UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA

Ana Cristina M. Dyonisio

DEMONSTRAÇÃO DA ADEQUAÇÃO DO OPERADOR BPM AOS POSTULADOS DE FUSÃO DE CRENÇAS

Florianópolis

2018

Ana Cristina M. Dyonisio

DEMONSTRAÇÃO DA ADEQUAÇÃO DO OPERADOR BPM AOS POSTULADOS DE FUSÃO DE CRENÇAS

Trabalho de Conclusão submetido ao Curso de Ciências da Computação para a obtenção do Grau de Bacharel em Ciências da Computação.
Orientadora: Profa. Dra. Jerusa Marchi

Florianópolis

2018

Catalogação na fonte elaborada pela biblioteca da
Universidade Federal de Santa Catarina

A ficha catalográfica é confeccionada pela Biblioteca Central.

Tamanho: 7cm x 12 cm

Fonte: Times New Roman 9,5

Maiores informações em:
http://www.bu.ufsc.br/design/Catalogacao.html

Ana Cristina M. Dyonisio

DEMONSTRAÇÃO DA ADEQUAÇÃO DO OPERADOR BPM AOS POSTULADOS DE FUSÃO DE CRENÇAS

Este Trabalho de Conclusão foi julgado aprovado para a obtenção do Título de “Bacharel em Ciências da Computação”, e aprovado em sua forma final pelo Curso de Ciências da Computação.

Florianópolis, 30 de outubro 2018.

Prof. Dr. Rafael Cancian
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Jerusa Marchi
Orientadora

Prof. Dr. Elder Rizzon Santos

Prof. Dr. Ricardo Azambuja Silveira

Ao meu amado filho Gabriel, meu bem mais precioso.

AGRADECIMENTOS

Neste momento tenho muita gratidão em meu coração, foram longos anos de trabalho duro e dedicação para chegar até aqui, mas tive ao meu lado as melhores pessoas que poderiam existir.

Primeiramente quero agradecer a minha orientadora e professora Jerusa Marchi por ter acreditado em meu potencial e ter caminhado junto comigo neste trabalho um tanto incomum e desafiador, e, principalmente, por ter me acolhido nestes últimos (e mais desafiadores) anos de faculdade. Obrigada por, mesmo com tantos compromissos e afarezes, ter olhado para este trabalho com tanto carinho e dedicação.

Agradeço eternamente ao meu filho, que veio inesperadamente mas com muito amor, e me fez olhar a vida com outros olhos, sendo minha motivação maior por tudo isso. Apesar de todas as dificuldades que passei, foi a melhor surpresa que a vida me deu nesta reta final. Agradeço a ele por, mesmo tão pequenino, compreender que muitas vezes precisei deixá-lo aos cuidados de outras pessoas, ou até mesmo brincando sozinho, para que eu pudesse concluir os estudos. Obrigada por me receber de braços abertos, abraço apertado e muito amor todos os dias, mesmo nos mais difíceis.

Agradeço imensamente a minha família, em especial aos meus pais Ana Lúcia e Cícero, por sempre acreditarem em mim e me apoiarem em todos os momentos e de todas as formas.

Obrigada a todos os professores que encontrei neste caminho que, além de mestres e profissionais, se mostraram grandes humanos.

Agradeço também aos meus amigos e colegas, tanto os que me acompanharam desde quando eu era apenas uma sonhadora, quanto aos novos que fiz durante estes anos. Obrigada por me aguentarem durante essa longa jornada e por todas as palavras de incentivo e carinho que recebi. Com certeza vocês foram essenciais.

Minha sincera gratidão a todos!

A man's mind stretched to a new idea never goes back to its original dimensions.

Oliver Wendell Holmes, Sr.

RESUMO

A manutenção de crenças é um grande desafio na concepção de agentes inteligentes. Em particular, a área de fusão de crenças tem por objetivo definir crenças e objetivos comuns para um grupo de agentes com objetivos individuais distintos e possivelmente conflitantes, mantendo suas bases de crenças individuais consistentes e sem perda excessiva de informação. Neste contexto, alguns operadores para fusão de crenças foram propostos nas últimas décadas, incluindo os pioneiros: operadores de maioria e arbitração - que utilizam, como principal medida de mudança, o cálculo de distância entre as bases considerando como unidade de distância um símbolo proposicional. Grande parte dos operadores atuam sobre conjuntos de modelos, que podem crescer exponencialmente ao número de fórmulas descritas na base. Como alternativa, operadores sintáticos podem ser utilizados. Em particular, o operador BPM (acrônimo de Bittencourt, Perrussel e Marchi) foi proposto utilizando a mesma ideia de medida mínima, mas atuando sobre uma representação dual enxuta da base de crenças, denominada *formas normais primárias*, obtendo resultados equivalentes. Contudo, permaneceu em aberto a demonstração de que tal operador respeita os postulados estabelecidos para guiar processos de fusão de crenças. Desta forma, o objetivo deste trabalho foi demonstrar que tal operador satisfaz os postulados de fusão, o que foi realizado com sucesso utilizando as próprias definições de *implicantes primários* como estratégia para as provas. Assim sendo, o operador sintático BPM torna-se uma interessante ferramenta para determinadas situações em que lidamos com sistemas baseados em conhecimento.
Palavras-chave: Inteligência Artificial. Agentes Inteligentes. Fusão de Crença.

ABSTRACT

Maintenance of belief bases is a big challenge in the design of intelligent agents. In particular, the belief merging area aims to define common beliefs and goals for a group of agents with distinct and possibly conflicting individual goals, keeping their individual belief bases consistent and without excessive loss of information. In this context, some belief merging operators have been proposed in the recent decades, including the pioneers: majority and arbitration operators - which use, as a measure of change, the calculation of distance between bases considering one propositional symbol as the unit of distance. Most operators act on model sets, which can grow exponentially on the number of formulas described in the belief base. As alternative, synthetic operators can be used. In particular, the BPM operator (acronym of Bittencourt, Perrussel and Marchi) was proposed using the same idea of minimum measure, but acting on a minimal dual representation of the belief bases, called *prime normal forms*, obtaining equivalent results. However, the demonstration such this operator respect the postulates established to guide belief merging processes remains open. Thus, the objective of this work was to demonstrate that this operator satisfies the merging postulates, which was done successfully using the definitions of prime implicants as an strategy for the demonstrations. Thus, the synthetic operator BPM becomes an interesting tool to obtain situations that deal with basic knowledge systems.
Keywords: Artificial Intelligence. Intelligent Agents. Belief Merging.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Fusão de dados é uma importante área em diversos campos das Engenharias e da Computação. Na área de processamento de sinais, a fusão pode acontecer com dados oriundos de múltiplos sensores como em (DAM; KRöSE; GROEN, 1996), por exemplo. Já na área da computação, um processo de fusão de informações pode ser o resultado da integração de dados em diferentes bases de dados (FAGIN; ULLMAN; VARDI, 1983; REVESZ, 1993; LIBERATORE; SCHAERF, 1998).

Na área de Agentes Inteligentes, denomina-se *fusão de crenças* o processo de integração e consolidação de bases de conhecimentos dos agentes (LIN; MENDELZON, 1999). Desta forma, agentes inteligentes passam a compartilhar seus conhecimentos, permitindo que, em um sistema aberto, por exemplo, o objetivo do sistema seja alcançado.

Define-se, portanto, o problema da fusão de crenças como a síntese, realizada de forma automática, de diferentes bases de crenças de diferentes agentes em uma única base de crenças, que possa ser adotada pelo conjunto de agentes. É importante salientar que cada agente possui a sua base, que pode conter crenças conflitantes com as crenças de algum outro agente do sistema. Desta forma um processo de fusão de crenças tem como princípio que o conjunto resultante seja *consistente*, ou seja, que não haja contradição lógica entre as crenças. Além disso, as crenças individuais podem, quando unidas, permitir a inferência de novos fatos, enriquecendo o conhecimento dos agentes. Neste sentido, o processo de fusão deve se basear na *perda mínima de informação*, ou seja, após o término do processo, o maior conjunto possível de crenças não conflitantes deve ser obtido (MARCHI; PERRUSSEL; BITTENCOURT, 2008).

Tendo em vista os princípios da consistência e da perda mínima de informação, bem como outros que podem ser interessantes do ponto de vista da manipulação lógica de informações, um conjunto de postulados foi proposto com o objetivo de guiar a construção de operadores de fusão de crenças (KONIECZNY; PÉREZ, 1999). Deste modo, a importância dos postulados para os operadores é para que estes possam ser aplicados de forma confiável no processo de fusão de crenças, garantindo que as características mencionadas sejam mantidas após o processo de fusão.

Ao longo dos anos, diversos operadores, tanto sintáticos quanto semânticos, vem sendo propostos e demonstrados coerentes com os postulados. Os operadores semânticos trabalham em cima de todas as possíveis interpretações de uma fórmula lógica, e esse tamanho pode chegar a ser exponencial ao número de símbolos proposicionais, muitas vezes causando um trabalho dispendioso. Já os operadores sintáticos, são equivalentes aos operadores semânticos, pois atuam exatamente da mesma forma que estes, a diferença é que eles utilizam apenas as interpretações realmente relevantes para a representação da fórmula lógica, excluindo todas as interpretações redundantes, o que leva a uma redução no processamento das informações durante o processo, resultando em menos trabalho.

Particularmente Marchi et al. (MARCHI; BITTENCOURT; PERRUSSEL, 2009) propuseram um operador sintático baseado em formas normais primárias, que tem como principal característica aos demais operadores o uso de conceitos lógicos que simplificam a representação das informações, o que resulta em um processo mais conciso. Contudo, a demonstração de que tal operador respeita o conjunto de postulados foi deixada em aberto.

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo demonstrar que o operador sintático proposto por Marchi et al. em (MARCHI; BITTENCOURT; PERRUSSEL, 2009) respeita os postulados de fusão de crenças.

1.1.1 Objetivos Específicos

Este trabalho tem como objetivos específicos:

- Estudar a literatura relacionada a processos e operadores de fusão de crenças;
- Compreender o conjunto de postulados de fusão propostos por Konieczny e Pérez em (KONIECZNY; PÉREZ, 1999);
- Compreender o operador de fusão BPM baseado em formas normais primárias proposto por Bittencourt, Perrussel e Marchi em (MARCHI; BITTENCOURT; PERRUSSEL, 2009);
- Construir as demonstrações dos postulados para este operador.

1.2 APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em 5 capítulos. Além deste capítulo de introdução, o capítulo 2 apresenta a área de fusão de crenças, sua fundamentação teórica, seus postulados e alguns operadores de fusão, com exemplos de seus funcionamentos. No capítulo 3 apresenta-se o operador sintático de fusão baseado em formas normais primárias. As demonstrações de que este operador satisfaz os postulados de fusão de crenças são apresentadas no capítulo 4. No capítulo 5 apresentam-se as considerações finais do trabalho.

2 PROCESSOS DE MUDANÇAS DE CRENÇAS

Inicialmente neste capítulo será abordada, na seção 2.1, uma visão geral do histórico de desenvolvimento da área de mudança de crenças, desde os seus primórdios, como os Sistemas de Manutenção da Verdade (TMS - *Truth Maintenance System*), até a incorporação desta ideia em Sistemas Multiagente (MAS - *Multiagent System*).

Em seguida, na seção 2.2 apresenta-se a área de fusão de crenças e os dois primeiros operadores propostos na literatura. Com o objetivo de aprofundar o conhecimento sobre operadores de fusão, apresentam-se ainda outros operadores sintáticos e semânticos, com exemplos de seus funcionamentos.

2.1 ORIGEM E HISTÓRICO

Há duas principais abordagens para a manipulação simbólica em Inteligência Artificial. A primeira foi proposta por Doyle em 1979 (DOYLE, 1979) denominada de Sistemas de Manutenção da Verdade (TMS - *Truth Maintenance System*) e a segunda, procedente da Filosofia em 1989, chama-se Teoria da Coerência.

Os TMS são estruturas em árvore onde uma crença mais alta na estrutura justifica outras crenças posteriores como em um sistema de inferência, ou seja, as crenças são justificadas através de outras, e isso permite que, a medida que novas informações surgem ou mudanças são necessárias, a base de crenças se mantenha consistente entre as antigas crenças e as novas crenças. Já a Teoria da Coerência aborda a coerência de um modelo através de uma estrutura lógica de crenças. Um exemplo desta abordagem é o modelo AGM (GäRDENFORS, 1988) baseado em um conjunto de crenças.

Apesar das diferenças, a teoria de Doyle e a Teoria da Coerência podem ser vistas como formas complementares, pois o uso de modelos lógicos em AGM para manusear as crenças pode ser visto como justificativas para tais crenças. Com isso, surge na área da Computação, o estudo de processos de mudança de crenças, que é uma fusão e um aprimoramento destas teorias. A mudança de crenças de um agente discute o problema de como adicionar uma nova informação à base de crenças, remover informação da base de crenças ou revisar as crenças contidas na base de único agente. Essa discussão dividiu a mudança de crenças em duas outras áreas: a revisão de crenças e a atualização de crenças (KATSUNO; MENDELZON, 1991).

Na revisão de crenças o objetivo é resolver um conflito em que um estado epistêmico (isto é, o que um agente acredita em um determinado instante) recebe uma nova informação sobre um mundo estático. Na atualização, a base de crenças representa um mundo mais dinâmico, em que o estado epistêmico é mais efêmero e uma nova informação, ao ser adicionada, pode ser desconsiderada em instantes, retornando ao estado epistêmico anterior (GäRDENFORS, 1990). Estes conceitos são aplicados a um único agente.

Ao lidar com diversos agentes em um Sistema Multiagente, onde as revisões e atualizações acontecem no contexto de agentes individualmente, por vezes, faz-se necessária a retomada de uma visão comum do mundo, ou seja, é necessário unir de forma não contraditória, as informações contidas nas bases de conhecimento dos diversos agentes. Esta subárea denomina-se *fusão de crenças*.

A área de fusão de crenças consiste então na elaboração de uma base de crenças comum para os agentes. Para que esta base seja não contraditória e contenha o máximo de informação possível, são aplicados operadores de fusão de crenças.

Os dois operadores pioneiros foram propostos por Liberatore e Schaerf (LIBERATORE; SCHAERF, 1998) e Lin e Mendelzon (LIN; MENDELZON, 1999), e serão descritos nas próximas seções. Contudo, antes, faz-se necessária a introdução de alguns conceitos básicos.

2.2 FUSÃO DE CRENÇAS

Antes de apresentarmos formalmente o que é um processo de fusão de crenças, faz-se necessário introduzir alguns conceitos teóricos acerca da linguagem lógica utilizada para a representação de crenças em agentes.

2.2.1 Conceitos Teóricos

Seja $\mathcal{L}(P)$ uma linguagem lógica proposicional, onde P corresponde a um conjunto $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ de símbolos proposicionais, e considere os conectores usuais de lógica $(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$.

Seja ψ uma base de crença, ou fórmula lógica (para simplificar chamaremos apenas de base de crença), construída sob $\mathcal{L}(P)$. A construção das bases de crenças em $\mathcal{L}$ é realizada utilizando um conjunto de literais $\{L_1, ..., L_{2n}\}$ associados a P tal que $L_i = p_j$ ou $L_i = \neg p_j$. A negação de um literal L é notado $\overline{L}$, ou seja, se $L = p$ então $\overline{L} = \neg p$.

Uma interpretação é uma função de P para $\mathbb{B} = \{\top(verdadeiro), \bot(falso)\}$, e seja $\mathcal{W}$ o conjunto de todas as possíveis interpretações. Uma interpretação w é um modelo de uma base $\psi(w \vDash \psi)$ sse ψ é verdadeiro na interpretação w. Para qualquer base ψ, $[\![\psi]\!]$ denota o conjunto de modelos ψ.

Seja $\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$ um conjunto (finito) de bases de crenças, em que cada ψ_i representa as crenças presentes no agente i. Nota-se $\bigwedge \Psi$, a conjunção de todas as bases de crenças $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$; e $\Psi_1 \sqcup \Psi_2$ a união dos conjuntos Ψ_1 e Ψ_2.

Seja μ uma base de crença construída sob $\mathcal{L}(P)$ que é uma crença especial que representa as restrições de integridade que asseguram a fusão, ou seja, tais restrições devem ser satisfeitas pela base resultante do processo.

Um processo de fusão de crenças, consiste então em dado um conjunto Ψ de bases de crenças dos agentes do sistema e uma restrição de integridade μ, obter, segundo a aplicação de algum critério de ordenação extra-lógico, a base de crenças resultante do processo de fusão, denotada por

$$\Delta_\mu(\Psi)$$

De modo semântico, o conjunto de modelos resultante na base de crenças deve ser escolhido a partir dos modelos das restrições de integridade mais próximos àqueles das bases iniciais, segundo o critério extra-lógico estabelecido, ou seja:

$$[\![\Delta_\mu(\Psi)]\!] = \mathrm{Min}_{\leqslant_\Psi}([\![\mu]\!])$$

2.2.1.1 Forma Normal Canônica

Dado um conjunto de literais definidos sobre $\mathcal{L}(P)$, define-se uma *cláusula* como uma *disjunção* de literais $C = L_1 \vee \cdots \vee L_{k_C}$, e uma *cláusula dual* ou *termo*, como uma *conjunção* de literais, dada por $D = L_1 \wedge \cdots \wedge L_{k_D}$.

Assim como define-se negação de um literal na seção 2.2.1, define-se a negação de um termo $D = \neg p_1 \wedge p_3$, denotada por $\overline{D}$, resulta em $\overline{D} = p_1 \wedge \neg p_3$. Considere ainda, a definição de subtração de dois termos D e D', notada por $D - D'$, que resulta nos literais de D que não possuem correspondência com os literais de D', por exemplo, se $D = \neg p_1 \wedge p_3$ e $D' = p_1 \wedge p_3$, então $D - D' = \{\neg p_1\}$.

Considere a linguagem $\mathcal{L}(P)$ e uma base de crença $\psi \in \mathcal{L}(P)$, ψ pode ser convertida em uma *forma normal conjuntiva (FNC)*, onde $FNC_\psi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$, ou em uma *forma normal disjuntiva (FND)*, onde $FND_\psi = D_1 \vee \cdots \vee D_w$, tal que $\psi \equiv FNC_\psi \equiv FND_\psi$.

Uma cláusula C é um *implicado* de uma base ψ sse $\psi \models C$, e é um *implicado primário* sse para todo implicado C' de ψ tal que $C' \models C$, tem-se $C \models C'$. Uma conjunção de implicados primários de ψ, define-se PI_ψ tal que $\psi \equiv PI_\psi$.

Um termo D chama-se *implicante* de uma base ψ sse $D \models \psi$, e é um *implicante primário* sse para todos os implicantes D' de ψ tal que $D \models D'$, tem-se $D' \models D$. Define-se IP_ψ como uma disjunção de implicantes primários de ψ tal que $\psi \equiv IP_\psi$. Implicantes e implicados primários são noções duais, e um mesmo algoritmo pode ser utilizado para calcular ambas as formas (BITTENCOURT; MARCHI; PADILHA, 2003).

Em contrapartida, implicados e implicantes primários podem ser definidos como casos especiais das FNC e FND, e compõe-se no menor número de cláusulas ou termos fechados para inferência, sem cláusulas ou termos inseridos e não contendo um literal e sua negação. Assim, cláusulas e termos são entendidos como sinônimos.

2.2.1.2 Distância entre Modelos

Proposto por Dalal M. (DALAL, 1988), o *princípio da mudança mínima*, visa assegurar que não haja perda excessiva de informação. Em seu trabalho, Dalal considerou a distância de Hamming entre modelos como critério extra-lógico para mensurar a perda de informação, ou seja, a menor unidade em uma base de crença é um símbolo proposicional, e este será a menor unidade de conhecimento. Assim, a distância entre modelos é dada pelo conjunto de símbolos proposicionais que tem valores verdade diferentes.

Considere a distância entre dois modelos w_i e w_j, $dist(w_i, w_j)$, como o número de símbolos proposicionais que diferem entre estes modelos.

Exemplo 1. *Seja* $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ *e considere 2 modelos* w_1 *e* w_2 *tais que:*

$$w_1 = \{p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3\}$$
$$w_2 = \{p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3\}$$

então $dist(w_1, w_2) = \{p_2, p_3\}$*, que são os símbolos proposicionais que diferem entre os modelos.*

Ao introduzir uma base de crenças, a distância entre um modelo w e essa base ψ é definida como

$$dist(w, \psi) = \text{Min}_{w' \in [\![\psi]\!]} dist(w, w')$$

ou seja, tomam-se os modelos de ψ e, para cada um deles, verifica-se a distância daquele modelo para o modelo w. Essa noção de distância resulta em um $w' \in [\![\psi]\!]$ que tem a menor distância de w em relação a todos os $w_i \in [\![\psi]\!]$, e implica a seguinte ordem de preferência: um modelo w_j é preferido ao modelo w_k em relação a w_i se a distância entre w_i e w_j for menor que a distância entre w_i e w_k. Isto é, w_i e w_j compartilham mais literais que w_i e w_k. Para o caso em que ψ seja inconsistente, considere $dist(w, \psi) = 0$.

Exemplo 2. *Considere o Exemplo 1 e seja* $\psi = (p_1 \vee p_2)$ *uma base de crenças. O conjunto de modelos de* ψ *é dado por (usaremos ",'' ao invés de* $\vee$ *para simplificar a notação):*

$$\begin{array}{rcl} [\![\psi]\!] & = & \{ \quad \{p_1, p_2, p_3\}, \\ & & \quad\;\; \{p_1, p_2, \neg p_3\}, \\ & & \quad\;\; \{p_1, \neg p_2, p_3\}, \\ & & \quad\;\; \{p_1, \neg p_2, \neg p_3\}, \\ & & \quad\;\; \{\neg p_1, p_2, p_3\}, \\ & & \quad\;\; \{\neg p_1, p_2, \neg p_3\} \\ & & \} \end{array}$$

Agora considere $w = \{p_1 \vee p_2 \vee \neg p_3\}$*. As distâncias entre* w *para cada* *modelo* $w_i \in [\![\psi]\!]$ *são as seguintes:*

$$\begin{aligned}
dist(w, w_1) &= \{p_3\} \\
dist(w, w_2) &= \emptyset \\
dist(w, w_3) &= \{p_2, p_3\} \\
dist(w, w_4) &= \{p_2\} \\
dist(w, w_5) &= \{p_1, p_3\} \\
dist(w, w_6) &= \{p_1\}
\end{aligned}$$

Considerando a cardinalidade das distâncias, observamos que o modelo $w_2 = \{p_1, p_2, \neg p_3\}$ *tem distância igual a 0 e portanto é o modelo de* ψ *mais próximo a* w*. Portanto*

$$\mathrm{Min}_{w' \in [\![\psi]\!]} dist(w, w') = \emptyset$$

Exemplo 3. *Considere o exemplo anterior e seja* $\mu = (p_1 \wedge p_2)$*. O conjunto de modelos de* μ *é dado por:*

$$[\![\mu]\!] = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, \neg p_3\}\}$$

E as distâncias de cada modelo de ψ *aos modelos de* μ *são as seguintes:*

$\mu \in [\![\mu]\!]$	$\psi \in [\![\psi]\!]$	$dist(\mu, \psi)$	$\lvert dist(\mu, \psi)\rvert$
$\{p_1, p_2, p_3\}$	$\{p_1, p_2, p_3\}$	$\emptyset$	0
$\{p_1, p_2, p_3\}$	$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\{p_3\}$	1
$\{p_1, p_2, p_3\}$	$\{p_1, \neg p_2, p_3\}$	$\{p_2\}$	1
$\{p_1, p_2, p_3\}$	$\{p_1, \neg p_2, \neg p_3\}$	$\{p_2, p_3\}$	2
$\{p_1, p_2, p_3\}$	$\{\neg p_1, p_2, p_3\}$	$\{p_1\}$	1
$\{p_1, p_2, p_3\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\{p_1, p_3\}$	2
$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\{p_1, p_2, p_3\}$	$\{p_3\}$	1
$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\emptyset$	0
$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\{p_1, \neg p_2, p_3\}$	$\{p_2, p_3\}$	2
$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\{p_1, \neg p_2, \neg p_3\}$	$\{p_2\}$	1
$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\{\neg p_1, p_2, p_3\}$	$\{p_1, p_3\}$	2
$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3\}$	$\{p_1\}$	1

Tabela 1 – Tabela das distâncias de Dalal do Exemplo 3

Com base na tabela acima, escolhemos os modelos de μ *mais próximos aos modelos de* ψ*, que estão em destaque na Tabela 1. E a* *união destes modelos será a nova base de crenças. Logo*

$$[\![\Delta_\mu(\Psi)]\!] = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, \neg p_3\}\}$$

Uma vez que a definição do critério de ordenação é extra-lógico, poderia-se assumir, por exemplo, que a própria restrição de integridade, que satisfaz a definição acima, fosse escolhida como base de crenças, negligenciando todo o conhecimento dos demais agentes. Desta forma, para assegurar que a escolha seja por manter o máximo de informação, que todas as bases tenham o mesmo valor perante o processo e que haja consistência, um conjunto de postulados foi estabelecido.

2.2.2 Postulados

Para guiar a construção de operadores de fusão, Konieczny e Pérez em 2002 (KONIECZNY; PÉREZ, 2002) introduzem um conjunto de 9 postulados que descrevem *regras* ou *características* que os operadores de fusão precisam seguir ou devem possuir, considerando aspectos como consistência, mudança mínima e irrelevância da sintaxe. São eles:

1. (**IC0**) $\Delta_\mu(\Psi) \vdash \mu$

   Este postulado garante que o resultado da fusão satisfaz as restrições de integridade, representadas por μ.

2. (**IC1**) Se μ é consistente, então $\Delta_\mu(\Psi)$ é consistente

   Em (IC1), se as restrições de integridade são consistentes, então o resultado da fusão também será consistente.

3. (**IC2**) Se Ψ é consistente com μ, então $\Delta_\mu(\Psi) = \bigwedge \Psi \wedge \mu$

   O postulado (IC2) diz que, se o conjunto de bases de crenças é consistente com as restrições de integridade, então o resultado da fusão é a conjunção do conjunto das bases de crenças com as restrições de integridade.

4. (**IC3**) Se $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ e $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ então $\Delta_{\mu_1}(\Psi_1) \leftrightarrow \Delta_{\mu_2}(\Psi_2)$

   O postulado (IC3) trata do princípio da irrelevância da sintaxe, isto é, se dois conjuntos de bases de crenças são equivalentes e duas bases de restrições de integridade são logicamente equivalentes, então as bases de crenças resultantes das duas fusões serão logicamente equivalentes.

5. (**IC4**) Se $\psi \vdash \mu$ e $\psi' \vdash \mu$, então $\Delta_\mu(\psi \sqcup \psi') \wedge \psi \nvdash \bot \Rightarrow \Delta_\mu(\psi \sqcup \psi') \wedge \psi' \nvdash \bot$

   O postulado (IC4) é o postulado da justiça, ou seja, em um processo de fusão, uma determinada base não deve ter preferência em relação às outras.

6. (**IC5**) $\Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2) \vdash \Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$

   (IC5) nos diz que se dois conjuntos de bases de crenças concordam em uma alternativa (ou mais alternativas), então essas alternativas serão escolhidas na base de crenças resultante dos dois conjuntos.

7. (**IC6**) Se $\Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2)$ é consistente, então $\Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2)$

   (IC6) diz que, se dois conjuntos de bases de crenças resultantes do processo de fusão, considerando uma restrição de integridade μ, são consistentes, então fazer a união dos conjuntos das bases de crenças e sobre esta união realizar o processo de fusão, deve implicar a mesma consistência.

   (IC5) e (IC6) juntos significam que, se podemos encontrar dois conjuntos de bases de crenças que concordam em pelo menos uma alternativa, então o resultado global será exatamente essas alternativas que os dois conjuntos concordam.

8. (**IC7**) $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$

   (IC7) diz que, se uma restrição de integridade não é contraditória com o resultado de um processo de fusão, então ela não é contraditória com a restrição de integridade usada para realizar o processo.

9. (**IC8**) Se $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ é consistente, então $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi) \vdash \Delta_{\mu_1}(\Psi)$

   O postulado (IC8) afirma que se μ_2 é consistente com uma base resultante de um processo de fusão com restrição de integridade μ_1, então fazer a fusão considerando ambas as restrições deve implicar a base resultante do processo quando somente μ_1 é considerado, pois μ_2 acrescentará somente informações não conflitantes à base.

   Juntos, (IC7) e (IC8) apenas esclarecem que a noção de proximidade é bem definida.

Este conjunto de postulados tem uma relevância científica pois tem servido de guia para a construção de operadores de fusão de crenças. Na sequência, apresenta-se os primeiros dois operadores propostos na literatura, que são o operador de maioria (LIN; MENDELZON, 1999) e o operador de arbitração (LIBERATORE; SCHAERF, 1995).

2.2.3 Primeiros Trabalhos

Como já mencionado anteriormente, os dois principais operadores nesta área são os operadores semânticos de *maioria* e *arbitração*, que baseiam-se semanticamente nas medidas de distância entre modelos. Em contrapartida, Pozos-Parra et al. (POZOS-PARRA; PERRUSSEL; THEVENIN, 2011), com um novo ponto de vista, propuseram um novo operador de fusão de crenças, que produz resultados similares aos demais, porém sem utilizar a métrica de distância entre modelos. Este novo operador foi nomeado *"Partial Satisfactibility"*.

Veremos com mais detalhes, nas próximas seções, estes operadores.

2.2.3.1 Operador de Maioria

O operador de *maioria*, proposto por Lin e Mendelzon (LIN; MENDELZON, 1999) define semanticamente a distância entre um modelo e o conjunto de bases de crenças representadas por ele, como a soma das distâncias entre o modelo e cada base de crença pertencente a este modelo.

Para calcular a distância para cada base, usaremos o *princípio da mudança mínima* proposto por Dalal (DALAL, 1988), e já mencionado na seção 2.2.1.2.

Sabendo disso, o operador de maioria, notado por Δ^{Σ}, mantém as crenças que são compartilhadas pela maioria dos modelos, com o objetivo de maximizar a satisfação global. Portanto o cálculo da distância entre um modelo e suas bases de crenças é definido como

$$Dist_{\Sigma}(w, \Psi) = \sum_{\psi_i \in \Psi} |dist(w, \psi_i)|$$

Assim, conclui-se que

$$w \leqslant_{\Psi}^{\Sigma} w' \quad sse \quad Dist_{\Sigma}(w, \Psi) \leq Dist_{\Sigma}(w', \Psi)$$

Ou seja, um modelo w será preferido a um modelo w' se e somente se o somatório das distâncias entre w e as bases de Ψ for menor que o somatório das distâncias entre w' e as bases de Ψ.

2.2.3.2 Operador de Arbitração

Proposto por Liberatore e Schaerf (LIBERATORE; SCHAERF, 1998), o operador de *arbitração* utiliza a mesma ideia das distâncias entre modelos, porém com o intuito de manter tanto quanto possível a informação contida nas bases iniciais, maximizando a satisfação individual dos modelos.

Utilizando o princípio exposto por Dalal (DALAL, 1988) na seção 2.2.1.2, define-se formalmente o operador de arbitração, notado por Δ^{Max}, a distância máxima calculada entre um modelo w e suas bases de crenças ψ_i como

$$Dist_{\text{Max}}(w, \Psi) = \text{Max}_{\psi_i \in \Psi} |dist(w, \psi_i)|$$

Deste modo, um modelo w será preferido a um modelo w' se e somente se a distância máxima entre w e as bases de Ψ for menor que a distância máxima entre w' e as bases de Ψ, isto é:

$$w \leqslant_{\Psi}^{\text{Max}} w' \quad sse \quad Dist_{\text{Max}}(w, \Psi) \leq Dist_{\text{Max}}(w', \Psi)$$

Para ilustrarmos melhor como estes operadores se comportam e suas peculiaridades, veremos na próxima seção alguns exemplos e suas aplicações.

2.2.3.3 Exemplos

Exemplo 4. *Considere 3 amigas, Ana (ψ_1), Sanjeli (ψ_2) e Andréa (ψ_3), que precisam decidir onde irão sair à noite. Ana e Sanjeli desejam ir a um restaurante (notado por r) e ao teatro (notado por t), enquanto que Andréa não deseja sair para nenhum lugar ($\neg r \wedge \neg t$). Se seguirmos a lógica do operador de maioria, a escolha seria ir ao restaurante e ao teatro pois assim seria completamente satisfeita a vontade da maioria dos agentes (Ana e Sanjeli), apesar de Andréa não gostar da ideia.*

Em contrapartida, de acordo com o operador de arbitração, a *escolha teria que ser ir ao restaurante ou ao cinema, mas não em ambos os lugares, o que representa uma "negociação" entre as amigas, onde ambos os lados cedem para ter suas vontades parcialmente atendidas. A tabela abaixo mostra o cálculo da aplicação de ambos os operadores para este exemplo.*

$\mu \in [\![\mu]\!]$	ψ_1	ψ_2	ψ_3	$Dist_{\sum}(\mu, \Psi)$	$Dist_{\text{Max}}(\mu, \Psi)$
$\{r, t\}$	0	0	2	$\boxed{\mathbf{2}}$	2
$\{\neg r, t\}$	1	1	1	3	$\boxed{\mathbf{1}}$
$\{r, \neg t\}$	1	1	1	3	$\boxed{\mathbf{1}}$
$\{\neg r, \neg t\}$	2	2	0	4	2

Tabela 2 – Tabela das distâncias e dos operadores de Maioria e Arbitração do Exemplo 4

Aplicando-se o operador de maioria, as amigas irão ao teatro e ao restaurante, enquanto que pelo operador de arbitração, elas escolherão entre o teatro ou o restaurante. Apesar da simplicidade do exemplo, é possível perceber a dinâmica de ambos os operadores para decidir o processo de fusão.

Exemplo 5. *Seja o Exemplo 3 e tomando como base a Tabela 1. Aplicando os operadores de maioria e arbitração formamos a tabela abaixo:*

$\mu \in [\![\mu]\!]$	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	$Dist_{\sum}(\mu, \Psi)$	$Dist_{\text{Max}}(\mu, \Psi)$
$\{p_1, p_2, p_3\}$	0	1	1	2	1	2	7	2
$\{p_1, p_2, \neg p_3\}$	1	0	2	1	2	1	7	2

Tabela 3 – Tabela das distâncias e dos operadores de Maioria e Arbitração do Exemplo 5

Na Tabela 3 temos o mesmo resultado tanto para o operador de maioria quanto para o de arbitração, ou seja:

$$[\![\Delta_\mu^{\text{Max}}(\Psi)]\!] = [\![\Delta_\mu^{\sum}(\Psi)]\!] = \{\{p_1, p_2, p_3\}, \{p_1, p_2, \neg p_3\}\}$$

Exemplo 6. *Considere o conjunto de bases de crenças* $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ *e as bases* ψ_1, ψ_2, ψ_3 *e as restrições de integridade* μ.

$$\psi_1 = \psi_2 = (p_1 \wedge p_2) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge p_4)$$
$$\psi_3 = (\neg p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_5)$$
$$\mu = (\neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5)$$

Com o exposto acima, realizamos o cálculo dos modelos e das distâncias entre os modelos, e formamos a Tabela 4 com as distâncias mínimas calculadas entre os modelos das bases ψ_1, ψ_2, ψ_3 *e os modelos de* μ, *e com os valores calculados após a aplicação dos operadores de maioria e arbitração.*

$w \in [\![\mu]\!]$	ψ_1	ψ_2	ψ_3	$Dist_{\sum}(w, \Psi)$	$Dist_{\text{Max}}(w, \Psi)$
$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	1	1	2	4	2
$\{\neg p_1, \neg p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	2	2	2	6	2
$\{\neg p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$	2	2	1	5	2
$\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	1	1	2	4	2
$\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$	1	1	1	3	1

Tabela 4 – Tabela das distâncias e dos operadores de Maioria e Arbitração do Exemplo 6

Note na Tabela 4 que a mínima distância encontrada aplicando o operador de maioria é o valor 3, na linha em destaque. E o operador de arbitração, com a mínima distância resultando no valor 1, na mesma linha em destaque. Neste caso, as ordens de preferências estabelecidas pelos operadores Δ^{Σ} *e* Δ^{Max} *chegaram em um mesmo modelo, e a fusão das bases resultante é:*

$$[\![\Delta_\mu^{\text{Max}}(\Psi)]\!] = [\![\Delta_\mu^{\Sigma}(\Psi)]\!] = \{\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}\}$$

Exemplo 7. *Considere agora uma reunião de condomínio com 4 proprietários, onde o síndico propõe construir uma piscina, uma quadra de tênis e um estacionamento para os moradores. Mas, se apenas 2 destes 3 itens forem construídos, o condomínio aumentará consideravelmente. Sejam* S, T *e* P *respectivamente os literais referentes a piscina, a quadra de tênis e o estacionamento; e* I *o aumento do condomínio.*

Seja $\mu = ((S \wedge T) \vee (S \wedge P) \vee (T \wedge P)) \rightarrow I$ *as restrições de integridade referente ao exposto sobre o aumento do condomínio, e* $\Psi = \{\psi_1 \sqcup \psi_2 \sqcup \psi_3 \sqcup \psi_4\}$ *os 4 proprietários.*

Dois proprietários não se importam com o aumento do condo-

mínio e querem construir os 3 itens de qualquer maneira, ou seja, $\psi_1 = \psi_2 = S \wedge T \wedge P$. O terceiro proprietário não quer pagar nenhum aumento no condomínio, portanto não concorda com nenhuma das construções, $\psi_3 = \neg S \wedge \neg T \wedge \neg P \wedge \neg I$. E o quarto acredita que o condomínio precisa de um estacionamento e de uma quadra de tênis mas não quer um aumento no condomínio, portanto $\psi_4 = T \wedge P \wedge \neg I$.

Considere os literais S, T, P e I nesta ordem, o valor 1 para verdadeiro *e 0 para* falso, *e o resultado das fusões de crenças a seguir.*

$$\psi_1 = \psi_2 = \{(1,1,1,1),(1,1,1,0)\}$$
$$\psi_3 = \{(0,0,0,0)\}$$
$$\psi_4 = \{(1,1,1,0),(0,1,1,0)\}$$
$$\mu = \mathcal{W} \backslash \{(0,1,1,0),(1,0,1,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$$

Após fazer os cálculos das distâncias entre os modelos, e as distâncias mínimas entre os modelos das bases ψ_1, ψ_2, ψ_3 e ψ_4 e os modelos de μ, temos a Tabela 5 com estes resultados juntamente com os valores calculados na aplicação dos operadores de maioria e arbitração.

$w \in [\![\mu]\!]$	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	$Dist_{\sum}(w,\Psi)$	$Dist_{\mathrm{Max}}(w,\Psi)$
(0, 0, 0, 0)	3	3	0	2	8	3
(0, 0, 0, 1)	3	3	1	3	10	3
(0, 0, 1, 0)	2	2	1	1	6	2
(0, 0, 1, 1)	2	2	2	2	8	2
(0, 1, 0, 0)	2	2	1	1	6	2
(0, 1, 0, 1)	2	2	2	2	8	2
(0, 1, 1, 0)	1	1	2	0	4	2
(0, 1, 1, 1)	1	1	3	1	6	3
(1, 0, 0, 0)	2	2	1	2	7	2
(1, 0, 0, 1)	2	2	2	3	9	3
(1, 0, 1, 0)	1	1	2	1	5	2
(1, 0, 1, 1)	1	1	3	2	7	3
(1, 1, 0, 0)	1	1	2	1	5	2
(1, 1, 0, 1)	1	1	3	2	7	3
(1, 1, 1, 0)	0	0	3	0	3	3
(1, 1, 1, 1)	0	0	4	1	5	4

Tabela 5 – Tabela das distâncias e dos operadores de Maioria e Arbitração do Exemplo 7

As linhas sombreadas em cinza são excluídas pois não satisfazem as restrições de integridade.

Logo, para o critério do operador de arbitração Δ^{Max}, temos o valor 2 como a distância mínima entre os possíveis modelos (linhas em amarelo) e os modelos para este resultado são

$$[\![\Delta_{\mu}^{\mathrm{Max}}(\Psi)]\!] = \{(0,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,0),(0,1,0,1),(1,0,0,0)\}$$

Isso significa que, de acordo com este operador, a solução que melhor se encaixa aos proprietários é construir apenas um dos itens e não aumentar o valor do condomínio, ou, aumentar o condomínio e construir a quadra de tênis ou o estacionamento.

Agora, analisaremos o resultado conforme o operador de maioria Δ^{Σ}, temos o valor 5 como a menor distância entre os possíveis modelos (linha em azul) e o modelo para este resultado

$$[\![\Delta_{\mu}^{\Sigma}(\Psi)]\!] = \{(1,1,1,1)\}$$

Ou seja, a solução que melhor se encaixa, atendendo a satisfação do grupo, é a de construir os 3 itens e aumentar o valor do condomínio.

2.2.4 Operador *"Partial Satisfactibility"*

Com um ponto de vista diferente, Pozos-Parra et al. (POZOS-PARRA; PERRUSSEL; THEVENIN, 2011), propuseram um novo operador semântico de fusão de crenças como uma alternativa aos operadores já vistos. Até o momento, vimos operadores que são baseados na noção de distâncias entre modelos para se chegar a um resultado de fusão consistente às bases de crenças individuais dos agentes.

Veremos nesta seção que é possível definir um operador de fusão baseado na noção de satisfação parcial (*"Partial Satisfactibility"*), e mesmo assim obter resultados análogos aos abordados anteriormente. Ademais, contrário à maioria dos estudos nesta área, este operador considera quando as bases são inconsistentes.

Em sua definição formal, este operador utiliza as definições de Formas Normais Canônicas, conforme já visto na seção 2.2.1.1.

2.2.4.1 Satisfação Parcial

Considere ψ uma base de crenças que está na FND, e w uma possível interpretação de $\mathcal{W}$, e seja $|P| = n$ o número de símbolos proposicionais de P. Definimos a Satisfação Parcial de ψ para w, notada por $w_{PS}(\psi)$, recursivamente como segue.

1. Se ψ é apenas um literal L, então $w_{PS}(\psi) = \text{Max}\Big\{w(L), \frac{n-1}{2n}\Big\}$

2. Se ψ é uma conjunção de literais $L_1 \wedge \cdots \wedge L_s$, então

$$w_{PS}(\psi) = \text{Max}\left\{\sum_{i=1}^{s} \frac{w(L_i)}{s}, \frac{n - |P(\psi)|}{2n}\right\}$$

3. Se ψ é uma disjunção $D_1 \vee \cdots \vee D_r$ onde cada D_i é um termo ou uma conjunção de literais, então

$$w_{PS}(\psi) = \text{Max}\Big\{w_{PS}(D_1), ..., w_{PS}(D_r)\Big\}$$

Exemplo 8. *Seja o conjunto $P = \{a, b, c\}$ nesta ordem, as bases de crenças $\psi_1 = a \wedge c$, $\psi_2 = (\neg a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c)$ e $\psi_3 = c$. Considere $w = (1, 1, 1)$. Aplicando a definição acima, a satisfação parcial das bases será:*

Para $\psi_1 = a \wedge c$, temos

$$\begin{aligned} w_{PS}(\psi_1) &= \text{Max}\left\{\frac{w(a) + w(c)}{2}, \frac{3-2}{2*3}\right\} \\ &= \text{Max}\left\{\frac{1+1}{2}, \frac{1}{6}\right\} \\ &= \text{Max}\left\{1, \frac{1}{6}\right\} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Para $\psi_3 = c$, *temos*

$$\begin{aligned} w_{PS}(\psi_3) &= \text{Max}\left\{ w(c), \frac{3-1}{2*3} \right\} \\ &= \text{Max}\left\{ 1, \frac{1}{3} \right\} = \mathbf{1} \end{aligned}$$

Para $\psi_2 = (\neg a \wedge \neg c) \vee (b \wedge \neg c)$, *temos*

$$w_{PS}(\psi_2) = \text{Max}\Big\{ w_{PS}(D_1), w_{PS}(D_2) \Big\}$$

onde $D_1 = (\neg a \wedge \neg c)$ *e* $D_2 = (b \wedge \neg c)$. *Portanto*

$$\begin{aligned} w_{PS}(\psi_2) &= \text{Max}\left\{ \text{Max}\left\{ \frac{w(\neg a) + w(\neg c)}{2}, \frac{3-2}{2*3} \right\}, \text{Max}\left\{ \frac{w(b) + w(\neg c)}{2}, \frac{3-2}{2*3} \right\} \right\} \\ &= \text{Max}\left\{ \text{Max}\left\{ \frac{0+0}{2}, \frac{1}{6} \right\}, \text{Max}\left\{ \frac{1+0}{2}, \frac{1}{6} \right\} \right\} \\ &= \text{Max}\left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right\} = \mathbf{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Como mencionado anteriormente, a ideia deste operador é usar outra métrica para o resultado de fusão de crenças. Como já temos a definição da satisfação parcial das bases dos agentes, veremos a seguir o estado eleito da fusão, que será aquele que maximiza o valor da soma da satisfação parcial das bases dos agentes.

2.2.4.2 Fusão por Satisfação Parcial

Seja $\Psi = \{\psi_1, \psi_2, ..., \psi_m\}$ o conjunto de bases de crenças obtido dos agentes $\psi_1, ..., \psi_m$, então o resultado da fusão de crenças de Ψ, de acordo com o operador *Partial Satisfactibility*, notado por *Fusão-PS(*Ψ*)*, será como segue.

$$\left\{ w \in \mathcal{W} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} w_{PS}(\psi_i) \geq \sum_{i=1}^{m} w'_{PS}(\psi_i) \text{ para todo } w' \in \mathcal{W} \right\}$$

Exemplo 9. *Imagine o cenário em que um professor pergunta aos alunos quais linguagens eles gostariam de aprender, SQL (notado por s), Datalog (notado por d) ou O_2 (notado por o). O primeiro estudante diz que quer aprender apenas SQL ou O_2, ou seja, $\psi_1 = (s \vee o) \wedge \neg d$. O segundo estudante diz que quer aprender ou Datalog ou O_2 mas não os dois, ou seja, $\psi_2 = (\neg s \wedge d \wedge \neg o) \vee (\neg s \wedge \neg d \wedge o)$. E o terceiro quer aprender as três linguagens, ou seja, $\psi_3 = (s \wedge d \wedge o)$. Com estas informações, primeiro precisamos transformar as bases na FND, caso não estejam. Logo, temos:*

$$\psi_1 = (s \wedge \neg d) \vee (o \wedge \neg d)$$
$$\psi_2 = (\neg s \wedge d \wedge \neg o) \vee (\neg s \wedge \neg d \wedge o)$$
$$\psi_3 = (s \wedge d \wedge o)$$

w	ψ_1	ψ_2	ψ_3	*Fusão-PS(Ψ)*
(1, 1, 1)	1/2	1/3	1	11/6
(1, 1, 0)	1/2	2/3	2/3	11/6
(1, 0, 1)	1	2/3	2/3	14/6
(1, 0, 0)	1	1/3	1/3	10/6
(0, 1, 1)	1/2	2/3	2/3	11/6
(0, 1, 0)	1/6	1	1/3	9/6
(0, 0, 1)	1	1	1/3	14/6
(0, 0, 0)	1/2	2/3	0	7/6

Tabela 6 – Tabela com o operador *Partial Satisfactibility* e *Fusão-PS(Ψ)* do Exemplo 9

*Observe na Tabela 6, que ao aplicarmos o operador de Satisfação Parcial e a fusão de acordo com este operador (*Fusão-PS(Ψ)*), temos como resultado (linhas sombreadas) dois estados: $w = (1, 0, 1)$ e $w = (0, 0, 1)$. Semanticamente isto quer dizer que, de acordo com este operador, a melhor escolha seria aprender SQL e O_2 ou apenas O_2.*

3 OPERADOR BPM

Neste capítulo apresenta-se o operador BPM (MARCHI; BITTENCOURT; PERRUSSEL, 2009), que é o operador que deseja-se demonstrar coerente com os postulados apresentados na seção 2.2.2. A importância de realizar tal fato, está em garantir que o operador BPM pode ser utilizado como um operador de fusão de crenças, mantendo as características importantes de operadores de fusão, como por exemplo irrelevância da sintaxe, princípio de mudança mínima, etc., e ainda possuir uma propriedade interessante em sistemas baseados em conhecimento: a unicidade, em que cada base de crenças possui uma única representação em Implicantes Primários.

Este operador, quando utilizando o critério de distância mínima de Dalal, provê versões sintáticas dos operadores de Arbitração e Maioria.

Inicia-se apresentando os conceitos teóricos fundamentais para a compreensão do operador nas seções 2.2.1 e 2.2.1.1, e na sequência introduziremos um novo conceito de distância entre modelos.

A caracterização sintática da distância entre modelos é feita considerando os termos $D \in IP$, em que cada termo D é um conjunto de literais.

3.1 DEFINIÇÃO SINTÁTICA BPM

Sejam a base de crenças ψ e uma nova informação μ representadas em suas formas normais primárias disjuntivas IP_ψ e IP_μ e sejam $D_\psi \in IP_\psi$ e $D_\mu \in IP_\mu$. A distância k entre os termos D_ψ e D_μ é dada por:

$$k(D_\psi, D_\mu) = D_\psi \cap \overline{D_\mu}$$

Isto significa que, ao mudar uma base de crenças, eliminamos dos termos D_ψ os símbolos contraditórios e colocamos a nova informação μ. Fazendo esta operação em todos os termos $D_\psi \in IP_\psi$, obtêm-se um conjunto de termos candidatos à nova base, denominado Γ. Este conjunto Γ é calculado sobre $IP_\psi \times IP_\mu$ tal que:

$$\Gamma = \{D \mid D = D_\mu \cup (D_\psi - \overline{D_\mu})\}$$

em que $D_\mu \in IP_\mu$ e $D_\psi \in IP_\psi$ e a operação $D_\mu \cup (D_\psi - \overline{D_\mu})$ significa a eliminação dos literais contraditórios de D_μ em D_ψ e a inclusão dos literais pertencentes a D_μ.

Exemplo 10. *Considere* $IP_\psi = (\neg p_3 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_3 \wedge \neg p_1 \wedge p_4) \vee (\neg p_2 \wedge p_4)$ *e a nova informação* μ *dada por* $IP_\mu = (\neg p_4 \wedge p_3) \vee (p_1 \wedge p_2)$*. Com as definições apresentadas anteriormente, podemos montar uma tabela que apresenta a operação sintática de mudança de crenças bem como as distâncias entre os termos* D_ψ *e* D_μ*.*

A última coluna da tabela apresenta os literais que se alteram com a mudança de base, e significa as distâncias entre os termos.

D_ψ	D_μ	$(D_\psi - \overline{D_\mu})$	$D \in \Gamma$	$k(D_\psi, D_\mu)$
$\{\neg p_3, \neg p_2\}$	$\{\neg p_4, p_3\}$	$\{\neg p_2\}$	$\{\neg p_2, \neg p_4, p_3\}$	$\{p_3\}$
$\{\neg p_3, \neg p_2\}$	$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_3\}$	$\{\neg p_3, p_1, p_2\}$	$\{p_2\}$
$\{\neg p_2, p_4\}$	$\{\neg p_4, p_3\}$	$\{\neg p_2\}$	$\{\neg p_2, \neg p_4, p_3\}$	$\{p_4\}$
$\{\neg p_2, p_4\}$	$\{p_1, p_2\}$	$\{p_4\}$	$\{p_4, p_1, p_2\}$	$\{p_2\}$
$\{\neg p_3, \neg p_1, p_4\}$	$\{\neg p_4, p_3\}$	$\{\neg p_1\}$	$\{\neg p_1, \neg p_4, p_3\}$	$\{p_3, p_4\}$
$\{\neg p_3, \neg p_1, p_4\}$	$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_3, p_4\}$	$\{\neg p_3, p_4, p_1, p_2\}$	$\{p_1\}$

Tabela 7 – Tabela da distância k e do conjunto Γ do Exemplo 10

Exemplo 11. *Considere a fusão das bases de crenças apresentada no Exemplo 6, com as bases representadas por seus conjuntos de implicantes primários, tal que* $IP_\Psi = (IP_{\psi_1}, IP_{\psi_2}, IP_{\psi_3})$ *em que* $IP_{\psi_1} = IP_{\psi_2} = (p_1 \wedge p_2) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge p_4)$ *e* $IP_{\psi_3} = (\neg p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_5)$*. A base* μ *que representa o conjunto de restrições de integridade é dada por* $IP_\mu = (\neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5)$*. A tabela abaixo apresenta os termos candidatos, bem como os conjuntos de literais contraditórios de cada termo e suas respectivas cardinalidades.*

$D_\psi \in IP_\Psi$	D_μ	$(D_\psi - \overline{D_\mu})$	$D \in \Gamma$	$k(D_\psi, D_\mu)$	$\lvert k(D_\psi, D_\mu)\rvert$
$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_2\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_1\}$	1
$\{p_2, p_3, p_4\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_2\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_3, p_4\}$	2
$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_1\}$	$\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_2\}$	1
$\{p_2, p_3, p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$	$\{p_2, p_3\}$	2
$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_2\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_1\}$	1
$\{p_2, p_3, p_4\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_2\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_3, p_4\}$	2
$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_1\}$	$\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_2\}$	1
$\{p_2, p_3, p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$	$\{p_2, p_3\}$	2
$\{\neg p_3, p_4, \neg p_5\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{\neg p_3\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_4, \neg p_5\}$	2
$\{\neg p_3, p_4, \neg p_5\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{\neg p_3, p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$	$\{p_5\}$	1

Tabela 8 – Tabela das distâncias de acordo com o operador BPM e do conjunto Γ do Exemplo 11

Neste exemplo observe que na quinta coluna temos os conjuntos de literais contraditórios e na última coluna a cardinalidade destes conjuntos. Note também que $\psi_1 = \psi_2$ e por isso as duas primeiras partes da tabela são equivalentes.

Aplicando o critério de ordenação total neste contexto temos:

$$D \leqslant_\Gamma^T D' \quad sse \quad |k(D_\psi, D_\mu)| \leq |k(D'_\psi, D'_\mu)|$$

Um termo D será preferido a um termo D' se e somente se o número de literais contraditórios de D for inferior ao número de literais contraditórios de D'.

Para a realização de um processo de fusão de crenças, precisamos encontrar os modelos da base de restrições de integridade mais próximos aos modelos das bases de crenças. Então a seleção dos termos que irão constituir a nova base é feita observando cada termo em IP_μ. Para cada termo D_μ e para cada base IP_ψ de IP_Ψ são escolhidas as distâncias mínimas, segundo o critério de ordenação total. Assim, a distância entre um termo D_μ e a base de crenças IP_ψ é dada pelo valor mínimo de $k(D_\psi, D_\mu)$, isto é:

$$d(D_\mu, IP_\psi) = Min(\{|k(D_\psi, D_\mu)| \mid D_\psi \in IP_\psi\})$$

Da mesma forma, para caracterizar os operadores sintáticos de maioria e arbitração, utilizamos a caracterização sintática dos critérios de distância e ordenação.

Definimos então um operador sintático de maioria, notado por FND_{Δ^Σ}, como:

$$Dist_\Sigma(D_\mu, IP_\Psi) = \sum_{IP_{\psi_i} \in IP_\Psi} d(D_\mu, IP_{\psi_i})$$

e a seguinte ordem de preferência é estabelecida:

$$D \leqslant^{\Sigma}_{IP_\Psi} D' \quad sse \quad Dist_{\Sigma}(D, IP_\Psi) \ \leq \ Dist_{\Sigma}(D', IP_\Psi)$$

O operador sintático de arbitração, notado por $FND_{\Delta^{Max}}$, utiliza o seguinte cálculo de distâncias:

$$Dist_{Max}(D_\mu, IP_\Psi) = Max_{IP_{\psi_i} \in IP_\Psi}\, d(D_\mu, IP_{\psi_i})$$

e a seguinte ordem de preferência é estabelecida:

$$D \leqslant^{Max}_{IP_\Psi} D' \quad sse \quad Dist_{Max}(D, IP_\Psi) \ \leq \ Dist_{Max}(D', IP_\Psi)$$

Lembrando que os termos selecionados para constituir a nova base serão os termos de Γ, com $|k(D_\mu, D_\psi)|$ mínimo.

Exemplo 12. *Considere o Exemplo 11. Para cada termo D_μ e para cada base IP_ψ são observadas as distâncias $|k(D_\mu, D_\psi)|$ calculadas anteriormente. Na tabela abaixo, são apresentadas as distâncias mínimas de cada IP_ψ ao termo D_μ. Aplicando os critérios de distâncias e ordenação dos operadores de arbitração e maioria, temos:*

D_μ	$d(D_\mu, IP_{\psi_1})$	$d(D_\mu, IP_{\psi_2})$	$d(D_\mu, IP_{\psi_3})$	$Dist_\Sigma$	$Dist_{Max}$
$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	1	1	2	4	2
$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	1	1	1	$\boxed{\mathbf{3}}$	$\boxed{\mathbf{1}}$

Tabela 9 – Tabela das distâncias e dos operadores sintáticos do Exemplo 12

Pela Tabela 9, os valores destacados apontam o termo selecionado pelos operadores segundo suas ordens de preferência. Para obter a base resultante do processo de fusão pela aplicação dos operadores de maioria e arbitração, olhamos para os termos de Γ com $|k(D_\mu, D_\psi)|$ mínimo relacionados ao termo de IP_μ escolhido. Portanto,

$$FND_{\Delta^{\Sigma}_{\mu}} = FND_{\Delta^{Max}_{\mu}} = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4 \wedge p_5)$$

Visto isso, é possível perceber que Implicantes Primários e Formas Normais Disjuntivas podem ser utilizados tanto para fazer o operador de maioria quanto o operador de arbitração. Contudo, ficou em aberto as demonstrações dos postulados que satisfazem a fusão de crenças (seção 2.2.2), e serão apresentadas no próximo Capítulo.

4 DEMONSTRAÇÕES

Neste capítulo será apresentada, para cada postulado da seção 2.2.2, a demonstração de sua satisfação pelo operador BPM. Para as demonstrações, a estratégia utilizada será por construção, em que usarei as definições apresentadas na seção 2.2.1 e no decorrer do trabalho como base para as provas. Antes, para melhor clareza, irei reescrever os postulados no contexto do operador sintático BPM, já visto no capítulo anterior.

(**IC0**) $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) \vdash IP_\mu$

(**IC1**) Se IP_μ é consistente, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi)$ é consistente

(**IC2**) Se IP_Ψ é consistente com IP_μ, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) = \bigwedge IP_\Psi \wedge IP_\mu$

(**IC3**) Se $IP_{\Psi_1} \leftrightarrow IP_{\Psi_2}$ e $IP_{\mu_1} \leftrightarrow IP_{\mu_2}$ então $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_{\Psi_1}) \leftrightarrow FND_{\Delta^*_{\mu_2}}(IP_{\Psi_2})$

(**IC4**) Se $IP_\psi \vdash IP_\mu$ e $IP_{\psi'} \vdash IP_\mu$, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_\psi \nvdash \perp \Rightarrow FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_{\psi'} \nvdash \perp$

(**IC5**) $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2}) \vdash FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2})$

(**IC6**) Se $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$ é consistente, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2}) \vdash FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$

(**IC7**) $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2} \vdash FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi)$

(**IC8**) Se $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2}$ é consistente, então $FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi) \vdash FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi)$

Para as demonstrações a seguir, considere FND_{Δ^*} a notação de fusão generalizada para quaisquer operadores, como por exemplo, maioria e arbitração.

Postulado (IC0). $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) \vdash IP_\mu$

Demonstração. Pelas definições do operador BPM e de Implicantes Primários, ao calcular os termos em Γ, tem-se que: $\forall\ D \in \Gamma, D \models \mu$. Como a base resultante contém os termos de IP_Ψ cuja distância é mínima para cada termo IP_μ, tem-se que $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) \vdash IP_\mu$. $\square$

Postulado (IC1). *Se IP_μ é consistente, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi)$ é consistente*

Demonstração. Se IP_μ é consistente, cada termo $D_\mu \in IP_\mu$ (dado que $IP_\mu = \bigvee D_\mu$, por definição), então $D_\mu \nvDash \bot$. Pela definição do cálculo dos termos em Γ temos que $(D_\psi - \overline{D_\mu}) \nvDash \bot$ e portanto $D_\mu \cup (D_\psi - \overline{D_\mu}) \nvDash \bot$. Logo $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) \nvDash \bot$, ou seja, $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi)$ é consistente.

$\square$

Postulado (IC2). *Se IP_Ψ é consistente com IP_μ, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) = \bigwedge IP_\Psi \wedge IP_\mu$*

Demonstração. Seja $IP_\Psi = \{IP_{\psi_1}, IP_{\psi_2}, \cdots, IP_{\psi_n}\}$. Se IP_Ψ é consistente com IP_μ, entã, por definição, cada $IP_\psi \vDash IP_\mu$. Logo $\forall$ termo em Γ temos que $(D_\psi - \overline{D_\mu}) = \emptyset$ e $IP_\psi \wedge IP_\mu$ é consistente.

Se cada IP_{ψ_i} não contradiz a restrição de integridade IP_μ então os termos calculados em Γ serão todos escolhidos como resultado da fusão. Logo $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) = \bigwedge IP_\Psi \wedge IP_\mu$.

$\square$

Postulado (IC3). *Se $IP_{\Psi_1} \leftrightarrow IP_{\Psi_2}$ e $IP_{\mu_1} \leftrightarrow IP_{\mu_2}$ então $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_{\Psi_1}) \leftrightarrow FND_{\Delta^*_{\mu_2}}(IP_{\Psi_2})$*

Demonstração. Conforme a definição de Implicantes Primários, já vista na seção 2.2.1.1, IP_Ψ contém o menor conjunto de símbolos proposicionais tal que $IP_\Psi \vDash \Psi$. Assim, se $IP_{\Psi_1} \vDash \Psi_1$ e $IP_{\Psi_2} \vDash \Psi_2$ e $IP_{\Psi_1} \leftrightarrow IP_{\Psi_2}$, então $IP_{\Psi_1} \equiv IP_{\Psi_2}$, isto é, eles são equivalentes. Da mesma forma IP_μ é o menor conjunto tal que $IP_\mu \vDash \mu$, e se temos que $IP_{\mu_1} \leftrightarrow IP_{\mu_2}$, então $IP_{\mu_1} \equiv IP_{\mu_2}$. Portanto, se existe essa equivalência, podemos aplicar a fusão de forma que $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_{\Psi_1}) \leftrightarrow FND_{\Delta^*_{\mu_2}}(IP_{\Psi_2})$.

$\square$

Postulado (IC4). *Se $IP_\psi \vdash IP_\mu$ e $IP_{\psi'} \vdash IP_\mu$, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_\psi \nvdash \bot \Rightarrow FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_{\psi'} \nvdash \bot$*

Demonstração. Se $IP_\psi \vdash IP_\mu$, então IP_ψ e IP_μ não possuem elementos contraditórios e, portanto, são consistentes. Da mesma maneira, se $IP_{\psi'} \vdash IP_\mu$, então eles são consistentes entre si. Quando fazemos a união $IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}$ temos uma disjunção $(IP_\psi \vee IP_{\psi'})$ que se mantém consistente com IP_μ, e, ao aplicar a fusão sobre a união, que pela definição está na FND, mantemos a disjunção sem contradições, e portanto consistente com IP_μ. Ao adicionarmos IP_ψ na fusão, ela se manterá consistente de forma que $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_\psi \vdash IP_\mu$, pois já vimos no início da demonstração que $IP_\psi \vdash IP_\mu$. Da mesma forma ocorre com $IP_{\psi'}$. Logo $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_\psi \nvdash \perp \Rightarrow FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_{\psi'} \nvdash \perp$.

□

Postulado (IC5). $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2}) \vdash FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2})$

Demonstração. Ao aplicar a fusão de IP_{Ψ_1} sobre IP_μ, todos os elementos contraditórios a IP_μ serão eliminados no cálculo de Γ, como já vimos na Demonstração de **(IC1)**. Então, $IP_{\Psi_1} \vDash IP_\mu$, da mesma forma $IP_{\Psi_2} \vDash IP_\mu$. Se $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1})$ for inconsistente com $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2}) \vdash \top$. Se $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1})$ for consistente com $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$, então podemos fazer a conjunção $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$ e o resultado se manterá consistente. Logo, ao fazer uma união das bases $IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2}$, ou seja, uma disjunção, pode ocorrer alguma contradição entre os símbolos proposicionais das bases, mas essa contradição será eliminada ao aplicar a fusão por IP_μ. Portanto, $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2}) \vdash FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2})$.

□

Postulado (IC6). *Se* $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$ *é consistente, então* $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2}) \vdash FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$

Demonstração. Se $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$ é consistente, não existe contradição das bases resultantes com IP_μ. Logo, ao fazer a união $IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2}$ e aplicar a fusão, o resultado poderá conter símbolos proposicionais em IP_{Ψ_1}que não pertencem a IP_{Ψ_2} (e vice versa), mas que não são contraditórios a IP_μ e nem entre si e, portanto, $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2}) \supseteq FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$.

□

Postulado (IC7). $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2} \vdash FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi)$

Demonstração. Ao aplicar a fusão de IP_Ψ sobre IP_{μ_1}, eliminamos os elementos contraditórios entre eles e portanto $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \vdash IP_{\mu_1}$. Se IP_{μ_2} for inconsistente com $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi)$, então $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2} \vdash \top$. Se IP_{μ_2} for consistente com $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi)$, será consistente com IP_{μ_1}, portanto, o resultado da fusão de IP_Ψ com a conjunção de IP_{μ_1} e IP_{μ_2} será consistente e decorrente de $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2}$. □

Postulado (IC8). *Se* $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2}$ *é consistente, então* $FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi) \vdash FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi)$

Demonstração. Se $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2}$ é consistente, então IP_{μ_2} é consistente com IP_{μ_1}. Logo, o resultado da fusão $FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi)$ poderá conter símbolos proposicionais que não pertencem originalmente a IP_{μ_1} ou IP_Ψ, mas que não são contraditórios a eles, portanto, $FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi) \supseteq FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi)$. □

Dessa forma, conseguimos provar que o operador BPM respeita os postulados de fusão de crenças, como era o objetivo deste trabalho.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo principal demonstrar que o operador sintático BPM satisfaz os postulados de fusão de crenças, e assim, possui as características necessárias dos operadores de fusão respeitando, por exemplo, consistência e mudança mínima. A peculiaridade encontrada neste operador é a de utilizar os conceitos de formas normais canônicas e Implicantes Primários em sua definição, permitindo assim a realização de um processo de fusão sintático, que resulta em menos processamento, com resultados equivalentes aos operadores semânticos de arbitração e maioria descritos neste trabalho.

Para se chegar nas demonstrações, foi necessário explicar alguns conceitos já utilizados na área de fusão de crenças, como por exemplo a noção de distâncias entre modelos proposta por Dalal, bem como apresentar os principais operadores (maioria e arbitração). Para enriquecer um pouco mais o trabalho, abordou-se um operador com uma visão diferente dos habituais, o operador de Satisfação Parcial, que calcula um resultado semelhante ao dos demais.

Com isso, pudemos observar o comportamento de operadores tanto sintáticos quanto semânticos. Pôde-se observar que o critério extra-lógico adotado para mensurar distâncias, seja em modelos ou fórmulas, nos casos dos operadores semânticos e sintáticos respectivamente, pode promover resultados bastantes diferentes que podem ser mais ou menos adequados a algumas situações. Quando a distância mínima proposta por Dalal é aplicada, é possível obter operadores sintáticos e semânticos equivalentes, como apresentado no trabalho (MARCHI; BITTENCOURT; PERRUSSEL, 2009), que foi apresentado e, principalmente, provado satisfazer os postulados da seção 2.2.2, podendo assim ser seguramente utilizado como um operador de fusão de crenças.

Para trabalhos futuros é possível explorar mais as definições de Implicantes Primários e até mesmo propor novos operadores de fusão de crenças, seja propondo outros critérios extra-lógicos de distância ou outros critérios de ordenação total para a escolha da informação que será utilizada para compor a nova base de crenças.

REFERÊNCIAS

BITTENCOURT, G.; MARCHI, J.; PADILHA, R. S. A Syntactic Approach to Satisfaction. In: KONEV, B.; SCHIMIDT, R. (Ed.). 4^{th} *International Workshop on the Implementation of Logic (LPAR03).* [S.l.]: University of Liverpool and University of Manchester, 2003. p. 18–32.

DALAL, M. Investigations Into a Theory of Knowledge Base Revision: Preliminary Report. In: ROSENBLOOM, P.; SZOLOVITS, P. (Ed.). *Proceedings of the 7^{th} National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'98).* Menlo Park, California: AAAI Press, 1988. v. 2, p. 475–479. <citeseer.nj.nec.com/dalal88investigations.html>.

DAM, J. van; KRöSE, B.; GROEN, D. Neural network applications in sensor fusion for an autonomous mobile robot. In Reasoning with Uncertainty in Robotics, (Dorst, L. and Lambalgen, M. van and Voorbraak, F., ed.), Springer, p. 263-277. 1996. <http://carol.wins.uva.nl/ krose/papers.html>.

DOYLE, J. A Truth Maintenance System. *Artificial Intelligence*, v. 12, p. 231–272, 1979.

FAGIN, R.; ULLMAN, J. D.; VARDI, M. Y. On the Semantics of Updates in Databases. In: *Proceedings of the $2^{r}d$ ACM SIGACT-SIGMOD Symposium on Principles of Database Systems (PODS'83).* New York, NY, USA: ACM Press, 1983. p. 352–365. ISBN 0-89791-097-4.

GäRDENFORS, P. *Knowledge in Flux: Modelling the Dynamics of Epistemic States.* [S.l.]: Bradford Books, MIT Press, 1988.

GäRDENFORS, P. The Dynamics of Belief Systems: Foundations vs. Coherence Theories. *Revue Internationale de Philosophie*, v. 172, p. 24–46, Jan. 1990.

KATSUNO, H.; MENDELZON, A. O. On the Difference Between Updating a Knowledge Base and Revising It. In: ALLEN, J. F.; FIKES, R.; SANDEWALL, E. (Ed.). *Proceedings of the $2^{r}d$ International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'91).* Cambridge, Massachusetts, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1991. p. 387–394. <citeseer.nj.nec.com/417296.html>.

KONIECZNY, S.; PÉREZ, R. P. Merging with integrity constraints. In: *Proceedings of ECSQARU'99*. [S.l.: s.n.], 1999. p. 1–12.

KONIECZNY, S.; PÉREZ, R. P. Merging information under constraints: a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, v. 12, n. 5, p. 773–808, 2002.

LIBERATORE, P.; SCHAERF, M. Arbitration: A commutative operator for belief revision. In: *Proceedings of the Second World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence (WOCFAI'1995)*. [S.l.: s.n.], 1995. p. 217–228.

LIBERATORE, P.; SCHAERF, M. Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, v. 10, n. 1, p. 76–90, 1998.

LIN, J.; MENDELZON, A. O. Knowledge base merging by majority. In: *In Dynamic Worlds: From the Frame Problem to Knowledge Management*. [S.l.]: Kluwer, 1999.

MARCHI, J.; BITTENCOURT, G.; PERRUSSEL, L. Formas normais primárias aplicadas à fusão de crenças. *VII ENIA - Encontro Nacional de Inteligência Artificial*, p. 1–10, 2009.

MARCHI, J.; PERRUSSEL, L.; BITTENCOURT, G. Quantum-based belief merging. In: *Proceedings of the 11th Ibero-American Conference on AI (IBERAMIA'08)*. Lisbon, Portugal: Springer-Verlag, 2008. p. 21–30. ISBN 978-3-540-88308-1.

POZOS-PARRA, P.; PERRUSSEL, L.; THEVENIN, J. M. Belief merging using normal forms. In: *Proceedings of the 10th Mexican International Conference on Advances in Artificial Intelligence - Volume Part I*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. (MICAI'11), p. 40–51. ISBN 978-3-642-25323-2. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25324-9_4>.

REVESZ, P. Z. On the semantics of theory change: Arbitration between old and new information. In: *In Proceedings of the Twelfth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Databases*. [S.l.: s.n.], 1993. p. 71–82.

Demonstração da Adequação do Operador BPM aos Postulados de Fusão de Crenças

Ana Cristina M. Dyonisio[1]

[1]Departamento de Informática e Estatística – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)
Florianópolis – SC – Brasil

anixmd@gmail.com

Abstract. *In intelligent agents, the belief merging area aims to define common beliefs and goals for a group of agents with distinct and possibly conflicting individual goals. To keep their individual belief bases consistent, some semantic belief merging operators have been proposed, such as majority and arbitration operators. As alternative, synthetic operators can be used. In particular, the BPM operator, acting on a minimal dual representation of the belief bases, obtaining equivalent results. However, the demonstration such this operator respect the postulates established to guide belief merging processes remains open. Thus, the objective of this work is to demonstrate that this operator satisfies the merging postulates.*

Resumo. *Em agentes inteligentes, a área de fusão de crenças tem por objetivo definir crenças e objetivos comuns para um grupo de agentes com objetivos individuais distintos. Para manter a consistência das bases, alguns operadores semânticos para fusão de crenças foram propostos, como os operadores de maioria e arbitração. Como alternativa, operadores sintáticos podem ser utilizados. Em particular, o operador BPM, que atua sobre uma representação dual enxuta da base de crenças, obtendo resultados equivalentes. Contudo, permaneceu em aberto a demonstração de que tal operador respeita os postulados de fusão de crenças. Desta forma, o objetivo deste trabalho é demonstrar que o operador satisfaz os postulados de fusão.*

1. Introdução

Fusão de dados é uma importante área em diversos campos das Engenharias e da Computação. Na área de processamento de sinais, a fusão pode acontecer com dados oriundos de múltiplos sensores como em [van Dam et al. 1996], por exemplo. Já na área da computação, um processo de fusão de informações pode ser o resultado da integração de dados em diferentes bases de dados [Fagin et al. 1983, Revesz 1993, Liberatore and Schaerf 1998].

Na área de Agentes Inteligentes, denomina-se *fusão de crenças* o processo de integração e consolidação de bases de conhecimentos dos agentes [Lin and Mendelzon 1999]. Desta forma, agentes inteligentes passam a compartilhar seus conhecimentos, permitindo que, em um sistema aberto, por exemplo, o objetivo do sistema seja alcançado.

Define-se, portanto, o problema da fusão de crenças como a síntese, realizada de forma automática, de diferentes bases de crenças de diferentes agentes em uma única base de crenças, que possa ser adotada pelo conjunto de agentes. É importante salientar que cada agente possui a sua base, que pode conter crenças conflitantes com as crenças de algum outro agente do sistema. Desta forma um processo de fusão de crenças tem como princípio que o conjunto resultante seja *consistente*, ou seja, que não haja contradição lógica entre as crenças. Além disso, as crenças individuais podem, quando unidas, permitir a inferência de novos fatos, enriquecendo o conhecimento dos agentes. Neste sentido, o processo de fusão deve se basear na *perda mínima de informação*, ou seja, após o término do processo, o maior conjunto possível de crenças não conflitantes deve ser obtido [Marchi et al. 2008].

Tendo em vista os princípios da consistência e da perda mínima de informação, bem como outros que podem ser interessantes do ponto de vista da manipulação lógica de informações, um conjunto de postulados foi proposto com o objetivo de guiar a construção de operadores de fusão de crenças [Konieczny and Pérez 1999]. Deste modo, a importância dos postulados para os operadores é para que estes possam ser aplicados de forma confiável no processo de fusão de crenças, garantindo que as características mencionadas sejam mantidas após o processo de fusão.

Ao longo dos anos, diversos operadores, tanto sintáticos quanto semânticos, vem sendo propostos e demonstrados coerentes com os postulados. Os operadores semânticos trabalham em cima de todas as possíveis interpretações de uma fórmula lógica, e esse tamanho pode chegar a ser exponencial ao número de símbolos proposicionais, muitas vezes causando um trabalho dispendioso. Já os operadores sintáticos, são equivalentes aos operadores semânticos, pois atuam exatamente da mesma forma que estes, a diferença é que eles utilizam apenas as interpretações realmente relevantes para a representação da fórmula lógica, excluindo todas as interpretações redundantes, o que leva a uma redução no processamento das informações durante o processo, resultando em menos trabalho.

Particularmente Marchi [Marchi et al. 2009] propuseram um operador sintático baseado em formas normais primárias, que tem como principal característica aos demais operadores o uso de conceitos lógicos que simplificam a representação das informações, o que resulta em um processo mais conciso. Contudo, a demonstração de que tal operador respeita o conjunto de postulados foi deixada em aberto.

2. Fundamentação Teórica

Antes de apresentarmos formalmente o que é um processo de fusão de crenças, faz-se necessário introduzir alguns conceitos teóricos acerca da linguagem lógica utilizada para a representação de crenças em agentes.

Seja $\mathcal{L}(P)$ uma linguagem lógica proposicional, onde P corresponde a um conjunto $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$ de símbolos proposicionais, e considere os conectores usuais de lógica $(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$. Seja ψ uma base de crença, ou fórmula lógica (para simplificar chamaremos apenas de base de crença), construída sob $\mathcal{L}(P)$. A construção das bases de crenças em $\mathcal{L}$ é realizada utilizando um conjunto de literais $\{L_1, ..., L_{2n}\}$ associados a P tal que $L_i = p_j$ ou $L_i = \neg p_j$. A negação de um literal L é notado $\overline{L}$, ou seja, se $L = p$ então $\overline{L} = \neg p$.

Uma interpretação é uma função de P para $\mathbb{B} = \{\top(verdadeiro), \bot(falso)\}$, e seja $\mathcal{W}$ o conjunto de todas as possíveis interpretações. Uma interpretação w é um modelo de uma base $\psi(w \vDash \psi)$ sse ψ é verdadeiro na interpretação w. Para qualquer base ψ, $[\![\psi]\!]$ denota o conjunto de modelos ψ.

Seja $\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_n\}$ um conjunto (finito) de bases de crenças, em que cada ψ_i representa as crenças presentes no agente i. Nota-se $\bigwedge \Psi$, a conjunção de todas as bases de crenças $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n$; e $\Psi_1 \sqcup \Psi_2$ a união dos conjuntos Ψ_1 e Ψ_2.

Seja μ uma base de crença construída sob $\mathcal{L}(P)$ que é uma crença especial que representa as restrições de integridade que asseguram a fusão, ou seja, tais restrições devem ser satisfeitas pela base resultante do processo.

Um processo de fusão de crença, consiste então em dado um conjunto Ψ de bases de crenças dos agentes do sistema e uma restrição de integridade μ, obter, segundo a aplicação de algum critério de ordenação extra-lógico, a base de crenças resultante do processo de fusão, denotada por

$$\Delta_\mu(\Psi)$$

De modo semântico, o conjunto de modelos resultante na base de crenças deve ser escolhido a partir dos modelos das restrições de integridade mais próximos àqueles das bases iniciais, segundo o critério extra-lógico estabelecido, ou seja:

$$[\![\Delta_\mu(\Psi)]\!] = \mathrm{Min}_{\leqslant_\Psi}([\![\mu]\!])$$

Dado um conjunto de literais definidos sobre $\mathcal{L}(P)$, define-se uma *cláusula* como uma *disjunção* de literais $C = L_1 \vee \cdots \vee L_{k_C}$, e uma *cláusula dual* ou *termo*, como uma *conjunção* de literais, dada por $D = L_1 \wedge \cdots \wedge L_{k_D}$. Assim como define-se negação de um literal, define-se a negação de um termo $D = \neg p_1 \wedge p_3$, denotada por $\overline{D}$, resulta em $\overline{D} = p_1 \wedge \neg p_3$.

Considere ainda, a definição de subtração de dois termos D e D', notada por $D - D'$, que resulta nos literais de D que não possuem correspondência com os literais de D', por exemplo, se $D = \neg p_1 \wedge p_3$ e $D' = p_1 \wedge p_3$, então $D - D' = \{\neg p_1\}$.

Considere a linguagem $\mathcal{L}(P)$ e uma base de crença $\psi \in \mathcal{L}(P)$, ψ pode ser convertida em uma *forma normal conjuntiva (FNC)*, onde $FNC_\psi = C_1 \wedge \cdots \wedge C_m$, ou em uma *forma normal disjuntiva (FND)*, onde $FND_\psi = D_1 \vee \cdots \vee D_w$, tal que $\psi \equiv FNC_\psi \equiv FND_\psi$.

Uma cláusula C é um *implicado* de uma base ψ sse $\psi \models C$, e é um *implicado primário* sse para todo implicado C' de ψ tal que $C' \models C$, tem-se $C \models C'$. Uma conjunção de implicados primários de ψ, define-se PI_ψ tal que $\psi \equiv PI_\psi$. Um termo D chama-se *implicante* de uma base ψ sse $D \models \psi$, e é um *implicante primário* sse para todos os implicantes D' de ψ tal que $D \models D'$, tem-se $D' \models D$. Define-se IP_ψ como uma disjunção de implicantes primários de ψ tal que $\psi \equiv IP_\psi$. Implicantes e implicados primários são noções duais, e um mesmo algoritmo pode ser utilizado para calcular ambas as formas [Bittencourt et al. 2003].

Em contrapartida, implicados e implicantes primários podem ser definidos como casos especiais das FNC e FND, e compõe-se no menor número de cláusulas ou termos fechados para inferência, sem cláusulas ou termos inseridos e não contendo um literal e sua negação. Assim, cláusulas e termos são entendidos como sinônimos.

3. Postulados de Fusão de Crenças

Para guiar a construção de operadores de fusão, Konieczny e Pérez em 2002 [Konieczny and Pérez 2002] introduzem um conjunto de 9 postulados que descrevem *regras* ou *características* que os operadores de fusão precisam seguir ou devem possuir, considerando aspectos como consistência, mudança mínima e irrelevância da sintaxe. São eles:

1. (**IC0**) $\Delta_\mu(\Psi) \vdash \mu$
2. (**IC1**) Se μ é consistente, então $\Delta_\mu(\Psi)$ é consistente
3. (**IC2**) Se Ψ é consistente com μ, então $\Delta_\mu(\Psi) = \bigwedge \Psi \wedge \mu$
4. (**IC3**) Se $\Psi_1 \leftrightarrow \Psi_2$ e $\mu_1 \leftrightarrow \mu_2$ então $\Delta_{\mu_1}(\Psi_1) \leftrightarrow \Delta_{\mu_2}(\Psi_2)$
5. (**IC4**) Se $\psi \vdash \mu$ e $\psi' \vdash \mu$, então $\Delta_\mu(\psi \sqcup \psi') \wedge \psi \nvdash \perp \Rightarrow \Delta_\mu(\psi \sqcup \psi') \wedge \psi' \nvdash \perp$
6. (**IC5**) $\Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2) \vdash \Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2)$
7. (**IC6**) Se $\Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2)$ é consistente, então $\Delta_\mu(\Psi_1 \sqcup \Psi_2) \vdash \Delta_\mu(\Psi_1) \wedge \Delta_\mu(\Psi_2)$
8. (**IC7**) $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2 \vdash \Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi)$
9. (**IC8**) Se $\Delta_{\mu_1}(\Psi) \wedge \mu_2$ é consistente, então $\Delta_{\mu_1 \wedge \mu_2}(\Psi) \vdash \Delta_{\mu_1}(\Psi)$

4. Operador BPM

Neste capítulo apresenta-se o operador BPM [Marchi et al. 2009], que é o operador que deseja-se demonstrar coerente com os postulados apresentados na seção anterior. A importância de realizar tal fato, está em garantir que o operador BPM pode ser utilizado como um operador de fusão de crenças, mantendo as características importantes de operadores de fusão, como por exemplo irrelevância da sintaxe, princípio de mudança mínima, etc., e ainda possuir uma propriedade interessante em sistemas baseados em conhecimento: a unicidade, em que cada base de crenças possui uma única representação em Implicantes Primários.

Considere inicialmente os conceitos teóricos fundamentais, apresentados na seção 2, para a compreensão do operador. Na sequência introduziremos um novo conceito de distância entre modelos.

A caracterização sintática da distância entre modelos é feita considerando os termos $D \in IP$, em que cada termo D é um conjunto de literais.

Sejam a base de crenças ψ e uma nova informação μ representadas em suas formas normais primárias disjuntivas IP_ψ e IP_μ e sejam $D_\psi \in IP_\psi$ e $D_\mu \in IP_\mu$. A distância k entre os termos D_ψ e D_μ é dada por:

$$k(D_\psi, D_\mu) = D_\psi \cap \overline{D_\mu}$$

Isto significa que, ao mudar uma base de crenças, eliminamos dos termos D_ψ os símbolos contraditórios e colocamos a nova informação μ. Fazendo esta operação em todos os termos $D_\psi \in IP_\psi$, obtêm-se um conjunto de termos candidatos à nova base, denominado Γ. Este conjunto Γ é calculado sobre $IP_\psi \times IP_\mu$ tal que:

$$\Gamma = \{D \mid D = D_\mu \cup (D_\psi - \overline{D_\mu})\}$$

em que $D_\mu \in IP_\mu$ e $D_\psi \in IP_\psi$ e a operação $D_\mu \cup (D_\psi - \overline{D_\mu})$ significa a eliminação dos literais contraditórios de D_μ em D_ψ e a inclusão dos literais pertencentes a D_μ.

Para a realização de um processo de fusão de crenças, precisamos encontrar os modelos da base de restrições de integridade mais próximos aos modelos das bases de crenças. Então a seleção dos termos que irão constituir a nova base é feita observando cada termo em IP_{μ}. Para cada termo D_{μ} e para cada base IP_{ψ} de IP_{Ψ} são escolhidas as distâncias mínimas, segundo o critério de ordenação total. Assim, a distância entre um termo D_{μ} e a base de crenças IP_{ψ} é dada pelo valor mínimo de $k(D_{\psi}, D_{\mu})$, isto é:

$$d(D_{\mu}, IP_{\psi}) = Min(\{|k(D_{\psi}, D_{\mu})| \mid D_{\psi} \in IP_{\psi}\})$$

Da mesma forma, para caracterizar os operadores sintáticos de maioria e arbitração, utilizamos a caracterização sintática dos critérios de distância e ordenação.

Definimos então um operador sintático de maioria, notado por $FND_{\Delta^{\Sigma}}$, como:

$$Dist_{\Sigma}(D_{\mu}, IP_{\Psi}) = \sum_{IP_{\psi_i} \in IP_{\Psi}} d(D_{\mu}, IP_{\psi_i})$$

e a seguinte ordem de preferência é estabelecida:

$$D \leqslant^{\Sigma}_{IP_{\Psi}} D' \quad sse \quad Dist_{\Sigma}(D, IP_{\Psi}) \ \leq \ Dist_{\Sigma}(D', IP_{\Psi})$$

O operador sintático de arbitração, notado por $FND_{\Delta^{Max}}$, utiliza o seguinte cálculo de distâncias:

$$Dist_{Max}(D_{\mu}, IP_{\Psi}) = Max_{IP_{\psi_i} \in IP_{\Psi}} \, d(D_{\mu}, IP_{\psi_i})$$

e a seguinte ordem de preferência é estabelecida:

$$D \leqslant^{Max}_{IP_{\Psi}} D' \quad sse \quad Dist_{Max}(D, IP_{\Psi}) \ \leq \ Dist_{Max}(D', IP_{\Psi})$$

Lembrando que os termos selecionados para constituir a nova base serão os termos de Γ, com $|k(D_{\mu}, D_{\psi})|$ mínimo.

Exemplo 1. *Considere as bases representadas por seus conjuntos de implicantes primários, tal que* $IP_{\Psi} = (IP_{\psi_1}, IP_{\psi_2}, IP_{\psi_3})$ *em que* $IP_{\psi_1} = IP_{\psi_2} = (p_1 \wedge p_2) \vee (p_2 \wedge p_3 \wedge p_4)$ *e* $IP_{\psi_3} = (\neg p_3 \wedge p_4 \wedge \neg p_5)$. *A base* μ *que representa o conjunto de restrições de integridade é dada por* $IP_{\mu} = (\neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge p_5) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5)$. *A tabela abaixo apresenta os termos candidatos, bem como os conjuntos de literais contraditórios de cada termo e suas respectivas cardinalidades.*

$D_\psi \in IP_\Psi$	D_μ	$(D_\psi - \overline{D_\mu})$	$D \in \Gamma$	$k(D_\psi, D_\mu)$	$\lvert k(D_\psi, D_\mu)\rvert$
$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_2\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_1\}$	1
$\{p_2, p_3, p_4\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_2\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_3, p_4\}$	2
$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_1\}$	$\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_2\}$	1
$\{p_2, p_3, p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$	$\{p_2, p_3\}$	2
$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_2\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_1\}$	1
$\{p_2, p_3, p_4\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_2\}$	$\{\neg p_1, p_2, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_3, p_4\}$	2
$\{p_1, p_2\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_1\}$	$\{p_1, \neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_2\}$	1
$\{p_2, p_3, p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$	$\{p_2, p_3\}$	2
$\{\neg p_3, p_4, \neg p_5\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{\neg p_3\}$	$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	$\{p_4, \neg p_5\}$	2
$\{\neg p_3, p_4, \neg p_5\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	$\{\neg p_3, p_4\}$	$\{\neg p_2, \neg p_3, p_4, p_5\}$	$\{p_5\}$	1

Tabela 1. Tabela das distâncias de acordo com o operador BPM e do conjunto Γ do Exemplo 1

Agora, para cada termo D_μ e para cada base IP_ψ são observadas as distâncias $|k(D_\mu, D_\psi)|$ calculadas anteriormente. Na tabela abaixo, são apresentadas as distâncias mínimas de cada IP_ψ ao termo D_μ. Aplicando os critérios de distâncias e ordenação dos operadores de arbitração e maioria, temos:

D_μ	$d(D_\mu, IP_{\psi_1})$	$d(D_\mu, IP_{\psi_2})$	$d(D_\mu, IP_{\psi_3})$	$Dist_\Sigma$	$Dist_{Max}$
$\{\neg p_1, \neg p_3, \neg p_4, p_5\}$	1	1	2	4	2
$\{\neg p_2, \neg p_3, p_5\}$	1	1	1	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$

Tabela 2. Tabela das distâncias e dos operadores sintáticos do Exemplo 1

Pela Tabela 2, os valores destacados apontam o termo selecionado pelos operadores segundo suas ordens de preferência. Para obter a base resultante do processo de fusão pela aplicação dos operadores de maioria e arbitração, olhamos para os termos de Γ com $|k(D_\mu, D_\psi)|$ mínimo relacionados ao termo de IP_μ escolhido. Portanto,

$$FND_{\Delta_\mu^\Sigma} = FND_{\Delta_\mu^{Max}} = (p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_5) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge p_4 \wedge p_5)$$

Visto isso, é possível perceber que Implicantes Primários e Formas Normais Disjuntivas podem ser utilizados tanto para fazer o operador de maioria quanto o operador de arbitração. Contudo, ficou em aberto as demonstrações dos postulados que satisfazem a fusão de crenças (seção 3), e serão apresentadas na próxima seção.

5. Demonstrações

Nesta seção será apresentada, para cada postulado da seção 3, a demonstração de sua satisfação pelo operador BPM. Para as demonstrações, a estratégia utilizada será por construção, em que usarei as definições apresentadas na fundamentação teórica da seção 2 e no decorrer do trabalho, como base para as provas. Note que, os postulados a seguir, estão reescritos no contexto do operador sintático BPM.

Postulado (IC0). $FND_{\Delta_\mu^*}(IP_\Psi) \vdash IP_\mu$

Demonstração. Pelas definições do operador BPM e de Implicantes Primários, ao calcular os termos em Γ, tem-se que: $\forall\ D \in \Gamma, D \models \mu$. Como a base resultante contém os termos de IP_Ψ cuja distância é mínima para cada termo IP_μ, tem-se que $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) \vdash IP_\mu$. $\square$

Postulado (IC1). *Se IP_μ é consistente, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi)$ é consistente*

Demonstração. Se IP_μ é consistente, cada termo $D_\mu \in IP_\mu$ (dado que $IP_\mu = \bigvee D_\mu$, por definição), então $D_\mu \not\models \bot$. Pela definição do cálculo dos termos em Γ temos que $(D_\psi - \overline{D_\mu}) \not\models \bot$ e portanto $D_\mu \cup (D_\psi - \overline{D_\mu}) \not\models \bot$. Logo $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) \not\models \bot$, ou seja, $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi)$ é consistente.

$\square$

Postulado (IC2). *Se IP_Ψ é consistente com IP_μ, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) = \bigwedge IP_\Psi \wedge IP_\mu$*

Demonstração. Seja $IP_\Psi = \{IP_{\psi_1}, IP_{\psi_2}, \cdots, IP_{\psi_n}\}$. Se IP_Ψ é consistente com IP_μ, entã, por definição, cada $IP_\psi \models IP_\mu$. Logo $\forall$ termo em Γ temos que $(D_\psi - \overline{D_\mu}) = \emptyset$ e $IP_\psi \wedge IP_\mu$ é consistente.

Se cada IP_{ψ_i} não contradiz a restrição de integridade IP_μ então os termos calculados em Γ serão todos escolhidos como resultado da fusão. Logo $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\Psi) = \bigwedge IP_\Psi \wedge IP_\mu$.

$\square$

Postulado (IC3). *Se $IP_{\Psi_1} \leftrightarrow IP_{\Psi_2}$ e $IP_{\mu_1} \leftrightarrow IP_{\mu_2}$ então $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_{\Psi_1}) \leftrightarrow FND_{\Delta^*_{\mu_2}}(IP_{\Psi_2})$*

Demonstração. Conforme a definição de Implicantes Primários, já vista na seção 2, IP_Ψ contém o menor conjunto de símbolos proposicionais tal que $IP_\Psi \models \Psi$. Assim, se $IP_{\Psi_1} \models \Psi_1$ e $IP_{\Psi_2} \models \Psi_2$ e $IP_{\Psi_1} \leftrightarrow IP_{\Psi_2}$, então $IP_{\Psi_1} \equiv IP_{\Psi_2}$, isto é, eles são equivalentes. Da mesma forma IP_μ é o menor conjunto tal que $IP_\mu \models \mu$, e se temos que $IP_{\mu_1} \leftrightarrow IP_{\mu_2}$, então $IP_{\mu_1} \equiv IP_{\mu_2}$. Portanto, se existe essa equivalência, podemos aplicar a fusão de forma que $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_{\Psi_1}) \leftrightarrow FND_{\Delta^*_{\mu_2}}(IP_{\Psi_2})$.

$\square$

Postulado (IC4). *Se $IP_\psi \vdash IP_\mu$ e $IP_{\psi'} \vdash IP_\mu$, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_\psi \nvdash \bot \Rightarrow FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_{\psi'} \nvdash \bot$*

Demonstração. Se $IP_\psi \vdash IP_\mu$, então IP_ψ e IP_μ não possuem elementos contraditórios e, portanto, são consistentes. Da mesma maneira, se $IP_{\psi'} \vdash IP_\mu$, então eles são consistentes entre si. Quando fazemos a união $IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}$ temos uma disjunção $(IP_\psi \vee IP_{\psi'})$ que se mantém consistente com IP_μ, e, ao aplicar a fusão sobre a união, que pela definição está na FND, mantemos a disjunção sem contradições, e portanto consistente com IP_μ. Ao adicionarmos IP_ψ na fusão, ela se manterá consistente de forma que $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_\psi \vdash IP_\mu$, pois já vimos no início da demonstração que $IP_\psi \vdash IP_\mu$. Da mesma forma ocorre com $IP_{\psi'}$. Logo $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_\psi \nvdash \bot \Rightarrow FND_{\Delta^*_\mu}(IP_\psi \sqcup IP_{\psi'}) \wedge IP_{\psi'} \nvdash \bot$.

$\square$

Postulado (IC5). $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2}) \vdash FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2})$

Demonstração. Ao aplicar a fusão de IP_{Ψ_1} sobre IP_μ, todos os elementos contraditórios a IP_μ serão eliminados no cálculo de Γ, como já vimos na Demonstração de **(IC1)**. Então, $IP_{\Psi_1} \models IP_\mu$, da mesma forma $IP_{\Psi_2} \models IP_\mu$. Se $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1})$ for inconsistente com $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$, então $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2}) \vdash \top$. Se $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1})$ for consistente com $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$, então podemos fazer a conjunção $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$ e o resultado se manterá consistente. Logo, ao fazer uma união das bases $IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2}$, ou seja, uma disjunção, pode ocorrer alguma contradição entre os símbolos proposicionais das bases, mas essa contradição será eliminada ao aplicar a fusão por IP_μ. Portanto, $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2}) \vdash FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2})$.

□

Postulado (IC6). *Se* $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$ *é consistente, então* $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2}) \vdash FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$

Demonstração. Se $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$ é consistente, não existe contradição das bases resultantes com IP_μ. Logo, ao fazer a união $IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2}$ e aplicar a fusão, o resultado poderá conter símbolos proposicionais em IP_{Ψ_1}que não pertencem a IP_{Ψ_2} (e vice versa), mas que não são contraditórios a IP_μ e nem entre si e, portanto, $FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1} \sqcup IP_{\Psi_2}) \supseteq FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_1}) \wedge FND_{\Delta^*_\mu}(IP_{\Psi_2})$.

□

Postulado (IC7). $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2} \vdash FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi)$

Demonstração. Ao aplicar a fusão de IP_Ψ sobre IP_{μ_1}, eliminamos os elementos contraditórios entre eles e portanto $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \vdash IP_{\mu_1}$. Se IP_{μ_2} for inconsistente com $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi)$, então $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2} \vdash \top$. Se IP_{μ_2} for consistente com $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi)$, será consistente com IP_{μ_1}, portanto, o resultado da fusão de IP_Ψ com a conjunção de IP_{μ_1} e IP_{μ_2} será consistente e decorrente de $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2}$. □

Postulado (IC8). *Se* $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2}$ *é consistente, então* $FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi) \vdash FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi)$

Demonstração. Se $FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi) \wedge IP_{\mu_2}$ é consistente, então IP_{μ_2} é consistente com IP_{μ_1}. Logo, o resultado da fusão $FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi)$ poderá conter símbolos proposicionais que não pertencem originalmente a IP_{μ_1} ou IP_Ψ, mas que não são contraditórios a eles, portanto, $FND_{\Delta^*_{\mu_1 \wedge \mu_2}}(IP_\Psi) \supseteq FND_{\Delta^*_{\mu_1}}(IP_\Psi)$. □

Dessa forma, conseguimos provar que o operador BPM respeita os postulados de fusão de crenças, como era o objetivo deste trabalho.

6. Conclusão

Este trabalho teve como objetivo principal demonstrar que o operador sintático BPM satisfaz os postulados de fusão de crenças, e assim, possui as características necessárias dos operadores de fusão respeitando, por exemplo, consistência e mudança mínima. A peculiaridade encontrada neste operador é a de utilizar os conceitos de formas normais canônicas e Implicantes Primários em sua definição, permitindo assim a realização de um processo de fusão sintático, que resulta em menos processamento, com resultados equivalentes aos operadores semânticos de arbitração e maioria descritos neste trabalho.

Com isso, pudemos observar que o critério extra-lógico adotado para mensurar distâncias, seja em modelos ou fórmulas, nos casos dos operadores semânticos e sintáticos respectivamente, pode promover resultados bastantes diferentes que podem ser mais ou menos adequados a algumas situações.

Ao provar que o operador sintático BPM, apresentado neste trabalho, satisfaz os postulados da seção 3, podendo assim, garantir que ele pode ser utilizado como um operador de fusão de crenças.

Para trabalhos futuros é possível explorar mais as definições de Implicantes Primários e até mesmo propor novos operadores de fusão de crenças, seja propondo outros critérios extra-lógicos de distância ou outros critérios de ordenação total para a escolha da informação que será utilizada para compor a nova base de crenças.

Referências

Bittencourt, G., Marchi, J., and Padilha, R. S. (2003). A Syntactic Approach to Satisfaction. In Konev, B. and Schimidt, R., editors, 4^{th} *International Workshop on the Implementation of Logic (LPAR03)*, pages 18–32. University of Liverpool and University of Manchester.

Fagin, R., Ullman, J. D., and Vardi, M. Y. (1983). On the Semantics of Updates in Databases. In *Proceedings of the $2^n d$ ACM SIGACT-SIGMOD Symposium on Principles of Database Systems (PODS'83)*, pages 352–365, New York, NY, USA. ACM Press.

Konieczny, S. and Pérez, R. P. (1999). Merging with integrity constraints. In *Proceedings of ECSQARU'99*, pages 1–12.

Konieczny, S. and Pérez, R. P. (2002). Merging information under constraints: a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5):773–808.

Liberatore, P. and Schaerf, M. (1998). Arbitration (or how to merge knowledge bases). *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 10(1):76–90.

Lin, J. and Mendelzon, A. O. (1999). Knowledge base merging by majority. In *In Dynamic Worlds: From the Frame Problem to Knowledge Management*. Kluwer.

Marchi, J., Bittencourt, G., and Perrussel, L. (2009). Formas normais primárias aplicadas à fusão de crenças. *VII ENIA - Encontro Nacional de Inteligência Artificial*, pages 1–10.

Marchi, J., Perrussel, L., and Bittencourt, G. (2008). Quantum-based belief merging. In *Proceedings of the 11th Ibero-American Conference on AI (IBERAMIA'08)*, pages 21–30, Lisbon, Portugal. Springer-Verlag.

Revesz, P. Z. (1993). On the semantics of theory change: Arbitration between old and new information. In *In Proceedings of the Twelfth ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Databases*, pages 71–82.

van Dam, J., Kröse, B., and Groen, D. (1996). Neural network applications in sensor fusion for an autonomous mobile robot. in Reasoning with Uncertainty in Robotics, (Dorst, L. and Lambalgen, M. van and Voorbraak, F., ed.), Springer, p. 263-277.