi^j : X \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 0,1$) az A kétrétű leképezésre nézve biortogonálisnak nevezzük, ha minden $x \in X$ esetén, ha $A(x') = A(x'') = x, x' \neq x''$, akkor az $i, j = 0,1$ indexekre a következő teljesül:

$$\frac{1}{2} \sum_{z \in A^{-1}(x)} \varphi^i(z) \bar{\psi}^j(z) = \frac{1}{2} (\varphi^i(x') \bar{\psi}^j(x') + \varphi^i(x'') \bar{\psi}^j(x'')) = \delta_{ij}. \quad (3.4.13)$$

Ha $\varphi^j = \psi^j$, akkor a φ^j ($j = 0,1$) párt ortonormálnak nevezzük.

Az említett speciális esetben az 1 és h függvények ortonormáltak a bevezetett A kétrétű leképezésre.

3.4.3. Walsh-szerű és Haar-szerű rendszerek

Legyen $N \in \mathbb{N}^*$ rögzített egész. A $\{\varphi_j^0, \varphi_j^1\}$ ($j \in \mathbb{N}$) illetve $\{\psi_j^0, \psi_j^1\}$ ($j \in \mathbb{N}$) rendszerek szorzatrendszerre az alábbi módon definiálható:

$$\Phi_m^N := \Phi_m := \prod_{j=0}^{N-1} \varphi_j^{m_j}, \quad \Psi_m^N := \Psi_m := \prod_{j=0}^{N-1} \psi_j^{m_j}, \quad (m = \sum_{j=0}^{N-1} m_j 2^j). \quad (3.4.14)$$

A Rademacher-szerű rendszer szorzatrendszerét Walsh-szerű rendszernek nevezzük.

Az említett speciális esetben, amikor $\varphi_j^0 = 1$ és $\varphi_j^1 = r_j$ ($j \in \mathbb{N}$), a $(\Phi_m, m \in \mathbb{N})$ szorzatrendszer a Walsh-rendszer.

A fenti rendszerek vegyes Dirichlet-féle magfüggvénye az alábbi szorzatalakra hozható:

$$D_{2^N}(x, y) := \sum_{m=0}^{2^N-1} \Phi_m(x) \bar{\Psi}_m(y) = \prod_{j=0}^{N-1} (\varphi_j^0(x) \bar{\psi}_j^0(y) + \varphi_j^1(x) \bar{\psi}_j^1(y)). \quad (3.4.15)$$

Bevezetve az

$$L(x, y) = \varphi^0(x) \bar{\psi}^0(y) + \varphi^1(x) \bar{\psi}^1(y) \quad (x, y \in X)$$

függvényt, a D_{2^N} Dirichlet-féle magfüggvény az alábbi egyszerűbb alakban írható:

$$D_{2^N}(x, y) := \prod_{j=0}^{N-1} L(A^{N-1-j}(x), A^{N-1-j}(y)) \quad (x, y \in X).$$

Az alábbi $\mathcal{I}_{n,k}$ függvények a $\chi_{n,k}$ Haar-skálázási függvények megfelelői:

$$\mathcal{I}_{n,k}(x) := 2^{-n} \prod_{j=0}^{n-1} L(A^{N-1-j}(x), A^{N-1-j}(x_k^n)), \quad (3.4.16)$$

$$(x \in X, 0 \leq k < 2^n, n = 1, 2, \dots, N).$$

A $\varphi^0 = \psi^0 = 1$ és $\varphi^1 = \psi^1 = h$ speciális esetben vissza is kapjuk a Haar-skálázási függvényeket.

Meg fogjuk mutatni, hogy a Haar-skálázási függvényekhez hasonlóan az $\mathcal{I}_{n,k}$ függvények az $I_{n,k}$ halmazok karakterisztikus függvényei.

3.4.1. Tétel (KB[48]). *Ha a (3.4.13) egyenlőségben leírt biortogonalitási feltétel teljesül, akkor az $\mathcal{I}_{n,k}$ skálázási függvényekre az X_N halmazon igaz, hogy*

$$\mathcal{I}_{n,k} = \chi_{I_{n,k}} \quad (0 \leq k < 2^n, n = 1, 2, \dots, N), \quad (3.4.17)$$

és így az X_N halmaz pontjaira teljesül az alábbi skálázási egyenlet:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n+1,2k}(x) + \mathcal{I}_{n+1,2k+1}(x) &= \mathcal{I}_{n,k}(x), \\ (x \in X_N, 0 \leq k < 2^n, n = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Bizonyítás. Minden $x \in I_{n,\ell}$ esetén $A^{N-n}(x) = x_\ell^n$ és

$$\begin{aligned} A^{N-j-1}(x) &= A^{n-j-1}(A^{N-n}(x)) = A^{n-j-1}(x_\ell^n) = x_{[\ell 2^{j+1-n}]}^{j+1}, \\ (0 \leq j < n, 0 \leq \ell < 2^n). \end{aligned}$$

Így

$$\mathcal{I}_{n,k}(x) := 2^{-n} \prod_{j=0}^{n-1} L(x_{[\ell 2^{j+1-n}]}^{1+j}, x_{[k 2^{j+1-n}]}^{1+j}) \quad (n = 0, 1, \dots, N, x \in I_{n,\ell}).$$

Innen azonnal látható, hogy az $\mathcal{I}_{n,k}$ függvény azonos helyettesítési értékkel rendelkezik minden $x \in I_{n,\ell}$ pontban. A produktumban az $i = n - j - 1$ index-cserét végrehajtva, az alábbi egyszerűbb alak kapható a függvényre

$$\mathcal{I}_{n,k}(x) = 2^{-n} \prod_{i=0}^{n-1} L(x_{[\ell 2^{-i}]}^{n-i}, x_{[k 2^{-i}]}^{n-i}), \quad (x \in I_{n,\ell}, 0 \leq k < 2^n, 0 \leq n \leq N). \quad (3.4.19)$$

A (3.4.13) feltétel felhasználásával

$$L(x', x'') = 2\delta_{x', x''}, \quad (A(x') = A(x'') = x).$$

kapható.

A bizonyítást esetszétválasztással folytatjuk. Ha $k \neq \ell$ ($0 \leq k, \ell < 2^n$), akkor létezik egy i ($0 < i < n$) index, hogy $x' := [\ell 2^{-i}] \neq x'' := [k 2^{-i}]$, de $A(x') := [\ell 2^{-i-1}] = A(x'') := [k 2^{-i-1}]$.

A fentiekből azonnal adódik, hogy a (3.4.19) szorzatban legalább egy tényező – az i indexhez tartozó – biztosan nulla.

A $k = \ell$ esetben az említett szorzat minden tényezője 2, így a szorzat éppen 1-et ad eredményül.

A (3.4.18) skálázási egyenlet a (3.4.13) feltétel felhasználásával a (3.4.17) egyenletből azonnal adódik. \square

Az eredeti konstrukció (3.4.2), (3.4.3) összefüggéseihez hasonlóan bevezethetjük a Haar-szerű függvényeket:

$$\mathcal{H}_{n,k} := \mathcal{I}_{n+1,2k} - \mathcal{I}_{n+1,2k+1} \quad (0 \leq k < 2^n, n = 0, 1, \dots, N-1).$$

3.4.2. Tétel (KB[48]). *A $\mathcal{H}_{n,k}$ ($0 \leq k < 2^n, n = 0, 1, \dots, N-1$) rendszer diszkrét ortogonális rendszer az X_N halmazon*

$$\langle f, g \rangle := 2^{-N} \sum_{x \in X_N} f(x) \bar{g}(x), \quad (3.4.20)$$

diszkrét skaláris szorzatára nézve, azaz részletesen kifejtve:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_{n,k}, \mathcal{H}_{m,\ell} \rangle &= 2^{-n} \cdot \delta_{n,m} \cdot \delta_{k,\ell}, \\ (0 \leq k < 2^n, 0 \leq n < N, 0 \leq \ell < 2^m, 0 \leq m < N). \end{aligned}$$

Bizonyítás. Ha $I_{n,k} = I_{m,\ell}$, akkor

$$\langle \mathcal{H}_{n,k}, \mathcal{H}_{m,\ell} \rangle = 2^{-N} \cdot \sum_{x \in I_{n,k}} 1 = 2^{-N} \cdot 2^{N-n} = 2^{-n}.$$

Ha $I_{n,k} \neq I_{m,\ell}$ és $m \leq n$, akkor vagy $I_{n,k} \cap I_{m,\ell} = \emptyset$ vagy pedig létezik egy $p \in \mathbb{N}^*$ és egy $s \in \{0, 1, \dots, 2^p - 1\}$ index-pár, hogy $I_{n,k} = I_{m+p, 2^p \ell + s}$.

Az első esetben az X_n halmazon $\mathcal{H}_{n,k} \cdot \mathcal{H}_{m,\ell} = 0$.

A második esetben $\mathcal{H}_{n,k} \cdot \mathcal{H}_{m,\ell} = \pm \mathcal{H}_{n,k}$ és ebből következően

$$\langle \mathcal{H}_{n,k}, \mathcal{H}_{m,\ell} \rangle = \pm 2^{-N} \sum_{x \in I_{n,k}} \mathcal{H}_{n,k}(x) = 0.$$

□

3.4.3. Megjegyzés. Normálással ortonormált Haar-szerű rendszert származtathatunk a most definiált rendszerünkéből:

$$H_{n,k} := 2^{n/2} \cdot \mathcal{H}_{n,k}, \quad (0 \leq k < 2^n, n = 0, 1, \dots, N-1).$$

3.4.4. Példák és speciális esetek

A [45]-ben bevezetett Walsh-Csebisev rendszer ezzel a konstrukcióval is származtatható.

Induljunk ki az $X = [-1, 1]$ intervallumból. Az $A(x) = 2x^2 - 1$, $x \in X$ függvény kétrétű leképezés az X halmazon. Egészen pontosan, ha $A(x') = A(x'')$ (és $x' \neq x''$), akkor $x' = -x''$. Az A kétrétű leképezés iterációjával származtatott 2^n -rétű A^n leképezés nem más, mint a 2^n indexű Csebisev-polinom, azaz $A^n(x) = T_{2^n}(x)$.

Az X_n diszkrét halmaz pontjai éppen a Csebisev-abszcisszák.

A $\{\varphi_k^0, \varphi_k^1\}$ ($k \in \mathbb{N}$) és $\{\psi_k^0, \psi_k^1\}$ ($k \in \mathbb{N}$) Rademacher-szerű rendszerek az alábbi alapfüggvényekből kiindulva kaphatók:

$$\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{1, x\}, \quad \{\psi^0(x) = 1, \psi^1(x) = 2x/(A(x) + 1)\}.$$

Ebben az esetben a (3.4.13) biortogonalitási reláció teljesül és az előállított Rademacher-szerű rendszerek

$$\varphi_k^1(x) = T_{2^k}(x), \quad \psi_k^1(x) = 2T_{2^k}(x)/(1 + T_{2^{k+1}}(x)) \quad (k \in \mathbb{N})$$

alakban írhatók.

A szorzatrendszer Φ_m függvényei m -edfokú polinomok, a biortogonális rendszer Ψ_m függvényei pedig racionális függvények. A Φ_m ($m \in \mathbb{N}$) rendszert neveztük Walsh-Csebisev rendszernek.

Ezen rendszerek vegyes Dirichlet-féle magfüggvényét felhasználva a Haar-Csebisev skálázási függvények és a Haar-Csebisev függvények felírhatók.

4. fejezet

Ortogonalis és biortogonalis szorzatrendszerek konstrukciója

Ebben a fejezetben a szorzatrendszer fogalmának általánosításával, adott súlyfüggvényre nézve ortogonalis rendszerek illetve biortogonalis rendszerpárok konstrukciójára adunk eljárást. Az ilyen rendszerek számos előnye közül különösen fontos, hogy segítségükkel hatékony interpolációs algoritmusok készíthetők, melyek során a rendszerre vonatkozó Fourier együtthatók FFT-szerű algoritmus-sal számolhatók.

A fejezetben a Rademacher-, Walsh- és Haar-szerű rendszerek konstrukciójának általános eljárását fogjuk megadni, az itt bevezetésre kerülő általánosítás speciális esetként visszaadja az előző fejezetben tárgyalt konstrukciókat.

A fejezet a DARFA14 és 6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields konferenciákon tartott előadások anyagából készült. Az eredményekből összeállított cikket a Mathematica Pannonica folyóiratba fogadták el publikálásra.

4.1. Alapfogalmak, definíciók

Tekintsük kiindulási pontnak az eredeti r_n ($n \in \mathbb{N}$) Rademacher függvényeket, ahol

$$r_n(x) := r(2^n x) \quad (x \in [0,1), n \in \mathbb{N}), \quad (4.1.1)$$

és

$$r(x) := \begin{cases} 1, & x \in [k, k + \frac{1}{2}), k \in \mathbb{Z}, \\ -1, & x \in [k + \frac{1}{2}, k + 1), k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

A fent definiált Rademacher rendszer szorzatrendszere a Walsh-Paley rendszer, melynek elemei felírhatók a Rademacher-rendszer függvényeinek segítségével a következőképpen:

$$w_m := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{m_k} \quad (m \in \mathbb{N}), \quad (4.1.2)$$

ahol $m = \sum_{k=0}^{\infty} m_k 2^k$ az m index bináris kifejtése.

A Walsh-Paley rendszer teljes ortonormált rendszer a négyzetesen integrálható függvények L^2 terében. A Walsh-Paley rendszer Dirichlet-féle magfüggvényének egyik fontos tulajdonsága, hogy az

zárt formában írható:

$$D_{2^n}^\Psi(x, t) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + r_j(x) \cdot r_j(t)),$$

ami az 1.1.22. megjegyzés alkalmazásával az alábbi egyváltozós alakra hozható:

$$D_{2^N}(x) = \sum_{\ell=0}^{2^N-1} w_\ell(x) = \prod_{k=0}^{N-1} (1 + r_k(x)).$$

A több szempontól is jelentős Haar rendszer a Walsh-Paley rendszer Dirichlet-féle magfüggvényéből származtatható. A Haar-rendszer tekinthető az első és legegyszerűbb waveletnek, ugyanis az összes Haar-függvény egy h alapfüggvényből – amit szokás anyawaveletnek is nevezni – transzláció és dilatáció segítségével származtatható:

$$h_{2^n+k}(x) := 2^{n/2} h(2^n x - k) \quad (x \in [0,1], 0 \leq k < 2^n, k, n \in \mathbb{N}), \quad (4.1.3)$$

ahol

$$h(x) := \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1/2), \\ -1 & (1/2 \leq x < 1), \\ 0 & (x \geq 1). \end{cases}$$

Bizonyos alkalmazásoknál praktikusabb a folytonos indexezés helyett kettős indexezést használni:

$$h_{n,k}(x) := h_{2^n+k}(x), \quad (x \in [0,1], 0 \leq k < 2^n, k, n \in \mathbb{N}).$$

A diadikus intervallumok $\chi_{n,k}$ karakterisztikus függvényeit a konstrukció során szokás Haar skálázási függvényeknek nevezni.

$$\chi_{n,k}(x) := \begin{cases} 1 & \frac{k}{2^n} \leq x < \frac{k+1}{2^n}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ezek a függvények a Haar függvényekhez hasonlóan származtathatók a $\chi_{[0,1]} = \chi$ függvényből kiindulva:

$$\chi_{n,k}(x) = \chi(2^n x - k) \quad (x \in \mathbb{R}, 0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}).$$

A Haar és Haar skálázási függvények kapcsolatát írják le az alábbi, úgynevezett skálázási egyenletek:

$$\chi_{n,k} = \chi_{n+1,2k} + \chi_{n+1,2k+1}, \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}), \quad (4.1.4)$$

$$h_{n,k} = 2^{n/2} (\chi_{n+1,2k} - \chi_{n+1,2k+1}) \quad (0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}). \quad (4.1.5)$$

Ezek az összefüggések adják a Haar transzformáció alapját.

Mind a Haar függvények, mind pedig a Haar skálázási függvények kifejezhetők a Rademacher rendszer és a Walsh-Paley rendszer Dirichlet-féle magfüggvényének segítségével:

$$h_{n,k}(x) = 2^{-n/2} r_n(x) D_{2^n}(x, k2^{-n}) \quad (4.1.6)$$

$$\chi_{n,k}(x) = 2^{-n} D_{2^n}(x, k2^{-n}) \quad (x \in [0,1], 0 \leq k < 2^n, n \in \mathbb{N}). \quad (4.1.7)$$

4.2. A konstrukció általánosítása

4.2.1. Általánosított szorzatrendszer

Legyen m rögzített egész, $m \in \mathbb{N}^{**} := \{2, 3, \dots\}$ és X egy nem üres halmaz. Induljunk ki a $\varphi_n^{(i)}$ függvények alábbi véges rendszeréből

$$\phi_n = (\varphi_n^{(i)}, 0 \leq i < m), \quad (0 \leq n < N \leq \infty, \quad \varphi_n^{(i)} : X \rightarrow \mathbb{C}). \quad (4.2.1)$$

4.2.1. Definíció. A (4.2.1) rendszer **általánosított szorzatrendszere** legyen adott az alábbi konstrukcióval:

$$\Phi_\ell = \prod_{k=0}^{N-1} \varphi_k^{(\ell_k)}, \quad \ell = \sum_{k=0}^{N-1} \ell_k \cdot m^k \quad \ell_k \in \{0, 1, \dots, m-1\}. \quad (4.2.2)$$

4.2.2. *Megjegyzés.* I. A 4.2.1. Definíció valóban a szorzatrendszer fogalmának általánosítása, ugyanis a $m = 2$ és $\varphi_\ell^{(0)} = 1$, $\varphi_\ell^{(1)} = \varphi_\ell$ speciális esetben éppen a φ_ℓ rendszer szorzatrendszerének definíciójához jutunk. Speciálisan $\varphi_\ell^{(1)} = r_\ell$ esetben a Walsh-Paley rendszert kapjuk.

II. Ha $N = \infty$, akkor az előálló végtelen szorzat mindig konvergens, ha $\varphi_n^{(0)} = 1$ ($0 \leq n < N$).

4.2.2. Súlyfüggvényre nézve biortogonális p -rétű leképezések

4.2.3. Definíció. Legyen m most is rögzített, egynél nagyobb egész szám $m \in \mathbb{N}^{**} := \{2, 3, \dots\}$ és $X \neq \emptyset$ halmaz. Az X halmazon értelmezett $A : X \rightarrow X$ leképezést **m -rétű leképezésnek** nevezzük, ha minden $x \in X$ elemnek a leképezésben pontosan m ősképe van, azaz az

$$A^{-1}(x) = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\} \quad x \in X. \quad (4.2.3)$$

m -elemű halmaz.

4.2.4. Definíció. Jelölje

$$f^{(j)}, g^{(j)} : X \rightarrow \mathbb{C}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1,$$

függvények két véges rendszerét és legyen $\rho : X \rightarrow (0, +\infty)$ egy pozitív súlyfüggvény. Az $F = (f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(m-1)})$ és $G = (g^{(0)}, g^{(1)}, \dots, g^{(m-1)})$ rendszereket **(A, ρ) -biortogonálisnak** nevezzük, ha minden $x \in X$ esetén

$$\sum_{t \in A^{-1}(x)} f^{(i)}(t) \cdot \overline{g^{(j)}(t)} \rho(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(i)}(x_k) \cdot \overline{g^{(j)}(x_k)} \rho(x_k) = \delta_{ij}. \quad (4.2.4)$$

Ha $F = G$, akkor azt mondjuk, hogy az F rendszer **(A, ρ) -ortonormált**.

4.2.5. Lemma. A (4.2.4) biortogonalitási feltétel ekvivalens a következő egyenlőséggel:

$$\sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(x_k) \cdot \overline{g^{(i)}(x_\ell)} \rho(x_k) = \delta_{k\ell} \quad (0 \leq k, \ell < m). \quad (4.2.5)$$

Bizonyítás. Vezessük be a következő mátrixokat:

$$\begin{aligned} U &= [u_{ik}]_{i,k=0}^{m-1} \in \mathbb{C}^{m \times m}, & u_{ik} &:= f^{(i)}(x_k) \sqrt{\rho(x_k)} \quad (0 \leq i, k < m), \\ V &= [v_{ik}]_{i,k=0}^{m-1} \in \mathbb{C}^{m \times m}, & v_{ik} &:= g^{(i)}(x_k) \sqrt{\rho(x_k)} \quad (0 \leq i, k < m). \end{aligned}$$

A fenti jelöléssel a szóban forgó (4.2.4) feltétel a következő ekvivalens alakban írható:

$$UV^* = I, \quad (4.2.6)$$

ahol I jelöli a $\mathbb{C}^{m \times m}$ tér egységmátrixát.

A négyzetes mátrixokra vonatkozó műveleti tulajdonságok felhasználásával a (4.2.6) egyenlet $I = VU^*$ alakba írható, melyből a (4.2.5) állítás közvetlenül adódik.

Az állítás megfordítása hasonlóan igazolható. \square

4.2.3. Az X_n diszkrétizációs halmaz

Tekintsük az m -rétű leképezések $A_n : X \rightarrow X, n \in \mathbb{N}^*$ sorozatát, ekkor az

$$A_n^{-1}(x) \subset X \quad (x \in X, n \in \mathbb{N}^*)$$

halmaz minden $n \in \mathbb{N}$ esetén pontosan m elemet tartalmaz.

A fenti leképezések kompozícióiként az alábbi leképezés-sorozat definiálható:

$$T_0(x) := x \quad (x \in X), \quad T_n = A_n \circ A_{n-1} \circ \dots \circ A_1 = A_n \circ T_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*). \quad (4.2.7)$$

Nyilvánvaló, hogy az ilyen módon definiált T_n leképezés az X halmazon m^n -rétű.

Jelölje X_n a rögzített $x_0 \in X$ pont T_n leképezésben vett ősképeinek halmazát, azaz

$$X_n := T_n^{-1}(x_0) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az X_n halmaz m^n -elemű.

Ha az x_0 pont az összes A_n leképezésnek fixpontja, azaz $A_n(x_0) = x_0$ ($n \in \mathbb{N}$), akkor a fenti halmazokra

$$X_n \supset X_{n-1} \supset \dots \supset X_1.$$

Ha az x_0 pont m ősképe az A_n leképezésben: $A_n^{-1}(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\}$, akkor az X_n halmaz alábbi felbontása írható fel:

$$X_n = X_{n-1} \cup X_{n-1}^1 \cup X_{n-1}^2 \cup \dots \cup X_{n-1}^{m-1}$$

ahol $X_{n-1}^j = T_{n-1}^{-1}(x_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$).

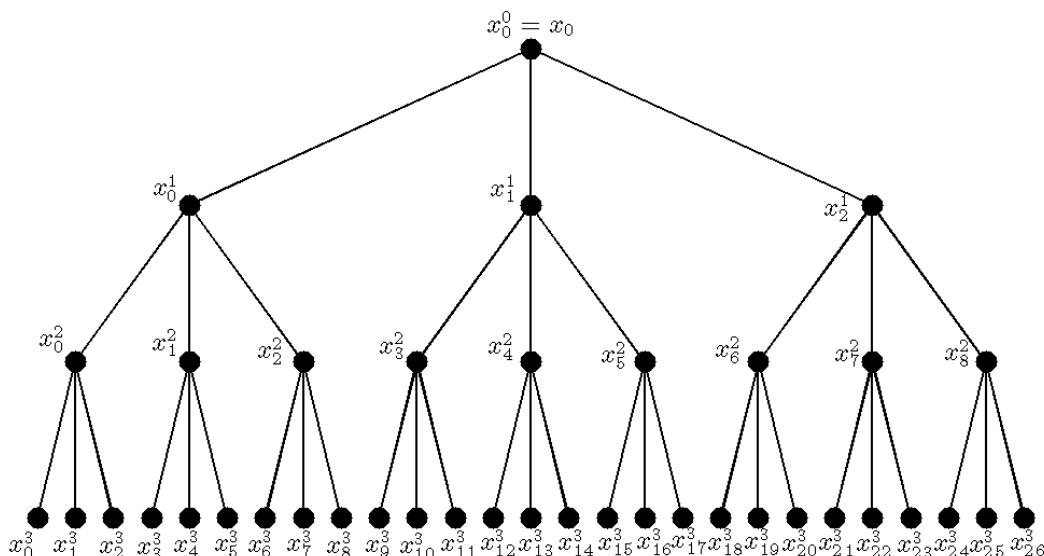
Az $X_n = \{x_k^n : 0 \leq k < m^n\}$ halmaz elemeit a következőképpen indexezhetjük: $A^{-1}(\{x_k^n\}) = \{x_{mk}^{n+1}, x_{mk+1}^{n+1}, \dots, x_{mk+m-1}^{n+1}\}$.

$$A^j(x_\ell^n) = x_{[\ell m^{-j}]}^{n-j} \quad (0 \leq \ell < m^n, 0 \leq j \leq n).$$

4.2.6. Definíció. Legyen $N \in \mathbb{N}^*$ rögzített. Vezessük be az X_N halmaz alábbi részhalmazait:

$$I_{n,k} := A^{n-N}(\{x_k^n\}) \quad (0 \leq k < m^n, 0 \leq n \leq N). \quad (4.2.8)$$

Az $I_{n,k}$ halmaz m^{N-n} -elemű és az X^N halmaz m -adikus intervallumának nevezzük.

4.1. ábra. Az X^n diszkrét halmaz $m = 3$ -rétű leképezés esetén

4.2.7. Lemma. Az X_N halmaz m -adikus intervallumai hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ diadikus intervallumok:

$$\begin{aligned} I_{0,0} &= A^{-N}(\{x_0^0\}) = X_N, \quad I_{N,k} = A^0(\{x_k^N\}) = \{x_k^N\}, \\ I_{n+1,mk} \cup I_{n+1,mk+1} \cup \dots \cup I_{n+1,mk+m-1} &= I_{n,k} \quad (0 \leq k < m^n, 0 \leq n < N). \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Továbbá igaz az is, hogy két m -adikus intervallum mindig vagy diszjunkt, vagy az egyik tartalmazza a másikat.

4.3. Diszkrét biortogonális szorzatrendszerek

Induljunk ki rendezett függvény m -esek $F_n := (f_n^{(0)}, f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(m-1)})$ és $G_n := (g_n^{(0)}, g_n^{(1)}, \dots, g_n^{(m-1)})$ rendszeréből, ahol

$$f_n^{(i)}, g_n^{(i)} : X \rightarrow \mathbb{C} \quad (i = 0, 1, \dots, m-1) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen $\rho_n : X \rightarrow (0, +\infty)$ ($n \in \mathbb{N}$) pozitív súlyfüggvények egy sorozata és tegyük fel, hogy az F_n és G_n m -esek (A_{n+1}, ρ_n) biortogonálisak minden $0 \leq n < N$ esetén.

A (4.2.7) m^n -rétű leképezésekkel vett kompozíció segítségével készítsük el az alábbi rendszereket

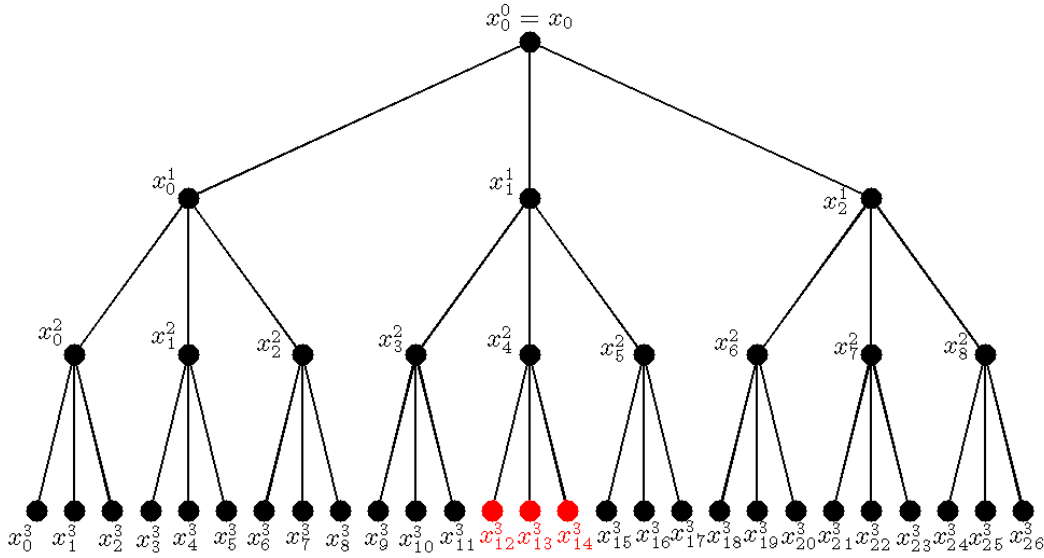
$$\phi_n^{(i)} := f_n^{(i)} \circ T_n, \quad \gamma_n^{(i)} := g_n^{(i)} \circ T_n \quad (0 \leq i < m) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

és tekintsük most is az ezekből készített függvény m -esek rendszerét

$$\Phi_n := (\phi_n^{(i)}, 0 \leq i < m), \quad \Gamma_n := (\gamma_n^{(i)}, 0 \leq i < m) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A fenti módon definiált rendszereket Rademacher-szerű függvények rendszereinek nevezzük, a rendszerek szorzatrendszereként kaphatók a Walsh-szerű rendszerek:

$$\psi_\ell := \prod_{i=0}^{N-1} \phi_i^{\ell_i} \quad \eta_\ell := \prod_{i=0}^{N-1} \gamma_i^{\ell_i} \quad (0 \leq \ell < m^N) \quad \ell = \sum_{i=0}^{N-1} \ell_i m^i \quad \ell_i \in \{0, 1\}.$$

4.2. ábra. Az X^3 halmaz $I_{2,4}$ 3-adikus intervalluma

4.3.1. Tétel (KB[51]). *A $(\psi_\ell, 0 \leq \ell < m^N)$ és $(\eta_\ell, 0 \leq \ell < m^N)$ rendszerek m^n -edik vegyes magfüggvénye szorzatalakra hozható:*

$$D_{m^n}(x, t) := \sum_{k=0}^{m^n-1} \psi_k(x) \overline{\eta_k(t)} = \prod_{i=0}^{n-1} (\phi_i^{(0)}(x) \overline{\gamma_i^{(0)}(t)} + \phi_i^{(1)}(x) \overline{\gamma_i^{(1)}(t)} + \dots + \phi_i^{(m-1)}(x) \overline{\gamma_i^{(m-1)}(t)}),$$

ahol $x, t \in X$ és $0 \leq n < N$.

Bizonyítás. I. Az állítás $n = 1$ esetén teljesül:

$$D_m(x, t) := \sum_{k=0}^{m-1} \psi_k(x) \overline{\eta_k(t)} = \phi_0^{(0)}(x) \overline{\gamma_0^{(0)}(t)} + \phi_0^{(1)}(x) \overline{\gamma_0^{(1)}(t)} + \dots + \phi_0^{(m-1)}(x) \overline{\gamma_0^{(m-1)}(t)}.$$

II. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén az állítás a D_{m^n} magfüggvényre teljesül.

III. Megmutatjuk, hogy teljesül $n+1$ -re is.

Bontsuk fel az $\{\ell \in \mathbb{N} : 0 \leq \ell < m^{n+1}\}$ halmazt az alábbi páronként diszjunkt halmazokra:

$$\{\ell \in \mathbb{N} : 0 \leq \ell < m^{n+1}\} = \bigcup_{j=0}^{m-1} \{\ell < m^n + 1 : \ell_n = j\} = \bigcup_{j=0}^{m-1} \{jm^n + k : 0 \leq k < m^n\}.$$

A szorzatrendszer definíciója alapján az alábbi összefüggés igaz:

$$\psi_{jm^n+k} = \phi_n^{(j)} \cdot \psi_k, \quad \eta_{jm^n+k} = \gamma_n^{(j)} \cdot \eta_k.$$

Így az m^{n+1} -edik Dirichlet magfüggvény az alábbi formában írható:

$$\begin{aligned} D_{m^{n+1}}(x, t) &= \sum_{\ell=0}^{m^{n+1}-1} \psi_{\ell}(x) \overline{\eta_{\ell}(t)} = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m^n-1} \phi_n^{(j)}(x) \psi_k(x) \overline{\gamma_n^{(j)}(t) \eta_k(t)} = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \phi_n^{(j)}(x) \overline{\gamma_n^{(j)}(t)} \sum_{k=0}^{m^n-1} \psi_k(x) \overline{\eta_k(t)} = \sum_{j=0}^{m-1} \phi_n^{(j)}(x) \overline{\gamma_n^{(j)}(t)} D_{m^n}(x, t). \end{aligned}$$

Tehát az állítás igaz minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. □

4.3.2. Tétel (KB[51]). A

$$\psi_{\ell} := \prod_{i=0}^{N-1} \phi_i^{\ell_i} \quad (0 \leq \ell < m^N), \quad \ell = \sum_{i=0}^{N-1} \ell_i m^i, \quad \ell_i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

és

$$\eta_{\ell} := \prod_{i=0}^{N-1} \gamma_i^{\ell_i} \quad (0 \leq \ell < m^N), \quad \ell = \sum_{i=0}^{N-1} \ell_i m^i, \quad \ell_i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

szorzatrendszerek biortogonálisak az

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x \in X_N} f(x) \overline{g(x)} \sigma_N(x),$$

diszkrét skaláris szorzatra nézve, ahol

$$\sigma_N(x) D_{m^N}(x, t) = \delta_{x,t} \quad (x, t \in X_N), \quad (4.3.1)$$

és

$$\sigma_N(x) := \prod_{i=0}^{N-1} \rho_i(T_i(x)) \quad (x \in X_N).$$

4.3.3. Következmény. Tetszőleges f függvény esetén a Fourier-sor m^N -edik részletösszegére

$$(S_{m^N} f)(x) = \sum_{k=0}^{m^N-1} \langle f, \eta_k \rangle \psi_k(x) = \sum_{t \in X_N} f(t) \sum_{k=0}^{m^N-1} \psi_k(x) \overline{\eta_k(t)} \sigma_N(t) = \sum_{t \in X_N} f(t) D_{m^N}(x, t) \sigma_N(t).$$

Ebből következik, hogy az m^N -edik részletösszeg interpolálja a függvényt az X_N halmaz pontjaiban, azaz $(S_{m^N} f)(x) = f(x)$, $x \in X_N$.

4.3.1. Általánosított Haar skálázási függvények

Az m^n -edik Dirichlet magfüggvény

$$D_{m^n}(x, t) := \sum_{k=0}^{m^n-1} \psi_k(x) \overline{\eta_k(t)} = \prod_{i=0}^{n-1} (\phi_i^{(0)}(x) \overline{\gamma_i^{(0)}(t)} + \phi_i^{(1)}(x) \overline{\gamma_i^{(1)}(t)} + \dots + \phi_i^{(m-1)}(x) \overline{\gamma_i^{(m-1)}(t)})$$

szorzatalakjából kiindulva az

$$L(x, y) = \phi^{(0)}(x)\overline{\gamma^{(0)}(y)} + \phi^{(1)}(x)\overline{\gamma^{(1)}(y)} + \dots + \phi^{(m-1)}(x)\overline{\gamma^{(m-1)}(y)} \quad (x, y \in X)$$

jelölés felhasználásával a D_{m^N} Dirichlet-féle magfüggvény az alábbi alakba írható:

$$D_{m^N}(x, y) := \prod_{j=0}^{N-1} L(A^{N-1-j}(x), A^{N-1-j}(y)) \quad (x, y \in X).$$

Most már bevezethetjük a $\chi_{n,k}$ Haar skálázási függvények alábbi megfelelőit:

$$\mathcal{I}_{n,k}(x) := m^{-n} \prod_{j=0}^{n-1} L(A^{N-1-j}(x), A^{N-1-j}(x_k^n)),$$

$$(x \in X, 0 \leq k < m^n, n = 1, 2, \dots, N).$$

Igaz a következő tétel, amely azt jelenti, hogy a Haar skálázási függvényekhez hasonlóan a most definiált $\mathcal{I}_{n,k}$ függvények az $I_{n,k}$ halmazok karakterisztikus függvényei.

4.3.4. Tétel (KB[51]). *Legyenek $\mathcal{I}_{n,k}$ az X_N halmaz pontjain ortonormált függvényekből készített Haar skálázási függvények, ekkor*

$$\mathcal{I}_{n,k} = \chi_{I_{n,k}} \quad (0 \leq k < m^n, n = 1, 2, \dots, N),$$

így az X_N halmaz pontjaiban teljesül az alábbi skálázási egyenlet:

$$\mathcal{I}_{n+1,mk}(x) + \mathcal{I}_{n+1,mk+1}(x) + \dots + \mathcal{I}_{n+1,mk+m-1}(x) = \mathcal{I}_{n,k}(x),$$

$$(x \in X_N, 0 \leq k < m^n, n = 1, 2, \dots, N).$$

4.3.5. Megjegyzés. A 4.3.4.Tétel bizonyítása azon alapul, hogy az X_n halmaz két tetszőleges pontja vagy egybeesik, vagy pedig közös ősképpel rendelkezik.

Így megmutatható, hogy az $\mathcal{I}_{n,k}$ függvény szorzatalakjában minden tényező m , az $x \in I_{n,k}$ esetben és a szóban forgó szorzatnak legalább egy tényezője nulla, ha $x \notin I_{n,k}$.

4.3.2. Haar-szerű biortogonális rendszer

A következő egyenletekkel definiálhatjuk a Haar-szerű függvényeket:

$$\mathcal{H}_{n,k}^{(j)} := \mathcal{I}_{n,k} \varphi_{n,k}^{(j)} \quad (0 \leq k < m^n, n = 0, 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, m-1),$$

és

$$\mathcal{K}_{n,k}^{(j)} := \mathcal{I}_{n,k} \gamma_{n,k}^{(j)} \quad (0 \leq k < m^n, n = 0, 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, m-1).$$

4.3.6. Tétel (KB[51]). *A $\mathcal{H}_{n,k}^{(j)}$ és $\mathcal{K}_{n,k}^{(j)}$ rendszerek diszkrét biortogonális rendszerpárt alkotnak az*

$$\langle f, g \rangle := m^{-N} \sum_{x \in X_N} f(x) \overline{g(x)},$$

diszkrét skaláris szorzatra nézve, azaz

$$\langle \mathcal{H}_{n,p}^{(j)}, \mathcal{K}_{\ell,k}^{(i)} \rangle = m^{-n} \cdot \delta_{n,\ell} \cdot \delta_{p,k} \cdot \delta_{i,j},$$

$$(0 \leq p < m^n, 0 \leq n < N, 0 \leq k < m^\ell, 0 \leq \ell < N, 1 \leq i, j < m).$$

4.3.7. Megjegyzés. A 4.3.6.Tétel egyszerű számolással igazolható, mely során m -adikus intervallumok fent említett speciális tulajdonságát kell felhasználnunk.

4.3.3. További általánosítási lehetőség

A számrendszer rögzített m alapja helyett egy $m_n \in \mathbb{N}^{**}$ ($n \in \mathbb{N}$) sorozatot véve a természetes számok Cantor-féle előállításából indulhatunk ki és értelmezhetjük m_n elemből álló függvényrendszerek szorzatrendszerét. Az m -rétű leképezéseket m_n -rétűekre cserélve eljuthatunk a Vilenkin-féle rendszerek általánosításához. A Vilenkin-szerű rendszerek további tulajdonságairól a [13] cikkben, vagy a [30] könyvben olvashatunk.

5. fejezet

Racionális interpoláció és alkalmazásai

Az ebben a fejezetben bemutatott ortogonális és diszkrét ortogonális rendszerek konstrukciója eltér az előző fejezetekben bemutatottaktól, de ezek segítségével is hatékony interpolációs eljárások szerkeszthetők. Ily módon illeszkedik az előző fejezetekhez. Ebben a fejezetben bemutatott eredmények a [49] cikkben jelentek meg.

A fejezetben nem-korlátos sávszélességű folytonos jelek frekvenciatartományait vizsgáljuk. Számos, gyakorlati szempontból fontos LTI-rendszer (lineáris idő-invariáns rendszer) reprezentálható N -edrendű konstans együtthatós lineáris differenciálegyenletekkel. Az ilyen rendszerek transzfer függvényei racionális függvények. Így célunk olyan mintavételezési és interpolációs algoritmus konstruálása, amely a racionális függvények esetén jó konvergenciatulajdonságokkal rendelkezik. A konstrukcióban általánosított Fourier-típusú reprezentációt használunk, amelyet speciális racionális függvényekből álló ortogonális bázisok, az alsó-, illetve felső-félsík úgynevezett Malmquist-Takenaka rendszereinek segítségével írunk le. Ez a fajta reprezentáció sokkal hatékonyabb mint a Fourier típusú reprezentáció, különösen akkor, amikor a transzferfüggvény valamely apriori módon rögzített tulajdonsággal rendelkezik. A Malmquist-Takenaka rendszer diszkrét ortogonalitását kihasználva egy új racionális interpolációs operátort vezetünk be, mind a felső-, mindpedig az alsó-félsík esetén. Ezt a két interpolációt kombinálva egzakt interpolációt készíthetünk racionális függvények igen széles osztályára, köztük a Runge-féle tesztfüggvényre is. Ezen racionális interpolációs operátorok tulajdonságait fogjuk tanulmányozni.

5.1. Bevezetés

5.1.1. Motiváció

A racionális ortonormált rendszerek használatát a mérnöki területeken az 1950-es években Kautz, Huggins és Young vezették be.

A téma matematikai alapjainak vizsgálata egészen az 1920-as évekig, Takenaka[41], Malmquist[19] és Walsh [43] munkásságáig nyúlik vissza, amikor a Szegő által használt polinom-interpolációs és approximációs ötletet általánosították és új racionális ortogonális rendszereket vezettek be.

Jelölje $\mathcal{F}(x)(w)$ vagy $X(w)$ az $x(t)$ jel Fourier transzformáltját, melyet az

$$\mathcal{F}(x)(w) = X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-iwt} dt \quad (w \in \mathbb{R})$$

összefüggéssel definiálhatunk.

Az $X(w)$ jel inverz Fourier transzformáltja az alábbi módon értelmezett:

$$\mathcal{F}^{-1}(X)(t) = x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{iwt}dw \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Tegyük fel, hogy egy folytonos $x(t)$ input-tal és $y(t)$ output-tal rendelkező rendszerünk van. Kizárólag olyan rendszerekkel fogunk foglalkozni, melyek lineárisak és az időben invarianciát mutatnak. Az olyan rendszerekre, melyek e két fontos tulajdonsággal rendelkeznek lineáris, idő-invariáns (linear time-invariant (LTI)) rendszerekként szokás hivatkozni.

Tegyük fel tehát, hogy egy $x(t)$ inputtal és $y(t)$ outputtal rendelkező LTI-rendszerrel van dolgunk, melynek impulzus-válasza $h(t)$. Az ilyen rendszerek viselkedését az

$$y(t) = x(t) * h(t).$$

alakú konvolúcióval lehet leírni.

Jelölje rendre $X(w)$, $Y(w)$, és $H(w)$ az $x(t)$, $y(t)$ and $h(t)$ függvények Fourier transzformáltjait. A fenti egyenlet mindkét oldalának Fourier-transzformáltját véve az

$$Y(w) = \mathcal{F}(x * h)(w)$$

összefüggéshez jutunk. A Fourier-transzformáció és a konvolúció kapcsolatát felhasználva a fenti összefüggés az alábbi alakba írható:

$$Y(w) = X(w)H(w) \quad (w \in \mathbb{R}).$$

Ez az eredmény egy alternatív lehetőséget biztosít az LTI-rendszerek viselkedésének vizsgálatára. Nevezetesen, megfigyelhetjük a rendszert azáltal, hogy az input és output jelek Fourier transzformáltjain műveleteket végzünk a frekvencia térben. Ebben az esetben a fázistérben használatos konvolúció helyett a frekvenciatérben szorzást használhatunk. Az output jel frekvencia spektruma (azaz a Fourier transzformáltja) az input jel frekvencia spektrumának (azaz a Fourier transzformáltjának) és az impulzus-válasz frekvencia spektrumának (azaz a Fourier transzformáltjának) szorzataként kapható. A $H(w)$ Fourier transzformáltra a továbbiakban úgy fogunk hivatkozni, mint a rendszer frekvencia válasza. Ha ismerjük az inputot, az $X(w)$ Fourier transzformált számolható, ez a két mennyiség pedig meghatározza az $Y(w)$ Fourier transzformáltat. Inverz Fourier transzformáció alkalmazásával megkapható az $y(t)$ output.

A gyakorlatban, még abban az esetben is, amikor mind az input, mind pedig az output folytonos, végezhetünk diszkrét méréseket az input- és output-jeleken, mind a fázis-, mind pedig a frekvenciatérben. Ez azt jelenti, hogy a probléma, amivel szembesülünk, hogy hogyan lehet a frekvenciaválaszt, az input illetve output jeleket rekonstruálni a $H(w)$ néhány pontban ismert értékéből. A problémát korlátos sávzélességű jelek esetében, mintavételezés és interpoláció használatával, például a Whittaker-Kotelnikov-Shannon-féle tétel alkalmazásával meg lehet oldani. Ehhez viszont szükséges a jel sávzélességének apriori ismerete. Célunk, hogy rekonstrukciós eljárást adjunk arra az esetre is, amikor a sávzélességet apriori nem ismerjük vagy a jel nem-korlátos sávzélességű.

Számos, gyakorlati jelentőséggel bíró LTI-rendszer N -edrendű állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletekkel reprezentálható. Tegyük fel, hogy a rendszerünk input jele $x(t)$ és outputja $y(t)$. Ekkor a rendszer input-otput viselkedése az alábbi típusú egyenlettel írható le:

$$\sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

(ahol $M < N$). Jelölje az $x(t)$ és $y(t)$ jelek Fourier-transzformáltjait rendre $X(w)$ és $Y(w)$. A fenti egyenlet mindkét oldalának Fourier transzformáltját véve és felhasználva a Fourier transzformált tulajdonságait, az összefüggést a következő ekvivalens formában írhatjuk át:

$$\sum_{k=0}^N b_k \mathcal{F} \left(\frac{d^k}{dt^k} y(t) \right) = \sum_{k=0}^M a_k \mathcal{F} \left(\frac{d^k}{dt^k} x(t) \right).$$

A differenciál operátor és a Fourier transzformált kapcsolatát kihasználva:

$$\sum_{k=0}^N b_k (iw)^k Y(w) = \sum_{k=0}^M a_k (iw)^k X(w).$$

Kiemelés után kapjuk:

$$Y(w) \sum_{k=0}^N b_k (iw)^k = X(w) \sum_{k=0}^M a_k (iw)^k.$$

Az egyenletet átrendezve a rendszer $H(w)$ frekvenciaválasza kifejezhető:

$$H(w) = \frac{Y(w)}{X(w)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k (iw)^k}{\sum_{k=0}^N b_k (iw)^k}.$$

Vegyük észre, hogy a fent jellemzett tulajdonságú függvények esetén a frekvencia válasz racionális függvény, így a feladatunk egy ilyen esetben nem más, mint racionális függvények közelítése a mérési adataink felhasználásával.

5.1.2. Mintavételezés és interpoláció

Gyakran találkozunk olyan problémával, amikor egy időben folytonos jelet szeretnénk a diszkrét fázistérben leírni, vagy éppen fordítva. Például, ha egy időben folytonos audiójelet szeretnénk a digitális számítógépünkkel feldolgozni (ami egy időben diszkrét rendszer), vagy ha az időben diszkrét audió jelünket egy hangszórón szeretnénk lejátszani (ami meg időben folytonos rendszer). Nyilvánvaló tehát, hogy számos eszköz igényli, hogy kapcsolatot találjunk a folytonos és diszkrét fázistér között. Az eljárásokat, amelyekkel ezt a kapcsolatot létrehozhatjuk, mintavételezésnek és interpolációnak nevezzük.

A mintavételezés lehetőséget ad arra, hogy időben diszkrét jelet készítsünk egy eredetileg folytonos jelből. Noha a mintavételezésnek számos különböző módja ismeretes, a leggyakrabban mégis a periodikus mintavételezés használatos. Az ilyen rendszer egy $y[n]$ minta-sorozatot állít elő az $x(t)$ időben folytonos jelből az $y[n] = x(nT)$ kapcsolat segítségével minden n egész esetén, ahol T egy pozitív valós konstans. A T konstans mintavételezési periódusnak szokás nevezni, $w_s = 2\pi/T$ pedig a mintavételi frekvencia.

Időben diszkrét jelből kiindulva az interpoláció segítségével tudunk folytonos jelet készíteni. Gyakorlatilag az eljárás során célunk, hogy a jelhez a mintavételi pontok közötti pontokban is értékeket rendeljünk. Korlátozott sáv szélességű függvények esetére jól ismert interpolációs eljárások vannak. Az interpoláció eredményeként egy időben folytonos $\hat{x}(t)$ jelet kapunk a diszkrét $y[n]$ jelsorozatból az

$$\hat{x}(t) = \mathcal{L}(y[n]),$$

reláció alapján, ahol \mathcal{L} valamely az $y[n]$ értékekből előállított függvény. Az \mathcal{L} függvény pontos alakja függ az alkalmazott interpolációs eljárástól. Az interpolációt megvalósító rendszert ideális diszkrét-folytonos átalakítónak (D/C-converter) szokás nevezni.

A szokásos körülmények és feltételek mellett az időben folytonos jel tökéletesen helyreállítható a mintavételezettjéből. Különösen abban az esetben, ha a mintavételezett jel korlátos sávzsélességű volt.

A Whittaker-Kotelnikov-Shannon-féle tétel szabályos mintavételezési formulát ad az f jel rekonstrukciójára annak $n\pi/b$ -beli mintavételezettjéből:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\pi/b) \frac{\sin b(t - n\pi/b)}{b(t - n\pi/b)}. \quad (5.1.1)$$

A tétel „ b -band-limited”, véges energiájú jelek esetén alkalmazható, azaz olyan $f \in L^2(\mathbb{R})$ -beli függvények esetén, melyek Fourier-transzformáltjának tartója legfeljebb a $[-b, b]$ intervallum. Az összes ilyen függvény terét ($PW([-b, b])$) Paley-Wiener-térnek nevezzük. (A Paley-Wiener terek tulajdonságaival a [27] jegyzet foglalkozik). A Whittaker-Kotelnikov-Shannon-tételnek számos általánosítása van és számos gyakorlati alkalmazása van a mérnöki tudományokban. Egy ilyen általánosítás például Gröchenig a [14] cikkben bizonyított tétele, amely a fenti eljárást kiterjesztette a valós egyenes egy tetszőleges K kompakt részhalmazára és $f \in PW(K)$ függvényekre.

A Whittaker-Kotelnikov-Shannon-féle mintavételezési törvény a Paley-Wiener-terek tulajdonságaiból következik. A ($PW[-b, b]$) Paley-Wiener-tér egy reprodukciós-maggal rendelkező Hilbert tér, melynek reprodukciós magfüggvénye:

$$k(t, u) = \begin{cases} \frac{\sin b(t-u)}{\pi(t-u)}, & t \neq u; \\ b/\pi, & t = u. \end{cases} \quad (5.1.2)$$

A k magfüggvény zérushelyei a $t = m\pi/b$, $u = n\pi/b$ helyeken vannak és a

$$\sqrt{\pi/b} k_{n\pi/b}(t) = \sqrt{\pi/b} \frac{\sin b(t - n\pi/b)}{b(t - n\pi/b)}$$

lokalizált magfüggvény a $PW[-b, b]$ tér ortonormált bázisát adja. A mintavételezési törvény ekvivalens a következő ortonormált sorfejtéssel:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{b} \langle f, k_{n\pi/b} \rangle k_{n\pi/b}(t) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

A bizonyítás lépéseit nem vihetjük át, ha a $K = [-b, b]$ kompakt tartó helyett a $K = (0, \infty)$ halmazzal tekintjük. (lásd: [27]). Ennek a következő a magyarázata: tekintsük a felső félsíkon értelmezett Hardy teret, $H^2(\mathbb{C}_+)$ -t. Ez a tér izomorf az $\mathcal{F}^{-1}(L^2(0, +\infty))$ térrel. Ugyanis

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt = \int_0^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi z} d\xi, \quad (z \in \mathbb{C}_+), \quad (5.1.3)$$

ahonnan következik, hogy a $K(z, t) = \frac{1}{2\pi i(t-z)}$ ($t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}_+$) a felső félsíkon értelmezett Hardy tér reprodukciós magfüggvénye. Ennek a függvénynek azonban nincsenek zérushelyei, így nincsenek (t_n)

csomópontok sem, melyekre a $K(t_n, t)$ lokalizált magfüggvények ortogonális bázist alkotnának $H^2(\mathbb{C}_+)$ -ben. A későbbi fejezetekben figyelmünket elsősorban nem-korlátos sávszélességű jelek racionális interpolációjára fordítjuk.

A racionális interpoláció egyike a legnehezebb interpolációs módszereknek. Előnye viszont a nagy pontosság és az, hogy itt nem jelentkezik az a problémák, amelyek a polinom-interpoláció során tipikusak. Ugyanakkor ezeknek az eljárásoknak számos gyengesége ismert, például amíg interpolációs polinom bármely alappont-rendszer esetén található, az interpoláció racionális függvényekkel nem minden pontrendszer esetén megoldható. Nagy problémát jelent továbbá a pólusok helyes megválasztása is.

A legelső racionális interpoláció megvalósítására írt algoritmus nem volt más, mint a $p(x)$ és $q(x)$ polinomok (p a számláló és q a nevező) ismeretlen együtthatóinak meghatározására felírt egyenletrendszer megoldása. Azonban, ha az alappontok száma túl nagy, az egyenletrendszer rosszul kondicionálttá válik és az együtthatók számottevő hibával számolhatók. A racionális interpolációról általánosságban elmondható, hogy az együtthatók számolása során mindig jelentkezik hiba. Még ha egészen kis hibáról van is szó, ezek azt okozzák, hogy a racionális interpolációval előállított függvény nem fog átmenni az összes megadott ponton. Ez az, amiért nem terjedtek el ezen algoritmusok gyakorlati felhasználásban.

1986-ban C. Schneider and W. Werner baricentrikus reprezentációt használt a racionális interpolációhoz. Berrut és szerzőtársai továbbfejlesztették ezt az algoritmust. Sajnos ennél az algoritmusnál is igaz, hogy a számláló- és a nevező-polinom fokszámának növekedésével a probléma rosszul kondicionálttá válik. Így az algoritmus megbízhatósága és stabilitása nem elég jó ahhoz, hogy általános megoldási módszerként javasolhatnánk.

Floater és Hormann a [12] cikkben leírtak egy eljárást az interpolációs függvény pólusok nélküli előállítására. A Floater-Hormann algoritmus gyors, stabil és megbízható. A $[-5; 5]$ intervallum ekvidisztans felosztása mellett összehasonlították az interpoláció hibáját különböző N -ekre mind az $f(x) = \sin(x)$, mind pedig az $f(x) = 1/(1+x^2)$ Runge-féle tesztfüggvény esetén. Az előbbi függvény jól interpolálható a szokásos polinom-interpolációkkal. A Runge-féle tesztfüggvény viszont a klasszikus példafüggvény, amely nem interpolálható polinomokkal ekvidisztans felosztás mellett. A Floater-Hormann racionális interpoláció megoldja ezt a problémát, de még mindig jelentkezik hibák.

A mintavételezés és a polinom- vagy racionális interpoláció kapcsolatának további részleteiről a következő monográfiákban olvashatunk: [27, 38, 39].

A továbbiakban speciális racionális interpolációs eljárást fogunk javasolni, amely egzakt interpolációt ad racionális függvények egy széles osztályára, melyek nem rendelkeznek pólussal a valós tengelyen, köztük a Runge-féle tesztfüggvényre is.

5.1.3. A felső- és az alsó-félsík Hardy-tere

Legyen $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ a komplex számsík felső félsíkja és $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}$ az alsó félsík, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ pedig az origó középpontú egységkörlemez, Jelölje továbbá $H(\mathbb{C}_+)$, $H(\mathbb{C}_-)$, $H(\mathbb{D})$ rendre a \mathbb{C}_+ , \mathbb{C}_- és a diszk holomorf függvényeinek halmazát.

A továbbiakban a

$$H^2(\mathbb{C}_+) = \left\{ h \in H(\mathbb{C}_+) : \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} |h(x+iy)|^2 dx : y > 0 \right\} < \infty \right\}, \quad (5.1.4)$$

$$H^2(\mathbb{C}_-) = \left\{ h \in H(\mathbb{C}_-) : \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} |h(x+iy)|^2 dx : y < 0 \right\} < \infty \right\}, \quad (5.1.5)$$

$$H^2(\mathbb{D}) = \left\{ h \in H(\mathbb{D}) : \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |h(re^{it})|^2 dt : r \in (0,1) \right\} < \infty \right\} \quad (5.1.6)$$

Hardy-tereken fogunk dolgozni. Ezen terek legfontosabb tulajdonságai megtalálhatók például a [8] és a [20] könyvekben.

Minden $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ vagy $f \in H^2(\mathbb{C}_-)$ esetén létezik egy $L^2(\mathbb{R})$ -beli nem-tangenciális határfüggvény. Az $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ határfüggvény Fourier transzformáltjának tartója $[0, \infty)$ -beli, illetve $f \in H^2(\mathbb{C}_-)$ határfüggvény Fourier transzformáltjának tartója $(-\infty, 0]$ -beli. Ismeretes, hogy $L^2(\mathbb{R}) = H^2(\mathbb{R}) \oplus \overline{H^2(\mathbb{R})}$, ahol $H^2(\mathbb{R})$ a $H^2(\mathbb{C}_+)$ analitikus függvényeinek határfüggvényeit tartalmazza és $\overline{H^2(\mathbb{R})}$ a $H^2(\mathbb{C}_-)$ -beli analitikus függvények határfüggvényeinek halmaza.

Hasonlóképpen minden $f \in H^2(\mathbb{D})$ függvény esetén létezik egy $L^2(\mathbb{T})$ -beli nem-tangenciális határfüggvény.

Az egyszerűség kedvéért ugyanazt a jelölést használjuk a Hardy terekbeli függvények esetén, mint a nem-tangenciális határfüggvényeikre.

$H^2(\mathbb{C}_+)$, $H^2(\mathbb{C}_-)$ és $H^2(\mathbb{D})$ Hilbert terek az alábbi skaláris szorzatokkal:

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{C}_+)} := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in H^2(\mathbb{C}_+), \quad (5.1.7)$$

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{C}_-)} := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt, \quad f, g \in H^2(\mathbb{C}_-), \quad (5.1.8)$$

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt, \quad f, g \in H^2(\mathbb{D}). \quad (5.1.9)$$

A felső-félsík Hardy-tere és az egység körlemez Hardy-tere összekapcsolható a Cayley-transzformáció segítségével, amely \mathbb{C}_+ -t \mathbb{D} -re képezi és az alábbi formulával adott:

$$K(\omega) = \frac{i - \omega}{i + \omega}, \quad \omega \in \mathbb{C}_+. \quad (5.1.10)$$

A Cayley-transzformáció az egységkört a valós tengelybe viszi át, amelyet a következő megfeleltetés ír le:

$$e^{is} = K(t) = \frac{i - t}{i + t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in (-\pi, \pi)$$

ahonnan $s = 2 \arctan(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

A Cayley-transzformáció segítségével $H^2(\mathbb{D})$ -ről $H^2(\mathbb{C}_+)$ -ra az alábbi lineáris transzformáció létesíthető. Legyen $f \in H^2(\mathbb{D})$, ekkor

$$Tf := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\omega + i} (f \circ K) \quad (5.1.11)$$

és ez egy izomorfizmus a két tér között.

Tegyük fel, hogy F valós értékű $L^2(\mathbb{R})$ -beli függvény. Ekkor a $\mathbb{H}^2(\mathbb{C}_+)$ -ra vett projekciója

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)}{t - z} dt$$

alakban írható. Jelöljük $F^+(z)$ nem-tangenciális határfüggvényét $F^+(t)$ -vel, ekkor $F(t) = 2 \operatorname{Re} F^+(t)$. Ez elégséges F^+ felbontásához.

A felső-félsíkra a Cauchy-formula a következő: minden $F \in \mathbb{H}^p(\mathbb{C}^+)$ függvény esetén, ahol $1 \leq p < +\infty$, ha $F(s)$ jelöli az F nem-tangenciális határfüggvényét, akkor

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(s)}{s-z} ds, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (5.1.12)$$

A klasszikus Fourier bázisokkal bizonyítottan jól reprezentálhatók a lineáris stacionárius jelek, ugyanakkor a nemlineáris stacionárius jelek reprezentációjában már nem olyan hatékonyak ezek a bázisok (részletesebben [28]-ben). Ilyen esetekben célszerűbb racionális függvények ortonormált bázisait használni. Az egységkörlemezben a jól ismert Malmquist–Takenaka rendszert szokás használni ([1, 5, 6, 7, 19, 23, 26, 25, 28, 32, 36, 35, 37, 39, 41]). Létezik ennek a rendszernek egy megfelelője a felső-félsík esetén.

Egy tetszőleges $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ felső-félsíkbeli komplex számokból álló sorozat segítségével definiáljuk a $\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ függvényrendszert a következőképpen:

$$\Psi_1(z) = \frac{\sqrt{\frac{\Im \lambda_1}{\pi}}}{z - \lambda_1}, \quad \Psi_n(z) = \frac{\sqrt{\frac{\Im \lambda_n}{\pi}}}{z - \lambda_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{z - \lambda_k}{z - \bar{\lambda}_k}, \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (5.1.13)$$

A $\{\bar{\lambda}_i\}_{i=0}^{\infty}$ pólusoknak megfelelő racionális függvények rendszere az alsó-félsíkban értelmezett. A $z = i \frac{1-y}{1+y}$ lineáris-tört transzformáció a rendszert az egység kör Malmquist–Takenaka rendszerébe viszi.

A $\{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ rendszer ortonormált a valós tengelyen a következő értelemben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_n(x) \overline{\Psi_m(x)} dx = \delta_{mn}. \quad (5.1.14)$$

Továbbá, ha rendszer paramétereit teljesítik a következő, ún. nem-Blaschke feltételt a felső-félsík esetén

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Im \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = \infty, \quad (5.1.15)$$

akkor a $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ rendszer teljes ortonormált rendszer a $\mathbb{H}^2(\mathbb{C}_+)$ térben.

Džrbašjan [10] cikkében bebizonyította a Darboux-Christoffel formula felső-félsíkra vonatkozó analogonját, mely szerint a fenti rendszer Dirichlet-féle magfüggvénye zárt alakban írható felhasználva a félsíkon vett Blaschke szorzatokat, amelyeket $N > 0$ esetén a következőképpen definiálunk:

$$\tilde{B}_N(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z - \lambda_k}{z - \bar{\lambda}_k} \eta_k,$$

ahol $\eta_k = \frac{|1 + \lambda_k^2|}{1 + \bar{\lambda}_k^2}$, ha $\lambda_k \neq i$, és $\eta_k = 1$ ha $\lambda_k = i$.

A Darboux-Christoffel formula szerint tetszőleges $z \neq \bar{\xi}$ esetén minden N -re ($1 \leq N < \infty$) teljesül, hogy

$$\sum_{k=1}^N \Psi_k(z) \overline{\Psi_k(\xi)} = \frac{1 - \overline{\tilde{B}_N(\xi)} \tilde{B}_N(z)}{2i\pi(\bar{\xi} - z)}. \quad (5.1.16)$$

5.1.4. Speciális racionális függvényterekre vett projekciós operátorok tulajdonságai

Jelölje \mathcal{P}_k a legfeljebb k -adfokú polinomok halmazát, legyen $\eta(z) = \prod_{n=1}^N (z - \bar{\lambda}_n)$ és $\omega(z) = \prod_{n=1}^N (z - \lambda_n)$. Vezessük be az alábbi speciális racionális függvények halmazát:

$$\mathcal{R}_N := \left\{ \frac{p}{\eta} : p \in \mathcal{P}_{N-1} \right\}, \quad (5.1.17)$$

$$\mathcal{R}_{\bar{N}} := \left\{ \frac{p}{\omega} : p \in \mathcal{P}_{N-1} \right\}. \quad (5.1.18)$$

Hasonlóan legyen

$$\mathcal{R}_{N,\bar{N}} := \left\{ \frac{p}{\eta\omega} : p \in \mathcal{P}_{2N-1} \right\}. \quad (5.1.19)$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{R}_{N,\bar{N}} = \mathcal{R}_N \oplus \mathcal{R}_{\bar{N}}$, azaz \mathcal{R}_N és $\mathcal{R}_{\bar{N}}$ ortogonális komplementerek H^2 -ben.

A

$$\Psi_N = \{\Psi_n, n = 1, 2, \dots, N\}$$

rendszer ortonormált bázist alkot a felső-félsíkon értelmezett Hardy tér

$$\mathcal{R}_N = \text{span}\{\Psi_\ell, \ell = 1, \dots, N\}$$

alterében.

Célszerű a Ψ_N rendszert kiterjeszteni és negatív indexekre is értelmezni. Jelölje tehát

$$\tilde{B}_{\bar{N}}(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z - \bar{\lambda}_k}{(z - \lambda_k)\eta_k},$$

és

$$\Psi_{\bar{N}} = \{\Psi_{-n} = \tilde{B}_{\bar{N}}\Psi_n, n = 1, 2, \dots, N\}.$$

Mivel $\mathcal{R}_{\bar{N}} = \tilde{B}_{\bar{N}}\mathcal{R}_N$, ezért a $\Psi_{\bar{N}}$ rendszer ortonormált bázis $\mathcal{R}_{\bar{N}}$ -ben, és

$$\mathcal{R}_{\bar{N}} = \text{span}\{\Psi_\ell, \ell = -1, \dots, -N\},$$

így az $\mathcal{R}_{\bar{N}}$ az alsó-félsík Hardy terének altere.

Egy tetszőleges $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ függvény \mathcal{R}_N altérre vett merőleges vetületén az alábbi függvényt értjük:

$$P_N f(z) = \sum_{k=1}^N \langle f, \Psi_k \rangle \Psi_k(z). \quad (5.1.20)$$

Hasonlóan értelmezhető egy tetszőleges $f \in H^2(\mathbb{C}_-)$ függvény $\mathcal{R}_{\bar{N}}$ altérre vett merőleges vetülete is:

$$P_{\bar{N}} f(z) = \sum_{k=-N}^{-1} \langle f, \Psi_k \rangle \Psi_k(z). \quad (5.1.21)$$

A fenti projekciós operátorok $P_N f$, illetve $P_{\bar{N}} f$ magfüggvényei:

$$K_N(\omega, w) = \sum_{k=1}^N \overline{\Psi_k(w)} \Psi_k(\omega), \quad (5.1.22)$$

$$K_{\overline{N}}(\omega, w) = \sum_{k=-N}^{-1} \overline{\Psi_k(w)} \Psi_k(\omega). \quad (5.1.23)$$

Ekkor a projekciós operátorok kifejezhetők a skaláris szorzat segítségével:

$$P_N f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_N(z, t) dt = \langle f(\cdot), K_N(\cdot, z) \rangle. \quad (5.1.24)$$

$$P_{\overline{N}} f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_{\overline{N}}(z, t) dt = \langle f(\cdot), K_{\overline{N}}(\cdot, z) \rangle. \quad (5.1.25)$$

Az \mathcal{R}_N tér reprodukciós magfüggvénye $K_N(\omega, w)$, azaz minden $f \in \mathcal{R}_N$ esetén

$$P_N f(z) = \langle f(\cdot), K_N(\cdot, z) \rangle = f(z). \quad (5.1.26)$$

Hasonlóan $K_{\overline{N}}(\omega, w)$ lesz a $\mathcal{R}_{\overline{N}}$ altér reprodukciós magfüggvénye, így minden $f \in \mathcal{R}_{\overline{N}}$ függvény esetén

$$P_{\overline{N}} f(z) = \langle f(\cdot), K_{\overline{N}}(\cdot, z) \rangle = f(z). \quad (5.1.27)$$

A $\mathcal{R}_{N, \overline{N}}$ reprodukciós magfüggvénye pedig

$$K_{N, \overline{N}}(\omega, w) = \sum_{k=-N, k \neq 0}^N \overline{\Psi_k(w)} \Psi_k(\omega).$$

Ez a magfüggvény is zárt alakban írható, azaz ha $\bar{\xi} \neq z$, akkor

$$K_{N, \overline{N}}(\xi, z) = \frac{\overline{\widetilde{B}_N(z)} \widetilde{B}_N(\xi) - \widetilde{B}_N(\xi) \widetilde{B}_N(z)}{2i\pi(\bar{\xi} - z)}. \quad (5.1.28)$$

Ha a (5.1.15) feltétel teljesül, akkor mind $\{\Psi_k, k = 1, \dots, \infty\}$, mind pedig $\{\Psi_k, k = -1, \dots, -\infty\}$ teljes ortonormált rendszer előbbi a $H^2(\mathbb{C}_+)$ térben, utóbbi pedig $H^2(\mathbb{C}_-)$ -ban. Ebből adódóan kapjuk, hogy ha $N \rightarrow \infty$, akkor $\|f - P_N f\|_{H^2(\mathbb{C}_+)} \rightarrow 0$ és $\|f - P_{\overline{N}} f\|_{H^2(\mathbb{C}_-)} \rightarrow 0$.

Megmutatható továbbá, hogy $P_N f$ egy racionális interpolációs operátor a $\{\lambda_k, k = 1, \dots, N\}$ halmazon és $P_{\overline{N}} f$ egy racionális interpolációs operátor a $\{\bar{\lambda}_k, k = 1, \dots, N\}$ halmazon.

5.2. Racionális interpoláció

5.2.1. A projekciós operátor interpolációs tulajdonsága

5.2.1. Tétel (KB,PM,PA[49]). *Minden $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ függvény esetén a $P_N f$ projekciós operátor interpolációs operátor a $\{\lambda_k, 1 \leq k \leq N\}$ halmazon, azaz*

$$P_N f(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad (1 \leq k \leq N). \quad (5.2.1)$$

Továbbá minden $f \in H^2(\mathbb{C}_-)$ függvény esetén a $P_{\overline{N}} f$ projekciós operátor interpolációs operátor a $\{\bar{\lambda}_k, 1 \leq k \leq N\}$ halmazon, azaz

$$P_{\overline{N}} f(\bar{\lambda}_k) = f(\bar{\lambda}_k), \quad (1 \leq k \leq N). \quad (5.2.2)$$

Bizonyítás. A felső félsík esetén az állítás első felét bizonyították [11]-ban. A bizonyítás gondolatmenete átvihető az alsó félsíkra is. Mindkét állítás bizonyításánál felhasználjuk hogy a megfelelő magfüggvények zárt alakban írhatók és használjuk a Cauchy integrál megfelelőjét a felső- és alsó-félsíkra vonatkozóan. Itt az alsó-félsíkra mutatjuk meg a bizonyítást. Džrbašjan (5.1.16) eredményeit felhasználva $\bar{w} \neq \omega$ esetén adódik, hogy

$$\begin{aligned} K_{\bar{N}}(\omega, w) &= \sum_{k=-N}^{-1} \overline{\Psi_k(w)} \Psi_k(\omega) = \overline{\tilde{B}_{\bar{N}}(w)} \tilde{B}_{\bar{N}}(\omega) \sum_{k=1}^N \overline{\Psi_k(w)} \Psi_k(\omega) = \\ &= \overline{\tilde{B}_{\bar{N}}(w)} \tilde{B}_{\bar{N}}(\omega) \frac{1 - \overline{\tilde{B}_N(w)} \tilde{B}_N(\omega)}{2i\pi(\bar{w} - \omega)} = \frac{\overline{\tilde{B}_{\bar{N}}(w)} \tilde{B}_{\bar{N}}(\omega) - 1}{2i\pi(\bar{w} - \omega)}. \end{aligned}$$

Innen $\omega = \bar{\lambda}_k$, ($k = 1, \dots, N$) esetén adódik

$$K_{\bar{N}}(\bar{\lambda}_k, w) = \frac{1}{2i\pi(\bar{w} - \bar{\lambda}_k)} \quad (w \in \mathbb{C}_-). \quad (5.2.3)$$

Bármely $f \in H^2(\mathbb{C}_-)$ függvény visszaállítható a határfüggvényéből a Cauchy-féle integrálformula segítségével:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{-t+z} dt, \quad (z \in \mathbb{C}_-).$$

Így

$$P_{\bar{N}}f(\bar{\lambda}_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{-t+\bar{\lambda}_k} dt = f(\bar{\lambda}_k) \quad (k = 1, \dots, N).$$

□

5.2.2. A projekciós operátor pontonkénti konvergenciája

5.2.2. Tétel (KB,PM,PA[49]). *Tegyük fel, hogy az (5.1.15) feltétel teljesül. Ekkor bármely $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ függvény és bármely $z \in \mathbb{C}_+$ esetén $P_N f(z) \rightarrow f(z)$, ha $N \rightarrow \infty$, és hasonlóan bármely $f \in H^2(\mathbb{C}_-)$ és $z \in \mathbb{C}_-$ esetén $P_{\bar{N}} f(z) \rightarrow f(z)$, ha $N \rightarrow \infty$.*

Bizonyítás. Az (5.1.26) és (5.1.16) eredmények felhasználásával kapható:

$$\begin{aligned} |f(z) - P_N f(z)| &= |f(z) - \langle f(\cdot), K_N(\cdot, z) \rangle| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1 - \overline{\tilde{B}_N(t)} \tilde{B}_N(z)}{(t-z)} dt \right| = \\ &= \left| \tilde{B}_N(z) \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\overline{\tilde{B}_N(t)}}{(t-z)} dt \right|. \end{aligned}$$

Alkalmazva a Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz-egyenlőtlenséget és felhasználva, hogy $|\overline{\widetilde{B}_N(t)}| = 1$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, a következő becslésre jutunk:

$$\begin{aligned} |f(z) - P_N f(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} |\widetilde{B}_N(z)| \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\overline{\widetilde{B}_N(t)}}{(t-z)} \right|^2 dt} \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} |\widetilde{B}_N(z)| \|f\|_2 \sqrt{\frac{\pi}{|\Im z|}}. \end{aligned}$$

A (5.1.15) feltétel következtében $N \rightarrow \infty$ esetén $|\widetilde{B}_N(z)| \rightarrow 0$. Így a fenti egyenlőtlenségből következik a tétel állítása.

Vegyük észre, hogy $z \in \mathbb{C}_-$ esetén $|\widetilde{B}_N(z)| = |\overline{\widetilde{B}_N(\bar{z})}| \rightarrow 0$ (az (5.1.15) feltétel következtében). A bizonyítás $f \in H^2(\mathbb{C}_-)$ függvények esetére ugyanígy végezhető. \square

A fenti bizonyításból következik, hogy $P_N f$ egyenletesen konvergál f -hez a felső-félsík bármely kompakt részhalmazán és $P_{\overline{N}} f \rightarrow f$ egyenletesen az alsó-félsík bármely kompakt részhalmazán.

Kiváncsiak vagyunk továbbá arra is, hogy hogyan viselkedik P_N és $P_{\overline{N}}$ a valós számegeyenesen.

5.2.3. Tétel (KB,PM,PA[49]). *Ha az $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ függvény olyan racionális függvény, melynek parciális-tört felbontása*

$$f(z) = \sum_{\ell=1}^m \frac{c_\ell}{z - \gamma_\ell}, \quad \gamma_\ell \in \mathbb{C}_+, \quad (5.2.4)$$

akkor $|f(t) - P_N f(t)| \rightarrow 0$ egyenletesen \mathbb{R} -en. Továbbá $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{R}} (1+t^2) |f(t) - P_N f(t)|^2 = 0$.

Hasonlóan, ha $f \in H^2(\mathbb{C}_-)$ olyan racionális függvény, melynek parciális-tört felbontása

$$f(z) = \sum_{\ell=1}^m \frac{c_\ell}{z - \gamma_\ell}, \quad \gamma_\ell \in \mathbb{C}_+, \quad (5.2.5)$$

akkor $|f(t) - P_{\overline{N}} f(t)| \rightarrow 0$ egyenletesen \mathbb{R} -en és $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{R}} (1+t^2) |f(t) - P_{\overline{N}} f(t)|^2 = 0$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk az

$$f(z) = \sum_{\ell=1}^m \frac{c_\ell}{z - \gamma_\ell}, \quad \gamma_\ell \in \mathbb{C}_+, \quad \gamma_\ell = \alpha_\ell + i\beta_\ell \in \mathbb{C}_+$$

függvényre a Cauchy formulát:

$$\langle f, \Psi_k \rangle = \sum_{\ell=1}^m c_\ell 2i\pi \overline{\Psi_k(\gamma_\ell)}. \quad (5.2.6)$$

A (5.2.6) összefüggésnek megfelelően $P_N f(z)$ az alábbi alakban írható:

$$\begin{aligned} P_N f(z) &= \sum_{k=0}^N \langle f, \Psi_k \rangle \Psi_k(z) = \sum_{k=0}^N \sum_{\ell=1}^m c_\ell 2i\pi \overline{\Psi_k(\gamma_\ell)} \Psi_k(z) = \\ &= \sum_{\ell=1}^m c_\ell \sum_{k=0}^N 2i\pi \overline{\Psi_k(\gamma_\ell)} \Psi_k(z) = \sum_{\ell=1}^m c_\ell \frac{1 - \overline{\widetilde{B}_N(\gamma_\ell)} \widetilde{B}_N(z)}{(\overline{\gamma_\ell} - z)}. \end{aligned}$$

Becsüljük most a projekció $|f(t) - P_N f(t)|$ hibáját:

$$\begin{aligned} |f(t) - P_N f(t)| &= \left| \sum_{\ell=1}^m c_\ell \frac{\overline{\tilde{B}_N(\gamma_\ell)} \tilde{B}_N(t)}{(\overline{\gamma_\ell} - t)} \right| = \left| \tilde{B}_N(t) \sum_{\ell=1}^m \frac{c_\ell \overline{\tilde{B}_N(\gamma_\ell)}}{(\overline{\gamma_\ell} - t)} \right| = \\ &= \left| \tilde{B}_N(t) \right| \left| \sum_{\ell=1}^m \frac{c_\ell \overline{\tilde{B}_N(\gamma_\ell)}}{(\overline{\gamma_\ell} - t)} \right| \leq \sum_{\ell=1}^m \frac{|c_\ell| |\overline{\tilde{B}_N(\gamma_\ell)}|}{|\overline{\gamma_\ell} - t|} \leq \sum_{\ell=1}^m \frac{|c_\ell| |\overline{\tilde{B}_N(\gamma_\ell)}|}{|\beta_\ell|}. \end{aligned}$$

Az (5.1.15) feltétel következtében $\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{B}_N(\gamma_\ell) = 0$. Így $|f(t) - P_N f(t)|$ egyenletesen tart 0-hoz \mathbb{R} -en.

De ennél többet is mondhatunk. Létezik egy $M > 0$ konstans, hogy

$$(1+t^2)|f(t) - P_N f(t)|^2 \leq \sum_{\ell=1}^m |c_\ell|^2 |\overline{\tilde{B}_N(\gamma_\ell)}|^2 \sum_{\ell=1}^m \frac{1+t^2}{|t - \overline{\gamma_\ell}|^2} \leq M \sum_{\ell=1}^m |c_\ell|^2 |\overline{\tilde{B}_N(\gamma_\ell)}|^2,$$

ahol $\gamma_\ell \in \mathbb{C}_+$. Ebből következően

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{R}} (1+t^2)|f(t) - P_N f(t)|^2 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{R}} M \sum_{\ell=1}^m |c_\ell|^2 |\overline{\tilde{B}_N(\gamma_\ell)}|^2 = 0.$$

□

5.2.3. A kiterjesztett Malmquist-Takenaka rendszer diszkrét ortogonalitása

Az eredeti egységkörön vett Malmquist-Takenaka rendszer diszkrét ortogonalitását Pap és Schipp a [25]-ben publikálta. Eisner és Pap [11]-ben igazolták a tétel analogonját a felső-félsík Malmquist-Takenaka rendszerére. A következőkben megmutatjuk, hogy a diszkrét ortogonalitás érvényes marad az alsó-félsíkra kiterjesztett Malmquist-Takenaka rendszer esetében is.

Az egységkörlemez Malmquist-Takenaka rendszere olyan ortonormált rendszer, melyet az $a = (a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{D}$ komplex számok generálnak és kifejezhetők a

$$\varphi_b(z) := \frac{z-b}{1-\bar{b}z} \quad (b \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{C})$$

Blaschke tényezők segítségével.

A diszk $(\Phi_n, n \in \mathbb{N}^*)$ Malmquist-Takenaka rendszere az alábbi formulával adott:

$$\Phi_1(z) := \frac{\sqrt{1-|a_1|^2}}{1-\bar{a}_1 z}, \quad \Phi_n(z) := \frac{\sqrt{1-|a_n|^2}}{1-\bar{a}_n z} \prod_{k=1}^{n-1} \varphi_{a_k}(z) \quad (z \in \mathbb{D}, n = 2, 3, \dots).$$

A $H^2(\mathbb{D})$ Hardy-téren a fenti rendszer ortonormált rendszert alkot, azaz

$$[\Phi_n, \Phi_m] := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_n(e^{it}) \overline{\Phi_m(e^{it})} dt = \delta_{mn} \quad (m, n \in \mathbb{N}^*),$$

ahol δ_{mn} a Kronecker-szimbólum.

Ha az egység-körlemezben teljesül a nem-Blaschke-feltétel, azaz $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) = \infty$, akkor a rendszer teljes az egységkörön négyzetesen integrálható függvények diszkrét analitikus kiterjesztésének $H^2(\mathbb{T})$ Hilbert-terén.

Ha $b \in \mathbb{D}$, akkor φ_b kölcsönösen egyértelmű leképezés \mathbb{D} -n illetve \mathbb{T} -n. Továbbá (a [7] cikkben igazoltak szerint) φ_b az alábbi alakban írható

$$\varphi_b(e^{it}) = e^{i\beta_b(t)} \quad (t \in \mathbb{R}, b = re^{i\tau} \in \mathbb{D}),$$

ahol

$$\beta_b(t) := \tau + \gamma_s(t - \tau), \quad \gamma_s(t) := 2 \arctan \left(s \tan \frac{t}{2} \right), \quad \left(t \in [-\pi, \pi), s := \frac{1+r}{1-r} \right).$$

A γ_s a $\gamma_s(t + 2\pi) = 2\pi + \gamma_s(t)$, $t \in \mathbb{R}$ összefüggés segítségével lett a teljes \mathbb{R} -re kiterjesztve. A β függvény további tulajdonságairól a [5] cikkben olvashatunk.

A $\prod_{j=1}^N \varphi_{a_j}$ Blaschke-szorzat az alábbi alakban írható:

$$B_N(e^{it}) = \prod_{j=1}^N \varphi_{a_j}(e^{it}) = e^{i(\beta_{a_1}(t) + \dots + \beta_{a_N}(t))} \quad (t \in \mathbb{R}, N = 1, 2, \dots).$$

Ez azt eredményezi, hogy a

$$\frac{z - a_1}{1 - \overline{a_1}z} \cdot \frac{z - a_2}{1 - \overline{a_2}z} \cdot \dots \cdot \frac{z - a_N}{1 - \overline{a_N}z} = 1 \quad (5.2.7)$$

egyenletnek N különböző megoldása van, amelyeket a következő módon írhatunk fel

$$z_k := e^{i\tau_k}, \quad \tau_k := \theta_N^{-1}(2\pi(k-1)/N) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \quad (5.2.8)$$

ahol θ_N^{-1} a

$$\theta_N(t) := \frac{1}{N}(\beta_{a_1}(t) + \dots + \beta_{a_N}(t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvény inverze.

Vezessük be az egységkör egyenletes felosztásához tartozó osztópontok halmazát:

$$\mathbb{T}_N := \mathbb{T}_N^a := \{w_k = e^{i\tau_k} : \tau_k = \theta_N^{-1}(2\pi(k-1)/N), k = 1, 2, \dots, N\}, \quad (N = 1, 2, \dots).$$

Definiáljuk továbbá a ρ_N súlyfüggvényt az alábbi összefüggés segítségével:

$$\frac{1}{\rho_N(z)} := \sum_{k=1}^N \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - \overline{a_k}z|^2} \quad (z \in \mathbb{T}, N = 1, 2, \dots).$$

A [25] cikkben igazolták a következő tételt:

Tétel (Theorem A [25]). *A $\Phi_n(1 \leq n \leq N)$ függvények véges gyűjteménye diszkrét ortonormált rendszer a*

$$[F, G]_N := \sum_{z \in \mathbb{T}_N} F(z) \overline{G(z)} \rho_N(z)$$

skaláris szorzatra nézve, azaz

$$[\Phi_n, \Phi_m]_N = \delta_{mn} \quad (1 \leq m, n \leq N).$$

Hogy a fenti tétel megfelelőjét bizonyíthassuk az alsó- illetve felső-félsík Malmquist-Takenaka rendszereire, vezessük be a következő jelöléseket. Jelölje $t_k = \tan \frac{\tau_k}{2}$, ahol τ_k , ($k = 1, \dots, N$) az (5.2.8)-ban meghatározottak, azaz $z_k = e^{i\tau_k} = \frac{i-t_k}{i+t_k}$, ($k = 1, \dots, N$). Vezessük be a következő osztópontok halmazát a valós számegeyenesen:

$$\mathbb{R}_N = \{t_k : k = 1, \dots, N\}. \quad (5.2.9)$$

Tegyük fel, hogy minden osztópont véges és vezessük be a következő súlyfüggvényt:

$$\frac{1}{\tilde{\rho}_N(t)} := K_N(t, t) = \sum_{k=1}^N \frac{\Im \lambda_k}{\pi |t - \lambda_k|^2} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad (5.2.10)$$

és a segítségével az alábbi diszkrét skaláris szorzatot:

$$\langle F, G \rangle_N = \sum_{t \in \mathbb{R}_N} F(t) \overline{G(t)} \tilde{\rho}_N(t). \quad (5.2.11)$$

5.2.4. Tétel (KB,PM,PA[49]). *A $\{\Psi_n\}_{n=1}^N$ függvények véges gyűjteménye diszkrét ortonormált rendszert alkot a*

$$\langle F, G \rangle_N = \sum_{t \in \mathbb{R}_N} F(t) \overline{G(t)} \tilde{\rho}_N(t),$$

skaláris szorzatra nézve, azaz

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_N = \delta_{mn} \quad (1 \leq m, n \leq N). \quad (5.2.12)$$

Hasonlóan a $\{\Psi_n\}_{n=-N}^{-1}$ függvények véges gyűjteménye diszkrét ortonormált rendszert alkot a $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ skaláris szorzatra nézve, azaz

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle_N = \delta_{mn} \quad (-N \leq m, n \leq -1). \quad (5.2.13)$$

Bizonyítás. A tétel állításának első felét a [11] cikkben igazolták. Az állítás második felének igazolásához jelölje $\omega = i \frac{1-z}{1+z}$, $w = i \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $a_k = \frac{i-\lambda_k}{i+\lambda_k}$. Vegyük észre, hogy

$$\frac{i \frac{1-z}{1+z} - \lambda_k}{i \frac{1-z}{1+z} - \overline{\lambda_k}} \frac{|1 + \lambda_k^2|}{1 + \lambda_k^2} \overline{\left(\frac{i \frac{1-\xi}{1+\xi} - \lambda_k}{i \frac{1-\xi}{1+\xi} - \overline{\lambda_k}} \frac{|1 + \lambda_k^2|}{1 + \lambda_k^2} \right)} = \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k} z} \overline{\left(\frac{\xi - a_k}{1 - \overline{a_k} \xi} \right)}.$$

A fenti egyenlőségből következik, hogy

$$\overline{\tilde{B}_N(w)} \tilde{B}_N(\omega) = B_N(z) \overline{B_N(\xi)}.$$

A z_k és t_k ($k = 1, \dots, N$) pontok definíciójából és az előző egyenlőségből kapjuk:

$$\overline{\tilde{B}_N(t_\ell)} \tilde{B}_N(t_k) = \overline{\tilde{B}_N(t_\ell)} \tilde{B}_N(t_k) = B_N(z_k) \overline{B_N(z_\ell)} = 1. \quad (5.2.14)$$

Innentől a bizonyítás megegyezik a [25] cikkbeli A Tétel bizonyításával.

Legyen

$$\Psi_{-n} = \tilde{B}_N \Psi_n, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

és

$$v_{k\ell} := \tilde{B}_{\bar{N}}(t_\ell) \Psi_k(t_\ell) \sqrt{\tilde{\rho}_N(t_\ell)} \quad (1 \leq k, \ell \leq N).$$

Ha $j \neq \ell$, akkor

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N v_{kj} \overline{v_{k\ell}} &= \sqrt{\tilde{\rho}_N(t_j) \tilde{\rho}_N(t_\ell)} \frac{\tilde{B}_{\bar{N}}(t_\ell) \tilde{B}_{\bar{N}}(t_j)}{\tilde{B}_{\bar{N}}(t_\ell) \tilde{B}_{\bar{N}}(t_j)} \sum_{k=1}^N \Psi_k(t_j) \overline{\Psi_k(t_\ell)} = \\ &= \sqrt{\tilde{\rho}_N(t_j) \tilde{\rho}_N(t_\ell)} \frac{1 - \tilde{B}_{\bar{N}}(t_j) \tilde{B}_{\bar{N}}(t_\ell)}{2i\pi(\bar{t}_j - t_\ell)} = 0. \end{aligned}$$

A $j = \ell$ esetben nyilvánvalóan

$$\sum_{k=1}^N v_{kj} \overline{v_{k\ell}} = 1$$

adódik. A fentiekből következik tehát, hogy

$$\sum_{k=1}^N v_{kj} \overline{v_{k\ell}} = \delta_{j\ell} \quad (1 \leq j, \ell \leq N),$$

ami azt jelenti, hogy a $V = [v_{k\ell}]_{k,\ell=1}^N$ mátrix éppen az egységmátrix. Ez a tény pedig azt eredményezi, hogy

$$\sum_{k=1}^N v_{jk} \overline{v_{\ell k}} = \langle \tilde{B}_{\bar{N}} \Psi_j, \tilde{B}_{\bar{N}} \Psi_\ell \rangle_N = \delta_{j\ell}, \quad (1 \leq j, \ell \leq N),$$

tehát a vektorok ortonormáltak. Azaz a $\{\Psi_n\}_{n=-N}^{-1}$ rendszer diszkrét ortonormált rendszer a $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ skaláris szorzatra nézve. \square

A diszkrét ortogonalitás következményeként kapható:

5.2.5. Következmény. Minden $f \in \mathcal{R}_N$ függvény esetén a megfelelő diszkrét és folytonos Malmquist-Takenaka együtthatók megegyeznek, azaz

$$\langle f, \Psi_k \rangle = \langle f, \Psi_k \rangle_N \quad (1 \leq k \leq N), \quad (5.2.15)$$

és

$$P_N f(z) = \langle f(\cdot), K_N(\cdot, z) \rangle = \langle f(\cdot), K_N(\cdot, z) \rangle_N = f(z) \quad (z \in \mathbb{C}_+). \quad (5.2.16)$$

Hasonlóan, minden $f \in \mathcal{R}_{\bar{N}}$ függvényre

$$\langle f, \Psi_k \rangle = \langle f, \Psi_k \rangle_N \quad (-N \leq k \leq -1), \quad (5.2.17)$$

és

$$P_{\bar{N}} f(z) = \langle f(\cdot), K_{\bar{N}}(\cdot, z) \rangle = \langle f(\cdot), K_{\bar{N}}(\cdot, z) \rangle_N = f(z) \quad (z \in \mathbb{C}_-). \quad (5.2.18)$$

5.2.4. Racionális interpolációs operátor a valós számegyenesen elhelyezkedő osztópontokra

Eisner és Pap a [11] cikkében bevezetett a felső-félsíkban egy racionális interpolációs operátort, melynek konstrukciója a felső-félsík Malmquist-Takenaka rendszerének diszkrét ortogonalitásán alapult. Ebben a fejezetben az operátor további tulajdonságait tanulmányozzuk és egy hasonló interpolációs operátort fogunk bevezetni az alsó-félsíkban. Ennek a két interpolációnak a kombinálásával egy a racionális függvények széles osztályára – köztük a Runge-féle tesztfüggvényre is – egzakt interpolációt adhatunk.

Jelölje $\mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$ a felső-félsík analitikus függvényeinek algebráját, amely azokat a függvényeket tartalmazza, melyek analitikusak \mathbb{C}_+ -on, folytonosak $\overline{\mathbb{C}_+}$ -on, és a határfüggvényeikre teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

A fent említett [11] cikkben Eisner és Pap bevezettek egy interpolációs operátort az $\mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$ algebrában. Ehhez hasonló operátort tanulmányozott a [39] cikkében Szabó Zoltán az egységkörlapon értelmezett diszk-algebrán.

Az \mathbb{R}_N -beli csomópontokból kiindulva tekintsük a következő interpolációs operátort:

$$\mathcal{L}_N f := \sum_{t \in \mathbb{R}_N} \frac{K_N(\cdot, t)}{K_N(t, t)} f(t), \quad (5.2.19)$$

ahol $f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$.

Hasonlóan az alsó-félsík analitikus függvényeinek $\mathbb{A}(\mathbb{C}_-)$ algebráján tekintsük az

$$\mathcal{L}_{\overline{N}} f := \sum_{t \in \mathbb{R}_N} \frac{K_{\overline{N}}(\cdot, t)}{K_{\overline{N}}(t, t)} f(t), \quad (5.2.20)$$

interpolációs operátort, ahol $f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_-)$.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\ell_{N,t}(\omega) := \frac{K_N(\omega, t)}{K_N(t, t)}, \quad \ell_{\overline{N},t}(\omega) := \frac{K_{\overline{N}}(\omega, t)}{K_{\overline{N}}(t, t)}, \quad (t \in \mathbb{R}_N, \omega \in \mathbb{R}). \quad (5.2.21)$$

Az \mathbb{R}_N halmaz és a $K_N, K_{\overline{N}}$ függvények definícióiból az (5.2.14) összefüggés felhasználásával következik, hogy $1 \leq k, \ell \leq N$ esetén

$$\ell_{N,t_k}(t_\ell) = \frac{K_N(t_\ell, t_k)}{K_N(t_k, t_k)} = \delta_{k\ell}, \quad \ell_{\overline{N},t_k}(t_\ell) = \frac{K_{\overline{N}}(t_\ell, t_k)}{K_{\overline{N}}(t_k, t_k)} = \delta_{k\ell}, \quad (5.2.22)$$

azaz $\{\ell_{N,t}, t \in \mathbb{R}_N\}$ a $\{\Psi_\ell, \ell = 1, \dots, N\}$, rendszerhez és $\{\ell_{\overline{N},t}, t \in \mathbb{R}_N\}$ a $\{\Psi_\ell, \ell = -N, \dots, -1\}$ rendszerhez tartozó úgynevezett Lagrange-féle függvények.

Ez azt eredményezi, hogy az $\mathcal{L}_N f$ és az $\mathcal{L}_{\overline{N}} f$ függvények interpolálják az f függvényt az \mathbb{R}_N halmaz pontjaiban.

A K_N és $K_{\overline{N}}$ magfüggvények reprodukciós tulajdonságát felhasználva igazolható, hogy $\ell_{N,t}(\omega)$, ($t \in \mathbb{R}_N$) ortogonális bázist alkot \mathcal{R}_N -ben és $\ell_{\overline{N},t}(\omega)$, ($t \in \mathbb{R}_N$) ortogonális bázis $\mathcal{R}_{\overline{N}}$ -ben.

Az interpolációs operátor kifejezhető a diszkrét skalárisszorzat segítségével is:

$$\mathcal{L}_N f(z) = \langle f, K_N(\cdot, z) \rangle_N \quad (f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+), z \in \mathbb{C}_+), \quad (5.2.23)$$

illetve

$$\mathcal{L}_{\overline{N}}f(z) = \langle f, K_{\overline{N}}(\cdot, z) \rangle_N \quad (f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_-), z \in \mathbb{C}_-). \quad (5.2.24)$$

A (5.2.15) és (5.2.18) összefüggésekből következik, hogy a fenti operátorok egzaktak az \mathcal{R}_N illetve $\mathcal{R}_{\overline{N}}$ halmazokon, azaz

$$\mathcal{L}_N f = P_N f = f, \quad f \in \mathcal{R}_N, \quad \mathcal{L}_{\overline{N}} f = P_{\overline{N}} f = f, \quad f \in \mathcal{R}_{\overline{N}}. \quad (5.2.25)$$

Az előző tulajdonság következtében egy újabb egzakt interpolációs módszert adhatunk $\mathcal{R}_{N, \overline{N}}$ -beli függvények esetére. Legyen tehát $f \in \mathcal{R}_{N, \overline{N}}$, ekkor f felbontható $f = f_1 + f_2$ összegre, ahol $f_1 \in \mathcal{R}_N$ és $f_2 \in \mathcal{R}_{\overline{N}}$ és legyen $L_N f = \mathcal{L}_N f_1 + \mathcal{L}_{\overline{N}} f_2$. Ekkor minden $f \in \mathcal{R}_{N, \overline{N}}$ függvény esetén

$$L_N f = \mathcal{L}_N f_1 + \mathcal{L}_{\overline{N}} f_2 = f_1 + f_2 = f.$$

A $\lambda_1 = i$ választás mellett a Runge-féle teszt-függvény $\mathcal{R}_{N, \overline{N}}$ -beli. Valóban

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i(z-i)} - \frac{1}{2i(z+i)}.$$

Az $f_1(z) = \frac{-1}{2i(z+i)} \in \mathcal{R}_N$ és $f_2(z) = \frac{1}{2i(z-i)} \in \mathcal{R}_{\overline{N}}$ függvények felhasználásával a következő egzakt interpolációt nyerjük a Runge-féle teszt-függvényre:

$$L_N f = \mathcal{L}_N f_1 + \mathcal{L}_{\overline{N}} f_2 = f_1 + f_2 = f.$$

Eisner és Pap a [11] cikkben igazolták a következő tételt:

5.2.6. Tétel ([11]). *Legyen $\lambda_1 = i$, $\lambda_k \in \mathbb{C}_+$ úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Im \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = \infty.$$

Ha $f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_+)$ egyenletesen folytonos a $\overline{\mathbb{C}_+}$ -on és

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{R}} (1 + t^2) |f(t) - P_N f(t)|^2 = 0,$$

akkor az

$$\mathcal{L}_N f := \sum_{t \in \mathbb{R}_N} \frac{K_N(\cdot, t)}{K_N(t, t)} f(t)$$

interpolációs operátor normában konvergál az f függvényhez, azaz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \mathcal{L}_N f\|_2 = 0.$$

A 5.2.6.Tétel

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{R}} (1 + t^2) |f(t) - P_N f(t)|^2 = 0$$

feltétele $H^2(\mathbb{C}_+)$ -beli függvények igen széles osztályára teljesül.

Ha $f \in \mathcal{R}_N$, akkor $f(t) = P_N f(t)$, ebből következően $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{R}} (1 + t^2) |f(t) - P_N f(t)|^2 = 0$.

Az 5.2.3. Tétel miatt, ha az $f \in H^2(\mathbb{C}_+)$ függvénynek létezik

$$f(z) = \sum_{\ell=1}^m \frac{c_\ell}{z - \gamma_\ell}, \quad \gamma_\ell \in \mathbb{C}_+,$$

parciálistört felbontása, a fenti feltétel automatikusan teljesül.

Az alsó félsíkra egy hasonló tétel fogalmazható meg.

5.2.7. Tétel (KB,PM,PA[49]). *Legyen $\lambda_1 = i$, $\lambda_k \in \mathbb{C}_-$ úgy, hogy*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Im \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = \infty$$

teljesüljön. Ha az $f \in \mathbb{A}(\mathbb{C}_-)$ függvény egyenletesen folytonos a $\overline{\mathbb{C}_-}$ halmazon és

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{t \in \mathbb{R}} (1 + t^2) |f(t) - P_N f(t)|^2 = 0,$$

akkor az

$$\mathcal{L}_N f := \sum_{t \in \mathbb{R}_N} \frac{K_N(\cdot, t)}{K_N(t, t)} f(t)$$

interpolációs operátor normában konvergál az f függvényhez, azaz

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \mathcal{L}_N f\|_2 = 0.$$

Bizonyítás. A bizonyításban felhasználjuk az (5.2.17) és (5.2.19) feltételeket, a $K_N(t_k, t_k) = K_{\overline{N}}(t_k, t_k)$ tulajdonságot, továbbá a [11] cikk 1. Lemmáját. Ezek alapján a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{L}_N f\|_2 &\leq \|f - P_N f\|_2 + \|\mathcal{L}_N f - \mathcal{L}_N(P_N f)\|_2 = \\ &= \|f - P_N f\|_2 + \left[\sum_{t_k \in \mathbb{R}_N} \frac{1}{(t_k^2 + 1) K_N(t_k, t_k)} (1 + t_k^2) |f(t_k) - P_N f(t_k)|^2 \right]^{1/2} \leq \\ &\leq \|f - P_N f\|_2 + \left[\max_{t \in \mathbb{R}} (1 + t^2) |f(t) - P_N f(t)|^2 \sum_{t_k \in \mathbb{R}_N} \frac{1}{(t_k^2 + 1) K_N(t_k, t_k)} \right]^{1/2} = \\ &= \|f - P_N f\|_2 + \left[\max_{t \in \mathbb{R}} (1 + t^2) |f(t) - P_N f(t)|^2 \cdot \pi \right]^{1/2} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

□

5.2.5. Egy numerikus szempontból jól kezelhető speciális eset

Legyen $N = 2\ell + 1$ és tegyük fel, hogy $\lambda_k = i$, $k = 1, \dots, N$. Ekkor a diszkretizáció alappontjainak halmaza a valós számegegyenesen $\mathbb{R}_N = \{t_k = \tan \frac{k\pi}{N}, k = 1, \dots, N\}$ és a megfelelő súlyfüggvényt az alábbi módon definiálhatjuk:

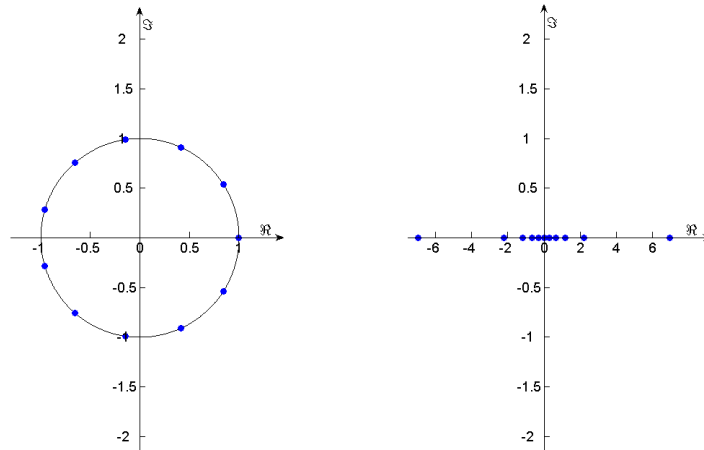
$$\frac{1}{\tilde{\rho}(t)} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\pi |t + i|^2} = \frac{N}{\pi} \frac{1}{t^2 + 1}.$$

Ebben az esetben tekintsük a trigonometrikus rendszer megfelelőit a felső- illetve az alsó-félsík esetén a

$$\Psi_n = \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{\omega + i} \left(\frac{\omega - i}{\omega + i} \right)^{n-1}, \quad \Psi_{-n} = \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{\omega - i} \left(\frac{\omega + i}{\omega - i} \right)^{n-1} \quad (n = 1, \dots, N)$$

függvények diszkrét ortogonális rendszert alkotnak az alábbi diszkrét skaláris szorzatra nézve

$$\langle F, G \rangle_N = \frac{\pi}{N} \sum_{t \in \mathbb{R}_N} F(t) \overline{G(t)} (t^2 + 1).$$



5.1. ábra. Az egységkör ekvidisztans felosztása és az osztópontok $t_k = \tan \frac{k\pi}{N}$, $(k = 1, \dots, N)$. Cayley-transzformáltjainak halmaza a valós egyenesen

A szóban forgó speciális esetben a K_N reprodukciós magfüggvény kifejtése a felső-félsíkban az alábbi:

$$K_N(\omega, w) = \frac{1 - \overline{\left(\frac{w-i}{w+i}\right)^N} \left(\frac{\omega-i}{\omega+i}\right)^N}{2\pi i(\bar{w} - \omega)}$$

a lokalizált reprodukciós magfüggvény pedig

$$K_N(\omega, t_k) = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{\omega-i}{\omega+i}\right)^N}{2\pi i(t_k - \omega)}, & t_k \neq \omega \\ \frac{N}{\pi} \frac{1}{t_k^2 + 1}, & t_k = \omega, \end{cases} \quad (5.2.26)$$

ezeknek megfelelően a felső-félsík interpolációs operátora

$$\mathcal{L}_N f := \sum_{t \in \mathbb{R}_N} \frac{K_N(\cdot, t)}{K_N(t, t)} f(t).$$

Az alsó-félsíkra a magfüggvény:

$$K_{\bar{N}}(\omega, t_k) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{\omega+i}{\omega-i}\right)^N - 1}{2\pi i(t_k - \omega)}, & t_k \neq \omega \\ \frac{N}{\pi} \frac{1}{t_k^2 + 1}, & t_k = \omega, \end{cases} \quad (5.2.27)$$

és a segítségével előállított interpolációs operátor

$$\mathcal{L}_{\bar{N}} f := \sum_{t \in \mathbb{R}_N} \frac{K_{\bar{N}}(\cdot, t)}{K_{\bar{N}}(t, t)} f(t).$$

Mind $\mathcal{L}_N f$, mind pedig $\mathcal{L}_{\bar{N}} f$ $t_k = \tan \frac{k\pi}{N}$, $(k = 1, \dots, N)$ alappontokhoz tartozó racionális interpoláció, mely normában tart az f függvényhez és teljesítik a 5.2.6. illetve a 5.2.7. Tétel feltételeit. A kapott eredményt tekinthetjük LTI-rendszerek transzferfüggvényeinek véges mintavételezési tételének. Továbbá $L_N f = \mathcal{L}_N f_1 + \mathcal{L}_{\bar{N}} f_2$ egzakt interpolációt ad, minden olyan f függvényre, melynek

létezik $f = f_1 + f_2$ felbontása, ahol

$$f_1 \in \text{span} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{\omega+i} \left(\frac{\omega-i}{\omega+i} \right)^{n-1}, n = 1, \dots, N \right\}$$

és

$$f_2 \in \text{span} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{\pi}}}{\omega-i} \left(\frac{\omega+i}{\omega-i} \right)^{n-1} n = 1, \dots, N \right\}.$$

Irodalomjegyzék

6.1. Felhasznált irodalmak

- [1] Akay, H., Ninnes, B.: Orthonormal basis functions for continuous-time systems and L^p convergence, *Math. Control Signal Systems*, (1999) **12**, pp. 295–305.
- [2] Alexits, G.: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen*, Akadémiai Kiadó (Budapest, 1960)
- [3] Alexits, G.: *Sur la sommabilité des series orthogonales*, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **4** (1953), 181–188.
- [4] Bogess, A - Narcowich, F.J.: *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*, Prentice Hall, 2001.
- [5] Bokor, J., Szabó, Z.: Frequency-domain identification in H^2 , *Modeling and Identification with Rational Orthogonal Basis function*. pp. 213–233. (2005) Springer, ISBN
- [6] Bokor, J., Schipp, F., Szabó, Z.: Identification of rational approximate models in H^∞ using generalized orthonormal basis, *IEEE Trans. Automat. Control*, **44**, 1, (1999), pp. 153–158.
- [7] Bokor, J., Schipp, F.: L^∞ system approximation algorithms generated by φ summation, *IFAC Automatica J.*, **33** (1997), pp. 2019–2024.
- [8] Cima, J., Ross, W.: *The Backward Shift on the Hardy Space*, American Mathematical Society, *Mathematical Surveys and Monographs*, Vol.79 (2000) Providence, RI p.xii+199 MR1761913
- [9] Daubechies, I.: *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1992)
- [10] Džrbašjan, M. M.: Biorthogonal systems of rational functions and best approximant of the Cauchy kernel on the real axis, *Math. USSR Sbornik*, Vol 24 (1974), No.3, pp. 409–433.
- [11] Eisner, T., Pap, M.: Discrete orthogonality of the Malmquist-Takenaka system of the upper half plane and rational interpolation, *J. Fourier Anal. Appl.*, **20** (1) pp1–16., (2013) doi: 10.1007/s00041-013-9285-2.
- [12] Floater, M.S., Hormann, K.: Barycentric rational interpolation with no poles and high rates of approximation, *Journal Numerische Mathematik*, Vol 107(2), August (2007), pp. 315–331.
- [13] Gát, G.: *On $(c,1)$ summability for Vilenkin-like systems* *Studia Math.* **144** (2) (2001), pp 101–120.
- [14] Gröchenig, K.: Reconstruction algorithms in irregular sampling, *Math. Comput.*, Vol 59, (1992), pp. 181–194.

- [15] Haar, A.: *On the theory of orthogonal function systems* Math. Annalen **69**. (1910), 331–371.
- [16] Kaczmarz, S.: *Über ein Orthogonal System*. Comt. Rend. Congres Math. (Warsaw,1929)
- [17] Kautz, W. H.: *Transient Synthesis in the Time Domain*. IRE Transactions on Circuit Theory. Vol. CT 1, (1954), pp. 29–39.
- [18] László Ildikó - Schipp Ferenc - Samuel P.Kozaitis: *Construction of Wavelets and applications*, Journal of Universal Computer Science Vol. 12, no. 9., 1278-1291 (2006)
- [19] Malmquist, F.: *Sur la détermination d'une classe fonctions analytiques par leurs dans un esemble donné de doints*, Compute Rendus Six. Cong. math. scand. Kopenhagen, Denmark (1925), pp. 253–259.
- [20] Mashreghi J., *Representation Theorems in Hardy Spaces*, Cambridge Univ. Press, (2009)
- [21] Meyer, Y.: *Ondelettes et operateurs I and II*. Hermann, Paris (1990)
- [22] Meyer, Y.: *Wavelets, algorithms and applications*. SIAM (1993)
- [23] Ninness, B., Gustafsson, F.: *Unifying construction of orthonormal bases for system identification*, Department of Electrical Engineering, University of Newcastle, Newcastle, NSA, Australia, Tech. Rep. EE9443, (1994).
- [24] Paley, R. E. A. C.: *A remarkable system of orthogonal functions*, Proc. London. Math. Soc. Vol. 34 (1932), 241-279.
- [25] Pap, M., Schipp, F.: *Malmquist-Takenaka systems and equilibrium conditions*, Mathematica Pannonica, 12/2 (2001), pp. 185–194.
- [26] Pap, M.: *Properties of discrete rational orthonormal systems*, Constructive Theory of Functions, Varna 2002, Bojanov Ed., Dabra, Sofia, (2003), pp. 374–379.
- [27] Parington, J.R.: *Interpolation Identification and Sampling*, Volume 17 of London Mathematical Society Monographs. Oxford University Press, (1997)
- [28] Qian, T.: *Intrinsic mono-component decomposition of functions: An advance of Fourier theory*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 33 Iss. 7 pp. 880–891(2010) www.interscience.wiley.com doi: 10.1002/mma.1214
- [29] Schipp Ferenc - Pap Margit: *The Voice Transform on the Blaschke Group I* Pure Math. and Appl. 17 (3-4), pp. 287-395
- [30] Schipp Ferenc - William R. Wade - Simon Péter: *Walsh Series*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1990.
- [31] Schipp Ferenc - William R. Wade: *Transforms on Normed Fields*, Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs , 1995.
- [32] Schipp, F., Gianone, L., Szabó, Z.: *Identification in generalized orthonormal basis frequency domain approach*, Proc. of the 13th IFAC World Congress, San Francisco, CA. (1996), pp. 387–392.

- [33] Schipp, F., *Fast Fourier transform for rational systems*, Mathematica Pannonica 13(2002), 265-275.
- [34] Schipp, F.: *On a generalization of the Haar system*, Acta Math. Acad. Sci. Hung., **33**(1-2), (1979), 183–188.
- [35] Soumelidis, A., Bokor, J., Schipp, F.: Detection of changes on signals and systems based upon representations in orthogonal rational bases, Proc. of 5th IFAC Symposions on fault detection supervision and safety for technical Processes, SAFEPROSS 2003, Washington DC. USA, June (2003), on CD.
- [36] Soumelidis, A., Bokor, J., Schipp, F.: Frequency domain representation of signals in rational orthogonal bases, Proc. of the 10th Mediterranean Conference on Control and Automation, Lisabone, Portugal, (2002), p. on CD. Med'(2002).
- [37] Soumelidis, A., Pap, M., Schipp, F., Bokor, J.: Frequency domain identification of partial fraction models, Proc. of the 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain, June (2002), pp. 1–6.
- [38] Szabados, J., Vértési, P.: *Interpolation of Functions*, World Scientific, Singapore, (1990)
- [39] Szabó, Z.: Interpolation and quadrature formula for rational systems on the unit circle, Annales Univ. Sci. (Budapest), Sect. Comput., 21, (2002), pp. 41–56
- [40] Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.
- [41] Takenaka, S.: On the orthogonal functions and a new formula of interpolation, Japanese Journal of Mathematics II.,(1925), pp. 129–145
- [42] Walnut, D. F.: *An Introduction to Wavelet Analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.
- [43] Walsh, J. L.: *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*. Third edition (First edition 1935). American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. 405 p. (1969)

6.2. Saját források

- [44] Király Balázs: *Speciális ortogonális rendszerek. A Haar-rendszer*, Szakdolgozat Pécsi Tudományegyetem, 2004.
- [45] Király Balázs: *Construction of Haar-like Systems*, Pure Mathematics And Applications Series C 17:(3-4) pp. 343-347. 2006
- [46] Király Balázs: *Construction of Walsh-like Systems* Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis De Rolando Eotvos Nominatae Sectio Computatorica 33:pp. 261-272. 2010
- [47] Király Balázs: *Generalized Walsh-like Systems* In: Horia F Pop, Antal Bege (szerk.) MaCS 2010: 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science. Konferencia helye, ideje: Komárom, Szlovákia, 2010.07.14-2010.07.17.pp. 35-42. 2011

- [48] Király Balázs: *Generalized Haar-Fourier Transform* Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis De Rolando Eotvos Nominatae Sectio Computatorica37:pp. 239-246. 2012
- [49] Király B, Pap M, Pilgermajer A: *Sampling and Rational Interpolation for Non-band-limited Signals* In: Pardalos PM, Rassias TM (szerk.) *Mathematics Without Boundaries: Surveys in Interdisciplinary Research*. New York: Springer, 2014. pp. 383-408. (ISBN:978-1-4939-1123-3)
- [50] Eisner T, Király B: *Valós függvénytan és Fourier-sorok* Pécs, Pécsi Tudományegyetem, 2014. 251p.
- [51] Király Balázs: *Discrete Orthogonal and Biorthogonal Product Systems* Megjelenés alatt

¹ADATLAP

a doktori értekezés nyilvánosságra hozatalához

I. A doktori értekezés adatai

A szerző neve: Király Balázs

MTMT-azonosító: 10016898

A doktori értekezés címe és alcíme: Szorzatrendszer-konstrukciók

DOI-azonosító²: 10.15476/ELTE.2018.081

A doktori iskola neve: ELTE IK Informatika Doktori Iskola

A doktori iskolán belüli doktori program neve: Numerikus és Szimbolikus Számítások Doktori Program

A témavezető neve és tudományos fokozata: Schipp Ferenc, DSc

A témavezető munkahelye: ELTE IK

A társtémavezető neve és tudományos fokozata: Pap Margit, habil

A témavezető munkahelye: PTE TTK

II. Nyilatkozatok

1. A doktori értekezés szerzőjeként³

a) hozzájárok, hogy a doktori fokozat megszerzését követően a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban. Felhatalmazom az Informatika Doktori Iskola hivatalának ügyintézőjét, Kulcsár Adinát, hogy az értekezést és a téziseket feltöltse az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba, és ennek során kitöltse a feltöltéshez szükséges nyilatkozatokat.

b) kérem, hogy a mellékelt kérelemben részletezett szabadalmi, illetőleg oltalmi bejelentés közzétételéig a doktori értekezést ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;⁴

c) kérem, hogy a nemzetbiztonsági okból minősített adatot tartalmazó doktori értekezést a minősítés (dátum)-ig tartó időtartama alatt ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban;⁵

d) kérem, hogy a mű kiadására vonatkozó mellékelt kiadó szerződésre tekintettel a doktori értekezést a könyv megjelenéséig ne bocsássák nyilvánosságra az Egyetemi Könyvtárban, és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban csak a könyv bibliográfiai adatait tegyék közzé. Ha a könyv a fokozatszerzést követően egy évig nem jelenik meg, hozzájárlok, hogy a doktori értekezésem és a tézisek nyilvánosságra kerüljenek az Egyetemi Könyvtárban és az ELTE Digitális Intézményi Tudástárban.⁶

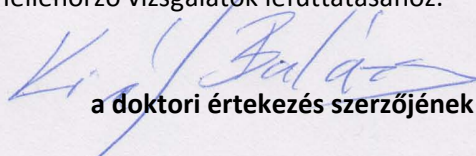
2. A doktori értekezés szerzőjeként kijelentem, hogy

a) az ELTE Digitális Intézményi Tudástárba feltöltendő doktori értekezés és a tézisek saját eredeti, önálló szellemi munkám és legjobb tudomásom szerint nem sértem vele senki szerzői jogait;

b) a doktori értekezés és a tézisek nyomtatott változatai és az elektronikus adathordozón benyújtott tartalmak (szöveg és ábrák) mindenben megegyeznek.

3. A doktori értekezés szerzőjeként hozzájárlok a doktori értekezés és a tézisek szövegének plágiumkereső adatbázisba helyezéséhez és plágiumellenőrző vizsgálatok lefuttatásához.

Kelt: 2018. április 24.


a doktori értekezés szerzőjének aláírása

¹ Beiktatta az Egyetemi Doktori Szabályzat módosításáról szóló CXXXIX/2014. (VI. 30.) Szen. sz. határozat. Hatályos: 2014. VII.1. napjától.

² A kari hivatal ügyintézője tölti ki.

³ A megfelelő szöveg aláhúzendó.

⁴ A doktori értekezés benyújtásával egyidejűleg be kell adni a tudományági doktori tanácshoz a szabadalmi, illetőleg oltalmi bejelentést tanúsító okiratot és a nyilvánosságra hozatal elhalasztása iránti kérelmet.

⁵ A doktori értekezés benyújtásával egyidejűleg be kell nyújtani a minősített adatra vonatkozó közokiratot.

⁶ A doktori értekezés benyújtásával egyidejűleg be kell nyújtani a mű kiadásáról szóló kiadói szerződést.