View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by UCrea

Monografías de la Real Academia de Ciencias. Zaragoza. **43:** 111–114, (2018).
ISSN: 1132-6360

ENUNCIADOS NI CIERTOS NI FALSOS EN RAZONAMIENTO AUTOMÁTICO EN GEOMETRÍA

ZOLTÁN KOVÁCS, TOMÁS RECIO Y M. PILAR VÉLEZ

Abstract. We investigate and generalize to an extended framework the notion of *true on components* labeled by Zhou, Wang and Sun in their paper "Automated Reducible Geometric Theorem Proving and Discovery by Gröbner Basis Method", J. Automat. Reasoning 59 (3), 331-344, 2017. A new, simple criterion is presented for a statement to be simultaneously not generally true and not generally false (i.e. true on components), and its performance is exemplified through the implementation of this test in the dynamic geometry program GeoGebra. This extended abstract is based on a recent work by the authors [5].

Introducción

El enfoque de razonamiento automático basado en geometría algebraica consiste en traducir los enunciados de geometría elemental, $\{H \Rightarrow T\}$, a expresiones algebraicas. De este modo los objetos geométricos que verifican las hipótesis son soluciones de un sistema de polinomios $V(H) = \{h_1 = 0, \ldots, h_r = 0\}$ (variedad de hipotésis), y se representan algebraicamente por estos polinomios como un ideal (de hipótesis), $H = \langle h_1 \ldots, h_r \rangle$, en un anillo de polinomios. Igualmente la tesis es solución de una ecuación $V(T) = \{f = 0\}$.

Cuando $V(H) \subseteq V(T)$ podemos decir que el teorema es *siempre cierto*. Sin embargo, esto sucede raras veces, incluso para teoremas bien conocidos, dado que la traducción algebraica del enunciado geométrico no suele excluir los casos degenerados, ver por ejemplo [3].

Por ello se hace un planteamiento ligeramente diferente, detectar primero una colección de variables tal que ninguna relación polinómica entre estas variables se anule sobre todo $V(H)$ (i.e. variables independientes módulo H). Entonces, las componentes irreducibles de $V(H)$ sobre las que estas variables permanecen independientes se denominan *no degeneradas*.

Así, un enunciado es *generalmente cierto* si la tesis se verifica al menos sobre todas las componentes no degeneradas. Y si la tesis no se anula idénticamente sobre ninguna componente no degenerada el enunciado se considera *generalmente falso*. Observar que esto incluye el caso *siempre falso* en que la tesis no se verifica sobre ningún punto de la variedad de hipótesis.

En este contexto se presenta un caso particular que se ha revelado de gran interés, aquellos enunciados que resultan no ser ciertos ni falsos.

Analicemos un ejemplo muy simple. Sean los puntos del plano $A(0,0)$, $B(2,0)$ y las circunferencias c centrada en A y d centrada en B, ambas de radio $r = \sqrt{3}$, i.e. $c : x^2 + y^2 - 3 = 0$

Date: Febrero de 2018.

Partially supported by the Spanish Research Project MTM2017-88796-P Computación simbólica: nuevos retos en álgebra y geometría y sus aplicaciones.

and $d : (x-2)^2 + y^2 - 3 = 0$. Tomemos $E(u, v)$ y $F(m, n)$ los puntos de intersección de c y d. El ideal de hipótesis es: $\left\langle u^2 + v^2 - 3, (u-2)^2 + v^2 - 3, m^2 + n^2 - 3, (m-2)^2 + n^2 - 3 \right\rangle$.

La tesis de este enunciado es que las rectas AE y BF son paralelas, es decir, viene dada por el polinomio: $u \cdot n - v \cdot (m-2)$.

El ideal de hipótesis es claramente de dimensión cero y tiene dos componentes primarias sobre los racionales,

$$\begin{aligned}
&\left\langle v-n, (m-2)^2 + n^2 - 3, (u-2)^2 + v^2 - 3, m^2 + n^2 - 3, u^2 + v^2 - 3 \right\rangle = \\
&\qquad = \left\langle v-n, u-1, m-1, n^2-2 \right\rangle \\
&\left\langle v+n, (m-2)^2 + n^2 - 3, (u-2)^2 + v^2 - 3, m^2 + n^2 - 3, u^2 + v^2 - 3 \right\rangle = \\
&\qquad = \left\langle v+n, u-1, m-1, n^2-2 \right\rangle.
\end{aligned}$$

Es fácil verificar que la tesis es falsa sobre la primera componente y cierta sobre la segunda. Se trata por tanto de un enunciado de geometría elemental que con este enfoque, podríamos decir, no es ni cierto ni falso.

Por definición un enunciado no puede ser a la vez generalmente cierto y generalmente falso. Sin embargo, como muestra el ejemplo anterior, existen enunciados que son a la vez no generalmente ciertos y no generalmente falsos (otros ejemplos en [6, 1]).

Por otra parte, obsérvese que los conceptos introducidos arriba aluden a componentes irreducibles de una variedad algebraica y a un conjunto de variables independientes, por tanto dependen por una parte del cuerpo base sobre el que trabajemos (el ideal H del ejemplo anterior tiene cuatro componentes sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$) y, por otra, del conjunto de variables independientes elegido.

Los resultados que aquí presentamos a continuación forman parte de un reciente trabajo de los autores [5] sobre las cuestiones mencionadas arriba.

1. Enunciados generalmente ciertos en componentes

Sean K y L cuerpos, con L extensión algebraicamente cerrada de K (por ejemplo $L = \mathbb{C}$ y $K = \mathbb{Q}$) y considérese un enunciado $\{H \Rightarrow T\}$. Sean $H = \langle h_1 \dots, h_r \rangle$ y $T = \langle f \rangle$ los ideales de hipótesis y de tesis en un anillo de polinomios $K[X]$, donde las variables $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ se refieren a las coordenadas utilizadas en la descripción algebraica de las hipótesis. Y sean $V(H)$ y $V(T)$ las correspondientes variedades de hipótesis y de tesis en el espacio afín L^n definidas sobre K.

En lo que sigue fijemos un enunciado $\{H \Rightarrow T\}$ formulado sobre K y un subconjunto $Y = \{x_1, \dots, x_d\}$ de X de variables independientes para H (i.e. $H \cap K[Y] = \langle 0 \rangle$).

Definición 1.1. El enunciado es *generalmente cierto* si la tesis f se anula idénticamente en todas las K-componentes de $V(H)$ no degeneradas con respecto Y.

El enunciado es *generalmente falso* si la tesis f no se anula idénticamente sobre ninguna las K-componentes de $V(H)$ no degeneradas con respecto Y.

La terminología "cierto en componentes" ha sido introducido recientemente en [7] para enunciados que no son generalmente ciertos ni falsos, pero en un contexto ligeramente diferente al nuestro, suponiendo $K = L$ algebraicamente cerrado.

Definición 1.2. El enunciado es *cierto en componentes* (o *cierto en partes no degeneradas*) si la tesis f se anula identicamente en alguna, pero no todas las K-componentes de $V(H)$ en L^n no degeneradas para Y; es decir, si no es ni generalmente cierto, ni generalmente falso.

Tómese ahora $Y = \{x_1, \ldots, x_d\}$ $(0 \leq d \leq n)$ *un conjunto de variables independientes de cardinal máximo* para el ideal de hipótesis H; esto es $H \cap K[Y] = \langle 0 \rangle$ y para cualquier conjunto $Z \subset X$ con $r > d$ elementos, $H \cap K[Z] \neq \langle 0 \rangle$. Luego, la dimensión de Krull de $V(H)$ es d.

En [6] se da una condición necesaria y suficiente para enunciados generalmente ciertos y otra para generalmente falsos, basadas ambas en eliminación en ideales de polinomios. En [5] se retoma esta idea y se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Sea $\{H \Rightarrow T\}$ un enunciado y establezcamos un conjunto de variables independientes de cardinal máximo $Y = \{x_1, \ldots, x_d\}$ para el ideal H (i.e. $d = \dim(H)$). Entonces, el enunciado es cierto en componentes si y sólo si*

$$(i)\ \langle h_1, \ldots, h_r, f \cdot t - 1\rangle\, K[X, t] \cap K[Y] = \langle 0 \rangle\,, \text{y}$$
$$(ii)\ \langle h_1, \ldots, h_r, f\rangle\, K[X] \cap K[Y] = \langle 0 \rangle\,.$$

El teorema anterior proporciona un criterio directo para detectar si un enunciado es cierto en componentes comprobando si el resultado de dos eliminaciones es cero o no. La primera detecta que el enunciado es no generalmente cierto y la segunda que es no generalmente falso, además ambas condiciones son necesarias y suficientes (ver [6]).

Por otra parte, este teorema nos permite también entender un hecho aparentemente contradictorio que se ha señalado anteriormente: la descomposición primaria de un ideal depende del cuerpo base. Sin embargo, teniendo en cuenta que el cálculo de bases de Gröbner (fundamento de los algoritmos de eliminación) se realiza sobre el cuerpo base, podemos deducir el siguiente:

Corolario 1.4. *Sea K' un cuerpo intermedio, $K \subseteq K' \subseteq L$, donde L es algebraicamente cerrado. En las hipótesis del teorema, un enunciado es* cierto en K-componentes *si y sólo si es* cierto en K'-componentes*; es decir, el concepto* cierto en componentes *no depende de las extensiones del cuerpo base.*

Nota 1.5. Cuando trabajamos con enunciados de geometría parece lógico tomar como variables independientes las coordenadas de los puntos libres de la configuración geométrica que estamos tratando. En la mayoría de los casos este conjunto de variables "intuitivamente" maximal es de cardinal máximo, pero hay ejemplos en los que no es así. Por ejemplo en [3, Ejemplo 7], se construye un triángulo de vértices $(-1, 0), (1, 0), (u[1], u[2])$ para razonar sobre la fórmula de Euler que relaciona los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita. Aquí la dimensión esperada es 2, pero la dimensión del ideal de hipótesis es 3. Sin embargo, si se incluye como nueva hipótesis que $(u[1], u[2])$ no esté en el eje x se obtiene la dimensión 2. Se trata de un problema relacionado con la dificultad de controlar todas las degeneraciones cuando se trabaja algebraicamente que ya fue considerado en [2].

Obviamente el hecho de que las coordenadas de los puntos libres de la configuración geométrica sean un conjunto de variables independientes de cardinal máximo para H da sentido a los conceptos de generalmente cierto, generalmente falso y cierto en componentes. Por ello, cuando esto no sucede, proponemos revisar la construcción evitando degeneraciones.

2. Implementación en GeoGebra

El programa de geometría dinámica GeoGebra incluye, entre sus utilidades de razonamiento automático, el concepto "cierto en componentes" desde la versión 5.0.415.0 (diciembre

2017), ver [4]. El criterio del Teorema 1.3 nos ha permitido completar los casos de decisión sobre la veracidad de enunciados de geometría elemental.

A continuación se presentan a grandes rasgos los pasos de este algoritmo para decidir la veracidad de un enunciado $\{H \Rightarrow T\}$:

1) Primero elegir en la construcción un conjunto Y de variables geométricamente independientes entre las coordenadas de los puntos libres de la configuración y comprobar que realmente son independientes, $H \cap K[Y] = \langle 0 \rangle$.

2) Comprobar si la dimensión de Hilbert de H coincide con el cardinal de Y. Si no es así se sugiere al usuario *revisar degeneraciones en la construcción* (FIN). En otro caso continuar.

3) Calcular $\langle h_1, \ldots, h_r, f \cdot t - 1 \rangle \, K[X, t] \cap K[Y]$. Si es $\neq \langle 0 \rangle$ el enunciado es *generalmente cierto* (FIN). En otro caso continuar.

4) Calcular $\langle h_1, \ldots, h_r, f \rangle \, K[X] \cap K[Y]$. Si es $\neq \langle 0 \rangle$ el enunciado es *generalmente falso* (FIN). En otro caso el enunciado es *cierto en componentes*(En este caso la respuesta de GeoGebra es *verdadero en parte, falso en parte*).

Sobre lo expuesto anteriormente, pueden consultarse varios ejemplos ilustrativos en `https://www.geogebra.org/m/zpDq7taB`.

Referencias

[1] Botana, F., Recio, T.: On the unavoidable uncertainty of truth in dynamic geometry proving, Mathematics in Computer Science, 10(1), 5-25 (2016).

[2] Chou, S.C.: Mechanical geometry theorem proving, Mathematics and its Applications, vol. 41. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht (1988), with a foreword by Larry Wos.

[3] Dalzotto, G., Recio, T.: On protocols for the automated discovery of theorems in elementary geometry, Journal of Automated Reasoning, 43, 203-236 (2009).

[4] Kovács, Z., Recio, T., Vélez, M.P.: GeoGebra automated reasoning tools: a tutorial. Available at https://github.com/kovzol/gg-art-doc/blob/master/pdf/english.pdf

[5] Kovács, Z., Recio, T., Vélez, M.P.: Detecting true on components. Preprint. arXiv: 1802.05875 [cs.AI] (2018).

[6] Recio, T., Vélez, M.P.: Automatic discovery of theorems in elementary geometry, Journal of Automated Reasoning, 23, 63-82 (1999).

[7] Zhou, J., Wang, D., Sun, Y.: Automated reducible geometric theorem proving and discovery by Gröbner basis method, Journal of Automated Reasoning, 59(3), 331-344 (2017).

Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz, Linz (Austria)
E-mail address: `zoltan@geogebra.org`

Universidad de Cantabria, Santander (España)
E-mail address: `tomas.recio@unican.es`

Universidad Antonio de Nebrija, Madrid (España)
E-mail address: `pvelez@nebrija.es`