UNIVERSIDADE DE LISBOA

Instituto de Educação

UNIVERSIDADE DE LISBOA

A APRENDIZAGEM COMPARTICIPADA DOS NÚMEROS RACIONAIS ATRAVÉS DA PERCENTAGEM

Helena Gil Rodrigues Monteiro Guerreiro

Orientadores: Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina
Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática

2018

UNIVERSIDADE DE LISBOA

Instituto de Educação

A APRENDIZAGEM COMPARTICIPADA DOS NÚMEROS RACIONAIS ATRAVÉS DA PERCENTAGEM

Helena Gil Rodrigues Monteiro Guerreiro

Orientadores: Professora Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina
Professor Doutor João Pedro Mendes da Ponte

Tese especialmente elaborada para obtenção do grau de Doutor em Educação, especialidade de Didática da Matemática

Júri:
Presidente: Doutora Cecília Galvão Couto, Professora Catedrática e membro do Conselho Científico do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Vogais:

- Doutor Manuel Celestino Vara Pires, Professor Coordenador da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança;
- Doutora Catarina Raquel Santana Coutinho Alves Delgado, Professora Adjunta da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal;
- Doutora Maria Leonor de Almeida Domingues dos Santos, Professora Associada com Agregação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Ana Cláudia Correia Batalha Henriques, Professora Auxiliar do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa;
- Doutora Maria de Lurdes Marquês Serrazina, Professora Associada Convidada do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, orientadora.

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da Universidade de Lisboa, no âmbito do Programa de Bolsas de Doutoramento da Universidade de Lisboa

2018

Resumo

Este estudo procura compreender os contributos que a percentagem pode dar na construção de uma aprendizagem comparticipada dos números racionais numa etapa inicial do seu estudo – 3.º e 4.º ano de escolaridade do 1.º ciclo do ensino básico – alicerçada numa perspetiva de sentido de número e de continuidade no desenvolvimento numérico dos alunos. Especificamente, pretende perceber de que modo a percentagem contribui para o alargamento do conhecimento de número ao conjunto dos números racionais, bem como para uma compreensão inter-relacionada de percentagem, numeral decimal e fração. Pretende perceber também de que modo as normas sociais e sociomatemáticas contribuem para a construção de uma aprendizagem comparticipada dos números racionais através da percentagem.

O quadro conceptual remete para uma abordagem sociocultural da aprendizagem da Matemática, como atividade humana, inerentemente social e cultural. As ideias que o alicerçam envolvem a aprendizagem dos números racionais como construção comparticipada e realista, interpretada como uma extensão do conhecimento dos números inteiros, que privilegia a percentagem numa compreensão entrelaçada de representações, numa perspetiva de sentido de número.

Do ponto de vista metodológico, trata-se de uma investigação baseada em design, com base numa experiência de ensino na sala de aula. A situação de aprendizagem envolve uma turma, no 3.º e no 4.º ano de escolaridade, numa escola pública em Lisboa, em que a professora da turma é também a investigadora. Os dados foram recolhidos através de observação participante, apoiada num diário de bordo, e de gravações áudio e vídeo de momentos de discussão matemática coletiva e da recolha documental, nomeadamente das produções escritas dos alunos. A análise procurou evidências de construção de um conhecimento conceptual de percentagem e de número racional, bem como a interpretação das ações dialógicas na turma, com vista à identificação das normas sociais e sociomatemáticas.

Os resultados evidenciam que as normas sociais e sociomatemáticas da cultura da sala de aula, como comunidade de aprendizagem de matemática, permitiram suportar a compreensão dos conceitos e relações envolvidos na noção de percentagem, tendo conduzido à construção de práticas matemáticas partilhadas relativas à natureza multiplicativa dos números racionais. Para além disso, através da percentagem, foi possível integrar os conhecimentos numéricos prévios e conhecimentos intuitivos dos alunos e apoiar a construção de uma aprendizagem das diferentes representações simbólicas, de forma inter-relacionada, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número. Deste estudo emerge ainda um conjunto de princípios que suportam uma conjetura sobre a aprendizagem comparticipada dos números racionais que privilegia a percentagem, nesta etapa da escolaridade, no sentido promover o envolvimento dos alunos e produzir efeitos na sua aprendizagem.

Palavras-chave: Aprendizagem comparticipada; Números racionais; Percentagem; Normas sociais e sociomatemáticas; Representações; Modelação emergente

Abstract

This study seeks to understand the contributions of percentage in fostering co-participated initial learning of rational numbers, at grades 3 and 4, in primary school, rooted in a number sense perspective and seen as process of progressively broadening of students' numerical development. In particular, it aims to understand how percentage allows the extension of number understanding to rational numbers and fosters an entwined understanding of percentages, decimals and fractions. It also aims to understand how social and sociomathematical norms contribute to a co-participated learning of rational numbers enhanced by percentage.

The conceptual framework involves a sociocultural perspective of mathematical learning, as a human activity, inherently social and cultural. The theoretical elements considered concern rational number learning as realistic and co-participated, entailed as an extension of the understanding of whole numbers, which addresses percentage, as an entwined understanding of rational number representations, in a number sense perspective.

This study is developed as design based research methodology through a classroom experiment. It takes place in grades 3 and 4 within a classroom, in a public primary school in Lisboa, where the researcher is also the teacher. Data collection took place through participant observation, supported by the teacher's research journal, video and audio recorded moments of whole-class discussions and students' written work. The analysis sought for evidences of students' percentage and rational number conceptual understanding, as well for social and sociomathematical norms, as students participated in classroom social interaction.

The results highlight that social and sociomathematical norms of the classroom culture, as a mathematical learning community, supported conceptual understanding of percentage for learning rational numbers as it enabled an approach to its multiplicative nature and the establishment of mathematical practices taken as shared. Additionally, through percentage, it was possible to connect students' prior whole numbers knowledge with intuitive understandings and relations to support the understanding of different symbolic representations, in an entwined manner, attending to a number sense perspective. From this study it emerges a set of principles, that supports a conjecture to improve co-participated learning through percentage, in these grades of primary school, in order to promote student engagement and improve learning.

Keywords: Co-participated learning; Rational numbers, Percentage, Social and sociomathematical norms; Representations; Emergent modeling process

Ao meu pai.

Prefácio

Este trabalho escrito é por mim entendido como um produto de uma construção social e cultural, na medida em que resulta das interações sociais e dialógicas que fui estabelecendo, ao longo de toda a experiência investigativa, com Outros. É, naturalmente, produto das minhas decisões, da minha interpretação, mas que se desenvolveu na reflexão e discussão que fui fazendo com os outros participantes, com os autores, com os orientadores, com outros investigadores, com colegas, nas diferentes comunidades que integro e onde o estudo, ao longo de toda a experiência investigativa, foi sendo partilhado e escrutinado. Deste modo, assumo este trabalho como a expressão escrita de um ato de aprendizagem. Aprendizagem que se construiu pela minha participação nessas comunidades, como espaços sociais de negociação de significados e pela interação com os demais que as integram. Aprendizagem que se aprofundou pela transformação dessa participação à medida que fui dando sentido ao que fui lendo e observando, que me fui interpelando, que fui discutindo e integrando outros olhares, que fui perseguindo a compreensão dos fenómenos, com a ambição de construção teórica, ainda que modesta e local. Uma transformação que circunscreve a aprendizagem no tempo e no espaço, o que, consequentemente, perspetiva este trabalho como um produto inacabado.

O facto deste trabalho, na sua forma escrita, se constituir um conjunto de trabalhos de investigação, discutidos num todo que se pretende coeso e coerente, constituiu também uma aprendizagem desafiante, que embora tenha sido levado a cabo com Outros, envolveu a tomada de decisões a vários níveis, que determinaram o rumo da investigação. O envolver um formato menos comum em Educação Matemática, sobretudo em Portugal, implicou arriscar na definição da sua forma e estrutura. A redação do documento agregador impôs o desafio de uma escrita intencionalmente concisa e de metadiscussão. As limitações impostas pela produção de artigos deixaram de lado aspetos, provavelmente não menos interessantes, mas que não foi possível retomar. A discussão aprofundada com outros investigadores, nas diferentes etapas da investigação, determinou uma análise retrospetiva crítica e criteriosa, produzindo refinamentos e reajustamentos conceptuais e metodológicos.

Nesta etapa de balanço, e considerando o foco do estudo em função das opções tomadas, importa explicitar as inquietações subliminares, inerentes à qualidade de professora, sobretudo de professora da turma em estudo. Eu sabia que aprender significava uma tomada de consciência do mundo e da capacidade de nele intervir, mas queria assegurar que todos os alunos teriam oportunidade de lidar com a complexidade que isso envolve. Eu acreditava que juntos, na sala de aula, aprendíamos melhor, mas queria perceber como podia garantir que a atividade conjunta dava resposta às especificidades da Matemática. Eu sabia que a aprendizagem dos números racionais era complexa, contudo, não queria que constituísse uma rutura em relação ao que os alunos já sabiam e traziam consigo, mas não sabia exatamente como fazê-lo. Eu via na percentagem uma oportunidade para a aprendizagem dos números racionais como um todo, que não havia antes antecipado, e que tanto me desafiou.

Cada uma destas inquietações conduziu-me, como investigadora, por caminhos diferentes. Caminhos com paisagens que desconhecia e que me deslumbraram, mas também caminhos difíceis de trilhar e outros que levaram a clareiras sem saída. Caminhos que acabaram por se encontrar, à medida que as muitas leituras e uma observação distanciada do trabalho da turma se foram interligando. O uso das ferramentas metodológicas escolhidas, com a mediação de outros investigadores, permitiu que se desenvolvesse um estudo sistemático e intencional dos processos de aprendizagem e dos meios que os suportam na sala de aula, sala de aula enquanto espaço de Todos e lugar de relações, produções, discussões e sobretudo, de emoções.

Este estudo proporcionou-me inúmeras aprendizagens, o que não se faz, como nos lembra Paulo Freire, sem abertura ao risco e à aventura de espírito. Aprendizagens relativas a um natural e gradual desenvolvimento numérico dos alunos numa comunidade de aprendizagem de Matemática. Aprendizagens acerca dos processos de aprendizagem dos números racionais, como processo de transformação da participação na cultura da sala de aula. Aprendizagens no sentido de saber tirar partido de um pensamento intuitivo, arriscando também com intuição e ganhando a confiança dos alunos, mas de saber avançar para um pensamento analítico, para não deixar perder essa mesma confiança. Aprendizagens em termos de saber reduzir a realidade a categorias, alicerçada num modelo de análise que permitiu interpretá-las, mas ao mesmo tempo ganhando a consciência de que a realidade não cabe toda nessas categorias. Mas também aprendizagens que vão além dos seus resultados. Permitiu conhecer-me melhor como professora de Matemática. A fala, as ações, os gestos, as produções dos alunos projetavam, inevitavelmente, a minha ação. E, se no início, ao revisitar os momentos em sala de aula, o sentimento de insatisfação sequestrou a minha capacidade de reflexão,

gradualmente, aliado à transformação da minha compreensão matemática, fui refletindo e melhorando a minha ação na atividade conjunta em matemática, transformando também a minha compreensão didática.

Chegada a esta etapa, recordo a pergunta de Svein Sjøberg, físico da universidade de Oslo e orador convidado num seminário no Instituto de Educação, que numa conversa informal perguntava, a um grupo de jovens investigadores, em que eu me incluía, se já tínhamos passado pela fase da depressão, pois, nas suas palavras, só depois dessa fase se podia dizer que se tinha passado pela experiência de doutoramento. Na verdade, esta experiência de investigação foi muito intensa, repleta de incertezas e inseguranças, mas desenvolveu-se num *movimento* permanente de enriquecimento e aperfeiçoamento do trabalho como investigadora, como professora e, sobretudo, como pessoa, com os Outros, que nunca me fez sentir só e a quem devo este trabalho, a quem estou, profundamente, grata.

À Professora Lurdes, pela sempre pronta disponibilidade e carinho, pelo lançar desafios, com rede de segurança, pela confiança, fazendo-me acreditar que seria capaz.

Ao Professor João Pedro, pelo desassossego, pela atenção e pormenor, pela confiança, e por me ajudar na diplomacia afirmativa do meu trabalho.

Aos Professores e Colegas do doutoramento, que, com o seu contributo nos seminários, me ofereceram outros olhares, valiosos na clarificação e refinamento do estudo, nas suas diferentes etapas. Aos colegas da sala 210, nomeadamente à Cristina, à Isabel, à Joana, à Joana C., à Marisa, à Nádia, à Paula pela disponibilidade e apoio permanentes, pelo ambiente de estudo securizante. E, em particular, à Cristina, companheira de viagem pelo mundo dos números racionais, à Joana, por me ter levado para a sala e por ter estado sempre lá, à Marisa, pelas reflexões que me suscitou. Às três, pela reflexão e desafio conjuntos, que permitiram vencer inseguranças e fazer avançar contra o tempo.

À Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, pela atribuição da uma bolsa de doutoramento, que me permitiu chegar até aqui.

À (Professora) Cristina e à Graciosa, bem como aos colegas do projeto da cultura de sala de aula em Matemática da ESE de Lisboa, pelas reflexões conjuntas e desafios lançados em torno do repensar a cultura de sala de aula, em contextos de formação.

Aos colegas do MEM que, em permanente movimento de reflexão sobre a prática, comigo caminham no sentido da construção de uma escola promotora de *saber* e *fazer*, mas sobretudo de intervenção social, para maior bem-estar, progresso, equidade e justiça nas relações humanas, como sempre nos lembra Sérgio Niza. Em particular, à Clara, que me ajudou nas primeiras etapas da escrita, à Inácia, que pela sua humildade e saber, tanto me têm inspirado, e ao Sérgio, que permanentemente nos abala certezas e nos obriga a sair de nós, com quem tive o privilégio de ir discutindo também este trabalho.

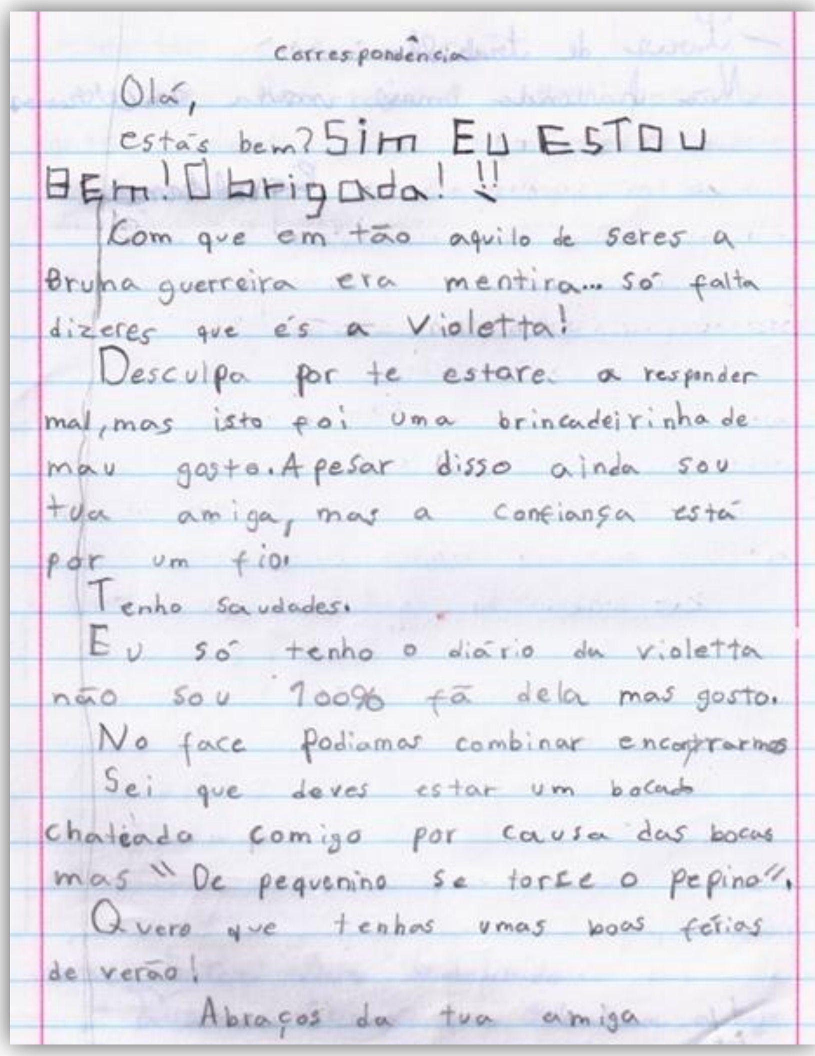
Aos pais e encarregados de educação dos meus alunos, por confiarem no meu trabalho, sem restrições. Aos meus alunos, pelo caminho que fizemos juntos. Pela forma entusiástica com que vivemos cada momento, pelos desafios que me proporcionaram, pelo muito que me ensinaram.

Aos colegas da escola. Ao Francisco, ao Paulo, ao Jorge e à Rosa por terem criado as condições necessárias à realização deste trabalho. À *Família Real* pelo espírito de equipa, pela amizade, pela determinação e trabalho conjunto na persecução do lema *uma escola com vida é uma escola que convida*. Em particular, à Filomena, pela leitura atenta. À Dina, à Lena, à Paula e à Susana, ao lado de quem tenho caminhado há mais de uma década na construção de uma cultura de sala de aula e de escola que assenta na produção e no sentido social para alcançar a compreensão. Amigas ao lado de quem sou, diariamente, tão feliz.

Aos restantes Amigos, que me ouviram, me questionaram e me deram força para ir caminhando. Pela amizade que nos une.

À família, que esteve sempre comigo e é o meu suporte. Em particular, à minha irmã, pela compreensão e apoio permanentes. Aos meus pais, pela vida, pelo amor e carinho, e que, por não terem tido oportunidade de estudar, sempre me incentivaram e fizeram fé na escola pública. Ao João, pelo amor incondicional, por me fazer acreditar, por ser o meu porto de abrigo. À Mariana e ao Artur, pela paciência de terem crescido com uma mãe estudante.

Aguarda-me, um desejado e sereno regresso à escola. Levo comigo uma mala de ferramentas metodológicas e um querer continuar a *fazer ciência* que me vão deixar sempre ligada à investigação.



Correspondência

Olá,
estás bem? Sim EU ESTOU BEm! Obrigada! !!
Com que em tão aquilo de seres a Bruna guerreira era mentira... só falta dizeres que és a Violetta!
Desculpa por te estare a responder mal, mas isto foi uma brincadeirinha de mau gosto. Apesar disso ainda sou tua amiga, mas a confiança está por um fio.
Tenho saudades.
Eu só tenho o diário da violetta não sou 100% fã dela mas gosto.
No face podiamos combinar encontrarmos
Sei que deves estar um bocado chatéada comigo por causa das bocas mas "De pequenino se torce o pepino".
Quero que tenhas umas boas férias de verão!
Abraços da tua amiga

Carta de uma aluna da turma deste estudo à sua correspondente,
de uma outra escola, no fim do 3.º ano
(caderno de escrita livre)

Índice

Índice de Tabelas

Índice de Figuras

1 Apresentação do estudo

Motivação emergente de um percurso

Depois de ter concluído o curso de Professores do Ensino Básico na variante Matemática/Ciências, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, a opção de trabalhar no 2.º Ciclo do Ensino Básico (CEB) conduziu-me, em 1997, a uma escola que vivia a implementação do projeto-piloto de Gestão Flexível do Currículo, que me proporcionou trabalhar com uma mesma turma nas disciplinas de Matemática, Ciências da Natureza, Formação Cívica, Área de Projeto e Estudo Acompanhado, sendo ao mesmo tempo, diretora de turma. Esta experiência interdisciplinar e de relação humana intensa veio reforçar o meu interesse pela abrangência que o trabalho no 1.º CEB parecia oferecer. A mudança para o 1.º CEB aconteceu três anos depois e é sobretudo a este ciclo que tenho dedicado o meu trabalho nos últimos anos.

Numa atitude crítica e autorreflexiva do meu desempenho profissional, procurei, desde cedo, quer na Associação de Professores de Matemática, quer no Movimento da Escola Moderna, junto dos demais colegas, respostas para as inquietações que foram surgindo da minha reflexão sobre a prática, numa tomada de consciência de que a criatividade pedagógica se constrói em diálogo e não no isolamento (Oliveira-Formosinho, 2003).

O gosto e a intuição para questionar e querer compreender o que se aprende e como se aprende, colocou a investigação no meu caminho. Primeiro numa relação íntima com o ser professora, como refere Alarcão (2001), para responder a problemas que emergiam e na procura de outros olhares. Depois, de uma forma mais sistemática e rigorosa, para cruzar a teoria com a prática, procurando compreender os processos e os meios que suportam a aprendizagem, numa discussão crítica permanente.

No trabalho de mestrado, estando envolvida na animação da rede das escolas do 1.º CEB, promovida pelo Programa Internet na Escola, o foco da investigação foi a comunicação e a participação na resolução de problemas em Matemática, com recurso às Tecnologias da Informação e Comunicação (Guerreiro, 2005). Mais tarde, o facto de ser professora de um 1.º ano de escolaridade trouxe-me ao doutoramento pela necessidade de aprofundar o estudo, em particular, dos números racionais,[1] um tópico que me desafiava pela importância que assumia na aprendizagem da Matemática, pela ligação que permitia estabelecer com a vida, mas também pela complexidade que oferecia, constatada pela experiência, quer como professora de Matemática, no 1.º e no 2.º CEB, quer como formadora de professores. Este propósito leva-me a estudar a aprendizagem como processo, situando-a no grupo social em que acontece – a turma – de modo a fazer o seu estudo no ambiente mais natural possível. A turma, além de unidade administrativa, reúne alunos e professor numa relação estreita de cooperação, de confiança, de partilha, uma relação que envolve a corresponsabilização dos diferentes elementos na construção da aprendizagem, ganhando uma dimensão social incontornável. Esta dimensão era indissociável do estudo que pretendia fazer, o que reforçou a escolha da minha turma para desenvolver este trabalho, turma com quem dera início a uma relação de quatro anos.

O currículo oficial português: (Des)construção de sentido

Em Portugal, a aprendizagem dos números racionais constituí um desafio atual que se coloca à escola. Este desafio surge também devido ao facto do currículo oficial de Matemática, que se traduz essencialmente no programa de Matemática, ter vindo a sofrer alterações várias, num curto espaço de tempo, que provocaram reajustamentos profundos e, por vezes, divergentes das orientações preconizadas pela investigação. Os professores, nem sempre apoiados nesse processo de mudança curricular, têm vivenciado uma experiência crítica de adaptação e implementação de um currículo que se pretende que seja coerente e adaptado a todos os alunos.

Nos últimos anos, as políticas educativas em Portugal têm sido estabelecidas a curto prazo, ficando dependentes das oscilações governativas. Remontemos a 2007. Neste ano foi homologado um novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) que veio introduzir, entre outras, uma alteração profunda e inovadora em relação ao tópico dos números racionais, orientando o trabalho com estes números numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número (Brocardo, 2010). Era sugerido que o alargamento do conhecimento dos números aos números racionais acontecesse através da exploração de situações de partilha equitativa e de parte-todo. Contudo, era

[1] Neste estudo, o termo números racionais remete para o conjunto dos números racionais não negativos.

também destacada a exploração de situações que contribuíssem para "o desenvolvimento dos conceitos de razão e de proporção" (ME, 2007, p. 15). A abordagem sugerida por este programa revelava-se ambiciosa e sem paralelo noutros países, como afirmou Kilpatrick (2009), pois embora a fração fosse privilegiada, era seguida da representação decimal, prevendo-se ainda a inter-relação entre diferentes representações dos números racionais – fração, numeral decimal e percentagem – na construção de valores de referência. Estas alterações eram enquadradas por uma estrutura mais geral, que destacava três capacidades transversais – Resolução de problemas, Raciocínio matemático e Comunicação matemática – no sentido de valorizar processos matemáticos fundamentais às aprendizagens matemáticas dos alunos (Ponte & Serrazina, 2009).

Subitamente, em 2013, eis que surge um outro programa de Matemática (MEC, 2013), que traz consigo uma visão conservadora e mecanicista da aprendizagem da Matemática. Um inesperado e retumbante *back to basics* (Ponte, 2013). A sua implementação vem recentrar o trabalho em Matemática, em geral, em torno da memorização de regras e do domínio de procedimentos, e tratar com ligeireza, em particular, a aprendizagem dos números racionais, minimizando a sua complexidade e não valorizando qualquer preocupação de articulação com o conhecimento prévio ou o conhecimento informal dos alunos. Muito contestado pela comunidade de Educação Matemática em Portugal, e em particular pelos alunos e professores nas escolas, é complementado em 2016 por um conjunto de orientações de gestão curricular (ME, 2016), fruto de uma mudança de governo, que acarretou a alteração das políticas educativas. Estas orientações permitiram reorientar o ensino numa perspetiva de aprendizagem com compreensão e retomar o trabalho com os números racionais de forma cuidadosa, convocando a construção de modelos e a conexão entre diferentes representações e tópicos matemáticos.

Já em 2017, seguindo as recomendações da Comissão Europeia (2006) no sentido de os currículos serem orientados, sobretudo, para o desenvolvimento de competências numa perspetiva de aprendizagem ao longo da vida, é traçado o *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória* (ME, 2017), um referencial na definição das políticas educativas futuras em Portugal, tendo em vista o desenvolvimento dessas competências. Na Matemática, em particular, este referencial permite a reconciliação com um ensino que privilegia uma aprendizagem da Matemática com compreensão, no sentido de proporcionar aprendizagens relevantes e sustentáveis para todos os alunos

(ME, 2017). Trata-se de uma reconciliação imperiosa, que a comunidade de Educação Matemática em Portugal reivindica (Ponte, 2013; Rodrigues, 2017; Serrazina, 2015), mas que, curricularmente, ainda não está operacionalizada, dada a difícil articulação com o programa oficial que ainda vigora (MEC, 2013).

Estudar a construção comparticipada das aprendizagens em Matemática

Reconhecer a aprendizagem, em particular da Matemática, como um entrelaçamento de conhecimentos, capacidades e atitudes, como sugere o Perfil dos Alunos (ME, 2017), não se coaduna com uma visão individualista, reprodutora e, por vezes, elitista, que oferece os mesmos exercícios para todos ao mesmo tempo (Perrenoud, 2000). Ao invés, reforça o papel da turma e do ambiente social e cultural da sala de aula na construção comparticipada das aprendizagens em Matemática, uma vez que, ao participar na construção conjunta de significados, com os outros, os alunos constroem significados eles mesmos, ampliando assim a sua compreensão (Wells, 1999). Na sua essência, a Matemática possui uma natureza dialógica, decorrendo de fenómenos sociais e culturalmente enraizados (Ernest, 1994). A sua estrutura relacional simbólica resulta da necessidade de estruturar o mundo matematicamente, uma atividade que se constrói através de processos de interação e não como um produto de reinterpretação simples e direta (Martin, Towers, & Pirie, 2006; Steinbring, 2005).

Por conseguinte, a sala de aula, como espaço institucional de ensino, pode ser perspetivada como uma comunidade de aprendizagem, cuja dinâmica de funcionamento tem por base a atividade conjunta, facilitadora do desenvolvimento de conceitos (Serralha, 2018). A sua organização, quando apoiada em estruturas de cooperação e circuitos de comunicação, contribui para o desenvolvimento de um sentimento de pertença que une os seus membros no sentido de que o "sucesso de um aluno contribui para o sucesso do conjunto dos membros do grupo" (Niza, 1998, p. 4), isto é, da comunidade. A identidade desta pequena comunidade define-se na atividade, no discurso e na reflexão que se desenvolvem, bem como no reportório partilhado de práticas e normas, sociais e sociomatemáticas, elementos de uma cultura pedagógica que se vai construindo (Wenger, 1998; Yackel & Cobb, 1996). Trata-se de uma cultura que guia a ação dos que dela fazem parte, mas ao mesmo tempo é transformada pela reflexão que essa ação oferece, à medida que se constrói um entendimento comum de que "o saber tem um valor social e é socialmente construído" (Niza, 2012, p. 529).

Assim, estudar a aprendizagem de um tópico curricular específico, como os números racionais, de forma isolada e descontextualizada em relação à comunidade onde a aprendizagem acontece implica perdas significativas em termos de compreensão da construção dessa aprendizagem. Pelo que, num estudo que preconiza uma visão sociocultural da aprendizagem, é fundamental interpretar a atividade matemática dos alunos, embebida na cultura da sala de aula, uma cultura que promove a interação comunicativa e a troca de produções e saberes, concretizando a dimensão social das aprendizagens (Niza, 1998). Deste modo, compreender a construção da aprendizagem em Matemática, neste caso em particular dos números racionais, implica estudar também os meios que a suportam e os processos subjacentes, no ambiente natural da aprendizagem – a sala de aula.

Conquistas e desafios da investigação em torno dos números racionais

A ampla investigação em torno dos números racionais, realizada ao longo dos últimos 40 anos, evidencia a importância que este tópico curricular assume na aprendizagem da Matemática no ensino básico (e.g., Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Fosnot & Dolk, 2002; Kieren, 1988; Mamede, 2007; Monteiro & Pinto, 2005; NCTM, 2000, 2010; Steffe & Olive, 2010; Ventura, 2014). Contudo, a devolução à prática do conhecimento produzido tem-se revelado, aparentemente, pouco eficaz, uma vez que os números racionais continuam a ser um tópico que professores e alunos consideram ser dos mais difíceis de ensinar e aprender (Smith, Silver, Stein, Boston, Henningsen, & Hillen, 2005; Tian & Siegler, 2018).

A complexidade dos números racionais está associada, ao facto destes números poderem assumir uma multiplicidade de significados, apresentarem uma natureza relacional, dependente da unidade, e serem expressos por diferentes representações (Behr et al., 1983; NCTM, 2010). As dificuldades com que os alunos se deparam na sua aprendizagem encontram-se bem documentadas na literatura (e.g., Cramer, Post, & Delmas, 2002; Lamon, 2012; Monteiro & Pinto, 2005; Nunes, 2008). Na abordagem inicial ao estudo destes números, a escolha da representação a privilegiar recai essencialmente sobre a fração ou sobre o numeral decimal (Tian & Siegler, 2018), embora a fração seja, de um modo geral, a representação mais escolhida, como acontece no caso português (Common Core State Standards Initiative, 2010; MEC, 2013). Todavia, trata-se de uma discussão que, para além de dar pouco espaço à percentagem, não parece enfatizar o conjunto dos números racionais como um todo, nem perspetivar o desenvolvimento numérico dos alunos de forma integrada (Tian & Siegler, 2018). Alguns autores atribuem ainda ao conhecimento numérico prévio dos alunos o ónus das dificuldades na compreensão dos números racionais, destacando a necessidade de uma mudança conceptual para a compreensão das propriedades que distinguem o conjunto dos números racionais do conjunto dos números inteiros[2] (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). No entanto, embora seja uma forma possível de interpretar o desenvolvimento da compreensão do número, não é a que norteia este estudo, uma vez que a construção da aprendizagem dos números racionais parece desenvolver-se de forma semelhante à aprendizagem dos números inteiros (Hackenberg, 2010; Moss & Case, 1999), podendo ser perspetivada como uma extensão natural da forma como os alunos usam os números (Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). Assim, o seu estudo pode constituir uma oportunidade para aprender que, apesar das diferenças, números inteiros e números racionais têm em comum o facto de expressarem uma grandeza, que é possível ordenar numa reta numérica e traduzir por diferentes representações (Siegler et al., 2011). Nesta perspetiva, neste estudo, a aprendizagem dos números racionais é entendida, numa etapa inicial,[3] como uma forma de ampliar a noção de número que os alunos trazem, considerando que os conhecimentos que possuem dos números inteiros constituem os alicerces para a construção do conhecimento dos números racionais (Olive, 1999).

Esta extensão dos conhecimentos relativos ao número pode começar por tirar partido da noção de proporcionalidade que os alunos intuitivamente possuem (Moss & Case, 1999; Rosenthal, Ilany, & Almog, 2009). Trata-se de mobilizar formas naturais de pensamento e potenciá-las na construção de raciocínios poderosos, numa atitude de respeito pela forma como os alunos pensam (Steffe & Olive, 2010). Envolve criar oportunidades de sensibilização para as relações de proporcionalidade que as diferentes representações dos números racionais traduzem, à medida que interpretam a relação entre o que está a ser descrito e a unidade a que se refere (Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Van Herpen, & Keijzer, 2008). É precisamente este olhar para as relações que permite despertar para a distinção entre quantidades absolutas e relativas (Lesh, Post, & Behr, 1988).

---

[2] Neste estudo, o termo números inteiros remete para o conjunto dos números naturais com o zero.
[3] Neste estudo, considera-se que a etapa inicial da aprendizagem dos números racionais diz respeito ao 1.º CEB.

Já no que se refere à percentagem, embora a revisão do estado da arte tenha demonstrado que esta não tem sido objeto de estudo da maior parte da investigação realizada em torno dos números racionais, esta representação parece reunir um conjunto de características com potencialidades para uma aprendizagem numa perspetiva de um desenvolvimento numérico integrado (Hunter & Anthony, 2003; Moss, 2002; Moss & Case, 1999; Siegler et al., 2011). Efetivamente, pensar a percentagem, quer como objeto de investigação (Costa, 2010; Jacobs, 2013; Rianasari, 2011), quer como conteúdo curricular, não nos remete de imediato para um trabalho no 1.º CEB.

Em concreto, no programa de Matemática atualmente em vigor em Portugal (MEC, 2013), a percentagem não é considerada no estudo dos números racionais, surgindo apenas como informação estatística, no âmbito do tema de Organização e Tratamento de Dados. Neste contexto, a percentagem é apresentada sem que os alunos a explorem no sentido da construção do conceito de número racional e sem mobilizar o conhecimento intuitivo que já possuem (Lembke & Reys, 1994; Moss & Case, 1999; Risacher, 1991), isto é, sem que adquiram uma relação amigável com a percentagem (Gay, 1990; Van de Walle, 2007). Na verdade, esta abordagem vai ao encontro das preocupações traduzidas na literatura em torno da percentagem que, para além de ser escassa e, na sua maioria, pouco recente, refere que a trajetória mais comum de ensino enfatiza regras e procedimentos em vez da construção do seu conhecimento conceptual, tendo por base a compreensão da relação proporcional que oferece (Gay & Aichele, 1997; Parker & Leinhardt, 1995). A percentagem é, portanto, um tópico curricular que parece ser tratado de forma simplista e como tópico isolado, o que pode contribuir para o facto de ser considerado difícil e confuso, quer por professores, quer por alunos (Parker & Leinhardt, 1995; Rosenthal et al., 2009).

Com efeito, os progressos alcançados em termos de investigação ainda não permitem alcançar uma aprendizagem efetiva dos números racionais, como referem Tian e Siegler (2018), uma vez que os alunos continuam a revelar dificuldades na compreensão e destreza com qualquer uma das representações de número racional – fração (e.g., Gabriel, Coché, Szucs, Carette, Rey, & Content, 2013; Stafylidou & Vosniadou, 2004), numeral decimal (e.g., Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Steinle & Stacey, 2004) ou percentagem (e.g., Lembke & Reys, 1994; Risacher, 1991). Contudo, existe um forte apelo no sentido de os alunos se movimentarem, de forma flexível, entre as diferentes representações de número racional (Markovits & Sowder, 1994). Assim, um trabalho que inter-relacione estas representações numa etapa inicial do estudo dos números racionais, privilegiando a percentagem, como representação adequada à extensão do estudo das relações multiplicativas (White & Mitchelmore, 2005) que permita mobilizar o conhecimento prévio e intuitivo dos alunos, oferece-se como uma área de estudo com potencialidades a explorar.

Objetivo e questões do estudo

Dado tratar-se de um estudo que reúne uma dimensão de conteúdo matemático e uma dimensão pedagógica, assumindo-se numa perspetiva social, cultural e, sobretudo, relacional em Educação Matemática, este foi concretizado através de uma investigação baseada em design (IBD) em que se ambicionava analisar cada uma dessas dimensões de forma distinta, embora interpretando-as de modo complementar.

O objetivo deste estudo é assim compreender que contributos a percentagem pode dar na construção de uma aprendizagem comparticipada dos números racionais, numa etapa inicial, alicerçada numa perspetiva de sentido de número e de continuidade no desenvolvimento numérico dos alunos.

Deste objetivo resultam as seguintes questões de investigação:

1) De que modo a percentagem contribui para o alargamento do conhecimento de número ao conjunto dos números racionais?
2) De que modo a percentagem contribui para uma compreensão inter-relacionada de percentagem, numeral decimal e fração?
3) Qual o contributo das normas sociais e sociomatemáticas na construção de uma aprendizagem comparticipada dos números racionais através da percentagem?

***Kappa* e artigos**

Este estudo é apresentado como um conjunto de trabalhos de investigação, que engloba quatro artigos publicados em jornais científicos na área da Educação Matemática, cuja coerência lhe é atribuída por um documento agregador, o *kappa*. O propósito do *kappa* é apresentar e discutir as conclusões do estudo na sua relação com o objetivo definido, para o que concorrem os artigos e o quadro conceptual construído, suportados pela modalidade de investigação desenvolvida.

Os artigos. Os quatro artigos científicos, que se enumeram de I a IV, fazem a discussão da parte empírica deste estudo em função das questões de investigação para as quais cada artigo pretende contribuir.

Artigo I (Anexo 1)	Guerreiro, H. G., & Serrazina, M. L. (2017). Aprendizagem dos números racionais com compreensão envolvendo um processo de modelação emergente. *Bolema*, *31*(57), 181–201.	Indexado em Qualis (A1) e Scopus
Artigo II (Anexo 2)	Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018a). A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. *Zetetiké*, *26*(2), 354–374	Indexado em Qualis (A2)
Artigo III (Anexo 3)	Guerreiro, H. G., & Serrazina, L., (2018) Normas sociais e sociomatemáticas numa aprendizagem comparticipada da noção de 10%. *Quadrante*, *27*(1), 69–94.	Indexado em Qualis (B1)
Artigo IV (Anexo 4)	Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018b). Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem. *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(1), 359–384.	Indexado em Qualis (A2)

A sequência dos artigos neste *kappa* não é cronológica. Cada artigo é por si independente, focando uma dimensão diferente do fenómeno em estudo, de acordo com o seu objetivo, contudo, a sua apresentação traduz a uma sequência que evidencia a sua relação mútua.

Estrutura do *kappa*. Este *kappa* tem seis secções, onde se fundamentam e discutem as diferentes secções do estudo, procurando traduzir a sua relação num todo coerente. A secção 1, *Apresentação do estudo*, apresenta os motivos que desencadearam a realização deste estudo, bem como os que justificam a sua pertinência. É ainda apresentado o objetivo do estudo e as questões de investigação que o operacionalizam, bem como o *kappa* e os artigos em que se suporta. A secção 2, *A coconstrução da compreensão de número racional apoiada pela percentagem*, fundamenta e discute as ideias teóricas, selecionadas pela relevância que assumem no problema em estudo, na construção de um quadro conceptual que permite alicerçar uma compreensão aprofundada dos fenómenos. Pretende ainda destacar a relação entre os conceitos chave que suportam a discussão. A secção 3, *Considerações metodológicas numa investigação baseada em design*, fundamenta e discute a opção por uma IBD neste estudo. Descreve os participantes e a situação de aprendizagem. Discute a recolha e a análise dos dados. São ainda explicitadas as questões éticas que norteiam o estudo. A secção 4, *Artigos*, resume os quatro artigos, relacionando-os entre si e traduzindo a forma como se enquadram no estudo. A secção 5, *Discussão*, apresenta a metadiscussão dos resultados dos quatro artigos na sua relação com o quadro conceptual e com os princípios de design subjacentes, considerando o objetivo geral. Finalmente, a secção 6, *Conclusões*, apresenta os contributos do trabalho para a investigação em Educação Matemática e para a prática letiva, discute as opções metodológicas tomadas e as suas implicações para os resultados do estudo, bem como deixa sugestões para futura investigação.

2 A coconstrução da compreensão de número racional apoiada pela percentagem

A aprendizagem como construção comparticipada e realista

Considerar a aprendizagem da Matemática como comparticipada significa interpretar a sua construção como um processo social e cultural em que o que se aprende decorre da participação na interação social na sala de aula, como comunidade de aprendizagem. Inseparavelmente, a Matemática, objeto de aprendizagem dessa comunidade, é interpretada como uma atividade e a sua aprendizagem implica matematizar a realidade, numa comunidade de aprendizagem, no sentido de reinventar a Matemática que se deve aprender. Como referência, este estudo considera o sistema relacional dinâmico e reflexivo que constitui a cultura de matematização da sala de aula, alicerçado na tríade: práticas matemáticas, normas sociais e sociomatemáticas e ações dialógicas. Este sistema apoia um ensino-aprendizagem de natureza exploratória, que tem por base tarefas matemáticas realistas e situadas em função da comunidade de aprendizagem onde decorre.

Uma perspetiva sociocultural da aprendizagem. Um dos eixos do referencial teórico deste estudo é um entendimento da aprendizagem num paradigma sociocultural, como uma (re)construção de significados resultante da participação na interação social, apoiada no uso de ferramentas culturais à disposição num dado contexto (Vygotsky, 1978; Wells, 1999). O quadro conceptual deste paradigma oferece uma perspetiva integrada do desenvolvimento humano, como afirma Rogoff (2003), em que os processos cognitivos, sociais, físicos, emocionais constituem aspetos da atividade social e cultural como um todo. Estes processos desenvolvem-se em função dessa atividade, pelo que não devem ser entendidos como isolados. Esta perspetiva integrada permite interpretar a aprendizagem como um processo inerentemente sociocultural, que envolve relações sociais e experiência cultural. Não se trata meramente da aquisição de conhecimento, mas de um processo ativo de transformação recíproca: de transformação da forma de pensar e do próprio conhecimento, à medida que cada um participa na atividade social e cultural da comunidade em que se insere, e de transformação da forma de participação nessa comunidade, assumindo diferentes papéis e responsabilidades

(Rogoff, 2003). Deste modo, as práticas e contextos socioculturais não são considerados como algo que influencia a aprendizagem, mas sim como duas dimensões inerentes ao processo de aprender, que se constituem mutuamente (Rogoff, 2003; Wertsch, 1994). Este entendimento contraria uma visão de essência cognitivista da aprendizagem, que prevalece na escola, em que contexto e aprendizagem são encarados como entidades distintas, sendo a aprendizagem analisada e avaliada com um foco praticamente exclusivo no pensamento individual do aluno. Implica também remeter o olhar não apenas para o que cada aluno consegue fazer sozinho, mas, sobretudo, como nos indica Vygotsky (1996), para o que faz com o apoio dos outros, em interação social, na sua zona de desenvolvimento proximal, enquanto intervalo de aprendizagem potencial.

Interpretar a aprendizagem como transformação na participação na prática sociocultural da sala de aula requer que se discuta a sua dimensão relacional. Envolve interação com os outros, professor e alunos, e com os instrumentos culturais, físicos e simbólicos, do contexto da sala de aula. Acontece, segundo Vygosky (1996), como um processo primeiro interpessoal, que decorre da interação social com os outros, e depois intrapessoal, num processo de interiorização, consigo próprio, que se devolve aos outros através da transformação na participação na prática sociocultural da sala de aula.

Nesta conceção da aprendizagem, a construção do conhecimento em Matemática não se deve traduzir num conjunto de procedimentos e técnicas distintos, cometidos à memorização por parte dos alunos (Swan, 2006), mas sim processar-se como uma reconstrução de significados que acontece em interação, através da negociação social na prática da sala de aula (Bauersfeld, 1980; Steinbring, 2005). O conhecimento matemático não existe como um produto externo acabado, a adquirir pelos alunos, mas resulta de uma construção pessoal que, não podendo ser realizada por outro, se realiza com os outros, em interação (Pirie & Kieren, 1992; Soares, 2003). Trata-se de um processo dinâmico de organização e reorganização do conhecimento, que envolve um movimento de andar para diante e para trás, em termos de formalização, entre atividades e tarefas, em diferentes níveis (Pirie & Kieren, 1992). Por conseguinte, o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, como refere Bauersfeld (1980), é um processo de interação humana altamente complexo, que não pode ser reduzido a uma relação unilateral do tipo emissor-recetor. A sala de aula, enquanto cenário institucional, foi explicitamente pensada para desencadear essa construção de significados partilhados, pelo que nela deve ser permitido aos alunos partilhar ideias e negociar abertamente esses significados (Bauersfeld, 1980; Bishop & Goffree, 1986).

Esta perspetiva pressupõe uma cultura participada pelos alunos e professor, que tem subjacente a construção comparticipada de conhecimentos, práticas, expectativas e normas que regulam a vida da turma e caracterizam a sala de aula como comunidade de aprendizagem (Bereiter & Scardamalia, 2014; Goos, Galbraith, & Renshaw, 1999). Esta comunidade pode ser interpretada, à luz da teoria da aprendizagem situada, como uma comunidade de prática (Lave & Wenger, 1991; Wenger, 1998), neste caso, remetendo a prática para a aprendizagem da Matemática socialmente construída, com base na negociação permanente de significados matemáticos através da participação na interação social. Esta comunidade tem um projeto de ação conjunto em torno do objetivo último de fomentar uma cultura de aprendizagem, através de um empreendimento comum em aprender a aprender Matemática, no sentido de fazer avançar o conhecimento matemático da comunidade, e consequentemente de cada um, individualmente (Bielaczyc & Collins, 1999; Wenger, 1998). Exige um sentido de responsabilidade mútua aos seus membros, num comprometimento de participação em atividades conjuntas, trabalhando juntos para alcançar objetivos partilhados (Johnson & Johnson, 2009). Trata-se de um processo de negociação em que os alunos vão também construindo a confiança necessária à sua autonomia e perseverança em matemática. "As ideias de todos merecem atenção e de cada um é esperado que consiga desenvolver a sua participação numa dada tarefa. De todos se espera que consigam aprender." (Fosnot & Dolk, 2002, p. 35). Os participantes discutem juntos, ajudam-se mutuamente, encorajam-se uns aos outros a trabalhar mais e melhor. Vivem juntos um conjunto de emoções, como a motivação no envolvimento numa tarefa, o sentimento de esforço, a frustração ocasional ou a satisfação quando os objetivos são atingidos, que condicionam a aprendizagem (Damásio, 2000). É no envolvimento com os outros, no confronto com outras formas de ação e emoção, que a aprendizagem se vai construindo de forma comparticipada, tendo por base a cooperação entre os seus elementos, assegurando que cada um, individualmente, seja matematicamente fortalecido (Johnson & Johnson, 2009; Wells, 1999).

A construção de uma cultura de matematização na sala de aula. Participar na comunidade de sala de aula de Matemática é participar numa cultura de matematização (Cobb & Bauersfeld, 1995). Trata-se de uma cultura que tem capacidade de produzir ação e transformação na construção de práticas matemáticas, tendo como base um diálogo com sentido para pensar com os outros através da interação (Alrø & Skovsmose, 2003; Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001; Mercer, 2008).

As práticas matemáticas podem ser entendidas como resultado de um processo de matematização, de um *fazer Matemática*, em função de um dado conteúdo ou ideia matemática (Freudenthal, 1991). Contudo, traduzem uma construção social e situada da aprendizagem matemática coletiva, à medida que ocorrem na comunidade da sala de aula, bem como com cada um dos alunos individualmente (Cobb & Yackel, 1996). Os alunos constroem ativamente a sua compreensão da Matemática à medida que participam nas práticas matemáticas da sala de aula, em coletivo, em pequenos grupos ou a pares, contribuindo para a evolução dessas mesmas práticas. Isto é, cada prática matemática emerge como resultado de reorganização de práticas matemáticas anteriores, à medida que os alunos vão mobilizando os conceitos que já têm e se envolvem criticamente e de forma construtiva, na discussão do conhecimento uns dos outros (Bauersfeld, 1980; Mercer, 2002). Como refere Vygotsky (2007), a formação dos conceitos pode ser considerada como um ato de generalização, e a sua construção como um processo que consiste na transição entre generalizações, progressivamente mais formais. Em situações de matematização genuínas, os alunos constroem relações entre conceitos, procuram regularidades, constroem modelos, formulam conjeturas e descobrem juntos generalizações (Fosnot & Dolk, 2002). Por conseguinte, a forma como os alunos participam nas práticas coletivas na sala de aula vai-se modificando com o que vão aprendendo, induzindo a transformação dessas mesmas práticas. Por sua vez, as práticas matemáticas coletivas, nas quais os alunos participam, apoiam também a aprendizagem dos alunos individualmente (Cobb & Yackel, 1996; Cobb et al., 2001).

Deste modo, considerar a aprendizagem matemática, à medida que emerge na comunidade da sala de aula, implica remeter o olhar para a participação dos alunos e do professor, para as suas ações na construção das práticas matemáticas dessa comunidade. Trata-se de uma construção que resulta de uma interação e negociação que envolve aspetos normativos, específicos da cultura de cada comunidade de sala de aula.

A cultura da comunidade de sala de aula é regulada por normas, que dizem respeito aos direitos e deveres de cada um na comunidade, traduzindo um consentimento mútuo sobre as regras às quais cada um se deve submeter deliberadamente (Jonnaert & Borght, 2002). As normas de uma comunidade são um produto social, construído em interação, não podendo ser consideradas como um conjunto de regras básicas estipuladas e impostas do exterior. Resultam de uma construção coletiva da turma, sendo válidas para todos na sala de aula e permitem percecionar as expectativas recíprocas, específicas de cada turma, enquanto comunidade de aprendizagem (Yackel & Cobb, 1996). Na atividade matemática da sala de aula, essas normas traduzem um entendimento partilhado do que nela deve ser a ação, quer do professor, quer dos alunos (Cobb, Yackel, & Wood, 1992). Cada sala de aula, a trabalhar em Matemática, enquanto comunidade de aprendizagem, tem as suas normas sociais e sociomatemáticas, de acordo com o seu propósito e valores subjacentes (Yackel & Cobb, 1996). Assim, se se privilegia um processo de ensino-aprendizagem da Matemática de natureza exploratória, proporciona-se um envolvimento ativo dos alunos, quer na resolução das tarefas matemáticas, quer na sua discussão e posterior reflexão (Ponte, 2005).

Esta abordagem pedagógica da Matemática requer que os alunos assumam um papel diferente daquele que de si é esperado numa aula tradicional, de ensino direto, em que as oportunidades de interação são reduzidas e em que predomina o que Alrø e Skovsmose (2003) designam pelo paradigma do exercício. Aulas neste paradigma são centradas no manual e caracterizadas pelo monólogo do professor, ou em que o professor pergunta e os alunos apenas são convidados a responder (Alrø & Skovsmose, 2003). As aulas que se enquadram numa abordagem de natureza exploratória revelam um padrão de comunicação mais amplo, pelo que nelas a qualidade da aprendizagem, como referem Alrø e Skovsmose (2003), está diretamente relacionada com a qualidade do diálogo que se estabelece. Através do Modelo de Investigação em Cooperação, Alrø e Skovsmose (2003) identificam um conjunto de ações dialógicas que podem ser assumidas, quer pelo professor, quer pelos alunos, durante a interação em torno da realização de uma tarefa matemática, que influenciam a aprendizagem da Matemática. Essas ações decorrem de *estabelecer contacto* para cooperar; *descobrir* a perspetiva do outro; *identificar* uma ideia matemática robusta; *defender*, argumentando; *pensar alto*, envolvendo os outros no seu pensamento; *reformular*, parafraseando ou completando ideias; *desafiar*, questionando o que está a ser discutido e *avaliar*, procurando regular a aprendizagem.

Se analisarmos, especificamente, o *avaliar* na atividade matemática da sala de aula, devemos esperar que todos avaliem, se avaliem uns aos outros e se autoavaliem. Avaliar não é uma tarefa exclusiva do professor, o que implica necessariamente uma gestão negociada do poder na sala de aula (Bishop & Goffree, 1986). Avaliar envolve um conjunto de ações de regulação e monitorização, como a correção de erros, a procura por uma solução mais eficaz, a crítica construtiva, bem como o aconselhar, apoiar e elogiar (Alrø & Skovsmose, 2003). Avaliar integra um conjunto de ações que se estabelecem na sala de aula com base numa relação dialógica regulada, inerente à atividade matemática, cujo entendimento se constrói em interação social (Alrø & Skovsmose, 2003; Yackel & Cobb, 1996).

Destas ações dialógicas resulta o estabelecimento de entendimentos comuns relativamente a processos de raciocínio matemático, como a formulação de questões, a construção de estratégias na resolução de problemas, a construção de conjeturas, com base em argumentos lógicos, e a justificação (Mata-Pereira & Ponte, 2017). Efetivamente, não existem critérios previamente definidos sobre os argumentos que devem ser apresentados para considerar uma resolução matematicamente diferente ou uma justificação matematicamente válida. É na comunidade de aprendizagem da sala de aula que vão sendo estabelecidos, assegurando-se, como refere Stylianides (2007), que são honestos para com a Matemática, como disciplina, e se vão alterando, de forma gradual e coerente no decurso da atividade matemática da sala de aula.

A cultura da sala de aula deve permitir assegurar, através da negociação, em interação, que professor e alunos vão tornando comum o significado do que é considerada uma resolução diferente, contribuindo para o estabelecimento de *resolução matematicamente diferente*, como norma sociomatemática (Yackel & Cobb, 1996).

A construção negociada desta e de outras normas sociomatemáticas determina a natureza da atividade matemática da comunidade da sala de aula, enquadrando as ações que alunos e professor desenvolvem, e é refletida nessas ações (Lopez & Allal, 2007). Construídas na ação dialógica, fazem emergir uma predisposição para a Matemática enquanto os alunos vão construindo expectativas sobre o seu papel na comunidade e confiança nas suas capacidades, à medida que se sentem envolvidos na tomada de decisões. E, gradualmente, os alunos vão adquirindo autonomia na construção da sua aprendizagem (Cobb & Yackel, 1998).

Segundo Alrø e Skovsmose (2003) as características das ações dialógicas da atividade matemática da sala de aula permitem compreender as características da aprendizagem matemática. A construção das práticas matemáticas acontece através da participação na interação social regulada por normas, sociais e sociomatemáticas, o que, por sua vez, vai introduzir um aperfeiçoamento dos próprios aspetos normativos, dado que estes não existem como um produto finalizado, sendo modificados pelo propósito e em interação (Cobb et al., 2001; Lopez & Allal, 2007; Mercer, 2008). Deste modo, práticas matemáticas e normas sociais e sociomatemáticas devem ser interpretadas de forma reflexiva, uma vez que se influenciam mutuamente, num sistema dinâmico que integra e expressa a cultura de cada sala de aula de Matemática. Quando inerentes a uma comunidade de aprendizagem cujo foco é *fazer Matemática*, são dimensões que determinam a cultura de matematização dessa comunidade.

Matematizar a realidade como construção de sentido. Quando Freudenthal (1991) considera a Matemática como atividade humana, e não como um corpo de conhecimentos pronto a transmitir, considera a sua aprendizagem como um processo de matematização, isto é, uma construção em que os alunos são guiados numa ação significativa e realista de fazer Matemática, de matematizar. Esta perspetiva alicerça os princípios da Educação Matemática Realista para quem "a aprendizagem da Matemática é considerada uma atividade social" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002, p. 8). Matematizar conduz assim a um entendimento negociado de interpretações matemáticas e de processos de raciocínio associados à discussão de um dado conteúdo ou ideia matemática, que conduzem ao estabelecimento de práticas matemáticas específicas (Cobb et al., 2001).

Na perspetiva da Educação Matemática Realista o ser realista para os alunos deve ser entendido como ser sempre significativo, envolvendo situações do mundo real ou situações que conseguem imaginar e às quais atribuem significado (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002). Matematizar é matematizar a realidade, ou partes da realidade, algo que é ainda pouco matemático, como afirma Freudenthal (1991), pelo que a aprendizagem da Matemática deve emergir do senso comum, dando sentido aos conhecimentos que os alunos já possuem e convocando a sua intuição, constituindo uma oportunidade de construírem estratégias e ideias, orientadas em função de um determinado objetivo (Bakker, 2004). A ideia de matematização tem subjacente uma atividade em que os alunos aprendem Matemática fazendo, num processo de reinvenção guiada, sob a orientação do professor (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002). Trata-se de um processo participado e apoiado que se constrói na interação social da comunidade de aprendizagem da sala de aula. Trata-se de um processo participado, na medida em que os alunos não são vistos como recetores da Matemática como um produto acabado, mas sim como elementos ativos na sua construção (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002). Deste modo, uma dada prática matemática emerge como uma construção participada, resultando de diferentes entendimentos, diferentes formas de pensar e argumentar (Cobb & Yackel, 1996). É um processo apoiado, dado que, à medida que uma prática matemática emerge e se desenvolve a partir dos contributos de cada um, orientada pelo professor, também esses contributos se vão modificando em função da participação nessa construção. A interação promove reflexão, permitindo reforçar o poder matemático da comunidade da sala de aula, e dos alunos individualmente, respeitando que cada aluno faça o seu caminho a seu ritmo (Van den Heuvel-Panhuizen, 2002).

O facto de a matematização decorrer da realidade leva a que se considerem os contextos como domínios da realidade que devem ser apresentados aos alunos para serem matematizados (Freudenthal, 1991). Deste modo, os problemas contextualizados e realistas para os alunos, são o ponto de partida do processo de aprendizagem, segundo a Educação Matemática Realista. Na resolução de um problema contextualizado, a construção de um modelo, mobilizando diferentes representações como um desenho, um esquema ou um diagrama é fundamental para apoiar a sua resolução (Gravemeijer, 2005). Estas representações são a base da atividade de modelação emergente que permite aos alunos progredir de uma atividade matemática informal, ancorada no contexto, para uma mais formal. Numa fase inicial os modelos são modelos de interpretação de uma dada situação específica e, à medida que a atenção dos alunos vai recaindo sobre as relações que o modelo permite estabelecer, os modelos vão-se tornando a base do raciocínio em construção, encorajando à reinvenção de uma Matemática mais formal (Gravemeijer, 1999; Van den Heuvel-Panhuizen, 2002). Deste modo, não faz sentido considerar os contextos como ruído que perturba a mensagem matemática, pois o contexto é ele próprio a mensagem e a Matemática uma forma de o descodificar (Freudenthal, 1991).

Um outro aspeto a destacar, e que constitui um dos princípios basilares da Educação Matemática Realista, prende-se com a perspetiva de ser importante trabalhar cada conteúdo, não de forma estanque, mas sim entrelaçada com outras ideias matemáticas (Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Com efeito, relativamente à aprendizagem dos números, faz sentido considerar a sua construção como um processo de desenvolvimento integrado. À medida que cada conjunto numérico vai sendo trabalhado ao longo da escolaridade, o conhecimento de número vai sendo gradualmente alargado. A sua aprendizagem implica a reformulação de conceitos adquiridos anteriormente, e não a sua anulação, no sentido da construção de uma nova estrutura (Vygotsky, 2007). Nesta perspetiva, importa pensar a aprendizagem da Matemática em geral, e dos números em particular, de forma integrada. Deste modo, no caso do desenvolvimento numérico, importa enfatizar a estrutura comum, centrada na compreensão da grandeza do número e, progressivamente, ir discutindo as propriedades que se mantêm, as que sofrem alteração e como incorporar as que surgem de novo

(Siegler et al., 2011). Relacionar os novos conceitos com o conhecimento que os alunos já possuem é fundamental para interpretar a Matemática como um corpo de conhecimentos relacionado e não um conjunto de conceitos e procedimentos isolados (NCTM, 2000).

Extensão do sentido de número aos números racionais

O sentido de número como uma construção de sentido. Saber pensar em geral, e em particular em Matemática, parece ser "sobretudo uma questão de adquirir hábitos e predisposição para interpretar e dar sentido, ao invés de adquirir um conjunto de capacidades, estratégias ou conhecimentos" (Resnick, 1988, p. 39). Esta ideia de *dar sentido* reflete uma certa predisposição para ver sentido na Matemática (Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001) e está relacionada com a forma como os alunos pensam e atribuem significado a determinada situação, contexto ou conceito matemático a partir do conhecimento que já possuem (NCTM, 2009). Envolve compreensão de um dado tópico ou conteúdo matemático e bom senso na apreciação e tomada de decisões, considerando as suas relações. Trata-se de um conceito que está na base da construção de diferentes *sentidos de* em Educação Matemática, nomeadamente do sentido de número (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999; Hope, 1989; Howden, 1989; McIntosh, Reys, & Reys, 1992).

O desenvolvimento deste *sentido de* não acontece através de um processo de aprendizagem específico, que resulta diretamente da realização de um conjunto de tarefas desenhadas para esse fim, podendo ser interpretado como um efeito colateral da aprendizagem de um conteúdo matemático específico (Greeno, 1991). Trata-se de um conceito que surge associado ao raciocínio matemático e com o qual se relaciona de forma reflexiva. O *dar sentido* permite identificar características comuns num conjunto de situações e relacioná-las com a experiência anterior, conduzindo à construção de processos de raciocínio, nomeadamente, a formulação de questões, a construção de estratégias na resolução de problemas e a justificação de conjeturas (Mata-Pereira & Ponte, 2017), que são formas de expressão da ação de *dar sentido* (NCTM, 2009).

A ideia de sentido de número ganhou expressão em Educação Matemática e nos currículos escolares a partir do final dos anos 80, sustentada pelo trabalho de vários investigadores (Hope, 1989; Howden, 1989; McIntosh et al., 1992). Embora não exista uma definição consensual de sentido de número, as diferentes interpretações do que se considera ser sentido de número estão, no entanto, inter-relacionadas, complementando-se e tendo em comum o facto de se enquadrarem numa mesma perspetiva de pensar a aprendizagem da Matemática e, em particular, do número. Trata-se de uma aprendizagem que se assume como uma construção de sentido, em que os alunos são levados a desenvolver o que Schoenfeld (1991) designa por uma predisposição para analisar e compreender, para percecionar relações estruturais, para ver como as ideias matemáticas se encaixam, para estabelecer conexões. Especificamente, em relação aos números, implica uma predisposição para percecionar as diferentes interpretações e utilizações do número (McIntosh et al., 1992, p. 4). Esta predisposição tem associada o que alguns autores referem como uma intuição sobre os números e as suas relações, no sentido de ser capaz de encontrar soluções apropriadas para realizar atividades do quotidiano e não apenas dominar o seu conhecimento escrito (Hope, 1989; Howden, 1989; Spinillo, 2006). Trata-se de uma perspetiva de pensar a aprendizagem da Matemática, e em particular dos números, como uma construção de sentido. É uma perspetiva que norteia também esta investigação.

Sentido de número implica, por um lado, um conhecimento aprofundado do número e das operações e, por outro, a capacidade de usar esse conhecimento, de modo flexível, para fazer julgamentos matemáticos e construir estratégias adequadas para lidar com problemas envolvendo números e operações (Abrantes et al., 1999; McIntosh et al., 1992). Não sendo fácil encontrar uma definição satisfatória para sentido de número, os diversos autores que se dedicam ao seu estudo procuram esmiuçar esta noção, identificando um conjunto de capacidades que estão associadas ao seu desenvolvimento e que são apontadas como sendo componentes do sentido de número (Abrantes et al., 1999; Berch, 2005; McIntosh et al., 1992; Sowder & Schappelle, 1994). Estas componentes constituem, ao mesmo tempo, indicadores que facilitam o seu reconhecimento, no sentido de traçar um perfil do desenvolvimento do sentido de número. No entanto, como alertam McIntosh et al. (1992), importa ter presente que uma análise individual de cada componente não reflete o perfil de cada aluno relativamente ao desenvolvimento do sentido de número.

As relações de componentes apresentadas por Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), Berch (2005) e McIntosh et al. (1992) são complementares e em comum têm o facto de convocarem um conjunto de capacidades fundamentais para alicerçar a construção do conhecimento e da destreza com os números, relacionando-as com os conhecimentos que já possuem e se desenvolvem no decorrer da experiência matemática de cada aluno. No entanto, identificar as diferentes componentes de forma objetiva e sem sobreposições constitui um desafio, que se prende com o carácter transversal do sentido de número, que envolve vários aspetos, inter-relacionados (Sowder & Sowder, 1988). É interessante verificar como sentido de número e capacidade de resolução de problemas envolvem componentes que estão estreitamente interligadas, como evidenciam os estudos que identificam uma correlação positiva forte entre ambas (Louange & Bana, 2010). Para promover o desenvolvimento de um sentido de número robusto (NCTM, 2000), é destacada a importância de assegurar que os alunos se envolvem em tarefas apropriadas, significativas e com intencionalidade, uma vez que este desenvolvimento não acontece de forma natural e espontânea para a maioria dos alunos (Sowder & Sowder, 1988). É necessário que as tarefas conduzam os alunos a pensar sobre os números e as suas relações e que lhes permitam estabelecer conexões com contextos da vida real, que envolvam informação do dia-a-dia, nomeadamente através da resolução de problemas (Hope, 1989; NCTM, 2000). Muitas vezes considerados difíceis de destrinçar, sentido de número e resolução de problemas (Louange & Bana, 2010), são alicerces centrais numa perspetiva de dar sentido à Matemática, de promover uma aprendizagem centrada numa cultura de matematização. A este respeito, Sowder e Schappelle (1994) referem que salas de aula em que os alunos conseguem um bom desenvolvimento do sentido de número têm em comum vários elementos, entre eles, um ambiente facilitador da construção de sentido.

O sentido do número, como sugere Howden (1989), é uma competência que se desenvolve gradualmente, a partir das perceções que os alunos já possuem, como resultado da exploração dos números, de lidar com os números em vários contextos e de os relacionar de formas diferentes, considerando as suas propriedades, e não só através dos algoritmos. Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) destacam que a construção de uma aprendizagem significativa, promotora de desenvolvimento do sentido de número, não pode centrar-se apenas em procedimentos rotinados, "é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento" (p. 41). O NCTM (2014) reforça que a fluência no cálculo está fortemente relacionada com o sentido de número, sendo necessário ir além da memorização de factos ou de procedimentos sem compreensão. Assim, é fundamental que os algoritmos, determinantes na fluência de cálculo, decorram do trabalho centrado no desenvolvimento do sentido de número, de forma indissociável da construção de um conhecimento conceptual de número, da sua estruturação e ancorado na compreensão do sistema de numeração decimal (Brocardo & Serrazina, 2008).

Desenvolvimento numérico numa perspetiva de sentido de número. Pensar no currículo de Matemática ao longo da escolaridade em termos de sentido de número é o que sugere a Norma Números e Operações (NCTM, 2000), apelando a uma construção progressiva, desde o pré-escolar ao 12.º ano, de um robusto conhecimento dos números. Um conhecimento que envolve perceber o que são, como se podem representar, de que forma se relacionam e como se estruturam em diferentes sistemas numéricos, numa perspetiva progressivamente mais abrangente. O ser capaz de relacionar os números de diversas formas é um alicerce em que se apoia o trabalho posterior em Matemática (Howden, 1989). Assim, importa que a intuição sobre os números e as suas relações se desenvolva não apenas no trabalho com os números inteiros, mas que continue a ser desenvolvida, nomeadamente, no alargamento aos números racionais (McIntosh et al., 1992).

Pensar na aprendizagem dos números, ao longo da escolaridade, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, vai ao encontro de uma perspetiva de desenvolvimento numérico como uma extensão natural da forma como usamos os números (NCTM, 2010). Isto é, trata-se de um processo contínuo de enriquecimento do conhecimento relativo aos números, que envolve adicionar nova informação às estruturas conceptuais existentes, reorganizando-as (Hackenberg, 2010; Siegler et al., 2011). Nesta perspetiva, a aprendizagem dos números racionais, como um conjunto numérico alargado em relação aos números inteiros, pode ser interpretada como um processo de alargamento do conhecimento relativo aos números inteiros numa extensão aos números racionais.

No entanto, este processo de alargamento do conhecimento dos números é questionado por alguns autores, apontando que as dificuldades em relação à aprendizagem dos números racionais se prendem com a aplicação inapropriada das regras relativas aos números inteiros (Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012). Estes autores consideram que o conhecimento prévio dos alunos relativo aos números naturais se atravessa no caminho para a compreensão dos números racionais, dificultando-a e dando origem a conceções erradas e erros, como generalizar que quanto mais algarismos tem um número, maior a sua grandeza. Os seus estudos sugerem que a aprendizagem dos números racionais requer uma mudança conceptual, que envolve rever a estrutura relacional do conceito de número. O ónus das dificuldades é atribuído ao conhecimento que os alunos construíram anteriormente relativamente ao número, pelo que a atenção se foca nas diferenças entre os números inteiros e os números racionais (Vamvakoussi et al., 2012).

Na verdade, todo o processo de desenvolvimento numérico, ao longo da escolaridade, envolve dificuldades e confronto com obstáculos conceptuais, que provocam a reorganização do conhecimento que os alunos trazem consigo. A aprendizagem do zero, como um nada que de facto representa alguma coisa, que representa a totalidade do que não está lá, como refere Kaplan (1999), no processo de alargamento dos números naturais aos números inteiros, cria dificuldades aos alunos e conduz a erros como ler o número 205 como "vinte e cinco". No entanto, este erro pode acontecer porque o aluno não interpreta o zero como número de preenchimento ou porque não reconhece o seu valor de posição. A sua aprendizagem requer um alargamento do conhecimento do aluno sobre os números, no sentido de integrar este novo elemento, não sendo necessariamente encarada como uma mudança conceptual na estrutura relacional que apoia o desenvolvimento do conceito de número.

Os erros e conceções erradas que os alunos revelam numa dada etapa da aprendizagem podem acontecer, como explica Swan (2001), por diversas razões. Podem ser lapsos de concentração ou raciocínios precipitados ou podem mesmo resultar de uma interpretação ou conceção alterativa da situação. Deste modo, podem não traduzir, na realidade, uma efetiva falta de compreensão relativa a um dado assunto (Swan, 2001). Assim, uma conceção errada corresponde muitas vezes a um conceito em desenvolvimento ou mesmo uma generalização local, que acontece com base nos conhecimentos prévios relativos a um dado sistema numérico, podendo ser interpretados como uma etapa natural do desenvolvimento conceptual (Swan, 2001). Será redutor considerá-los como algo certo ou errado, com um carácter permanente, quando refletem raciocínios dinâmicos adequados, num dado quadro de referência, num dado momento. São pequenas teorias ou generalizações locais em que os alunos, de forma intuitiva, com a sua experiência e conhecimentos, tentam dar significado a novos conceitos matemáticos (Confrey, 1991; Swan, 2001), podendo não refletir uma solução convencionalmente aceite ou que não se verifica num sistema numérico específico. Confrey (1991) vai mais longe, afirmando que é o confronto com uma situação de conflito que oferece um obstáculo conceptual que produz inquietação e leva à sua reformulação. É por esta razão que devem ser acolhidas e tornadas explícitas, de modo a que os conceitos envolvidos possam, progressivamente, ir sendo alargados e reinterpretados tendo em conta o novo domínio de referência (Swan, 2001).

No processo de aprendizagem dos números racionais, as conceções erradas e os erros dos alunos estão estudados e são reconhecidos um pouco por todo o mundo (Swan, 2001). O estudo da natureza destas conceções e erros, vastamente documentada na literatura (e.g., Durkin & Rittle-Johnson, 2015; Monteiro & Pinto, 2005; Ni & Zhou, 2005; Resnick, Nesher, Leonard, Magone, Omanson, & Peled, 1989), procura identificar a sua causa, no sentido de poderem ser evitados, parecendo tratar-se de formas cristalizadas de conhecimento. Contudo, estas conceções e erros podem ser vistos como conhecimentos emergentes em Matemática que importa não prevenir, mas sim discutir. Podem ser entendidos como provocadores de conflitos cognitivos que conduzem ao desencadeamento de reflexão, assim o permita a natureza da cultura da sala de aula (Swan, 2001). Esta reflexão, e a consequente reformulação de pensamentos iniciais e intuitivos, deve decorrer da interação social na turma, onde é esperado que os alunos participem e discutam as resoluções uns dos outros, construindo argumentos que evidenciem desacordo ou que as justifiquem (Wood, 1999). Deste modo, o estudo das conceções erradas e dos erros dos alunos implica que sejam analisados, considerando os diferentes elementos que integram a "ecologia da sala de aula" (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Uma ecologia complexa, como referem Cobb et al. (2003) que envolve não só as tarefas que se resolvem, mas também a forma como se resolvem, a interação que em torno da sua resolução se estabelece, as normas sociais e sociomatemáticas que a regulam, os recursos materiais envolvidos e a forma como estes elementos se relacionam na prática da sala de aula.

Deste modo, não parece fazer sentido que os alunos tenham que mudar o que sabem sobre números, isto é, que seja necessário desencadear uma mudança conceptual no seu conhecimento sobre os números, quando iniciam o estudo dos números racionais. Entendido como um processo de enriquecimento conceptual, a aprendizagem dos números racionais, segundo a Teoria Integrada do Desenvolvimento Numérico (Siegler et al., 2011) envolve uma reorganização do conhecimento numérico dos alunos, no sentido de lhes permitir estender o seu conhecimento da experiência com os números inteiros (Siegler, Fazio, Bailey, & Zhou, 2013).

Cada etapa do desenvolvimento numérico, nesta perspetiva integradora, implica acolher e discutir os aspetos que oferecem continuidade em relação ao que os alunos já sabem sobre números, e os aspetos de descontinuidade, que provocam diferença em relação ao conhecimento numérico que os alunos já possuem (Siegler et al., 2011). Ambos fazem parte do processo de aprendizagem dos números e devem ser compreendidos. Como referem Siegler et al. (2011), na introdução dos números racionais, é redutor tomar como ponto de partida apenas os aspetos de descontinuidade. Importa compreender e reconhecer o que é comum e o que é diferente em cada conjunto numérico, apelando a uma tomada de consciência do que distingue os números em cada conjunto.

Esta perspetiva remete o olhar para o desenvolvimento numérico como um processo integrado, na medida em que se trata de um processo de alargamento progressivo da classe dos números, que vai integrando outros conjuntos numéricos, neste estudo desencadeado pelo aparecimento dos números não inteiros. Esta perspetiva integrada do desenvolvimento numérico tem por base a noção de grandeza numérica na compreensão do que são os números, propriedade que é comum ao desenvolvimento numérico no campo real[4] (Siegler et al., 2011).

A forma como os alunos percecionam a grandeza de um número é fundamental para a compreensão do conceito de número racional, como afirmam Behr, Wachsmuth e Post (1984), sublinhando que não faz sentido adicionar duas frações sem que se tenha noção da quantidade que se está a adicionar. Esta noção desenvolve-se à medida que os alunos vão conseguindo interpretar a grandeza ou valor de um número nos diferentes conjuntos numéricos, constituindo-se como um aspeto transversal ao trabalho com os números inteiros e com os números racionais (Siegler & Braithwaite, 2017). Envolve necessariamente a compreensão de que todos os números têm uma grandeza, segundo a qual podem ser ordenados, e à qual corresponde um ponto específico na reta numérica (Siegler et al., 2011). É a compreensão da grandeza de um número que permite que os alunos sejam capazes de comparar números, reconhecer qual de dois números está mais próximo de um terceiro ou mesmo de descobrir números entre dois números dados (Markovits & Sowder, 1994). Subjacente a este entendimento está o facto de que a todo o número real corresponde um ponto da semirreta e de que a todo o ponto da semirreta corresponde um número real, como indica Caraça (1998) a propósito do processo de construção dos diversos universos numéricos, relembrando que "o conjunto dos pontos da semirreta é equivalente ao conjunto dos números reais" (p. 83) positivos. Trata-se de uma compreensão que decorre de forma gradual no processo de desenvolvimento numérico e que se traduz pela capacidade de representação da grandeza de um número

---

[4] O campo real, de acordo com Caraça (1998), diz respeito ao conjunto dos números reais, que engloba os números racionais e irracionais.

na reta numérica. A reta numérica começa por ser uma estrutura que é usada para representar números inteiros pequenos, vai sendo prolongada para a direita para representar números inteiros progressivamente maiores, para a esquerda para representar os números negativos e de forma intersticial, no intervalo entre dois números inteiros, para representar números não inteiros (Siegler & Braithwaite, 2017). Trata-se de um modelo dinâmico que acompanha e reflete o processo de extensão do conhecimento dos números aos números racionais, apoiado na compreensão da sua grandeza (Brown, 2015).

Nesta perspetiva, à medida que os conhecimentos relativos aos números vão sendo alargados e reinterpretados, os alunos vão identificando aspetos comuns, como a grandeza, e descobrindo outros, que o não são, entre os quais a propriedade da densidade. Do estudo dos números inteiros, os alunos reconhecem que um dado número nesse conjunto possui sucessor e antecessor. Quando os alunos representam dois desses números na reta, no trabalho com os números racionais, visualizam que estes definem um segmento de reta com infinitos pontos que, nesta fase, interpretam como representando números racionais. O conjunto dos números racionais surge assim como um conjunto com um grau de completude maior do que o conjunto dos números inteiros, um conjunto denso (Dedekind, 1901). Posteriormente, são levados a descobrir a existência de uma descontinuidade associada ao conjunto dos números racionais, tornando-se necessário que seja "alargado" pela criação de novos números, de modo a que o novo conjunto adquira a completude, ou seja a continuidade de uma reta numérica, como descreve Dedekind (1901). Consequentemente, a compreensão da densidade é um processo lento e gradual, como afirmam Vamvakoussi e Vosniadou (2004). Contudo, tal como outras propriedades, importa que os alunos a descubram realizando tarefas que envolvam números inteiros e números racionais, de modo a que possam atender às semelhanças e diferenças (Boyce & Norton, 2016) e assim, progressivamente, reorganizem o seu conhecimento sobre os números, aprofundando a compreensão dos números racionais (Siegler, 2016).

O desenvolvimento numérico, nesta perspetiva, remete para a tomada de consciência da complexidade que o estudo dos números oferece. Na compreensão desta complexidade destacamos o papel essencial da capacidade de apreciar com precisão e estimar a grandeza de um número, sem recorrer ao cálculo, no sentido da construção de um efetivo desenvolvimento numérico dos alunos, requerendo que estabeleçam conexões entre a nova informação e os conhecimentos que já possuem (Reys, 1994).

Esta ideia traduz a construção do sentido que a aprendizagem dos números deve assumir, como uma componente fundamental do sentido de número, que se consubstancia no trabalho com os números racionais (Berch, 2017; Brocardo, 2010). Por esta razão, o desenvolvimento numérico, também neste estudo, é visto de forma entrelaçada com o desenvolvimento do sentido de número, sendo interpretado como uma forma de dar sentido aos números racionais, isto é, como sentido de número racional.

Conhecimento conceptual dos números racionais

Pensar o desenvolvimento numérico com números racionais de forma integrada e numa perspetiva de sentido de número implica, por um lado, perceber que conhecimento e ideias estão subjacentes aos números neste novo conjunto numérico. E, por outro lado, implica perceber como se constrói a compreensão desse conhecimento e ideias, articulando-os com os conhecimentos prévios dos números que os alunos possuem.

Construção do conhecimento com compreensão. A ideia de aprendizagem com compreensão remete para a construção de um conhecimento rico em relações entre conceitos, com base numa aprendizagem significativa, isto é, que atribui significado a essas relações entre conceitos, organizando-as numa estrutura coerente. Trata-se de uma compreensão relacional (Skemp, 1976), que se traduz na construção de conhecimento conceptual (Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001). Falar de conhecimento conceptual, remete para a ideia de que existe conhecimento que não é conceptual. Na verdade, Skemp (1976) destaca que o conhecimento de regras e algoritmos, aprendidos de forma mecanizada, constituí conhecimento procedimental, que faz uso do sistema de representação simbólico. Trata-se de um conhecimento que pode ser construído sem significado, por memorização, sem se apoiar nas relações entre conceitos (Hiebert & Lefevre, 1986; Skemp, 1976). Contudo, embora seja possível considerar o domínio de procedimentos sem ligação a conceitos, a construção dos procedimentos deve acontecer de forma inter-relacionada com a construção do conhecimento conceptual, de modo a que possam ser aprendidos com significado (Hiebert & Lefevre, 1986). A construção deste conhecimento conceptual permite aos alunos compreender os princípios e as inter-relações entre conhecimentos num dado domínio e também estabelecer conexões entre conceitos e procedimentos, bem como dar significado ao sistema de representação simbólico em Matemática (Hiebert & Lefevre, 1986; Kilpatrick et al., 2001; Rittle-Johnson & Siegler, 1998). Na verdade, compreender a relação entre conceitos torna alguns procedimentos mais simples, e menos suscetíveis de se cometerem erros, e dominar procedimentos é importante para reforçar e desenvolver a compreensão dos conceitos (Kilpatrick et al., 2001). Deste modo, uma compreensão conceptual robusta aliada a uma fluência procedimental, duas aprendizagens que se encontram positivamente correlacionadas, como referem Rittle-Johnson e Siegler (1998), constitui condição necessária à construção e aplicação do conhecimento matemático (CCSSM, 2010).

Assim, a construção de procedimentos deve ser desenvolvida a partir da compreensão conceptual, tornando-se cada vez mais fluente (NCTM, 2014). Por conseguinte, a construção de um conhecimento de número com compreensão deve permitir um entrelaçamento entre conhecimentos e o uso de procedimentos que conduza a uma escolha fluente de estratégias adequadas à resolução de problemas. Este parece ser um caminho plausível para um desenvolvimento numérico numa perspetiva de sentido de número, sendo o que se persegue neste estudo.

Ideias implicadas na construção de sentido de número racional. A aprendizagem com compreensão dos números remete para uma construção do conhecimento que exige um entendimento integrado e funcional das ideias matemáticas, organizando-se num todo coerente e permitindo que novas ideias se inter-relacionem com o que os alunos já sabem (Kilpatrick et al., 2001). Esta forma de pensar a construção do conhecimento relativo aos números permite uma articulação com o desenvolvimento numérico numa perspetiva de sentido de número, uma vez que este, como indica Greeno (1991), pode ser visto como uma forma de compreensão no domínio conceptual dos números e das quantidades, que relaciona entre si factos, conceitos, princípios, procedimentos e fenómenos.

Assim, o cruzamento das componentes associadas ao desenvolvimento de sentido de número identificadas nos trabalhos de McIntosh et al. (1992), Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e Berch (2005) conduz a um possível referencial que permite, por um lado, interpretar o desenvolvimento do sentido de número e, por outro, identificar as ideias e conhecimentos implicados no alargamento do conhecimento de número ao conjunto dos números racionais. Este referencial reúne um conjunto de capacidades que podem ser vistas como componentes e, ao mesmo tempo, como indicadores de sentido de número: (1) compreender a regularidade dos números, tendo por base a compreensão da estrutura no sistema decimal de posição; (2) relacionar múltiplas representações dos números, reconhecendo diferentes representações e interpretando o seu significado em função do contexto; (3) compreender a grandeza dos números, identificando o seu valor relativo e a ordem de grandeza da sua representação; (4) construir números de referência, interpretando-os como referentes, a partir da experiência matemática, na tomada de decisões; e (5) estabelecer relações numéricas de natureza multiplicativa para interpretar relações proporcionais e para estabelecer comparações, identificando relações entre relações envolvendo quantidades de unidade e/ou grandezas diferentes.

O desenvolvimento destas capacidades tem subjacente a construção de novo conhecimento relativo ao domínio dos números racionais, que permitam ir além das ideias que os alunos têm relativamente aos números inteiros. Isto é, passar a compreender os números na sua relação com os outros números e não apenas como traduzindo uma quantidade fixa (Moss, 2005), o que incluí, em suma, compreender a regularidade dos números, relacionar múltiplas representações, compreender a grandeza dos números, construir números de referência e estabelecer relações.

Compreender a regularidade dos números. Compreender a regularidade dos números racionais no sistema de numeração decimal, ou seja de base 10, implica aprofundar o conhecimento da estrutura de um sistema de numeração posicional. Trata-se de um sistema multiplicativo, que se baseia na escolha de uma base, isto é, escolha de um número superior à unidade, neste caso dez, que através de sucessivas potências, permite fazer a decomposição polinomial de qualquer número, em que cada parcela indica quantas vezes a potência da base cabe nesse número (Sequeira, Freitas, & Nápoles, 2009). Esta estrutura, que se vai estender do estudo dos números inteiros, envolve, por um lado, que os alunos compreendam a noção de valor de posição, isto é que cada algarismo representa uma unidade de tamanho diferente (elementos, grupos ou grupos de grupos) consoante a posição que ocupa no número (Ponte & Serrazina, 2000). E, por outro lado, que sejam capazes de contar e combinar unidades de tamanhos diferentes traduzindo unidades de ordem diferente (Monteiro & Pinto, 2005; Nunes & Bryant, 1997). A interpretação das regularidades desta estrutura na extensão ao campo dos números racionais permite compreender que, na verdade, entre dois números inteiros, conseguimos encontrar infinitos números. E, se no estudo dos números inteiros, os alunos compreendem que a contagem pode prolongar-se sem limites, isto é, é infinita, com os números racionais, os alunos compreendem que é também infinito, embora limitado, o conjunto de números entre quaisquer dois números racionais, ideia fundamental à propriedade da densidade deste conjunto numérico (Hannula, Pehkonen, Maijala, & Soro, 2006).

Relacionar múltiplas representações dos números. O sistema de numeração decimal é um sistema de numeração, com um número finito de símbolos básicos, estruturado por regras e convenções simbólicas. As regras de produção e transformação desses símbolos traduzem uma mensagem que advém da forma como esses símbolos se relacionam (Goldin & Kaput, 1996), como por exemplo, o facto de o limite no número de símbolos fazer com que surjam agrupamentos de várias ordens. Para além disso, estes símbolos assumem o lugar de algo que é abstrato, neste caso, representando uma dada quantidade, ou grandeza, ou uma ação que se produz sobre essa quantidade (Duval, 2006; Hiebert, 1988).

Se alcançar "uma compreensão robusta e flexível de todas as notações de número racional" (Tian & Siegler, 2018, p. 18) parece ser crucial para trabalhar de forma flexível com os números racionais, constituindo-se como grande finalidade do seu ensino, um dos grandes desafios que se colocam à escola é como dar significado a essa notação, a esses símbolos e configurações de símbolos (Goldin, 2003; Hiebert, 1988). Hiebert (1988) refere que se trata de um processo moroso, que se desenvolve de forma encadeada tendo por base a associação desses símbolos a referentes realistas, e também concretos, para os alunos. Envolve o uso de representações ativas, icónicas, simbólicas e a linguagem natural oral e escrita (Bruner, 1966; Ponte & Serrazina, 2000), recorrendo a transformações dentro e entre representações (Duval, 2006), na construção de modelos de interpretação de situações realistas.

Numa primeira fase, trata-se de "ancorar os símbolos no ambiente quantitativo familiar ao aluno" (Hiebert, 1988, p. 340), de modo a que os significados que se constroem relativos à grandeza ou quantidade a que se vão associando os símbolos, permitam apoiar o seu uso. À medida que se vai trabalhando esta relação, os símbolos vão sendo manipulados e o significado é transferido para os próprios símbolos, permitindo fazer emergir a sintaxe do sistema simbólico em que se inserem (Hiebert, 1988). Esta competência com os símbolos continua a desenvolver-se, sendo os alunos capazes de transferir significados de um sistema simbólico familiar para um novo, mais abstrato, como nos indica Hiebert (1988). E assim, conseguem estabelecer relações entre sistemas, de modo a que os símbolos e as regras já familiares possam servir de referência para a construção de significado num novo sistema simbólico. É através desta relação entre sistemas que símbolos, e configurações de símbolos, bem como as regras que os convencionam, vão ganhando significado (Goldin, 2003).

Esta competência no uso dos símbolos parece ganhar-se a partir da identificação de semelhanças entre sistemas e o reconhecimento da forma como o nível de abstração seguinte dá seguimento a essas semelhanças (Hiebert, 1988). Esta ideia vai ao encontro da perspetiva de desenvolvimento numérico de Siegler et al. (2011), na medida em que enfatiza a continuidade entre o conhecimento que os alunos já trazem e os novos conhecimentos, tendo por base os padrões e as continuidades entre sistemas simbólicos, especificamente dos números inteiros para os números racionais.

Neste processo de extensão do conhecimento aos números racionais, os alunos precisam de ampliar a relação de correspondência um (grandeza) para um (símbolo), entre o conjunto de elementos ou objetos matemáticos e o conjunto de símbolos que os representam, que trazem dos números inteiros. A descoberta de outros números entre dois números inteiros consecutivos alarga o campo numérico para o conjunto dos números racionais, deixando de fazer sentido falar de sucessor ou antecessor de um número ou pensar numa sucessão de números. Para além disso, neste novo campo numérico, o mesmo número pode assumir diferentes representações, de diferentes sistemas simbólicos – fração, numeral decimal ou percentagem – de acordo com regras de notação e significados específicos de cada um deles.

Pelo que, com o estudo dos números racionais o reportório de símbolos e termos convencionados vai ampliar-se, associado à construção dos novos conceitos (NCTM, 2000), preferencialmente, sem perder contacto com o referente familiar inicial, até que adquiram abstração, como refere Hiebert (1988), e possam representar a grandeza ou a quantidade, *per se,* sem recurso a referentes.

A importância que a mobilização de múltiplas representações desempenha na construção dos conceitos relativos aos números racionais é justificada pelo facto de cada uma não evidenciar as mesmas propriedades do objeto matemático, mas traduzir apenas um aspeto da sua estrutura, uma possível interpretação (Duval, 2006; Tripathi, 2008). Esta ideia reforça a necessidade de trabalhar com múltiplas representações de modo a que se complementem na compreensão dos conceitos associados a este conjunto numérico (Duval, 2006; Tripathi, 2008) e, consequentemente, dos sistemas simbólicos que o apoiam. Essa compreensão implica não só que os alunos possam dar significado aos símbolos em cada um deles, mas também que sejam capazes de optar, em cada situação, pela representação que lhes parecer mais adequada (McIntosh et al., 1992).

Compreender a grandeza dos números. A forma como os alunos interpretam a grandeza de um número, o seu valor ou tamanho, é de extrema importância como referem Behr, Wachsmuth, & Post (1984). McIntosh et al. (1992) afirmam que se desenvolve com a experiência matemática ao longo do desenvolvimento numérico dos alunos. Representar a grandeza numérica de forma intuitiva é uma capacidade que se revela desde os primeiros anos de vida e que parece determinar o conhecimento intuitivo que temos de número (Dehaene, 1997).

Antes de o fazerem de forma simbólica, os alunos são capazes de representar a grandeza dos números de forma ordenada ao longo de uma estrutura contínua que metaforicamente é designada por reta numérica mental (Ansari, 2012; Dehaene, 1997; Siegler, 2016). À medida que ocorre o desenvolvimento numérico dos alunos, e recorrendo a esta metáfora, podemos afirmar que esta reta numérica se expande para representar grandeza dos números racionais (Siegler & Lortie-Forgues, 2014).

No entanto, para alunos mais novos, esta representação pode revelar-se ruidosa, uma vez que estes tendem a representar números mais pequenos de forma mais distante e números de maior grandeza mais próximos, segundo uma escala logarítmica (Ansari, 2012; Dehaene, 1997). Progressivamente, a precisão vai aumentando, à medida que aumenta a capacidade de os alunos estimarem a grandeza de um número, aproximando-se de uma escala linear, em que a representação na reta passa a fazer-se segundo divisões iguais, em que uma mesma diferença de grandeza é representada pela mesma distância (Ansari, 2012; Dehaene, 1997).

A Teoria Integrada do Desenvolvimento Numérico (Siegler et al., 2011) destaca a grandeza dos números como característica comum aos elementos do conjunto dos números inteiros e dos números racionais, considerando-a uma ideia-chave de continuidade no desenvolvimento numérico dos alunos. Trata-se de uma característica que permite ordenar e representar números numa reta numérica, através da sua representação simbólica e que constitui uma componente central do conhecimento matemático (Fazio, Kennedy & Siegler, 2016; Siegler & Lortie-Forgues, 2014).

Ao longo da aprendizagem dos números nos diversos conjuntos, os alunos vão compreendendo a grandeza do número e percebem que esta implica também a sua relação com outros números (Dehaene, 1997). A dada altura do estudo dos números inteiros, quando são confrontados com um numeral, por exemplo 7, percecionam a sua grandeza como ficando entre 6 e 8 e mais perto de 10 do que de 1. Gradualmente, vão percecionando o numeral como um todo, independente do número de algarismos que o representam, visualizando-o como tendo uma dada grandeza (Dehaene, 1997). O mesmo acontece com os números racionais, nas diferentes representações simbólicas que estes podem assumir. Frações, numerais decimais e percentagens podem expressar um mesmo número, pelo que importa que os alunos percecionem cada uma destas representações simbólicas como uma forma de representar uma grandeza, vendo-as como um todo. Esta compreensão parece ser mais fácil de construir com a representação decimal e mesmo com a percentagem, por semelhança com o que acontece com os números inteiros, do que com a fração (DeWolf, Grounds, Bassok, & Holyoak, 2014). A fração apresenta uma estrutura mais relacional, que apela à relação entre os dois números que a compõem, tornando a grandeza do número menos evidente (DeWolf, Bassok, & Holyoak, 2015). Esta constitui, inclusivamente, uma das razões pela qual Moss e Case (1999) remetem a aprendizagem da fração para último lugar no currículo experimental que apresentam para a compreensão do número racional, com base no estabelecimento de relações entre percentagens, decimais e frações, comparando e ordenando as grandezas que representam.

No entanto, a capacidade de comparar dois números depende tanto da estrutura associada à representação simbólica como da grandeza desses números (Dehaene, 1997). Esta capacidade é influenciada, por um lado, pelo efeito da distância a que se encontram os números, sendo mais fácil distinguir dois números distantes, isto é, dois números cuja diferença de grandeza é maior, do que dois números próximos. Além disso, o efeito da grandeza faz com que, para dois números que se encontram à mesma distância, seja mais fácil comparar números de grandeza pequena do que de grandeza maior (Ansari, 2012; Dehaene, 1997). Contudo, com o desenrolar do desenvolvimento numérico dos alunos, a precisão na capacidade de estimativa da grandeza de um número inteiro aumenta, sendo alargada a outros conjuntos numéricos, como aos números racionais e reais, na medida em que "todos os números reais possuem grandezas que podem ser representadas e ordenadas numa reta numérica" (Siegler & Braithwaite, 2017, p. 189). A compreensão do sistema de numeração decimal, nesta perspetiva, considera a reta numérica um modelo potente para o desenvolvimento da capacidade de estimar e comparar grandezas no conjunto dos números racionais, uma vez que "retas numéricas podem ilustrar claramente a grandeza das frações, a relação entre números inteiros e frações e as relações entre frações, decimais e percentagens" (Siegler et al., 2010, p. 20). Ainda assim, importa ter presente que a reta numérica, só por si, é insuficiente para fazer progredir a compreensão da grandeza (Fazio et al., 2016). É a interação social em torno da localização de números na reta, segundo a sua grandeza, que aumenta a confiança dos alunos, conduzindo à construção da representação da grandeza dos números segundo uma escala linear (Booth & Siegler, 2008) e permitindo representar a grandeza de um conjunto cada vez mais amplo de números, envolvendo diferentes representações simbólicas.

Deste modo, a grandeza, como característica comum aos números inteiros e aos números racionais, permite entender a construção do conhecimento relativo ao número como um processo de alargamento progressivo, um processo que envolve para além da grandeza, e sem menor importância, o estudo das propriedades novas que, não contrariando as anteriores, as ampliam (Caraça, 1998).

Construir números de referência. A compreensão da grandeza de um número envolve comparar e ordenar números, bem como identificar números entre dois números dados (Markovits & Swoder, 1994). Estas capacidades desenvolvem-se a par da identificação de números de referência que permitam pensar e dar sentido a outros números (McIntosh et al., 1992).

Um número de referência, embora esteja associado a uma dada representação simbólica, é reconhecido pela sua grandeza, sendo desprovido de um referente concreto ou contextual (McIntosh et al., 1992). No estudo dos números racionais essa representação simbólica – fração, numeral decimal ou percentagem – expressa a grandeza de um número que constitui um conhecimento conceptual intuitivo ou um facto matemático, como 1/10, 1/2, 0,5, 0,75, 10%, 50%, entre outros (Pilmer, 2008; Sowder & Schappelle, 1989). Os números de referência são pontos médios, múltiplos de 10 ou números que possuem uma grandeza acerca da qual os alunos têm um conhecimento seguro (McIntosh et al., 1992). Têm significado matemático resultante da experiência pessoal, e que se desenvolvem à medida que os alunos vão estabelecendo relações entre uma dada representação simbólica e os referentes que lhe são familiares (Hiebert, 1988).

Números de referência servem como âncora, como referem McIntosh et al. (1992), permitindo estabelecer comparações ou fazer arredondamentos, no sentido de apreciar a grandeza de outros números ou de os representar. Uma das estratégias para desenvolver flexibilidade no uso de números de referência passa por localizar na reta numérica e usar esses números para localizar outras grandezas numéricas (Siegler &

Booth, 2004). Esta ideia permite associar a flexibilidade no uso de números de referência a uma compreensão de fração, numeral decimal e percentagem, de forma inter-relacionada (Pilmer, 2008). O uso de números de referência, nomeadamente no estudo da percentagem, com valores como 1%, 10%, 25% ou 50%, constitui uma estratégia fundamental a uma abordagem mais intuitiva e menos formal da percentagem (Lembke & Reys, 1994)

Estabelecer relações. A aprendizagem dos números racionais, numa perspetiva de alargamento do conhecimento relativo ao número, implica que os alunos compreendam o número na relação com outros números (Moss, 2005). Na verdade, os números, como todos os objetos matemáticos, "são determinados e compreendidos através da rede de relações que desfrutam com todos os outros objetos da sua espécie" (Mazur, 2008, p. 225). Aliás, o desenvolvimento histórico dos números racionais destaca a importância desta dimensão relacional, evidenciando que o aparecimento deste campo numérico foi provocado pelas relações que se estabeleceram entre números. Como explica Caraça (1998) foi a necessidade de traduzir uma medida por um número, numa situação em que o comprimento escolhido como unidade de medida não caberia um número inteiro de vezes no comprimento a medir, que levou ao aparecimento dos números não inteiros. O ultrapassar desta aparente impossibilidade alargou o conjunto dos números inteiros aos números racionais, trazendo novos números e novas relações numéricas, relações multiplicativas, que fizeram emergir a noção de razão, associada ao significado de medida.

Como num processo de isomorfismo histórico-matemático, são estas relações multiplicativas que se pretende que os alunos construam no estudo deste conjunto numérico, a partir da tendência natural para fracionar quantidades, em pedaços de diferentes tamanhos com comodidade, isto é, em função da situação e convocando a representação mais adequada (Van Galen et al., 2008; Lamon, 2002; 2007; Moss, 2005). Neste processo, fração, numeral decimal ou percentagem, podem assumir diversos significados, ou subconstrutos (Behr et al., 1983; Lamon, 2007), nomeadamente, medida, operador, parte-todo, quociente ou razão. O trabalho com os diferentes significados constitui uma oportunidade de os alunos desenvolverem flexibilidade no processo de (re)unitização e de compreenderem a natureza dos números racionais (Lamon, 2007) No entanto, como refere Lamon (2012), cada um destes significados pode ser interpretado como medida: medir para quantificar uma qualidade, como o comprimento; medir o que muda em relação a uma quantidade inicial; medir a relação multiplicativa da parte com o todo; medir o que se recebe quando se partilha com um dado número de objetos, de indivíduos ou medir uma grandeza relativa (Lamon, 2012), uma perspetiva abrangente do significado de medida que se privilegia neste estudo.

Freudenthal (1983) relembra que a palavra *racional* remete para razão, não no sentido de raciocínio, mas sim de proporção, de medida, como contexto de aprendizagem, que pode surgir apoiada nos princípios associados à medição que os alunos conhecem e trazem consigo (Lamon, 2002; NCTM, 2010). Medir para compreender a relação entre os diversos significados, apoiada numa composição e recomposição de unidades e, sobretudo, para compreender a estrutura multiplicativa dos números racionais (Lamon, 1996). Estrutura essa fundamental para aquisições matemáticas futuras, nomeadamente no campo da Álgebra (Siegler et al., 2011), à medida que os alunos alargam e aprofundam a compreensão das relações multiplicativas (Lamon, 2007).

Um número racional pode ser entendido como o quociente de dois números inteiros, *m* e *n*, sendo *n* diferente de zero (Caraça, 1998). Podemos dizer que este quociente é uma *fração*, como refere Freudenthal (1983), dado que este considera *fração,* do ponto de vista epistemológico, como o fenómeno que dá origem aos números racionais, dado que resulta da ação de cortar, fracionar. No entanto, esse quociente pode ser expresso por uma fração, enquanto representação simbólica, mas também por numeral decimal ou percentagem. Cada uma destas representações envolve o uso de algarismos associados a outros símbolos, como o traço de fração, a vírgula ou o símbolo de percentagem, cujo significado se constrói na forma como estes símbolos são combinados e que, progressivamente, se vai transferindo para as ações e relações que se estabelecem, quer na mesma representação, quer entre várias, pelo que se torna fundamental compreender essas relações (Van Galen et al., 2008; Hiebert, 1988).

Cada uma das representações traduz a razão entre o que está a ser descrito e a unidade a que se refere, o que envolve proporcionalidade, tendo por base relações de natureza multiplicativa (Van Galen et al., 2008; Post, 1989). Entre essas relações destacamos as que garantem coerência para a variedade de significados que os números racionais podem assumir e que contribuem para uma conceptualização da noção de unidade (Hackenber, 2010; Lamon, 2002; Nunes & Bryant, 1997). A importância da conceptualização da unidade amplia-se no trabalho com os números racionais dado que a grandeza de um número racional depende do que se considera como unidade (Lamon, 1996; Monteiro & Pinto, 2005). Esta conceptualização da unidade no trabalho com os números racionais apela à compreensão da unidade antes, durante e após a partição e envolve processos de estruturação que implicam composição e recomposição de unidades (Hackenber, 2010; Lamon, 1996, 2002; Monteiro & Pinto, 2005). Estes são processos inter-relacionados, permitindo descrever quantidades diferentes de alguma coisa em relação ao tamanho da unidade (Lamon, 1996). Deste modo, a parte ou o número racional emerge da divisão da unidade em partes, num processo de refinamento de quantidades, e da iteração dessas partes na reconstrução da unidade, promovendo a reorganização dos processos de estruturação e coordenação de unidades (Hackenber, 2010; Lamon, 1996; Norton & Boyce, 2013; Moss & Case, 1999; Steffe, 2002). Perceber que 25%, 1/4 ou 0,25 representam uma parte de um todo que, se retirado a esse todo e iterado quatro vezes, forma o todo. Que para formar um todo, possuindo 75%, 3/4 ou 0,75 desse todo, implica dividir cada uma dessa partes em três, para encontrar a "parte unitária", 25%, 1/4 ou 25%. Que 75%, 3/4 ou 0,75 e, por exemplo, 125%, 5/4 ou 1,25 resultam da iteração da "parte unitária". Ou ainda que 75%, 3/4 ou 0,75 resultam de uma composição de 3 unidades de 25%, 1/4 ou 0,25, de uma unidade que é 100%, 4/4 ou 1, envolve o estabelecimento de relações multiplicativas que relacionam a parte em função da unidade. A construção destas relações multiplicativas permite reorganizar as noções de estruturação e composição de unidades que os alunos trazem dos números inteiros, cruciais para o desenvolvimento do conhecimento conceptual e consequente fluência no cálculo com números racionais (Norton & Hackenber, 2010; Lamon; 2002).

A identificação das ideias matemáticas que a compreensão de número racional envolve nesta etapa da escolaridade surge neste estudo na relação com o desenvolvimento do sentido de número racional, numa perspetiva de desenvolvimento numérico progressivamente mais abrangente e integradora.

A percentagem na construção de uma compreensão entrelaçada de representações

A aprendizagem dos números racionais envolve o uso de diferentes representações simbólicas para um mesmo objeto matemático. Contudo, como refere Duval (2006), o importante não são as representações em si, mas a transformação dessas representações umas nas outras, uma vez que os processos subjacentes à atividade matemática envolvem substituir uma representação por outra, no sentido de compreender o objeto matemático, dissociando-o da sua representação.

Percentagem como representação visual versátil. A percentagem, como representação de número racional, reúne um conjunto de características que permitem que seja equacionada como uma representação a considerar numa fase inicial do estudo dos números neste conjunto numérico, como processo de alargamento do conhecimento relativo aos números, numa perspetiva de sentido de número.

Uma dessas características diz respeito à correspondência semântica existente entre a percentagem e a representação dos números inteiros, tendo por base o significado estrutural que um número escrito em percentagem traduz. Valores de percentagem simples, como 50% ou 10%, convocam o uso dos numerais usados para representar os números inteiros, o que lhes atribui um significado intuitivo, ancorado nos conhecimentos que trazem do trabalho com esse campo numérico. A parte numeral da percentagem usa os algarismos com uma estrutura semelhante à usada nos números inteiros, o que não acontece com a fração, em que os algarismos são organizados numa nova estrutura bipartida ou na representação decimal, em que algarismos e vírgula surgem combinados segundo as regras do valor de posição, provocando alterações na forma como os algarismos são dispostos. Para além disso, numa fase inicial do estudo dos números racionais números em percentagem, que representem partes de um mesmo todo, podem ser ordenados linearmente para facilitar a sua comparação. Apreciar a grandeza relativa de um número racional na forma de percentagem, é processo apoiado pela analogia com a relação de ordem dos números inteiros, com base na ordem natural do sistema de numeração decimal (Parker & Leinhardt, 1995). Assim, a correspondência semântica entre a notação da percentagem e a notação dos números inteiros é maior quando comparada com a fração ou a representação decimal, o que parece ser um aspeto relevante quando se pensa na representação a privilegiar, tendo por base os conhecimentos que os alunos trazem dos números inteiros.

Uma outra característica relevante prende-se com o facto da palavra *percentagem* ganhar um significado intuitivo na língua portuguesa, que a torna um instrumento cultural para a aprendizagem da Matemática (Nunes, Dorneles, Lin, & Rathgeb-Schnierer, 2016; Vygotsky, 1978). A morfologia da palavra traduz uma forte semelhança entre o numeral cardinal *cem* e o quantificador numeral *por cento*. A semelhança entre estas duas expressões é grande, dada a origem da nossa língua. O temo *por cento* deriva do latim *per centum.* A palavra *centum* deu origem à palavra portuguesa *cento*, que posteriormente ganhou a forma apocopada *cem*. Contudo, no português contemporâneo o termo *cento* é usado quando nos referimos, nomeadamente, a numerais cardinais entre cem e duzentos, como por exemplo *cento e um*. Esta situação não acontece por exemplo com o inglês, pois embora a língua inglesa também tenha por base o latim, é uma língua germânica que sofreu grande influência anglo-saxônica. Assim, a palavra *percent* (por cento) não apresenta a mesma semelhança morfológica que a palavra *hundred* (cem), como acontece em português. Quando pensamos em alunos do 1.º ciclo, esta semelhança entre as palavras é muito importante, numa altura em que a língua, escrita e falada, para além de ser um instrumento fundamental à construção de aprendizagem em diferentes áreas, como na Matemática, é ela própria objeto de aprendizagem. O termo *por cento* remete para a expressão *por cada cem* ou *em cada cem*, o que torna intuitiva a compreensão do significado desta expressão, na sua relação com algo que está para cem, uma relação de natureza multiplicativa, que está na essência do significado de percentagem. Esta semelhança fonética entre as palavras pode ser potenciada, nesta etapa do desenvolvimento, no estabelecimento de relações entre os conceitos.

O uso corrente da percentagem no quotidiano constitui uma outra característica importante que sugere o seu estudo para esta etapa da escolaridade (Moss & Case, 1999). Pensemos em 40%. É um valor que a maioria das pessoas visualiza com facilidade em relação a um todo. É interpretado como próximo de metade, sem chegar a metade. A escala de 0 a 100 em que se apoia é precisa o suficiente para a maioria das situações do dia-a-dia (Van Galen et al., 2008). Há vinte anos atrás, Gay e Aichele (1997) afirmavam que ter um bom sentido de número envolvendo percentagem era fundamental para que os alunos pudessem tornar-se cidadãos informados e esclarecidos. Esta ideia é hoje em dia mais premente, uma vez que o uso da percentagem se encontra generalizado na sociedade em que vivemos. A percentagem constitui uma linguagem de relações concisa, que descreve informação de um modo simplificado (Parker & Leinhardt, 1995), o que a torna um dos conceitos matemáticos com maior difusão na vida real. Por esta razão, a construção de um conhecimento intuitivo de percentagem começa antes da entrada na escola, resultando da experiência do dia-a-dia, da forma como a percentagem é usada na sociedade (Lembke & Reys, 1994). Dado o papel que assume na sociedade "a percentagem é um dos conceitos mais úteis no currículo de Matemática" (Lembke & Reys, 1994, p. 237), pelo que importa trazer esse conhecimento para a sala de aula e usá-lo na construção de uma compreensão gradualmente mais profunda de percentagem, que privilegie inicialmente a sua aprendizagem conceptual (Parker & Leinhardt, 1995; Yapıcı & Kayhan Altay, 2017).

Como última característica, destacamos o facto de a percentagem ser uma representação que se pode converter de forma simples e intuitiva em fração e na representação decimal (Moss & Case, 1999; Van Galen et al., 2008). Historicamente, a percentagem surgiu das trocas comerciais, das relações de proporcionalidade, que por questões de simplificação conduziram ao estabelecimento de uma base em particular, a base 100 (Parker & Leinhardt, 1995). A escolha da escala de 0 a 100 não parece ter sido coincidência, pois permite arrumar as percentagens de forma ordenada no nosso sistema de representação. O mudar a unidade de referência de 100 para 1, permite que a expressão 10% possa ser convertida no numeral decimal 0,10 ou 0,1 ou na fração 10/100 ou 1/10 com relativa facilidade (Parker & Leinhardt, 1995; Van Gale et al., 2008). Trata-se de conversões congruentes, em que há uma correspondência semântica entre os elementos de cada representação, sendo a representação de partida transparente em relação à representação de chegada, o que explica que sejam mais simples e intuitivas (Duval 1999). Embora congruente neste sentido, isto é, qualquer percentagem pode ser convertida em fração ou numeral decimal equivalente, não o é no sentido oposto (Moss & Case, 1999). Deste modo, a percentagem permite, de uma forma intuitiva e ancorada no conhecimento relativo aos números inteiros, uma compreensão geral de como as três representações se inter-relacionam. Este aspeto é determinante numa fase inicial da aprendizagem dos números racionais, pois, como refere Duval (2006), "a compreensão matemática começa quando a coordenação de registos também começa" (p.126).

A percentagem perdura até à atualidade constituindo um conceito matemático dinâmico que foi evoluindo não só simbolicamente, mas também nas interpretações que lhe estão associadas e nos domínios de utilização (Parker & Leinhardt, 1995). Estas quatro características da percentagem realçam o seu poder enquanto representação versátil (Goldin & Kaput, 1996), permitindo um uso eficiente e a movimentação entre diferentes representações simbólicas, mas também a evidenciam como representação visual potente, dado que permite reconhecer de forma rápida e relativamente espontânea, o que é matematicamente relevante (Duval, 2014), neste caso, a grandeza do número que expressa.

Aprendizagem da percentagem numa perspetiva de sentido de número. A percentagem é um tópico do currículo de Matemática que a investigação em Educação Matemática tem mantido afastado da discussão sobre que representação simbólica privilegiar no início do estudo dos números racionais (Tian & Siegler, 2018). Tradicionalmente, a percentagem é trabalhada depois do estudo da fração e da representação decimal, e, dada a sua complexidade, é facilmente convertida numa dessas representações e abandonada numa etapa em que os alunos ainda estão a construir o seu significado (Parker & Leinhardt, 1995).

De facto, a investigação apresenta inúmeras evidências de que os alunos revelam dificuldade na compreensão de percentagem. O problema parece ter sido identificado há cerca de 100 anos (Risacher, 1991) persistindo até aos dias de hoje, em que a percentagem é considerada um dos tópicos mais difíceis de aprender e de ensinar (e.g., Gay & Aichele, 1997; Parker & Leinhardt, 1995; Yapıcı & Kayhan Altay, 2017), pelo que, incluir este conceito no trabalho nos primeiros anos, ainda que ancorado no tema dos números racionais, não é consensual.

As dificuldades com a percentagem parecem residir no facto de não ser dedicado tempo suficiente à construção de um conhecimento conceptual de percentagem, que permita aos alunos compreender que o seu significado vai além das conversões e procedimentos (Dewar, 1984; Parker, 2004). Embora um trabalho inicial envolva o uso de representações familiares, ancoradas em contexto, estas são rapidamente abandonadas, passando-se desde logo para o ensino de estratégias de resolução de problemas com percentagens que remetem sobretudo para a memorização de regras e procedimentos (Dewar, 1984; Gay & Aichele, 1997; Parker, 2004) que, como alertam Van Galen e Van Eerde (2013), se não estiverem ancorados na compreensão, rapidamente se transformam em truques falíveis. Deste modo, o ensino formal de percentagem, de um modo geral circunscrito ao 5.º ou 6.º ano de escolaridade, tende a limitar a criatividade e flexibilidade dos alunos na resolução de problemas com percentagens, fazendo com que estes fiquem mais dependentes dos procedimentos, em detrimento da compreensão das relações proporcionais implícitas (Koay, 1998; Parker & Leinhardt, 1995).

A primeira etapa do trabalho com a percentagem, bem como de qualquer outro conceito matemático, é talvez a mais importante do ponto de vista da compreensão conceptual. Focando a atenção no significado de percentagem, Risacher (1991) sugere que a investigação sobre este tema procure compreender como o ensino da percentagem se poderá desenvolver tendo por base o conhecimento informal de percentagem dos alunos, remetendo para os primeiros anos um trabalho que promova experiências em que esse desenvolvimento ocorra.

Antes do seu ensino formal, os alunos revelam intuição para a proporção, enquanto relação que se mantem constante, e um conhecimento informal de percentagem que lhes permite interpretar valores de referência, bem como usar estratégias aditivas para resolver problemas (Moss &Case, 1999; Parker & Leinhardt, 1995; Rosenthal et al., 2009; Spinillo, 2002). Importa tirar partido desta compreensão informal e intuitiva na construção de uma compreensão mais aprofundada da percentagem, das relações multiplicativas que oferece, bem como da sua notação, uma vez que estas não são adquiridas de forma intuitiva (Risacher, 1991).

Numa perspetiva de sentido de número, isto implica encorajar os alunos a pensar nas comparações e nas relações que se estabelecem entre os números numa dada situação antes de avançar para o domínio de procedimentos (Koay, 1998; Moss & Case, 1999; Parker, 2004). Segundo Gay (1990), o sentido de número associado à percentagem inclui que os alunos desenvolvam as capacidades de (1) compreender o significado de um número ou quantidade representado em percentagem, apoiado por uma representação icónica; (2) comparar números ou quantidades expressas em percentagem e (3) reconhecer o efeito relativo de uma percentagem de um dado número ou quantidade. Este desenvolvimento requer necessariamente a construção de estratégias com sentido e o uso de diferentes representações, que permitam tornar evidentes as relações entre os números envolvidos e reconhecendo a natureza relacional da percentagem, num processo que se desenvolve de forma gradual (Koay, 1998; Parker, 2004; Van Galen & Van Eerde, 2013). A barra de estado, a tabela de proporcionalidade, escalas de comparação, a reta numérica dupla são algumas dessas representações que podem ser usadas como modelos pelos alunos, para apoiar as suas estratégias de resolução, dando expressão às relações proporcionais que a percentagem traduz, destacando a perceção do todo (Moss & Case, 1999; Parker & Leinhardt, 1995; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; Van Galen & Van Eerde, 2013).

A natureza relacional da percentagem. A percentagem é um conceito dinâmico, do ponto de vista histórico, tendo ganho um significado matemático e sociocultural complexo. Matematicamente, o conceito de percentagem encontra-se intrincado com o conceito de número racional, contudo, o seu uso no quotidiano conduziu a uma variedade de interpretações do seu significado. Um mesmo número representado em percentagem assume diferentes significados de acordo com a situação em que é usado, podendo ir além dos significados de número racional, pelo que, é necessário dizer mais acerca do número representado para que se compreenda a mensagem que pretende traduzir (Parker & Leinhardt, 1995). A percentagem, como afirmam Parker e Leinhardt (1995), "é uma linguagem de proporção privilegiada que simplifica e condensa descrições de comparações multiplicativas" (p. 472). Uma percentagem traduz sempre uma comparação, que tem na base uma relação multiplicativa entre duas quantidades. No entanto, sendo uma representação simples que, por vezes, envolve uma linguagem aparentemente aditiva, acaba por esconder a natureza multiplicativa dessa relação (Parker & Leinhardt, 1995).

Numa fase inicial do estudo da percentagem, o significado parte-todo é muitas vezes valorizado (Koay, 1998; Parker & Leinhardt, 1995). Todavia, uma percentagem é uma afirmação de proporção, traduzindo uma comparação que permite que a medida relativa da parte possa ser vista com um sentido de completude ao longo de uma escala linear, em que 0% representa vazio e 100% cheio (Dole, Cooper, Baturo, & Conoplia, 1997; Moss & Case, 1999; Parker & Leinhardt, 1995). Esta ideia conduz à interpretação de uma dada quantidade na sua relação com outra quantidade que é 100, através de um raciocínio proporcional que traduz que *isto é* 10% *de algo que é* 100%, ou interpretando como medida, em que 10% *cabe 10 vezes em* 100% (Lamon, 2012; Parker & Leinhardt, 1995).

O estudo da percentagem, numa etapa inicial, segundo Parker (2004), deve destacar o que a percentagem realmente é, em vez de se focar nas características da sua representação ou na resolução de problemas para aplicação de procedimentos. Deve focar-se na compreensão da relação proporcional que a percentagem oferece entre dois números, duas quantidades de um mesmo conjunto ou de conjuntos diferentes (Parker, 2004). Nesta perspetiva, o estudo da percentagem deve iniciar-se com a compreensão da sua dimensão relacional, destacando a importância de 100 como base privilegiada, em vez de procurar conversões com a representação decimal ou a fração (Parker & Leinhardt, 1995).

A compreensão da dimensão relacional da percentagem, numa perspetiva de sentido de número, envolve a construção de um conhecimento conceptual que envolve descobrir, nomeadamente, que a percentagem: 1) traduz uma relação proporcional entre dois números ou quantidades, de natureza multiplicativa; 2) possuí propriedades de número racional, não podendo ser interpretada sem ter em conta o referente; 3) traduz uma relação parte-todo, que também pode expressar uma medida relativa ou comparação entre a grandeza de dois números ou quantidades; 4) descreve uma situação fixa, em que o tamanho do todo não influencia o valor da percentagem; 5) possui um carácter não linear, dado que o referente muda quando se faz aumentar ou diminuir a parte; e 6) descreve duas situações: o tamanho da parte em relação a um todo e um todo que aumenta e diminui por ação da parte (De Corte, Depaepe, Eynde, & Verschaffel, 2005; Lembke & Reys,1994; Parker & Leinhardt, 1995; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Deste modo, a construção de um conhecimento conceptual robusto de percentagem acontece na sua relação com conhecimentos anteriores e com novos conceitos matemáticos de forma entrelaçada, como a conexão com a representação decimal e a fração, permitindo ancorar uma construção gradual de um conhecimento procedimental flexível (De Corte et al., 2005).

A construção do conceito de percentagem com sentido pode ser concebida como um processo de matematização progressiva, no qual o uso de diferentes representações como modelos assume um papel fundamental (De Corte et al., 2005, Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Os resultados de um estudo realizado por Dole et al. (1997) com alunos do 8.º, 9.º e 10.º ano, com o objetivo de analisar o conhecimento que os alunos possuíam de percentagem, bem como perceber que estratégias mobilizavam na resolução de problemas, evidenciaram que apenas um grupo muito restrito de alunos conseguiu resolver os problemas propostos de forma eficaz. Além disso, na construção das suas estratégias de resolução, nenhum dos alunos mobilizou qualquer representação icónica, de forma espontânea. Estes resultados reforçam a importância de "desenvolver um sistema de representações flexíveis para os diferentes significados de percentagem" (Parker & Leinhardt, 1995, p. 464).

O ser capaz de interpretar percentagens tendo como suporte uma representação icónica constitui um dos aspetos que contribuem para a compreensão da natureza relacional da percentagem (Lembke & Reys, 1994). Deste modo, o uso de representações constitui uma das dimensões de um conhecimento conceptual de percentagem robusto, a par da construção de um reportório de estratégias eficazes, embora não algorítmicas, como o uso de números de referência, de raciocínio proporcional, da estimativa, de cálculo mental, ou da conversão entre representações (Dewar, 1984; Lembke & Reys,1994; Parker & Leinhardt, 1995), em situações que, partindo da experiência do dia-a-dia dos alunos, apelem a um pensamento crítico. Posto isto, importa, como refere Swart (1981) contornar o simbolismo e o formalismo dos algoritmos e procurar modelos e esquemas que permitam compreender a natureza da

Matemática, procurando que esses modelos e esquemas se articulem com um uso de procedimentos de cálculo progressivamente mais formais, com sentido.

Num currículo experimental relativo à aprendizagem dos números racionais, no 4.º ano de escolaridade, desenvolvido por Moss e Case (1999), a percentagem foi a representação privilegiada para iniciar o trabalho neste conjunto numérico, apoiada no uso de representações ativas e icónicas, mobilizadas como ferramentas de visualização, como sugere Duval (2014), que convidavam os alunos a apreciar proporcionalmente, em percentagem, a completude de diferentes recipientes, em múltiplos contextos. Este currículo procurou desenvolver uma rede de conceitos e relações em torno dos números racionais, apoiada na estrutura multiplicativa do sistema de numeração, mobilizando conhecimentos prévios de número dos alunos e capitalizando as suas experiências do dia-a-dia com a percentagem (Moss, 2005; Moss & Case, 1999). A representação decimal surgiu a seguir e depois a fração, embora ao longo da intervenção os alunos fossem fazendo conversões intuitivas entre estas representações. Os resultados deste estudo evidenciam que a inter-relação entre percentagens, numerais decimais e frações foi potenciada na construção de estratégias de resolução intuitivas e com significado para os alunos, desenvolvendo "uma compreensão geral de como as três representações estão relacionadas" (Moss, 2005, p. 324), tendo por base um entendimento da grandeza do número racional. Com o uso de representações ativas e icónicas, os alunos foram interpretando com sentido, os diferentes significados de número racional, bem como desenvolvendo um reportório de estratégias eficazes de resolução de problemas, destacando-se que a aplicação inapropriada de propriedades relativas aos números inteiros teve pouca expressão (Moss, 2005; Moss & Case, 1999).

Para Moss e Case, (1999), a sequência de trabalho com os números racionais *percentagem - numeral decimal - fração* deve valorizar: 1) a construção de um significado apoiado na natureza proporcional dos números racionais; 2) a mobilização dos conhecimentos de números inteiros, destacando as diferenças com os números racionais; 3) quantidades contínuas, num significado de medida, em detrimento de quantidades discretas, destacando as relações entre as diversas representações; 4) o uso de números de referência, bem como outras estratégias espontâneas de resolução (metades sucessivas ou partição em 10 e iteração), apelando ao sentido de número; e 5) o uso de representações com uma forte componente visual, como forma de explicitar a relação entre quantidades proporcionais e representações simbólicas. No seu entender, esta sequência contribui para "uma compreensão aprofundada do sistema de números racionais como um todo" (Moss & Case, 1999, p. 142), desde o início do estudo deste conjunto numérico (Lembke & Reys, 1994; Moss & Case, 1999).

Com efeito, incluir a percentagem na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos parece fazer sentido, quer no âmbito do estudo dos números racionais, quer como forma de antecipar a construção de um conhecimento conceptual de percentagem, dando significado, como refere Parker (2004), à relação proporcional que a percentagem oferece, bem como à capacidade de se movimentar entre representações simbólicas mobilizando a mais apropriada a cada situação (Behr et al., 1983).

3 Considerações Metodológicas numa Investigação Baseada em Design

Compreender é finalidade última desta investigação, que se assume como qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) num paradigma interpretativo (Eisenhart, 1988). Em concreto, pretende compreende a relação entre os processos de aprendizagem dos alunos, numa etapa inicial do estudo dos números racionais, e os meios que os suportam, no sentido de construir conhecimento fundamentado e valioso que permita desencadear essa aprendizagem. Considerando esta finalidade, a IBD (Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016) apresenta-se como uma modalidade de investigação adequada para desenvolver este estudo, dado que exige um comprometimento para compreender como transformar ideias teóricas sobre o ensino e a aprendizagem em aprendizagem efetiva na prática (Design-Based Research Collective, 2003). O fundamento por esta opção ganha sentido à medida que se apresentam e discutem as características da IBD de forma situada neste estudo.

Construção teórica em inter-relação com a prática: conjetura e princípios de design

Foi através de uma IBD que este estudo se concretizou, uma vez que esta modalidade de investigação permite estudar os processos de aprendizagem de um dado tópico matemático, bem como a forma de os promover, no ambiente natural onde esses processos acontecem – a sala de aula (Gravemeijer & Van Earde, 2009; Ponte et al., 2016). Este foco na compreensão traduz-se numa preocupação de construção teórica, por parte da IBD, que conduz ao desenvolvimento de teorias sobre os processos de aprendizagem e sobre os meios que os suportam (Gravemeijer & Cobb, 2006). Na IBD as teorias que se constroem são modestas e locais, na medida em que são situadas num tópico matemático específico e num dado contexto de aprendizagem, como esclarecem Gravemeijer e Van Earde (2009), mas pretendem ser representativas de fenómenos mais abrangentes.

Neste estudo, a teoria local em construção diz respeito a uma etapa inicial da aprendizagem dos números racionais, no contexto particular de uma turma, e tem por base o quadro conceptual discutido na *secção 2*, traduzindo-se, de forma sucinta, na seguinte conjetura inicial, que se foi refinando e aperfeiçoando no decurso do estudo (Confrey & Lachance, 2000):

No tópico dos números racionais, um trabalho apoiado numa sequência de tarefas, que privilegia a percentagem e a subsequente inter-relação com as outras representações (decimal e fração), gera aprendizagens neste conjunto numérico, à medida que os alunos participam na atividade social da sala de aula e constroem significados partilhados, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Esta conjetura tem subjacente a compreensão do ambiente de aprendizagem no seu todo, isto é, atende à sua complexidade, o que traduz uma das características da dimensão teórica da IBD, como referem Cobb et al. (2003). Estes autores convocam a metáfora da *ecologia de aprendizagem* para conceptualizar os ambientes de aprendizagem como sistemas interativos que envolvem a relação entre múltiplos elementos, e não como um conjunto de fatores isolados que os influenciam. Elementos esses, sociais e culturais, que, nomeadamente neste estudo, dizem respeito às tarefas em que os alunos se envolvem, às relações dialógicas que se estabelecem na interação em torno da sua resolução, às normas sociais e sociomatemáticas que regulam essa interação e a participação, bem como às representações e modelos que são mobilizados e construídos (Cobb, Jackson, & Dunlap, 2016; Gravemeijer & Cobb, 2006). Esta característica da IBD evidencia o seu forte cunho interpretativo, na medida em que tem, na sua essência, a ideia de que a aprendizagem da Matemática é uma experiência social de construção de significados, em que atividade, contexto e significado são inextricáveis (Eisenhart, 1988). Por seu lado, os processos de aprendizagem são interpretados na IBD de forma ampla, abrangendo uma dimensão de conhecimento matemático, mas também uma dimensão pedagógica, que se foca na compreensão da evolução das práticas sociais da sala de aula, numa articulação entre os diversos elementos da ecologia de aprendizagem (Cobb et al., 2003). Consequentemente, a definição da conjetura neste estudo surge alicerçada nestas duas dimensões, de conteúdo e pedagógica, cada uma reunindo princípios que informaram a preparação do design desta investigação (Cobb et al., 2003; Herrington & Reeves, 2011).

Esses princípios são, por um lado, específicos do conteúdo matemático, focando-se na resposta à pergunta *O quê?*, isto é, o que deve ser ensinado e que os alunos devem aprender e que se apresentam em cinco ideias chave: C1) desenvolver o sentido de número, na construção de relações e conceitos relativos aos números racionais; C2) privilegiar inicialmente a percentagem, a que se segue o numeral decimal e posteriormente a fração, numa articulação entrecruzada entre estas representações; C3) apoiar as estratégias de cálculo na estrutura conceptual dos números inteiros; C4) suportar a construção de modelos nas representações ativas, icónicas, simbólicas e na linguagem oral e escrita, partindo dos conhecimentos intuitivos e informais dos alunos; e C5) privilegiar tarefas que envolvam os significados de medida e razão, tendo em vista o desenvolvimento de relações multiplicativas e de capacidades associadas ao raciocínio proporcional. Os princípios, por outro lado, remetem para uma dimensão pedagógica, cuja preocupação é o *Como?*, que dizem respeito à forma como esse conteúdo pode ser trabalhado na sala de aula (Confrey & Lachance, 2000), que se organizam em torno de cinco ideias-chave que destacam a importância de: P1) escolher contextos significativos e relacionados com as vivências dos alunos; P2) construir tarefas tendo em vista a construção de modelos pelos alunos; P3) promover a realização das tarefas de acordo com uma abordagem exploratória, valorizando as discussões coletivas; P4) promover a aprendizagem comparticipada, por meio da interação e da negociação de significados e P5) privilegiar a compreensão dos conceitos em detrimento da mecanização de regras e procedimentos.

Tabela 1
Princípios de design iniciais.

Princípios de conteúdo matemático	**Princípios pedagógicos**
C1. Desenvolver o sentido de número, na construção de relações e conceitos relativos aos números racionais.	**P1.** Escolher contextos significativos e relacionados com as vivências dos alunos.
C2. Privilegiar inicialmente a percentagem, a que se segue o numeral decimal e posteriormente a fração, numa articulação entrecruzada entre estas representações.	**P2.** Construir tarefas tendo em vista a construção de modelos pelos alunos.
C3. Apoiar as estratégias de cálculo na estrutura conceptual dos números inteiros.	**P3.** Promover a realização de tarefas de acordo com uma abordagem exploratória, valorizando as discussões coletivas.
C4. Suportar a construção de modelos nas representações ativas, icónicas, simbólicas e na linguagem oral e escrita, partindo dos conhecimentos intuitivos e informais dos alunos.	**P4.** Promover a aprendizagem comparticipada, por meio da interação e da negociação de significados.
C5. Privilegiar tarefas que envolvam os significados de medida e de razão, tendo em vista o desenvolvimento de relações multiplicativas e de capacidades associadas a um raciocínio proporcional.	**P5.** Privilegiar a compreensão dos conceitos em detrimento da mecanização de regras e procedimentos.

A conjetura e os princípios apresentados (Tabela 1) explicitam a proposição teórica da IBD, local e situada neste estudo, evidenciando a sua relação com a prática, que foi operacionalizada através da construção e realização de uma experiência de ensino na sala de aula (Cobb et al., 2016; Gravemeijer & Cobb, 2006). É deste modo que a construção teórica da IBD acontece em estreita relação com o trabalho que se desenvolve na prática, assumindo um carácter de intervenção e experimentação (Bakker & Van Eerde, 2012). Como refere Simon (2000), a experiência de ensino é uma "metodologia viva" que é desenvolvida para a exploração e explicação da atividade matemática dos alunos (p. 274). Trata-se de um instrumento conceptual usado para compreender o progresso que os alunos fazem ao longo de um dado período de tempo, que permite atender, simultaneamente, a aspetos práticos e teóricos (Simon, 2000). O desenvolvimento de uma experiência de ensino na sala de aula permite desenvolver constructos teóricos a partir da necessidade de dar sentido ao que lá se passa, mantendo os elementos da sua ecologia, mas também influenciando a construção do conhecimento matemático dos alunos (Cobb, 2000; Simon, 2000).

A intervenção através de uma experiência de ensino na sala de aula

Uma experiência de ensino em IBD é pensada para dar resposta a características emergentes específicas de uma dada situação de aprendizagem (Design-Based Research Collective, 2003). A experiência de ensino na sala de aula levada a cabo neste estudo, como sugere, aconteceu no ambiente natural de aprendizagem, a sala de aula.

Participantes e situação de aprendizagem. A situação de aprendizagem em estudo remete para a ecologia de aprendizagem da sala de aula de uma turma, numa escola pública de Lisboa, em que eu era professora. O facto ser professora da turma, de estar imersa na situação de aprendizagem, de conhecer bem o percurso dos alunos e de ter, com cada um, uma relação de confiança e afeto justificam a escolha da turma. Os elementos desta turma, um total de 22 alunos e eu, como professora, são os participantes do estudo. Todos os alunos tinham português como língua materna e dez beneficiavam de apoio social escolar. Eram 12 rapazes e 10 raparigas, seis com necessidades educativas especiais (decreto-lei n.º 3/2008), dois dos quais de carácter permanente. A sala de aula possuía um quadro interativo multimédia (QIM) e acesso à internet sem fios. Todos os alunos possuíam Magalhães[5] e usavam-nos na sala de aula desde o 1.º ano de escolaridade. A experiência de ensino decorreu na sala de aula desta turma

[5] Computador portátil pessoal distribuído aos alunos, até 2011, ao abrigo da Iniciativa Governamental "e-Escolinha".

durante o terceiro período letivo do 3.º ano e o primeiro período do 4.º ano, tendo sido consideradas neste estudo 20 aulas.

A preparação de uma experiência de ensino na sala de aula, numa IBD, tem como ponto de partida as características reais da situação de aprendizagem que se pretende estudar (Cobb et al., 2003). Deste modo importa explicitar as características da turma envolvida neste estudo, antes do seu início, de modo a compreender os elementos de base da sua ecologia de aprendizagem, em que se fundeou a construção da experiência de ensino.

No que respeita ao conteúdo matemático, a turma acompanhou o Programa de Matemática à data em vigor (ME, 2007), tendo a sua atividade sido desencadeada com o propósito norteador de desenvolvimento das "capacidades de resolução de problemas, de raciocínio e de comunicação matemáticos e de as usar na construção, consolidação e mobilização dos conhecimentos matemáticos" (p. 29). Especificamente no tema Números e Operações, o trabalho teve como ideia central o desenvolvimento nos alunos de sentido de número. Uma primeira abordagem intuitiva aos números racionais teve lugar no 2.º ano, recorrendo sobretudo a situações de partilha equitativa, num significado de quociente, mas também a situações de parte-todo, explorando-se a representação em forma de fração. O numeral decimal e a percentagem não foram representações trabalhadas antes do início do estudo. O aproveitamento da turma em Matemática era bastante satisfatório, embora houvesse situações de maior fragilidade, devidamente documentadas no projeto curricular da turma. Os alunos em geral revelavam confiança, gosto e predisposição para a aprendizagem da Matemática.

Relativamente à dimensão pedagógica, a atividade da turma apoiou-se no modelo pedagógico do Movimento da Escola Moderna, que assenta em três subsistemas integrados de organização do trabalho de aprendizagem: os circuitos de comunicação, como dispositivo cultural que promove as aprendizagens em interação comunicativa; as estruturas de cooperação educativa, como mecanismo em que os alunos trabalham juntos para alcançarem objetivos comuns; e a participação democrática direta, como construção de cidadania, tomando parte na gestão e avaliação do currículo e na construção de normas de vida da turma, acrescentando sentido social à comunicação e à cooperação (Niza, 1998). Esta organização do trabalho da turma permitia que todos os alunos tivessem oportunidade de participar na prática matemática da comunidade de aprendizagem da sala de aula e que crescessem matematicamente (Cobb & Bowers, 1999). Através da diferenciação pedagógica, bem como da adequação do trabalho curricular às situações de diferença vividas por alguns alunos, foi possível construir uma resposta adequada à diversidade de alunos, promovendo oportunidades de aprendizagem efetiva para todos os alunos (Niza, 2004).

Em relação à atividade matemática da turma em Números e Operações, esta acontecia nos momentos de Matemática e Cálculo mental, cuja dinâmica tinha por base um ensino-aprendizagem exploratório (Ponte, 2005). Nestes momentos, os alunos eram introduzidos numa tarefa matemática, resolviam-na em pequenos grupos, ou individualmente no caso das tarefas de cálculo mental, seguindo-se a sua discussão e sistematização em coletivo. Nos momentos de Tempo de Estudo Autónomo os alunos tinham ainda oportunidade de reforçar o trabalho realizado, nomeadamente em Números e Operações, guiados pelo seu Plano Individual de Trabalho, como instrumento organizador do seu percurso individual e de compromisso social perante a turma, elaborado a partir da avaliação semanal realizada em Conselho de Cooperação (Niza, 1998; Santana, 2007). Nestes momentos de estudo diário, os alunos consolidavam conceitos e treinavam procedimentos, apoiados por colegas ou pela professora, individualmente. A periodicidade destes momentos decorria em função da agenda semanal da turma estabelecida (Figura 1).

	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira
9:00	Conselho de Cooperação Tarefas/Plano do dia	Tarefas/Plano do dia	Tarefas/Plano do dia	Tarefas/Plano do dia	Tarefas/Plano do dia
9:15		Apresentação de produções Cálculo mental	Apresentação de produções/ Cálculo mental	Apresentação de produções Cálculo mental	Apresentação de produções Cálculo mental
9:45	Apresentação de produções	Estudo do Meio/ Projetos	Matemática Números e Operações	Matemática OTD	Português Gramática /Ortografia
10:30	Intervalo				
11:00	Matemática Números e Operações	Português Trabalho de texto	Matemática Números e Operações	Tempo de Estudo Autónomo	Tempo de Estudo Autónomo
12:00			Tempo de Estudo Autónomo	Português "Os Livros e a Leitura"	Estudo do Meio/ Projetos
12:30	Almoço				
14:00	Português Produção Escrita/Correspondência	Matemática Geometria/Medida	Português Trabalho de texto	Matemática Geometria/Medida	Estudo do Meio/ Projetos
15:00	Tempo de Estudo Autónomo	Tempo de Estudo Autónomo	Expressões	Estudo do Meio/ Projetos	Conselho de Cooperação
15:45	Tarefas/Avaliação do dia	Tarefas/Avaliação do dia	Tarefas/Avaliação do dia	Tarefas/Avaliação do dia	Tarefas/Avaliação do dia
16:00	Lanche / Atividades de Enriquecimento Curricular				

Figura 1. Agenda semanal da turma envolvida neste estudo.

Numa experiência de ensino, o termo *ensino* remete para um objeto de estudo que é um conteúdo curricular, como refere Kelly (2004). Nesta investigação, em que se pretende compreender o contributo que a percentagem pode dar na aprendizagem dos números racionais, numa etapa inicial da escolaridade, importava perceber como se relacionavam os alunos com a percentagem, tendo por base a sua experiência quotidiana, de modo a poder antecipar uma trajetória de aprendizagem tão natural e próxima da turma em estudo quanto possível (Simon, 1995). O estudo de diagnóstico realizado na turma, nesta etapa de preparação da experiência de ensino, permitiu perceber que os alunos possuíam uma intuição relativa à noção de percentagem, parecendo apoiada pelas suas vivências fora da escola. Trata-se de um conhecimento informal que tem por base o conhecimento dos números inteiros de 0 a 100, aliado a uma perceção proporcional intuitiva. Este conhecimento permitiu que os alunos interpretassem a percentagem, sobretudo quando foram utilizadas representações visuais familiares, associadas à utilização do computador e dos telemóveis no seu dia-a-dia (Artigo IV).

Trajetória de aprendizagem antecipada. Caracterizada a situação de aprendizagem, foi traçada uma trajetória hipotética de aprendizagem (Simon, 1995), com enfoque no conteúdo matemático em estudo. Esta trajetória foi suportada pela dinâmica pedagógica que os elementos da ecologia de aprendizagem, específicos da sala de aula em estudo, ofereciam, tendo como referência a teoria local em construção anteriormente apresentada (Gravemeijer & Van Earde, 2009). Trata-se de uma trajetória que antecipava os conteúdos e processos de aprendizagem, relativos à aprendizagem dos números racionais, que os alunos da turma podiam vir a construir quando envolvidos numa sequência de tarefas pensada para ser realizada na sala de aula com esse fim (Gravemeijer & Van Earde, 2009). Dado que cada aluno responde de forma diferente em cada momento, decidiu-se neste estudo optar por antecipar a aprendizagem matemática dos alunos da turma enquanto comunidade de aprendizagem de Matemática, isto é, como um todo coletivo (Cobb, 1998).

A trajetória de aprendizagem antecipada foi inspirada no currículo experimental de Moss e Case (1999) que se organiza em três etapas. Começa por privilegiar a percentagem "como representação inicial dos números racionais" (Moss, 2005, p. 334) num significado de medida. Seguidamente, é introduzida a representação decimal, fazendo-a decorrer da percentagem. E, por último, é trabalhada a fração na sua relação com a percentagem e o numeral decimal. A trajetória de aprendizagem antecipada neste estudo, esquematizada na Figura 2, foi estruturada considerando estas três etapas. No entanto, foi construída uma sequência de níveis de acrescida inter-relação de conceitos, de acordo com o quadro conceptual apresentado na *secção 2* deste *kappa* e indo ao encontro da ideia de níveis subjacente à perspetiva da EMR (Prediger & Pöhler, 2015).

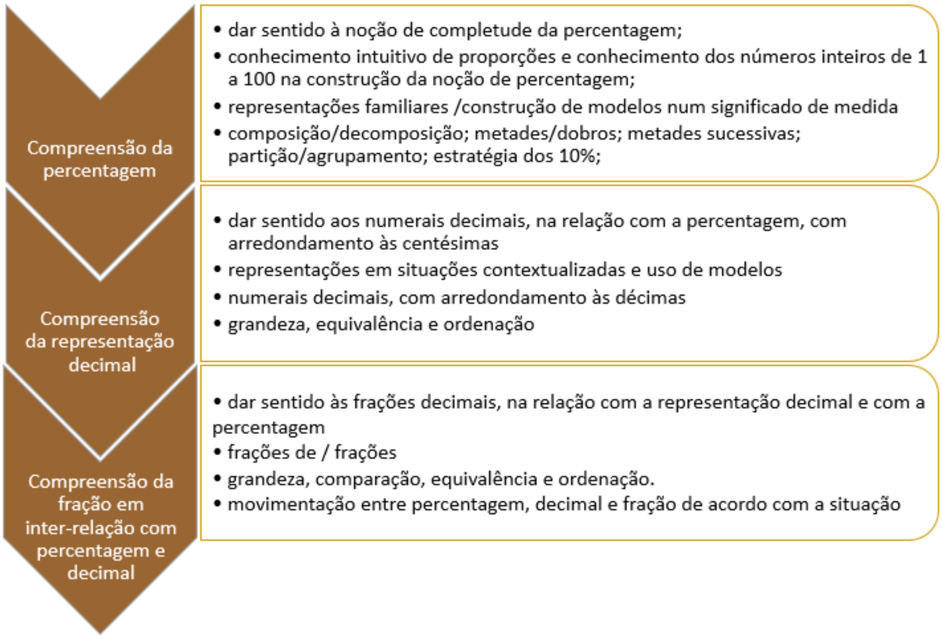


Figura 2. Trajetória hipotética de aprendizagem do conteúdo matemático em estudo.

Importa, no entanto, explicitar que não se tratou de uma sequência linear, nem estanque, apenas se apresenta assim estruturada por uma questão de simplificação da sua leitura. A primeira etapa apontava para um trabalho em torno da compreensão da percentagem, centrado na exploração do sentido de completude, num significado de medida. O conhecimento intuitivo de proporção dos alunos seria mobilizado, bem como os conhecimentos que já possuíam dos números inteiros, sobretudo na exploração da escala de 1 a 100. Apelava ainda à necessidade de construção de modelos, de forma natural, a partir do uso de diversas representações familiares, com uma forte componente visual, ativas e icónicas. Seguia-se depois um trabalho mais quantitativo, envolvendo a mobilização de referência de percentagem. A segunda etapa, numa perspetiva de continuidade, partia do conhecimento de percentagem para introduzir a representação decimal, com arredondamento às centésimas, como forma de representar a percentagem da distância entre dois números inteiros, em contextos de medição de distâncias e alturas, mobilizando a reta numérica dupla. O arredondamento às décimas surgia de seguida, como forma de agrupamento, focando a compreensão das relações da estrutura do sistema de numeração decimal. A terceira etapa, estreitamente ligada à anterior, remetia para a compreensão da fração decimal, em articulação com o numeral decimal e apelando a relações de equivalência em contextos reais e familiares aos alunos. A compreensão da fração decorreria da sua relação com a representação decimal e a percentagem, sendo mobilizadas diferentes representações, procurando a construção de estratégias de resolução de problemas que permitissem uma tomada de decisão consciente na escolha da representação mais adequada.

Esta trajetória de aprendizagem, que se antecipou alicerçada na conjetura e nos princípios de design delineados, operacionalizou-se numa sequência de tarefas, que, embora pensada à partida nas suas linhas gerais, foi sendo efetivamente construída ao longo da condução da experiência de ensino, a partir da realidade dos alunos, considerando a cultura da sala de aula em estudo (Cobb, 2000). A análise preliminar realizada no fim de cada aula, à medida que as tarefas iam sendo realizadas e se ia analisando a participação e a aprendizagem que efetivamente se observava, originou, por vezes, alterações no que houvera sido antecipado para as sessões seguintes (Bakker & Van Eerde, 2012).

O carácter cíclico de intervenção e revisão do design

Numa IBD, o processo de conduzir uma experiência de ensino é cíclico, envolvendo um processo iterativo de antecipação, intervenção e revisão (Gravemeijer, 1994; Prediger, Gravemeijer, & Confrey, 2015). Gravemeijer (1994) destaca que "o que é inventado atrás da secretária é colocado imediatamente em prática e o que acontece na sala de aula é consequentemente analisado" (p. 449), sendo os resultados desta análise usados no processo de revisão teórica, traduzindo-se numa reconstrução da teoria em ação (Gravemeijer, 1994).

Este carácter cíclico pode ser considerado a vários níveis. A IBD que se desenvolve neste estudo tem na sua base o microciclo, em que a análise do que acontece na sala de aula numa tarefa ou conjunto de tarefas, em função do que foi antecipado, informa o planeamento das tarefas seguintes a desenvolver na sala de aula, com a mesma turma, na mesma experiência de ensino (Cobb, 2000; Cobb et al., 2016). Em concreto, a condução da experiência de ensino foi estruturada em três microciclos, apoiados, respetivamente, nas três etapas da trajetória de aprendizagem descritos. O primeiro microciclo remeteu para a *compreensão da percentagem*, o segundo retomou o trabalho do primeiro, conduzindo no sentido da *compreensão da representação decimal* e o terceiro procurou a *compreensão da fração*, suportada pela percentagem e na representação em numeral decimal. Cada um destes microciclos, norteado pelas grandes ideias subjacentes a cada etapa, envolveu três fases: (i) preparação, que envolveu a construção e/ou ajustamento de tarefas, antecipando situações que pudessem ocorrer; (ii) condução na sala de aula; e, posteriormente, (iii) análise, que permitiu cruzar o que tinha sido planificado com o que se observou, no que respeita ao processo de participação e aprendizagem dos alunos, conduzindo à revisão de aspetos específicos do design (Gravemeijer & Cobb, 2006). Estas fases traduzem uma sequência iterativa que permitiu testar, aperfeiçoar e compreender os fenómenos em estudo.

Os três microciclos integram um único ciclo neste estudo (Figura 3), o que traduz a natureza cíclica da metodologia a um nível mais abrangente (Gravemeijer & Cobb, 2006), envolvendo o planeamento do design, onde se inclui também a preparação da experiência de ensino, a condução da experiência de ensino e a análise retrospetiva de todos os dados gerados no seu decurso (Cobb, 2000; Prediger et al., 2015).

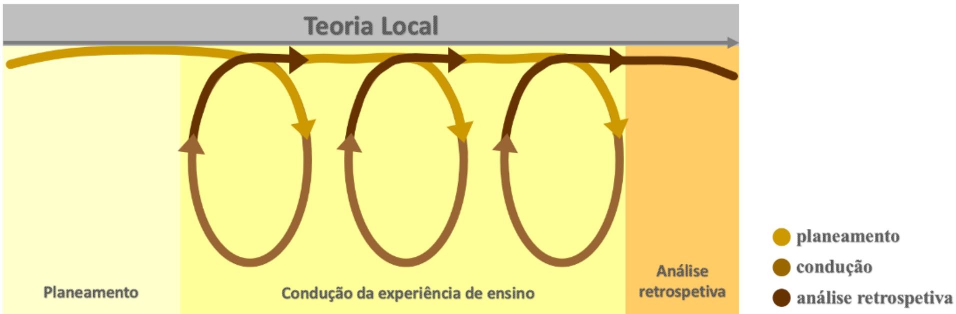


Figura 3. Ciclo de intervenção e revisão do design deste estudo.

Este carácter cíclico, conjuntamente com a análise retrospetiva, permitiu situar a aprendizagem, e a ecologia da sala de aula que a suporta, num contexto teórico mais abrangente, que se traduz num refinamento da teoria local, que se constrói empiricamente fundamentada (Cobb, 2000; Gravemeijer & Cobb, 2006).

Processos de recolha e de análise dos dados. Ao longo da preparação e condução da experiência de ensino, documentaram-se os processos de aprendizagem que aconteciam na turma, bem como os elementos da ecologia de aprendizagem da sala de aula em estudo, recorrendo a dados qualitativos, que foram recolhidos através de múltiplos processos. A escolha dos processos de recolha de dados foi pensada de modo a permitir abordar as questões teóricas na sua relação com a situação de aprendizagem em estudo (Cobb et al., 2016). Sendo a própria situação de aprendizagem a fonte dos dados, os dados recolhidos através de situação de teste, individual e descontextualizada, não pareceram promissores como base para a análise que se pretendia realizar (Greeno, 1997). Deste modo, dada a natureza desta IBD, a recolha de dados envolveu a gravação áudio e vídeo das aulas, nos momentos de discussão coletiva das tarefas, o que permitiu revisitar esses momentos e realizar a análise a partir das transcrições. Envolveu também a recolha documental, que incluiu as produções dos alunos, individuais e de turma, e o projeto curricular da turma, documento de gestão curricular que documentava as especificidades da turma, bem como o percurso de cada aluno. A recolha de dados decorreu ainda da observação participante e do diário de bordo, onde como investigadora, fui registando, diariamente, elementos de caracter descritivo e reflexivo. Esta variedade de processos de recolha de dados permitiu a triangulação dos dados, assegurando uma descrição o mais fiel e completa possível dos momentos em análise, acautelando uma possível implicação excessiva minha, enquanto investigadora e professora da turma (Confrey & Lachance, 2000).

A análise dos dados neste estudo, enquadrada numa perspetiva sociocultural da aprendizagem, e situada na sala de aula em estudo, é de natureza qualitativa e tem como unidade de análise a turma, isto é, a atividade dos alunos, mediada pela atividade da professora, em torno das tarefas propostas, com os recursos à disposição, reconhecendo os elementos da ecologia de aprendizagem da sala de aula da turma como parte integrante dessa unidade (Rogoff, 1995; Saxe, 2002). Deste modo, a unidade de análise assume uma natureza coletiva, mesmo quando a análise recai sobre a ação de um aluno, dado que esta se encontra inerentemente imersa na situação cultural e social da sala de aula em que acontece (Wertsch, 1994).

Ao longo da experiência de ensino foram feitos ajustamentos na estrutura de participação na sala de aula e nas tarefas propostas, considerando a observação da atividade individual dos alunos, de modo a atender às diferenças entre o que alguns alunos conseguiram efetivamente fazer e as práticas de sala de aula que iam sendo construídas na turma. Estes ajustamentos não resultavam da interpretação das características cognitivas individuais, mas sim das características da sua forma de participação na construção das práticas matemáticas da turma (Cobb & Bowers, 1999; Greeno, 1997). A interpretação da atividade dos alunos nesta perspetiva, como explicitado no quadro conceptual que suporta este estudo, prospetiva as dificuldades e sucessos na turma não em função das características dos alunos individualmente nem das tarefas desenvolvidas, mas sim na relação entre o que alunos, mediados pela ação da professora, coconstruíram no decurso da interação que estabeleceram em torno das práticas matemáticas, tendo por base os elementos da ecologia de aprendizagem da sala de aula. Aliás, esta perspetiva da aprendizagem, encerrando em si uma forte dimensão ética de compromisso com todos os alunos da turma, direcionou a análise neste estudo.

Assim, a condução desta análise acontece não no sentido de identificar conhecimentos ou capacidades adquiridos individualmente, mas sim de os considerar em termos de participação na construção de práticas matemáticas, social e culturalmente situadas, em que esses conhecimentos e capacidades ganham significado (Cobb & Bowers, 1999; Greeno, 1997; Rogoff, 1995). Para além disso, embora a condução desta experiência de ensino permitisse estudar a perspetiva do professor, na forma como apoiava a aprendizagem matemática dos alunos, à medida que interagia com eles, como refere Cobb (2000), neste estudo, optou-se por focar a atenção na interação na turma, sem analisar em particular o papel do professor. Esta decisão aconteceu, por um lado, pela necessidade de se focar o estudo, de modo a poder aprofundar a compreensão dos fenómenos, e, por outro, pelo facto de, como professora da turma, ser também a investigadora, um constrangimento que foi assumido desde o início do estudo.

A análise dos dados. A análise neste estudo, qualitativa e de cunho descritivo, decorreu de forma contínua ao longo de todo o processo investigativo ((Bogdan & Biklen, 1994). Primeiro, foi realizada uma análise preliminar, durante a condução da experiência de ensino (Confrey & Lachance, 2000) e, depois, uma análise retrospetiva após a condução da experiência de ensino (Cobb et al., 2016). Esta análise foi apoiada pelo software NVivo, que facilitou o manuseamento dos dados e o levantamento de categorias, tendo permitido desenvolver um processo de análise mais sistemático.

A análise preliminar aconteceu depois da realização de cada tarefa e no fim de cada microciclo, o que permitiu tomar decisões sobre as etapas seguintes da experiência de ensino em curso. Foi um processo que atendeu ao que se observou durante a participação da turma na resolução e discussão coletiva de cada tarefa ou conjunto de tarefas, projetando os resultados dessa análise nas tarefas pensadas para a etapa seguinte. Implicou adaptações ao nível das tarefas, nomeadamente a introdução de novas tarefas, como na situação de sistematizar 10% como estratégia de cálculo, adaptações ao nível das representações privilegiadas, como o uso de uma grelha de escrita de números, na representação decimal, para apoiar a identificação do nome da ordem associada a cada valor de posição, usando o MAB (*Multibase Arithmetic Blocks*), e a adaptações na dinâmica de trabalho na sala de aula, como o agendamento de tempos específicos, no Tempo de Estudo Autónomo, para o apoio individualizado a alunos num dado aspeto trabalhado.

A análise retrospetiva envolveu um novo olhar sobre todos os dados, procurando construir uma narrativa coerente e situada dos acontecimentos relativos a cada tarefa, relacionando os três microciclos de design. Pretendia-se que evidenciasse a aprendizagem dos alunos e os meios que a apoiaram e organizaram, produzindo refinamentos da conjetura, no sentido da revisão emergente da teoria de aprendizagem local (Gravemeijer & Van Earde, 2009; Shavelson, Phillips, Towne, & Feuer, 2003). Tratou-se de uma interpretação contextualizada dos dados, que envolveu revisitar todo o conjunto de dados e destacar os dados considerados significativos para a compreensão do fenómeno em estudo, permitindo chegar a uma sequência otimizada de tarefas em relação ao que fora antecipado (Gravemeijer & Cobb, 2006). Este processo de análise retrospetiva foi assistido pela discussão com os orientadores deste estudo, com outros investigadores nos seminários de doutoramento no Instituto de Educação e por outros investigadores em encontros de Educação Matemática, nacionais e internacionais, o que conduziu a uma explicitação e enriquecimento dos processos de análise (Cobb & Gravemeijer, 2008) e à publicação, entre outros, dos quatro artigos científicos que integram este trabalho.

Neste processo de análise retrospetiva foi usada a indução analítica como estratégia de análise de conteúdo de modo a permitir a identificação de categorias a partir dos dados (Goetz & LeCompte, 1984). Numa primeira etapa, os diferentes tipos de dados referentes a cada tarefa foram organizados, tendo como pano de fundo a conjetura que norteia o estudo. Depois, o conjunto de dados foi percorrido tendo em vista encontrar unidades de sentido, intuitivas e informais, para os acontecimentos e de as relacionar entre si, através da estratégia de comparação sistemática (Goetz & LeCompte, 1984). Esta estratégia permitiu que todos os elementos da ecologia de aprendizagem da sala de aula do conjunto de dados associado a uma dada tarefa, fossem sendo comparados com os do conjunto de dados referente a tarefas anteriores, o que possibilitou a descoberta de novas relações e a emersão de novas categorias. Posteriormente, recorreu-se à estratégia de análise tipológica (Goetz & LeCompte, 1984). Nesta etapa, foi necessário voltar a olhar todo o conjunto de dados e dividi-lo em categorias, desta vez baseadas em tipologias predeterminadas geradas a partir do quadro conceptual. Esta estratégia procurou identificar evidências da aprendizagem dos alunos, destacando padrões e relações, atribuindo-lhes um significado ancorado no quadro conceptual que suporta este estudo. O sistema de codificação resultante da conjugação destas duas dimensões da análise retrospetiva teve por base um processo de redefinição e manipulação de categorias. O cruzamento destas estratégias de análise de dados permitiu o refinamento dos dados e a sua redução, tendo em vista o objetivo de cada um dos artigos produzidos.

O quadro de análise a que se chegou envolve dois níveis de análise (Cobb et al., 2003) atendendo à dimensão de conteúdo matemático e à dimensão pedagógica da conjetura, que embora sejam inextrincáveis do ponto de vista da aprendizagem, foram analisados de forma distinta, por uma questão de simplificação da própria análise. Em relação à dimensão do conteúdo matemático, com enfoque numa compreensão dos números racionais alicerçada na percentagem, a análise procurou evidências de construção de um conhecimento conceptual de número racional, numa perspetiva de sentido de número, remetendo para categorias que envolviam conceitos e relações numéricas mobilizados e estratégias de manipulação dos números construídas (Artigos I a IV). Uma análise mais focada na percentagem teve por base categorias que descrevem evidências de construção de um conhecimento conceptual específico desta representação (Artigo II). Relativamente ao domínio pedagógico, a análise requereu considerar a atividade da comunidade de aprendizagem, analisando a forma como os alunos se envolviam na participação com os outros, à medida que juntos constituíram e foram constituídos pela atividade sociocultural específica da sala de aula em Matemática. Focou-se a análise para a interpretação das ações dialógicas na turma, na construção de práticas matemáticas, com vista à identificação das normas sociais e sociomatemáticas que regulavam a interação nesses momentos (Artigo III). Este quadro de análise procurou encontrar evidências que documentassem a gramática argumentativa deste estudo (Cobb et al., 2016), ou seja, assegurando a compreensão dos processos de aprendizagem e os meios que os suportam na sua relação com as decisões tomadas e as características de design desta IBD, interpretando a transformação na participação dos alunos, como reorganização emergente de conhecimento anterior e identificando os princípios de design que apoiaram os processos de aprendizagem na sua relação com a ecologia da sala de aula em estudo.

Responsabilidade ética

Qualquer investigação exige um comprometimento, por parte do investigador, para agir, permanentemente, de forma ética. Num estudo desta natureza, em que a investigadora é também professora da turma, as inquietações relativas aos aspetos éticos ganharam especial relevância, pois o nível de envolvimento com os participantes era elevado e havia conhecimento prévio da situação que acarretava implicações inequívocas (Mercer, 2007). Para além disso, quando se conduz uma investigação que acontece no local onde se trabalha e em que o investigador assume diferentes papéis, alguns dos dilemas que surgem podem não ser detetados, desde logo, numa primeira reflexão sobre as questões éticas (Floyd & Arthur, 2012).

Nesta perspetiva, houve necessidade de garantir um comprometimento ético perante a investigação a dois níveis. Por um lado, uma preocupação em assegurar o respeito pelos princípios e normas dos códigos de ética da comunidade, nacional e internacional, de investigadores em educação (AERA, 2011; BERA, 2011; IE – Lisboa, 2016; SPCE, 2014). E, por outro, uma atenção para questões de sensibilidade intuitiva, que nem sempre se resolvem pela aplicação de um código, e que implicam um comprometimento ético interno por parte do investigador, sobretudo numa situação como a que se viveu neste estudo, em que me encontra emocionalmente ligada aos participantes (Floyd & Arthur, 2012). O desafio de antecipar estas questões aconteceu de forma consciente, desde o início da fase de planeamento da investigação, e acompanhou todo o processo investigativo. Nesta reflexão foram envolvidos quer elementos da comunidade profissional (alunos, pais e encarregados de educação, colegas, coordenador da escola, diretor do agrupamento), quer da comunidade de investigação (orientadores, colegas de doutoramento, participantes em encontros da especialidade). E foi desta forma comparticipada que aconteceu a explicitação das inquietações, tendo sido possível encontrar a resposta adequada para os dilemas que foram surgindo associados ao facto de ser professora da turma e ser parte da situação de aprendizagem em estudo, como a dificuldade em me distanciar dos acontecimentos ou em contaminar a interpretação dos dados com informação prévia (Floyd & Arthur, 2012; Mercer, 2007). No entanto, importa ter presente que nesta investigação existe um grau de subjetividade crítica, que se assume à partida, associado às decisões que são tomadas em cada momento do trabalho.

Uma das ideias-chave, transversal a todos os documentos de regulação deontológica da ação do investigador, é o exigir que os participantes sejam tratados de forma justa, com sensibilidade, dignidade e respeito, pois, só assim, se considera possível manter a integridade da investigação, da comunidade de investigação e de todos aqueles com quem o investigador se relaciona (AERA, 2011; BERA, 2011; IE-ULisboa, 2016; SPCE, 2014). Neste estudo, esta foi uma das principais inquietações.

O duplo papel de professora e investigadora, que me propus assumir, acarretava uma preocupação acrescida com situações potencialmente geradoras de conflito de interesses e de influência indevida (AERA, 2011; IE-ULisboa, 2016; SPCE, 2014). Era inequívoco que a honestidade, transparência e equidade, que pautavam a relação que construíra com os alunos e as famílias, seriam norteadoras do meu trabalho como investigadora, quer ao longo de toda a investigação, quer quando o processo investigativo estivesse concluído. Essa informação foi transmitida aos pais e encarregados de educação numa reunião que decorreu no 1.º período do 3.º ano de escolaridade, em que todos os alunos da turma estavam representados. Nesta reunião foi explicado como se iria processar a recolha de dados, em termos de instrumentos, nomeadamente através de gravações áudio e vídeo, duração e envolvimento dos alunos. Foram ainda dados a conhecer os possíveis benefícios e constrangimentos da investigação, bem como as implicações do duplo papel de professora e investigadora que iria assumir. Os pais e encarregados de educação foram ainda informados que todos os alunos da turma tinham sido convidados a participar no estudo, contudo, ficou claro que esta participação era voluntária, garantindo-se fazer sempre prevalecer as necessidades dos alunos sobre qualquer aspeto do processo investigativo. Por conseguinte, ficou salvaguardado que o consentimento era dado sem coerção, acrescentando-se que não haveria qualquer desvantagem para os alunos que não fossem participantes nesta investigação (IE-ULisboa, 2016; SPCE, 2014). Caso os pais e encarregados de educação o entendessem, poderiam não autorizar a participação ou desistir a meio do processo investigativo, com a garantia de que, enquanto professora da turma, em momento algum, seria posta em causa a oportunidade de participar na construção de práticas matemáticas da comunidade de aprendizagem da sala de aula. Obteve-se assim o consentimento, oral e escrito, de participação de todos os alunos nesta investigação, de forma informada, livre e consciente (AERA, 2011; Cohen, Manion, & Morrison, 2007; IE–UL, 2016). Não obstante, esta situação constituiu-se como eticamente sensível, pois foi necessário garantir que a preocupação, enquanto professora da turma, de ter sempre todos os alunos “em jogo” não pervertia a obtenção deste consentimento.

Ainda de modo a assegurar a proteção dos alunos, das famílias e da comunidade escolar, a garantia da confidencialidade e da privacidade foi também apresentada (IE-ULisboa, 2016; SPCE, 2014). Os pais e encarregados de educação foram informados acerca do modo como a disseminação dos resultados da investigação estava prevista, pelo que, o acesso a informação relativa à investigação ficaria disponível à comunidade de investigadores, bem como a todos os interessados. Alertei ainda para o facto desta situação levantar um constrangimento, que se prende com o anonimato institucional. Embora a escola não fosse identificada nos diversos instrumentos de divulgação da investigação, tal como acontece neste documento, não se conseguiria garantir que não fosse, eventualmente, possível chegar à sua identificação. Esta fragilidade foi partilhada com os pais e encarregados de educação, tendo sido assumido o compromisso de assegurar a proteção da informação confidencial, nomeadamente, garantindo o anonimato dos alunos e a discrição relativamente a características do seu foro pessoal (IE-ULisboa, 2016; SPCE, 2014). Para salvaguardar ainda questões referentes à proteção dos participantes e recolha dos dados, a proposta de investigação foi apreciada pelos órgãos da direção do agrupamento, bem como pela coordenação da escola, tendo sido expressa autorização escrita para que pudesse ser realizada.

4 Artigos

Os artigos nesta IBD

Para obter uma visão geral deste estudo e perceber de que modo os quatro artigos o integram, recorro a uma representação esquemática apoiada numa secção transversal da concha do náutilo (Figura 4).

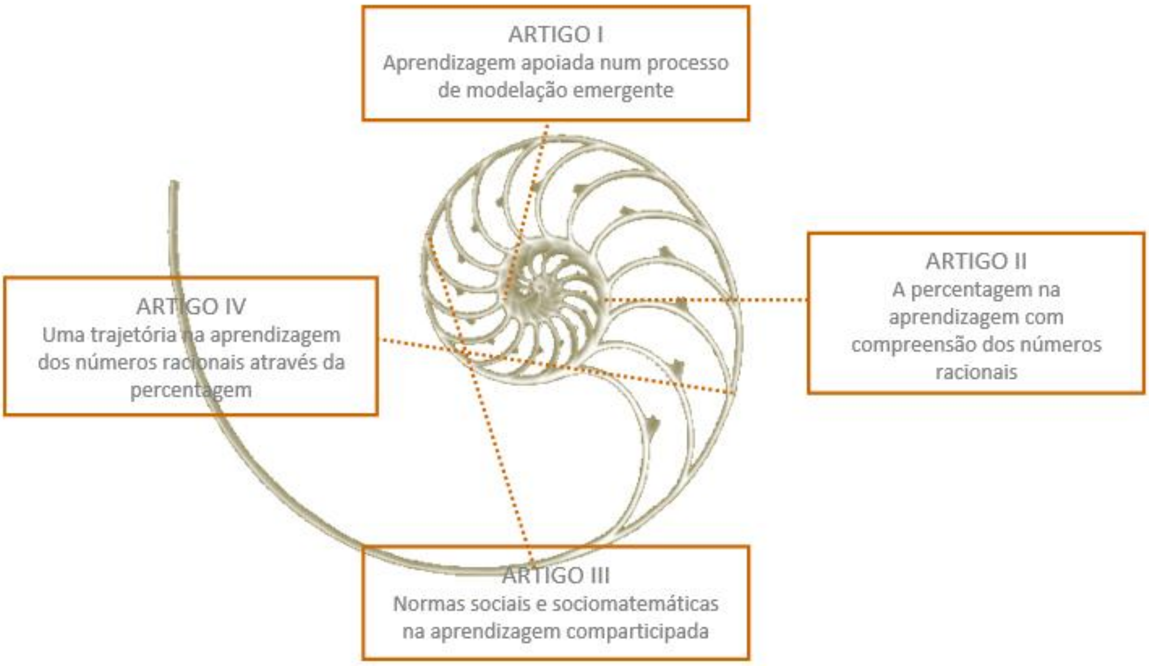


Figura 4. Visão geral do estudo na sua relação com os artigos.

No esquema da Figura 4, na linha curva que forma a espiral, para além de apresentar voltas que se afastam do centro de forma progressiva e regular, cada volta da espiral tem ligações à anterior. Este esquema reúne, como metáfora, duas ideias subjacentes à experiência de ensino realizada neste processo investigativo: a progressão na complexidade e o retomar conhecimentos anteriores na construção de novas aprendizagens. Estas ideias surgem inspiradas na noção de currículo em espiral de Bruner (1960), que assenta em três pressupostos: 1) o facto dos alunos, ao longo da sua escolaridade, revisitarem um mesmo tópico várias vezes; 2) de cada vez que um tópico é revisitado, a complexidade com que é abordado aumenta e 3) a construção das novas aprendizagens relaciona-se com conhecimentos anteriores, que as contextualizam e suportam. É considerando esta noção de currículo em espiral que, neste estudo, cada conceito e processo matemático é abordado e retomado tendo em vista o reforço da sua aprendizagem, através do estabelecimento de relações, progredindo de ideias mais simples para as mais complexas, retomando as mais simples sempre que necessário. Os alunos são encorajados a apelar a conhecimentos anteriores, que já possuem, e a um pensamento intuitivo, para avançarem juntos na construção de novos conhecimentos.

Em simultâneo com a realização da experiência de ensino, tal como previsto numa IDB, foram sendo realizadas “interpretações contínuas da atividade matemática dos alunos e do ambiente de aprendizagem da sala de aula” (Cobb et al., 2016, p. 484), de modo a encontrar explicações para os fenómenos em estudo. Estas interpretações foram retomadas posteriormente no processo de análise retrospetiva do estudo, associado à última etapa desta investigação. Esquematicamente, a análise retrospetiva pode ser interpretada como uma espiral coincidente com a realização da experiência de ensino e da qual emergem os quatro artigos, de modo sequenciado. O Artigo I, ao focar-se na compreensão do papel que a modelação emergente assume, apoiada em múltiplas representações, conduziu à necessidade de aprofundar a compreensão da construção da natureza relacional da percentagem. Deste modo, o Artigo II vai centrar-se na compreensão que os alunos constroem da natureza relacional da percentagem, bem como no modo como a percentagem pode contribuir para uma aprendizagem dos números racionais. O processo de compreensão de percentagem surge como uma construção cultural e social, cujo estudo é aprofundado no Artigo III, que se foca na compreensão do modo como as normas sociais e sociomatemáticas da cultura da sala de aula contribuem para uma aprendizagem comparticipada da percentagem, em particular da noção de 10%, como número de referência. Por fim, o Artigo IV discute a trajetória de aprendizagem comparticipada dos números racionais, com um foco inicial na percentagem que faz emergir o numeral decimal e posteriormente a fração, e que envolve trabalhar estas representações de forma inter-relacionada.

Cada um dos artigos, que se descreve, seguidamente, de forma sumária foi construído ao longo do processo de análise retrospetiva, focando, em particular, uma dimensão dos fenómenos em estudo de acordo com as questões de investigação. Todos os artigos incidem a sua discussão sobre os três microciclos da experiência de ensino, com exceção do Artigo I, que tendo sido realizado numa fase inicial, remete apenas para os dois primeiros microciclos.

Artigo I. Aprendizagem dos números racionais com compreensão envolvendo um processo de modelação emergente

Autores: *Helena Gil Guerreiro e Maria de Lurdes Serrazina*

Publicado em: *Bolema, 31(57), 2017*

O propósito deste primeiro artigo é discutir o processo de representação e construção de modelos dos números racionais, com compreensão, numa etapa inicial da aprendizagem, em que é privilegiado um trabalho com a percentagem, num significado de medida. O objetivo é compreender o papel que as representações assumem à medida que são usadas e transformadas como modelos de situações contextualizadas, por alunos do 1.º CEB, e vão evoluindo para modelos de raciocínio. A aprendizagem dos números racionais com compreensão é o foco do quadro teórico deste artigo. Em concreto, articula a compreensão conceptual dos números racionais, nas suas múltiplas interpretações, com o desenvolvimento de sentido de número. Neste processo, a percentagem, como conceito com diversas interpretações sociais, ganha especial relevância como representação dos números racionais, muito em particular por ter associadas representações familiares com potencial para se desenvolverem como modelos na resolução de um problema. A construção de modelos, a partir de representações, ativas, icónicas ou simbólicas, bem como a linguagem oral e escrita, acontece em situações situadas na turma e contextualizadas. Progressivamente, os modelos evoluem e fazem evoluir o conhecimento e os processos de raciocínio dos alunos, num processo de modelação emergente, através de uma aprendizagem comparticipada, em torno do estabelecimento de relações, que acontece pela participação na interação na sala de aula. A análise de dados remete o olhar para as representações que os alunos mobilizam na construção de modelos, interpretando as estratégias que suportam o seu raciocínio, bem como os significados do número e relações numéricas que estabelecem. A discussão dos resultados evidencia que o uso de representações associadas à percentagem, como uma bateria de telemóvel, um recipiente do dia-a-dia, uma barra de estado ou uma tabela de razão constituem-se como modelos à medida que os alunos os usam e reconstroem na resolução de problemas. A opção por contextos realistas, permite mobilizar um pensamento intuitivo natural resultante do trabalho com os números inteiros, encorajando um pensamento relacional, apoiado em modelos, que envolve a construção do raciocínio multiplicativo. Trata-se de um processo de modelação emergente, apoiado na interação social e dialógica, que fortalece a interpretação de relações e conduz a uma aprendizagem comparticipada dos números racionais, a partir da percentagem, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número.

Artigo II. A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais

Autores: *Helena Gil Guerreiro, Lurdes Serrazina e João Pedro da Ponte*
Publicado em: *Zetetiké, 26(2), 2018*

O propósito deste segundo artigo é a caracterização do conhecimento conceptual de percentagem e a discussão em torno das potencialidades que esse conhecimento pode trazer para a aprendizagem dos números racionais. Este artigo tem como objetivo perceber que compreensão constroem os alunos da natureza relacional da percentagem numa etapa inicial da aprendizagem dos números racionais e de que modo a noção de percentagem pode contribuir para essa aprendizagem. O artigo desenvolve-se convocando um quadro teórico que traz à discussão a percentagem, enquanto representação dos números racionais, a privilegiar numa primeira etapa da aprendizagem destes números. A opção tomada por uma perspetiva sociocultural da aprendizagem, como construção na participação em interação social, determina o caminho que é traçado no enquadramento deste artigo, no sentido de uma aprendizagem com compreensão dos números racionais. Esse caminho é apresentado seguindo uma teoria integrada do desenvolvimento numérico, que define a aprendizagem dos números racionais como um processo de alargamento do conceito de número, através da percentagem. Como linguagem de proporção privilegiada, a construção do conhecimento conceptual de percentagem é apresentada tendo por base a compreensão da sua natureza relacional. Esta ideia implica compreender as relações e comparações implícitas que a percentagem tem subjacentes, partindo da intuição dos alunos sobre a proporção, bem como dos conhecimentos prévios relativos aos números inteiros, apoiados em representações visuais e familiares. A análise dos dados recai especificamente sobre elementos que evidenciam compreensão de aspetos conceptuais da percentagem, em tarefas de diferentes etapas da experiência de ensino realizada. A discussão dos resultados permite perceber que os alunos percecionam a natureza relacional da percentagem, compreendendo as relações e conceitos que envolve. Este entendimento proporciona um caminho na compreensão da natureza multiplicativa dos números racionais, bem como da sua grandeza, traduzindo a capacidade dos alunos se movimentarem entre representações. O artigo salienta que a percentagem, dadas as características apresentadas, pode ser equacionada com muito bons resultados numa etapa inicial da aprendizagem dos números racionais.

Artigo III. Normas sociais e sociomatemáticas numa aprendizagem comparticipada da noção de 10%

Autores: *Helena Gil Guerreiro e Lurdes Serrazina*

Publicado em: *Quadrante, 27(1), 2018*

O propósito deste terceiro artigo é compreender como a interação social na sala de aula, com características de comunidade de aprendizagem de Matemática, contribui para a construção conjunta e participada por todos na comunidade de aprendizagem. Especificamente, tem como objetivo compreender de que forma as normas sociais e sociomatemáticas da cultura de uma sala de aula contribuem para uma aprendizagem comparticipada da noção de 10%, como número de referência, alicerçada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. O quadro teórico deste artigo debruça-se sobre a relação entre as normas sociais e sociomatemáticas, como expressão da cultura de uma sala de aula específica, e a participação na construção conjunta das práticas matemáticas. O Modelo de Investigação em Cooperação é convocado como forma de interpretar as relações dialógicas que se estabelecem, em processos de negociação, permitindo percecionar os processos e relações matemáticas que são mobilizados na aprendizagem comparticipada da percentagem, enquanto representação dos números racionais, numa compreensão integrada dos números racionais. A análise dos dados neste artigo recai sobre as duas dimensões da conjetura, identificando, por um lado, as normas sociais e as normas sociomatemáticas que emergem na sala de aula e, por outro, os conhecimentos dos números racionais que os alunos constroem e as relações que mobilizam, em torno da aprendizagem comparticipada da noção de 10%. A discussão dos resultados neste artigo permite perceber que as normas sociais e sociomatemáticas, específicas da cultura da sala de aula em estudo, são reguladoras da interação social, criando oportunidades que suportam o estabelecimento das práticas matemáticas partilhadas, especificamente relativas à aprendizagem comparticipada da noção de 10% como número de referência.

Artigo IV. Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem

Autores: *Helena Gil Guerreiro, Lurdes Serrazina e João Pedro da Ponte*
Publicado em: *Educação Matemática Pesquisa, 20(1), 2018*

O propósito deste último artigo é trazer à discussão uma trajetória de aprendizagem dos números racionais com um foco inicial na percentagem, que faz emergir de seguida o numeral decimal e posteriormente a fração. Esta trajetória envolve trabalhar estas representações de forma inter-relacionada na construção de uma compreensão das relações que apoiam o processo de alargamento do sentido de número aos números racionais. O objetivo específico deste artigo é perceber os contributos dessa abordagem na construção da compreensão da natureza relacional dos números racionais, no 1.º CEB. O quadro teórico deste artigo tem por base uma perspetiva de desenvolvimento de sentido de número em que o conhecimento numérico se assume como um processo de enriquecimento conceptual gradual, apoiado nos princípios da Educação Matemática Realista. Os números racionais são interpretados como traduzindo uma relação relativa a uma dada unidade, que se traduz na sua grandeza, que permite que possam ser representados e ordenados numa reta numérica. A compreensão da natureza relacional dos números racionais pode ser analisada em termos de sentido de número à medida que os alunos relacionam a nova informação com conhecimento numérico já adquirido, apropriando-se da natureza multiplicativa dos números racionais e dos seus múltiplos significados. É convocado um currículo para aprendizagem dos números racionais que destaca o papel da percentagem e faz as representações em numeral decimal e fração decorrer da percentagem, tendo por base a aprendizagem do modo como as três representações se relacionam, apoiado num ambiente de sala de aula facilitador da construção de sentido. Neste artigo, a análise de dados recai sobre componentes de sentido de número, apontadas pela investigação, que são também consideradas como indicadores que facilitam o seu reconhecimento, identificando por um lado, as relações numéricas mobilizadas, bem como as estratégias de manipulação dos números construídas na turma. Os resultados revelam que a sequência segundo a qual as três representações dos números racionais surgiram na trajetória de aprendizagem, por um lado, permite integrar os conhecimentos numéricos prévios intuitivos dos alunos na compreensão dos números racionais, relacionando as ideias subjacentes a este novo conjunto numérico e, por outro, apoia a construção de uma aprendizagem das diferentes representações, de forma inter-relacionada, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número.

Relação dos artigos com o estudo

Os quatro artigos que estão na base deste *kappa* decorrem das questões de investigação deste estudo. Embora haja, em cada um dos artigos, aspetos discutidos que contribuíram para informar cada uma das questões de investigação, associa-se cada um dos artigos às questões de investigação que nos parece dar um maior contributo. Deste modo, o Artigo I, em que se pretende compreender o papel que as representações assumem à medida que são usadas e transformadas como modelos de situações contextualizadas e como vão evoluindo para modelos de raciocínio, remete sobretudo para a construção de uma resposta à questão de investigação 1, que se foca no contributo da percentagem para a extensão do conhecimento de número aos números racionais. O Artigo II, que procura perceber, por um lado, que compreensão constroem os alunos da natureza relacional da percentagem e, por outro, de que modo a percentagem contribui para a aprendizagem dos números racionais, concorre especificamente para a resposta à questão de investigação 1, mas também à questão de investigação 2, que se foca no contributo da percentagem para uma compreensão inter-relacionada de percentagem, numeral decimal e fração. O Artigo III, em que se pretende compreender de que forma as normas sociais e sociomatemáticas da cultura de sala de aula contribuem para uma aprendizagem comparticipada da noção de 10%, contribui para a resposta à questão de investigação 3, que se foca no contributo que essas normas da cultura de sala de aula podem dar na construção da aprendizagem comparticipada dos números racionais. Por fim, o Artigo IV, que procura perceber os contributos de uma abordagem que parte de um trabalho inicial com a percentagem e que faz emergir depois o numeral decimal e a fração de modo inter-relacionado traz elementos para a construção da resposta às questões de investigação 1 e 2.

5 Discussão

Normas sociais e sociomatemáticas na aprendizagem dos números racionais

Numa perspetiva sociocultural da aprendizagem, a compreensão dos contributos que a percentagem pode dar na construção de uma aprendizagem comparticipada dos números racionais, alicerçada numa perspetiva de sentido de número e de continuidade no desenvolvimento numérico dos alunos, envolve, necessariamente, um olhar sobre a cultura da sala de aula em que essa aprendizagem acontece. Esse olhar, em particular, deve debruçar-se sobre as características da interação social que se estabelece de modo a perceber, como referem Alrø e Skovsmose (2003), de que modo as relações dialógicas determinam essa aprendizagem. A enfase é assim colocada na aprendizagem enquanto construção na interação social e dialógica, com os recursos culturais à disposição (Alrø & Skovsmose, 2003; Rogoff, 2003; Vygotsky, 1978) e não numa perspetiva de desenvolvimento cognitivo que faz depender a aprendizagem, na sua essência, do desenvolvimento biológico espontâneo das estruturas mentais (Piaget, 1972). Deste modo, assumiu-se a aprendizagem como comparticipada, ideia que integra o princípio de design P4 e analisou-se a participação na atividade matemática conjunta da turma (Artigo III), interpretando a cultura da sala de aula e as normas que a regulavam.

Ao longo do estudo, a atividade matemática conjunta da turma permitiu identificar um sentido de comunidade de aprendizagem, que se traduziu num compromisso de participação dos seus elementos nos diferentes momentos de atividade matemática coletiva (e.g., Artigo III). Este compromisso de participação foi interpretado a partir das ações dialógicas decorrentes da interação social, que permitiram a inferência de normas sociais e normas sociomatemáticas (Yackel & Cobb, 1996) específicas da cultura daquela sala de aula em particular, em cada momento.

As normas sociais identificadas, como *ouvir e dar sentido às explicações dos outros, participar, sem constrangimentos, nos diferentes momentos de discussão* ou *usar a linguagem para pensar com os outros* (Artigo III), espelham uma predisposição para a interação social (princípio de design P4), com confiança nas suas capacidades, traduzindo expectativas da turma, como comunidade de aprendizagem matemática (Artigo III, p. 187). Todos os alunos foram envolvidos em todas as tarefas e todos puderam participar, sendo que de todos era esperado que aprendessem, como referem Fosnot e Dolk (2002) na atividade matemática com os outros, mediada pela linguagem e pela mobilização de diferentes representações, usadas como modelos, produtos sociais e culturais daquela comunidade.

Normas sociomatemáticas, como *posicionar-se relativamente ao que considera ser matematicamente válido, matematicamente diferente ou matematicamente eficaz, quer em relação às suas resoluções, quer às dos outros; apresentar argumentos que considera serem matematicamente aceites; explicar as bases matemáticas dos procedimentos que usa, generalizar ideias matemáticas contextualizadas* ou *convocar conhecimentos matemáticos anteriores na construção de soluções sofisticadas* (Artigo III), traduzem o que era esperado na turma da participação de cada um, para a negociação de significados em Matemática. Para além disso, funcionaram não cada uma por si, mas como um sistema, como indicam Lopez e Allal (2007), pois, por exemplo, o *posicionar-se relativamente ao que se considera matematicamente válido*, implicou, por vezes, *apresentar argumentos que considera serem matematicamente aceites* para justificar a sua posição (Artigo II, p. 162). Estas normas determinaram as ações que foram acontecendo na turma e permitiram a coconstrução de significados relativos a conceitos e processos matemáticos, no sentido da construção de práticas matemáticas partilhadas (Artigo III).

No decurso da extensão do conhecimento do número aos números racionais, as normas sociomatemáticas foram sendo renegociadas, permitindo reajustar o que se considerava ser matematicamente aceite, válido ou eficaz em função dos conhecimentos que a turma foi construindo. A dada altura da construção do sentido de completude da percentagem, como forma de medir a relação da parte com um todo que era 100%, a turma considerou matematicamente válidas justificações intuitivas que envolviam determinar o valor que traduzia essa relação usando os dedos para medir e iterar (Artigo II, p. 155). Posteriormente, e à medida que a construção do sentido de completude de percentagem foi acontecendo, as justificações matematicamente validadas pela turma remeteram para relações multiplicativas, que permitiram interpretar a medida da parte em relação ao todo, considerando quantidades de natureza diferente (Artigo II, p. 158). Deste modo, as normas sociomatemáticas incorporadas no processo de construção de práticas matemáticas sofreram também influência dessas práticas, o que evidencia uma relação reflexiva entre ambas, como destacam Yackel e Cobb (1996). As próprias normas foram sendo negociadas na interação social, à medida que os alunos se foram envolvendo e a construção das práticas aconteceu (princípio de design P4).

A procura de estratégias matemáticas progressivamente mais eficazes decorreu, de forma negociada, numa coconstrução de relações na turma. A interpretação da representação em numeral decimal com arredondamento às décimas, por exemplo, surgiu por reagrupamento, desencadeado pela construção conjunta de relações multiplicativas entre as ordens adjacentes (Lamon, 1996; Moss & Case, 1999). Com o apoio do MAB, os alunos exploraram unidades de ordem diferente (Artigo IV, p. 215), a partir de agrupamentos e reagrupamentos de unidades (princípio de design C4). Foi neste processo de negociação de significados, durante os momentos de discussão coletiva (princípio de design P3), que, por exemplo, cinquenta centésimas foram reinterpretadas como cinco décimas, na procura por uma solução matematicamente mais económica. Ainda quando procuravam atribuir significado à relação entre a percentagem e a representação decimal, os alunos fizeram emergir também a fração, numa construção encadeada de pensamentos e ações dialógicas, à medida que discutiam as características que as relacionavam, mas também que as distinguiam (Artigo IV, p. 216). O facto de os alunos associarem 0,5 a 50% e a ½ e 0,05 a metade de 10%, ou seja 5%, contribuiu para ancorar a interpretação da diferença entre 0,5 e 0,05, apoiada em argumentos matematicamente validados pela turma, que tiveram por base a compreensão de percentagem (Artigo IV, p. 212).

A atividade matemática decorrente da interação com os outros e com os modelos construídos (Artigo III), contribuiu, nomeadamente, para que se estabelecesse, gradualmente, como prática matemática na turma que qualquer numeral decimal podia ser escrito em fração decimal e como fazê-lo (princípios de design C2, P2 e P4) (Artigo IV). Tratou-se de um processo que envolveu a construção de inferências, enquanto os alunos, em conjunto, revelavam confiança e fluência para pensar sobre e apreciar a grandeza dos números (Booth & Siegler, 2008; Lembke & Reys, 1994). Em situações que envolveram comparação de frações, a percentagem e o numeral decimal foram usados para justificar a grandeza do número que cada uma das frações representava (Artigo IV), constituindo argumentos sofisticados, que foram aceites e validados na turma, enquadrados por normas sociomatemáticas (Artigo III). Em particular, a dada a altura, a comparação de um quarto com um quinto, num significado de medida e apoiado pela reta numérica dupla, foi justificada pela conversão da fração em percentagem e numeral decimal.

Ao longo da trajetória de aprendizagem vivida pela turma, a compreensão da percentagem foi sendo consolidada, adquirindo um papel de representação de referência na construção de processos de argumentação e justificação matematicamente validados pela comunidade de aprendizagem da sala de aula (Artigo III). A estratégia de usar 10%, por exemplo, foi-se constituindo na turma, como número de referência na compreensão do numeral decimal e da fração (princípio de design C1), tendo sido mobilizada com confiança, e de modo gradualmente mais eficiente ao longo do estudo (Artigo III), tal como sugerem White e Mitchelmore (2005), justificando que a exploração desta estratégia requer que sejam dados tempo e liberdade aos alunos. Essa confiança foi adquirida na turma, como comunidade de aprendizagem de Matemática, que foi reconhecendo e validando os argumentos e justificações matemáticas e não a autoridade do professor, como destaca Stylianides (2007). Esta validação teve por base os conhecimentos matemáticos que a turma possuía em cada momento, naturalmente sob mediação do professor como elemento dessa comunidade com mais conhecimentos matemáticos (Lampert, 1990). As normas sociais e sociomatemáticas contribuíram para definir o que era expectável em relação à participação de cada um nesse processo de validação (Artigo III).

Neste processo, os alunos aprenderam a relacionar cada representação simbólica dos números racionais com a respetiva grandeza (princípio de design C2 e C4) e que cada número pode ser representado numa reta numérica, num contexto de medida. As situações de medida, consideradas eficientes para ajudar os alunos a desenvolver outros significados de número racional, como refere Lamon (2012), contribuíram também para uma compreensão inter-relacionada das diferentes representações simbólicas (Artigo II), em interação social, à medida que os alunos colaboraram, de modo dialógico, na construção do seu significado (Alrø & Skovsmose, 2003; Wells, 1999).

As normas sociomatemáticas da cultura desta sala de aula foram sustentadas por normas sociais inerentes à dinâmica social da própria turma. O *posicionar-se relativamente ao que considera ser matematicamente válido* aconteceu porque na sala de aula era esperado que se *ouvisse e se desse sentido às explicações dos outros*. O estabelecimento de uma norma sociomatemática surgiu apoiada pelas normas sociais que foram parte integrante da cultura da sala de aula (Artigo III), pelo que, dificilmente poderiam ser vistas como algo que, quando necessário, podia ser introduzido a partir do exterior, como sugerem Roy, Tobias, Safi e Dixon (2014) e que ao fim de algumas aulas se podia esperar que viesse a integrar o reportório cultural da turma.

Estas normas sociais e sociomatemáticas foram parte integrante da cultura da sala de aula da turma, traduzindo-se num artefacto cultural resultante do processo natural de aprendizagem daquela comunidade. A sua construção levou tempo, dado que requereu um empreendimento comum em aprender e um sentido de responsabilidade de todos na turma (Artigo III), como referem Johnson e Johnson (2009). Deste modo, não parece que deva ser perspetivado como um processo desgastante, cuja construção requer esforço e paciência, por parte dos alunos e do professor, como alerta Widjaja (2012). Na verdade, as normas foram parte integrante de uma cultura de ação e transformação para a construção de práticas matemáticas, que tinham na sua base um envolvimento mútuo e um diálogo com sentido para pensar com os outros (Alrø & Skovsmose, 2003; Cobb et al., 2001; Mercer, 2008). Os alunos sentiam confiança em participar, em colocar questões, em desafiar o pensamento dos outros e em argumentar no decurso da atividade matemática da turma (Artigo III). Isto resultou num conhecimento partilhado na turma e regulado sobre como *fazer matemática*, no sentido da construção de uma cultura de matematização (Cobb & Bauersfeld, 1995), isto é, um metaconhecimento, como refere Sekiguchi (2005), que permitiu criar condições para uma aprendizagem comparticipada em Matemática, com compreensão e significativa para aquela comunidade

No entanto, importa destacar que as normas constituíram um recurso cultural que integrou o reportório da turma de forma indireta, como refere Voigt (1994), sem que houvesse necessidade de serem explicitadas para que se percebesse que os alunos delas tinham consciência. Quando um aluno, na verificação do seu trabalho, assinala de modo autónomo que a sua resposta não estava absolutamente correta, interpretando a diferença matemática e percebendo a razão de não ser matematicamente eficaz (Artigo III, p. 185), revela uma tomada de consciência da importância de uma autoavaliação crítica na interpretação do seu trabalho. Evidencia ainda um entendimento da aprendizagem da Matemática como um processo em construção, que envolve reorganizar o conhecimento, e não como um produto que se traduz num resultado certo ou errado. Ideias que são um reflexo da cultura de matematização daquela sala de aula e não que aconteceram apenas pela ação direta do professor. É também necessário que essa ação integre uma cultura de sala de aula participada e regulada por normas, como alertam Stein, Engle, Smith e Hughes (2008), que manifestem o respeito pelo esfoço de cada um e valorizem os processos de argumentação que se constroem (Artigo III).

De um modo geral, a atividade da turma em Matemática decorreu de uma abordagem exploratória (Ponte, 2005), que valorizou os momentos de discussão coletiva (princípio de design P3), em que a negociação de significados aconteceu de forma dirigida, em função do objetivo de cada tarefa (Bishop & Goffree, 1986). Assim, toda a atividade matemática da turma que se analisou permitia inferir normas sociais e sociomatemáticas, pela identificação de regularidades nas ações dialógicas que decorriam da interação social em torno da construção da compreensão dos números racionais. Porém, não se pretendeu fazê-lo, pois, como alerta Sekiguchi (2005) poderia correr-se o risco de perspetivar a atividade matemática como algo conceptualmente normativo, pautado por uma indesejável uniformização de atitudes e comportamentos e, consequentemente, limitador do processo de criatividade coletiva (Vale & Pimentel, 2016), que a interação na atividade matemática permite de gerar.

A percentagem no processo de extensão de conhecimento de número

Uma perspetiva que considera a Matemática como atividade humana, como afirma Freudenthal (1991), pressupõe encarar a sua aprendizagem como relacional e integrada. Neste estudo, a construção de uma aprendizagem relacional implicou que esta acontecesse com os outros, de forma comparticipada, mas também que compreendesse, como afirmam Gravemeijer, Stephan, Julie, Lin e Ohtani (2017), a construção de um conhecimento conceptual de número racional. A dimensão integrada envolveu a construção de um sentido de pertença à comunidade de aprendizagem, mas também um desenvolvimento numérico e de sentido de número, numa perspetiva de continuidade, isto é, em toda a sua amplitude, como um todo.

Deste modo, a aprendizagem dos números racionais decorreu do conhecimento do número que os alunos possuíam do trabalho com os números inteiros, como refere Jacobs (2013), destacando a construção de estratégias que permitiram articular os conceitos relativos aos números inteiros, com os relativos aos números racionais, através de um processo contínuo, tal como defendido por Siegler et al. (2011). Este processo, que se pretendia que fosse situado na turma, na comunidade de aprendizagem da sala de aula em estudo, implicou perceber que conhecimentos prévios dos números inteiros e a sensibilidade para a percentagem possuíam os alunos antes da experiência de ensino (e.g., Artigo IV). Os resultados do estudo diagnóstico evidenciaram que os alunos da turma tinham um entendimento da grandeza dos números inteiros, como conjuntos de unidades tomando 1 como referência, e flexibilidade em manipular os números inteiros de 0 a 100, usando de forma relativamente eficaz estratégias de decomposição dos números que já conheciam (Artigo IV, p. 207). Este diagnóstico revelou ainda que os alunos possuíam já algum conhecimento informal de percentagem, corroborando resultados de outros estudos (Moss & Case, 1999; Rosenthal et al., 2009), alicerçado na sua experiência do quotidiano, dentro e fora da escola (princípio de design C4), bem como uma predisposição intuitiva para as relações proporcionais e da natureza multiplicativa dos números racionais (Artigo IV, p. 207).

Assim, através da percentagem (princípio de design P1), foi possível considerar os conhecimentos prévios e os conhecimentos intuitivos dos alunos como ponto de partida para o alargamento do conhecimento numérico aos números racionais. Este alargamento foi enquadrado numa perspetiva de sentido de número (Artigo IV), que se reflete no princípio de design C1, na medida em que se tratou de um processo de construção de sentido na compreensão de significados e relações (Artigo II), que se desenvolveu e amadureceu com a experiência matemática que os alunos foram vivendo, como é reforçado na literatura (Abrantes et al., 1999; Bruner, 1960; McIntosh et al., 1992; Swan, 2001).

Este processo de transferência do conhecimento dos números inteiros aos números racionais foi orientado no sentido de se focar nas características que os elementos destes dois conjuntos numéricos têm em comum, em vez de optar por enfatizar as suas diferenças, como o fazem outros autores (Streefland, 1991; Vamvakoussi & Vosniadou, 2004). A característica dos números inteiros comum aos números racionais, em que a percentagem se alicerçou, é a noção de grandeza do número, como defendem Siegler et al. (2011). Qualquer número em percentagem traduz uma grandeza, segundo a qual pode ser ordenado e à qual pode ser atribuído um ponto na reta numérica. Para tal, a compreensão da noção de grandeza no conjunto dos números racionais decorreu da mobilização e ampliação de conhecimentos prévios relativos aos números inteiros (princípio de design C1), bem como os conhecimentos intuitivos de proporção, na construção de um conhecimento conceptual da percentagem (Artigo II), isto é, um conhecimento rico no estabelecimento de relações, como referem Hiebert e Lefevre (1986).

Neste estudo, a compreensão conceptual da percentagem partiu da exploração de representações icónicas, como a barra de estado ou o ícone da bateria, às quais a percentagem surgiu associada no quotidiano da turma (princípios de design C4 e P1), num significado de medida (Artigo II), tendo em vista a construção do sentido de completude que a percentagem oferece (princípio de design C5).

Moss e Case (1999) enfatizam o papel que os contextos associados à medida desempenham por permitirem trabalhar com quantidades contínuas, o que foi também importante neste estudo. Com efeito, o significado de medida, que apoiou a coconstrução do sentido de completude da percentagem, permitiu identificar um valor em percentagem como um número que representa quanto de uma dada quantidade (que resulta da partição da unidade e iteração dessa parte) está representado em relação à unidade, tida como 100% (e.g., Artigo II).

As representações mobilizadas eram familiares aos alunos, constituindo-se como realistas, como refere Van den Heuvel-Panhuizen (2002), uma vez que se tratava de representações que faziam parte dos contextos da sua vida real (principio de design P1) e às quais atribuíam um significado (Artigo I, p. 133). A barra de estado e o ícone da bateria serviram de base à construção de modelos de interpretação da situação pelos alunos (princípio de design C4), num processo de modelação emergente (Gravemeijer, 1999). Os modelos que construíram fizeram emergir a representação simbólica de percentagem para assinalar o valor correspondente a uma dada medida de preenchimento do todo como 100% (Artigo I). Essa medida de preenchimento variou numa escala de 0 a 100%, apoiada na estrutura conceptual dos números inteiros, recorrendo a estratégias de manipulação como a composição/decomposição ou metades/dobros, indo ao encontro do princípio de design C3 (Artigo IV, p. 209). No processo de descoberta do sentido de completude da percentagem os alunos foram estabelecendo relações aditivas, mas também as primeiras relações de natureza multiplicativa (Lamon, 1996), que passaram por, intuitivamente, comparar quantidades de forma proporcional, recorrendo a estes modelos (e.g., Artigo I; Artigo IV).

Para além destas representações icónicas foram também mobilizadas representações ativas (princípio de design C4), como recipientes de formas e capacidades diferentes, que os alunos foram convidados a encher e vazar, avaliando em percentagem o espaço ocupado pela água, na sua relação com o todo, o recipiente 100% cheio (Artigo IV, p. 210). O facto de recipientes 100% cheios poderem ter quantidades de água diferentes despertou os alunos para uma tomada de consciência da importância que a unidade assume no conjunto dos números racionais contribuindo para a conceptualização desta noção, como aponta a literatura (Lamon, 1996; Monteiro & Pinto, 2005). A relação parte-todo ganhou significado, à medida que os alunos foram compreendendo os elementos envolvidos nessa relação, como refere Brown (2015), isto é, a quantidade que representa a parte, a quantidade que representa a unidade e o número racional que traduz a sua comparação, representando, em percentagem, o valor dessa relação (princípio de design P5). O trabalho de compreensão do sentido de completude da percentagem veio contribuir para reforçar o alargamento da noção de unidade ao conjunto dos números racionais. Se, inicialmente, a noção matematicamente válida de unidade correspondia à que os alunos conheciam do trabalho com os números inteiros, gradualmente, essa noção foi sendo estendida. Por um lado, os alunos percecionaram a unidade como um todo que dividiram em partes, de modo a que cada parte estivesse contida um número inteiro de vezes na unidade, numa procura por partes cada vez mais pequenas, descobrindo a relação entre as partes, por partições e agrupamentos assentes na estrutura de numeração decimal, na base da notação dos números inteiros e que a percentagem permitiu dar continuidade (e.g., Artigo III). E, por outro, que a grandeza da parte dependia da unidade de referência (Artigo I, p. 132). Esta extensão da noção da unidade veio redefinir o que era considerado na turma como matematicamente válido em relação à unidade de referência, no trabalho com os números racionais (Artigo III).

Na interpretação da relação entre o espaço preenchido numa barra de estado e o tempo necessário para o preencher, foi mobilizada uma representação complementar, a tabela de razão, que permitiu uma descoberta sistemática de relações numéricas (Artigo I, p. 133). Esta representação, como referem Nunes et al. (2016), permite a visualização das relações, separando os números que dizem respeito a cada quantidade envolvida. O uso desta representação como modelo de razão permitiu construir relações de proporcionalidade, que envolveram determinar uma quantidade a partir do valor de outra, de natureza diferente (princípios de design C4 e C5). Permitiu ainda, aos alunos interpretar a grandeza de um número racional, que Middleton, Van den Heuvel-Panhuizen e Shew (1998) sugerem sobretudo no trabalho com a fração, mas que se tornou importante também com a percentagem (princípio de design C1).

Os alunos avançaram na compreensão da dimensão relacional da percentagem interpretando-a tendo em conta a unidade de referência, à medida que foram estabelecendo relações de comparação, entre valores de duas grandezas diferentes (Artigo II), para descobrir valores omissos (princípio de design P5). A exploração de situações que envolviam proporção permitiu o estabelecimento, na turma, de relações multiplicativas e conduziu à descoberta de novas quantidades, envolvendo relações proporcionais, a partir da intuição que os alunos da turma possuíam para a proporção.

A visualização destas relações aconteceu apoiada pelo uso de representações, que foram usadas como modelos, progressivamente mais independentes do contexto, como refere Gravemeijer (2002). A barra de estado e o ícone da bateria deram lugar a duas retas numéricas paralelas (escalas verticais) e à reta numérica dupla, por forma a ampliar o seu uso a outros contextos, e que permitiu fazer emergir a representação simbólica, interpretando o valor da distância correspondente, na sua relação com a unidade (Artigo I). A apropriação destas representações pelos alunos, como modelos (princípio de design P2), foi evidenciada quando os alunos, em momentos diferentes e na resolução de problemas diferentes, as mobilizaram para apoiar a construção das suas estratégias de resolução (e.g., Artigo I; Artigo II). Após serem coletivizadas na turma, a sua mobilização por esta aconteceu, de forma espontânea, de acordo com a eficácia matemática que cada um lhe reconheceu para a resolução de uma dada situação contextualizada (Artigo I, p. 137). E, embora não se pretenda destacar uma sequência na transição de representações, usadas como modelos, como alerta Van Den Heuvel-Panhuizen (2003), a ordem na transição dos modelos mobilizados na compreensão da percentagem, neste estudo, proporcionou que fossem gradualmente usados na construção de processos de raciocínio progressivamente de forma mais distanciada das situações específicas do contexto (princípio de design P2). A barra de estado, usada como modelo para a interpretação de uma situação real deu lugar à reta numérica dupla, usada como modelo de base na construção de estratégias de resolução em múltiplas situações (Artigo I), isto é, como suporte à construção do que Mata-Pereira e Ponte (2017) designam como processos de raciocínio matemático.

A construção de estratégias de resolução emergiu na turma apoiada por valores de percentagem de referência que se foram estabelecendo, como progressivamente mais eficazes, à medida que os alunos iam construindo um conhecimento conceptual de percentagem aliado a estratégias de cálculo (Artigo III). Num primeiro momento, surgiram sobretudo estratégias que tinham por base a decomposição/composição de valores em percentagem, próximas das que usavam com os números inteiros ainda apoiadas em relações aditivas (princípio de design C3). Progressivamente, foram sendo mobilizadas estratégias multiplicativas que envolviam o cálculo de metades/dobros ou metades sucessivas, recorrendo a 50% e a 25%, mas também estratégias apoiadas no conhecimento dos múltiplos de um número (princípio de design C3). Ao avançar na experiência de ensino, a estratégia do cálculo de 10% ganhou força suportada por um raciocínio multiplicativo que, tendo por base a interpretação da unidade de referência, se traduziu na divisão da unidade em dez partes iguais e a iteração de uma dessas partes, tantas vezes quantas as necessárias para chegar ao valor pretendido (Artigo III). Para além de ser usada com flexibilidade no apoio a outras representações, permitiu posteriormente, a descoberta conjunta de outras estratégias matematicamente eficazes, como a estratégia de 1% (Artigo II, pp. 159–160). Estas estratégias constituíram-se como números de referência, no sentido de McIntosh et al. (1992), expressos em percentagem, cujo significado integrou o reportório partilhado da turma (princípio de design C1 e P4).

A mobilização de uma diversidade de estratégias pelos alunos, numa procura por uma estratégia cada vez mais eficiente, de forma comparticipada na turma (princípio de design P4) aconteceu pelo uso de representações ativas, icónicas, simbólicas (Bruner, 1966), bem como da linguagem natural oral e escrita, que Ponte e Serrazina (2000) valorizam nesta etapa da escolaridade, na construção de modelos. Tratou-se de um processo de modelação emergente que conduziu à construção da compreensão da relação multiplicativa que a percentagem oferece, como destacam Parker e Leinhardt (1995), envolvendo a coordenação de diferentes unidades e assumindo propriedades de número racional (Artigo III; Artigo II). Nesta relação, ao interpretar a unidade, os alunos foram descobrindo semelhanças e padrões, estabelecendo analogias, argumentando que se uma grandeza duplica aqui, terá que duplicar também ali, como refere Freudenthal (1991), o que permitiu ir fazendo generalizações locais e descobrindo relações entre quantidades que se mantinham constantes e que variavam em conjunto (princípio de design C5) (Artigo I). Nestas situações, embora as quantidades que se mantinham constantes não fosse uma noção que tivesse sido destacada, constituiu um elemento estruturante em construção, à espera de ser posteriormente descoberto (Lamon, 2007). Tratou-se de uma construção inicial e intuitiva da noção de proporção, que envolveu ser capaz de raciocinar, como afirma Spinillo (2002), sobre relações multiplicativas de primeira e de segunda ordem (princípio de design P5).

Neste processo de alargamento do conhecimento dos números inteiros aos números racionais, através da percentagem, as regras da notação dos números inteiros serviram de referência à construção da compreensão da notação em percentagem, como sugere Hiebert (1988). À medida que os alunos foram descobrindo as relações que estavam implícitas, a notação de percentagem foi ganhando significado, um significado relacional, em função da unidade de referência (Artigo IV, p. 211). Tratou-se de uma compreensão da dimensão conceptual da percentagem que aconteceu de forma distanciada de uma aprendizagem com foco no estudo de regras ou procedimentos (princípio de design P5) uma vez que esta última, como referem Gay e Aichele (1997), pode condicionar a interpretação da escrita simbólica de percentagem e, consequentemente, a sua compreensão.

Privilegiar a percentagem permitiu aos alunos construir uma perspetiva abrangente dos números racionais, como um sistema, compreendendo a sua natureza contínua, mas também (re)conceptualizando da noção de unidade, como um todo de referência, corroborando os resultados do estudo de Hunter e Anthony (2003).

Gradualmente, a turma foi revelando um nível de abstração cada vez maior em relação à compreensão de número e de quantidade, como refere Brown (2015), num processo que resultou na construção de novo conhecimento, de forma integrada no conhecimento prévio (e.g., Artigo IV). Em concreto, os alunos evidenciaram uma gradual compreensão da natureza relacional da percentagem e de que os números racionais possuem uma essência fundamentalmente relacional (Artigo II). Esta compreensão aconteceu à medida que os alunos foram estabelecendo comparações entre quantidades e mobilizando relações multiplicativas cuja grandeza a percentagem, como linguagem de proporção privilegiada, conforme referem Parker e Leinhardt (1995), permitiu quantificar como número racional.

Compreensão inter-relacionada de percentagem, numeral decimal e fração

A aprendizagem da Matemática numa perspetiva relacional e integradora encontrou na percentagem uma representação cujo carácter cultural e social, associado à simplicidade que a fez perdurar ao longo da história, como referem Parker e Leinhardt (1995), permitiu que fosse mobilizada para a sala de aula ancorada em situações realistas para os alunos. A compreensão da percentagem nessas situações, trouxe consigo conhecimentos informais que, articulados com os conhecimentos prévios de número, permitiram que fossem emergindo, intuitivamente, números representados simbolicamente através de numeral decimal e de fração (Artigo II). Para além disso, os alunos foram estabelecendo, desde cedo, as primeiras relações entre percentagens, numerais decimais e frações (Artigo III, p. 183), mobilizando valores de referência, numa perspetiva de sentido de número (princípio de design C1), na construção da compreensão da estrutura simbólica associada à notação de cada uma destas representações, como refere Moss (2002).

Assim, a compreensão da representação em numeral decimal foi decorrente da compreensão da percentagem, isto é, aconteceu em articulação com o conhecimento construído relativo à percentagem, à medida que os alunos foram estabelecendo conexões entre as duas formas de representação (princípio de design C2), bem como entre as suas notações (Artigo I). Neste processo, a reta numérica dupla foi a representação usada como modelo, tendo permitido articular valores em percentagem e em numeral decimal (princípio de design P2). A noção de que um metro representa a mesma distância que cem centímetros foi um conhecimento prévio determinante, pois permitiu que os alunos, que numa situação específica interpretaram 100% como 100 centímetros, interpretassem então 100% como um metro, isto é, considerando 1 como unidade (Artigo I, p. 139). Deste modo, os alunos descobriram que a medida do comprimento de um dado objeto era uma parte da unidade considerada, uma percentagem da distância que ia de 0 a 1. Descobriram também que o valor dessa medida se podia traduzir em numeral decimal, inicialmente com arredondamento às centésimas e, posteriormente, por reagrupamento, às décimas e, por partição, às milésimas, tendo por base a compreensão das relações multiplicativas entre as ordens adjacentes, como explicitadas na literatura, nomeadamente, por Lamon, (1996) e Moss e Case (1999).

Embora a reta numérica seja apontada em alguns estudos (e.g., Bright, Behr, Post, & Wachsmuth, 1988; Pearn & Stephens, 2007) como complexa para os alunos na representação de frações, neste estudo, permitiu visualizar o número como um todo, identificando a sua grandeza e comparando e ordenando números, independentemente da representação simbólica em que estavam expressos (princípio de design C1 e C2). Através da reta numérica dupla, os alunos visualizaram que a cada ponto na reta correspondia uma dada distância a zero, distância essa que representava a mesma grandeza, o mesmo número racional, que podia assumir diferentes representações, consoante se considerava a sua leitura em percentagem ou em numeral decimal e também em fração decimal (Artigo IV). Esta destreza na identificação da grandeza do número e no uso de diferentes representações de forma permutável, constituem, como refere Moss (2002) características de sentido de número racional. Ao alicerçar-se na percentagem permitiu alargar a compreensão do padrão relativo ao valor de posição, familiar do trabalho com os números inteiros, à representação em numeral decimal (NCTM, 2010), associada à composição e recomposição de unidades (Hackenber, 2010; Lamon, 1996; Morais & Serrazina, 2017). Contribuiu ainda para a construção da compreensão de grandeza de um número, na representação em numeral decimal (Artigo IV, p. 212), como característica independente do número de algarismos desse numeral decimal, alargando o conhecimento de número que os alunos traziam do trabalho com os números inteiros.

A compreensão da representação em numeral decimal, apoiada na percentagem, que por sua vez se estabeleceu também como relação de comparação, de natureza multiplicativa, num processo de matematização progressiva da realidade num dado contexto (Freudenthal, 1991; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003) encaminhou a aprendizagem da turma para a compreensão da fração, de modo inter-relacionado com as outras representações (princípio de design C2). Embora a fração simples e a fração decimal tivessem surgido anteriormente, a sua compreensão não tinha sido aprofundada, tendo sido usada como forma de identificar ou rotular (Brocardo, 2010). A interpretação de 10% como $\frac{1}{10}$, surgiu como uma representação equivalente, que se tomou como referência na relação entre 100% e $\frac{10}{10}$ (Artigo III, p. 181).

A compreensão da fração decimal decorreu do numeral decimal, apoiando-se em representações como o MAB e também recorrendo à grelha de 10×10 e à reta numérica dupla (Artigo IV). É um facto que os alunos compreenderam que uma dada quantidade, representada em numeral decimal pode ser representada em fração decimal, apoiando-se na estrutura da sua notação, sem que isso requeresse grande esforço, como reconhece Small (2014). *Cinco centésimas, cinco centésimos, cinco por cento*, por exemplo, representavam a mesma parte de uma unidade, dividida em 100, apelando a uma relação multiplicativa subjacente ao valor posicional no sistema de base 10 e, em simultâneo, o mesmo ponto na reta, constituía-se como representação de uma mesma grandeza, representação do mesmo número (Artigo IV). Esta conexão foi facilitada ainda pelo facto destas palavras, em português, terem em comum o mesmo morfema, que se explicitou e discutiu, assumindo-se como um instrumento cultural, como descreve Nunes et al. (2016) que facilitou o raciocínio dos alunos (princípio de design C4).

Esta atividade em torno da compreensão da fração decimal fez aparecer a equivalência de frações, quer entre frações decimais, quer entre estas e outras frações simples. Ao encontrarem frações equivalentes, como $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{10}$, os alunos perceberam a existência de uma relação multiplicativa entre o numerador e o denominador (Artigo II), um aspeto importante para a posterior compreensão da simplificação de frações, como é destacado na literatura (NCTM, 2010; Small, 2014) (princípio de design P5).

A compreensão de fração nesta etapa foi construída tendo como suporte a percentagem e o numeral decimal (princípio de design C2) (Artigo IV, p. 218). A fração surgiu como uma representação que evidencia a relação parte-todo, mas também como representação de uma quantidade, de um número, um aspeto importante destacado por DeWolf et al. (2015). Para além disso, de acordo com a situação, os alunos podiam traduzir a fração em percentagem ou em numeral decimal. A relação inerente de comparação entre duas quantidades que a fração oferece, referida por Monteiro e Pinto (2005) foi intuitiva para os alunos, nomeadamente em situações de partilha equitativa, ganhando independência como representação de número racional, face ao numeral decimal e à percentagem (Artigo III). Na divisão de três sandes por cinco alunos, dar meia sandes a cada aluno e depois dividir a última metade por 5 e dar uma dessa partes a cada um ($\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$), foi considerada a estratégia mais comum no dia-a-dia, por ser mais prática do que dar 60% ou 0,6 de sandes a cada um.

As situações que remeteram para um significado de medida, proporcionaram o uso da reta numérica dupla, como modelo, que permitiu compreender que percentagem, numeral decimal e fração podiam representar o mesmo ponto na reta (Artigo II, p. 162), isto é, o mesmo número, olhando para a sua grandeza (princípio de design C5). Estas situações, consideradas por Lamon (2007) como eficientes na compreensão de outros significados de número racional, contribuíram para a compreensão inter-relacionada das diferentes representações simbólicas (Artigo II). Além do mais, o facto de representarem uma distância relativa na reta numérica, levou a que os alunos percebessem, que existe uma distância que separa sempre dois números racionais, quando representados na reta numérica, o que colocou a hipótese de, ao refinar a unidade, ser possível encontrar um outro número entre eles, contribuindo assim para a construção da noção de densidade neste conjunto numérico (Artigo IV).

A percentagem constituiu um alicerce para uma movimentação, com sentido, entre representações, apoiada na compreensão da grandeza do número que representam, o que permitiu aos alunos interpretar o número como uma quantidade e atribuir significado à notação usada para a representar, como referem Hunter e Anthony (2003).

Progressivamente, tal como a percentagem, numeral decimal e fração foram ganhando identidade como representações de números racionais permitindo perceber que um número, com uma dada grandeza, traduz uma relação multiplicativa entre o que está a ser descrito e a unidade a que se refere (princípio de design C1 e C2). Este facto evidencia elementos de uma compreensão robusta e flexível das diferentes representações (Tian & Siegler, 2018) e evidencia a construção de um entendimento da natureza multiplicativa dos números racionais. Contudo, denota-se uma relação de interdependência neste processo de construção da identidade de cada representação. A compreensão de percentagem, de numeral decimal e de fração aconteceu de modo inter-relacionado, à medida que os alunos convocaram conhecimentos que já tinham de uma representação para compreenderem as características da estrutura de outra, indo ao encontro da ideia de Duval (2006) de que mais do que as representações em si, o importante é a transformação dessas representações entre si.

Além disso, destaca-se que, ao longo da trajetória de aprendizagem vivida pela turma, a compreensão da percentagem foi sendo fortalecida, adquirindo um papel de representação de referência (princípio de design C1) na construção de estratégias de resolução (Artigo III), progressivamente mais independente dos contextos, ao mesmo tempo que contribuiu para uma compreensão inter-relacionada e flexível de numeral decimal e de fração.

Em jeito de síntese

A aprendizagem comparticipada, enquanto construção resultante da atividade matemática da turma, foi determinada por uma cultura da sala de aula regulada por normas sociais e sociomatemáticas, que encerravam em si um conhecimento cultural construído na turma. Essas normas encorajaram os alunos a envolver-se e responsabilizar-se num processo autorreflexivo e crítico, que permitiu que todos se sentissem desafiados. Em conjunto, apoiados em relações dialógicas, os alunos puderam, independentemente do que cada um conseguia fazer sozinho, tirar partido do seu potencial (Vygotky, 1978) e fazer avançar a turma na compreensão dos números racionais. Através da percentagem, esta aprendizagem comparticipada aconteceu apoiada no conhecimento que os alunos traziam do trabalho com os números inteiros e em múltiplas representações, que se complementaram na construção de modelos de situações contextualizadas e que foram permitindo um olhar sobre as relações conquistando o seu espaço como modelos de pensamento. Esta extensão do conhecimento de número permitiu integrar novas ideias e relações, que contribuíram para a compreensão da natureza relacional dos números racionais, numa perspetiva de sentido de número. Privilegiando a percentagem numa etapa inicial, os alunos revelaram uma compreensão gradual integrada da estrutura do sistema de numeração decimal como um todo, de forma independente da representação (Hurst & Cordes, 2016), isto é, mobilizando diferentes representações em função da situação, apoiadas em números de referência, comparando e interpretando a sua ordem de grandeza, estabelecendo relações e relações entre relações que envolveram diferentes quantidades (Abrantes et al., 1999; Berch, 2005; McIntosh et al., 1992).

A trajetória de aprendizagem vivida pela turma não se traduziu num processo linear, antes pelo contrário, envolveu avanços e recuos, que implicaram alterações na sequência de tarefas de modo a ir ao encontro dos conflitos, naturais no processo de aprendizagem, que foram surgindo. No entanto, o foco deste trabalho não foi em torno das dificuldades que as características que distinguem os números inteiros dos números racionais oferecem. Essas dificuldades surgiram e "são importantes, mas não são toda a história" (Siegler et al., 2011, p. 277), isto é, são parte integrante do processo de aprendizagem dos números que se assumiu como uma construção de sentido, constituindo uma oportunidade para os alunos compreenderem que as propriedades dos números inteiros não são propriedades de todos os números, como destacam Siegler et al. (2011).

A percentagem, um conceito matemático que sofreu grande evolução do ponto de vista histórico e sociocultural (Parker & Leinhardt, 1995), trouxe consigo uma mensagem forte, de proporção privilegiada, que permitiu dela tirar partido e ampliar a aprendizagem matemática na sala de aula muito além dos factos e procedimentos matemáticos, uma aprendizagem amplamente cultural e social, como refere Schoenfeld (1991). Uma aprendizagem que se construiu como integrada, realista e relacional dos números racionais, reforçando a ideia de Bruner (1960) de que "qualquer assunto pode ser ensinado de forma efetiva de modo intelectualmente honesto a qualquer criança, em qualquer altura do seu desenvolvimento" (p. 33).

6 Conclusão

Princípios de design emergentes

Este estudo enfatiza a aprendizagem comparticipada dos números racionais, socialmente construída pela participação na interação social e dialógica da turma, como comunidade de aprendizagem de Matemática. A compreensão dos conceitos e relações relativos aos números racionais não é interpretada de modo separado da atividade matemática da turma em que acontece, pelo contrário, essa atividade "é parte do que é aprendido" (Brown, Collins & Duguid, 1989, p. 32). Deste modo, o refinamento dos princípios de design acontece de forma a contribuir para uma perspetiva da aprendizagem, em que "métodos e procedimentos sociais são inseparáveis dos conhecimentos (conteúdos) que geram" (Niza, 2012, p. 195). Assim, os princípios de design emergentes reúnem numa só dimensão princípios que, no início do estudo, foram estruturados em duas dimensões, de conteúdo matemático e pedagógica. Embora a sua separação tenha permitido simplificar a análise, estas duas dimensões são indissociáveis numa perspetiva sociocultural de aprendizagem da Matemática. Para além disso, fruto da discussão, alguns princípios iniciais sofreram reajustamentos, outros apenas reformulações de enunciado, tendo surgido também novos princípios, que sustentam ideias no início não referidas. Para facilitar a interpretação dos princípios, estes são organizados em função de quatro temas no âmbito da construção de uma aprendizagem comparticipada dos números racionais.

Sala de aula como comunidade de aprendizagem de Matemática. Neste estudo, os alunos aprenderam Matemática, especificamente números racionais, *fazendo* Matemática, à medida que foram explorando as situações apresentadas e discutindo as suas resoluções em interação social e dialógica, uns com os outros e com a professora, bem como com os recursos ao seu dispor. A sala de aula, como lugar da turma, constituiu-se como comunidade de aprendizagem de Matemática, apoiada numa cultura de sala de aula que encorajava a partilha de estratégias de resolução, de justificações e argumentos, concordando ou discordando, numa negociação de significados, com vista à coconstrução de práticas matemáticas partilhadas. A coconstrução destas práticas envolveu processos de raciocínio, que se coletivizaram, validaram ou reconstruíram na turma, nos momentos de discussão coletiva, decorrentes da abordagem exploratória desenvolvida. Deste modo, as ideias em discussão foram sendo ampliadas, ganhando consistência, tendo por base ações dialógicas, como referem Alrø e Skovsmose (2003), que conduziram a um descobrir e pensar em conjunto. Quando os alunos devolveram o seu pensamento reformulado, a partir dos contributos dos outros, a autoridade que determinou a sua validade foi a turma e não o professor. Do mesmo modo, a forma como cada um participou na interação decorrente dos momentos de discussão coletiva traduziu o que era considerado um contributo expectável na turma em Matemática, reforçando o papel da comunidade de aprendizagem.

Esta dinâmica não se instituiu como resultado de uma construção do professor *per se*, como sugere Kirshner (2002). Foi algo que se desenvolveu, gradualmente, a partir da construção de uma cultura de cooperação da sala de aula, na aceção de Alrø e Skovsmose (2003), assente em relações dialógicas e em normas que as regulam. Com efeito, as oportunidades de participação nos momentos de discussão matemática coletiva foram criadas pelas normas sociais e sociomatemáticas características da cultura da sala de aula, que regulavam a atividade matemática da turma, como referem Yackel e Cobb (1996), atribuindo-lhe coerência, quer no sentido de honrar a comunidade matemática fora da escola, quer de ir ao encontro da experiência matemática dos alunos (Stylianides, 2007; Voigt, 1994). Deste modo, as normas foram um dispositivo social e cultural fundamental, que se (re)construiu de forma situada na turma, como comunidade de aprendizagem de Matemática. Em concreto, ajudaram a definir e reajustar as expectativas sobre o pensamento e a participação de cada um, na interação com os outros. Era importante assegurar que seria expectável que qualquer aluno construísse conhecimentos relativos aos números racionais, porque todos podiam aprender Matemática, no entanto, não o era que todos o fizessem do mesmo modo, nem ao mesmo tempo. As normas sociomatemáticas permitem orientar a atividade matemática no sentido de uma aprendizagem progressivamente mais efetiva. A aprendizagem comparticipada pela turma aconteceu assim na comunidade de aprendizagem, determinada pela cultura da sala de aula e pela forma como os alunos dela se apropriaram e como, simultaneamente, a modificaram e fizeram evoluir. A importância da turma se constituir como comunidade de aprendizagem de Matemática sai reforçada ainda pelo facto de os alunos aprenderem a pensar matematicamente através da intensificação da sua participação na construção de práticas matemáticas, próximas das que caracterizam as comunidades matemáticas fora da sala de aula (Bereiter & Scardamalia, 2014; Goos et al., 1999).

Deste modo, enquadrados neste tema, ficam os princípios iniciais P3 e P4, que por questões de clarificação do seu enunciado se reescrevem do seguinte modo: *propor tarefas seguindo uma abordagem exploratória, valorizando as discussões coletivas* [1] e *promover a negociação de significados através da interação social e dialógica* [2]. Neste tema, de acordo com os resultados do estudo, surgem dois novos princípios que se apresentam como *negociar normas sociais que apelem à comunicação, participação e cooperação na sala de aula* [3] e *negociar normas sociomatemáticas que desafiem à construção de processos de raciocínio e ao desenvolvimento da autonomia na atividade matemática da sala de aula* [4].

Processo de alargamento de conhecimento, numa perspetiva de sentido de número. Para alguns autores, uma compreensão robusta dos números inteiros pode constituir uma barreira à aprendizagem das frações, uma vez que desencadeia conceções erradas que condicionam novas aprendizagens (Hartnett & Gelman, 1998; Stafylidou & Vosniadou, 2004). Neste estudo, pelo contrário, a compreensão dos números inteiros, nomeadamente a flexibilidade que os alunos revelavam na sua manipulação, foi considerada como ponto de partida no processo de enriquecimento do conhecimento conceptual de número, no sentido da sua extensão ao conjunto dos números racionais, como referem Siegler et al. (2011). No entanto, a construção deste processo de enriquecimento conceptual iniciou-se através da percentagem e não da fração, tendo subjacente uma perspetiva do sentido de número. As tarefas em que os alunos se envolveram, realistas e situadas na turma, desencadearam experiências que lhes permitiram enriquecer o conhecimento de número que já possuíam, explorando estratégias de cálculo que lhes faziam sentido, em diversos contextos e ancoradas na compreensão das propriedades dos números e das suas relações, em vez de ser na mecanização de regras ou memorização de procedimentos, como alerta a literatura (Howden, 1989; Sowder & Schappelle, 1994). A percentagem constituiu-se como elo entre os dois conjuntos numéricos, convocando os conhecimentos informais e intuitivos de proporção e os conhecimentos prévios, no estabelecimento de conexões no sentido da extensão da compreensão do número, como refere Reys (1994). A aprendizagem comparticipada da natureza relacional da percentagem permitiu o alargamento do conhecimento conceptual de número aos números racionais, contribuindo para um entendimento da sua natureza multiplicativa.

A característica que, neste processo, permitiu entender a compreensão dos números racionais como uma extensão dos conhecimentos relativos aos números inteiros foi a noção de grandeza numérica, associada a uma conceptualização da unidade. Ao interpretar a grandeza de um número racional, os alunos foram capazes de compreender a existência de uma relação de ordem no conjunto dos números racionais e de representar um mesmo número através de diferentes representações, considerando a unidade de referência. Neste processo, as tentativas dos alunos de reorganizar o conhecimento conceptual de número foram consideradas como oportunidades para discutir o que era comum e o que distinguia os números inteiros dos números racionais, não tendo sido consideradas como algo a evitar, como parecem sugerir Stafylidou e Vosniadou (2004). Deste modo, e tal como no estudo de Moss e Case (1999), os conhecimentos dos números inteiros contribuíram para a compreensão dos números racionais, numa perspetiva de sentido de número, em vez de condicionar essa aprendizagem.

Assim, os princípios iniciais C1 e C3 que se enquadram neste tema, são reformulados, dando origem aos princípios de design *apoiar a construção do conhecimento de número racional no conhecimento numérico prévio tendo por base a noção de grandeza* [5] e *entender o desenvolvimento numérico numa perspetiva de sentido de número* [6]. O princípio inicial P5 é também apresentado, numa reescrita do seu enunciado como *promover a compreensão de conceitos e a construção de estratégias de cálculo, em detrimento da memorização de regras e mecanização de procedimentos* [7].

Percentagem como conceito privilegiado numa inter-relação de representações. Considerar a percentagem como representação a privilegiar numa etapa inicial do estudo dos números racionais não é uma opção curricular comum como referem Tian e Siegler (2018). Pela ambiguidade e subtileza da sua linguagem, a percentagem é considerada um tópico matemático difícil, agravado pelo facto de ser muitas vezes ensinado de forma simplista e com base na aplicação de procedimentos, como refere a literatura sobre este assunto (Gay & Aichele, 1997; Ningtyas, 2014; Parker & Leinhardt, 1995). No entanto, este estudo evidencia que uma compreensão da natureza relacional da percentagem contribuiu para a construção de um conhecimento conceptual de número racional, numa perspetiva de pensar os números e as operações em termos de sentido do número, como afirmam Brocardo e Serrazina (2008). A percentagem, dada a ligação que permitiu estabelecer entre os contextos do dia-a-dia e a intuição dos alunos para a proporção, contribuiu para o desenvolvimento nos alunos do que Schoenfeld (1991) designa por ponto de vista matemático, isto é, "uma predisposição para analisar e compreender, para percecionar as relações, estruturais e não estruturais, e para ver como as coisas se encaixam" (p. 12). Esta predisposição facilitou o estabelecimento de conexões entre o conhecimento de número que os alunos possuíam e as características das diferentes representações simbólicas de número racional, no sentido de compreender o que representavam, como se estruturavam, como se relacionavam, numa descoberta gradual da estrutura dos números racionais como um todo (Moss, 2002). Num paradigma que privilegia a fração numa etapa inicial dos números racionais e só depois a percentagem, alguns autores consideram ser desejável que os alunos estejam familiarizados com a noção de fração decimal em centésimos, quando a percentagem é introduzida (Van Galen et al., 2008). Uma recomendação adequada, contudo, na trajetória de aprendizagem vivida pela turma, os alunos construíram um significado negociado de fração decimal tendo por base práticas matemáticas estabelecidas relativas às características do numeral decimal e à natureza relacional da percentagem, compreendendo as relações envolvidas e coordenando unidades de referência.

A percentagem revelou ser um conceito relevante e adequado numa etapa inicial da aprendizagem dos números racionais, tal como sugerem Moss e Case (1999). Os resultados deste estudo apontam, no entanto, que é possível antecipar uma compreensão da percentagem ao 3.º e 4.º ano de escolaridade, numa abordagem que pressupõe a extensão dos conhecimentos dos números inteiros aos números racionais, numa perspetiva de sentido de número. Além disso, e em contraste com o estudo de Moss e Case (1999), esta abordagem teve por base a turma como comunidade de aprendizagem de Matemática, pelo que, a interação social e dialógica que decorreu dos momentos de discussão matemática coletiva foi determinante na coconstrução do conhecimento conceptual de número racional. Assim, e dado que a ordem pela qual as diferentes representações de número racional devem ser trabalhadas não está estabelecida na comunidade de Educação Matemática (Tian & Siegler, 2018), considerar uma trajetória na aprendizagem dos números racionais que envolva uma ordem diferente da tradicional e que contemple a percentagem numa primeira etapa, fazendo decorrer a representação decimal e depois a fração, deve ser considerada. Deste modo, o princípio inicial C2 é refinado, dando origem aos dois princípios que se enunciam como *promover a compreensão da natureza relacional da percentagem, tendo por base o conhecimento numérico prévio e a intuição para a proporção* [8] *e fazer decorrer da compreensão da percentagem a compreensão do numeral decimal e, posteriormente, a da fração, de forma inter-relacionada* [9].

Aprendizagem dos números racionais como processo de modelação emergente. Neste estudo, a atividade matemática, como processo de reinvenção comparticipado pela turma, foi apoiado pela construção emergente de modelos. As tarefas propostas convocaram representações familiares e significativas para os alunos, inicialmente associadas à percentagem, remetendo para a exploração de situações realistas, num significado de medida (Lamon, 2007). Apoiados nessas representações, os alunos foram dando sentido a modelos de interpretação da situação, que suportavam estratégias de resolução espontâneas, à medida que iam sendo partilhados e negociados. Gradualmente, esses modelos foram integrando o reportório partilhado da turma, sendo usados para pensar nas relações matemáticas envolvidas (Doorman & Gravemeijer, 2009; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), num processo emergente de reorganização da atividade matemática da turma, que permitiu a coconstrução de conceitos e relações. A exploração de situações realistas num significado de medida apelou à comparação multiplicativa de quantidades de uma mesma natureza, na sua relação com quantidades de outra natureza, em função da unidade considerada, traduzindo num número essa relação. Deste modo, a compreensão de número racional como relação não retirou a atenção da sua interpretação como grandeza, como refere Domoney (2002), permitiu aliás quantificar essa relação e expressá-la, de acordo com a situação, em percentagem, numeral decimal ou fração.

Neste processo de modelação emergente, as representações simbólicas foram adquirindo significado através da interação social, de um modo faseado, como descreve Goldin (2003). Inicialmente, de modo mais intuitivo, foram mobilizadas na construção dos modelos apoiadas em representações que os alunos já dominavam do trabalho com os números inteiros, estendidas aos números racionais através da percentagem. De seguida, a compreensão desta representação fez surgir, através deste processo de modelação emergente, a representação decimal e depois a fração, num entendimento da sua estrutura e notação. E, posteriormente, cada representação foi-se tornando autónoma, sendo interpretada como uma forma diferente de representar a grandeza de um mesmo número racional. Estas três fases foram decorrentes do processo dinâmico e participado de modelação emergente, um processo que reúne uma dada representação ou representações, e as ações dialógicas em torno da sua transformação num modelo de matematização, progressivamente mais independente dos contextos (Freudenthal, 1991; Wells, 1999).

Deste modo, os princípios iniciais C4, C5, P1 e P2, que se enquadram neste tema, sofreram reajustamentos, que implicaram a reestruturação e junção de ideias, apresentando-se com o seguinte enunciado: *propor tarefas que envolvam situações realistas, num significado de medida, que apelem à compreensão da relação parte-todo e de grandeza numérica* [10], *suportar a construção de modelos nas representações ativas, icónicas, simbólicas familiares e significativas, bem como na linguagem oral e escrita* [11] e *apoiar a construção de conceitos, relações e propriedades dos números racionais no processo de modelação emergente* [12].

Em síntese, são apresentados na Tabela 2 os princípios de design, que resultam deste estudo, para a construção de uma aprendizagem comparticipada dos números racionais através da percentagem, organizados em função dos temas para os quais concorrem, sem que a sua numeração constitua uma ordem.

Tabela 2

Princípios para a aprendizagem comparticipada de número racional através da percentagem.

Sala de aula como comunidade de aprendizagem de Matemática	**1.** Propor tarefas seguindo uma abordagem exploratória, valorizando as discussões coletivas.
	2. Promover a negociação de significados através da interação social e dialógica.
	3. Negociar normas sociais que apelem à comunicação, participação e cooperação na sala de aula.
	4. Negociar normas sociomatemáticas que desafiem à construção de processos de raciocínio e ao desenvolvimento da autonomia na atividade matemática da sala de aula.
Processo de alargamento de conhecimento numérico, numa perspetiva de sentido de número	**5.** Apoiar a construção do conhecimento de número racional no conhecimento numérico prévio tendo por base a noção de grandeza.
	6. Entender o desenvolvimento numérico numa perspetiva de sentido de número.
	7. Promover a compreensão de conceitos e a construção de estratégias de cálculo, em detrimento da memorização de regras e mecanização de procedimentos.

Percentagem como conceito privilegiado numa inter-relação de representações	**8.** Promover a compreensão da natureza relacional da percentagem, tendo por base o conhecimento numérico prévio e a intuição para a proporção.
	9. Fazer decorrer da compreensão da percentagem a compreensão do numeral decimal e posteriormente a da fração, de forma inter-relacionada.
Aprendizagem dos números racionais como processo de modelação emergente	**10.** Propor tarefas que envolvam situações realistas, num significado de medida, que apelem à compreensão da relação parte-todo e de grandeza numérica.
	11. Suportar a construção de modelos nas representações ativas, icónicas, simbólicas familiares e significativas, bem como na linguagem oral e escrita.
	12. Apoiar a construção de conceitos, relações e propriedades dos números racionais no processo de modelação emergente.

Este conjunto de princípios não deve ser entendido como receita para o sucesso, como referem Herrington e Reeves (2011), contudo pode ser considerado como orientador da construção de práticas matemáticas na sala de aula ou como base teórica de discussão para a construção de outros designs de investigação.

Teoria local emergente

Sendo este estudo uma IBD, o refinamento da conjetura inicial no sentido da construção de uma teoria local emergente é um resultado desejável e, de certo modo, expectável (Cobb et al., 2016). Teoria local essa que, tendo em vista o objetivo do estudo, procura explicitar como os diferentes elementos da ecologia de aprendizagem se articulam para suportar a aprendizagem (Cobb et al., 2003). Assim, importa recordar que neste estudo se pretende compreender os contributos que a percentagem pode dar na construção de uma aprendizagem comparticipada dos números racionais, numa etapa inicial, alicerçada numa perspetiva de sentido de número e de continuidade no desenvolvimento numérico dos alunos.

Atendendo a este objetivo, e numa síntese da discussão das questões de investigação, apresenta-se um refinamento da conjetura inicial, que sintetiza a teoria local a que se chega neste estudo, suportada pelos princípios de design emergentes, que se enuncia do seguinte modo:

> *Numa perspetiva de sentido de número e de continuidade no desenvolvimento numérico, situando a sala de aula como comunidade de aprendizagem de Matemática, uma compreensão relacional de percentagem, que faça decorrer a compreensão de numeral decimal e, subsequente, de fração, de modo inter-relacionado, apoiada num processo de modelação emergente,*

contribui para a aprendizagem comparticipada dos números racionais como um todo.

Esta teoria local não se encerra em si própria. Deve ser interpretada como uma conjetura final neste estudo, mas que, adaptada, pode servir de ponto de partida a outras IDB que se foquem na compreensão de uma aprendizagem comparticipada dos números racionais, nesta etapa da escolaridade, e que considerem a vida na sala de aula como um sistema sinergético (Brown, 1992; Kelly, 2004).

Reflexão final

Uma reflexão final sobre os processos de aprendizagem estudados e os meios que os suportaram implica retomar os aspetos que circunscreveram este estudo e que envolveram decisões conceptuais e metodológicas tomadas desde o seu início. Impõe ainda que se destaquem as implicações que os resultados podem ter na aprendizagem dos números racionais, nesta etapa da escolaridade, bem como em termos de futura investigação.

Um desses aspetos diz respeito à decisão de orientar este estudo numa perspetiva sociocultural da aprendizagem, sustentada pelos princípios da Educação Matemática Realista, decisão assumida no quadro conceptual deste estudo. A ideia foi apoiar a construção da aprendizagem dos números racionais, num processo de reinvenção guiada, que se apoiou num processo de modelação emergente, fazendo essa aprendizagem decorrer dos conhecimentos numéricos prévios daqueles alunos, que se estenderam através da percentagem. A escolha de situações familiares, associadas à percentagem pelo uso da tecnologia, permitiu propor tarefas significativas para os alunos, que foram ao encontro das suas vivências. Os alunos deram sentido a essas situações e foram construindo estratégias de resolução que, através da percentagem, permitiram relacionar as ideias subjacentes a este novo conjunto numérico numa compreensão da sua natureza relacional.

Um outro aspeto respeita ao facto deste estudo envolver uma IBD na sala de aula, o que conduziu a que decorresse emerso na sua ecologia de aprendizagem, isto é, que atendesse a um complexo sistema real de interações múltiplas, que é influenciado pela relação entre diferentes elementos (Cobb, et al., 2003). Dada a sua complexidade, não foi possível considerar todos os elementos que integram esse sistema, pelo que, neste estudo a atenção recai sobre as tarefas e os contextos escolhidos, as representações mobilizadas, a abordagem exploratória desenvolvida e as normas sociais e sociomatemáticas estabelecidas. A relação entre estes elementos sustenta a gramática argumentativa deste estudo, tendo permitido documentar a complexidade e desordem natural da sala de aula (Cobb et al., 2001; Cobb et al., 2016) à medida que os alunos participavam, e faziam evoluir a sua participação, na comunidade de aprendizagem. Deste modo, fazendo emergir a construção de uma aprendizagem comparticipada, determinada pela cultura desta sala de aula em particular.

Ainda relativamente à IBD, importa trazer a esta reflexão a teoria local sobre a aprendizagem dos alunos e os meios que a suportam que resulta deste estudo. Embora não se pretenda assegurar a repetição exata da experiência de ensino, uma suposição central em IBD é que a teoria local emergente deve poder ser usada para apoiar a aprendizagem dos alunos noutras sala de aula, constituindo uma base teórica (Gravemeijer & Cobb, 2006). Identificadas as diferenças em termos de contexto, é expectável que seja adaptada de modo a ser usada em estudos subsequentes, uma vez que se perspetiva este estudo como um caso paradigmático de fenómenos mais abrangentes (Cobb et al., 2003). Embora tenha sido um estudo desenvolvido nesta turma em particular, resultou numa estrutura interpretativa que permitiu relacionar os elementos da ecologia com a aprendizagem matemática situada num dado contexto. Deste modo, é expectável que os processos de aprendizagem documentados possam ter implicações na condução de uma experiência de ensino noutra sala de aula. Uma vez que se trata de um processo que assenta numa situação de aprendizagem real, deve atender às características dos participantes, das suas ações, e à complexidade do contexto que a caracteriza. Para tal, implica considerar as condições da ecologia de aprendizagem particulares da sala de aula que se pretende estudar, em função dos conhecimentos que os alunos já possuem, num processo de adaptação e produção, e não apenas um consumo direto da teoria local emergente deste estudo (Cobb et al., 2001).

Adicionalmente, um outro aspeto que importa referir, prende-se com a trajetória de aprendizagem vivida pela turma, na perspetiva de reforçar a ideia de Simon (1995) de que a única coisa que é previsível na sala de aula é que a atividade que nela decorre não acontece exatamente como previsto. Embora se tenha antecipado de acordo com a mesma sequência de representações, percentagem – numeral decimal – fração, a trajetória de aprendizagem vivida envolve a complexidade dos acontecimentos na sala de aula, estruturados em termos de construção de normas sociais, sociomatemáticas e práticas matemáticas, permitindo ver a aprendizagem como participação em torno da resolução de tarefas específicas, pensadas para aquela turma, num dado momento (Gravemeijer & Cobb, 2006). Por se pretender que fossem situadas na turma, tão realistas quanto possível de modo a dar resposta a situações problemáticas do dia a dia da turma, as tarefas não estavam totalmente definidas à partida. Este facto permitiu, ao longo da análise preliminar, criar novas tarefas que permitiram ir ao encontro do desempenho da turma, reforçando os aspetos que, em cada momento, revelavam necessidade de ser aprofundados ou revisitados, na perspetiva de um currículo em espiral (Bruner, 1960), em que conteúdos e relações são continuamente (re)descobertos. Deste modo, a trajetória de aprendizagem vivida pode ser entendida como uma matriz que, orientada pela teoria local emergente deste estudo, pode ser considerada, em termos de desenho curricular, numa etapa inicial da aprendizagem dos números racionais.

Outra característica que importa referir diz respeito ao envolvimento prolongado e próximo com os alunos. Brown (1992) refere que intervenções de sucesso na sala de aula devem garantir que envolvem suficientemente os alunos, que os seduzem. Nesta investigação, o envolvimento foi prolongado na medida em que não se reduziu a um número limitado de episódios, evidenciado no conjunto sistemático e completo de dados recolhidos e pela extensão da própria análise. Na verdade, este aspeto implicou uma tomada de decisão relativamente à seleção de dados a integrar os artigos. Embora tenham sido todos analisados, foram, no entanto, apresentados os que se consideraram significativos e representativos dos fenómenos em estudo (Brown, 1992). Além disso, foi também um envolvimento próximo, evidente pelo facto de, para além de investigadora, ser também professora da turma, desde o seu 1.º ano. Essa característica proporcionou um impacto significativo na ligação entre a investigação e a prática (Reeves, McKenney, & Herrington, 2011). Em concreto, permitiu que, como investigadora, estivesse por dentro da cultura da sala de aula, conhecesse o percurso escolar da turma e tivesse uma relação de forte empatia e confiança com cada aluno, contribuindo para antecipar problemas e interpretações ou mesmo evitar alterações de comportamento desencadeadas, por exemplo, pela presença de outro adulto na sala de aula (Mercer, 2007). No entanto, este foi também um aspeto do estudo que ofereceu constrangimentos, assumidos à partida e discutidos ao longo de todo o processo investigativo, nomeadamente, a necessidade de distanciamento em relação aos resultados e a preocupação de não deixar contaminar a interpretação dos dados. Embora Mercer (2007) afirme não haver investigação que evidencie em que medida o nível de envolvimento do investigador afeta o processo investigativo e os resultados, importa ter presente que numa investigação desta natureza existe um grau de subjetividade crítica associado às decisões que são tomadas em cada momento da investigação.

Relativamente à opção de privilegiar a percentagem nesta etapa da escolaridade, é de salientar que os alunos neste estudo cresceram imbuídos nas tecnologias digitais (European Commission, 2018). São alunos que integram a chamada Geração Z, conhecidos por estar sempre ligados entre si e ao mundo, por procurarem interatividade e velocidade, por serem intuitivos e resilientes, mas também impacientes. Na procura por seduzir estes alunos, a escola encontra nestas tecnologias digitais uma oportunidade para desafiar e mudar a relação entre os alunos e os processos de aprendizagem e conteúdos (European Commission, 2018). O grau de familiarização que os alunos deste estudo possuíam com a percentagem, associado ao uso destas tecnologias digitais, e a ponte que esta permitiu estabelecer com os conhecimentos intuitivos e os conhecimentos prévios, fizeram com que esta se tornasse uma representação versátil (Goldin & Kaput, 1996), na compreensão dos números racionais. A percentagem foi mobilizada em diferentes contextos, tornou-se eficiente na compreensão de relações e foi convertida, sem dificuldade, noutras representações, características que devem permitir trazê-la à discussão quando se pensa na aprendizagem dos números racionais, nesta etapa da escolaridade.

Ainda no que respeita à percentagem, este permanece um tópico matemático que carece de investigação, quer relativa a processos de desenvolvimento profissional, quer a processos de aprendizagem. Não só porque existem poucos estudos atuais, sobretudo centrados na compreensão do seu papel na aprendizagem dos números racionais, mas também porque permanece um conceito em relação ao qual os alunos revelam dificuldade (e.g., De Corte et al., 2005; Jacobs, 2013). Na verdade, trata-se de um tópico para a aprendizagem do qual ainda não foram alcançados grandes progressos (Gay & Aichele, 1997; Tian & Siegler, 2018). Este estudo, não tendo como objetivo a compreensão do conceito de percentagem *per se*, fornece, contudo, elementos que evidenciam a importância de trabalhar a percentagem mais cedo, numa etapa da escolaridade anterior ao estudo formal da razão e das proporções, como resposta ao desafio lançado por Risacher (1991). Justifica-se, assim, a realização de trabalhos que (1) promovam uma aprendizagem comparticipada da percentagem na sala de aula, como comunidade de aprendizagem; (2) que explorem o conhecimento intuitivo que os alunos trazem da vida em sociedade, na construção da compreensão da percentagem; (3) que se foquem na compreensão da relação de proporção privilegiada que a percentagem oferece; (4) que decorram numa perspetiva de sentido de número, conduzindo a um conhecimento conceptual da percentagem; e (5) que tragam a vida para a escola, isto é, que as tarefas se construam a partir de representações e contextos realistas para os alunos.

A concluir. Os resultados discutidos vêm corroborar investigações anteriores que destacam o papel que a percentagem pode ter na construção da compreensão de número racional (Hunter & Anthony, 2003; Moss & Case, 1999), mas fornecem também novos elementos sobre como a aprendizagem dos números racionais se pode perspetivar como uma construção de sentido, integrada, realista e relacional. *Integrada*, porque reflete uma visão integradora do desenvolvimento numérico e da comunidade de aprendizagem da sala de aula, como um todo, adaptando-se a par e passo à evolução de cada um, dando oportunidade a todos. *Realista*, porque reflete a dimensão da Matemática, enquanto atividade humana e situada, que se reinventa com os outros, como forma de organizar e interpretar situações significativas e reais, e, gradualmente, os objetos matemáticos. *Relacional*, porque reflete a natureza dos números racionais e a sua interligação com outros conteúdos matemáticos, com os quais se articula e sobrepõe, e com a vida fora da escola, mas também numa perspetiva de que decorre da atividade conjunta da turma, em interação, negociação e cooperação. Trata-se de uma interpretação que se enquadra numa perspetiva sociocultural da aprendizagem da Matemática, mas que ganha também significado no referencial socio-cultural-político emergente na última década da investigação em Educação Matemática (Planas & Valero, 2016). A dimensão política surge na orientação para os princípios implícitos de equidade, diversidade e inclusão que norteiam a aprendizagem da Matemática na escola pública e, necessariamente, esta investigação, porque nela teve lugar.

Este estudo traz uma visão sobre a aprendizagem da Matemática que coloca a atividade da turma como unidade de análise, fornecendo elementos sobre o modo como pode ser feito na relação com as normas sociais e sociomatemáticas específicas da cultura da sala de aula. Esta visão destaca o papel das normas na construção da aprendizagem comparticipada da Matemática, garantindo que as conclusões desta investigação dizem respeito à maioria dos alunos da turma e não apenas a casos isolados (De Beer, Gravemeijer, & Van Eijck, 2018). Neste sentido, os resultados traduzem o conhecimento emergente da participação na construção de práticas matemáticas na turma, social e culturalmente situadas, em que ganha um significado negociado, não traduzindo, tal como não se pretendia que o fizessem, o que cada aluno era capaz de fazer sozinho (Confrey & Maloney, 2015). No entanto, em termos de investigação futura, poderá ser interessante cruzar a aprendizagem comparticipada pela turma com a apropriação das práticas matemáticas pelos alunos individualmente, por forma a aprofundar, nomeadamente, a compreensão do desenvolvimento dos processos de raciocínio matemático, numa perspetiva de alargamento do conhecimento numérico dos alunos.

Por outro lado, uma investigação desta natureza, imbuída na vida da sala de aula e centrada nos processos de aprendizagem, envolve orquestrar diferentes aspetos que permitem compreender o sistema como um todo (Brown, 1992). É por esta razão que não se pode considerar que a aprendizagem construída decorre diretamente da experiência de ensino realizada. As condições do estudo refletem a complexidade da ecologia da situação de aprendizagem e o modo como influenciou os processos de aprendizagem (Prediger et al., 2015) na qual se inclui a prática da professora e os processos de ensino, aos quais a investigação não pode ser alheia (Mendes, Brocardo, & Oliveira, 2017). No entanto, não era intenção deste estudo considerar as ações da professora e os processos de ensino como foco de análise. Porém, aprofundar a compreensão do papel do professor, numa perspetiva de professor que ensina alunos e não de professor que ensina conteúdos, na negociação das normas da cultura da sala de aula, no sentido da construção de uma comunidade de aprendizagem de Matemática, e a sua influência nos processos de aprendizagem pode ser um ponto de partida para investigações futuras.

Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

AERA. (2011). Code of Ethics. *Educational Researcher*, *40*(3), 145–156.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que formação? In B. P. Campos (Ed.), *Formação Profissional de Professores no Ensino Superior* (Vol. 1, pp. 21–30). Porto: Porto Editora.

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2003). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique*. Dordrecht: Kluwer.

Ansari, D. (2012). *The foundations of numerical and mathematical abilities: A literature review*. Washington, DC: World Bank.

Bakker, A. & Van Eerde, D. (2012). An introduction to design-based research for Master and Phd students. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in Mathematics Education* (pp. 429–466). Netherlands: Imprint: Springer.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht, The Netherlands: CD Beta Press.

Bauersfeld, H. (1980). Hidden dimensions in the so-called reality of a mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *11*(1), 23–41.

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational-number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 92–127). New York: Academic Press.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., & Post, T. R. (1984). Tasks to Assess Children's Perception of the Size of a Fraction. In A. Bell, B. Low & J. Kilpatrick (Eds.), *Theory, Research and Practice in Mathematical Education: 5th International Congress on Mathematical Education* (pp. 179–18). Adelaide, South Australia: Shell Centre for Mathematics Education.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(5), 323–341.

BERA. (2011). *Ethical Guidelines for Educational Research*. Obtido de https://www.bera.ac.uk/wp-content/uploads/2014/02/BERA-Ethical-Guidelines-2011.pdf

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333–339.

Berch, D. B. (2017). Why learning common fractions is uncommonly difficult: Unique challenges faced by students with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 50*(6), 651–654.

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (2014). Knowledge building and knowledge creation: One concept, two hills to climb. In S. C. Tan, H. J. So, J. Yeo (Eds.), *Knowledge creation in education* (pp. 35–52). Singapore: Springer.

Bielaczyc, K., & Collins, A. (1999). Learning communities in classrooms: A reconceptualization of educational practice. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory* (Vol. 2, pp. 269–292). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309–365). Dordrecht: Reidel.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, *79*(4), 1016–1031.

Boyce, S., & Norton, A. (2016). Co-construction of fractions schemes and units coordinating structures. *The Journal of Mathematical Behavior, 41*, 10–25.

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(3), 215–232.

Brocardo, J. (2010). Trabalhar os números racionais numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número. *Educação e Matemática*, *109*, 15–23.

Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *Sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97–115). Lisboa: Escolar Editora.

Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 141–178.

Brown, B. (2015). The relational nature of rational numbers. *Pythagoras*, *36*(1), 1–8.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32–42.

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bruner, J. S. (1966). *Toward a theory of instruction*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Gradiva.

Cobb, P. (1998). Analyzing the mathematical learning of the classroom community: The case of statistical data analysis. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33–48). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.

Cobb, P. (2000). Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers. In A. E. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in Mathematics and Science Education* (pp. 307–334). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). Introduction: The coordination of psychological and sociological perspectives in mathematics education. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 1–16). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., & Bowers, J. (1999). Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice. *Educational Researcher, 28*(2), 4–15.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist*, *31*(3–4), 175–190.

Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In F. Seeger, J. Voigt., & U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom* (pp. 158–190). Cambridge: Cambridge University Press.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9–13.

Cobb, P., Jackson, K., & Dunlap, C. (2016). Design research: An analysis and critique. In L. English, & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Mathematics Education* (pp. 481–503). New York: Routledge.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *Journal of the Learning Sciences*, *10*(1–2), 113–163.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*(1), 99–122.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education*. New York, NY: Routledge.

Comissão Europeia. (2006). Recomendação do Parlamento Europeu e do Conselho de 18 de Dezembro de 2006 sobre as competências essenciais para a aprendizagem ao longo da vida. *Jornal Oficial da União Europeia*, *962*, 10–18.

Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. Obtido de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Confrey, J. (1991). Learning to listen: A student's understanding of power of ten. In E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 111–138). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231–266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J., & Maloney, A. (2015). A design research study of a curriculum and diagnostic assessment system for a learning trajectory on equipartitioning. *ZDM*, *47*, 919–932.

Costa, M. J. (2010). *A noção de percentagem no 2.º ciclo do ensino básico: Uma experiência de ensino* (Tese de Mestrado não publicada). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Cramer, K. A., Post, T. R., & Delmas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 111–144.

Damásio, A. (2000). *O Sentimento de Si*. Lisboa: Europa-América.

De Beer, H. T., Gravemeijer, K. P. E., & Van Eijck, M. W. (2018). Exploring instantaneous speed in fifth grade. *Educational Designer*, *3*(10), 1–28.

De Corte, E., Depaepe, F., Op't Eynde, P., & Verschaffel, L. (2005). Comparing mathematics education traditions in four European countries: The case of the teaching of percentages in the primary school. In A. Rogerson (Ed.), *The Mathematics Education into the 21st Century Project: Proceedings of the Eighth International Conference – Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education* (pp. 1–11). Johor Bahru, Malaysia: *Universiti Teknologi Malaysia*.

Dedekind, R. (1901). *Essays on the theory of numbers.* Chicago: Open Court Publishing Company.

Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.

Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, *32*(1), 5–8.

Dewar, J. M. (1984). Another Look at the Teaching of Percent. *Arithmetic Teacher*, *40*(4), 48–49.

DeWolf, M., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2015). From rational numbers to algebra: Separable contributions of decimal magnitude and relational understanding of fractions. *Journal of Experimental Child Psychology*, *133*, 72–84.

DeWolf, M., Grounds, M. A., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2014). Magnitude comparison with different types of rational numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *40*(1), 71–82.

Dole, S., Cooper, T. J., Baturo, A., & Conoplia, Z. (1997). Year 8, 9 and 10 students' understanding and access of percent knowledge. In F. Biddulph & K. Carr (Eds), *People in mathematics education: Proceedings of the 20th annual conference of the Mathematics Education research group of Australasia* (pp. 147–154). Rotorua, New Zealand: University of Waikato Printery.

Domoney, B. (2002). Student teachers' understanding of rational number: Part-whole and numerical constructs. *Research in Mathematics Education*, *4*(1), 53–67.

Doorman, L. M. & Gravemeijer, K. P. E. (2009). Emergent modeling: Discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM, 41(1–2),* 199–211.

Durkin, K., & Rittle-Johnson, B. (2015). Diagnosing misconceptions: Revealing changing decimal fraction knowledge. *Learning and Instruction*, *37*, 21–29.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (pp. 3–26). Columbus, Ohio: ERIC/CSMEE Publications.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Duval, R. (2014). Commentary: Linking epistemology and semio-cognitive modeling in visualization. *ZDM*, *46*(1), 159–170.

Eisenhart, M. (1988). The Ethnographic Research Tradition and Mathematics Education Research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 99–114.

Ernest, P. (1994). *Mathematics education and philosophy: An international perspective*. Washington, DC: Falmer.

European Commission. (2018). *Proposal for a Council recommendation on key competences for lifelong learning* (Commission staff working document, 17.1.2018). Obtido de https://ec.europa.eu/education/sites/education/files/swd-recommendation-key-competences-lifelong-learning.pdf

Fazio, L.K., Kennedy, C.A., & Siegler, R.S. (2016) Improving Children's Knowledge of Fraction Magnitudes. *PLoS ONE*, *11*(10), 1–14.

Floyd, A. & Arthur, L. (2012). Researching from within: external and internal ethical engagement. *International Journal of Research & Method in Education*, *35*(2), 171–180.

Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: Constructing fractions, decimals and percents*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, *4*, 1–12.

Gay, A. S. (1990). *A study of middle school students' understanding of number sense related to percent (Tese de doutoramento não publicada)*. Oklahoma State University, Stillwater, Oklahoma.

Gay, A. S., & Aichele, D. B. (1997). Middle school students' understanding of number sense related to percent. *School Science and Mathematics*, *97*(1), 27–36.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. San Diego, California: Academic Press.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, M. G. Martin, & S. Schifter (Eds.). *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275–286). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 397–430). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Goos, M., Galbraith, P. & Renshaw, P. (1999). Establishing a community of practice in a secondary mathematics classroom. In L. Burton (Ed.), *Learning mathematics: From hierarchies to networks* (pp. 36–61). London: Falmer Press.

Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perpective. In Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research: The design, development and evaluation of programs, processes and products* (pp. 45–85) London: Routledge.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(5) 443–471.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155–177.

Gravemeijer, K. P. E. (2002). Emergent modeling as the basis for an instructional sequence on data analysis. In B. Phillips (Ed.), *Developing a Statistically Literate Society, Proceedings of the Sixth International Conference of Teaching Statistics* (pp. 7–12). Voorburg, the Netherlands: International Statistics Institute.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83–101). Lisboa: APM.

Gravemeijer, K., & Van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal, 109*(5), 510–524.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. L., & Ohtani, M. (2017). What Mathematics Education May Prepare Students for the Society of the Future?. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(1), 105–123.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 170–218.

Greeno, J. G. (1997). On claims that answer the wrong questions. *Educational Researcher*, *26*(1), 5–17.

Guerreiro, H. G. (2005). *Comunicando, participando, matematicando através da Internet: Um estudo no 1.º ciclo* (Tese de Mestrado não publicada). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Guerreiro, H. G., & Serrazina, L., (2018) Normas sociais e sociomatemáticas numa aprendizagem comparticipada da noção de 10%. *Quadrante*, *27*(1), 69–94.

Guerreiro, H. G., & Serrazina, M. L. (2017). Aprendizagem dos números racionais com compreensão envolvendo um processo de modelação emergente. *Bolema*, *31*(57), 181–201.

Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018a). A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. *Zetetiké*, *26*(2), 354–374.

Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018b). Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem. *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(1), 359–384.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, *28*(4), 383–432.

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4*(2), 317–337.

Hartnett, P., & Gelman, R. (1998). Early understandings of numbers: Paths or barriers to the construction of new understandings?. *Learning and Instruction*, *8*(4), 341–374.

Herrington, J., & Reeves, T.C. (2011). Using design principles to improve pedagogical practice and promote student engagement. In G. Williams, P. Statham, N. Brown & B. Cleland (Eds.), *Proceedings of Ascilite 2011: Changing demands, changing directions* (pp. 594–601). Hobart: University of Tasmania.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986) Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1–27). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. *Educational Studies in Mathematics*, *19*(3), 333–355.

Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *The Arithmetic Teacher*, *36*(6), 12.

Howden, H. (1989). Teaching number sense. *The Arithmetic Teacher*, *36*(6), 6–11.

Hunter, R., & Anthony, G. (2003). Percentages: A foundation for supporting students' understanding of decimals. In L. Braggs, C. Campbell, G. Herbert & J. Mousley (Eds.), *Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education research group of Australasia* (Vol. 2, pp. 452–459). Geelong, VIC: MERGA.

Hurst, M., & Cordes, S. (2016). Rational-number comparison across notation: fractions, decimals, and whole numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance, 42*(2), 281–293.

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. (2016). *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.* Obtido de http://www.ie.ulisboa.pt/download/carta-etica-e-regulamento-da-comissao-de-etica

Jacobs, J. A. (2013). *Percents are not natural numbers*. Tese de Doutoramento não publicada. New Jersey: The State University of New Jersey.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009). An educational psychology success story: Social interdependence theory and cooperative learning. *Educational Researcher*, *38*(5), 365–379.

Jonnaert, P., & Borght, C. V. (2002). *Criar condições para aprender: o socioconstrutivismo na formação do professor*. Porto Alegre: Artmed.

Kaplan, R. (1999). *The nothing that is: A natural history of zero*. Oxford: Oxford University Press.

Kelly, A. (2004). Design research in education: Yes, but is it methodological?. *The Journal of the Learning Sciences*, *13*(1), 115–128.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53–92). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J. (2009). Programa de Matemática do Ensino Básico: O olhar de um especialista internacional em currículo de Matemática. *Educação e Matemática*, *105*, 50–52.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping students learn mathematics*. Washington, DC: National Academy.

Kirshner, D. (2002). Untangling teachers' diverse aspirations for student learning: A crossdisciplinary strategy for relating psychological theory to pedagogical practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(1), 46–58.

Koay, P. L. (1998). The knowledge of percent of pre-service teachers. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 54–69.

Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170–193.

Lamon, S. J. (2002). Part-whole comparisons with unitizing. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 79–86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629–667). Greenwich, CT: Information Age.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* New York: Routledge.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29–63.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambrigde: Cambrigde University Press.

Lembke, L. O., & Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 237–259.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. J. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93–118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

Louange, J., & Bana, J. (2010). The Relationship between the Number Sense and Problem Solving Abilities of Year 7 Students. In L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Eds.), *Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 360–366). Fremantle: MERGA.

Mamede, E. (2007). *The Effects of situations on Children's Understanding of Fractions*. (Unpublished doctoral dissertation). Oxford Brookes University, Oxford.

Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1) 4–29.

Martin, L., Towers, J., & Pirie, S. (2006). Collective mathematical understanding as improvisation. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(2), 149–183.

Mata-Pereira, J. & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, *96(*2), 169–186.

Mazur, B. (2008). When is One Thing Equal to Some Other Thing?. In B. Gold & R. A. Simons (Eds.), *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy* (pp. 221–241). Washington: Mathematical Association of America.

McIntosh, A., Reys, J. & Reys, E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2–8 e 44.

ME (2007). *Orientações de gestão curricular para o programa e metas curriculares de matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGE.

ME (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

ME (2017). *Perfil dos alunos à Saída da Escolaridade Obrigatória.* Lisboa: Ministério da Educação, DGE.

MEC (2013). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2016). Especificidades e desafios da design research: O exemplo de uma experiência de ensino no 1.º ciclo. *Quadrante, 25*(2), 51–75.

Mercer, J. (2007). The challenges of insider research in educational institutions: Wielding a double-edged sword and resolving delicate dilemmas. *Oxford Review of Education, 33*(1), 1–17.

Mercer, N. (2002). Developing dialogues. In G. Wells & G. Claxton (Eds.), *Learning for life in the 21st century: Sociocultural perspectives on the future of education* (pp. 141–153). Oxford: Blackwell.

Mercer, N. (2008). The seeds of time: Why classroom dialogue needs a temporal analysis. *Journal of the Learning Sciences*, *17*(1), 33–59.

Middleton, J.A., Van den Heuvel-Panhuizen, M. & Shew, J.A. (1998) Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 302–311.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89–108.

Morais, M. & Serrazina, L. (2017). Decimal numbers: A potential bridge between rational numbers representations. *Journal of Mathematics Education, 10*(1), 48–60.

Moss, J. (2002). Percents and proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook* (pp. 109-120). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: Teaching rational number. In J. Bransford & S. Donovan (Eds.), *How children learn: History, science and mathematics in the classroom* (pp. 309–350), Washington, DC: National Academies.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense-making*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2010). *Developing essential understanding of rational numbers for teaching mathematics in grades 3–5*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ni, Y., & Zhou, Y. D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40*(1), 27–52.

Ningtyas, Y. D. W. K. (2014). Supporting 5th grade indonesian students in learning percentages. In R. I. I. P., M.Si (Ed.), *Proceeding The 2nd SEA-DR Conference* (pp. 408–415). Palembang: Magister of Mathematics Education Department, Faculty of Teacher Training and Education Sriwijaya University.

Niza, S. (1998). A organização social do trabalho de aprendizagem no 1.º ciclo do ensino básico. *Inovação*, *11*(1), 77–98.

Niza, S. (2004). Um novo sistema de educação especial: A legitimação do Apartheid. *Escola Moderna*, *20*(5), 56–62.

Niza, S. (2012). Uma democracia participada na escola: A gestão cooperada do currículo. In A. Nóvoa, F. Marcelino & J. R. do Ó (Eds.), *Sérgio Niza: Escritos sobre educação* (pp. 522–530). Lisboa: Tinta da China.

Norton, A., & Boyce, S. (2013). A cognitive core for common state standards. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 266–279.

Norton, A., & Hackenberg, A. J. (2010). Continuing research on students' fraction schemes. In L. P. Steffe & J. Olive (Eds.), *Children's fractional knowledge* (pp. 341–352). New York, NY: Springer.

Nóvoa, A. (2014). Escola pública: A liberdade como princípio, a liberdade como fim. *Educação e Matemática*, *126*, 1–2.

Nunes T. (2008). Understanding Rational Numbers. *Proceedings of the Conference of European Association for Research on Learning and Instruction* (pp. 23–50). Hungary, Budapest.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997) *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T., Dorneles, B. V., Lin, P. J., & Rathgeb-Schnierer, E. (2016). *Teaching and learning about whole numbers in primary school*. Switzerland: Springer

Olive, J. (1999). From fractions to rational numbers of arithmetic: A reorganization hypothesis. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(4), 279–314.

Oliveira-Formosinho, J. (2003). O modelo curricular do MEM: Uma gramática pedagógica para a participação guiada. *Escola Moderna*, *8*(5), 5–9.

Parker, M. (2004). Reasoning and working proportionally with percent. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(6), 326–330.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421–481.

Pearn, C., & Stephens, M. (2006). Working with number lines to probe fraction concepts. In C. Pearn & M. Stephens (Eds.), *Whole Number Knowledge and Number Lines Help to Develop Fraction Concepts: Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 601– 610). Adelaide: MERGA.

Perrenoud, F. (2000). *Pedagogia diferenciada: Das intenções à ação*. Porto Alegre: Artmed.

Piaget, J. (1972). Intellectual evolution from adolescence to adulthood. *Human Development*, *15*(1), 1–12.

Pilmer C. D. (2008). *Number Sense*. Nova Scotia: Literacy Nova Scotia.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(5), 505–528.

Planas, N., & Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 447–479). Rotterdam: Sense Publishers.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2013). Intermezzo. *Educação e Matemática*, *123*, 1–2.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática*, *105*, 2–6.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *25*(2), 77–98.

Post, T. (1989). One point of view: Fractions and other rational numbers. *Arithmetic Teacher, 37*(1), 3–28.

Prediger, S. & Pöhler, B. (2015). The interplay of micro- and macro-scaffolding: An empirical reconstruction for the case of an intervention on percentages. *ZDM*, *47*(7), 1179–1194.

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM, 47*(6), 877–891.

Reeves, T. C., McKenney, S., & Herrington, J. (2011). Publishing and perishing: The critical importance of educational design research. *Australasian Journal of Educational Technology*, *27*(1), 55–65.

Resnick, L. (1988). Treating mathematics as an ill-structured discipline. In R. Charles & E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 32–60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for research in mathematics education*, *20*(1) 8–27.

Reys, B. J. (1994). Promoting Number Sense in the Middle Grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *1*(2), 114–20.

Rianasari, V. F. (2011). *Supporting students' understanding of percentage* (Unpublished master's thesis). Surabaya State University, Surabaya.

Risacher, B. F. (1991, April). *Informal and formal knowledge: The domain of percent.* Paper presented at the annual meeting of the New England Educational Research Organization, Portsmouth, NH.

Rittle-Johnson, B., & Siegler, R. S. (1998). The relation between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review. In C. Donlan (Ed.), *The development of mathematical skills* (pp. 75–110). London: Psychology Press.

Rodrigues, M. (2017). Agência no rebentar das ondas. *Educação e Matemática*, *142*, 1–2.

Rogoff, B. (1995). Observing sociocultural activity on three planes: Participatory appropriation, guided participation, and apprenticeship. In J. V. Wertsch, P. D. Rio, & A. Alvarez (Eds.), *Sociocultural Studies of Mind* (pp. 139–164). Cambridge UK: Cambridge University Press.

Rogoff, B. (2003). *The cultural nature of human development*. Oxford: Oxford University Press.

Rosenthal, I., Ilany, B. S., & Almog, N. (2009). Intuitive knowledge of percentages prior to learning. *Research in Mathematical Education*, *13*(4), 297–307.

Roy, G. J., Tobias, J. M., Safi, F., & Dixon, J. K. (2014). Sustaining social and sociomathematical norms with prospective elementary teachers in a Mathematics content course. *Investigations in Mathematics Learning*, *7*(2), 33–64.

Santana, I. (2007). *A Aprendizagem da escrita – Estudo sobre a revisão cooperada de texto*. Porto: Porto Editora.

Saxe, G. B. (2002). Children's developing mathematics in collective practices: A framework for analysis. *Journal of the Learning Sciences*, *11*(2–3), 275–300.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal Reasoning and Education* (pp. 311–343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Sekiguchi, Y. (2005). Development of mathematical norms in an eighth-grade japanese classroom. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 153–160). Melbourne: PME.

Sequeira, L., Freitas, P. J., & Nápoles, S. (2009). *Números e Operações: Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Serralha, F. (2018). Ensino de conceitos escolares: Perspetiva do Movimento da Escola Moderna. In F. H. Veiga (Ed.), *O ensino na escola de hoje: Teoria, investigação e aplicação* (pp. 449–472). Lisboa: Climepsi Editores.

Serrazina, L. (2015). Exames no final do 1.º e 2.º ciclos do ensino básico, para quê?. *Educação e Matemática*, *133*, 1–2.

Shavelson, R. J., Phillips, D. C., Towne, L., & Feuer, M. J. (2003). On the science of education design studies. *Educational Researcher*, *32*(1), 25–28.

Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge: The common core of numerical development. *Developmental Science*, *19*(3), 341–361.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, *75*(2), 428–444.

Siegler, R. S., & Braithwaite, D. W. (2017). Numerical development. *Annual Review of Psychology*, *68*, 187–213.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2014). An integrative theory of numerical development. *Child Development Perspectives*, *8*(3), 144–150.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in cognitive sciences*, *17*(1), 13–19.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273–296.

Siegler, R., Carpenter, T., Fennell, F., Geary, D., Lewis, J., Okamoto, Y., Thompson, L., & Wray, J. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide*. Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114–145.

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335–359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Small, M. (2014). *Uncomplicating fractions to meet Common Core Standards in Math: K–7*. New York: Teachers College Press.

Smith, M. S., Silver, E. A., Stein, M. K., Boston, M., Henningsen, M., & Hillen, A. F. (2005). *Improving instruction in rational numbers and proportionality: Using cases for transforming mathematics teaching and learning, Volume 1*. New York: Teachers College Press.

Soares, J. (2003). Comunicação na Sala de Aula e Ensino-Aprendizagem da Língua Portuguesa no 1º CEB. *Escola Moderna*, *18*, 15–21.

Sowder, J. & Sowder, L. (1988). Research into practice: The use of verbal explanation in Japanese and American classrooms. *Arithmetic Teacher*, *36*(2), 27–29.

Sowder, J., & Schappelle, B. (1994). Number sense-making. *Arithmetic Teacher*, *41*(6), 342–346.

Sowder, J., & Schappelle, B. P. (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics*: *Report of a conference*. San Diego: San Diego State University, Center for Research in Mathematics and Science Education.

SPCE. (2014). *Carta Ética*. Obtido de http://www.spce.org.pt/CARTA%C3%83%E2%80%B0TICA.pdf

Spinillo, A.G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, *15*(3), 475–487.

Spinillo, A.G. (2006). O sentido de número e sua importância na educação matemática. In M. R. Brito (Ed.). *Solução de problemas e a matemática escolar* (pp. 83–111). Campinas, SP: Alínea.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 503–518.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(3), 267–307.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction: An epistemological perspective.* New York: Springer.

Steinle, V., & Stacey, K. (2004). Persistence of decimal misconceptions and readiness to move to expertise. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 225–232). Bergen-Norway: Bergen University College.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education*. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *65*(1), 1–20.

Swan, M. (2001). Dealing with misconceptions in mathematics. In Gates P. (Ed.), *Issues in mathematics teaching* (pp. 147–165), London: Routledge.

Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics: A challenge to our beliefs and practices*. London: National Institute of Adult Continuing Education for the National Research and Development Centre for Adult Literacy and Numeracy.

Swart, W. L. (1981). Fractions vs. decimals: The wrong issue. *Arithmetic Teacher*, *29*(2), 17–18.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2018). Which type of rational numbers should students learn first?. *Educational Psychology Review*, *30*(2), 351–372.

Tripathi, P. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(8), 438–445.

Vale, I. & Pimentel, T. (2015). Criatividade matemática individual e coletiva. *Educação e Matemática*, *135*, 1–2.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*(5), 453–467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding about rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181–209.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(3), 344–355.

Van de Walle, J. A. (2007). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*. Boston: Pearson Education.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic Mathematics Education as work in progress. In F. L. Lin (Ed.), *Common Sense in Mathematics Education: Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan conference on Mathematics Education* (pp. 1–43). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 9–35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521–525). Dordrecht: Springer.

Van Galen, F., & Van Eerde, D. (2013). Solving problems with the percentage bar. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *4*(1), 1–8.

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Van Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense.

Ventura, H. (2014). *A aprendizagem dos números racionais através das conexões entre as suas representações: uma experiência de ensino no 2.º ciclo do ensino básico* (Tese de doutoramento não publicada). Lisboa: Universidade de Lisboa.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2–3), 275–298.

Vygotsky, L. (1996). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L. (2007). *Pensamento e linguagem*. Lisboa: Relógio D'Água.

Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. In M. Cole, V. John-Steiner, S. Scribner, & E. Souberman (Eds.), *Mind and society: The development of higher psychological processes* (pp. 79–91). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press.

Wertsch, J. V. (1994). The primacy of mediated action in sociocultural studies. *Mind, Culture, and Activity*, *1*(4), 202–208.

White, P. & Mitchelmore, M. (2005). Teaching percentage as a multiplicative relationship. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice: Proceedings of the 28th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 783–790). Melbourne, Sydney: MERGA.

Widjaja, W. (2012). Exercising sociomathematical norms in classroom discourse about data representation: Insights from one case study of a grade 6 lesson in Indonesia. *Mathematics Educator*, *13*(2), 21–38.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458–477.

Yapıcı, A., & Kayhan Altay, M. (2017). An investigation of middle school students' number sense regarding percent. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 17*(4), 2221–2243.

Anexo 1

Artigo I

Guerreiro, H. G., & Serrazina, M. L. (2017). Aprendizagem dos números racionais com compreensão envolvendo um processo de modelação emergente. *Bolema*, *31*(57), 181–201.

Versão dos autores

A Aprendizagem dos Números Racionais com Compreensão Envolvendo um Processo de Modelação Emergente

Learning Rational Numbers with Understanding Through an Emergent Modeling Process

Helena Gil Guerreiro

Maria de Lurdes Serrazina

Resumo

O estudo que se apresenta neste artigo foca-se no papel que as representações assumem à medida que são usadas e transformadas como modelos de situações contextualizadas e vão evoluindo para modelos de raciocínio, por alunos do 1.º ciclo do ensino básico (dos 8 aos 10 anos). Remete para uma aprendizagem dos números racionais com compreensão, enquadrada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. É apresentada uma trajetória de aprendizagem que privilegia inicialmente a compreensão da percentagem e são analisadas quatro tarefas de uma experiência de ensino, que segue os procedimentos metodológicos de uma Investigação Baseada em Design. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada num diário de bordo, gravações áudio e vídeo das aulas e produções dos alunos. A análise evidencia que a construção comparticipada de modelos a partir de representações, inicialmente associadas à percentagem, fortalece a interpretação de relações e facilita a compreensão de conceitos relativos aos números racionais.

Palavras-chave: Números Racionais. Sentido de Número. Representações. Modelação Emergente.

Abstract

The study presented in this paper focus on the role that representations assume as they are taken as models of a contextualized situation and reconstructed as models for reasoning, by primary school students (aged between 8 and 10 years). It regards rational numbers learning with understanding framed by the development of number sense perspective. Considering a learning trajectory that emphasizes initially the understanding of percentage, we analyze four tasks of a teaching experiment that was developed, following the methodological procedures of a Design Based Research. Data were collected through participant observation, supported in a logbook, audio and video recorded lessons and students' productions at the classroom. The analysis highlights that the socially construction of models from representations, initially associated with percentage, strengthens the interpretation of relations and facilitates the understanding of concepts related to rational numbers.

Keywords: Rational Numbers. Number Sense. Representations. Emergent Modeling.

Introdução

Os números racionais[6] constituem um dos temas matemáticos mais complexos e mais importantes com que os alunos se deparam ao longo do ensino básico (BEHR; LESH; POST; SILVER, 1983). A investigação em torno da aprendizagem destes números aponta que os alunos revelam dificuldade na compreensão da rede de conceitos que o estudo destes números envolve (BEHR et al., 1983; LAMON, 2006; MONTEIRO; PINTO, 2005; VAMVAKOUSSI; DOOREN; VERSCHAFFEL, 2012), o que torna este tópico desafiante do ponto de vista do desenvolvimento curricular.

Neste estudo, pretendemos analisar um percurso que se foca na compreensão dos conceitos em detrimento da tendência de sobrevalorizar um ensino centrado na mecanização de procedimentos e regras (FOSNOT; DOLK, 2002; MOSS; CASE, 1999). Este percurso segue uma trajetória de aprendizagem, inspirada em Moss e Case (1999), considerada pouco comum no 1.º ciclo do ensino básico, em que é inicialmente privilegiado um trabalho com a percentagem, num significado de medida. O processo de representação reveste-se de especial importância neste estudo, uma vez que a utilização por parte dos alunos de variados tipos de representação e a flexibilidade com que os usam é um aspeto determinante para alcançar um conhecimento mais profundo na aprendizagem da matemática (PONTE; SERRAZINA, 2000; TRIPATHI, 2008).

A investigação em curso, em que se baseia este artigo, tem como objetivo perceber como se pode construir uma aprendizagem com compreensão dos números racionais. Neste artigo, pretendemos compreender o papel que as representações assumem à medida que são usadas e transformadas como modelos de situações contextualizadas, por alunos do 1.º ciclo, e vão evoluindo para modelos de raciocínio. Focamos o olhar em quatro tarefas de uma experiência de ensino numa trajetória de aprendizagem, alicerçada no desenvolvimento do sentido de número, que privilegia inicialmente a percentagem, tirando partido das representações icónicas e dos contextos realistas que lhe estão associados.

1. A aprendizagem dos números racionais com compreensão

[6] O termo números racionais, usado neste texto, diz respeito ao conjunto dos números racionais não negativos.

O desenvolvimento do sentido de número racional. Uma aprendizagem efetiva da matemática envolve compreensão conceptual, isto é, de acordo com o NCTM (2014) "a compreensão e articulação de conceitos, operações e relações" (p. 7), que permite a construção de um reportório de estratégias e representações negociadas, bem como chegar à fluência na realização de procedimentos na resolução de problemas. Esta compreensão conceptual está estreitamente relacionada com o sentido de número, na medida em que este diz respeito ao conhecimento geral acerca dos números e das operações, bem como a capacidade e propensão para usar esse conhecimento de forma flexível na construção de raciocínios matemáticos e no desenvolvimento de estratégias (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Sem que haja uma definição única para sentido de número, que apresente objetivamente todas as suas características, podemos afirmar que é um constructo com uma natureza intuitiva, que cada um desenvolve gradualmente como resultado de explorar os números, visualizá-los em vários contextos e de os relacionar, estabelecendo conexões com os conhecimentos que já possuí (HOWDEN, 1989; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Espera-se assim que "o currículo de Matemática tenha em conta esta perspetiva de pensar os números e operações em termos de sentido de número" (BROCARDO; SERRAZINA, 2008, p. 101), inicialmente com os números inteiros, mas também depois, com os números racionais. O estudo dos números racionais tem associada uma mudança conceptual e importa ter presente que as experiências que os alunos vivenciaram anteriormente pode condicionar essa aprendizagem, limitando ou favorecendo essa mudança. (VAMVAKOUSSI et al., 2012). A complexidade do trabalho com este conjunto numérico deve-se ainda à multiplicidade de interpretações que os números racionais podem convocar em cada situação, os chamados subconstructos, como parte-todo, operador, quociente, medida e razão (BEHR et al., 1983; NCTM, 2010). Estes subconstructos apoiam-se em relações e significados, que variam de acordo com os contextos, sendo o seu sentido determinado em função da unidade definida, componentes fundamentais do sentido de número.

O papel da percentagem. Alguns estudos (HUNTER; ANTHONY, 2003; MOSS; CASE, 1999) evidenciam que os alunos podem desenvolver uma efetiva compreensão dos números racionais quando a sua aprendizagem envolve o estudo da percentagem, nas primeiras etapas do trabalho com este conjunto numérico. Esta abordagem permite valorizar as estratégias de resoluções espontâneas dos alunos, maximizando os conhecimentos intuitivos em relação à proporção e aos números inteiros de 1 a 100. A percentagem está presente na linguagem do quotidiano, estando a sua utilização generalizada aos mais diversos contextos da sociedade. A sua ligação aos contextos do dia-a-dia, familiares aos alunos é uma das razões que Moss e Case (1999) apontam para a sua introdução nesta fase da escolaridade. A simplicidade da sua representação faz com que seja de utilização corrente, mas é também esta simplicidade que a torna, segundo Parker e Leinhardt (1995), um conceito de aprendizagem complexa. Deste modo, numa introdução à noção de percentagem no 1.º ciclo do ensino básico há aspetos que devem ser tidos em conta, a começar pela própria palavra, percentagem, um conceito social com diversas interpretações. Um exemplo disso é o facto da linguagem que normalmente surge associada à percentagem ser aparentemente aditiva. Expressões como *custa menos 20%* escondem a sua natureza multiplicativa. Parker e Leinhardt (1995) referem ser importante ter em conta, mesmo numa fase inicial de trabalho, que a percentagem "é uma linguagem de proporção privilegiada que simplifica e condensa descrições de comparações multiplicativas" (p. 472). Os mesmos autores referem que para evitar que se torne ambíguo, o trabalho com a percentagem não pode remeter-se apenas para o significado parte-todo, uma vez que esta é um constructo com propriedades de número, de parte-todo e de razão. Importa assim percecionar a relação que traduz entre quantidades e as comparações proporcionais que oferece, muitas vezes escondidas atrás da notação, mas que a torna uma ideia potente[7] para uma aprendizagem dos números racionais com compreensão, no 1º ciclo do ensino básico.

Múltiplas representações na construção de modelos. As representações assumem um papel primordial na compreensão conceptual (NCTM, 2014). A multiplicidade de representações é justificada pela ideia de que "diferentes representações matemáticas de um conceito destacam diferentes aspetos da sua estrutura, que se complementam no sentido da compreensão desse mesmo conceito" (TRIPATHI, 2008, p.438). Por esta razão, os alunos precisam de desenvolver um bom "repertório de representações" (PONTE; SERRAZINA, 2000, p.45), representações, ativas, icónicas, simbólicas (BRUNER, 1962), e linguagem oral e escrita (PONTE; SERRAZINA, 2000), mais ou menos convencionais, com as quais "se sintam confiantes a trabalhar" (p.45). Contudo, Boavida, Paiva, Cebola, Vale e Pimentel (2008) salientam que nem todos os alunos estão aptos ao mesmo tempo para trabalhar com a mesma representação, o que reforça a necessidade de se discutirem diversos processos de

[7] Entende-se por potente o ser adequada, eficaz e acessível.

exploração de uma mesma tarefa, de modo a que os alunos possam, progressivamente, ir associando os novos conhecimentos a representações diversificadas.

A corrente de investigação holandesa (GALEN; FEIJS; FIGUEIREDO; GRAVEMEIJER; HERPEN; KEIJZER, 2008; GRAVEMEIJER, 2005) fala em modelos e associa o processo de modelação à atividade que os alunos desenvolvem quando usam e transformam representações para chegar à solução de um problema. Esta atividade implica uma evolução do próprio modelo, como afirmam Galen et al. (2008) "de modelos de situações concretas para modelos de pensamento" (p.18), num processo com uma dupla implicação, que se traduz na ideia de modelação emergente (GRAVEMEIJER, 2005). Este processo considera por um lado "o processo através do qual o modelo emerge" (p.3) e por outro, "o processo através do qual os modelos fazem emergir um conhecimento matemático mais formal" (p.3). Progressivamente, o modelo vai deixando a função de representar um problema contextualizado (*modelo de*) para se ir assumindo como a base do raciocínio matemático (*modelo para*). Um modelo é assim interpretado como uma construção gradual que resulta da atividade do aluno sobre uma representação, apoiando a construção de relações e constituindo a base do seu raciocínio matemático.

Apoiado em representações e tendo em vista a modelação de situações associadas à noção de percentagem, Moss e Case (1999) constroem um modelo conceptual, que remete para o uso de recipientes e imagens, a que se vão associando procedimentos de cálculo, que se constroem com sentido. Do mesmo modo, Van Den Heuvel-Panhuizen (2003) apresenta o modelo da barra, como um modelo para pensar. Esta barra é convocada na passagem da utilização de representações ativas, tiras de papel associadas a um dado contexto, para uma outra representação, icónica não implicada diretamente num contexto. Brocardo (2010), convocando o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), sugere o recurso a contextos que envolvam o uso da barra retangular e da reta numérica, considerando que estas representações se podem constituir como modelos, uma vez que permitem interpretar relações complexas, nomeadamente de proporcionalidade, com significado. Assim, as tarefas e os contextos devem ser pensados, como refere Wood (1999), de modo a proporcionarem momentos em que se espera que os alunos "participem, examinem, critiquem, e validem o seu conhecimento matemático através de um discurso pensado" (p. 188), isto é, possam, progressivamente, ir desenvolvendo também a sua capacidade de raciocínio. Segundo a autora, a apresentação de argumentos, com justificação e validação no grupo, são precursores de um raciocínio mais formal, que se pretende que os alunos venham a desenvolver ao longo da sua escolaridade.

A inter-relação entre estes elementos teóricos permite-nos considerar que a aprendizagem dos números racionais com compreensão pode desenvolver-se alicerçada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, Para tal, são convocadas múltiplas representações no processo emergente de construção de modelos para raciocinar matematicamente. A percentagem, pela sua ligação aos contextos do dia-a-dia e pelas relações que oferece, faz sentido como representação a privilegiar, numa trajetória de aprendizagem que se desenvolve através de uma aprendizagem comparticipada, apoiada nos conhecimentos prévios dos números que os alunos já possuem, mas desencadeando a necessária mudança conceptual.

2. Metodologia

O estudo que apresentamos neste artigo enquadra-se numa investigação mais alargada, de paradigma interpretativo, que se desenvolve segundo uma abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994). A modalidade de investigação escolhida é a Investigação Baseada em Design (ANDERSON; SHATTUCK, 2012; COBB; JACKSON; DUNLAP, 2016; PONTE; CARVALHO; MATA-PEREIRA; QUARESMA (in Press)) e apoia-se na construção e implementação de uma experiência de ensino na sala de aula. O caracter cíclico cumulativo e de intervenção de uma investigação desta natureza envolve interpretações da atividade matemática dos alunos e do ambiente de aprendizagem da sala de aula, no sentido da construção de uma teoria local de aprendizagem (GRAVEMEIJER; COBB, 2006).

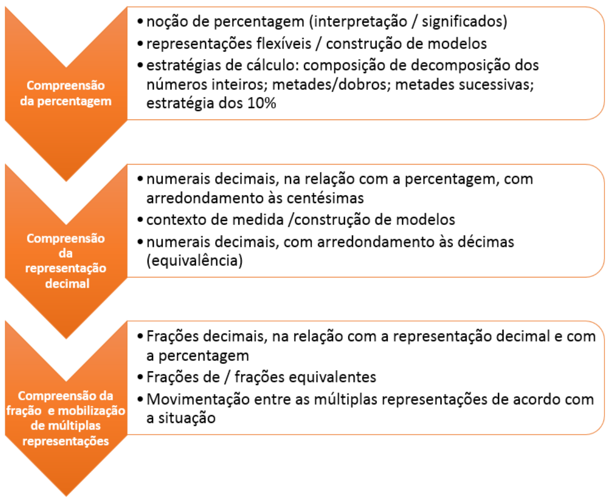
Conjetura e princípios do design da experiência de ensino. A experiência de ensino implementada é orientada por uma conjetura (CONFREY; LACHANCE, 2000) e apresenta uma dimensão de conteúdo matemático e outra de conteúdo pedagógico. A primeira dimensão incorpora alguns princípios de *design* relacionados com conteúdos e processos matemáticos que se pretende que os alunos aprendam e a segunda dimensão tem por base princípios de *design* que dizem respeito aos meios através dos quais se pretende que os alunos aprendam. De uma forma sucinta, traduzimos a conjetura no seguinte enunciado: *No tópico dos números racionais, um trabalho apoiado numa sequência de tarefas, que privilegia a percentagem e a subsequente inter-relação com as outras representações (decimal e fração), gera aprendizagens neste conjunto* *numérico, à medida que os alunos participam na atividade social da sala de aula e constroem significados partilhados, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.*

No que respeita à dimensão específica do conteúdo matemático, podemos identificar cinco princípios que a sustentam: 1) desenvolver o sentido de número, na construção de relações e conceitos relativos aos números racionais; 2) privilegiar inicialmente a percentagem, a que se segue o numeral decimal[8] e posteriormente a fração, numa articulação entrecruzada entre estas representações; 3) apoiar as estratégias de cálculo na estrutura concetual dos números inteiros; 4) suportar a construção de modelos nas representações ativas, icónicas, simbólicas e na linguagem oral e escrita, partindo dos conhecimentos intuitivos e informais dos alunos; 5) privilegiar tarefas que envolvam os significados de medida e razão, tendo em vista o desenvolvimento de relações multiplicativas e de capacidades associadas a um raciocínio proporcional. Relativamente à dimensão do conteúdo pedagógico, os princípios associados são cinco e destacam a importância de: 1) escolher contextos significativos e relacionados com as vivências dos alunos; 2) construir tarefas tendo em vista a construção de modelos pelos alunos; 3) implementar as tarefas de acordo com uma abordagem exploratória, valorizando as discussões coletivas; 4) promover a aprendizagem comparticipada, promovendo a interação e a negociação de significados e 5) privilegiar a compreensão dos conceitos em detrimento da mecanização de regras e procedimentos.

A trajetória de aprendizagem. A implementação da experiência de ensino acontece numa mesma turma em que a professora titular é também investigadora (primeira autora), ao longo de vinte aulas nos 3º e 4º anos, nos anos letivos de 2012/2013 e 2013/2014. A turma, com vinte alunos no 3.º ano e vinte e dois no 4.º, com idades entre os 8 e os 10 anos, provenientes de um meio socioeconómico médio-baixo, integra uma escola pública da Grande Lisboa, em Portugal. Ao longo do seu percurso no 1.º ciclo esteve em vigor o anterior Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), sendo o aproveitamento dos alunos globalmente satisfatório. Os números racionais começaram a ser trabalhados nos dois primeiros anos, tal como sugeria o mesmo Programa (ME, 2007), "com uma abordagem intuitiva a partir de situações de

[8] Neste texto designamos por *numeral decimal* a representação de números racionais não negativos, através do sistema decimal, utilizando vírgula.

partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais, recorrendo a modelos e à representação em forma de fração nos casos mais simples.” (p. 15). Nos 3.º e 4.º anos, o seu estudo é aprofundado, seguindo uma trajetória de aprendizagem, que é hipotética, como explica Simon (2005), dado que reúne um conjunto de pressupostos sobre o processo de aprendizagem dos alunos e que têm por base os princípios de *design* anteriormente apresentados. Esta trajetória traduz um percurso do ponto de vista do conteúdo matemático, que pode dividir-se, de forma esquemática (Figura 1), em três etapas, como sugere o estudo de Moss e Case (1999). Embora se apresentem de forma



sequenciada, para facilitar a leitura, não pretendem sugerir uma trajetória de aprendizagem linear. A primeira etapa remete para o início do desenvolvimento da compreensão da noção de percentagem. Segue-se-lhe a introdução da representação decimal, fazendo as centésimas decorrer da percentagem, e por último, o trabalho com as frações, como extensão da representação decimal, inter-relacionando as diferentes representações entre si.

Figura 1 – Esquema da trajetória de aprendizagem do conteúdo matemático

A recolha de dados decorreu no ambiente natural de aprendizagem, a sala de aula. Para acautelar uma excessiva implicação da primeira autora e obter uma descrição o mais fiel e completa possível dos episódios procurámos uma variedade de procedimentos de recolha de dados (CONFREY; LACHANCE, 2000). Obteve-se o consentimento informado voluntário dos participantes e foi garantido o anonimato e confidencialidade dos dados (AERA, 2012). Os dados resultam dos registos da observação participante, apoiados pelas gravações áudio e vídeo das aulas, do diário de bordo da professora/investigadora, e das produções escritas dos alunos.

O processo de análise, tratando-se de uma investigação baseada em *design*, desenvolveu-se em dois momentos, e envolveu uma análise contínua e reflexiva durante todo o processo investigativo (GRAVEMEIJER; COBB, 2006). Ao longo da preparação e implementação da experiência de ensino na sala de aula decorreu uma análise preliminar, cronológica, que permitiu a emersão de categorias a partir dos dados. Posteriormente à recolha de dados deu-se início a uma análise retrospetiva, ainda em curso, que implicou voltar a olhar todo o conjunto de dados e dividi-lo em categorias, desta vez baseadas em tipologias predeterminadas geradas a partir do quadro teórico. O cruzamento resultante destas duas dimensões de análise de conteúdo permite explicitar e justificar a interpretação da aprendizagem dos alunos, traduzindo-se em refinamentos da conjetura, no sentido da construção gradual e emergente de uma teoria de aprendizagem local. A análise de dados que trazemos a este artigo remete para quatro tarefas da experiência de ensino, que decorreram na 1.ª e 2.ª etapas da trajetória de aprendizagem, e envolve o estudo da relação entre três categorias: estratégias que suportam o raciocínio; significados do número e relações numéricas e representações na construção de modelos. Embora não sendo consecutivas, as tarefas são apresentadas pela ordem que foram propostas aos alunos.

3. Episódios da Experiência de Ensino

Tarefa 1. A Tarefa 1 integra a primeira etapa da trajetória de aprendizagem, que diz respeito à Compreensão da Percentagem (Figura 1), e pretende estabelecer conexões entre a perceção natural que os alunos revelam relativamente à proporcionalidade e a sua intuição em relação às percentagens. Esta tarefa envolve a exploração da dinâmica de uma bateria de telemóvel. A imagem dada (Figura 2) pretende apoiar a realização da tarefa enquanto representação icónica.

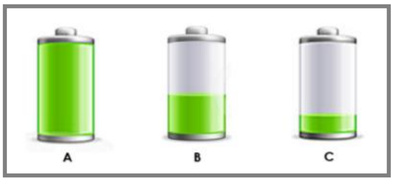


Figura 2 – Imagem dada no enunciado da Tarefa 1.

Na segunda parte da tarefa é pedido que os alunos identifiquem que percentagem está representada na imagem da bateria C. Alguns alunos sugerem que estão representados 20%, outros 25%. Para justificar a sua opinião, um grupo de alunos que considera representados 25% usa como estratégia o cálculo das metades sucessivas, apoiando-se na representação icónica, como explicita Dina, na discussão em coletivo.

> Dina – Eu vi 100 e fiz metade de 100, que deu 50 e depois parecia outra vez metade.

Nesta situação a aluna considera suficiente a resposta com um valor aproximado. No entanto, quando está a comunicar a estratégia do seu grupo à turma, usando como suporte o Quadro Interativo Multimédia (QIM) (Figura 3), a devolução evidencia que embora possa ser uma estratégia multiplicativa potente, não se revela eficaz nesta situação. Quando a aluna marca metade de 50%, obtém uma porção que é maior que zona sombreada na bateria C, chegando assim a um impasse.

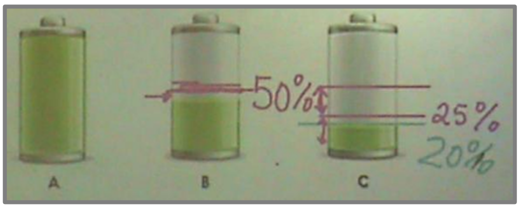


Figura 3 – Registos no QIM no momento de discussão em coletivo da Tarefa 1.

É a apresentação de uma estratégia alternativa, pelos colegas de outros grupos, que contribui para a construção conjunta de uma solução comum.

> Simão – Isso não está a 25 por cento.
> Professora – 25 por cento seria a metade da metade. Então quanto é que será que é?
> Alunos – 20 por cento.

É então sugerido que a zona sombreada seja considerada como parte a iterar, considerando como resultante da divisão do todo em cinco partes iguais.

> Professora – Porquê? Marco.
> Marco – Porque cabe 5 vezes.
> Professora – [considera a medida da parte representada e repete na imagem]
> Dinis – Assim já vais no 80 por cento...
> Professora – Acham que cada uma destas partes representa 20 por cento?
> Alunos – Sim.
> Professora – Assim, quanto me falta para ter a bateria cheia? Ana.
> Ana – Faltam 80 por cento.

O registo da tarefa de Ana, na figura 4, permite ilustrar esta estratégia usada pelo seu grupo, que passa por verificar quantas vezes a zona sombreada cabe na unidade e chegando à conclusão de cada parte corresponde a 20%.

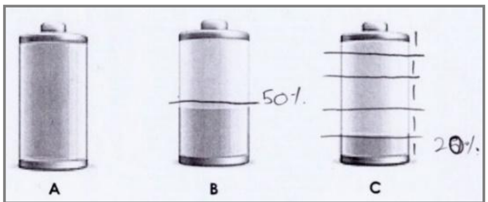


Figura 4 – Registo de Ana na resolução da Tarefa 1.

Este procedimento traduz uma estratégia multiplicativa, com recurso à divisão. O significado de medida permite-lhes comparar a quantidade considerada em relação ao tamanho da unidade, que seria representada por uma bateria completamente carregada. Os alunos conseguem modelar a situação a partir da representação icónica da bateria, evidenciando a relação entre as duas distâncias, na qual vão incorporando elementos de representação simbólica. A construção de um modelo como estratégia de cálculo, a partir de uma representação com elementos contextuais, acontece em articulação com a experiência do dia-a-dia, apelando ao sentido de proporcionalidade dos alunos para estimar uma percentagem representada.

Tarefa 2. A Tarefa 2 (Figura 5) também enquadrada na etapa de Compreensão da Percentagem (Figura 1), pretende permitir que a barra de estado, enquanto representação familiar do quotidiano, se venha a constituir como modelo de uma situação real, a gravação de um programa. Esta tarefa convoca ainda o uso de uma outra representação, uma tabela de razão.

Observa a barra. O que está gravado demorou 20 minutos. Quanto tempo demora a gravar todo o programa? Explica como pensaste.

Completa a tabela e descobre quantos minutos demorou a gravação de cada percentagem do programa.

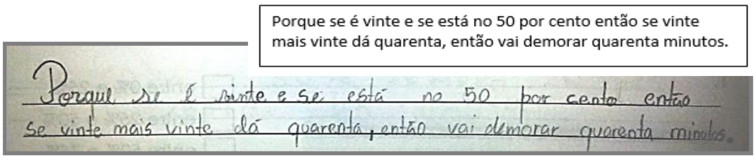
Percentagem	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Tempo (min)		8			20	24			36	

Figura 5 – Enunciado da Tarefa 2.

Os alunos interpretam a barra de estado com uma simplicidade natural, pois diariamente se deparam com esta representação no Magalhães[9], quando descarregam programas ou jogos. Nesta tarefa os alunos são mobilizados a estabelecer relações e calcular percentagens de referência. A situação implica que os alunos determinem a parte de um programa gravado, a velocidade constante, sabendo a percentagem e o todo. Contudo, a interpretação da situação vai além de um significado parte-todo, permitindo uma interpretação, ainda que intuitiva, do significado de razão. Nela estão implicadas quantidades de grandezas de natureza diferente: tempo e quantidade de programa gravado em percentagem, sendo necessário que estabeleçam uma relação de comparação. Embora esteja subjacente uma estrutura multiplicativa, alguns grupos de alunos, nas explicações que apresentam em linguagem escrita, verbalizam a relação de

[9] Computador portátil pessoal distribuído aos alunos, até 2011, ao abrigo da Iniciativa Governamental "e-Escolinha".

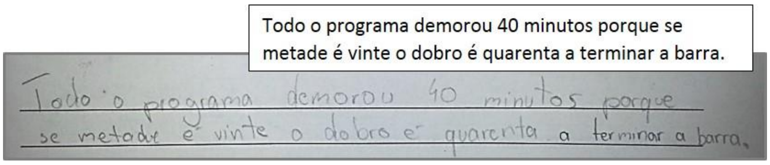
proporcionalidade recorrendo a um sentido aditivo, como é o caso da justificação apresentada no registo de Hélio, que podemos ler na figura 6.


Porque se é vinte e se está no 50 por cento então se vinte mais vinte dá quarenta, então vai demorar quarenta minutos.

Porque se é vinte e se está no 50 por cento então se vinte mais vinte dá quarenta, então vai demorar quarenta minutos.

Figura 6 – Justificação Hélio à 1ª pergunta da Tarefa 2.

Outros alunos conseguem traduzir em linguagem natural uma relação de natureza multiplicativa, que estabelecem apoiada na estratégia das metades/dobros, comparando dois conjuntos de números e mantendo a razão constante, como evidencia o testemunho de Mafalda (Figura 7).

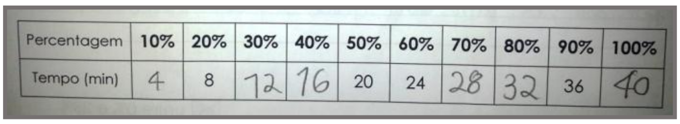

Todo o programa demorou 40 minutos porque se metade é vinte o dobro é quarenta a terminar a barra.

Todo o programa demorou 40 minutos porque se metade é vinte o dobro é quarenta a terminar a barra.

Figura 7 – Justificação de Mafalda à 1.ª questão da Tarefa 2.

Ao justificar, Mafalda parece interpretar a proporção simples entre os quatro valores das quantidades referentes às grandezas envolvidas, apresentando o argumento de que a relação que o tempo que demora a gravar metade do programa corresponde ao tempo que demora a gravar todo o programa, como 50% corresponde a 100%.

Na segunda parte desta tarefa é apresentada uma tabela de razão (Figura 8). Esta representação é escolhida no sentido de tornar explícitas relações de comparação em termos multiplicativos e facilitar o cálculo do tempo de diferentes percentagens do programa gravado.



Percentagem	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Tempo (min)	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

Figura 8 – Registo de Clara à 2ª questão da Tarefa 2.

A tarefa revelou-se desafiante para a turma. O primeiro facto descoberto é a relação com os múltiplos de quatro, uma regularidade sugerida pela tabela. Dinis, por exemplo, verifica que na tabela os minutos vão aumentando “de quatro em quatro” e assim consegue descobrir todas as percentagens relativas à quantidade de programa gravado, recorrendo ao sentido aditivo da multiplicação, sem que explicite a relação entre as duas grandezas:

Dinis – Antes de preencher a tabela eu olhei para os números para ver se os números me davam uma pista e a verdade é que os números me deram uma pista. O 20 e o 24 deram-me uma pista.
Professora – Como assim?
Dinis – Eu vi que o vinte [apontando para os 50%] passou para este [apontando para os 60%] fazendo mais quatro. . . . É sempre de quatro em quatro.

Nesta fase de construção de conceitos, outros alunos, tal como Dinis, também compreendem a existência de uma regularidade, mas não a descobrem a partir da estratégia dos 10%, como seria expectável. Analisam a grandeza tempo, identificando um padrão crescente nos minutos, sem a relacionar com a quantidade de programa gravado. Outros avançam um pouco mais, como o caso de Bruna:

Bruna – Eu fiz assim. Vi que duas vezes 10 não dava quarenta, fiz três vezes dez e também não dava quarenta e vi que quatro vezes dez dava, descobri que era o quatro.

Esta aluna percebe a relação entre os dois conjuntos de números e avança na descoberta recorrendo a uma estratégia de tentativa-erro, a fim de encontrar o 10%, tendo presente que para tal, teria que encontrar o número que multiplicado por dez daria 40, que corresponde aos 100%. A apresentação de várias estratégias na discussão coletiva permite que o grupo avance, acontecendo a reformulação de raciocínios, de acordo com o que cada um consegue interpretar nesse momento:

Heitor – O processo era sempre de quatro em quatro minutos.
Simão – 10% são 4, é sempre vezes 4.
Mafalda – O processo todo demorava dez vezes quatro minutos.
Professora – Todo o processo de gravação do programa demorava dez vezes quatro minutos.
Hélio – Podíamos também olhar para 36 minutos e ver qual era o número que dava 40.

Neste diálogo a descoberta das relações numéricas parece apoiada nos conhecimentos que os alunos já têm relativamente às regularidades da tabuada. Podemos ainda constatar que todos os alunos percecionam que o número de minutos vai aumentando proporcionalmente em relação à percentagem de programa gravado. Há alunos ainda presos a estruturas aditivas e outros que, gradualmente, de acordo com cada situação, conseguem ir comparando e compreendendo a noção de percentagem como parte de um todo que corresponde a 100, recorrendo a estratégias multiplicativas. Enquanto representações privilegiadas nesta tarefa, quer a barra de estado, quer a tabela de razão vão sendo apropriadas como modelos da situação e como estratégias de cálculo, em que apoiam a construção do seu raciocínio. Ambas encorajam a construção de estratégias que se apoiam em relações numéricas e que modelam uma situação real, permitindo evidenciar o seu carácter proporcional. Os alunos efetuam cálculos com os números que lhes permitem percecionar que a relação, isto é, a razão, se mantém.

Tarefa 3. A Tarefa 3 surge na sequência de um trabalho de projeto de um grupo de alunos, em Estudo do Meio, sobre *bulldogs* franceses. Do ponto de vista do conteúdo matemático insere-se na etapa correspondente ao desenvolvimento da Compreensão da Percentagem (Figura 1), tal como as anteriores. Procura relacionar a massa com a percentagem relativa à quantidade de ração no saco, numa interpretação da percentagem como um esquema de comparações, que remetem para a construção, numa etapa inicial, do significado de razão, apelando à intuição relativa à proporção. A imagem dada apresenta uma representação icónica do saco de ração apoiada por duas retas numéricas, representando duas escalas, visível na figura 10, em que o topo do saco representa o saco cheio, com 20 kg de ração, correspondendo essa indicação a 100%. A presença destas duas escalas permite estabelecer relações de comparação, fazendo variar a massa de ração de um saco em função da quantidade de ração que o saco leva, no sentido de induzir a construção de sentido no uso da reta numérica dupla.

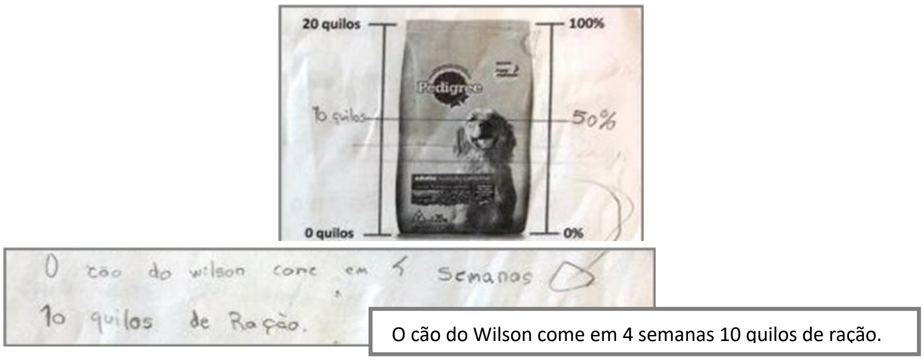


Figura 10 – Registo de Carolina na resolução da Tarefa 3.

Todos os grupos calculam os 50% como metade da massa de ração em quilogramas, como sugerido, sem dificuldade. Alguns grupos de alunos usam a representação icónica dada diretamente, como é exemplo a resolução da figura 10, de Carolina. Outros grupos convocam a imagem de apoio dada, mas reconstroem-na, modelando a situação para apoiar a construção de relações. Da imagem da figura 11, de Mafalda, destaca-se a relação entre quantidades, suportada pelas duas retas, que o grupo usa para construir o seu raciocínio. Em cada alínea da tarefa, o grupo recorre à reconceptualização da unidade.

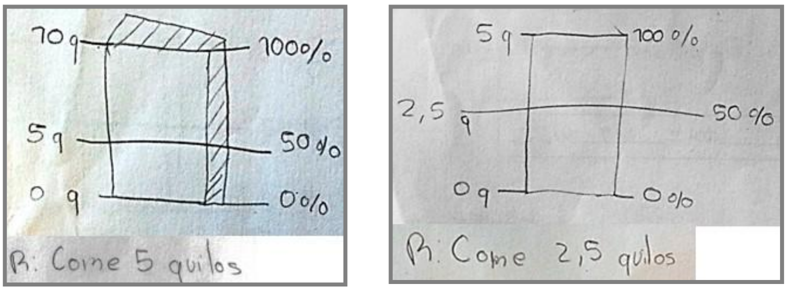


Figura 11 – Registo de Mafalda na resolução a Tarefa 3 (1.2. e 1.3.).

Na segunda alínea da tarefa perceciona que o saco fica apenas com 10 quilogramas. Esses 10 quilogramas passam então a ser considerados como o todo, que identificam como 100% e se 10 quilogramas dão para quatro semanas, acham 50% para determinar a quantidade para duas semanas. E repetem o procedimento para calcular a ração que consome numa semana. Os alunos deste grupo usam a estratégia das metades, mas mobilizam a relação que a percentagem oferece para interpretar a unidade, percecionando que há uma relação entre quantidades que se mantém constante e que as duas vão variando em conjunto. Esta situação envolve uma construção inicial e intuitiva do significado de razão dos números racionais.

Ainda num outro grupo, depois de calculada a percentagem correspondente a 50% e a 25%, os alunos optam por modelar a situação através de uma tabela de razão (Figura 12), que lhes permite interpretar também a relação em função do tempo.

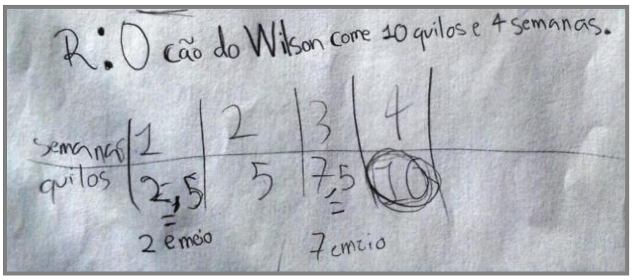


Figura 12 – Registo de Ana na resolução a tarefa 3.

Os alunos convocam uma tabela de razão espontaneamente, atribuindo-lhe significado no contexto da tarefa apresentada. Nesta situação a construção da tabela assume-se como um modelo para raciocinar, tendo sido mobilizado de situações anteriores para suportar um cálculo generalizável, neste caso num novo problema. Note-se que quer as retas numéricas verticais, quer a tabela de razão, são representações que os alunos reconstroem como modelos da situação, em que emergem elementos simbólicos. Ambas permitem que os alunos estabeleçam relações entre quantidades de grandezas diferentes, comparando-as, permitindo construir significados e evidenciando os cálculos e vão sendo apropriadas como modelos para raciocinar. O numeral decimal surge nesta tarefa de forma natural, sendo por vezes apoiado pelo registo por palavras, como é possível ver na figura 12. Uma vez que a representação decimal não fora trabalhada do ponto de vista formal, há alunos que dominam a sua notação e outros que não, e importa que seja entendida e o seu significado posto em comum, no momento de comunicação à turma.

Tarefa 4. A última tarefa que apresentamos remete já para a segunda etapa da trajetória de aprendizagem (Figura 1), a de Compreensão da Representação Decimal. Esta é uma das tarefas de introdução formal da representação decimal dos números racionais. A articulação com o conhecimento construído relativo à percentagem, como se defende na conjetura do *design*, permite estabelecer conexões entre as duas formas de representação e os modelos a elas associados. A sequência desenvolve-se num contexto real, associado à medição de objetos da sala de aula, que os alunos realizam, recorrendo ao significado de medida dos números racionais. A representação privilegiada é a reta dupla. Os alunos usam conhecimentos prévios relativos aos números naturais para estabelecer relações entre o número e o seu posicionamento em relação a outros números, considerando como unidade de referência 100 centímetros. No sentido da precisão, alguns grupos procuram registar primeiro números de referência. Na figura 13, percebemos que são marcados o 10% e o 20% na reta como forma de facilitar a localização de outros números, neste caso o 9, o 21 e o 27.

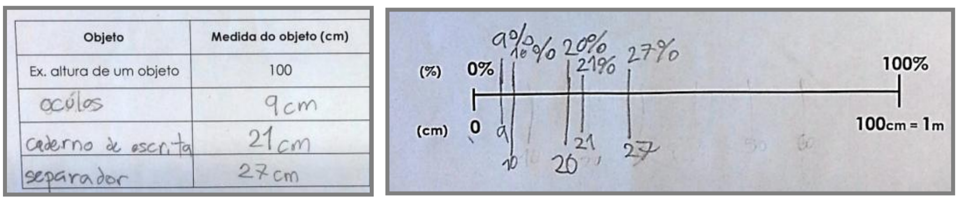

Objeto	Medida do objeto (cm)
Ex. altura de um objeto	100
ocúlos	9cm
caderno de escrita	21cm
separador	27cm

Figura 13 – Registo de Dina da Tarefa 4

Considerando o facto matemático que integra o reportório partilhado da turma de que um metro é equivalente a cem centímetros, o desafio lançado à turma é de passar para uma reta numérica dupla em que se considera como unidade um metro. Na discussão em coletivo, o primeiro número a marcar é noventa e um centímetros, que corresponde à medida da largura da porta e que tinha sido apontado correspondente 91% da unidade anterior.

> Professora – […] O que representa agora o um?
> Dinis – É um metro.
> Professora – Vamos considerar que a unidade é um metro e não os cem centímetros. Então vamos agora representar na reta o noventa e um. Esta percentagem corresponde a que parte do metro?
> Simão – Não chega a um metro.

Nesta etapa é verbalizada uma forma de representar parte do metro, sem recorrer a um submúltiplo, através da interpretação do conceito de centésima, embora no contexto de uma grandeza.

> Clara – Tens zero vírgula noventa e um metros.
> Professora – Então esta é a sugestão da Clara [escreve na reta 0,91, como se pode ver na figura 14].
> Clara – Porque não chega a um metro, portanto zero metros e depois escrevemos noventa e um centímetros.

A representação decimal, familiar à maioria dos alunos através da experiência do quotidiano, é neste momento convocada para designar uma quantidade inferior a um. A compreensão da simbologia associada a esta representação apoia-se na tomada de consciência do valor de posição do número, que se constrói com sentido neste contexto de medição de grandezas.

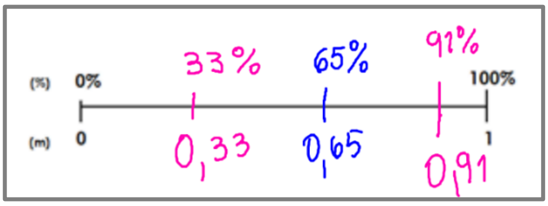


Figura 14 – Captura de *écran* do QIM durante o momento de discussão da Tarefa 4.

A reta numérica dupla permitiu suportar os raciocínios construídos (Figura 14), constituindo-se como modelo que espelha a estruturação do raciocínio com a grandeza considerada. Traduz uma relação de ordem, sendo que ao mesmo ponto da reta correspondem representações equivalentes, em percentagem e em numeral decimal. O papel da percentagem é aqui importante pois permite identificar uma posição na reta, remetendo para um todo que corresponde a cem, numa estreita e favorável relação de sinonímia em relação às centésimas, e contribuir para a construção da noção de que qualquer percentagem se consegue transformar, facilmente, num numeral decimal.

4. Considerações Finais

As tarefas apresentadas têm em comum o recurso a diferentes representações, ativas, icónicas, simbólicas, bem como a linguagem oral e escrita (PONTE; SERRAZINA, 2000), que são mobilizadas e apropriadas pelos alunos, que as transformam. O recurso a estas representações parece ter apoiado a construção da aprendizagem dos conceitos associados à compreensão da percentagem, visando uma abordagem inicial, intuitiva e que se pretende adequada a alunos de 1.º ciclo. A imagem de uma bateria de telemóvel, um recipiente do dia-a-dia, uma barra de estado ou uma tabela de razão são usados pelos alunos e reconstruídos como modelos de situações contextualizadas, para representar conceitos ou relações, que lhes permitem ir atribuindo sentido à percentagem, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número. Estas representações têm por base a visualização, proporcionando a exploração de comparações, tornando visíveis os dois conjuntos de números, as duas quantidades que se comparam, numa construção intuitiva e informal do significado de razão. A imagem da bateria e a barra de estado sustentam a construção da reta dupla como modelo para raciocinar como refere Gravemeijer (2005) e evidenciam, por exemplo, os quatro números que estão envolvidos numa dada situação, relacionando-os, no que mais tarde no seu processo de aprendizagem, os alunos vão formalizar como proporção.

Verifica-se nestes episódios que os alunos conseguem interpretar constructos do número racional menos habituais nesta etapa da escolaridade, como a medida e a razão, indo ao encontro das ideias de Parker e Leinhardt (1995) no que respeita à necessidade de envolver vários constructos num trabalho inicial com a percentagem. De notar que não se pretende encontrar a representação mais adequada, mas potenciar as vantagens que cada uma traz numa abordagem conjunta da noção de percentagem, contornando as suas limitações. Por outro lado, as representações escolhidas procuram potenciar o conhecimento matemático informal desenvolvido fora da escola.

Os resultados permitem ainda evidenciar que o trabalho com a percentagem pode ser desenvolvido afastado dos procedimentos de cálculo formais, como afirmam Moss e Case (1991), privilegiando-se o desenvolvimento de estratégias de cálculo que coordenam os conhecimentos intuitivos dos alunos com as estratégias que dominam, de manipulação dos números inteiros, como a da composição e decomposição dos números ou a das metades/dobros. A reta numérica dupla assume-se como modelo (e.g., na Tarefa 4) na medida em que fez emergir a representação decimal suportada na representação em percentagem, a partir dos conhecimentos que os alunos possuíam em relação aos números inteiros. Esta situação reforça que a presença de um natural raciocínio tendencioso, resultante do trabalho com os números inteiros, como afirmam Vamvakoussi et al. (2012), não tem que ser necessariamente encarada como um aspeto negativo. A mudança conceptual que se constrói, no alargamento a este novo conjunto numérico, é desenvolvida através da negociação de significados, em interação, permitindo uma coconstrução do que Wood (1999) identifica como sendo produtos sociais, associados a um novo conjunto numérico.

Nesta discussão procura-se destacar momentos em que a construção da rede de relações e conceitos que a noção de percentagem envolve parece ser acessível, estimulante e potente na aprendizagem com compreensão dos números racionais, para alunos do 1.º ciclo do ensino básico, através de num processo de modelação emergente. Apoiados em representações familiares e contextos realistas, os alunos são encorajados a um pensamento relacional, a partir dos modelos, que remete para um raciocínio multiplicativo (LAMON, 2006), enquanto vão estabelecendo relações de comparação, que integram o reportório partilhado pela turma. Esta abordagem permite que “os alunos possam ir fazendo as primeiras conversões entre diferentes sistemas de representação, de forma direta e intuitiva” (MOSS; CASE, 1999, p. 129), o que contribui para uma construção gradual de uma aprendizagem inter-relacionada das diferentes representações simbólicas do número racional.

Agradecimento

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, no âmbito do Programa de Bolsas de Doutoramento.

Referências

ANDERSON, T.; SHATTUCK, J. Design-based research a decade of progress in education research?. **Educational Researcher**, Washington, v.41, n.1, p.16-25, Feb. 2012.

AERA. Code of Ethics. **Educational Researcher**, v. 40, n. 3, p. 145-156, Apr. 2011.

BEHR, M.; LESH, R.; POST, T.; SILVER, E. Rational number concepts. In: LESH, R.; LANDAU, M. (Eds.). **Acquisition of mathematics concepts and processes**. New York: Academic Press, 1983. p. 91-126.

BOAVIDA, A. M.; PAIVA, A. L.; CEBOLA, G.; VALE, I.; PIMENTEL, T. **A experiência matemática no ensino básico**. Lisboa: ME/DGIDC, 2008.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **A Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BROCARDO, J. Trabalhar os números racionais numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. **Educação e Matemática**. Lisboa, v.109, p.15-23, Set/Out. 2010.

BROCARDO, J.; SERRAZINA, L. O sentido de número no currículo de Matemática. In: BROCARDO, J.; SERRAZINA, L.; ROCHA, I. (Orgs.). **O sentido do número**: reflexões que entrecruzam teoria e prática Lisboa: Escolar Editora, 2008. p. 97-115.

BRUNER, J. **The process of education**. Cambridge: Harvard University Press, 1962.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: An analysis and critique. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Eds.). **Handbook of International Research in Mathematics Education**. New York: Routledge, 2016. p. 481-503.

COBB, P.; STEPHAN, M.; MCCLAIN, K.; GRAVEMEIJER, K. Participating in Classroom Mathematical Practices. In: YACKEL, E.; GRAVEMEIJER, K.; SFARD, A. (Eds.). **A Journey in Mathematics Education Research:** Insights from the Work of Paul Cobb**.** New York: Springer, 2001. p. 117–163.

CONFREY, J.; LACHANCE, A. Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In: KELLY, A.; LESH, R. (Eds.). **Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 231-266.

FOSNOT, C. T.; DOLK, M. **Young Mathematicians at Work:** Constructing Fractions, Decimals and Percents. Portsmouth, NH: Heinemann, 2002.

GALEN, F.; FEIJS, E.; FIGUEIREDO, N.; GRAVEMEIJER, K.; HERPEN, E.; KEIJZER, R. **Fractions, percentages, decimals and proportions:** A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6. Rotterdam: Sense, 2008.

GRAVEMEIJER, K. What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In: SANTOS, L.; CANAVARRO, A. P.; BROCARDO, J. (Eds.). **Educação matemática:** Caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, 2005. p. 83-101.

GRAVEMEIJER, K.; COBB, P. Design research from a learning design perspective. In: AKKER, J.; GRAVEMEIJER, K.; MCKENNEY, S.; NIEVEEN, N. (Eds.). **Educational Design Research**, New York: Routledge, 2006. p 17-51.

HOWDEN, H. Teaching number sense. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. *36, n.* 6, p. 6-11, Feb. 1989.

HUNTER, R.; ANTHONY, G. Percentages: A foundation for supporting students' understanding of decimals. In: Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, x. 26th, 2003, Geelong. **Proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**,Vic: MERGA, 2003, p. 452-459.

LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding:** Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2006.

MCINTOSH, A.; REYS, J.; REYS, E. A proposed framework for examining basic number sense. **For the Learning of Mathematics**, v. *12,* n. 3, p. 2-8 e 44, Nov. 1992.

ME. **Programa de Matemática do Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC, 2007.

MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. **Quadrante**, Lisboa, v. 14, n. 1, p. 89-108, Janeiro/Junho. 2005.

MOSS, J.; CASE, R. Developing children’s understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 30, n. 2, p. 122-147, March, 1999.

NCTM. **Developing Essential Understanding of Rational Numbers for teaching mathematics in grades 3-5**. Reston: NCTM, 2010.

NCTM. **Principles to actions:** Ensuring mathematical success for all. Reston: NCTM, 2014.

PARKER, M.; LEINHARDT, G. Percent: a privileged proportion. **Review of Educational Research**, v. *65,* n. 4, p. 421-481, Win. 1995.

PONTE, J. P.; CARVALHO, R.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Investigação baseada em *design* para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante.** in Press.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática do 1.º ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

TRIPATHI, P. Developing mathematical understanding through multiple representations. **Mathematics Teaching in the Middle School**, v. 13, nº 8, p. 438-445, April. 2008.

WOOD, T. Creating a context for argument in mathematics class. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 30, n. 2, p. 171-191, March. 1999.

VAMVAKOUSSI, X.; DOOREN, W. V.; VERSCHAFFEL, L. Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 31, p. 344-355, March. 2012.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The Didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n. 1, p. 9-35, Nov. 2003.

Anexo 2

Artigo II

Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais. *Zetetiké*, *26*(2), 354–374.

Versão dos autores

A percentagem na aprendizagem com compreensão dos números racionais

Percentage in rational number learning with understanding

Helena Gil Guerreiro
Lurdes Serrazina
João Pedro da Ponte

Resumo

Neste artigo discutimos a construção do conhecimento conceptual dos números racionais, por alunos do 3.º e 4.º ano do ensino básico, como processo integrado em que se privilegia a percentagem. Pretendemos perceber, numa etapa inicial da aprendizagem dos números racionais, que compreensão constroem os alunos da natureza relacional da percentagem e de que modo a percentagem contribui para essa aprendizagem, considerando uma compreensão das relações entre as diferentes representações os números racionais. Este estudo tem por base uma experiência de ensino, seguindo uma metodologia de Investigação Baseada em *Design*. Os dados foram recolhidos através da observação participante, apoiada num diário de bordo, e de gravações áudio e vídeo das aulas, sendo analisados os diálogos e as produções dos alunos de uma turma. Os resultados evidenciam que os alunos mostram compreender a natureza relacional da percentagem e que a compreensão das relações e conceitos envolvidos na noção de percentagem contribuem para a construção de um entendimento da natureza multiplicativa dos números racionais.

Palavras-chave: aprendizagem**;** números racionais; conhecimento conceptual; representações; percentagem.

Abstract

In this article we discuss the construction of conceptual knowledge of rational numbers by basic education students in grades 3 and 4 as an integrated process with a focus on percentage. At an early stage of learning rational numbers, we aim to know what understanding students develop of the relational nature of percentage and how percentage contributes to this learning, considering an understanding of the relations among different rational number representations. This study is based on a teaching-learning experience, following a design based research methodology. Data was collected through participant observation, supported in a logbook, with audio and video recordings of the lessons and we analyze the dialogues and the productions of the students of a class. The results show that the students display an understanding of the relational nature of percentage and that the grasp of relationships and concepts involved in this notion contributes to building an understanding of the multiplicative nature of rational numbers.

Keywords: learning; rational numbers; conceptual learning; representations; percentage

Introdução

A compreensão dos números racionais[10] tem sido amplamente estudada, quer pela importância que assumem como alicerce de aprendizagens matemáticas futuras, quer pelas dificuldades que geram (Behr, Lesh, Post, & Silver, 1983; Lamon, 2007). Contudo, a investigação neste tema continua a ser pertinente, dado o facto de serem poucos os progressos alcançados para um ensino-aprendizagem efetivo (Tian & Siegler, 2017). Sendo importante saber que representação dos números racionais privilegiar na sua aprendizagem, são poucos os estudos recentes que se focam na compreensão da percentagem (Tian & Siegler, 2017). Em particular, importa conhecer melhor o contributo que pode dar numa etapa inicial da compreensão dos números racionais.

Tradicionalmente, o ensino dos números racionais envolve um trabalho com frações, numerais decimais e percentagens de forma isolada, como tópicos distintos, sendo que todos eles oferecem dificuldades aos alunos (Moss, 2002; Tian & Siegler, 2017). Alcançar uma compreensão aprofundada destas representações e das suas relações é crucial para trabalhar de forma flexível com os números racionais, como destaca o NCTM (2000), sendo este um desafio que a escola enfrenta.

Numa perspetiva sociocultural, que considera que a aprendizagem se constrói na participação em interação social (Gravemeijer & Cobb, 2006), desenvolvemos uma investigação que privilegia a percentagem numa etapa inicial da aprendizagem dos números racionais. Tomamos como ponto de partida o facto da percentagem, enquanto conceito matemático, permitir relacionar a vida real com a descoberta das estruturas multiplicativas, potenciando uma construção gradual da aprendizagem das diferentes representações simbólicas do número racional e das suas relações (Moss & Case, 1999; Parker & Leinhardt, 1995). Neste artigo temos como objetivos: 1) perceber que compreensão constroem os alunos da natureza relacional da percentagem numa etapa

[10] O termo *números racionais* remete para o conjunto dos números racionais não negativos. No currículo português estes aparecem após o trabalho com os números naturais com o zero.

inicial da aprendizagem dos números racionais e 2) de que modo a percentagem contribui para a aprendizagem dos números racionais, numa etapa inicial, considerando uma compreensão das relações entre as diferentes representações destes números.

Enquadramento teórico

Compreensão dos números racionais como processo integrado de enriquecimento conceptual

As mudanças no ensino da matemática envolvem um esforço cada vez maior para tornar as experiências de aprendizagem mais cooperativas, mais conceptuais e mais interligadas (Dreyfus, 1999). O NCTM (2000) defende que os alunos devem aprender Matemática com compreensão, construindo ativamente os novos conhecimentos apoiados na sua experiência e conhecimentos prévios. Esta ideia valoriza o conhecimento da vida real, aplicado e circunstancial, correto ou incorreto e muitas vezes não resulta diretamente de um ensino formal – conhecimento que Leinhardt (1988) designa por "intuitivo". Reforça que o ensino deve articular os novos conhecimentos com o que os alunos já sabem. Isto é, deve tomar como ponto de partida o conhecimento que os alunos possuem, intuitivo ou formal, e construir uma rede de relações com novos factos e informações, o que Hiebert e Lefevre (1986) designam como conhecimento "conceptual".

Esta perspetiva permite entender a compreensão dos números racionais como extensão dos conhecimentos numéricos que os alunos já possuem, quer intuitivos, quer conhecimentos sobre os números inteiros[11]. Leinhardt (1988) refere que "os números racionais representam a primeira extensão dos números para além dos números naturais" (p. 120). Esta extensão não muda o objeto em si, mas enriquece a conceção que os alunos têm acerca dos números, pois sobre ele vão aprender novos factos (Siegler, 2016). Ao contrário dos números inteiros, que são caracterizados pela correspondência um (símbolo) para um (grandeza) no sistema de numeração decimal, os números racionais podem ser representados de diversas formas, nomeadamente através de percentagens, frações ou numerais decimais. Estas representações, embora possuam

[11] O termo *números inteiros* remete para o conjunto dos números naturais com o zero.

notação diferente, traduzem, na sua essência, um mesmo número, a mesma grandeza numérica.

A teoria integrada do desenvolvimento do conceito de número destaca o caracter unificador da grandeza do número para a aprendizagem dos diferentes conjuntos numéricos (Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). Segundo esta teoria, é possível pensar a construção da compreensão dos números racionais com base na ideia de que estes números (inteiros e não inteiros), têm uma grandeza que pode ser representada e ordenada numa reta numérica, através de uma dada notação simbólica. Esta ideia apoia-se na hipótese de que os alunos representam a grandeza de um número simbolicamente numa reta numérica mental, como estrutura dinâmica que é primeiro usada para representar números inteiros pequenos e que, progressivamente estendem e ampliam, sendo subdividida para incluir outros números racionais (Siegler, 2016). Deste modo, o desenvolvimento numérico dos alunos, à medida que vão contactando e ganhando experiência com cada conjunto numérico, pode ser consubstanciado na finalidade de "criar representações da grandeza dos números cada vez mais precisas para um conjunto cada vez mais abrangente de números" (Siegler, 2016, p. 342).

No início deste processo de alargamento dos conhecimentos dos números inteiros aos números racionais Siegler, Fazio, Bailey e Zhou (2013) destacam que os alunos assumem a ideia de que as propriedades dos números inteiros são propriedades de todos os números. Importa assim que os alunos gradualmente possam ir integrando o conhecimento dos números fracionários no conhecimento relativo aos números inteiros que já possuem, num processo de enriquecimento conceptual contínuo (Siegler, Thompson & Schneider, 2011).

A Percentagem como Representação dos Números Racionais

Numa abordagem integrada do processo de desenvolvimento numérico, apoiada na propriedade da grandeza dos números, a construção do conhecimento dos números racionais resulta da interligação de redes de nós de conhecimentos parciais, num processo de mudança e reorganização, à medida que os alunos procuram coordenar e ligar pedaços de informação (Hiebert, Wearne, & Taber, 1991). Assim, dado que a construção do conhecimento não decorre de forma linear, o processo de desenvolvimento numérico beneficia de uma abordagem contínua com diferentes sistemas de representação (NCTM, 2000). Com efeito, é a capacidade de fazer transformações, não só dentro de um sistema de representação, mas também entre sistemas, que permite ir construindo as relações entre os conceitos e gradualmente, dar significado aos conhecimentos relativos aos números racionais (Behr, Lesh, & Post, 1981).

Frações, numerais decimais e percentagens são três representações dos números racionais. Umas são mais usadas que outras, em função do contexto, contudo, todas expressam os seus múltiplos significados (Tian & Siegler, 2017). Goldin e Kaput (1996) referem que o poder de uma representação é tanto maior quanto maior for a sua versatilidade, isto é, a facilidade em ser aplicada a diferentes contextos e ser de uso eficiente, permitindo que se relacione e seja convertida noutra facilmente. Nesta perspetiva, a percentagem pode ser definida como uma representação versátil, caracterizada essencialmente por três aspetos. Em primeiro lugar, está presente na linguagem do quotidiano e a sua utilização está generalizada aos mais diversos contextos da sociedade, sendo intuitivo o entendimento da expressão "por cento", como *por cada cem* ou *em cada cem*, isto é, algo que se compara com cem. Em segundo lugar, a sua notação, na forma simples, como 10%, envolve um numeral, com propriedades de número inteiro, e um símbolo, que lhe imprime uma relação multiplicativa. Esta notação apresenta-se mais próxima da notação dos números inteiros do que a fração ou o numeral decimal, em que dois números inteiros são usados, separados por um traço de fração ou por uma vírgula. Por último, a percentagem relaciona-se facilmente com as outras representações dos números racionais, na medida em que é simples converter qualquer percentagem em fração ou em numeral decimal.

A discussão sobre que representação deve ser privilegiada para iniciar o trabalho com os números racionais assume na investigação uma dicotomia entre o numeral decimal e em fração, estando a percentagem praticamente excluída (Tian & Siegler, 2017). Porém, Moss e Case (1999), dando enfase à natureza multiplicativa dos números racionais, sugerem que a percentagem seja privilegiada numa fase inicial do trabalho com os números racionais, incidindo na sua dimensão relacional. Esta opção, que assumimos neste estudo, surge apoiada nos conhecimentos intuitivos que os alunos possuem em relação à proporção e nos conhecimentos que já têm dos números inteiros de 1 a 100 e que constituem a base para uma entrada no campo das relações multiplicativas (Moss, 2002; Moss & Case, 1999). Estes autores descrevem uma abordagem aos números racionais através da percentagem que permite aos alunos ir integrando os seus conhecimentos informais de percentagem com estratégias de composição e decomposição dos números inteiros (Moss & Case, 1999). Estas estratégias baseiam-se em diversas representações, ativas, icónicas e simbólicas (Bruner, 1996) e na linguagem oral e escrita (Ponte & Serrazina, 2000). Paralelamente ao trabalho com a percentagem, os alunos são desafiados a fazer conversões preliminares com representações simbólicas de referência simples que já conhecem, percecionando gradualmente como se relacionam e iniciando o processo de movimentação entre elas.

Tal como referem Parker e Leinhardt (1995), apesar da aparente simplicidade da percentagem, trata-se de um conceito de aprendizagem complexa, muitas vezes gerador de conflitos. Isso é visível desde logo pela própria palavra que, em português corrente, encerra diferentes significados, podendo de acordo com o contexto, ser interpretada como uma taxa, a quantia que se obtém quando se aplica a taxa, uma informação estatística, um processo de cálculo ou um conceito matemático. Esta multiplicidade de significados mostra o quanto está presente no dia-a-dia, o que reforça a pertinência de antecipar a sua aprendizagem. No entanto, dada a sua complexidade, importa salvaguardar que o estudo da percentagem se foca na compreensão da sua natureza relacional e não apenas nas características da sua representação (Parker, 2004; Tian & Siegler, 2017).

Construção de um Conhecimento Conceptual da Percentagem

Usualmente, a percentagem é trabalhada depois da fração e do numeral decimal e, embora envolva o uso de diversas representações, estas são rapidamente abandonadas e é dada enfase a conversões, equações e cálculos, que nem sempre destacam a natureza do conceito (Parker, 2004; Parker & Leinhardt, 1995). Parker e Leinhardt (1995) afirmam ser importante ter em conta, desde logo, que a percentagem "é uma linguagem de proporção privilegiada que simplifica e condensa descrições de comparações multiplicativas" (p. 472). Isto é, trata-se de uma linguagem que na sua essência descreve relações que têm por base a proporcionalidade, mas que ficam escamoteadas pela sua notação, pelo que importa explicitar.

Embora o ensino da percentagem tenha em vista a proficiência dos alunos em procedimentos de cálculo, as ideias-chave subjacentes à construção do conceito de percentagem envolvem a compreensão da sua dimensão relacional (Parker & Leinhardt, 1995). Estas ideias têm subjacente conhecimentos conceptuais que os alunos devem poder descobrir e relacionar ao longo da sua escolaridade e nos quais devem ancorar o desenvolvimento de um conhecimento procedimental flexível e eficaz (De Corte, Depaepe, Eynde, & Verschaffel, 2005; Lembke & Reys, 1994). Alguns desses aspetos conceptuais podem ser trabalhados no início da aprendizagem dos números racionais, altura em que os alunos mostram propensão para avaliar situações em termos multiplicativos e começam a entender a grandeza relativa dos números numa perspetiva de relações multiplicativas (Moss & Case, 1999). Nomeadamente, os alunos precisam de compreender que a percentagem: 1) apesar da sua linguagem aparentemente aditiva (por exemplo, 10% *menos* em relação ao valor inicial) traduz uma comparação entre dois números ou quantidades, de natureza multiplicativa; 2) possuí propriedades de número racional, pelo que não pode ser interpretada sem ter em conta o referente, e pode ser transformada numa fração ou num decimal; 3) traduz uma relação parte-todo, mas também de razão, envolvendo conjuntos diferentes; e 4) descreve uma situação fixa, representando como diferentes quantidades se relacionam entre si (De Corte et al., 2005; Parker & Leinhardt, 1995; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

A compreensão da percentagem não começa apenas quando o termo surge pela primeira vez na escola. Desde cedo que as crianças têm tendência para assumir que quantidades relativas mudam juntas, mostrando uma certa intuição na compreensão de situações de covariância simples, como refere Lamon (2007), o que apoia a propensão intuitiva dos alunos para a proporção (Moss & Case, 1999). O contacto com a percentagem começa nas diversas situações da vida familiar, constituindo-se como informação com significado para os alunos. Esta ligação ao quotidiano fornece contextos reais, familiares aos alunos, que importa trazer para a sala de aula e reforça a importância de relacionar a aprendizagem formal da percentagem com os conhecimentos informais dos alunos (De Corte et al., 2005; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Esta abordagem à percentagem encontra eco na Educação Matemática Realista (RME), que defende que "os alunos devem aprender matemática desenvolvendo ferramentas e conceitos matemáticos e a partir de situações problemáticas do dia-a-dia, que lhes façam sentido" (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p. 9).

A experiência do dia-a-dia, com diferentes representações associadas à percentagem, como os ícones da bateria de um telemóvel ou a barra de estado de um *download*, permite que estas representações possam ser usadas como modelos na aprendizagem da percentagem, através de um processo de matematização progressiva da realidade (Freudenthal, 1968; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Van Galen e Van

Eerde (2013) referem a existência de várias representações, familiares aos alunos, e que constituem modelos para trabalhar a percentagem, como a barra da percentagem, a tabela de percentagem ou a reta numérica dupla. As escalas de comparação são outra representação que, permitindo interpretar com facilidade as relações inerentes à percentagem, podem ser convocadas para o trabalho com os alunos mais novos (Parker & Leinhardt, 1995).

Van den Heuvel-Panhuizen (2003) descreve uma trajetória de aprendizagem da percentagem, em que a barra é usada como modelo de uma situação concreta para dar sentido à percentagem e relacionar representações dos números racionais. À medida que evoluem as relações numéricas que os alunos são capazes de estabelecer, a própria barra pode evoluir para um modelo mais independente dos contextos (Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen, & Keijzer, 2008). Com efeito, a barra pode assumir uma forma mais abstrata como reta numérica dupla, traduzindo a relação entre quantidades de duas grandezas distintas que variam em conjunto, constituindo um modelo a ser aplicado em diversos contextos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Desta forma, as representações no trabalho com a percentagem constituem-se como modelos poderosos para promover a construção de um conhecimento conceptual, se derivam de contextos realistas e se são suficientemente flexíveis para serem usados em níveis mais avançados (De Corte et al., 2005). Esta atividade de modelação implica uma evolução do próprio modelo, "de modelos de situações concretas para modelos de pensamento" (Van Galen et al., 2008, p. 18) pelo que o papel dos diferentes sistemas de representação é "crucial na progressão do conhecimento informal para o formal, bem como a importância atribuída aos contextos" (Serrazina, 2012, p. 25).

Considerando estas dimensões da aprendizagem da percentagem, a compreensão que os alunos mostram da sua natureza relacional, destacando a comparação que permite fazer de algo com 100, enquanto proporção privilegiada, pode ser interpretada, numa etapa inicial, considerando vários aspetos. Lembke e Reys (1994) destacam a capacidade de: 1) interpretar a percentagem tendo como suporte uma representação icónica; 2) relacionar frações, decimais e percentagens; 3) mobilizar números de referência ou outras estratégias para estimar percentagens; 4) resolver mentalmente cálculos de percentagem na resolução de problemas; e 5) apreciar a razoabilidade da sua solução. Se a aprendizagem da percentagem começar pela compreensão da sua natureza relacional, os alunos percecionam as relações e comparações implícitas que oferece, centrando-se no que a percentagem efetivamente é (Parker & Leinhardt, 1995) e, ao longo da sua escolaridade, terão oportunidade de se tornarem eficientes no seu cálculo.

Metodologia

Este estudo segue os procedimentos metodológicos de uma investigação baseada em design na sala de aula (Cobb et al., 2001; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016). A modalidade escolhida apoiou-se na construção e implementação de uma experiência de ensino em sala de aula (Gravemeijer & Cobb, 2006). O seu objetivo foi compreender o que os alunos aprendem e como aprendem no ambiente natural de aprendizagem, determinando que a recolha de dados fosse feita na sala de aula e que a escolha da unidade de análise recaísse sobre a própria turma. Envolveu, por um lado, uma dimensão de conteúdo matemático, que se inspirou no currículo experimental de Moss e Case (1999). Esta dimensão centrou-se num trabalho em torno das diferentes representações do número racional e das suas relações, traduzindo-se numa trajetória de aprendizagem prevista que se estruturou em três etapas (Figura 1).

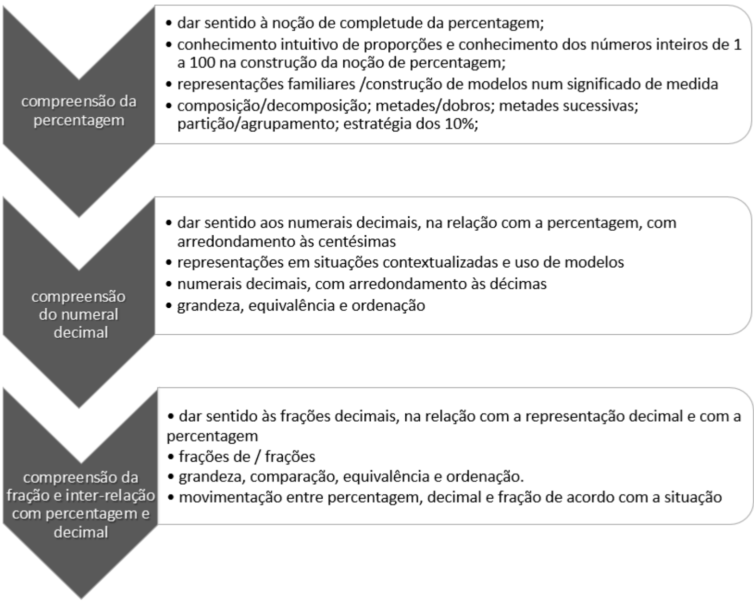


Figura 1 – Trajetória de aprendizagem prevista.
Fonte: Elaborado pelos autores.

Inicialmente focou-se na compreensão da percentagem, num significado de medida, a que se seguiu um enfoque na compreensão da representação decimal e, posteriormente, um trabalho em torno da compreensão da fração. Esta organização, embora não deva ser entendida como linear, conduziu a que a experiência de ensino se estruturasse em três microciclos, numa relação entre as ideias teóricas e o desenrolar dos acontecimentos na prática. Por outro lado, teve subjacente uma dimensão pedagógica, que procurou compreender os meios através dos quais a aprendizagem comparticipada pela turma aconteceu, no contexto social da sala de aula, num processo de ensino-aprendizagem de natureza exploratória (Ponte, 2005).

A experiência de ensino decorreu ao longo de dois períodos letivos, do 3.º e 4.º ano de uma mesma turma, numa escola pública de Lisboa, em que a primeira autora era também professora da turma. Esta situação implicou a tomada de medidas no sentido de minimizar a possibilidade de possíveis conflitos e enviesamentos. Assegurou-se a proteção dos alunos e das famílias, garantindo os princípios de honestidade, transparência e equidade no decurso de toda a investigação. Foi obtido o consentimento voluntário e informado de participação dos alunos e foram tomadas medidas para salvaguardar o seu anonimato e privacidade.

Os dados foram recolhidos a partir dos registos da observação participante, apoiados pelas gravações áudio e/ou vídeo das aulas, do diário de bordo da professora e das produções escritas dos alunos. A sua análise envolveu estratégias de indução analítica, a comparação constante, bem como a análise tipológica que permitiram definir categorias emergentes dos dados, atribuindo-lhes um significado ancorado no quadro conceptual que sustenta o estudo (Goetz & LeCompte, 1984). Focamos a análise em seis tarefas selecionadas por permitirem destacar evidências categorizadas de compreensão dos aspetos conceptuais da percentagem (Lembke & Reys, 1994, Moss & Case, 1999; Parker & Leinhardt, 1995), como: 1) usar conhecimento intuitivo para identificar a relação proporcional que traduz, apoiado em representações e na sua experiência do dia-a-dia; 2) usar conhecimentos dos números inteiros de 1 a 100, nomeadamente, estratégias de composição e decomposição, para interpretar o sentido de completude (*sense of fullness*) que oferece; 3) interpretar a relação de comparação de quantidades, considerando uma dada unidade; 4) usar valores de percentagem de referência, para estimar cálculos ou resolver problemas; e 5) tirar partido da sua relação com a representação decimal e com a fração, inter-relacionando-as.

Resultados

O sentido de completude da percentagem

Começamos por analisar uma das tarefas iniciais da primeira etapa da trajetória. Nesta tarefa era pedido aos alunos que descobrissem que percentagem de um *download* poderia estar representada em duas barras de estado, uma representação icónica familiar aos alunos. Uma das estratégias espontâneas e intuitivas a que recorreram foi usar os dedos para medir e iterar, considerando que uma unidade é 100% (Figura 2).

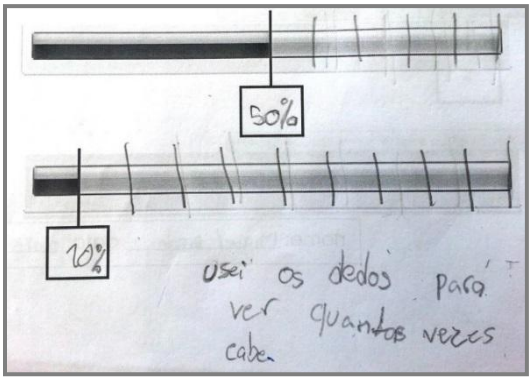


Figura 2 – Resolução da tarefa das barras de estado pelo grupo de Marco.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

Esta estratégia envolvia considerar à partida a barra de estado totalmente preenchida como o todo – 100% – e antecipar uma forma de determinar quantas vezes a parte considerada cabia nesse todo. A representação icónica foi usada como modelo da situação permitindo construir a estratégia de resolução. A representação simbólica emergiu como medida da distância correspondente à parte processada em cada uma das barras de estado, em relação ao tamanho da unidade, remetendo para um significado de medida.

Numa outra tarefa, foi pedido que os alunos estimassem, em percentagem, a quantidade de energia de uma bateria (Figura 3).

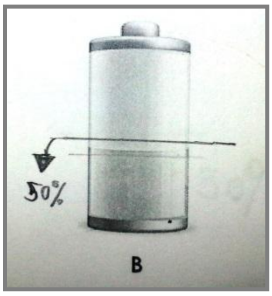


Figura 3 – Resolução da tarefa da bateria pelo grupo de Dinis.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Alguns alunos sugeriram que estaria 50% carregada, no entanto, outros, pela sua experiência, foram mais precisos na apreciação da quantidade de energia em relação ao tamanho da bateria quando completamente carregada:

Professora: Alguém acha que representa outra coisa?

Dinis: 40%.

Professora: 40%, porquê?

Dinis: Porque quando estou no *tablet* a jogar e vejo a bateria assim, sei que tenho mais ou menos 40%.

Professora: Aparece lá escrito o valor em percentagem?

Dinis: Sim.

Professora: Mas aqui não tem nada escrito, por que é que não é 50%?

Dinis: Porque teria que estar mais para cima, teria que estar a metade.

Embora os alunos evidenciassem um entendimento da compreensão de 50%, as divergências surgiram em relação à precisão na medida da quantidade representada na imagem, como mostra a justificação do grupo de Ivo (Figura 4).

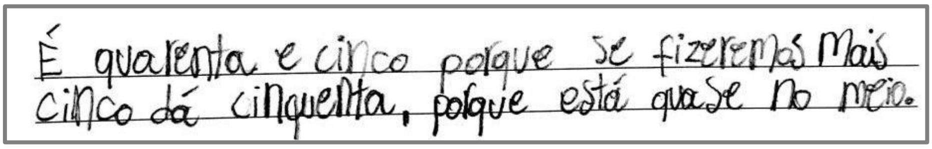


Figura 4 – Resposta do grupo de Ivo à tarefa da bateria.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

Na sua explicação, Ivo considerou que a bateria “está quase no meio”, pelo que, para este aluno, seria possível que a quantidade representada fosse apenas 45%, estimando um valor de 5% em falta para chegar aos 50%. A interação em torno desta justificação evidencia que os alunos mobilizaram relações aditivas para compreender que a consideração das diferentes partes em percentagem dava 100%, apelando a um sentido de completude que a percentagem oferece, através de estratégias de composição e decomposição dos números inteiros de 0 a 100.

Nesta etapa, quando os alunos estão a avaliar um *download* ou estimar a quantidade de energia de uma bateria, a interpretação dada, embora se apoie na relação parte-todo, assume a parte num sentido de completude ao longo de uma escala linear, que varia entre 0% e 100% e que tem subjacente uma ideia de continuidade numérica, apoiada em conhecimentos dos números inteiros de 0 a 100. O valor em percentagem que os alunos atribuem à parte é percecionado como a comparação entre a medida que essa parte assume em relação ao todo (100%), apoiada nas relações de proporção que a percentagem envolve.

A percentagem como relação de comparação

Avançando na experiência de ensino, convocamos para análise uma tarefa do fim da primeira etapa da trajetória e outra do início da segunda. A primeira tarefa surge a propósito de uma visita de estudo, em que a turma tinha escrito à instituição a solicitar um desconto. A resposta trouxe consigo um desconto de 3€ no preço do bilhete, cujo custo inicial era 12€. Esta situação foi aproveitada para investigar o valor do desconto em percentagem. A maioria dos grupos recorreu à reta numérica como base para o seu raciocínio. Sabendo o custo do bilhete antes do desconto e o valor, em euros, do desconto, o grupo de Ivo calculou o valor da percentagem correspondente verificando quantas vezes a parte cabia na unidade, recorrendo a um significado de medida (Figura 5).

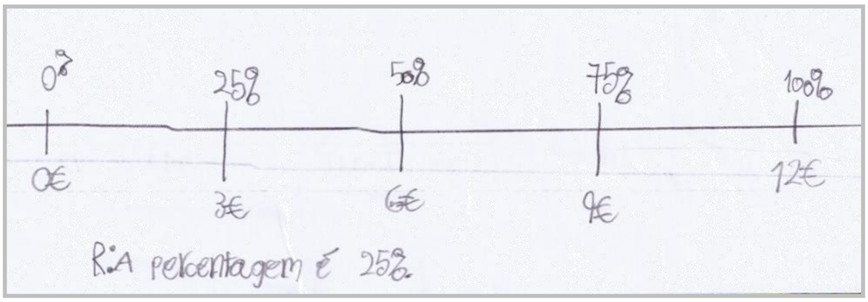


Figura 5 – Resolução do grupo de Ivo à tarefa através de uma reta numérica dupla.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

Ao identificarem os três euros do desconto, os alunos foram verificar quantas vezes essa quantia cabia no total e perceberam que conseguiam fazê-lo quatro vezes, recorrendo à divisão da unidade e iteração da parte. As marcações na reta emergiram assim deste raciocínio que foram construindo e que explicitaram no momento de discussão coletiva.

Professora:	[…] Que percentagem é de desconto? Martim
Martim:	25.
Dinis:	25%.
Professora:	Pois é! 25% É o mesmo que dizer que me descontaram quanto? Clara.
Clara:	Metade da metade.
Ivo:	Um quarto.
Professora:	E porque é que é um quarto?
Ivo:	Porque pagamos 75%.

Com recurso à reta numérica dupla, os alunos convocaram a representação em fração, relacionando-a com a percentagem, alicerçada em conhecimentos numéricos anteriores procurando diferentes representações para o mesmo número, na tentativa de o tornar comum na sua explicação. A justificação apresentada por este grupo apoia-se no conhecimento de que 75% somado com um quarto, da mesma unidade, dá a própria unidade, mobilizando assim as duas representações simbólicas de forma complementar.

A segunda tarefa surgiu do facto de um aluno ter constatado, e partilhado com a turma, que num jogo de futebol, a equipa que teve maior tempo de posse de bola não foi a que ganhou o jogo. A propósito desta discussão foi construída esta tarefa, em que era apresentado um gráfico circular, retirado de um jornal diário, que mostrava a distribuição do tempo de posse de bola durante o jogo. Os alunos eram convidados a descobrir o tempo, em minutos, que cada equipa teria jogado, sabendo que a percentagem correspondente era de 45% para o Benfica e 55% para o Sporting. Trata-se de um contexto que fazia sentido para os alunos, pelo que, em interação, iam avaliando a razoabilidade dos cálculos e das suas interpretações:

Professora:	Vamos lá ver, se uma equipa tiver 100% de posse de bola, quantos minutos são de posse de bola?
Heitor:	90 minutos.
Simão:	Mas isso é impossível!
Marco:	Num jogo não pode haver uma equipa com 100% de posse de bola.
Professora:	Claro que na prática seria uma coisa improvável…

A discussão em coletivo centrou-se no debate das estratégias que cada grupo encontrou para descobrir o tempo em minutos. Facilmente, a turma associou 50% a metade da duração do tempo de jogo, 45 minutos. Depois, usando a estratégia da composição e decomposição dos números inteiros de 1 a 100, descobriram as relações entre a percentagem e o tempo correspondente em minutos, como explicitou Luís no excerto de diálogo seguinte:

Luís:	Eu e a Dina fizemos assim, como nós sabíamos que era 45%, nós fomos buscar o 40%, que dava 36 minutos. E depois fizemos mais o 10%, mas vimos que não era 10%, eram 5%, fizemos metade do 10% para dar 5%, dividimos o 9 ao meio e vimos que dava 4 minutos e meio.

Para calcular 45%, os alunos foram decompor 45% em 40% mais 5%. Como o valor correspondente a 40% era conhecido, faltava só descobrir o 5%, que chegaram através do cálculo da metade de 10%. A representação decimal da metade de nove surgiu de forma espontânea, sendo que a maioria dos alunos chegou a 4,5, apesar de não ter havido um trabalho formal com esta representação e que, por isso, alguns grupos justificaram como mostra a Figura 6.

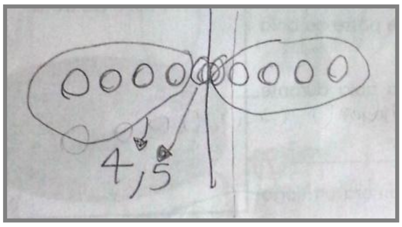


Figura 6 – Justificação do grupo de Horácio para o cálculo de metade de 9.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

Para descobrirem o tempo de posse de bola os alunos recorreram à estratégia de decomposição das percentagens, mobilizando as regularidades que conheciam. Em simultâneo, interpretaram a relação que estava associada à percentagem e encontraram diferentes formas de obter o valor em minutos correspondente a 55% de posse de bola, tal como mostra o registo da Figura 7.

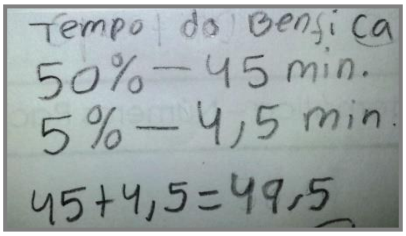


Figura 7 – Resposta do grupo de Bárbara para o tempo de posse de bola do Benfica.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

Esta tarefa apelava à compreensão das relações numéricas associadas à percentagem, num contexto significativo para os alunos. As estratégias de cálculo que os alunos construíram têm por base os conhecimentos prévios na sua relação com os novos números de referência 100%, 50% e 10%, numa situação em que a partilha de tempo não é equitativa, pelo que os minutos relativos a cada equipa evidenciam uma distribuição proporcional.

Destacamos que os alunos conseguiram movimentar-se entre representações como a reta numérica dupla ou o gráfico circular, que se apoiaram num significado parte-todo de percentagem, e representações simbólicas, incluindo numerais decimais. Estabeleceram relações multiplicativas entre valores de conjuntos de natureza diferente:

desconto em euros/percentagem do desconto e tempo de posse de bola/percentagem de posse de bola, interpretando a comparação entre quantidades específicas.

A percentagem como proporção

Reportamo-nos agora a uma tarefa da última etapa da trajetória de aprendizagem. Esta tarefa emerge da comunicação de um projeto sobre Planetas, apresentado à turma por um grupo de alunos. Nesta tarefa era pedido à turma que determinasse o diâmetro da Terra, tendo como referência o diâmetro de Júpiter, de aproximadamente 142 000 quilómetros, e sabendo que o diâmetro da Terra seria aproximadamente 9% do de Júpiter.

A resolução da tarefa pelos diferentes grupos envolveu usar 10% e 1% como números de referência para o cálculo. Um dos grupos calculou 10% e depois 1%, usando a divisão por 10, e fez a subtração (Figura 8).

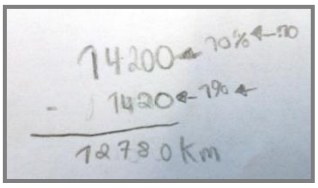


Figura 8 – Resolução da tarefa do diâmetro pelo grupo de Mafalda.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

Contudo, a maioria dos outros grupos, talvez devido à grandeza dos números envolvidos, mobilizou outros modelos para apoiar a construção da sua estratégia, nomeadamente, uma tabela de razão, como fez o grupo de Hélio (Figura 9).

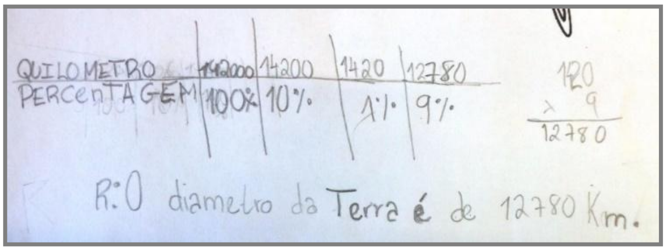


Figura 9 – Resolução da tarefa do diâmetro pelo grupo de Hélio.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

Este grupo recorreu ao cálculo de 10% e depois de 1%, acabando por multiplicar 1% por nove. A tabela pareceu ter ajudado a estabelecer as etapas da estratégia seguida. O grupo de Clara também parece ter-se apoiado na reta numérica dupla, tendo registado as relações entre os valores em percentagem e os valores em quilómetros (Figura 10). Embora no início, tenham recorrido ao cálculo de outros valores de referência, como 50% e 25%, acabam por chegar a 1% e usá-lo para determinar 9%.

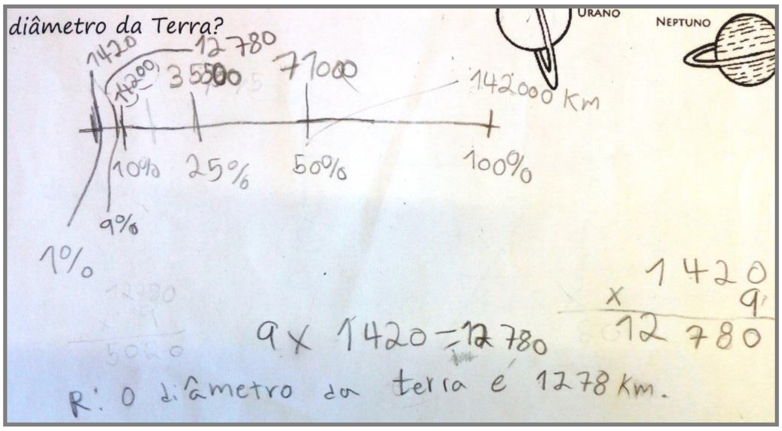


Figura 10 – Resolução da tarefa do diâmetro pelo grupo de Clara.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

A reta numérica foi a estratégia mobilizada por outros grupos, como no caso do grupo de Ana (Figura 11). Este usou o modelo da reta numérica dupla para determinar o valor de 1%, sem sentir necessidade de calcular 10%, valor esse que multiplicou por nove, resolvendo assim o problema.

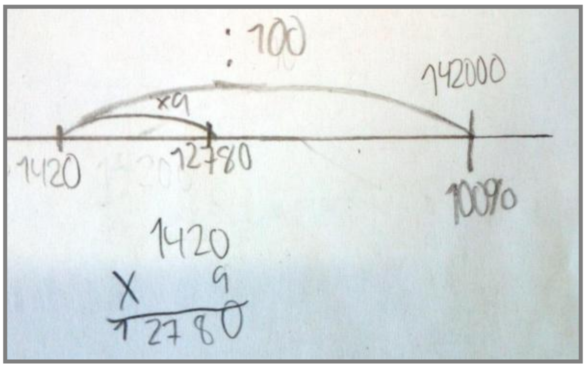


Figura 11 – Resolução da tarefa do diâmetro pelo grupo de Ana de Clara.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

Nesta tarefa, a percentagem foi interpretada como proporção, que os alunos mobilizaram apoiando-se em números de referência para fazer o cálculo. Este uso da percentagem sucedeu a um entendimento da sua dimensão relacional. As estratégias que os alunos construíram, mobilizando a construção de modelos relacionados com representações trabalhadas anteriormente, realçam a necessidade de verem explícitas as relações entre os referentes e as quantidades envolvidas, o que traduz uma compreensão da grandeza relativa da percentagem.

A percentagem como representação de referência

Por fim, analisamos uma das últimas tarefas da experiência de ensino, que teve lugar na terceira etapa da trajetória de aprendizagem. Esta tarefa envolvia a comparação de números representados em percentagem, fração e numeral decimal. Trata-se de uma tarefa de contexto matemático, onde os alunos podiam usar como suporte uma reta numérica dupla, com diversos números de referência previamente marcados. O momento de discussão coletiva da tarefa procurou por em comum na turma algumas das estratégias usadas para identificar e comparar a grandeza dos números envolvidos, em diferentes representações, localizando-os sempre que possível e necessário na reta (Figura 12).

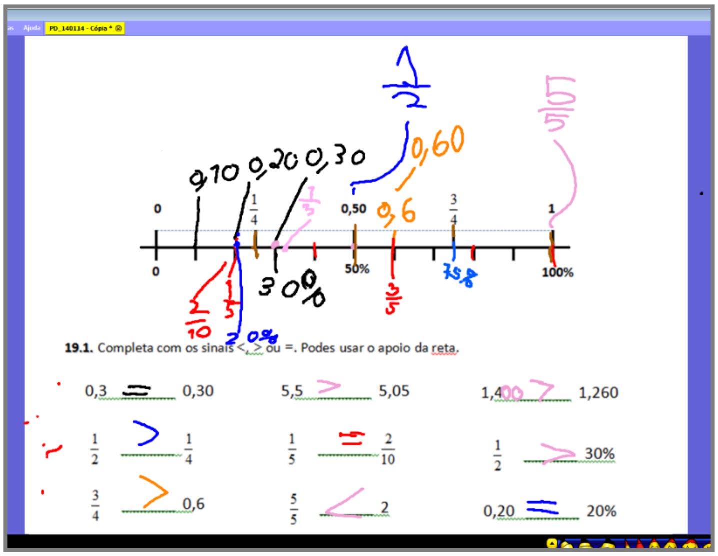


Figura 12 – Captura de écran do quadro interativo durante a discussão coletiva da tarefa.
Fonte: Dados referentes a esta pesquisa.

À medida que os alunos foram dando significado à grandeza dos números, a percentagem foi convocada para justificar as comparações que iam fazendo. Dado que 3/4 se encontrava marcado, Ana localizou na reta as seis décimas sem dificuldade e explicou a sua estratégia aos colegas:

Ana: Podemos fazer pedacinho a pedacinho. Como 50 centésimas é a mesma coisa que 5 décimas era só andar mais um e vemos que é o 6 décimas.

Professora: Mais um quê?

Ana: Mais um décimo.

Ana apoiou-se na reta, usando um significado de medida, para explicar à turma que as seis décimas correspondiam ao ponto que resultava de adicionar um décimo a cinco décimas ou seja cinquenta centésimas. De modo a envolver toda a turma na justificação da relação entre 3/4 e 0,6, os alunos foram convidados a identificar qual dos números representava um segmento de reta maior:

Professora: Olhem para reta. Vejam a posição do 3/4 e vejam as seis décimas. Qual é que representa um segmento de reta maior? Qual é que está mais perto do 1? Carolina.

Carolina: O 3/4.

Dinis: Eu vi que 3/4 é 75% e que 6 décimas é 60%, e assim vê-se logo...

Um dos alunos da turma, Dinis, explicou que usou a percentagem para justificar esta relação, referindo que 3/4 representava o mesmo número que 75% e que 6 décimas representava o mesmo que 60%, evidenciando fluência no uso de diferentes representações. A discussão avançou no sentido de partilhar outras estratégias:

Professora: Alguém pensou de outra forma?

Simão: Eu fiz o do 1/5 e dividi em cinco e deu 3/5 nas 6 décimas e 3/5 é menos que 3/4.

Professora: O Simão dividiu em quintos. Vem cá marcar.

. . .

Simão: O 3/5 é mais pequeno do que o 3/4 (apontando na reta).

Professora: É outra forma de explicar. Assim, se pensarmos em dividir em 5 partes vemos que são divisões mais pequenas do que se dividimos em quatro. E, em percentagem, diz lá Dinis, o 3/4 é…

Dinis: 75%.

Professora: E o 3/5? Vejam (aponta na reta)…

Humberto: São 6 décimas.

Mafalda: 60%.

Professora: 60%, e então qual é que representa uma distância maior?

Alunos: ¾.

Heitor: É como na piza!

Professora: Isso, então 6 décimas (aponta na reta), que são os 3/5, é mais pequeno que 3/4.

Neste excerto, o contributo da percentagem traduz-se na forma como esta permite interpretar a grandeza do mesmo número em diferentes representações. Usada como representação de referência, contribuiu para que os alunos compreendessem as frações 3/5 e 3/4, como correspondentes a 60% e 75%. Deste modo, os alunos interpretaram corretamente as frações, sem fazerem associações inadequadas ou raciocínios abusivos a partir da sua experiência com os números inteiros.

Discussão

Pela sua utilização no dia-a-dia dos alunos e pela relação de base 100 que oferece, a percentagem ganha sentido à medida que permite "ligar os dois mundos" (Parker & Leinhardt, 1995, p. 422), isto é, permite que a vida dê sentido à Matemática da escola e que esta seja interpretada como instrumento de compreensão da própria vida. Deste modo, numa etapa inicial da aprendizagem dos números racionais, procurámos perceber que compreensão os alunos constroem da natureza relacional da percentagem e de que modo a percentagem contribui para essa aprendizagem, considerando uma compreensão das relações entre as diferentes representações destes números.

Na experiência de ensino desenvolvida neste estudo, o trabalho realizado com a percentagem centrou-se na sua dimensão relacional tendo-se focado numa compreensão gradual dos aspetos conceptuais da percentagem (Moss & Case, 1999; Parker & Leinhardt, 1995). Inicialmente, remeteu para a construção de um sentido de completude, a partir do olhar dos alunos sobre representações associadas à percentagem dos contextos do dia-a-dia. Envolveu também a construção de estratégias de resolução espontâneas, que tinham por base os conhecimentos relativos aos números inteiros de 0 a 100, associados a uma compreensão intuitiva da natureza proporcional do sentido de completude oferecido pela percentagem. Esta etapa foi um marco importante no processo de alargamento do conhecimento aos números racionais, uma vez que os alunos compreenderam que uma percentagem representada pelo mesmo número pode traduzir quantidades diferentes, que correspondem a um todo também diferente, como uma barra de estado ou uma bateria, mas que se considera 100%. Seguidamente, o trabalho realizado procurou promover a compreensão da noção de comparação multiplicativa expressa pela percentagem. Os alunos deram significado à percentagem enquanto relação entre dois números, duas quantidades de natureza diferente, como desconto em percentagem e valor em euros ou percentagem de tempo de posse de bola e minutos de posse de bola. Representações como a reta numérica dupla foram usadas como modelos para interpretar situações da realidade, com significado para os alunos, que se evidencia também na sensibilidade que mostram para apreciar a razoabilidade dos resultados. Posteriormente, tendo por base a ideia que a percentagem traduz uma proporção, desenvolveram-se tarefas tendo em vista a compreensão de que a percentagem está sempre relacionada com algo, o todo a que diz respeito. Os alunos mobilizaram números de referência, como 10% ou 1% para determinar uma quantidade proporcional em relação ao todo que se considera, numa proporção para 100, evidenciando um entendimento das relações multiplicativas associadas à noção de percentagem. A construção deste conhecimento conceptual por parte dos alunos evidencia uma compreensão emergente da natureza relacional da percentagem, enquanto noção com propriedades de número racional, que se desenvolveu progressivamente à medida que estabeleceram comparações multiplicativas de quantidades, compreendendo as relações envolvidas e coordenando unidades de referência.

Uma aprendizagem com compreensão dos números racionais envolve também, como relembram Tian e Siegler (2017), ser capaz de se movimentar entre as três representações simbólicas e saber escolher e usar a mais adequada a cada situação. Esta capacidade de entrelaçamento de diferentes representações na interpretação da grandeza de um número racional é evidenciada quando os alunos comparam números na última tarefa apresentada e descobrem, por exemplo, que 3/4 representa um número maior que 0,6 e também um número maior do que 3/5. Na verdade, estas descobertas aconteceram apoiadas em conversões que convocam a percentagem, com o apoio da reta numérica dupla, traduzindo a capacidade dos alunos se movimentarem entre representações. Estas conversões têm no seu âmago a compreensão da grandeza do número racional por elas representado, para a qual parecem ter contribuído as oportunidades criadas pelo trabalho com a percentagem. As diferentes situações que envolveram a percentagem permitiram aos alunos raciocinar proporcionalmente com quantidades, estabelecendo comparações e construindo um entendimento da natureza multiplicativa dos números racionais.

Conclusão

Parker e Leinhardt (1995) e Moss e Case (1999) consideram que é nos níveis de escolaridade básica que devem ser lançadas as sementes para reconhecer a importância de 100 como base privilegiada e para sensibilizar para as relações comparativas que a percentagem oferece, maximizando a conexão com os conhecimentos originais e intuitivos de razão. Por um lado, centrada na compreensão das suas características conceptuais, a percentagem constitui uma forma de dar significado à relação proporcional que oferece, integrando os conhecimentos relativos aos números inteiros. E, por outro lado, permite alicerçar um entendimento da natureza multiplicativa dos números racionais, na medida em que conduz a interpretar de forma intuitiva a relação de comparação que estes números traduzem, isto é, como afirmam Galen et al. (2008) a perceção da razão entre o que está a ser descrito e a unidade a que se refere. Nesta perspetiva, este estudo mostra que a percentagem constitui conteúdo relevante e adequado para ser trabalhado nesta etapa da escolaridade, permitindo aprendizagens consistentes por parte dos alunos. Muito especialmente, a percentagem destaca-se como uma representação de referência num processo integrado de extensão dos conhecimentos dos números inteiros aos números racionais e contribui para uma aprendizagem dos números racionais com compreensão, apoiada na inter-relação entre representações.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da Universidade de Lisboa, no âmbito do Programa de Bolsas de Doutoramento, através de uma bolsa atribuída à 1.ª autora.

Referências

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91–126). New York, NY: Academic Press.

Behr, M. J., Lesh, R., & Post, T. (1981, April). *Rational number ideas and the role of representational systems*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Los Angeles, USA.

Bruner, J. (1996). *Cultura da educação*. Lisboa: Edições 70.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. In E. Yackel, K. Gravemeijer & A. Sfard (Eds.), *A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb* (pp. 117–163). New York, NY: Springer.

De Corte, E., Depaepe, F., Op't Eynde, P., & Verschaffel, L. (2005, January). *Comparing mathematics education traditions in four European countries: The case of the teaching of percentages in the primary school*. Paper presented at the meeting of Universiti Teknologi Malaysia, Malaysia.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. In D. Tirosh (Ed.), *Forms of mathematical knowledge* (pp. 85–109). Dordrecht: Springer.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1), 3–8.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. New York, NY: Academic Press.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 397–430). Hillsdale, NJ: Eribaum.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perspective. In van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 45–85). London: Routledge.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J., Wearne, D., & Taber, S. (1991). Fourth graders' gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations. *The Elementary School Journal*, *91*(4), 321–341.

Lamon, S. (2007) Rational numbers and proportional reasoning. In F. Lester (Ed), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 629–667). Greenwich, CT: Information Age.

Leinhardt, G. (1988). Getting to know: Tracing students' mathematical knowledge from intuition to competence. *Educational Psychologist*, *23*(2), 119–144.

Lembke, L. O, & Reys, B. J. (1994). The development of, and interaction between, intuitive and school-taught ideas about percent. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(3), 237–259.

Moss, J. (2002). Percents and proportion at the center: Altering the teaching sequence for rational number. In B. Littweiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 109–120). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*(2), 122–147.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Parker, M. (2004). Reasoning and working proportionally with percent. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *9*(6), 326–330.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421–481.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed..), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp.11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em *design* para compreender e melhorar as práticas educativas. *Quadrante*, *25*(2), 77–98.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Serrazina, M. L. (2012). O sentido do número no 1º ciclo: Uma leitura de investigação. *Boletim Gepem*, *61*, 15–28.

Siegler, R. S. (2016). Magnitude knowledge: The common core of numerical development. *Developmental Science, 19*(3), 341–361.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, *17*(1), 13–19.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62*(4), 273–296.

Tian, J., & Siegler, R. S. (2017). Which type of rational numbers should students learn first?. *Educational Psychology Review*, 1–22.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 9–35.

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense.

Van Galen, F., & Van Eerde, D. (2013). Solving problems with the percentage bar. *Indonesian Mathematical Society Journal on Mathematics Education*, *4*(1), 1–8.

Anexo 3

Artigo III

Guerreiro, H. G., & Serrazina, L., (2018) Normas sociais e sociomatemáticas numa aprendizagem comparticipada da noção de 10%. *Quadrante, 27*(1), 69–94.

Versão dos autores

Normas sociais e sociomatemáticas numa aprendizagem comparticipada da noção de 10%

Social and sociomathematical norms in a co-participated learning of 10%

Helena Gil Guerreiro
Lurdes Serrazina

Resumo. *Neste artigo focamos a aprendizagem da matemática, numa perspetiva sociocultural, como processo inerentemente social e cultural, que se constrói pela participação na interação social. O objetivo é compreender de que modo as normas sociais e normas sociomatemáticas da cultura da sala de aula contribuem para uma aprendizagem comparticipada de um conteúdo matemático específico, a noção de 10%, como número de referência, alicerçada no desenvolvimento do sentido de número. Os dados analisados referem-se a três episódios de uma experiência de ensino e aprendizagem na sala de aula, que seguiu uma metodologia de Investigação Baseada em Design. Foram recolhidos a partir da observação participante, apoiada num diário de bordo, nas gravações áudio e vídeo dos momentos de discussão matemática coletiva e na recolha dos trabalhos escritos dos alunos. Os resultados evidenciam que as normas sociais e sociomatemáticas proporcionaram o desenrolar de ações dialógicas que permitiram suportar a construção de processos e relações numéricas que conduziram ao estabelecimento de práticas matemáticas partilhadas em torno da aprendizagem comparticipada da noção de 10%, como número de referência.*

Palavras-chave: interação social, normas sociais, normas sociomatemáticas, aprendizagem comparticipada, percentagem, números racionais

Abstract. *In this article we discuss the mathematical learning in a socio-cultural perspective, as an inherent social and cultural process, which is constructed through students' participation in the social interactions of whole-class mathematical discussions. The aim is to understand the relation between classroom social and sociomathematical norms and the emergence of a co-participated learning of a mathematical content - the notion of 10% - as a benchmark in number sense development perspective. The analyzed data refer to three episodes of a* *classroom experiment that follows the methodological procedures of a Design Research. Data were collected through participant observation, supported by video and audio recordings of whole-class discussions, students' written work, and teacher's research journal. The results show that social and sociomathematical norms have led to the development of dialogical actions that supported the construction of processes and numerical relations that led to the establishment of mathematical practices taken as shared which involved a co-participated learning of the notion of 10% as a benchmark.*

Keywords: social interactions, social norms, sociomathematical norms, co-participated learning, percentage, rational numbers

Introdução

A importância que a interação social na sala de aula assume, nomeadamente através das discussões coletivas, no ensino e na aprendizagem da matemática, é defendida por uma corrente de investigação com expressão significativa em educação matemática (Cobb, Yackel, & Wood, 1992; Voigt, 1994; Wood, Williams, & McNeal, 2006). O facto de se considerar que a aprendizagem se constrói na participação, em interação social e não que o cenário social existe como algo estático para proporcionar aprendizagem, traduz uma perspetiva sociocultural da aprendizagem e determina a atividade matemática dos alunos na sala de aula, bem como as convicções e atitudes que estes desenvolvem (Voigt, 1994; Vygotsky, 1996).

Um ambiente de aprendizagem alicerçado na participação, segundo Bielaczyc e Collins (1999), deve promover a capacidade de trabalhar e aprender com os outros, respeitando os contributos de cada um. Isto é, pressupõe uma cultura da sala de aula com características de comunidade de aprendizagem, em que alunos e professor interagem, num esforço e responsabilidade mútuos, com o objetivo comum de aprendizagem. Uma aprendizagem que dizemos comparticipada na medida em que resulta de uma construção conjunta e participada por todos na comunidade (Bereiter & Scardamalia, 2014; Bielaczyc & Collins, 1999; Niza, 1998; Santana, 2007).

A aprendizagem da matemática na sua relação com a cultura da sala de aula foi amplamente estudada, sendo destacado o papel que a interação social assume na negociação partilhada de normas sociais e sociomatemáticas (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001; Cobb & Yackel, 1996; Cobb, Yackel, & Wood, 1992). Por sua vez, a função reguladora dessas normas no processo de ensino e aprendizagem da matemática é também corroborada por outros investigadores (Kang & Kim, 2016; Lopez & Allal, 2007). Contudo, não basta identificar os aspetos sociais e culturais como pano de fundo da aprendizagem, mantendo o olhar direcionado para a sua natureza cognitiva (Rogoff, 2003; Wells, 1999), mas sim focar a atenção na aprendizagem comparticipada, como construção conjunta de significados, na sua relação com os processos socioculturais que a suportam.

Neste estudo, procuramos aprofundar de que modo as normas sociais e sociomatemáticas, da cultura de sala de aula, suportam e organizam a construção de práticas matemáticas. Focamos em particular práticas matemáticas relativas ao processo de alargamento do conhecimento numérico, e do sentido de número, aos números racionais, por parte dos alunos (McIntosh, Reys, & Reys, 1992; Siegler, Thompson, & Schneider, 2011). Mais concretamente, o objetivo deste artigo é compreender de que forma as normas sociais e sociomatemáticas da cultura de uma sala de aula contribuem para uma aprendizagem comparticipada da noção de 10%, como número de referência, alicerçada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Enquadramento teórico

A aprendizagem comparticipada como construção social e cultural

Pensar a aprendizagem numa perspetiva sociocultural é considerar o meio social e cultural como parte integrante do processo de aprender (Bruner, 1996; Rogoff, 2003; Vygotsky, 1996; Wells, 1999; Wertsch, 1994). Não se trata de lhe atribuir apenas o papel de contexto, enquanto conjunto de circunstâncias facilitadoras de construção da aprendizagem, mas sim de lhe conferir o poder dessa construção (Wertsch, 1994). É na interação com os outros que os alunos aprendem, mesmo antes de o fazerem individualmente, como refere Vygotsky (1996), para quem o desenvolvimento cognitivo é entendido como um processo de aquisição cultural, que envolve uma atividade externa, seguida da sua reconstrução interna. A aprendizagem individual acontece quando as funções sociais, que decorrem da atividade conjunta, são interiorizadas. A aprendizagem, entendida como um processo inerentemente social e cultural, é especificada neste estudo como comparticipada, no sentido de salientar que se trata uma construção pessoal, mas que se faz com os outros em processos de negociação na interação comunicativa, com recurso a instrumentos culturais, conduzindo a um saber socialmente construído (Lampert & Cobb, 2003; MEM, (s/d); Rogoff, 2003; Santana, 2007; Vygotsky, 1996; Wells, 1999). Este posicionamento conduz-nos a um ensino que se desenvolve como uma forma de criar condições pedagógicas facilitadoras desta construção social, nomeadamente, o estabelecimento de circuitos de comunicação, bem como de situações de aprendizagem em cooperação, na sala de aula em particular, em matemática (de Freitas & Walshaw, 2016; MEM, (s/d); Santana, 2007; Wells, 1999).

Sala de aula como comunidade de aprendizagem

Podemos entender a sala de aula como uma comunidade, dado tratar-se de um sistema dinâmico caracterizado por uma dada cultura, que se desenvolve nas interações entre os seus elementos. Contudo, para que seja considerada uma comunidade de aprendizagem é necessária uma cultura de sala de aula em que todos se encontrem envolvidos num esforço coletivo de compreensão, que Bielaczyc e Collins (1999) denominam por cultura de aprendizagem. Rogoff (2003) refere que pensar a sala de aula como uma comunidade de aprendizagem envolve estabelecer relações complexas entre os alunos no sentido de trabalharem juntos para atingir objetivos comuns e benéficos para todos. Na verdade, o objetivo de uma comunidade de aprendizagem é contribuir para a construção de um conhecimento coletivo que suporte o desenvolvimento do conhecimento de cada um (Bereiter & Scardamalia, 2014).

É possível estabelecer uma relação entre este conceito de comunidade de aprendizagem e as comunidades de prática de Lave e Wenger (1991), já que se tratam de espaços de participação social, em que esta é tida como um processo de aprendizagem, como tal, global e inseparável da prática social. Nas comunidades de prática, os seus elementos compartilham um entendimento relativo ao que fazem, construindo um reportório partilhado de saberes, que reflete um sentido de missão conjunta e de responsabilidade mútua e que passa pela negociação das responsabilidades que se assumem num comprometimento de participação em ações conjuntas (Lave & Wenger, 1991). Interpretar a sala de aula neste sentido, implica considerar a construção da aprendizagem na prática da comunidade a que se pertence, em que o conhecimento é coconstruído na participação em atividades conjuntas e tem por base a cooperação entre os seus elementos (Wells, 1999). Os alunos discutem e ajudam-se entre si, encorajando-se a ser perseverantes, no sentido de conseguirem um desempenho melhor do que aquele que obteriam se trabalhassem individualmente (Johnson & Johnson, 2009).

Deste modo, alunos e comunidade não são vistos como entidades separadas, como afirmam Cobb e Yackel (1998), não apenas no sentido de que são interdependentes, mas também de que "uma não existe sem a outra" (Cobb, 1999, p. 34). Pelo que, quando se considera uma perspetiva psicológica, analisa-se o raciocínio individual do aluno à medida que este participa na prática da comunidade de sala de aula. E quando se pensa numa perspetiva social, o foco é a prática coletiva, que se constrói na atividade de participação individual (Cobb & Yackel, 1996). Assim, procurando articular as duas perspetivas, o contributo individual é visto como forma de participação na prática coletiva da comunidade de aprendizagem a que se pertence.

Normas da cultura de sala de aula

Em cada sala de aula os alunos têm crenças relativas ao que devem fazer para aprender e como é esperado que ajam. Trata-se de um conhecimento tácito que é construído de forma partilhada por todos, sendo uma expressão da cultura específica dessa comunidade (Cobb et al., 2001). Enquanto comunidade, a sala de aula reúne um conjunto de crenças relativas a comportamentos, ações e rotinas que se estabelecem como normas eminentemente sociais. O que distingue uma sala de aula das demais é a natureza das normas estabelecidas, uma vez que determina toda a atividade e discurso que acontecem (Güven & Dede, 2017). Enquanto numa dada sala de aula mais tradicional, em que impera o monólogo do professor, *permanecer em silêncio* pode ser considerada a norma social dominante, noutra, em que se promove um ambiente de trabalho de investigação, poderá ser expectável *participar, sem constrangimentos, nos momentos de trabalho coletivo* (Alrø & Skovsmose, 2003).

Com efeito, as normas são um artefacto cultural e social específico de cada comunidade, dado que são construídas na turma, pelo grupo de alunos e professor que a integram, não tendo significado fora dela (Yackel & Cobb, 1996). A sua análise permite assim interpretar a dinâmica da sala de aula, bem como contribuir para clarificar o papel que cada um assume.

Cobb e Yackel (1996) distinguem normas sociais de normas sociomatemáticas, na medida que consideram que devem ser estabelecidas normas específicas para a atividade matemática dos alunos na sala de aula. Assim, *ouvir e dar sentido às explicações dos outros* ou *usar a linguagem para pensar com os outros* podem ser consideradas normas sociais. Ao invés, o que é estabelecido como, por exemplo, "uma solução matemática diferente, uma solução matemática sofisticada, uma solução matemática eficiente e uma explicação matemática aceitável" (p. 178) remete para normas sociomatemáticas, específicas da atividade matemática dos alunos. Estes autores destacam ainda que as normas sociomatemáticas não se circunscrevem a um dado tema matemático, são transversais pois dizem respeito a um entendimento sobre o que é saber e fazer matemática. Além disso, não são estáticas dado que, reflexivamente, cada um vai moldando o seu papel e as suas ações na construção das práticas matemáticas da comunidade, em função do que perceciona como expectável num dado momento (Cobb & Yackel, 1996; Kang & Kim, 2016).

Práticas matemáticas da sala de aula

As práticas matemáticas podem ser entendidas como a atividade matemática, social e situada, que emerge e se estabelece na sala de aula, sendo esta interpretada como uma comunidade de aprendizagem de matemática (Cobb, 1999; Wood et al., 2006). As práticas matemáticas envolvem um entendimento negociado de interpretações matemáticas, processos de raciocínio e de argumentação, coletivizando-se associadas à discussão de um dado conteúdo ou ideia matemática (Cobb et al., 2001). Decorrem da participação na atividade matemática da comunidade de aprendizagem, tratando-se de um fenómeno emergente e não de uma situação pré-estabelecida a que os alunos são introduzidos (Cobb et al., 2001). Deste modo, podemos afirmar que as práticas matemáticas evoluem na medida em que os alunos juntos, em pequenos grupos e em coletivo, com a orientação do professor, vão melhorando a forma como analisam as resoluções uns dos outros e a pertinência dos seus comentários, fazendo-as emergir como um entendimento partilhado (Cobb et al., 2001; Wood et al., 2006).

Tal como em relação às normas, também em relação às práticas matemáticas existe uma relação reflexiva entre a aprendizagem individual dos alunos e a sua participação na construção das práticas (Cobb & Yackel, 1996). Contudo, em função de uma dada prática matemática, que se estabelece como coletiva e partilhada por todos na comunidade, há diferentes entendimentos, diferentes formas de pensar e argumentar, por parte dos alunos (Cobb & Yackel, 1996). À medida que uma prática matemática emerge e se desenvolve a partir dos contributos de cada um, também esses contributos se vão modificando em função da participação na coletivização dessa prática matemática específica. Nesta medida, a evolução em termos de aprendizagem individual não se processa do mesmo modo para todos os alunos e decorre da participação de cada um na construção das práticas matemáticas da comunidade (Cobb et al., 2001).

Ações decorrentes da interação social

As práticas matemáticas traduzem o que os alunos fazem enquanto aprendem matemática na atividade da comunidade da sala de aula. Deste modo, consideramos que estudar a sua construção implica analisar as ações que os alunos empreendem nos momentos de interação que se estabelecem. Para analisarem a comunicação que se estabelece nas aulas de matemática, Alrø e Skovsmose (2003) recorrem ao Modelo de Investigação em Cooperação (Modelo-IC), através do qual procuram identificar um padrão no diálogo que se estabelece nos momentos de interação e assim compreender como as relações dialógicas influenciam a construção de práticas matemáticas na sala de aula. A partir do diálogo, em momentos de discussão matemática coletiva, Alrø e Skovsmose (2003) identificam elementos de comunicação que integram o Modelo-IC e que definem as seguintes ações que podem ser assumidas, quer pelo professor, quer pelos alunos: envolver (*getting in contact*), descobrir (*locating*), identificar (*identifying*), defender (*advocating*), pensar alto (*thinking aloud*), reformular (*reformulating*), desafiar (*challanging*) e avaliar (*evaluating*) (Figura 1).

Figura 1. Modelo de Investigação em Cooperação (Alrø & Skovsmose, 2003, p.162)

Neste modelo *envolver* pode corresponder a uma fase preparatória. Implica o fazer perguntas de aprofundamento ou de esclarecimento, afirmações de confirmação mútua ou de suporte. Implica estar atento aos contributos dos outros, numa relação que implica respeito mútuo, responsabilidade e confiança, pelo que os autores defendem a importância do seu significado emocional. *Descobrir* corresponde a ações que decorrem durante o processo de compreensão da perspetiva do outro e de construção e exploração de caminhos diferentes de aprendizagem. *Identificar* resulta como consequência do processo de explorar em conjunto. Traduz ações que levam à construção de justificações ou tentativas de justificação, no sentido de tornar robusta uma ideia matemática. *Defender* conduz à construção de conhecimento partilhado. Decorre da argumentação em torno do que se pensa e ao mesmo tempo da análise dos conhecimentos que suportam esse pensamento. Por *pensar alto* entende-se pensar para si próprio de modo que os outros também oiçam. Contribui para assegurar o envolvimento no processo coletivo. *Reformular* implica repetir o que foi dito de outra maneira. Inclui parafrasear ou completar afirmações. Trata-se de um elemento que representa o processo de *envolver*. *Desafiar* envolve mudar a direção da conversa ou questionar algo apresentado. Esta ação pode conduzir a uma nova ação de *explorar* e *identificar,* conduzindo a novas possibilidades de aprendizagem. Por último, *avaliar* envolve um conjunto amplo de ações como a correção de erros, a crítica construtiva, o dar conselhos, o apoiar, o elogiar, entre outras (Alrø & Skovsmose, 2003).

Estas ações dialógicas envolvem processos sociais e/ou relações e processos matemáticos, nomeadamente processos de raciocínio, como a construção de estratégias de resolução, argumentos, justificações e generalizações (Mata-Pereira & Ponte, 2012). A sua análise, uma vez que estas ações acontecem focadas numa ideia ou conteúdo matemático, contribui para percecionar que processos e relações matemáticas são mobilizados na aprendizagem comparticipada dessa ideia ou conteúdo. Para além disso, sendo ações que decorrem da atividade matemática da turma na construção das práticas partilhadas, a sua análise permite percecionar as normas sociais e normas sociomatemáticas que regulam a cultura da sala de aula (Cobb, Yackel, & Wood, 1992).

Privilegiar a percentagem no alargamento aos números racionais

Neste estudo, assumimos que as normas dizem respeito à atividade matemática dos alunos, enquanto as práticas matemáticas da sala de aula se focam numa ideia ou conteúdo matemático específico. Neste pressuposto, a aprendizagem dos números racionais remete para práticas matemáticas da sala de aula que visam a construção de um conhecimento sólido acerca do número, num perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, mas também para a capacidade de usar esse conhecimento, de modo flexível, para fazer julgamentos matemáticos e construir estratégias de resolução negociados e partilhados na sala de aula, regulados por normas que os suportam (Hunter & Anthony, 2002; McIntosh et al., 1992).

Na nossa perspetiva, o desenvolvimento do sentido de número deve ser entendido como um processo de enriquecimento conceptual, que tem por base um entendimento da grandeza do número, no conjunto ordenado dos números racionais (Siegler et al., 2011). Tratando-se de um processo de desenvolvimento contínuo, os números racionais[1] devem surgir como uma extensão natural dos números inteiros[2], permitindo resolver problemas que não seriam possíveis resolver apenas com os números inteiros (NCTM, 2010). Esta ideia valoriza o conhecimento intuitivo dos alunos, permitindo que se desenvolva gradualmente, como resultado de práticas matemáticas de sala de aula que lhes permita explorar os números, visualizá-los em vários contextos, nomeadamente culturais e sociais, e relacioná-los. O estabelecimento de conexões com conhecimento que os alunos já possuem permite a construção de um sistema de números de referência, gradualmente desprovidos de contexto, que se torna essencial para pensar sobre os números e tomar decisões (McIntosh et al., 1992).

É neste sentido, coordenando os conhecimentos que os alunos já possuem sobre os números de 1 a 100, com a intuição que apresentam em relação ao sentido de proporção, que Moss e Case (1999) realçam o papel que a percentagem pode desempenhar numa etapa inicial da aprendizagem dos números racionais. Dado que os alunos convivem com a percentagem desde cedo, nas mais diversas situações do quotidiano, parece fazer sentido usá-la numa compreensão integrada dos números racionais, que envolva a construção de uma rede de esquemas e símbolos, bem como de contextos que lhe dão significado (Hunter & Anthony, 2003; Moss & Case, 1999). Enquanto “linguagem de proporção privilegiada” (Parker & Leinhardt, 1995, p. 472) a percentagem pode constituir uma oportunidade para mobilizar o pensamento relacional e explorar situações multiplicativas, apoiados nos conhecimentos intuitivos das relações proporcionais dos alunos. Pelo que, um trabalho inicial com a percentagem deve incidir no desenvolvimento do sentido de completude que a percentagem oferece, isto é, a perceção da relação da parte com o todo contínuo, numa escala linear de 0% a 100% (Parker & Leinhardt, 1995) e, gradualmente, conduzir à compreensão da sua natureza relativa, de forma interligada com a representação decimal e a fração. Deve ainda partir dos conhecimentos informais dos alunos e privilegiar as suas estratégias espontâneas, maximizando os conhecimentos intuitivos em relação à proporção e aos números inteiros de 1 a 100. Para isso, a compreensão da percentagem requer o estabelecimento de práticas matemáticas de conexão com diversas representações – ativas, icónicas e simbólicas (Bruner, 1996) e a linguagem oral e escrita (Ponte & Serrazina, 2000). Estas práticas matemáticas devem incluir processos de construção de modelos a partir de diversas representações, de um sistema de valores de referência, de estratégias de composição e decomposição de números, que suportem um raciocínio multiplicativo, em detrimento de procedimentos de cálculo formais precoces (Moss & Case, 1999; Parker & Leinhardt, 1995).

Metodologia

Design da investigação

Neste estudo, focamos o nosso olhar em diferentes momentos de uma experiência de ensino e aprendizagem na sala de aula (Gravemeijer & Cobb, 2006), que integra uma investigação baseada em design (Cobb et al., 2001; Ponte, Carvalho, Mata-Pereira, & Quaresma, 2016). A construção e implementação desta experiência de ensino visava analisar a aprendizagem comparticipada pelos alunos na turma, à medida que acontecia no contexto da sala de aula, tendo como preocupação a articulação entre a dimensão de conteúdo matemático, centrada na construção de práticas matemáticas relativas aos números racionais, e a dimensão pedagógica, focada na cultura da sala de aula como comunidade de aprendizagem (Confrey & Lachance, 2000).

A primeira dimensão incorpora conteúdos e processos matemáticos que se pretendia que os alunos aprendessem e desenvolvessem, segundo uma trajetória de aprendizagem, inspirada no currículo experimental apresentado por Moss e Case (1999). Esta trajetória traduz um percurso do ponto de vista do conteúdo matemático que estrutura a aprendizagem dos números racionais, em três etapas, de forma inter-relacionada. A primeira etapa remete para o início do desenvolvimento da compreensão da noção de percentagem, seguindo-se-lhe a introdução da representação decimal, onde as centésimas decorrem da percentagem e, por último, envolve um trabalho com a fração que apela à relação das três representações entre si. A dimensão pedagógica diz respeito aos meios através dos quais se pretende que os alunos aprendam numa cultura de sala de aula que sustenta uma comunidade de aprendizagem.

A dinâmica de exploração das tarefas, as ações que os alunos empreenderam e as normas que regulavam a interação na sala de aula são alguns dos elementos da ecologia de aprendizagem específicos da situação de aprendizagem que envolvia esta turma (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003). Convocamos esta metáfora da ecologia para evidenciar que os contextos subjacentes a estes estudos de design são pensados como um sistema dinâmico que se apoia na relação dos seus elementos. É essa ecologia que queremos analisar e compreender, no sentido de conseguir gerar teorias locais, que Cobb et al. (2003) qualificam como modestas, procurando a explicação dos fenómenos em estudo. Nesta perspetiva fizemos a recolha de dados no ambiente natural de aprendizagem, a sala de aula, e considerámos como unidade de análise a própria turma, isto é, a atividade do grupo, alunos e professora, em torno das tarefas propostas, com os recursos da comunidade à disposição.

Contexto e participantes

A experiência de ensino decorreu ao longo do 3.º período do 3.º ano e do 1.º período do 4.º ano de escolaridade, numa turma de 23 alunos, numa escola pública em Lisboa, onde a primeira autora para além de investigadora era também a professora titular da turma desde o seu 1.º ano de escolaridade. De modo a dar sentido a algumas das opções tomadas importa referir que a organização do trabalho de aprendizagem da turma tinha subjacente o modelo pedagógico do Movimento da Escola Moderna. Destaca-se que este modelo dá especial relevo à organização cooperada do trabalho de aprendizagem na sala de aula, como comunidade de aprendizagem, tendo em vista a construção social dos saberes em circuitos dialógicos de comunicação (MEM, s/d). Este modelo permitia que todos os alunos, independentemente do ponto de partida de cada um, tivessem oportunidade de participar na construção das práticas matemáticas da turma. (Niza, 1998). Deste modo, a natureza da cultura da sala de aula, e das normas que a regulam, deve ser interpretada segundo este enquadramento, que se reflete na interação social da turma, nomeadamente nos momentos de discussão matemática coletiva. Estes momentos decorrem da discussão em torno da resolução de uma tarefa matemática, sendo dirigidos pelo professor e comparticipados pelos alunos, correspondendo à última fase do modelo de ensino exploratório de Ponte (2005).

Responsabilidade ética

Numa investigação desta natureza, em que o professor é também investigador, as inquietações relativas aos princípios éticos envolveram um comprometimento ético perante toda a investigação (Floyd & Arthur, 2012). Este implicou a discussão do estudo, nas suas diferentes fases, e a explicitação das inquietações que foram surgindo com outros investigadores, permitindo antecipar situações potencialmente geradoras de conflito de interesses. Tornou indispensável a obtenção de um consentimento voluntário e informado de participação dos alunos e garantiu, de modo a assegurar a proteção dos alunos e das famílias, a proteção da informação confidencial, bem como o anonimato e a privacidade dos alunos (IE - UL, 2016).

Recolha e análise de dados

Para acautelar uma possível implicação excessiva da investigadora e professora da turma e assegurar uma descrição mais fiel e completa dos momentos em análise, desenvolvemos uma triangulação dos dados, recorrendo a uma variedade de métodos e instrumentos de recolha (Confrey & Lachance, 2000), nomeadamente, aos registos da observação participante, a gravações áudio e vídeo das aulas e a recolha documental das produções escritas dos alunos.

Neste artigo, focamos a nossa atenção na noção de 10% como número de referência e nos meios que suportam a sua aprendizagem comparticipada, nos momentos de discussão matemática coletiva. Os momentos em análise resultam de um recorte de três tarefas, das vinte que integraram a experiência de ensino, e que foram selecionadas por permitirem destacar evidências relacionadas com os fenómenos em estudo. Salientamos que analisámos a aprendizagem comparticipada na sala de aula, pelos alunos na turma, enquanto comunidade de aprendizagem, e não dos alunos individualmente (Cobb, 1999).

A análise retrospetiva dos dados envolveu estratégias de indução analítica, a comparação constante, bem como a análise tipológica que permitiram definir categorias a partir dos dados, atribuindo-lhes um significado ancorado no quadro conceptual que suporta este estudo (Goetz & LeCompte, 1984). Na definição das categorias foi convocado o Modelo-IC de Alrø e Skovsmose (2003) orientando a análise nas dimensões pedagógica e de conteúdo matemático. A interpretação das ações dialógicas do Modelo-IC procurou inferir, por um lado, as normas sociais e as normas sociomatemáticas estabelecidas e, por outro, identificar os conhecimentos dos números racionais que os alunos construíram e as relações que mobilizaram, em torno da aprendizagem comparticipada da noção de 10%. Esta análise permitiu percorrer os acontecimentos, procurando compreender a relação entre os elementos da ecologia de aprendizagem e a aprendizagem dos números racionais realizada pela turma em estudo, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Resultados

Negociando significados matematicamente válidos

Trazemos a este episódio momentos que decorreram no âmbito de uma tarefa exploratória que envolveu representações ativas e icónicas e que foi desenvolvida no 3.º ano de escolaridade, numa etapa inicial da experiência de ensino. Centramo-nos na última questão dessa tarefa (Anexo 1) que pedia para os alunos descobrirem quantos centilitros correspondiam a 50% e 10% de refrigerante numa lata. Nesta questão era dada uma representação icónica da lata que os alunos podiam usar para apoiar a construção da sua estratégia de resolução.

Depois da discussão da primeira parte da questão, a apresentação das resoluções construídas para o cálculo de 10% gerou discordância. Alguns alunos diziam ser 5 centilitros, outros 4 centilitros e outros não tinham conseguido chegar a um valor para a resposta. Em interação, os alunos chegam à conclusão que 5 centilitros representavam metade de 25% e não os 10% que pretendiam, rebatendo a utilidade da estratégia das metades sucessivas nesta situação, que tinha sido usada pela maioria dos alunos. A discussão avançou com a apresentação de uma estratégia matematicamente diferente que desafiou a turma, quando um dos alunos, pediu a palavra para defender uma outra forma de resolver o problema, que tinha descoberto com o seu grupo.

Simão:	Eu sei outra maneira de explicar, professora. Posso?
Professora:	Vamos ouvir a estratégia do Simão.
Simão:	Como 10 vezes 10 dá 100, 4 vezes 10 dá 40.
Professora:	Que vos parece? Como pensou o Simão?
Heitor:	Eu sei o que o Simão fez.
Ivo:	Eu percebi o que o Simão disse.
Professora:	Ok. E o resto da turma? . . .

Interpretando o significado de razão que a percentagem oferece, o aluno percecionou que a relação entre a parte e o todo, em termos de quantidade de cola e capacidade da lata, era proporcional e apresentou um raciocínio apoiado nessa relação. Os outros alunos ouviram, procurando descobrir o raciocínio apresentado, em resposta ao reforço da professora. Alguns intervieram com afirmações de suporte para confirmar que tinham percebido a estratégia apresentada pelo colega, recorrendo a um pensar alto, para si próprio e para os outros.

No sentido de envolver na discussão todos os alunos, a professora espelhou a ideia de Simão, apelando a que os colegas considerassem a unidade de referência, usando a representação icónica como suporte.

Professora:	. . . Então, olhando para o esquema, o Simão viu que 100% são 40 centilitros.
Heitor:	10% dez vezes dá 100%.
Professora:	Ok.
Ivo:	Ele está a ver dividido em 10 vezes o 4.
Professora:	Isso. Qual é o número que eu tenho que usar 10 vezes para chegar a 40?
Alunos:	É o 4.
Rui:	Porque 4 vezes 10 dá 40.

As intervenções dos alunos sucederam-se no sentido de reformular e completar o raciocínio conjunto que se construiu, num processo de descobrir que envolveu quer a construção de generalizações específicas, através de um pensar alto, como fez Heitor, quer a identificação da relação entre a multiplicação e a divisão, como fez Ivo, mobilizando conhecimentos que já possuía. A estratégia da divisão da unidade em dez partes iguais e a iteração de uma dessas partes constituiu o fio condutor do diálogo que se construiu, para a compreensão da noção de 10%. A confirmação do raciocínio de Simão por Ivo é realizada através da apresentação de um argumento que se constrói como matematicamente válido, na medida em que é justificado por Rui.

Entretanto, a professora intervém para focar a atenção na relação que permitia interpretar o valor de referência 10%.

Professora:	. . . Mas porque é que ele agarrou em 10?
Marco:	Deve ter pensado que, se estava dividido em 10, e ele quer chegar à quantidade de 40 centilitros, podia fazer 10 vezes o 4.

Professora: Então, quando queremos descobrir 10% de uma quantidade qualquer, o que podemos fazer?

Ana: … Podemos ver qual é número que …

Dina: … Multiplicado por 10 dá essa quantidade.

Bruna: Também podemos fazer os 100% a dividir por 10.

Professora: É outra forma de dizer… fazemos a divisão da quantidade que temos, que temos como 100%, por…

Alunos: Por 10.

Professora: Ora bem. Que vos parece? Vamos registar.

Nesta sequência de intervenções, os alunos tentaram colocar-se no lugar dos colegas e reformular o seu raciocínio, validando-o e procurando introduzir novos elementos, como fez Marco ao afirmar "[O Simão] deve ter pensado…", que desta forma procurou envolver também os colegas. Em resposta ao desafio da professora, a construção das relações multiplicativas que envolveram a noção de 10%, como número de referência, aconteceu de forma comparticipada, que se manifestou na ação de Marco ao captar o pensamento de Simão, que defendeu, devolvendo-o reformulado. Deste pensar em conjunto resultou uma sistematização em cartaz, que registava os significados negociados na turma (Figura 2).

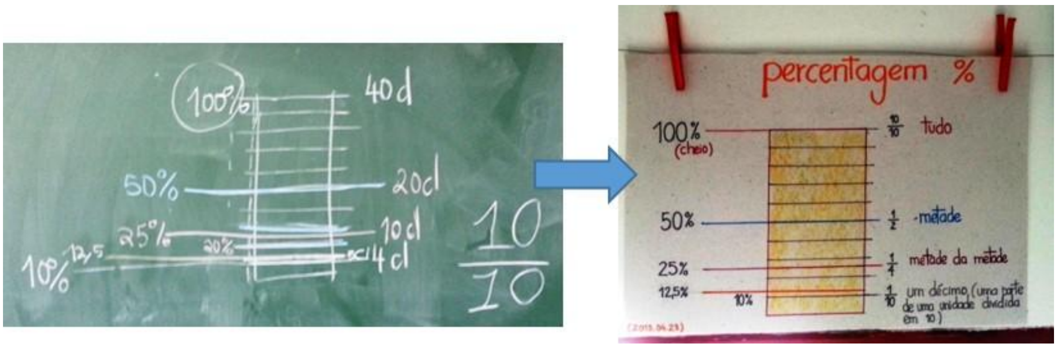


Figura 2. Registos da sistematização no momento de discussão

Neste episódio destacamos momentos de discussão matemática coletiva em que se perceciona uma construção comparticipada da relação que permite concluir que 10% dos 40 centilitros são 4 centilitros e não 5, e procura-se a sua extensão, através de uma generalização. A apresentação de uma sugestão por um aluno desencadeou a construção conjunta das relações multiplicativas que envolveram a noção de 10%, apoiadas em conhecimentos dos números e das operações que os alunos já tinham e partilharam. As ações que emergiram do diálogo, como envolver, descobrir, identificar, defender, pensar alto, reformular e desafiar, evidenciam a existência de aspetos normativos, sociais e sociomatemáticos, que regulavam a interação permitindo percecionar uma cultura de sala de aula caracterizada pela participação ativa de todos os seus elementos. Com efeito, neste episódio, é possível percecionar que a atividade matemática da turma é regulada por normas sociomatemáticas específicas que em interação se vão estabelecendo. Dos alunos era esperado que, autonomamente, apresentassem ideias matemáticas diferentes das dos colegas, consideradas por si mais eficazes, defendendo explicações válidas, apoiadas em procedimentos matemáticos e que cabia à turma validar. Era esperado ainda que os ouvissem e dessem sentido a essas ideias devolvendo-as reformuladas à turma, sem constrangimentos, para serem coletivizadas.

Construindo explicações matematicamente eficazes

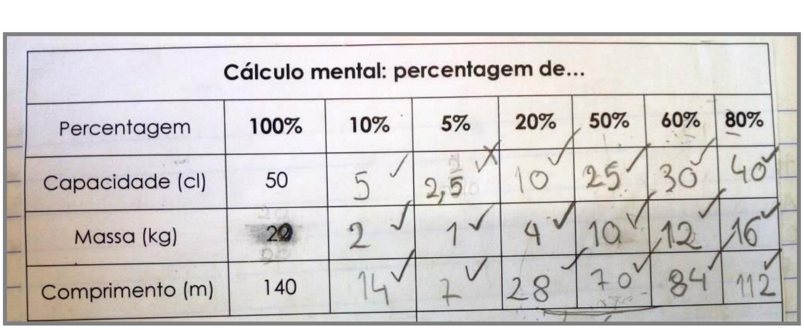
Ainda no 3.º ano de escolaridade focamo-nos agora num momento de discussão em coletivo de uma tarefa de cálculo mental (Anexo 1). Trata-se de uma tarefa num contexto matemático e que tem como suporte uma tabela de razão. A tarefa foi resolvida por cada aluno individualmente durante cerca de 15 minutos. No fim desse tempo, foi discutida em coletivo, num momento comparticipado de partilha das estratégias encontradas e validação dos resultados, usando como suporte o Quadro Interativo Multimédia. Pretendia-se que os alunos estabelecessem relações numéricas no cálculo mental com percentagens, recorrendo a estratégias como a das metades sucessivas, dos dobros e metades, da composição e decomposição de números inteiros ou a noção dos 10%.

A discussão em coletivo passou por identificar estratégias já estabelecidas na turma para a resolução de cálculos simples com percentagens e outras que se apoiam em descobrir relações numéricas menos familiares. A estratégia dos dobros e das metades é um exemplo de uma estratégia familiar. No entanto, nesta etapa, quando dessa divisão resultou um número na representação decimal, surgiram dificuldades. Foi o que aconteceu, por exemplo, no cálculo do 5% de 50. O facto de, na proposta da tarefa, 5% surgir logo a seguir a 10% na tabela tinha como intenção apelar a essa estratégia. Ivo avançou, apresentando uma explicação que defendeu:

Ivo:	Eu fiz, como 10% é o dobro do 5%, eu fiz metade de 5, que é dois e meio, dois vírgula cinco.
Professora:	E como chegaste a essa conclusão?
Ivo:	Porque se fosse dois, era metade de 4. E como dois mais dois dá 4 e sobra 1... fiz...
Heitor:	Partiste-o ao meio!
Ivo:	Sim, deu dois e meio.
Professora:	E como escreveste dois e meio?
Ivo:	Dois vírgula cinco.

Neste excerto do diálogo, enquanto Ivo apresentava a sua estratégia num pensar alto desafiado pela devolução da professora, os alunos ouviam ativamente, numa procura por descobrir a forma como o outro pensou, apoiado na estratégia dos dobros e das metades. “Partiste-o ao meio!” é a explicação que Heitor dá como forma de defender o raciocínio do colega, através de um pensar alto por parte de quem se encontra envolvido no raciocínio, e que também deixa antever a necessidade de encontrar argumentos que possam tornar-se matematicamente válidos perante a turma.

Nesta etapa da experiência de ensino alguns alunos ainda hesitavam no registo dos números na representação decimal. Foi o caso de Bruna, a quem a intervenção de Ivo pareceu ter permitido descobrir uma representação diferente da sua. Ao comparar com o seu trabalho, no processo de autocorreção, a aluna decidiu corrigir, apagando o seu registo inicial, “2 e meio” (“2” em cardinal e por baixo “e meio” por palavras) e escreveu “2,5”. Contudo, ao fazê-lo, não colocou o símbolo de errado ou de correto, mas assinalou, no registo da tarefa, essa correção com um símbolo traçado (Figura 3), o que evidencia um posicionamento crítico relativamente ao processo de autoavaliação e às normas sociomatemáticas que lhe estão implícitas.


Cálculo mental: percentagem de...

Percentagem	100%	10%	5%	20%	50%	60%	80%
Capacidade (cl)	50	5	2,5	10	25	30	40
Massa (kg)	20	2	1	4	10	12	16
Comprimento (m)	140	14	7	28	70	84	112

Figura 3. Registo da tarefa de cálculo mental colado no caderno diário de Bruna

De realçar, que esta aluna, embora valorizando o seu trabalho, identifica a diferença matemática comparando o seu trabalho com o do colega e mobilizando o que considera ser mais eficaz. Embora fosse expectável que assim o fizesse, dado que as resoluções dos alunos eram valorizadas enquanto processo de construção e não apenas como produto que se considerava certo ou errado, implica uma tomada de consciência individual, que se devolve à turma, contribuindo para a institucionalização no grupo da própria norma sociomatemática.

Nesta etapa da trajetória de aprendizagem era uma prática matemática estabelecida na turma que 10% de uma dada unidade traduzia uma quantidade relativa 10 vezes mais pequena e para a calcular, os alunos recorriam à divisão por 10. Pelo que, nesta tarefa os alunos foram desafiados a identificar relações numéricas e a descobrir uma estratégia adequada que permitisse chegar ao resultado dos cálculos indicados. Assim, o valor de 10% foi usado como suporte de outros cálculos, nomeadamente na estratégia da decomposição do número.

Dina:	Eu para calcular o 50% fiz metade de 20, porque metade de 100 [%] eram 50 [%], então fiz metade de 20 que era 10.
Professora:	Dúvidas? Perguntas?
Alunos:	Não.
Afonso:	50% é sempre metade.
Professora:	E o 60% (de 20) queres aproveitar para fazer?
Dina:	Posso fazer 50% (de 20) mais 10% (de 20), que dá... 12.
Professora:	Concordam? . . .
Alunos:	Sim . . .
Bárbara:	Fiz igual.
Carolina:	Eu também.

Neste excerto, Dina começou por se apoiar na estratégia das metades, interpretando a proporção, que Afonso validou ao reformular o que parecia ser um facto matemático estabelecido na turma, através de um pensar alto: “50% é sempre metade”. Para determinar o 60% de 20, Dina recorreu à sua decomposição em 50% mais 10%, uma estratégia aditiva, provavelmente apoiada pela estrutura do modelo da tabela de razão. Tratava-se de uma estratégia familiar que, a avaliar, evidenciou consenso.

De modo a envolver mais alunos na discussão, apelando a que avaliassem os procedimentos que permitissem validar a estratégia apresentada pelos colegas ou partilhassem a sua, a professora deu a palavra a Marco:

Professora:	. . . Marco, que te parece?
Marco:	Sim, mas também podia ser 6 vezes o 2, que dá 12.
Professora:	Porquê seis vezes o dois? Oiçam lá a estratégia do Marco.
Marco:	Para descobrir o 60% podemos fazer 6 vezes o 10% (de 20), que dá 12.
Professora:	Estão a perceber? Dá doze porque o Marco faz 6 vezes o valor do 10%, que é 2 e 6 vezes 2 dá 12.
Ana:	Eu também fiz assim.
Professora:	Uma boa estratégia alternativa! E agora o cálculo de 80%? . . . Dinis.
Dinis:	Para descobrir o 80% é fácil. Então, fazes 8 vezes 2 que é 16.
Professora:	Boa! Oito vezes o valor de 10%, que são 16.

Por considerar que a sua estratégia era matematicamente diferente, Marco desafiou a turma, na medida em que introduziu novos elementos à discussão, suportando a sua estratégia num raciocínio multiplicativo proporcionado pelo 10%. A apresentação de uma estratégia matematicamente diferente permitiu que cada aluno pudesse avaliar outras formas de pensar e que comparasse com a sua. Essa comparação podia ser ou não verbalizada. Ana é o caso de uma aluna que sentia confiança em fazê-lo, identificando a semelhança com a forma como tinha resolvido. Quando Dinis apresentou a sua estratégia para o cálculo de 80% de vinte optou por usar a estratégia multiplicativa apresentada por Marco. Independentemente de ter sido a que tinha usado inicialmente, Dinis usou esta estratégia por lhe parecer ser, no momento, a matematicamente mais eficaz, contribuindo para a legitimar como mais eficaz.

Neste episódio, estratégias diferentes relacionadas com o cálculo de 10% pareceram estabelecer-se à medida que diferentes alunos as apresentavam e, comparando, davam sentido às dos outros. A noção de 10% foi-se desenvolvendo e este número foi-se assumindo como percentagem de referência para o cálculo de outros valores, ainda que suportado pelo modelo da tabela de razão. Progressivamente a noção de 10% foi-se constituindo como uma prática matemática que integrava o reportório partilhado pela turma. Isto aconteceu à medida que estratégias matematicamente mais sofisticadas iam surgindo, sem que outras, mais familiares, deixassem de ser consideradas válidas.

Por um lado, as ações que foram empreendidas neste episódio, nomeadamente o descobrir, identificar ou mesmo o reformular, permitiram percecionar normas sociais, como estar atento e dar sentido às explicações dos outros, mas também normas sociomatemáticas, que se construíam como específicas da atividade matemática desta turma. Neste processo, cada aluno podia ir mobilizando a estratégia matemática que lhe parecia mais adequada em cada momento, indo ao encontro do que era capaz de fazer, sem que se sentisse constrangido, mas percecionando ao mesmo tempo a vantagem e necessidade de a fazer evoluir.

Por outro lado, a forma como era esperado que cada um interviesse na discussão, isto é, as normas sociais e sociomatemáticas que regulavam essa interação, foi também ela moldada pelas ações e (re)ações dialógicas entre os alunos e com o professor, que se sucederam na interação, convocando uma tomada de consciência do papel de cada um. Note-se que, a intervenção da professora, quando deu a palavra a Marco, de modo a que se envolvesse na discussão, reforçou a importância de apresentar soluções matematicamente diferentes, que caberia à turma apreciar e validar.

Percebendo soluções matematicamente diferentes

Já no 4.º ano de escolaridade, centramo-nos na discussão em coletivo que decorreu em torno de um problema contextualizado de partilha equitativa de três sandes por cinco meninas (Anexo 1). Os alunos trabalharam a pares na fase de exploração da tarefa e a discussão em coletivo centrou-se na apresentação e análise de quatro resoluções diferentes na estratégia e, aparentemente, também no resultado a que os alunos chegaram. Aquando da discussão da terceira resolução, surgiu o desafio de perceber que número respondia ao problema, dado que os autores, Bruna e Humberto, tinham chegado à expressão $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$, sem conseguir resolver a adição de uma forma satisfatória. É a este momento que nos remetemos neste episódio, em que os alunos ouvem e procuram descobrir a estratégia dos colegas e tentam ajudar a resolver o impasse. Dinis apresentou uma solução que ia ao encontro da resposta apresentada nas duas resoluções anteriores.

Professora:	Como é que posso saber quanto é que dá? Um meio mais um décimo?
Dinis:	Dá o mesmo que três quintos.
Professora:	Porquê?
Dinis:	Porque é metade mais um bocadinho.

Dinis descobriu que o resultado ia dar "o mesmo que três quintos" identificando que as duas representações traduziam a mesma quantidade, que o aluno justificou como sendo "metade mais um bocadinho". Esta justificação surge depois de discutida em coletivo a comparação entre o modelo construído no quadro por Bruna e Humberto e os modelos apresentados nas resoluções de Berta e Rui e a de Carolina e Simão, e cuja solução tinha sido validada na turma. (Figura 4).

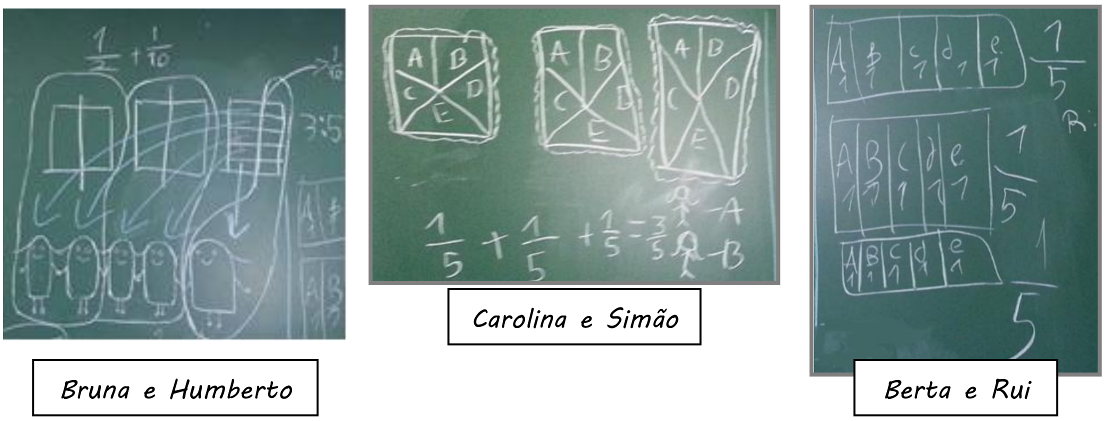


Figura 4. Modelos em três resoluções apresentadas no quadro, em discussão

A discussão realizada em torno das resoluções apresentadas por Carolina e Simão e por Berta e Rui, depois de debatida a falta de rigor quer na dimensão das sandes entre si, quer na divisão das partes, tinha permitido identificar que cada menina comia três quintos de sandes. Após a intervenção de Dinis, importava que a discussão fosse alargada, de modo a que outros alunos se envolvessem numa compreensão compartilhada de que $\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$ e $\frac{3}{5}$ representavam a mesma quantidade, pelo que a professora devolveu a pergunta aos alunos, parafraseando a afirmação de Dinis:

Professora:	Metade mais um bocadinho… mas quanto é que dá ao todo?

Ivo:	É 60%.
Professora:	60%. Ok. Vamos perceber porquê. Estão connosco?
Bárbara:	Não!
Heitor:	Como assim?
Professora:	Explica lá Ivo, por que é que achas que é 60%.

Quando Ivo intervém, parece fazê-lo colocando-se na perspetiva do colega e tirando dela partido para explorar um caminho diferente. É suportando-se na percentagem que procura validar a afirmação "Dá o mesmo que três quintos", através da justificação "é 60%". Os alunos ouvem a descoberta e alguns verbalizaram, sem constrangimentos, que não estavam a acompanhar o raciocínio, pelo que, desafiado também pela professora, Ivo explicitou como tinha pensado, defendendo a sua estratégia.

Ivo:	Aqui (apontando para a representação icónica de Berta e Rui) cada uma comeu 20% numa fatia de sandes. Dividido em cinco é 20%, então três quintos é 60%.
Professora:	Perceberam? Vamos lá ver. O Ivo diz que [três quintos] é 60%. Numa sandes dividida em 5 um quinto é 20% e então três quintos é 60%, é isso?
Ivo:	Sim, e um meio mais um décimo é …um meio é 50%...
Professora:	Isso! Ter um meio é a mesma coisa que ter 50% E um décimo?
Ivo:	É 10%.
Professora:	Concordam? [Um décimo] São quantos por cento?
Alunos:	10%.
. . .	
Dina:	Dá 60%.
Professora:	Isso, temos que três quintos são 60% e um meio e um décimo…?
Mafalda:	É 50% mais 10%...
Alunos:	É 60%.

À medida que o aluno apresentou as relações encontradas, a turma foi desafiada a descobrir, de forma comparticipada, essas relações, num processo de reformulação do raciocínio de Ivo. A percentagem foi convocada para suportar a comparação entre frações, permitindo relacionar as duas quantidades e contribuir para estabelecer a construção conjunta de uma prática matemática. O converter $\frac{3}{5}$ em 60%, teve por base o facto matemático conhecido de que 20% é equivalente a $\frac{1}{5}$. Esta sugestão de transformar fração em percentagem levou a que outros alunos visualizassem também $\frac{1}{2}$ como 50% e $\frac{1}{10}$ como 10%, o que dava também 60%.

A solução do Ivo introduziu na discussão uma solução matematicamente eficiente, apoiada numa justificação que foi descoberta e reformulada em interação social. Tratava-se de uma solução matematicamente sofisticada para a turma, na medida em que veio desafiar outros alunos, a visualizar uma comparação que a representação em fração, só por si, não parecia expressar de forma tão evidente, convocando assim a percentagem.

As ações que decorreram da atividade matemática da turma, e que são passíveis de ser identificadas nestes excertos do diálogo, envolveram um descobrir, identificar e defender uma solução sofisticada, por justificação dos procedimentos de base matemática que a compõem. Os alunos sentindo-se desafiados, envolveram-se num reformular conjunto, que teve por base uma apreciação e avaliação crítica da opção tomada, permitindo resolver o impasse a que chegaram. Podemos identificar a regulação destas ações por normas sociais, como *participar sem constrangimentos nos momentos de discussão coletiva* ou *apresentar argumentos para ajudar a ultrapassar situações de impasse*. Para além das normas sociais, a regularidade com que estas ações decorreram ao longo da interação permitiram identificar normas sociomatemáticas que se iam estabelecendo. Neste episódio, uma solução matematicamente diferente pareceu constituir-se como uma solução matematicamente sofisticada, dado que convocou conhecimentos que os alunos já possuíam, mas que foram mobilizados de outra forma que, ao ser apresentada, contribuiu para a resolução da situação.

Isso mesmo se passou neste episódio com o valor 10% que parece ter sido usado com relativa independência relativamente ao contexto, como um número racional de referência. Considerando a relação entre duas quantidades que quer a representação em percentagem, quer em fração oferecem, os alunos parecem ter considerado a primeira mais intuitiva, interpretando-a na estrutura do sistema de numeração decimal que já conheciam. Esta representação simbólica foi convocada para justificar relações de grandeza entre representações em fração, que foram interpretadas e consideradas matematicamente válidas à medida que os alunos lhes atribuíam sentido. Estes sentiram-se assim desafiados a usar a percentagem para dar sentido a uma adição de frações que tinha gerado um impasse. Com efeito, a conversão da representação em fração na representação em percentagem, permitiu aos alunos estabelecer relações numéricas que, até aí, ainda não tinham tido oportunidade de mobilizar.

Discussão

As normas sociais e normas sociomatemáticas são elementos da cultura da sala de aula, que permitem interpretar as oportunidades de aprendizagem matemática coletiva que emergem, contribuindo para "compreender o que se passa na sala de aula" (Cobb et al, 2001, p. 121). É nesse sentido que neste artigo procuramos compreender de que forma as normas sociais e sociomatemáticas da cultura de uma sala de aula contribuem para a aprendizagem comparticipada da noção de 10%, como número de referência, alicerçada numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número.

Neste artigo, trazemos um olhar focado nas ações dialógicas, que decorrem dos momentos de discussão matemática coletiva, centradas na compreensão da noção de 10%. Trata-se de um processo de construção social, que resultou da atividade conjunta realizada na sala de aula, mais ou menos participada, e que vem reforçar a relação entre o que se aprende e a forma como se aprende em matemática (de Freitas & Walshaw, 2016).

Relativamente ao conteúdo matemático, envolvendo especificamente a percentagem, pudemos constatar que os alunos, apoiados em conhecimentos intuitivos relativamente à proporção e em conhecimentos prévios dos números inteiros de 1 a 100, como referem Moss e Case (1999), começaram por interpretar o seu sentido de completude como uma parte de 100, mas mobilizando as relações multiplicativas que envolviam o conceito de 10% construindo processos de raciocínio como a generalização ainda que intuitiva. Depois recorreram a 10% enquanto valor de referência, decorrente da perceção do valor relativo da percentagem, e usaram-no como estratégia facilitadora do cálculo de outros valores de percentagem, ainda que apoiada pelo uso de modelos, como a tabela de razão. E, posteriormente, convocaram este número de referência para transformar frações em percentagens de acordo com a situação e interpretar estas representações simbólicas dos números racionais de forma entrelaçada. Verificamos que a aprendizagem comparticipada da noção de 10% foi emergente, podendo ser interpretada como uma prática matemática partilhada que se foi estabelecendo gradualmente na turma.

Nos momentos de interação, as ações de envolver, descobrir, identificar, defender, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar, levadas a cabo pelos alunos, aconteceram porque estes se sentiram livres para falar enquanto pensavam sobre matemática, para si, para os outros, com os outros. Alrø e Skovsmose (2003) destacam que a regularidade com que acontecem estas ações traduz um padrão de comunicação mais amplo do que aquele que caracteriza uma aula de matemática tradicional, em que predomina a fala do professor. Nos episódios apresentados é possível percecionar que o fio condutor do raciocínio se mantinha de forma coerente no discurso, à medida que passava de uns alunos para os outros. Esta ideia evidencia que a cultura desta sala de aula tinha subjacentes normas sociais e normas sociomatemáticas que traduziam expectativas sobre o que era esperado que cada um fizesse. A natureza das primeiras permite-nos perceber que, embora tenham decorrido da atividade matemática, poderiam ser normas igualmente expectáveis no trabalho noutra disciplina, como (1) ouvir e dar sentido às explicações dos outros; (2) participar, sem constrangimentos, nos diferentes momentos de discussão ou (3) usar a linguagem para pensar com os outros. As normas sociomatemáticas, nomeadamente: (1) posicionar-se relativamente ao que considera ser matematicamente válido, matematicamente diferente ou matematicamente eficaz, quer em relação às suas resoluções, quer às dos outros; (2) apresentar argumentos que considera serem matematicamente aceites; (3) explicar as bases matemáticas dos procedimentos que usa (4) procurar generalizar ideias matemáticas contextualizadas ou (5) convocar conhecimentos matemáticos anteriores na construção de soluções sofisticadas, são, por sua vez, normas que dizem respeito a processos específicos da atividade matemática, como referem Yackel e Cobb (1996).

Importa destacar que o facto de os alunos terem intervindo sem constrangimentos, sentindo-se seguros para apresentar resoluções diferentes, remete para uma norma social estabelecida. No entanto, ao mesmo tempo, esta pode especificar-se como uma norma sociomatemática, quando na discussão matemática das tarefas, os alunos apresentaram resoluções diferentes, que consideraram válidas. Esta relação dinâmica que envolveu normas sociais e normas sociomatemáticas evidencia que estas não são mutuamente exclusivas, como descrevem Cobb et al. (2001). O sistema que as integra resulta de múltiplas ligações e influências (Lopez & Allal, 2007), pelo que, consideramos que para compreender o papel que as normas desempenham é necessário interpretá-las na sua relação com a cultura da sala de aula.

Queremos ainda sublinhar a existência da relação reflexiva entre as normas sociais e sociomatemáticas e a construção de práticas matemáticas partilhadas nesta comunidade da sala de aula que Yackel e Cobb (1996) referem. As normas parecem ter suportado o processo de construção das práticas matemáticas, através da relação dialógica que se estabeleceu, mas é também da construção dessas práticas que a (re)negociação dessas normas parece ter decorrido. Especificamente, as ações dos alunos na aprendizagem comparticipada da noção de 10% como número de referência permitem percecionar as normas da cultura da sala de aula que, por sua vez, vão sendo negociadas, em interação, à medida que suportam a atividade emergente, contribuindo para uma aprendizagem comparticipada na turma. Esta aprendizagem acontece assim de forma situada, evocando a perspetiva de Lave e Wenger (1991), com base na relação entre a atividade matemática que os alunos vão vivenciando em conjunto e as competências que cada um vai desenvolvendo. À medida que se sucede a apresentação de uma estratégia diferente ou de uma nova conjetura, a reconstrução e apropriação das normas sociomatemáticas vão tendo também lugar. Estas acontecem através de uma negociação implícita do significado de matematicamente diferente, válido ou/e eficaz em cada momento, e que é específico de um dado conteúdo matemático, sendo suportado por argumentos e justificações matemáticos que vão sendo validados na turma, tal como referem Lopez e Allal (2007).

Conclusão

Neste estudo, discutimos a construção de uma prática matemática partilhada, que envolveu a aprendizagem comparticipada da noção de 10% como número de referência, documentando uma perspetiva social da atividade matemática (Cobb & Yackel, 1998), isto é, evidenciando como, de forma mais ou menos participada, os elementos da turma se envolveram na sua construção conjunta (Vygotsky, 1996). Contudo, e cientes de que ultrapassa o objetivo deste estudo, seria interessante poder cruzar a aprendizagem comparticipada na turma com a compreensão da apropriação das práticas matemáticas pelo aluno individualmente, o que poderá ser orientador de futura investigação. A interseção dos campos de intervenção, associada ao duplo papel de investigadora e professora da turma, levou-nos a assumir a subjetividade crítica associada à tomada de decisões (Floyd & Arthur, 2012). Assim, a opção por centrar a discussão nas relações dialógicas que se estabelecem para compreender a aprendizagem, foi uma dessas decisões. No entanto, aprofundar o estudo das ações do professor na definição das normas da cultura da sala de aula, pode ser um ponto de partida para outras investigações, se a opção for compreender a prática de ensino.

Salientamos que as normas sociais e sociomatemáticas, específicas da cultura da sala de aula desta turma, foram reguladoras da interação social, criando oportunidades que suportaram o estabelecimento das práticas matemáticas partilhadas, especificamente a aprendizagem comparticipada da noção de 10% como número de referência. Por sua vez, a construção dessas práticas matemáticas partilhadas contribuiu para ajustar as próprias normas sociomatemáticas, na medida em que permitiu reinterpretar o que pode ser considerado matematicamente válido, eficaz ou diferente, num dado momento. Assim, numa perspetiva sociocultural da atividade matemática destacamos que a aprendizagem da percentagem, enquanto representação privilegiada no estudo dos números racionais no 1.º CEB, aconteceu tendo por base uma relação dialógica regulada por normas sociais e sociomatemáticas. Tratou-se de uma atividade eminentemente social e dialógica, emergente na comunidade de aprendizagem da sala de aula, que se traduziu numa aprendizagem comparticipada que atende à necessidade cultural de coconstrução de significados matemáticos.

Notas

[1] Neste texto usamos o termo números racionais para nos referirmos ao conjunto dos números racionais não negativos.

[2] Neste texto usamos o termo números inteiros para nos referirmos ao conjunto dos números naturais com o zero.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da Universidade de Lisboa, no âmbito do Programa de Bolsas de Doutoramento, através de uma bolsa atribuída à primeira autora.

Referências

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2002). Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (2014). Knowledge building and knowledge creation: One concept, two hills to climb. In S. C. Tan, H. J. So, & J. Yeo (Eds.), Knowledge creation in education (pp. 35–52). Singapore: Springer.

Bielaczyc, K., & Collins, A. (1999). Learning communities in classrooms: A reconceptualization of educational practice. In C. M. Reigeluth (Ed.), Instructional-design theories and models, a new paradigm of instructional theory (Vol. II, pp. 269–292) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.Bruner, J. (1996). Cultura da educação. Lisboa: Edições 70.

Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. Mathematical Thinking and Learning, 1(1), 5–43.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. Educational Researcher, 32(1), 9–13.

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. In E. Yackel, K. Gravemeijer, & A. Sfard (Eds.), A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb (pp. 117–163). New York, NY: Springer.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. Educational Psychologist, 31(3–4), 175–190.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. Educational Studies in Mathematics. 23(1), 99–122.

Confrey, J., & Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 231–266). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

de Freitas, E., & Walshaw, M. (2016). Alternative theoretical frameworks for mathematics education research: Theory meets data. Switzerland: Springer.

Floyd, A., & Arthur, L. (2012). Researching from within: External and internal ethical engagement. International Journal of Research & Method in Education, 35(2), 171–180.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). Ethnography and qualitative design in educational research. New York, NY: Academic Press.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from the learning design perspective. In van den Akker, K. P. E. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), Educational Design Research (pp. 17–51). London: Routledge.

Güven, N. D., & Dede, Y. (2017). Examining social and sociomathematical norms in different classroom microcultures: Mathematics teacher education perspective. Educational Sciences: Theory and Practice, 17(1), 265–292.

Hunter, R., & Anthony, G. (2003). Percentages: A foundation for supporting students' understanding of decimals. In L. Braggs, C. Campbell, G. Herbert & J. Mousley (Eds.), Proceedings of the 26th Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 2, pp. 452–459). Geelong, VIC: MERGA.

IE - UL. (2016). Carta ética para a investigação em educação e formação. Consultado a 6 de setembro de 2016, em http://www.ie.ulisboa.pt/pls/portal/docs/1/564658.PDF

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2009). An educational psychology success story: Social interdependence theory and cooperative learning. Educational Researcher, 38(5), 365–379.

Kang, S. M., & Kim, M. K. (2016). Sociomathematical norms and the teacher's mathematical belief: A case study from a Korean in-service elementary teacher. Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 12(10), 2733–2751.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 237–248). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). Situated learning: Legitimate peripheral participation. Cambrigde: Cambrigde University Press.

Lopez, L. M., & Allal, L. (2007). Sociomathematical norms and the regulation of problem solving in classroom microcultures. *International Journal of Educational Research, 46*(5), 252–265.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2012). Raciocínio matemático em conjuntos numéricos: Uma investigação no 3. º ciclo. Quadrante, 21(2), 81–110.

McIntosh, A., Reys, J., & Reys, E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. For the Learning of Mathematics, 12(3), 2–8, 44.

MEM (s/d). O modelo pedagógico: Sistema de organização cooperada. Consultado a 28 de junho de 2017, em: http://centrorecursos.movimentoescolamoderna.pt/dt/1_2_0_mod_pedag_mem/120_a_08_modelo_pedag_mem_sist_org_coop.pdf

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. Journal for Research in Mathematics Education, 30(2), 122–147.

NCTM (2010). Developing Essential Understanding of Rational Numbers for teaching mathematics in grades 3-5. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Niza, S. (1998). A organização social do trabalho de aprendizagem no 1º Ciclo do Ensino Básico. Inovação, 11, 77–98.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. Review of Educational Research, 65(4), 421–481.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed..), O professor e o desenvolvimento curricular (pp.11–34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Carvalho, R., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2016). Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas. Quadrante, 25(2), 77–98.

Ponte, J. P., & Serrazina, M. L. (2000). Didáctica da Matemática do 1.º ciclo. Lisboa: Universidade Aberta.

Rogoff, B. (2003). The cultural nature of human development. New York, NY: Oxford University Press.

Santana, I. (2007). A aprendizagem da escrita: Estudo sobre a revisão cooperada de texto. Porto: Porto Editora.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. Cognitive Psychology, 62(4), 273–296.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. Educational Studies in Mathematics, 26, 275–298.

Vygotsky, L. (1996). A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes.

Wells, G. (1999). Dialogic inquiry: Toward a sociocultural practice and theory of education. Cambridge: Cambridge University Press.

Wertsch, J. V. (1994). The primacy of mediated action in sociocultural studies. Mind, Culture, and Activity, 1(4), 202–208.

Wood, T., Williams, G., & McNeal, B. (2006). Children's mathematical thinking in different classroom cultures. Journal for Research in Mathematics Education, 37(3), 222–255.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 458–477.

Anexo 1: Enunciado das tarefas

Esta lata de cola leva cheia aproximadamente 40cl. Quantos centilitros tem quando está 50% cheia? E 10%?

Tarefa do Episódio I

Cálculo mental: percentagem de...							
Percentagem	**100%**	**10%**	**5%**	**20%**	**50%**	**60%**	**80%**
Capacidade (cl)	50						
Massa (kg)	20						
Comprimento (m)	140						
Nome:			Data:				

Tarefa do Episódio II

Matemática – Partilhando sandes

Na visita de estudo da semana passada, a Matilde do 4ºB e quatro das suas amigas, levaram para o lanche 3 sandes para partilharem entre si igualmente. Que porção de sandes coube a cada uma das cinco alunas? Explica como pensaste. (Podes usar palavras, esquemas e/ou palavras.)

Tarefa do Episódio III

Anexo 4

Artigo IV

Guerreiro, H. G., Serrazina, L., & Ponte, J. P. (2018). Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem. *Educação Matemática Pesquisa*, *20*(1), 359–384.

Versão dos autores

Uma trajetória na aprendizagem dos números racionais através da percentagem

A trajectory in the learning of rational numbers enhanced by percentage

Helena Gil Guerreiro
Lurdes Serrazina
João Pedro da Ponte

Resumo

Este artigo tem como objetivo indicar os contributos que uma trajetória com um foco inicial na percentagem, que faz emergir de seguida o numeral decimal e posteriormente a fração, traz para a compreensão da natureza relacional dos números racionais. Trata-se de uma investigação baseada em design na modalidade de experiência de ensino na sala de aula. A recolha de dados resultou da observação participante, apoiada num diário de bordo, de gravações áudio e vídeo e da recolha das produções escritas dos alunos. Os resultados revelam que esta abordagem, partindo da percentagem, permite integrar os conhecimentos numéricos prévios intuitivos dos alunos na compreensão dos números racionais e apoia a construção de uma aprendizagem das diferentes representações, de forma inter-relacionada, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número.

Palavras-chave: *percentagem, aprendizagem, sentido de número, grandeza numérica, números racionais*

Abstract

This article aims to figure out the contributions that a trajectory with an initial focus on percentage which leads to the emergence of decimals and later of fractions brings to the *understanding of the relational nature of rational numbers. A classroom teaching experiment was developed as a design based research. Data were collected through participant observation, supported by a logbook, audio- and video-recorded lessons and collecting students' written productions. The results show that this approach, based on percentage, allows integrating students' previous intuitive numerical knowledge into the understanding of rational numbers and supports the construction of learning of the different representations, in an interrelated way, in a perspective of the development of number sense.*

Keywords: *percentage, learning, number sense, numerical magnitude, rational numbers*

Introdução

Construir uma aprendizagem dos números racionais[12] que se apoie nos conhecimentos numéricos que os alunos já possuem, constitui um desafio que se coloca à escola e à investigação em educação matemática. A noção de número racional, embora fundamental, levanta fortes dificuldades aos alunos (MIDDLETON; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; SHEW, 1998). Estas dificuldades prendem-se, nomeadamente, com duas características do seu ensino. Por um lado, a ênfase colocada no ensino dos números racionais centrado nas diferenças que este conjunto numérico introduz, exigindo uma mudança conceptual em relação aos conhecimentos numéricos que os alunos já possuem (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011). E, por outro lado, o facto de se trabalhar os diferentes significados e representações do número racional de forma compartimentada, como se se tratassem de tópicos distintos (MIDDLETON; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; SHEW, 1998; TIAN; SIEGLER, 2017).

A extensão dos conhecimentos dos alunos dos números inteiros[13] para os números racionais implica a compreensão das relações que alicerçam a estrutura deste sistema numérico (PREDIGER, 2013). Independentemente da representação ou significado que assumem, os números racionais têm subjacentes relações estruturais que os alunos devem compreender à medida que exploram estes números, que os visualizam em diferentes contextos e que os relacionam, dando-lhes sentido, num processo de alargamento do sentido de número (MARKOVITS; SOWDER, 1994; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). É na compreensão da natureza relacional dos números racionais que se esteia "uma compreensão robusta e flexível de todas as notações do número

[12] Usamos o termo *números racionais* para indicar os números racionais não negativos.
[13] Usamos o termo *números inteiros* para indicar os números naturais com o zero.

racional" (TIAN; SIEGLER, 2017, p. 18), como grande finalidade do ensino destes números.

A literatura foca-se sobretudo na fração ou no numeral decimal[14] como representação a privilegiar na introdução aos números racionais (MOSS: CASE, 1999; TIAN; SIEGLER, 2017). A percentagem é relegada para um plano secundário, havendo poucos estudos recentes que a discutam, apesar de lhe serem reconhecidas vantagens, nomeadamente, pelo facto de integrar as experiências sociais dos alunos antes mesmo da sua entrada na escola e permitir relacionar-se de forma intuitiva com as outras representações (MOSS; CASE, 1999; TIAN; SIEGLER, 2017).

Neste estudo optamos por seguir uma abordagem aos números racionais que se foca na compreensão das relações numéricas envolvidas, privilegiando a construção do conhecimento da grandeza do número, numa perspetiva de sentido de número, e inter-relacionando as diferentes representações dos números racionais: numeral decimal, fração e percentagem, a partir de um trabalho inicial com a percentagem e fazendo emergir depois o numeral decimal e a fração (MOSS; CASE, 1999). O objetivo é perceber os contributos dessa abordagem na construção da compreensão da natureza relacional dos números racionais, por alunos de 3.º e 4.º ano do ensino básico.

Desenvolvimento numérico numa perspetiva de sentido de número

A construção do conhecimento dos números segue um desenvolvimento contínuo ao longo dos diferentes conjuntos numéricos e o seu aspeto central prende-se com a compreensão da grandeza numérica (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011). Por conseguinte, no trabalho com o conjunto dos números racionais é importante descobrir as características que são comuns com os números inteiros, como o facto de qualquer número possuir uma grandeza que se pode representar na reta numérica, e as que não são, identificando propriedades específicas do novo conjunto numérico. Esta é a ideia central da teoria integrada do desenvolvimento numérico apresentada por Siegler, Thompson e Schneider (2011). Segundo esta teoria, o conhecimento dos números racionais emerge dos conhecimentos prévios dos números inteiros dos alunos, num processo de enriquecimento conceptual gradual que requer uma reorganização do seu conhecimento numérico (SIEGLER; FAZIO; BAILEY; ZHOU, 2013). Este

[14] Usamos o termo *numeral decimal* para designar uma representação dos números racionais positivos, escrita de acordo com o sistema de numeração decimal, usando vírgula.

conhecimento consiste em considerar as propriedades que caracterizam os números racionais enquanto elementos de um sistema numérico mais abrangente e deixar de os ver a partir das características que são específicas de um dado conjunto (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011).

Esta perspetiva de enriquecimento e reorganização do conhecimento dos números implica perceber o que são, como se podem representar, de que forma se relacionam e como se estruturam em diferentes conjuntos numéricos. Implica pensar a aprendizagem dos números em termos de desenvolvimento de sentido de número, como uma construção de sentido. Por um lado, isso implica um conhecimento acerca dos números e das operações e, por outro lado, a capacidade de usar esse conhecimento de modo flexível para fazer julgamentos matemáticos e construir estratégias adequadas para lidar com os números e as operações (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Pensar os números deste modo implica o que alguns autores designam por uma boa intuição sobre os números e as suas relações, não apenas no trabalho com os números inteiros, mas também com outros conjuntos numéricos, à medida que se avança na escolaridade (HOWDEN, 1988; MARKOVITS; SOWDER, 1994; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Pensar o desenvolvimento do conhecimento dos números nesta perspetiva implica compreender a sua grandeza, notação, significados e representações, de forma inter-relacionada, sendo capaz de fazer um uso significativo e flexível de procedimentos na resolução de problemas (NCTM, 2014; SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011).

Esta perspetiva vem refletida nos princípios da Educação Matemática Realista. Na verdade, quando Freudenthal (1991) considera a matemática como atividade humana e não como um corpo de conhecimentos a transmitir, encara a sua aprendizagem como um processo de matematização que emerge do senso comum. Por conseguinte, reforça a ideia de que se deve partir dos conhecimentos que os alunos já possuem e da sua intuição, guiando-os numa ação realista de reinvenção da matemática (FREUDENTHAL, 1991). A matemática será “realista” para os alunos no sentido de ser significativa, envolvendo situações do mundo real ou situações que estes conseguem imaginar e às quais atribuem significado (VAN DEN HAUVEL-PANHUIZEN; DRIJVERS, 2014). Um outro princípio a destacar diz respeito ao facto de se entender que cada assunto deve ser trabalhado de forma entrelaçada com outras ideias matemáticas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN; DRIJVERS, 2014). Deste modo, a aprendizagem dos números pode ser interpretada como um processo de desenvolvimento integrado, em que o conhecimento conceptual dos números inteiros é gradualmente alargado aos números racionais, inter-relacionando os seus diversos aspetos, e encarando a aprendizagem dos números como uma construção de sentido (SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011).

Extensão do sentido de número aos números racionais

Os números racionais apresentam uma natureza proporcional, envolvendo na sua essência uma relação (GALEN; FEIJS; FIGUEIREDO; GRAVEMEIJER; HERPEN; KEIJZER, 2008). Qualquer número racional positivo traduz uma relação relativa a uma dada unidade, que se traduz na sua grandeza: os números inteiros nomeiam conjuntos de unidades e os números fracionários nomeiam uma razão em relação à unidade (LAMON, 2007). Esta propriedade de grandeza numérica permite que os números racionais possam ser representados e ordenados numa reta numérica (CCSSI, 2010; SIEGLER; THOMPSON; SCHNEIDER, 2011). Deste modo, os números racionais podem ser trabalhados de forma integrada com os números inteiros, sendo que o seu nome traduz o valor de medida relativa à unidade, o que tem subjacente uma relação de comparação de ordem de grandeza (BROWN, 2015).

Com os números inteiros a medida está presente na sua forma mais simples, a contagem, em que se conta o número de vezes que se itera a unidade (STEPHAN; CLEMENTS, 2003). É no alargamento dos conhecimentos numéricos que a medida, como comparação de quantidades contínuas, subdividindo e iterando, permite atribuir a uma quantidade de uma grandeza um número racional (PONTE; SERRAZINA, 2000). Assim, qualquer número racional pode ser interpretado como medida, à qual está associada uma razão, existindo assim uma relação direta entre a medida e os restantes significados que o número racional pode assumir (LAMON, 2012). Por conseguinte, a medida desempenha um papel determinante na compreensão dos números racionais, bem como na compreensão das relações multiplicativas. Os alunos podem construir novas quantidades a partir de quantidades dadas e da interpretação da sua relação constante (LAMON, 2012). A perceção de que a medida, enquanto valor aproximado, pode ser mais ou menos precisa, constitui um caminho para a compreensão da densidade dos números racionais, processo que se desenvolve de forma lenta e gradual, à medida que o trabalho neste conjunto numérico se vai desenvolvendo (PONTE; SERRAZINA, 2000; VAMVAKOUSSI; VOSNIADOU, 2004).

A compreensão desta natureza relacional dos números racionais pode ser analisada em termos de sentido de número, uma vez que alunos com um bom desenvolvimento de sentido de número racional revelam, como considera Lamon (2007),

> intuição em relação à grandeza relativa dos números racionais e uma capacidade para estimar e pensar qualitativamente e em termos multiplicativos, para resolver proporções e problemas, para se movimentar entre interpretações e representações, para dar sentido e tomar decisões adequadas e apreciações plausíveis. (p. 636)

Deste modo, os alunos devem ser capazes de manipular os números de forma fluente e flexível, no sentido de encontrarem soluções apropriadas para as mais diversas tarefas, numa "perspetiva de que os números são úteis e de que a Matemática tem uma certa regularidade (faz sentido)" (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992, p. 4).

As diferentes interpretações de sentido de número da literatura oferecem diferentes referentes de capacidades que se complementam, podendo ser vistas como componentes e, ao mesmo tempo, como indicadores que permitem o reconhecimento do sentido de número (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; BERCH, 2005; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; SOWDER; SCHAPPELLE, 1994). Considerando o início da construção da compreensão dos números racionais, promovendo o desenvolvimento de sentido de número, importa cruzar diversas ideias centrais dos trabalhos de McIntosh, Reys e Reys (1992), Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) e Berch (2005) reorganizando-as em cinco tópicos, que se constituem como competências que alicerçam a construção do conhecimento e da destreza com os números: 1) compreender a regularidade dos números, tendo por base a compreensão da estrutura no sistema decimal de posição; 2) relacionar múltiplas representações dos números, reconhecendo as suas diferentes representações e interpretando o seu significado em função do contexto; 3) compreender a grandeza dos números, identificando o seu valor relativo e a ordem de grandeza da sua representação; 4) construir números de referência, interpretando-os como referentes, a partir da experiência matemática, na tomada de decisões; e 5) mobilizar relações de proporcionalidade, usando estratégias de natureza aditiva, mas sobretudo multiplicativa, para interpretar relações numéricas, bem como para estabelecer comparações, identificando relações entre relações envolvendo quantidades de grandezas diferentes.

A construção destas competências, de forma integrada, traduz-se numa compreensão dos números racionais numa perspetiva de sentido de número, à medida que os alunos relacionam a nova informação com conhecimento numérico já adquirido, apropriando-se da natureza multiplicativa dos números racionais e dos seus múltiplos significados (LAMON, 2007). Nesta perspetiva, Moss e Case (1999) desenvolveram um currículo para aprendizagem dos números racionais que preconiza uma compreensão flexível e integrada destes números, numa abordagem que apela ao desenvolvimento de sentido de número (MOSS, 2002). Os autores destacam o papel da percentagem, num significado de medida, na fase inicial da aprendizagem dos números racionais e fazem as representações em numeral decimal e fração decorrer da percentagem, tendo por base a aprendizagem do modo como as três representações se relacionam (MOSS; CASE, 1999). O trabalho parte do conhecimento intuitivo que os alunos possuem de percentagem, com ligação a contextos realistas, mas também do conhecimento dos números inteiros, que permite manipular com facilidade os números de 1 a 100, para interpretar o sentido de completude (*sense of fullness*), mobilizando relações de proporcionalidade, que a percentagem oferece. Ao privilegiar a percentagem, os alunos vão construindo as suas estratégias e fazendo as primeiras conversões entre diferentes representações de forma intuitiva, sem se centrarem em procedimentos de rotina (MOSS; CASE, 1999). Progressivamente, os alunos vão construindo um leque de aprendizagens que incluem, como refere Moss (2002), as capacidades de: 1) usar de forma flexível e indiferenciada as representações em numeral decimal, fração e percentagem; 2) apreciar a grandeza dos números racionais, comparando e ordenando números; 3) encontrar estratégias de solução para calcular com números racionais; e 4) revelar confiança e fluência para pensar sobre os números racionais, usando números de referência. Trata-se, assim, de uma abordagem em que a construção do conhecimento dos números é apresentada de forma indissociável do desenvolvimento de sentido de número, apoiada num ambiente de sala de aula facilitador da construção de sentido (SOWDER & SCHAPPELLE, 1994).

Metodologia

Este estudo, enquadrado numa perspetiva sociocultural, segue uma abordagem metodológica de investigação baseada em design, centrando-se na compreensão dos processos de aprendizagem dos números racionais e do modo de os promover no contexto natural da sala de aula (COBB; JACKSON; DUNLOP, 2016; PONTE; CARVALHO; MATA-PEREIRA; QUARESMA; 2016). Trata-se de uma investigação que se consubstanciou numa intervenção numa turma durante dois períodos letivos, no fim do 3.º ano de escolaridade e no início do 4.º ano, na modalidade de experiência de ensino na sala de aula (COBB; CONFREY; DISESSA; LEHRER; SCHAUBLE, 2003).

Esta modalidade de investigação envolveu a construção de uma conjetura inicial com duas dimensões: uma de conteúdo matemático, centrada nos processos de aprendizagem, especificamente dos números racionais, e outra pedagógica, que remete para aspetos da cultura da sala de aula que potenciam essa aprendizagem pela turma (COBB; JACKSON; DUNLOP, 2016; CONFREY; LACHANCE, 2000).

Nesta experiência de ensino tiveram lugar três microciclos, cada um envolvendo três fases: a antecipação dos processos de aprendizagem, a implementação de tarefas e a análise dos elementos da ecologia de aprendizagem, isto é, das tarefas, dos materiais, da interação, bem como das normas da sala de aula (COBB; CONFREY; DISESSA; LEHRER; SCHAUBLE, 2003; PREDIGER; GRAVEMEIJER; CONFREY, 2015). O carácter experimental e cíclico desta modalidade de investigação permitiu ir explorando, adaptando e introduzindo reajustamentos na ecologia de aprendizagem, com cada ciclo a proporcionar informação ao ciclo seguinte (GRAVEMEIJER; VAN EERDE, 2009). Este processo contribuiu para um refinamento progressivo da conjetura, no sentido de se poder constituir como uma teoria local, isto é, situada em relação a um tópico matemático específico trabalhado embebido na cultura da sala de aula de uma turma em particular (COBB; CONFREY; DISESSA; LEHRER; SCHAUBLE, 2003).

A antecipação dos processos de aprendizagem permitiu definir uma progressão hipotética no desenvolvimento da aprendizagem (SIMON, 1995). Neste estudo, essa progressão foi conjeturada como uma trajetória de aprendizagem inspirada no currículo experimental para o ensino dos números racionais de Moss e Case (1999), que se estruturou em três etapas, cada uma constituindo-se como um microciclo da experiência de ensino. Esta trajetória de aprendizagem teve como pressuposto um trabalho com as diferentes representações do número racional, inter-relacionando-as de modo flexível, remetendo a primeira etapa para a compreensão da percentagem. Em seguida, focou-se a atenção na compreensão do numeral decimal, fazendo as centésimas decorrer da percentagem. E por fim, promoveu-se a compreensão da fração a partir do numeral decimal (MOSS; CASE, 1999). Deste modo, e apesar de se descrever a trajetória de forma sequenciada, e aparentemente segmentada, cada etapa não foi estanque, pelo que o seu desenvolvimento não pode ser interpretado de forma linear. Pretende-se, sobretudo, detalhar a rede de ideias e conceitos considerados nesta experiência, para que os alunos se pudessem movimentar dos conceitos mais informais para os mais complexos ao longo do tempo (CONFREY; MALONEY, 2010).

Recolha e análise de dados

Neste estudo optámos por focar a análise de dados nos processos de aprendizagem da turma e nos meios que os apoiam, considerando a turma, enquanto a comunidade da sala de aula, como unidade de análise (COBB; CONFREY; DISESSA; LEHRER; SCHAUBLE, 2003). Neste artigo, começamos por analisar dados recolhidos na fase da preparação da experiência, tendo por base as produções escritas dos alunos num trabalho de diagnóstico. Este diagnóstico procurou perceber se a noção de percentagem era familiar aos alunos, uma vez que na escola o trabalho no domínio dos números racionais já realizado tinha envolvido apenas a fração em situações contextualizadas relativas aos significados quociente e parte-todo. Posteriormente, trazemos diversos episódios de cada microciclo, focando a análise nos momentos de discussão coletiva de duas tarefas de cada etapa. Os dados foram obtidos através da gravação áudio e/ou vídeo das aulas, das produções dos alunos e da observação participante, apoiada por um diário de bordo da primeira autora, como investigadora e professora da turma, garantindo-se a responsabilidade ética que uma investigação desta natureza implica (IE – UL, 2016).

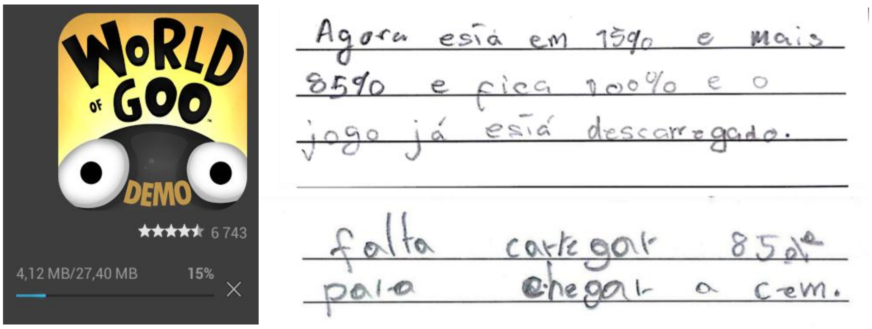
A análise retrospetiva dos dados envolveu o cruzamento de categorias emergentes dos dados com categorias geradas a partir do quadro teórico, para a identificação de evidências do processo de desenvolvimento do sentido de número racional (GOETZ; LECOMPTE, 1984). Convocamos componentes de sentido de número apontadas pela investigação que, ao mesmo tempo, são consideradas como indicadores que facilitam o seu reconhecimento (ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; BERCH; 2005; MCINTOSH; REYS; REYS, 1992). Focamo-nos na dimensão do conhecimento e destreza com os números, identificando por um lado, as relações numéricas mobilizadas: grandeza, ordenação, comparação, equivalência, múltiplas representações e proporcionalidade. Além disso, consideramos as estratégias de manipulação dos números construídas na turma: factos numéricos, decomposição/composição, metade/dobro; adições sucessivas/multiplicação, partição/agrupamento, valores de referência e uso de modelos.

Resultados

Estudo de diagnóstico

Numa tarefa apresentada no estudo de diagnóstico era pedido que os alunos indicassem, justificando, quanto faltava para descarregar um jogo, tendo como suporte uma barra de estado, em que era visível que estava processado 15% do *download* (Figura 1).

Figura 1 – Explicação de Carolina e de Heitor na resposta à tarefa de *download*

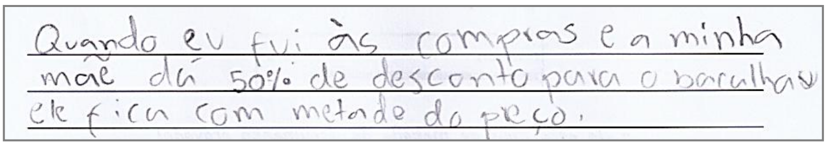


Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

O argumento que os alunos apresentaram evidencia que mobilizaram o conhecimento dos números inteiros de 0 a 100, usando a decomposição de 100 para descobrir quanto faltava para o *download* do jogo ficar completo. A mensagem visual que a barra de estado oferece foi interpretada corretamente pela maioria dos alunos, permitindo-lhes associar o seu grau de completude a um dado valor de percentagem, correspondendo 100% ao *download* completo.

Numa outra tarefa deste estudo, que envolvia interpretar uma promoção de 50% numa camisola que custava inicialmente 40 euros, sem que fosse apresentada uma representação icónica para apoiar a interpretação da situação, alguns alunos chegaram à resposta correta, evidenciando uma intuição relativa à noção de percentagem, que parece apoiada pelas suas vivências fora da escola (Figura 2).

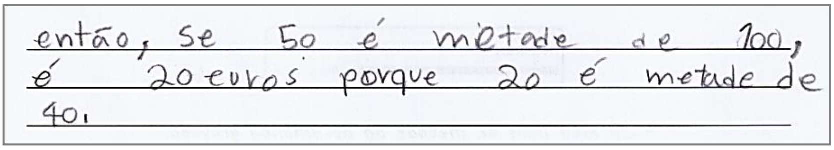
Figura 2 – Explicação de Ana na resposta à tarefa das promoções



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Outros alunos convocaram o conhecimento dos números inteiros de 0 a 100, aliado a um raciocínio proporcional intuitivo, como podemos ler na resposta de Clara (Figura 3) para interpretar a situação.

Figura 3 – Resposta de Clara na resposta à tarefa das promoções


então, se 50 é metade de 100, é 20 euros porque 20 é metade de 40.

Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Esta aluna perceciona a relação de proporção que a percentagem oferece, estabelecendo, intuitivamente, uma igualdade de razões.

No estudo de diagnóstico, os alunos revelaram um conhecimento informal da percentagem a partir da sua experiência do dia-a-dia com a utilização de tecnologias como o *smartphone* ou computador, em que associam a percentagem a um dado grau de completude. Além disso, resolveram outras tarefas que remetiam para situações da sua vida familiar, que envolviam percentagem, sem o apoio de uma representação icónica, estabelecendo relações proporcionais intuitivas. A construção deste conhecimento informal parece resultar da experiência dos alunos com situações em que a percentagem está presente em contextos do dia-a-dia e das estratégias espontâneas que vão construindo, tendo por base os conhecimentos relativos aos números inteiros de 0 a 100, associados a uma perceção intuitiva da natureza multiplicativa dos números racionais.

Compreensão da percentagem

Numa das primeiras tarefas desta etapa da experiência de ensino os alunos foram convidados a encher e vazar recipientes com formas e capacidades diferentes, avaliando, em percentagem, o espaço ocupado pela água na sua relação com o todo, ou seja, 100% como o recipiente completamente cheio. No momento da discussão coletiva, houve necessidade de clarificar a relação entre a capacidade de cada recipiente e a percentagem de água que tinham em relação ao todo:

Professora: *Então o que quer dizer 100% cheio? Lembrem-se da bateria, o que queria dizer 100% cheia? Clara.*
Clara: *Quer dizer que está todo cheio.*
Professora: *Está todo cheio. Então e este [levantando o recipiente mais pequeno], está todo cheio ou não, Ivo?*
Ivo: *Está.*

Professora:	*Então, por que é que quando eu ponho um ao lado do outro dizem que este [o mais pequeno] está 50% cheio? Sim, Dina.*
Dina:	*Tenho sempre 100%, porque só por ser mais pequeno não quer dizer que não esteja também cheio.*
Marco:	*Estão os dois até cima, mas não levam a mesma quantidade de água.*
Professora:	*Estão ambos 100% cheios mas levam quantidades de água diferentes, porque são recipientes com capacidades diferentes certo?*

A construção da ideia de que recipientes 100% cheios podem ter quantidades de água diferentes foi um marco importante no processo de alargamento do conhecimento dos números inteiros aos números racionais, uma vez que os alunos percecionaram que um mesmo número, representado em percentagem, podia dizer respeito a quantidades diferentes, uma vez que corresponde a um todo também diferente, mas que se considera como 100%.

Numa das últimas tarefas desta etapa, era pedido aos alunos que comentassem duas imagens, explicando o significado da percentagem em cada uma delas (Figura 4).

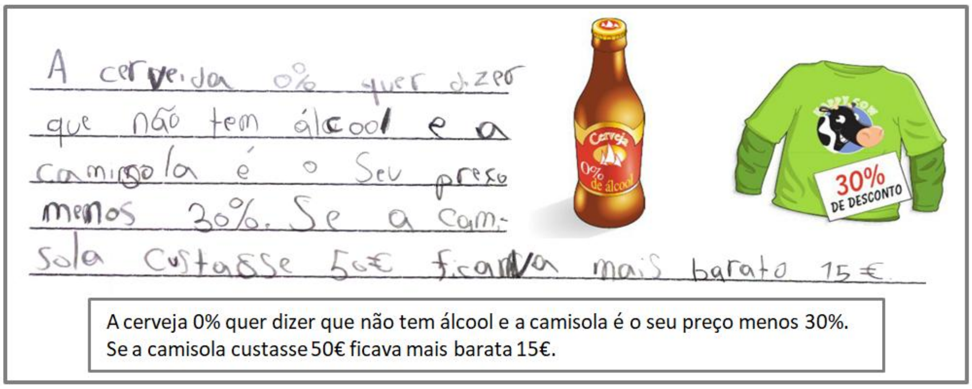


Figura 4 – Resposta do grupo de Horácio à tarefa sobre o significado de percentagem

Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Em relação à segunda imagem, todos os grupos identificaram que com “30% de desconto” a camisola iria ficar mais barata, interpretando o desconto em percentagem como um valor relativo em relação ao preço inicial e não como um valor absoluto que se subtraí ao preço inicial, como aparentemente poderia quer dizer a expressão “é o seu preço menos” da resposta do grupo de Horácio. Na discussão coletiva desta tarefa procurou-se por em comum o significado de aplicar um desconto sobre um dado valor, no sentido de explicitar a relação que a percentagem traduz entre quantidades e que parecia escondida atrás das respostas dos alunos:

Professora: *Mas quando vemos na montra uma camisola com 30% de desconto, como é que sabemos quanto é que custa? Mafalda.*

Mafalda: *Fazemos… 50% de desconto é metade do preço e 30% fazemos metade mais 5%.*

Professora: *Ok. Fazemos metade da metade e mais 5% e assim ficamos a saber quanto custa a camisola?*

. . .

Bruna: *Tens que tirar 30%, para ficar com menos 30%.*

Professora: *Isso, tenho que pensar no preço da camisola como 100% e retirar-lhe os 30%.*

Ana: *É 70% do preço.*

Heitor: *30% é o que não pagas.*

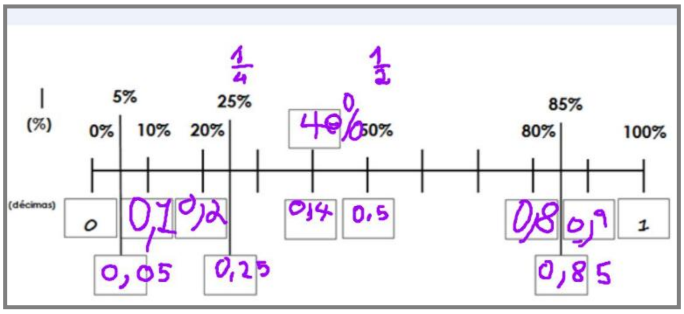
Embora usando termos aparentemente aditivos como “tirar” ou “menos”, as justificações apresentadas pelos alunos evidenciam a construção de um entendimento das relações multiplicativas associadas à noção de percentagem, isto é, percecionam o desconto como uma quantidade proporcional que se obtém quando se aplica aquele valor ao custo inicial, tendo por base a proporção para 100.

Nesta etapa da compreensão da percentagem, o estabelecimento de relações entre ideias na construção dos conhecimentos dos números racionais tem por base comparações numéricas que mobilizam relações multiplicativas. Estas surgem apoiadas num significado de medida, em que um número descreve uma quantidade de algo em relação a uma unidade, 100% no caso da tarefa dos recipientes, considerando o recipiente cheio, independente do valor da sua capacidade e da razão, em que uma parte da razão está relacionada com a outra parte através da multiplicação, como na situação da camisola em que o preço é reduzido para 30% do preço original.

Compreensão do numeral decimal

Uma das tarefas realizadas na etapa de compreensão da representação em numeral decimal ocorreu no momento de cálculo mental, onde os alunos foram convidados a fazer conversões entre a percentagem e o numeral decimal, surgindo a décima como um agrupamento de centésimas (Figura 5).

Figura 5 – Registo durante o momento de discussão coletiva da tarefa envolvendo conversões



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

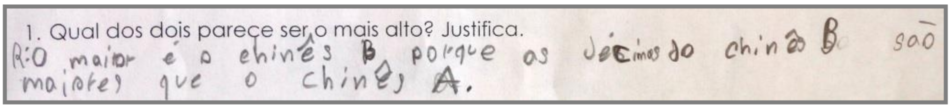
Em particular, a discussão de 25% evidenciou que os alunos interpretaram esta representação num significado de medida. Na verdade, quando procuraram uma representação equivalente para 25% verificaram que distância representava quando comparada com o todo, visto como resultante da iteração de cem partes, no caso das centésimas, em analogia com a percentagem, e da iteração de dez partes no caso das décimas como reagrupamento de centésimas:

Luís: *Os 50% são metade da unidade e 25% é 1/4 do percurso.*
Professora: *E quantas décimas?*
Simão: *São 25 centésimas.*
Professora: *Mas como é que podemos ler em décimas? É um quarto do percurso, mas... alguém quer ajudar? Mafalda.*
Mafalda: *É mais que duas décimas, mas menos que três, fica no meio.*
Professora: *Então e como é que ficamos?*
Luís: *É duas décimas, mais 50% da outra, mais metade (aponta a distância na reta correspondente a duas décimas e meia).*
Mafalda: *É duas décimas e meia (escreve 0,25).*

Neste processo de medida, os alunos perceberam que nem todos os valores de percentagem se conseguiam escrever usando o numeral decimal apenas com décimas, associando as centésimas a uma medida mais precisa. Neste momento da discussão, o nome de cada ponto, localizado na reta, e a correspondente distância a zero, representam o mesmo valor e, como tal, o mesmo número racional, que assumiu diferentes representações, consoante se considerou a sua leitura em percentagem, numeral decimal ou fração.

Uma outra tarefa realizada nesta etapa da compreensão do numeral decimal desafiava os alunos a estimar e identificar a diferença de altura entre os dois chineses mais altos do mundo. O chinês A media 2,362 metros e o outro, o chinês B, tinha de altura 2,40 metros. Na primeira parte da tarefa era perguntado qual dos dois parecia ser mais alto. Todos os grupos identificaram que o chinês B era mais alto. No entanto, as suas explicações foram de natureza diferente, alguns alunos justificaram ser mais alto, porque a imagem assim o permitia percecionar, enquanto outros apresentaram justificações apoiadas na interpretação do valor das suas alturas, como a do grupo de Heitor (Figura 6).

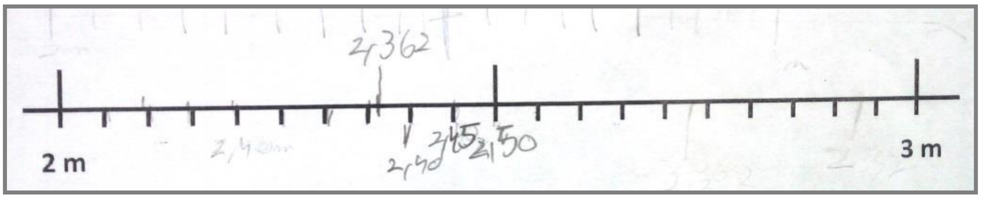
Figura 6 – Resposta do grupo de Heitor à primeira parte da tarefa sobre as alturas dos chineses



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

A segunda parte da tarefa apelava a uma comparação entre o valor de medida das suas alturas, sendo dada uma reta numérica. Alguns alunos localizaram usando a reta simples, recorrendo a números de referência e recorrendo apenas ao numeral decimal, como no caso do grupo de Berta (Figura 7).

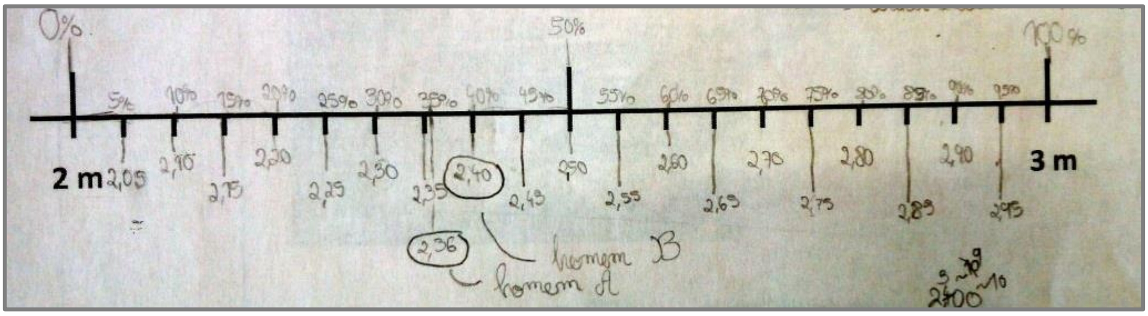
Figura 7 – Resposta do grupo de Berta à segunda parte da tarefa sobre as alturas dos chineses



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Outros alunos, contudo, recorreram à percentagem para apoiar a localização de números em numeral decimal na reta, que usaram como dupla, como no caso do grupo de Mafalda (Figura 8).

Figura 8 – Resposta do grupo de Mafalda à segunda parte da tarefa sobre as alturas dos chineses



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Este grupo estabeleceu a relação entre a percentagem e o numeral decimal, considerando um metro como 100%. Usou o numeral decimal com arredondamento às centésimas, desprezando as milésimas por considerar difícil, como defendeu o grupo, fazer uma marcação exata desse ponto na reta, evidenciando a perceção da relação entre a noção de precisão, associada ao refinamento da medida, e o número de dígitos da parte não inteira do numeral decimal.

A discussão coletiva conduziu à análise da diferença de altura entre os dois homens, no sentido de pôr em comum a relação entre os números na representação em numeral decimal de um número:

Professora:	*Então, qual a diferença entre eles? Bruna.*
Bruna:	*Huumm…*
Heitor:	*É 4 centímetros!*
Professora:	*Serão mesmo 4 centímetros certos?*
Dina:	*Não chega a 4 centímetros...*
Ana:	*É menos um bocadinho… é menos duas décimas [do centímetro].*
Marco:	*É menos dois milímetros.*
Bárbara:	*É 38 milímetros.*

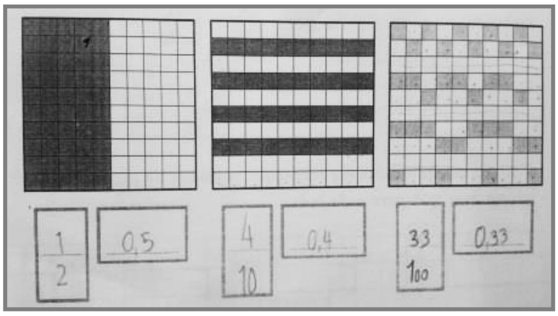
Os alunos percecionaram que a diferença entre os dois homens era pequena, afirmando "Não chega a 4 centímetros", à medida que sentiam necessidade de refinar a unidade para a interpretar, contextualizando a reconceptualização da unidade, apoiada na ideia da dividir sucessivamente em dez partes, originando uma unidade dez vezes mais pequena que a anterior.

Nesta etapa, os alunos parecem dar sentido à estrutura do numeral decimal, ancorada na percentagem, na compreensão da grandeza dos números, tendo por base um significado de medida, através da reta numérica dupla. O numeral decimal, com arredondamento às centésimas, foi interpretado como a percentagem do percurso entre 0 e 1. A propósito da primeira tarefa, por exemplo, 0,25 quantificaram uma percentagem da distância, 25%, de uma unidade, que era 100%. Na segunda, 2,40 traduzia a distância que era 40% do caminho entre dois e três metros.

Compreensão da fração

Numa das primeiras tarefas desta etapa da experiência de ensino, o desafio apelava à conexão entre o numeral decimal e a fração decimal, com recurso à manipulação do Material Multibásico (MAB), fazendo variar a unidade. A segunda parte desta tarefa remetia para a interpretação e escrita da quantidade representada, numa tabela de 10×10, em numeral decimal e em fração (Figura 9).

Figura 9 – Resposta do grupo de Hélio à segunda parte da tarefa envolvendo numeral decimal e fração decimal



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Os alunos, tendo como suporte o modelo do MAB, representaram a quantidade indicada sem dificuldade, apoiada num significado parte-todo, descrevendo a relação proporcional entre as duas quantidades, a quantidade que se queria descrever e a unidade a que se referia, como se pode verificar no excerto da discussão coletiva de cinquenta centésimas:

Berta: *Aqui são cinquenta centésimas.*
Professora: *Quantas décimas? Carolina.*
Carolina: *Cinco.*
Berta: *Cinco décimas.*
. . .
Débora: *Cinco traço de fração 100.*
Professora: *Vamos lá todos pensar nesta forma. Sim, Ana.*
Ana: *Não são cinco centésimos, são 50.*
Dinis: *Isso são cinco centésimas, não cinco décimas.*
Hélio: *Eram cinco cubinhos e não cinco barras!*
Professora: *Ok. Porquê?*
Ana: *Se são cinco barras, são 50 centésimas.*
Ivo: *Pode ser é 5 décimos.*
Professora: *Cinco décimos. Como é que eu escrevo?*
Dina: *Cinco em cima e dez na parte de baixo, porque estão cinco pintadas, mas são dez barras.*

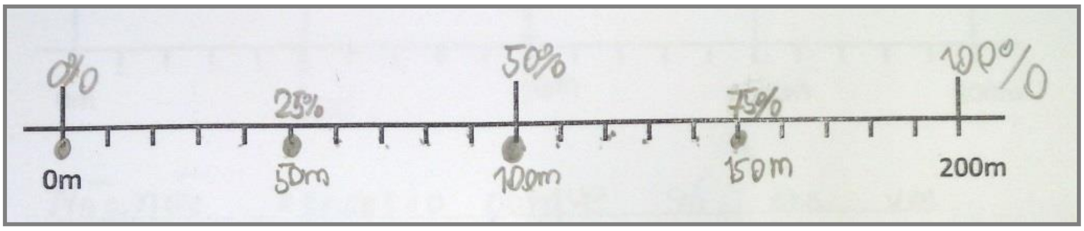
Perante o conflito gerado em torno da representação em fração de 50 centésimas, Hélio convocou o argumento de que assim seriam “cinco cubinhos e não cinco barras”, procurando concretizar a diferença entre cinco centésimas e 50 centésimas, através da relação que estabeleceu entre o referente concreto, o MAB, e a representação simbólica, quer em numeral decimal, quer em fração:

Professora: *(Escreve 5/10) . . . E se quiséssemos ler em centésimas…*
Marco: *Escrevíamos 50 traço de fração 100.*
Professora: *(Escreve 50/100) Mais alguém tem outra sugestão.*
Carolina: *500 milésimas.*
Professora: *(Escreve 0,500). Se lemos 5 décimas ou 50 centésimas, também podemos ler 500 milésimas.*
. . .
Professora: *Ora bem. Ainda haveria mais formas?*
Alunos: *Sim!*
Ivo: *Cinco mil de dez mil.*
Simão: *Há infinitas! Nunca mais saímos daqui…*

Nesta tarefa, as frações decimais pareceram ganhar sentido a partir do numeral decimal, não só pelas semelhanças na sua estrutura, pois ambas apelam ao valor posicional no sistema de base 10, mas também apoiado pelo isomorfismo com as propriedades do sistema decimal que o MAB apresenta. Os alunos identificaram que uma dada quantidade podia ser representada de diversas formas dentro e entre representações, de acordo com a unidade de agrupamento que se considera, numa relação multiplicativa que construíram, mas que ainda não verbalizaram. No entanto, quando esta regularidade foi identificada, os alunos perceberam que podiam estender o procedimento e criar, por exemplo, infinitas frações equivalentes, como verbalizou Simão.

Uma outra tarefa desta etapa remetia para o contexto real e familiar aos alunos da corrida de estafetas, uma atividade que desenvolviam no âmbito da Atividade Física e Desportiva. Os alunos foram convidados a descobrir que parte de uma corrida de 200 metros fazia cada elemento de uma equipa de quatro atletas, apoiando-se numa reta numérica. Os alunos identificaram, sem dificuldade, a distância em metros, assinalando na reta os pontos de passagem do testemunho, como evidencia o registo do grupo de Heitor na Figura 10.

Figura 10 – Resposta do grupo de Heitor à tarefa das estafetas

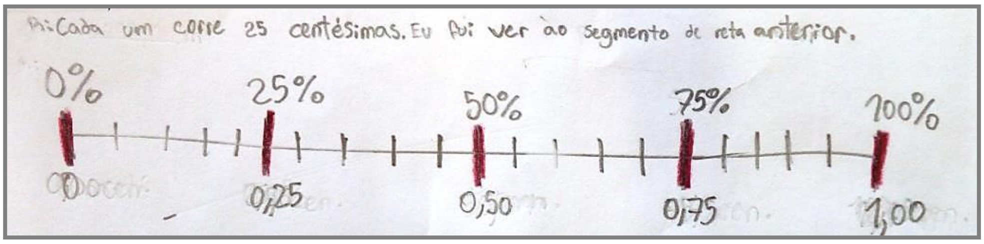


Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Os alunos apoiaram-se na relação comparativa que a percentagem oferece para relacionar o 25%, o 50% e 100% com os quatro momentos de passagem do testemunho, considerando a totalidade da corrida como unidade.

Quando lhes foi perguntado que parte da corrida fez cada um dos quatro elementos da equipa, alguns grupos recorreram à relação entre a percentagem e o numeral decimal, interpretando que cada atleta correu 0,25 da corrida (Figura 11).

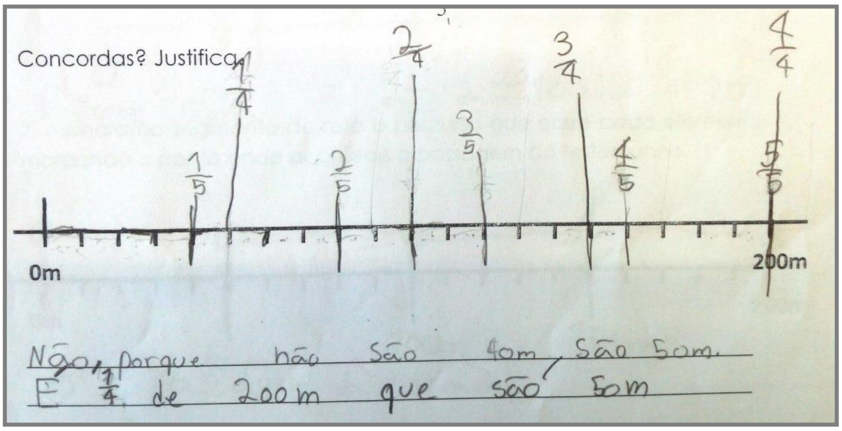
Figura 11 – Resposta do grupo de Dina à tarefa das estafetas



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Na última questão desta sequência era pedido que os alunos se posicionassem, justificando, em relação a uma afirmação que dizia “Cada elemento da equipa corre 1/5 da corrida.”. Todos os grupos afirmaram não concordar com a afirmação. Alguns justificaram assinalando na reta numérica a divisão da unidade em quartos e em quintos, como forma de comparar diretamente a sua grandeza, como mostra o registo do grupo de Clara (Figura 12).

Figura 12 – Resposta do grupo de Clara à tarefa das estafetas



Fonte: Dados referentes a esta pesquisa

Este grupo de alunos justificou por palavras que era a um quarto da corrida que correspondiam os 50 metros que cada elemento da equipa fez e não a 40 metros (Figura 20).

Na discussão coletiva desta afirmação, os alunos foram apresentando argumentos para refutar a afirmação tendo por base as suas estratégias de resolução:

Dinis:	*Eram só quatro pessoas na corrida.*
Ivo:	*E cada uma corria 50 metros.*
Professora:	*Então eram 4 elementos por equipa e vimos que cada um corria 50 metros. Foi a essa conclusão que vocês chegaram também, Ana?*
Ana:	*Se fossem 4 pessoas era de 50 em 50 e não de 40 em 40. Assim eram 5 pessoas.*
Professora:	*E então? Eu pergunto, quando vimos que eram 4 pessoas e cada pessoa corria 50 metros cada elemento fazia que parte do percurso?*
Dina:	*25%.*
Professora:	*Isso. Se a estafeta fosse feita por 4 pessoas, o percurso estaria dividido em quanto?*
Alunos:	*Em quatro.*
Heitor:	*Cada pessoa fazia um quarto.*
…	
Professora:	*Olhando para a reta, será verdade a afirmação de que cada atleta correu 1/5?*
Heitor:	*Não, fez um quarto porque cada um corre vinte e cinco por cento e não vinte por cento.*
Professora:	*Então se correm vinte e cinco por cento, a afirmação era verdadeira?*
Alunos:	*Não.*
Bruna:	*Só se fossem cinco corredores.*

A relação entre a fração e a percentagem que emergiu durante a fase de exploração pelos diferentes grupos foi sistematizada na voz de Heitor na discussão coletiva quando afirmou que um quarto correspondia a 25% da corrida e não a 20%. A relação que estabeleceu entre 25% e um quarto é a que sustenta a relação entre 20% e um quinto. Perceberam, por exemplo, que 25% representam vinte e cinco centésimas de cem e também um quarto, de quatro quartos, da mesma unidade. A fração um quinto constrói-se naturalmente como uma representação de um número mais pequeno, mais próximo do zero, do que a fração um quarto. A marcação destes pontos na reta numérica permitiu interpretar a fração com um significado de medida, em que o denominador parece significar a parte que se obtém quando o todo é dividido num dado número de partes e o numerador como o número de partes que se consideram.

Nesta etapa da experiência de ensino os alunos envolveram-se numa aprendizagem mais formal da fração, dando sentido à sua estrutura e movimentando-se entre frações, embora ao longo das outras etapas já tivessem feito referência às frações. A sua estrutura pareceu ser entendida como uma forma de representar um número, como uma relação entre o que estava a ser considerado e a unidade a que se referia. Com as frações, nomeadamente com as frações decimais, percecionaram que à medida que o número de partes em que a unidade foi dividia aumentava, cada parte ficava progressivamente mais pequena o que parecia não ser tão evidente com a representação decimal, que parecia apelar sobretudo ao número como grandeza. Por outro lado, a turma pareceu ir construindo uma compreensão das diferentes representações de forma a inter-relacioná-las, o que deu forma à ideia de que o mesmo número racional pode ser escrito de várias formas, sem que a sua grandeza se altere.

Discussão e conclusão

Neste artigo analisamos uma experiência de ensino que, tendo por base um trabalho com as diferentes representações do número racional, se focou inicialmente na percentagem e fez emergir posteriormente o numeral decimal e a fração. O nosso objetivo era perceber que contributo uma abordagem seguindo esta sequência, apoiada pela percentagem no significado de medida, poderia dar na construção da compreensão da natureza relacional dos números racionais, numa perspetiva de sentido de número.

A trajetória hipotética de aprendizagem que orientou esta experiência e, consequentemente, a sequência de tarefas que a operacionalizou, é específica em relação à turma para a qual foi desenhada. Não se trata de uma progressão de aprendizagem estruturada em etapas estanques ou necessariamente eficaz, independentemente das características da turma e da cultura da sala de aula. A análise conceptual desta trajetória remete-nos para as características da aprendizagem desta turma, enquanto processo social e cultural, não pretendendo descrever a aprendizagem individual dos alunos.

Do trabalho com os números inteiros, os alunos traziam flexibilidade em manipular os números, bem como o entendimento da contagem de unidades de um dado conjunto, sendo 1 usado como unidade. A compreensão do sentido de completude da percentagem permite aliar este entendimento de medida e salientar a natureza multiplicativa dos números racionais. Numa primeira fase, quando os alunos constatam que uma barra de estado ou um recipiente apresentam um dado valor de preenchimento em percentagem, entendem este valor como um conjunto de elementos, em que a unidade de medida é 1, mas também o veem como medida da relação que a parte tem com o todo (ou seja, 100%), tirando partido da base 100 (MOSS; CASE, 1999). A medida desempenha um papel fundamental no início deste processo de extensão dos conhecimentos numéricos aos números racionais, permitindo interpretar os outros significados de número racional (LAMOM, 2007). Progressivamente, os alunos percecionam a relação de proporcionalidade que a percentagem permite estabelecer entre duas quantidades de natureza diferente, enquanto medida de razão de base 100, que, contudo, ainda não conceptualizam. E observam também que a grandeza relativa de um número racional, representado em percentagem, é indissociável da unidade considerada, isto é, não faz sentido sem considerar o todo a que diz respeito. Compreendem por exemplo que existe um preço inicial, um preço final e uma relação entre ambos que é de 70%, relação que começam a construir como multiplicativa. Nesta etapa, o número racional ganha sentido enquanto quantidade relativa (BROWN, 2015).

O numeral decimal surge como representação alternativa à percentagem, primeiro com arredondamento às centésimas, privilegiando o entendimento que os alunos trazem da percentagem na base 100 e, posteriormente, recorrendo a estratégias de agrupamento e partição, surgindo as décimas e as milésimas. Os alunos percecionam que 10% podem ser convertidos em 10 centésimas e 5% em 5 centésimas, reconhecendo a importância que o valor de posição dos algarismos assume na notação desta representação, por analogia com a percentagem. Nesta etapa, os alunos constroem e mobilizam números de referência, nomeadamente frações simples (por exemplo interpretando 1/4 como 25 centésimas) quando procuram dar sentido a situações numéricas recorrendo a conversões simples (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; BERCH, 2005; MOSS; CASE, 1999). A compreensão desta representação surge apoiada no significado de medida, tendo como suporte a reta numérica dupla, como modelo de escala linear. Os alunos percecionam que os números representados como numeral decimal indicam uma distância em relação à unidade, que é tanto mais precisa e difícil de marcar com exatidão na reta numérica quanto mais algarismos tiver a parte não inteira do número nessa representação. Esta perceção abre caminho no sentido da compreensão da densidade associada aos números racionais (VAMVAKOUSSI; VOSNIADOU, 2004).

O trabalho para a compreensão da fração surge apoiado nos conhecimentos da percentagem e do numeral decimal, de forma inter-relacionada. Os alunos percebem que é possível converter percentagem em numeral decimal e numeral decimal em fração decimal a partir das regularidades e aspetos comuns a cada representação. A ideia que um mesmo número, ou seja, uma mesma quantidade, se pode expressar através de diferentes representações simbólicas, que envolvem diferentes notações ou mesmo diferentes formas da mesma notação (como frações equivalentes), contribui para o seu uso de forma flexível, em função do contexto (MCINTOSH; REYS; REYS, 1992; ABRANTES; SERRAZINA; OLIVEIRA, 1999; BERCH, 2005). Recorrendo à reta numérica, os alunos conceptualizam a fração não apenas como uma parte do todo, mas como uma iteração de uma dada fração unitária, considerando a sua relação com a unidade considerada. As frações são assim interpretadas como um número que traduz a medida da relação da parte em relação à unidade, e não como dois números inteiros que traduzem uma relação parte-todo. Esta perceção permite identificar a ordem de grandeza do número que a fração representa, intuindo o significado de razão subjacente à relação entre numerador e denominador.

Apesar da aprendizagem dois números racionais não se tratar de um processo linear é possível identificar um conjunto de aspetos inerentes a esta trajetória que parecem ter contribuído para o desenvolvimento da compreensão da natureza relacional destes números pela turma, numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número, nomeadamente: 1) a mobilização e ampliação de conhecimentos prévios relativos aos números inteiros (CCSSI, 2010); 2) a valorização dos conhecimentos intuitivos de percentagem e razão, aliados à capacidade de decompor números, para enfatizar a sua grandeza, apoiada no uso de modelos (MOSS; CASE, 1999; SIEGLER, 2016); 3) a valorização do significado de medida, como ponte entre a contagem e a medição, associando um número a uma quantidade de grandeza e invocando a necessidade de refinamento (LAMON, 2010; PONTE; SERRAZINA, 2000); 4) a enfase na relação de proporcionalidade que cada representação envolve, destacando a relação entre o que está a ser descrito e a unidade a que se refere, no sentido da construção de relações multiplicativas (GALEN et al., 2008; MOSS, 2002); e 5) a construção de uma estrutura conceptual, apoiada na percentagem, que apela progressivamente ao uso de outras representações e à compreensão da sua notação, integrando-as na compreensão do sistema de números racionais como um todo (MOSS, 2002).

A aprendizagem dos números racionais é um processo complexo, que tem início nesta etapa da escolaridade e que se procura, gradualmente, desenvolver no sentido de uma compreensão robusta e flexível das diferentes representações do número racional, enquanto aspeto fundamental na aprendizagem dos números racionais (TIAN; SIEGLER, 2017). A literatura divide-se em relação à ordem pela qual as representações dos números racionais devem ser introduzidas, havendo também autores que consideram que essa ordem não é decisiva, mas as discussões sobre estas questões raramente envolvem a percentagem (MOSS; CASE, 1999; TIAN; SIEGLER, 2017). Neste estudo, a sequência segundo a qual as três representações dos números racionais surgiram na trajetória de aprendizagem vivida pela turma, influenciou a forma como os alunos foram construindo e relacionando as ideias subjacentes a este novo conjunto numérico, tendo por base um entendimento da grandeza dos números racionais na compreensão da sua natureza relacional. Estes resultados vêm reforçar a necessidade de considerar a percentagem nesta discussão, mostrando que a sua valorização no trabalho a realizar pelos alunos pode trazer importantes benefícios para a sua aprendizagem.

Agradecimentos

Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da Universidade de Lisboa, no âmbito do Programa de Bolsas de Doutoramento, através de uma bolsa atribuída à 1.ª autora.

Referências

ABRANTES, P.; SERRAZINA, L.; OLIVEIRA, I. **A matemática na educação básica**. 1.ª ed. Lisboa: ME–DEB, 1999. 113 p.

BERCH, D.B. Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. **Journal of Learning Disabilities**, California, v. 38, n. 4, p. 333-339, jul. 2005.

BROWN, B. The relational nature of rational numbers. **Pythagoras**, Centurion, v. 36, n. 1, p. 1-8, jan. 2015.

COBB, P. et al. Design experiments in educational research. **Educational Researcher**, Washington, v. 32, n. 1, p. 9-13. Jan.2003.

COBB, P.; JACKSON, K.; DUNLAP, C. Design research: an analysis and critique. In: ENGLISH, L. D.; KIRSHNER, D. (Eds.). **Handbook of international research in mathematics education**. New York: Routledge, 2016. p. 481-503.

COMMON CORE STATE STANDARDS INITIATIVE. **Common core state standards for mathematics**. Washington, 2010. 93 p. Disponível em: http://www.corestandards.org/Math/. Acesso a: 15 nov. 2017.

CONFREY, J.; LACHANCE, A. Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In: KELLY, A.; LESH, R. (Eds.). **Handbook of research design in mathematics and science education**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 231-266.

CONFREY, J.; MALONEY, A. The construction, refinement, and early validation of the equipartitioning learning trajectory. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE LEARNING SCIENCES, 9, 2010, Chicago. **Proceedings…** Chicago: International Society of the Learning Sciences, 2010. p. 968-975.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting mathematics education**: China lectures. Dordrecht: Kluwer, 1991. 199 p.

GALEN, F. et al. **Fractions, percentages, decimals and proportions**: a learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6. 1.ª. ed. Rotterdam: Sense, 2008. 163 p.

GOETZ, J. P.; LECOMPTE, M. D. **Ethnography and qualitative design in educational research**. 2.ª ed. New York: Academic, 1984, 292 p.

GRAVEMEIJER, K.; VAN EERDE, D. Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. **The Elementary School Journal**, Chicago, v. 109, n. 5, p. 510-524. may 2009.

HOWDEN, H. Teaching number sense. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 36, n. 6, p. 6-11, feb. 1989.

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE LISBOA. **Carta ética para a investigação em educação e formação**. Lisboa, 2016. 2 p. Disponível em: <http://www.ie.ulisboa.pt/investigacao/comissao-de-etica> Acesso a: 15 nov. 2017.

LAMON, S.J. Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In: Lester, F. (Ed.) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: NCTM, 2007, v. 1, p. 629-667.

LAMON, S.J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3.ª ed. New York: Routledge, 2012, 254 p.

MARKOVITS, Z.; SOWDER, J. Developing number sense: An intervention study in grade 7. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 25, n. 1, p. 4-29, jan. 1994.

MCINTOSH, A.; REYS, J.; REYS, E. A proposed framework for examining basic number sense. **For the Learning of Mathematics**, White Rock, v. 12, n. 3, p. 2-8 e 44, nov. 1992.

MIDDLETON, J. A.; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; SHEW, J. A. Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. **Mathematics Teaching in the Middle School**, Reston, v. 3, n. 4, p. 302-312, jan. 1998.

MOSS, J. Percents and Proportion at the Center: Altering the Teaching Sequence for Rational Number. In: LITWILLER, B. (Ed.). **Making sense of fractions, ratios, and proportions 2002 Yearbook**. Reston: NCTM, 2002. p. 109-120.

MOSS, J.; CASE, R. Developing children's understanding of the rational numbers: a new model and an experimental curriculum. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 30, n. 2, p. 122-147, mar.1999.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. **Principles to actions**: ensuring mathematical success for all. 1.ª ed. Reston: NCTM, 2014. 140 p.

PONTE, J. P. et al. Investigação baseada em *design* para compreender e melhorar as práticas educativas. **Quadrante**, Lisboa, v. XXV, n. 2, p. 77-98, 2.º semestre. 2016.

PONTE, J. P.; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da Matemática do 1.º ciclo**. 1.ª ed. Lisboa: Universidade Aberta, 2000. 257 p.

PREDIGER, S. Focussing structural relations in the bar board – a design research study for fostering all students' conceptual understanding of fractions. In: EIGHT EUROPEAN CONFERENCE OF RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 8, 2013, Ankara. **Proceedings…** Ankara: ERME, 2013. p. 343-352.

PREDIGER, S.; GRAVEMEIJER, K.; CONFREY, J. Design research with a focus on learning processes: an overview on achievements and challenges. **ZDM**, Berlim, v. 47, n. 6, p. 877-891. oct. 2015.

SIEGLER, R. S. et al. Fractions: the new frontier for theories of numerical development. **Trends in Cognitive Sciences**, Cambridge, v. 17, n. 1, jan. 2013.

SIEGLER, R.S.; THOMPSON, C.A.; SCHNEIDER, M. An integrated theory of whole number and fractions development. **Cognitive Psychology**, Amsterdam, v. 62, n. 4, p. 273-296, jun. 2011.

SIMON, M. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 26, n. 2, p. 114-145, mar. 1995.

SOWDER, J.; SCHAPPELLE, B. Number sense-making. **Arithmetic Teacher**, Reston, v. 41, n.6, p. 342-346. Feb. 1994.

STEPHAN, M.; CLEMENTS, D.H. Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. CLEMENTS (Ed**.), Learning and teaching measurement: 65th Yearbook,** Reston: NCTM, 2003. p. 3-16.

TIAN, J.; SIEGLER, R.S. Which Type of Rational Numbers Should Students Learn First?. **Educational Psychology Review**, USA, p. 1-22, jul. 2017.

VAMVAKOUSSI, X.; VOSNIADOU, S. Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. **Learning and Instruction**, Cambridge, 2004, v. 14, n. 5, p. 453-467, oct. 2004.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.; DRIJVERS, P. (2014). Realistic mathematics education. In: S. Lerman (Ed.), **Encyclopedia of mathematics education**. Netherlands, 2014. p. 521-525.