



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE MÉXICO

**Comparación entre modelo browniano, a través de la
metodología Box-Jenkins y el análisis multifractal:
Aplicación al sector financiero**

TESIS

Que para obtener el Título de

LIC. EN ACTUARIA

Presenta

C. Fernando Ramírez Caudillo

Asesor: Dr. Heriberto Casarrubias Vargas

Atizapán de Zaragoza, Edo. de México. Octubre 2018



Atizapán de Zaragoza, Estado de México a 16/Noviembre/2018

L. EN IHS. GLORIA ZAMUDIO VILLAREAL
SUBDIRECTORA ACADÉMICA
CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE MÉXICO
P R E S E N T E

Por la presente le informo que el pasante **Fernando Ramírez Caudillo**, de la carrera de **Licenciatura en Actuaría**, con No. de cuenta **1325834**, presenta el trabajo de TESIS: **COMPARACIÓN ENTRE MODELO BROWNIANO, A TRAVÉS DE LA METODOLOGÍA BOX JENKINS**, mismo que conforme a la Legislación Universitaria, ha sido **aprobado** por el que suscribe para los fines propios de titulación del interesado.

Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE



Dr. Heriberto Casarrubias Vargas
ASESOR

TELS. 3314745492
CORREO: heribertocv@gmail.com

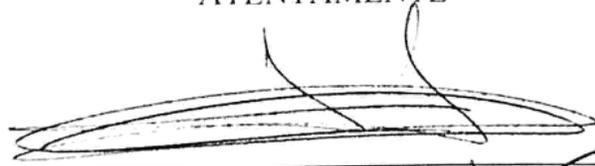
Atizapán de Zaragoza, Estado de México a 15/Noviembre 2018

L. EN IHS. GLORIA ZAMUDIO VILLAREAL
SUBDIRECTORA ACADÉMICA
CENTRO UNIVERSITARIO UAEM VALLE DE MÉXICO
P R E S E N T E

Por la presente le informamos que el pasante **Fernando Ramírez Caudillo**, de la carrera de **Licenciatura en Actuaría**, con No. De cuenta **1325834**, presenta el trabajo de TESIS: **COMPARACIÓN ENTRE MODELO BROWNIANO, A TRAVÉS DE LA METODOLOGÍA BOX JENKINS Y EL ANÁLISIS MULTIFRACTAL: APLICACIÓN AL SECTOR FINANCIERO**, mismo que conforme a la Legislación Universitaria y a las observaciones dictaminadas en el preexamen, ha sido **aprobado** por los que suscribimos, para los fines propios de la Sustentación de Evaluación Profesional del interesado.

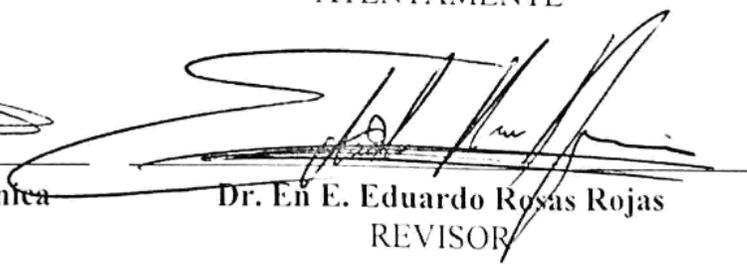
Sin más por el momento, reciba un cordial saludo.

ATENTAMENTE



Lic. en Fis. Mat. José de Jesús Garnica
Verdiguél
REVISOR

ATENTAMENTE



Dr. En E. Eduardo Rosas Rojas
REVISOR

ATENTAMENTE



Dr. Heriberto Casarrubias Vargas
ASESOR



Universidad Autónoma del Estado de México

Centro Universitario UAEM Valle de México

SUSTENTACIÓN DE EVALUACIÓN PROFESIONAL

CUVM/SA/TITULACIÓN/516/18

Atizapán de Zaragoza, México, a 23 de noviembre de 2018.

C. FERNANDO RAMÍREZ CAUDILLO

Egresado de la Licenciatura en Actuaría

PRESENTE

Me permito comunicarle que se autoriza la sustentación e impresión de su trabajo de titulación por la modalidad de Tesis, denominado **COMPARACIÓN ENTRE MODELO BROWNIANO A TRAVÉS DE UNA METODOLOGÍA BOX-JENKINS Y UN ANÁLISIS MULTIFRACTAL: APLICACIÓN AL SECTOR FINANCIERO**, para obtener el título de Licenciado en Actuaría, en virtud de que cuenta con los votos aprobatorios del Asesor y los Revisores asignados para este efecto, en apego a los lineamientos establecidos para la Evaluación Profesional.

Nota: No omito comentar que la impresión de sus empastados deberá coincidir con el título que en este documento se autorizó en términos de mayúsculas, minúsculas, acentos, comillas, paréntesis, etc.

ATENTAMENTE
PATRIA, CIENCIA Y TRABAJO

"2018, Año del 190 Aniversario de la Universidad Autónoma del Estado de México"



L. EN HIS. GLORIA ZAMUDIO VILARREAL
SUBDIRECTORA ACADÉMICA

Centro Universitario
UAEM Valle de México
Dirección Académica
2017-2021

c.c.p. Expediente

Bldv. Universitario s/n Predio San Javier, Atizapán de Zaragoza,
Edo. de México, C.P. 54500
Tel.: (01 55) 58-27-03-61 / 58-27-07-03 / 58-27-05-79 2300 ext. 11280 / 226 2314
cuvm@uaemex.mx



No existen más de dos reglas para escribir, tener algo que decir y decirlo.

Oscar Wilde (1854-1900)

Dedicatorias

Dedico este trabajo principalmente a Dios, por haberme dado la vida y permitirme el llegar hasta este momento tan importante de mi formación profesional y a su vez compartirlo con mis seres amados. A mi madre, por ser el pilar mas importante, ser el motor de mis éxitos y demostrarme siempre su cariño y apoyo incondicional.

A mi padre, que por su ejemplo de arduo trabajo y constancia siempre me ha enseñado a conquistar mis metas.

A mi hermano, que jamás se rinde y siempre me ha transmitido esa experiencia de vida para fortalecer mis conocimientos y de esa forma fungir como guía profesional.

A mi pareja, que a lo largo de este trayecto me ha acompañado y motivado a cumplir este gran paso en mi vida.

La vida está llena de altas, bajas, pero sin duda alguna el crearme valores ha hecho que este primer paso de esta trayectoria profesional se cumpla, espero poder siempre mantener esa satisfacción en sus ojos.

Además, dedico este trabajo al Dr. Heriberto Casarrubias que sin su tiempo y asesoría puntual mi trabajo de investigación no llegaría hasta este punto.

Por último, a mis amigos y colegas de licenciatura que han hecho de esta experiencia algo divertido, único e inigualable.

Resumen

El objetivo del estudio en el presente trabajo es plantear un modelo de identificación al supuesto de memoria larga para analizar el comportamiento futuro de las variables financieras del sector mexicano, como lo es el tipo de cambio peso/dólar, acciones bursátiles, o cualquier instrumento que presente volatilidad diaria en su movimiento; a través de una metodología innovadora basada en el análisis multifractal, wavelets y la teoría de los mercados fractales. Los resultados obtenidos con la propuesta planteada serán comparados con la metodología Box-Jenkins basada en una serie de tiempo que exhibe un desplazamiento de carácter browniano.

Además, en este estudio se observará la potencialidad que presentan los modelos con características multifractales, comparándolo con la metodología box-Jenkins, al ser esta conocida y aplicada en los mercados financieros por los últimos 50 años, impulsando de esta forma a los fractales como una técnica alterna de estimación para variables que presentan un grado alto de *volatilidad* en sus componentes.

The goal of the study in the present work is to propose an identification model of large memory to analyze the future of the financial variables in the financial Mexican sector as the peso / dollar exchange rate, stock exchange shares, or any instrument that shows daily volatility in its movement, through an innovative methodology based on multifractal analysis, wavelets and the theory of fractal markets. The results obtained with the proposed model will be compared with the Box-Jenkins methodology based on a time series that exhibits a Brownian displacement.

Further, in this study it will be observed the potential that the fractal models present comparing it with the box-Jenkins methodology, as it is known and applied in the financial markets for the last 50 years, thus promoting fractals as an alternative estimation technique for variables that present a high degree of volatility in their components.

ÍNDICE

Capítulo 1. Introducción a las Series de Tiempo y los mercados eficientes.

| | |
|---|----|
| Introducción | 2 |
| 1.1 Propiedades de las series de tiempo | 7 |
| 1.1.1. Tendencia | 9 |
| 1.1.2. Componente de estacionalidad | 10 |
| 1.1.3 Estacionariedad | 11 |
| 1.2 Pruebas de Estacionariedad | 13 |
| 1.2.1 Función de autocorrelación FAC | 14 |
| 1.2.2 Prueba Dickey Fuller aumentada. DFA | 16 |
| 1.2.3 Prueba P de Pearson | 18 |
| 1.3 Teoría de los mercados eficientes | 19 |
| 1.3.1 Fallos de los modelos tradicionales | 20 |
| 1.4 Teoría del Caos | 25 |

Capítulo 2. Caos en los mercados bursátiles.

| | |
|--|----|
| 2.1 Geometría Fractal | 27 |
| 2.1.1 Auto-Similitud | 29 |
| 2.1.2 Auto-Afinidad | 30 |
| 2.2 Dimensión Fractal | 31 |
| 2.2.1 Dimensión de Hausdorff-Besicovitch | 32 |
| 2.3 Coeficiente de Hurst, un indicador de persistencia | 33 |
| 2.3.1 Fractales en las series de tiempo | 34 |
| 2.4 Supuesto de memoria larga | 36 |
| 2.4.2 Distribuciones de colas pesadas y Ley de potencias | 38 |
| 2.5 Fractales en los mercados financieros | 40 |
| 2.5.1 Teoría del mercado fractal | |

Capítulo 3. Metodología Box-Jenkins

| | |
|--|----|
| 3.1.1 Modelos Autorregresivos (AR) | 43 |
| 3.1.2 Modelos de medias móviles (MA) | 45 |
| 3.1.3 Modelos autorregresivos con medias móviles (ARMA) | 46 |
| 3.2. Criterios de identificación para modelos óptimos | |
| 3.2.1. Criterio de Akaike | 47 |
| 3.2.2. Criterio de Schwarz | 47 |
| 3.2.3 Criterio Máxima-Verosimilitud | 48 |
| 3.3. Modelos GARCH | 50 |
| 3.4. Bolsa mexicana de valores: ICA (Ingenieros Civiles Asociados) una variable incurrida en el caos financiero | 52 |
| 3.5. Generación de un modelo a través de la metodología Box-Jenkins + GARCH | 54 |
| 3.5.1 Identificación | |
| 3.5.2 Estimación | 57 |
| 3.5.43 Validación | 58 |
| 3.6. Fallos del modelo Tradicional | 64 |

Capítulo 4. Hipótesis del comportamiento fractal en los mercados

| | |
|--|----|
| 4.1. Métodos de estimación para el coeficiente de Hurst | 66 |
| 4.1.1 Análisis de rango reescalado (R/S) | 68 |
| 4.1.2 Método de espectro de potencias (P/S) | 69 |
| 4.1.3 Análisis wavelet (WV) | 70 |
| 4.2 Identificación del supuesto de memoria larga | 71 |
| 4.3 Análisis multifractal | 82 |
| 4.4 Comparación entre metodología Box-Jenkins y un análisis multifractal | 83 |
| Conclusiones | 84 |
| Anexo 1 | |
| Referencias bibliográficas | |

INTRODUCCIÓN.

“¿Por qué la geometría describe al frío o al seco?, una razón que miente inevitablemente es describir la forma de las nubes, una montaña, una costa, o un árbol. Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, y las costas no son círculos. La dimensión en la que medimos las cosas no toma una forma euclidiana. Sino una dimensión fractal.” (Mandelbrot B. B., 1982).

A través del tiempo, la geometría euclidiana ha explicado fenómenos en la realidad, que parecen ser representados perfectamente en líneas o círculos para demostrar su generalidad, pero no es así cuando hablamos de formas o imperfecciones en las figuras a los que simplemente no se tiene acceso en dimensiones lineales por su alta rigurosidad en su estructura.

La *rugosidad*, puede definirse como el conjunto de irregularidades que presenta una superficie en sus componentes básicos; La corteza de un árbol, una bola de papel, una roca, el desplazamiento de los mercados bursátiles. Son ejemplos que podrían detallar la imprecisión de calcular el área o volumen en la geometría de un objeto.

Benoit Mandelbrot desarrolló en 1977 el concepto de la *geometría fractal*, una disciplina que exhibe la rugosidad en diversos conceptos.

Como consecuencia a la explicación del comportamiento natural de las formas, Benoit Mandelbrot desplegó los conceptos de similitud y escalamiento, haciendo de estas dos, las principales características de la medición de perturbaciones en el comportamiento original de la naturaleza.

Los fractales como su nombre lo indica, son pequeñas partes fraccionales que intentan demostrar la realidad de un fenómeno con base en su origen principal, subdividido en escalas y similitudes de una u otra forma en específico.

Diversos matemáticos apoyaron la idea de generar una dimensión en la cual se pudiera captar dichas estructuras inconsistentes y *complejas*, “y fue hasta el año 1985 que se presentó la dimensión de Hausdorff-Besicovitch como medición a la dimensión fractal.” (K.Falconer, 1985).

Con el paso del tiempo, la técnica conocida como *fractales*, ha representado relevancia, desarrollando técnicas más allá de solo la medición de estructuras geométricas.

Durante la última década, esta metodología ha sido objeto de investigación para el desarrollo de modelos en diversas áreas en las que sus aplicaciones presentan un gran nivel de consistencia; modelos matemáticos, químicos, físicos, y econométricos.

Además, la metodología de fractales es una técnica innovadora, y al poseer un punto de vista totalmente controversial con algunas de las teorías tradicionales, por ejemplo: se encuentra sujeta a comparación con diversas de ellas respecto al comportamiento del mercado financiero; La teoría de los mercados eficientes y la metodología Box-Jenkins [B-J].

(Carrasco, 2016), propone, “que si las fluctuaciones de los precios del petróleo son captadas con la geometría euclidiana como en el caso de la metodología [B-J], se genera un comportamiento caótico financiero en la medición de la volatilidad”.

De esta forma, el estudio propone que este fenómeno sea captado a través de diversas burbujas de escalamiento en un espacio; demostrando que, para las variables de carácter financiero se puede encontrar un desplazamiento de memoria en sus valores históricos, y a su vez, un análisis del crecimiento dinámico y cinético de la volatilidad de los precios históricos, por lo tanto, esto infiere que el precio del petróleo se adapta a una *dimensión fractal* y un *modelo de memoria larga*.

En esta tesis de investigación se plantea un modelo econométrico basado en la geometría fractal, a través de la técnica conocida como wavelet, rango escalado y el coeficiente de Hurst para la identificación de la teoría de los mercados fractales en el sector financiero mexicano.

Se propone la hipótesis nula de que diversas variables en el sector financiero mexicano, como el tipo de cambio, pueden ser adaptados a una *dimensión de Hausdorff-Besicovitch*. Por lo tanto, a través del coeficiente de Hurst y sus diversas formas de estimar este indicador se analizará por qué las variables de estudio podrían estar sujetas a una memoria en sus componentes y de ser así ser susceptibles a un análisis fractal garantizando la prevención de un *caos financiero* y facilitando la medición de sistemas *complejos* y rugosos ante la teoría tradicional.

Para comprobar los supuestos establecidos por la hipótesis del mercado fractal, se debe exhibir aquellas implicaciones que presenta la teoría tradicional de condiciones de mercado expresada

en el capítulo 1 por lo tanto, para el desarrollo de esta hipótesis se calibró un modelo basado en la teoría de los mercados eficientes dicha metodología son los modelos Box-Jenkins y los modelos GARCH. La hipótesis alternativa exhibe que en los modelos estacionarios no se encuentra memoria en los desplazamientos de los activos y además no tiene índices de persistencia; en otras palabras, se comportan como un ruido blanco.

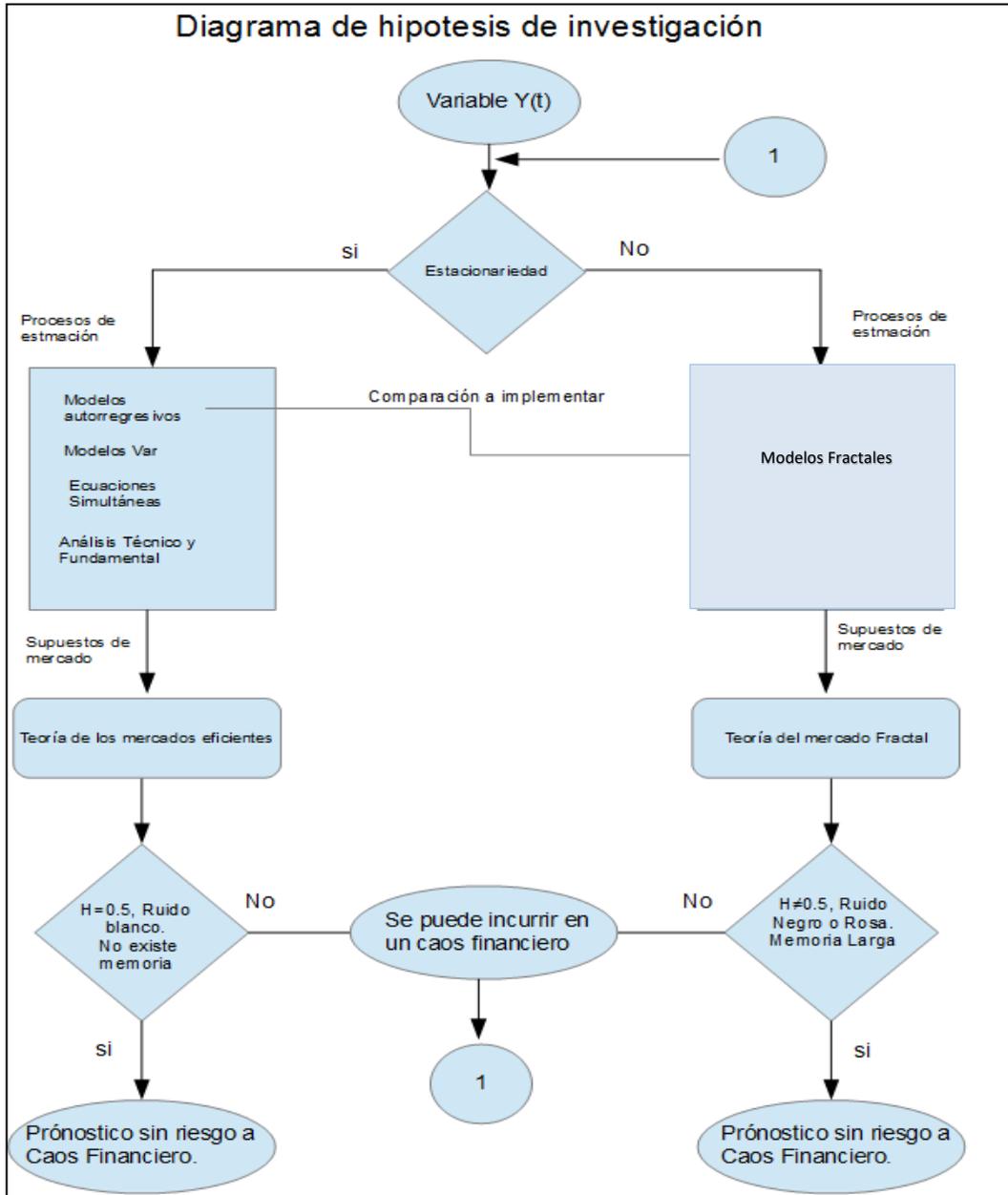
Si la variable de estudio presenta conjeturas de memoria en sus componentes, se demostrará que, para las variables de carácter volátil y sistemas complejos, la teoría del mercado fractal puede ser una herramienta alterna para la construcción de modelos de carácter financiero y *preventivo a niveles caóticos* de riesgo ante la teoría de los mercados eficientes.

Entonces, para poder llevar a cabo la calibración de los modelos propuestos, es necesario saber cómo surgen, y las propiedades que los definen. De esta forma, encontrar una comparativa y la posible complementación entre ambas teorías.

Por lo tanto, el primer y segundo capítulo de la investigación, se adentrará a las propiedades a las que están sujetas las dos metodologías; las series de tiempo, y posteriormente se profundizará de manera más puntual cada una de las hipótesis a implementar.

En el tercer capítulo se calibrará el modelo basado en la metodología tradicional para la variable ICA y se identificará si este proceso establece el fenómeno de volatilidad en su estructura y de ser así se puntualizará los inconvenientes que tiene la teoría de los mercados eficientes al estimar modelos con estas características dando pauta a comprobar la hipótesis del proyecto estipulada en el último capítulo de la investigación.

El cuarto capítulo está concentrado en las diversas alternativas para poder analizar si la serie de tiempo ICA presentan indicios de caos en su rendimiento mediante la estimación del coeficiente Hurst y de esta forma observar si la variable de estudio podría presentar memoria en los desplazamientos que determinen el comportamiento fractal a través del tiempo, y de ser así poder demostrar que diversas variables en el sector financiero mexicano son susceptibles a ser representadas en una dimensión de Hausdorff-Besicovitch y así generar una prevención del caos financiero a través de la metodología de fractales.



Fuente: Elaboración Propia.

Capítulo 1. Introducción a las Series de Tiempo y los mercados eficientes.

1.1 Propiedades de las series de tiempo

Para la interpretación de modelos predictivos, diversas técnicas han considerado por los últimos 50 años, a las series de tiempo como la base del análisis fundamental para la realización de estimaciones de valores futuros.

Las series de tiempo (ST), pueden establecer modelos de predicción, que ayuden a estudiar el desplazamiento de alguna variable de carácter financiero a través de un periodo establecido. Por lo tanto, “los modelos de sucesiones temporales, contemplan tendencia en los parámetros del tiempo, interpretan información para su proyección y definen hipótesis económicas”. (Enders, 1948).

Los modelos ST, parten del supuesto de ecuaciones en diferencias, complementados con procesos estocásticos por su incertidumbre al momento de su valoración en el tiempo. De ser así un modelo de series de tiempo estará expresado generalmente por la siguiente ecuación en diferencias.

$$Y_{t+1} = Y_t + Y_{t-1}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\Delta y_t = Y_t + \beta Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

En donde se expresa como:

$$\Delta Y_t = Y_t + \beta Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad [1.1]$$

Donde:

Y_t = Variable exógena en el futuro.

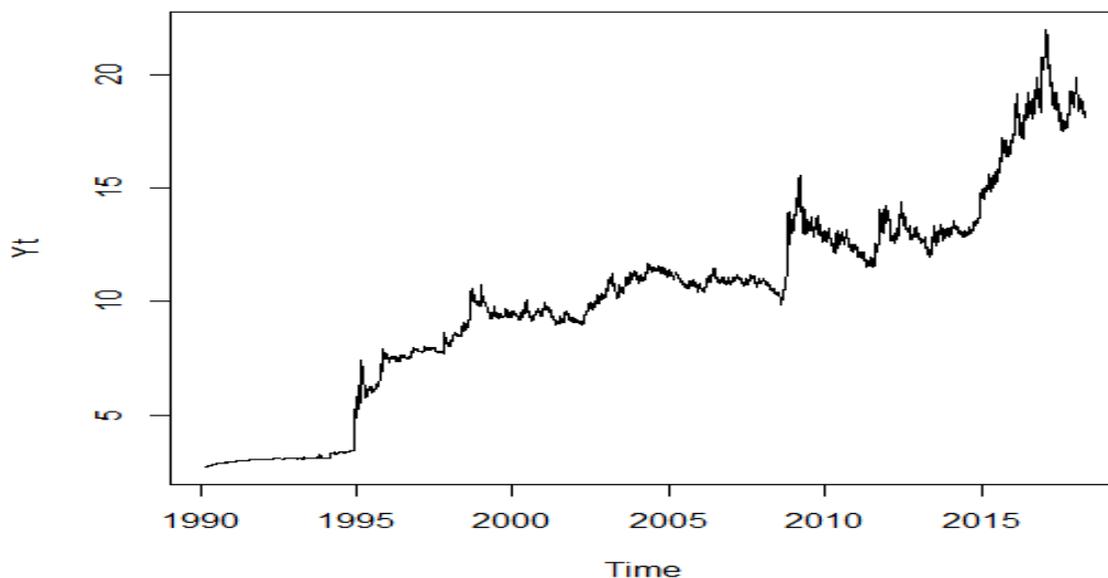
t = Periodo en el tiempo.

ε_t = Error estocástico.

β = Coeficiente de estimación.

Diversos autores como, (Gujarati, 2010), especifican que las series de tiempo están conformadas por múltiples componentes explicativos, elementos que precisan su desplazamiento en un intervalo temporal.” Tendencia, ciclo, estacionalidad y estacionariedad”. Una serie de tiempo puede apreciarse gráficamente de la siguiente manera:

Figura 1.1. Ejemplo gráfico de una serie de tiempo económica para el periodo 1990-2017.



Fuente: Estos datos fueron capturados a través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3, para el caso del tipo de cambio peso/dólar 1990-2017. (Base de datos obtenidos con una periodicidad diaria en investing.com.) Se muestra el desplazamiento de la serie a lo largo del tiempo.

En la figura 1.1 se puede apreciar el valor histórico del tipo de cambio USD/MXN, la cual parece presentar diversos elementos con los que se puede generar un modelo econométrico para su estimación de precios de cierre en el futuro.

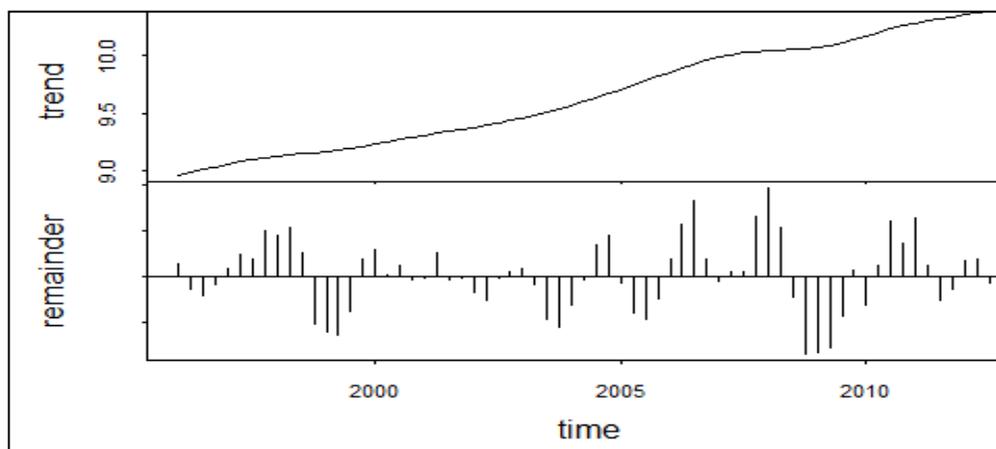
Para realizar el pronóstico de variables financieras con un gran nivel de *volatilidad*, se debe conocer los componentes básicos que definen a esta serie económica y después saber si presenta este fenómeno.

A continuación, se definen cada uno de los componentes de las ST para variables que están determinadas a su vez, por un proceso estocástico, como el tipo de cambio mexicano.

1.1.1 Tendencia

Cuando se habla del componente tendencia en una ST, nos referimos al comportamiento de persistencia que presenta esta sucesión en un periodo determinado. (Lütkepohl, 1991), la define como, “el patrón gradual de variación que afecta el crecimiento o reducción de la serie. Gráficamente este suceso puede apreciarse en el desplazamiento persistente con pendiente negativo o positivo en el tiempo”.

Figura 1.2. Tendencia a través del tiempo 1996-2012, Caso del PIB chileno.



Fuente: Estos datos fueron capturados a través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3, para el caso del tipo de cambio peso/dólar 1990-2017. (Base de datos obtenidos con una periodicidad diaria en investing.com.) En el apartado “Trend”, se muestra la posible tendencia en una serie a lo largo del tiempo.

Por lo tanto, se puede definir a la tendencia como el desplazamiento de persistencia hacia arriba o declive para intervalos definidos en el tiempo.

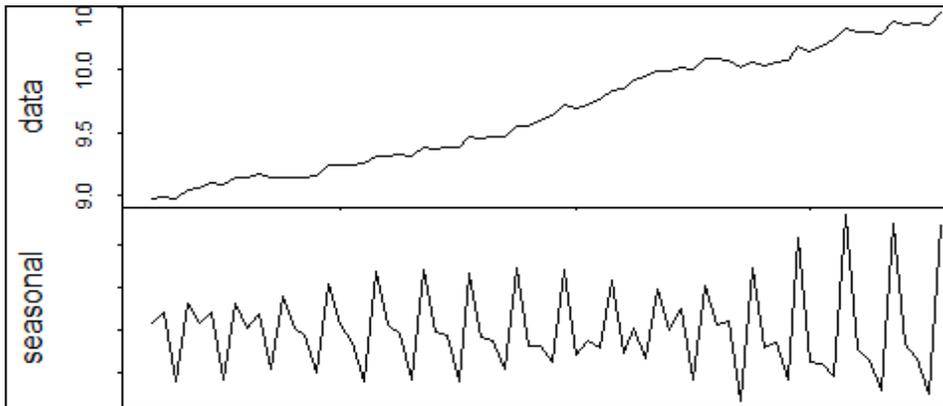
1.1.2 Componente de Estacionalidad

Esta característica en particular es considerada en la práctica como un elemento de suma relevancia para la inteligencia de mercados, propone que las ST tienen un desplazamiento similar o semejante en diversas temporadas en el tiempo. Navidad, Periodos presidenciales, Verano; son ejemplos de épocas que manifiestan desplazamientos controversiales y de impacto en las sucesiones periódicas.

En septiembre del 2017, Estados Unidos presentó una iniciativa para establecer ventanas de mercado con México y Canadá en la producción del sector agrícola según el tratado de libre comercio. El programa consiste en que en ciertas temporadas del año se aumentará la producción de este sector, estimulando la competencia y beneficios de exportación (Morales, 2017).

Entonces, se puede resumir a la estacionalidad, como un componente de las series de tiempo que definen un comportamiento cíclico y periódico particular en diversas épocas en el tiempo.

Figura 1.2. Gráfico del componente estacional para el PIB chileno en el periodo 1996-2012.



Fuente: Estos datos fueron capturados a través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3, para el caso del tipo de cambio peso/Dólar 1990-2017. (Base de datos obtenidos con una periodicidad diaria en investing.com.), En el apartado “Seasonal”, se muestra el posible comportamiento estacional en una serie a lo largo del tiempo, quiere decir que el PIB chileno, es estimulado o tiene incrementos periódicos en espacio particulares cada cierta temporada.

1.1.3 Estacionariedad

Este componente se puede puntualizar como la característica más importante en la comparación de las hipótesis propuestas en esta investigación.

Se define como “un proceso estacionario, aquellas variables que en su distribución estadística no presentan crecimiento o declinación, en otras palabras, están determinadas por media cero y varianza constante” (Gujarati, 2010).

Por lo tanto, en este proyecto se adentrará a este concepto tomando la estacionariedad como el primer factor determinante para las dos hipótesis a comparar.

Entonces, un modelo estacionario podría definirse de la siguiente manera:

En donde se tiene:

$$\Delta y(t) = y(t + \Delta t) - y(t) + \varepsilon_t \quad [1.2]$$

Distribuidos con media 0 y varianza proporcional a $\Delta y t$.

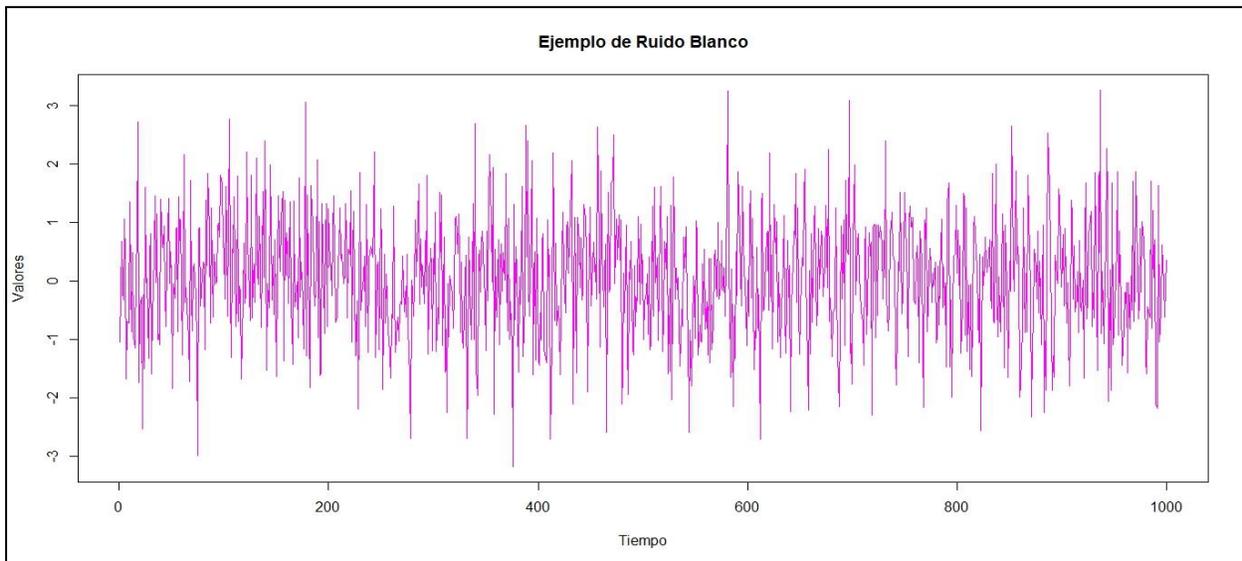
Y los incrementos de $y(\delta_t, +\delta_t)$ no están correlacionados, Se comportan como un ruido, visto de otra forma.

$$\text{Media: } E(Y_t) = \mu \quad [1.3]$$

$$\text{Varianza: } \text{Var}(Y_t) = E(y_t - \mu)^2 = \sigma^2 \quad [1.4]$$

$$\text{Covarianza: } Y_k = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu)] \quad [1.5]$$

Figura1.3. Ejemplo de simulación de un ruido blanco.



Fuente: (Elaboración Propia), A través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3, se simuló un Ruido Blanco.

Se dice que un proceso estocástico es estacionario si su media y su varianza son constantes en el tiempo y si el valor de la covarianza entre dos periodos depende sólo de la distancia o rezago entre estos dos periodos, y no del tiempo en el cual se calculó la covarianza. (Gujarati, 2010)

En otro caso, cuando se observa un comportamiento que tiene como característica una dimensión no estacionaria, se propone lo siguiente:

$$2^H = 2 + 2p \quad \left(-\frac{1}{2} < p < 1 \right) \quad [1.6]$$

- En donde $\Delta y(t)$ estarán correlacionados por p
- Los cambios escalantes son invariantes en el tiempo (t)
- σ constante en diversas escalas del tiempo (t)

Por lo tanto, si $H = \frac{1}{2}$ entonces la variable será adaptado de mejor forma a un proceso estacionario.

En caso contrario se podrá identificar que tiene un comportamiento con características de *ruido negro*; Auto-similitud o Auto-afinidad, según sea el caso.

1.2 Pruebas de Estacionariedad

Para la identificación del componente de estacionariedad en una serie de tiempo a través de Mínimos cuadrados ordinarios (MCO), los estadísticos David Dickey y Wayne Fuller, desarrollaron la prueba de raíz unitaria (Dickey D., 1979). La prueba consiste en determinar la existencia de raíces en una sucesión periódica, por lo tanto, el fundamento econométrico podría verse de la siguiente manera:

$$Y_t = \rho Y_{t-1} + U_t \quad \rho \leq 1 \quad [1.7]$$

Donde Y_t = Variable econométrica.

U_t = El error estocástico, ruido blanco.

$\rho = 1$, es el caso de raíz unitaria, y de estar presente se presentaría un modelo econométrico no estacionario.

A través de los siguientes procesos algebraicos se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho Y_t - Y_{t-1} &= \rho Y_{t-1} - Y_{t-1} + U_t \\ &= (\rho - 1) Y_{t-1} + U_t \end{aligned}$$

La ecuación también puede expresarse como:

$$\Delta Y_t = \delta Y_{t-1} + U_t$$

Donde $\delta = (\rho - 1)$ y Δ , como siempre, es el operador de primeras diferencias.

Por lo tanto, la hipótesis (nula) de que $\delta = 0$, y la hipótesis alternativa es que $\delta < 0$. Si $\delta=0$, entonces $\rho = 1$; es decir, que tenemos una raíz unitaria lo cual significa que la serie de tiempo en consideración es no estacionaria.

Si $\delta < 0$, entonces la ecuación se convierte en:

$$\Delta Y_t = (Y_t - Y_{t-1}) = u_t \quad [1.8]$$

Como u_t es un término de error de ruido blanco, entonces es estacionario, lo cual significa que las primeras diferencias de una serie de tiempo de caminata aleatoria son estacionarias (Gujarati, 2010). Para realizar la validación de un proceso estocástico, es necesario conocer si es estacionario, por lo tanto, se deben desarrollar diversas pruebas para su identificación.

1.2.1 Función de autocorrelación (FAC)

La función de autocorrelación (FAC), es una prueba que muestra gráficamente el componente de estacionariedad a través de correlogramas parciales del desplazamiento de una variable en el tiempo; La FAC en el rezago k denotada por ρ_k , se denota como

$$\frac{\text{covarianza en el rezago } k}{\text{varianza}}$$

Por consiguiente:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$\hat{\gamma}_k = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})(Y_{t+k} - \bar{Y})}{n}$$

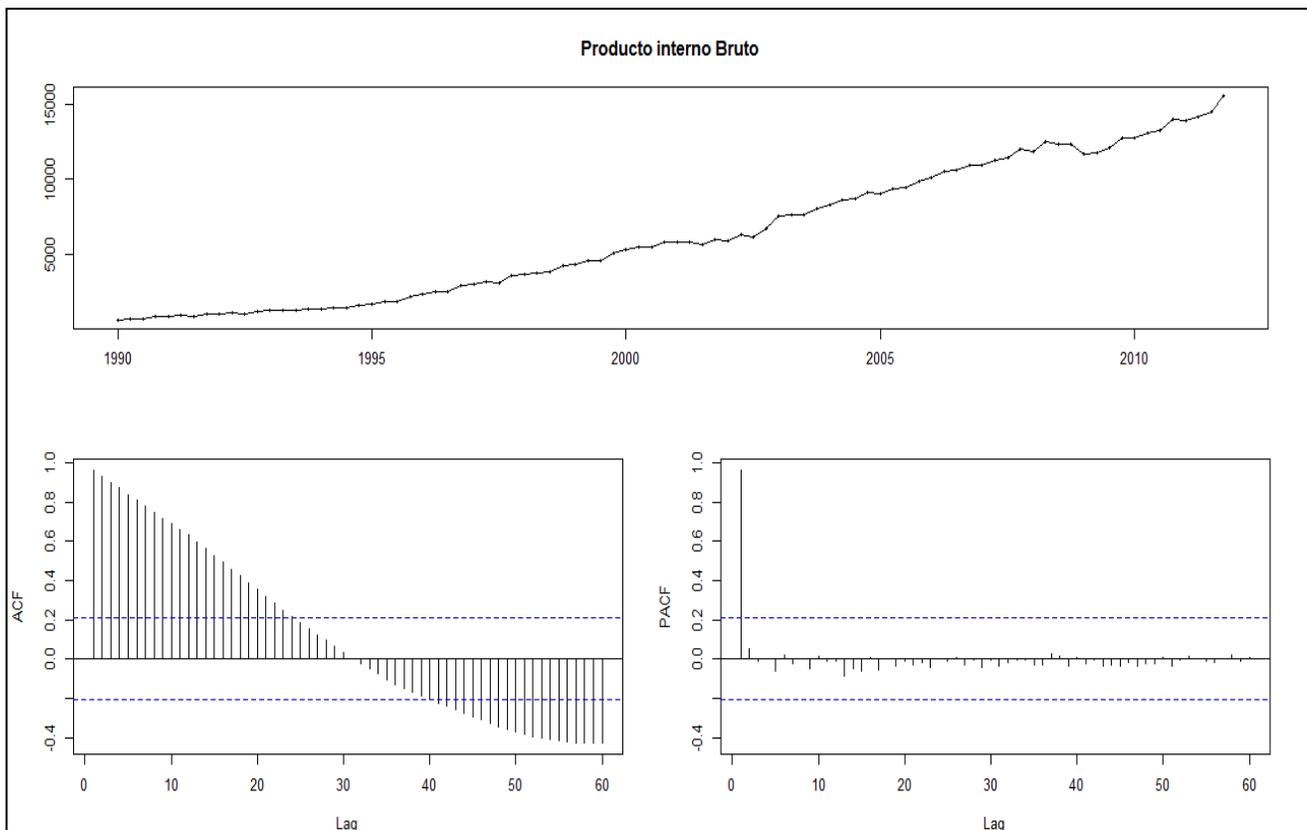
$$\hat{\gamma}_0 = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}{n} \quad [1.9]$$

Donde n es el tamaño de la muestra y \bar{Y} es la media muestral.

Los correlogramas parciales pueden estar expresados de diversas maneras dependiendo el software que se utilice para su estimación, en esta investigación se hará la presentación de estos de acuerdo con el programa estadístico R. studio y la paquetería “fUnitRoots” (Patent No. Version 3042.79, 2017).

Entonces un correlogramas que presenta estacionariedad y no estacionariedad, podría verse de la siguiente manera.

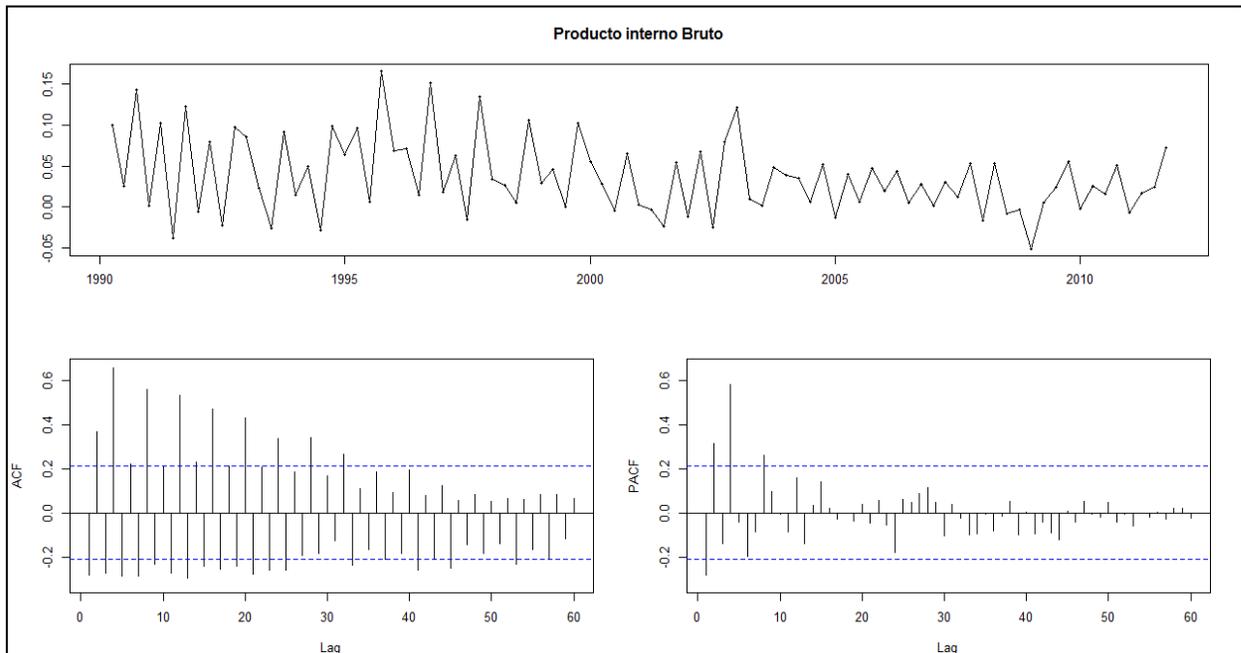
Figura 1.4 Correlograma que muestra no estacionariedad. PIB de México 1990-2012.



Fuente: datos obtenidos trimestralmente en la base del fondo monetario internacional, A través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3.

La figura 1.4. Muestra el Correlograma parcial del PIB mexicano 1990-2012, sin ninguna transformación matemática. Es una serie no estacionaria, la variable presenta tendencia.

Figura 1.5 Correlograma que muestra estacionariedad. PIB de México 1990-2012.



Fuente: datos obtenidos trimestralmente en la base del fondo monetario internacional, A través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3.

La figura 1.5 muestra el correlograma parcial del PIB mexicano 1990-2012, aplicando 1 diferencia logarítmica para convertir la variable en estacionaria, por lo tanto, contempla un ruido blanco.

1.2.2 Prueba Dickey Fuller aumentada (DFA)

La prueba nombrada Dickey-Fuller plantea un modelo autorregresivo el cual tiene como característica la identificación de raíces unitarias en los rezagos de una variable con respecto su pasado. Cuando una serie no es estacionaria en media, o lo que es lo mismo, cuando no es integrada de orden cero $I(0)$, se dice que presenta al menos una raíz unitaria.

El planteamiento más sencillo de Dickey y Fuller es el siguiente. Plantean un modelo autorregresivo AR (1) como:

$$Y_t = \mu + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

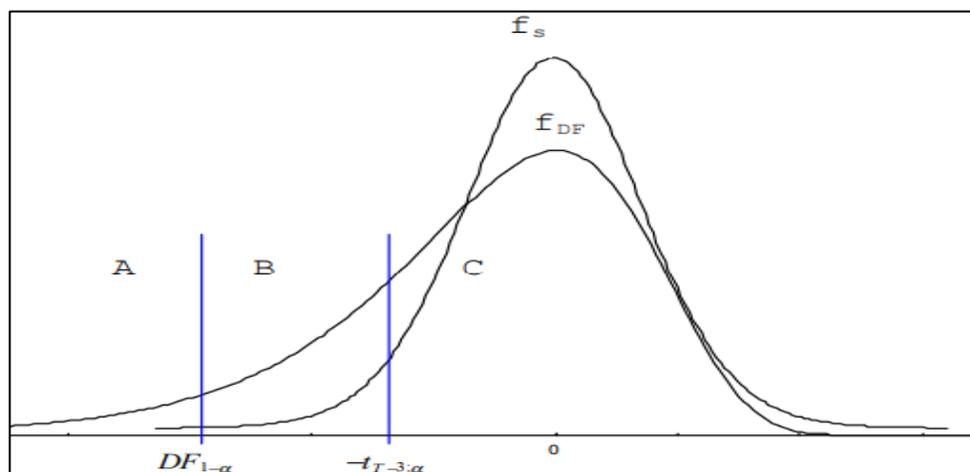
Donde μ y ρ son parámetros por estimar y ε_t es un término de error para el que se asume que cumple las propiedades de ruido blanco. Dado que ρ es un coeficiente de autocorrelación que, por tanto, toma valores entre $-1 < \rho < 1$, si $\rho = 1$, la serie y es no estacionaria, (Damodar N. Gujarati, quinta edición 2010).

$\Delta Y_t = \mu + \gamma Y_{t-1} + \varepsilon_t$ donde $\gamma = \rho - 1$ y las hipótesis nula y alternativa son, respectivamente, $H_0: \gamma = 0$ y $H_a: \gamma < 0$.

Por lo tanto. La prueba DFA puede sintetizarse en la siguiente expresión:

$$\Delta Y_t = \mu + \gamma Y_{t-1} + \delta \Delta Y_{t-2} + \dots + \delta \rho - 1 \Delta Y_{t-p+1} + \varepsilon_t \quad [1.10]$$

Figura 1.6 Distribución prueba de colas para establecer región de aceptación DFA.



Fuente: (Jose Angel Roldan Casas, 2006).

En la figura 1.6. Se puede observar la prueba de hipótesis para una prueba de estacionariedad con DFA, posteriormente en el Capítulo 3 y la calibración de los modelos se presentará de manera más puntual las hipótesis a establecer.

Una vez que se ha garantizado la estacionariedad o no estacionariedad en un modelo de series de tiempo, surgen diversas teorías económicas que exhiben el comportamiento de los mercados financieros.

1.2.3 Prueba P de Pearson

(Feldman, 1985) Define al coeficiente de correlación de Pearson como un índice que mide el grado de covariación entre variables relacionadas linealmente, si se habla de modelos autorregresivos, se dice que dichas variables estarán representadas por ellas mismas pero rezagadas en el tiempo.

Por consiguiente, el coeficiente de Pearson oscila entre los valores 0 y 1, en donde 1 demostrará que las variables tienen una correlación lineal, expresada de otra forma, la variable en el tiempo no es estacionaria.

La definición anterior se puede definir de la siguiente manera:

$$0 < \varphi_{XY} < 1$$

Donde:

$$\varphi_{XY} = \frac{\sum Z_x Z_y}{N}$$

Esto es, el coeficiente de correlación de Pearson hace referencia a la media de los productos cruzados de las puntuaciones estandarizadas de X y de Y. Esta fórmula reúne algunas propiedades que la hacen preferible a otras. A operar con puntuaciones estandarizadas es un índice libre de escala de medida. Por otro lado, su valor oscila, como ya se ha indicado, en términos absolutos, entre 0 y 1, (Feldman, 1985)).

Cuando sus puntuaciones sean iguales, o se proponga una variable no estacionaria ($Z_x = Z_y$),

La correlación puede presentarse en su forma positiva o negativa, de acuerdo con el desplazamiento del fenómeno. En este caso la fórmula de la correlación se transforma en:

$$\varphi_{xy} = \frac{\sum Z_x Z_y}{N} = \frac{\sum Z_x Z_y}{N} = \frac{Z^2}{N} = 1$$

En otro caso,

$$\varphi_{xy} = \frac{\sum Z_x Z_y}{N} = \frac{\sum Z_x Z_y}{N} = 1$$

Cuando la correlación es nula, para un valor obtenido de X se podrá obtener cualquier valor de Y; es decir, para un valor determinado de Z_x la misma cantidad de valores positivos y negativos de Z_y . De todo ello resulta que la suma de productos cruzados valdrá cero ya que habrá tantos productos positivos como negativos, se obtendrá una variable estacionaria. Así pues:

$$\varphi_{xy} = \frac{\sum Z_x Z_y}{N} = 0 \quad [1.11]$$

Los modelos econométricos estacionarios están generalizados en la teoría de los mercados eficientes, dicha hipótesis plantea cada uno de los supuestos en los modelos lineales y estocásticos para su funcionamiento.

A continuación, se puntualizará la teoría de los mercados eficientes y los supuestos definidos en la metodología para los procesos estacionarios, así como las implicaciones que repercuten al momento de estimar una predicción con esta hipótesis en el sector financiero.

1.2 Teoría de los mercados eficientes

(Anna Batlle Montoro, 2009) Establece que un mercado es eficiente cuando los precios de los títulos son imprevisibles y por ello se comportan como un paseo aleatorio. Además, puntualiza que el valor de los títulos negociados en los mercados financieros refleja toda la información disponible, por lo tanto, se ajustan total y rápidamente a la nueva información.

Esto significa que un mercado eficiente, estará sujeto a la *incertidumbre* del desplazamiento de los títulos, cualquier operante en este mercado tendrá la misma información que los demás, y no existirá información preferencial al momento de su compra o venta.

Por lo tanto, se puede definir al mercado como un panorama de efectividad, asumiendo que los operantes determinan sus inversiones de acuerdo con una prudencia controlada por el riesgo.

Además, los modelos establecidos para esta teoría no contemplan el término *memoria* en su línea temporal. Asume, que el mercado se mueve de una forma aleatoria, sin ninguna persistencia y sin importar las decisiones que tomen los demás inversionistas.

(Shiller, 1967), Define que la hipótesis del mercado eficiente no presenta una correlación estadística en el tiempo en todas las escalas, las variables son desplazadas por un paseo aleatorio, y los inversores no mantiene una relación en sus operaciones. El invertir en un activo no repercute en las inversiones de otro operador.

Entonces, la hipótesis de los mercados eficientes podría estar generalizada en los siguientes supuestos de operación:

- Los mercados bursátiles *no tienen memoria* en sus componentes, esto quiere decir, que el desplazamiento de su varianza con respecto al tiempo no presenta correlación, lo que paso el día de ayer no repercute en el mañana, su desplazamiento parece un paseo aleatorio.
- El rendimiento generado en el valor de los activos es proporcional al nivel de riesgo que enfrente la operación financiera. No importa la cantidad de títulos sino el riesgo asumido.
- En el mercado eficiente bursátil toda la información necesaria está disponible para los inversores. Todos tienen la misma probabilidad de ganar o perder, el rendimiento de una inversión estará sujeto por una aleatoriedad.
- Al contemplar “un ruido blanco en el desplazamiento temporal de la hipótesis de los mercados eficientes, se asume que, en un periodo largo de tiempo, las variables financieras estarán identificadas en una distribución normal. Los modelos estimadores de esta teoría son estacionarios”, (Fama, 1991).
- Los inversionistas son adversos al riesgo, son prudentes y racionales. Se pretende mantener un equilibrio en el mercado para evitar una ruina.

1.3 Fallos en los modelos tradicionales

Se dice que la naturaleza es perfecta, así como los mercados eficientes tienen un comportamiento “volátil controlado”; Para poder comenzar a sintetizar el objetivo de la investigación, se debe puntualizar aquellas circunstancias en las cuales un mercado no presenta las características de efectividad como se pretende en la teoría.

La hipótesis de los mercados eficientes presenta las siguientes implicaciones:

I. Volatilidad.

Se denomina volátil, a aquellos desplazamientos de suma variabilidad que presentan los activos financieros en su comportamiento histórico y futuro.

Es la variabilidad de la rentabilidad de una acción respecto a su media en un periodo de tiempo determinado”, (Puig, 2009).

Los mercados eficientes no pueden controlar dicha variabilidad, por lo tanto, al presentarse este fenómeno se rompen 3 de los supuestos que infiere esta hipótesis.

- a) El rendimiento generado por los activos no determina el nivel de riesgo que enfrenta. Al tener un instrumento en el día 0 con nivel de riesgo medio podría convertirse en alto por la fuerte variabilidad que existe en el mercado, entonces el riesgo que se asume hoy puede ser variante en el tiempo.
- b) Los activos no tienen una correlación entre sí. Pero en la realidad el precio invariante es afectados por circunstancias exógenas al desplazamiento natural; Por lo tanto, podría suponerse que el mercado esta correlacionado entre sí, y de esa forma su variabilidad explosiva en el tiempo también.
- c) Al tener un fuerte impacto de variabilidad en una serie de tiempo; No se puede pretender que todos los activos de manera independiente presenten la misma distribución estadística. Cada evento es particular, y su distribución podría generarse de esta misma manera.

I. Los inversionistas son adversos al riesgo.

“Si se tiene en cuenta que las decisiones de invertir en un instrumento están definidas por satisfacciones personales o ambiciones humanas, siempre existirán operantes que no administren sus recursos con prudencia. De la misma forma, si un inversor es inexperto en el sector bursátil, sus decisiones sin experiencia lo llevarán al *caos financiero*”. (Bachelier, 2011)

Para enfatizar lo anterior, se puede definir que el mercado cuenta con inversionistas amantes al riesgo o algunos que no cuentan con la experiencia necesaria para evitarlo, por lo tanto, existen diversos panoramas de inversión al momento de adquirir un título que en su naturaleza parece no

tener riesgo en sus componentes, de esta forma se garantiza que los inversionistas operan desde diversos puntos y perspectivas.

II. Los mercados pueden presentar memoria en sus valores históricos y futuros.

(Morales Matamoros, Balankin, & Hernandez Simon, 2005) desarrollaron una investigación acerca de las fluctuaciones de los precios del petróleo, en la cual, “ se observa que la volatilidad de dichos precios históricos, tienen una correlación estadística en un largo periodo de tiempo, es decir, estas fluctuaciones cuentan con una *memoria larga* en su desplazamiento histórico”, esta investigación demuestra que el movimiento de los precios está sujeto a una afinidad y similitud en su escalamiento en diversos puntos críticos de la serie temporal, y de esa forma se obtiene un modelo de estimación para sus valores subsecuentes; en otras palabras dicha variable muestra un comportamiento de carácter no estacionario.

A través del supuesto *memoria larga* se demuestra si las variables se pueden adaptar a modelos no estacionarios de característica fraccional de ser así ser representados por medio de la distribución estadística que mejor lo defina. Por lo tanto, cuando el movimiento de una variable a lo largo de una serie de tiempo es determinado por una persistencia o anti-persistencia, los mercados no son eficientes.

III. Los mercados podrían caer en un caos financiero.

(Lorents, 1969), Define a la bolsa como un sistema dinámico donde las decisiones de cada uno de los participantes influyen en las cotizaciones presentes y futuras. Las decisiones individuales, afectan al comportamiento colectivo.

También, el padre de la teoría del caos infiere que dichos sistemas son sensibles a las condiciones de variación inicial, implicando grandes diferencias en el desplazamiento futuro de los activos, dicho en otras palabras, los mercados se mueven a través del efecto mariposa.

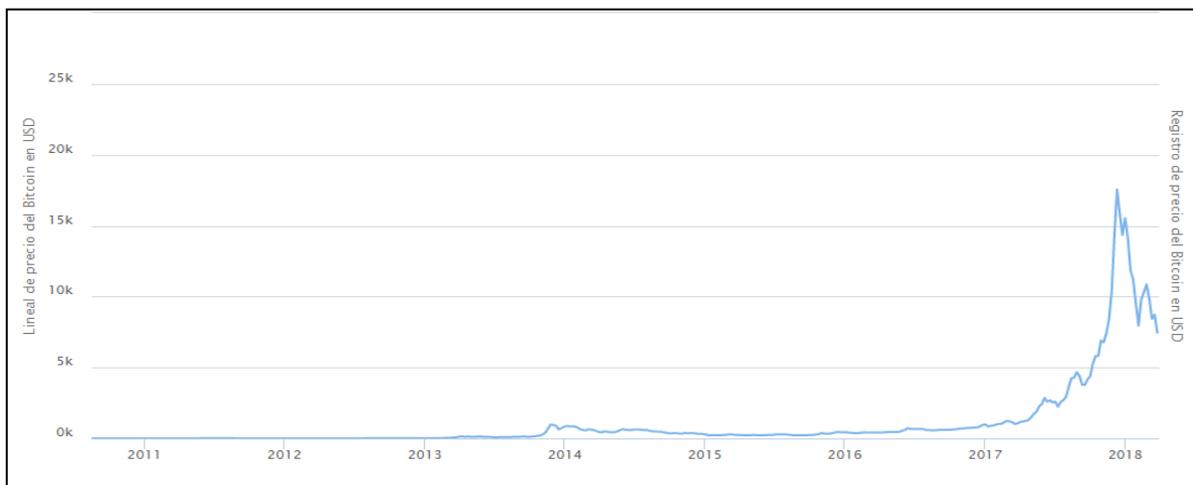
Para poder definir esto de una manera más concreta, se puede sintetizar lo anterior, con el siguiente ejemplo.

En la actualidad el mercado cambiario mundial ha presentado un fenómeno invariante en el crecimiento dinámico del precio de las criptomonedas, dicha tendencia como en el caso del Bitcoin [BC] comenzó a tener un gran auge y popularidad en los inversores.

En el año 2010 el precio registrado más alto por dicho activo fue de 0.39USD, mientras que al final del primer trimestre del 2018 alcanzó un valor de 6920.98USD, (Martínez, 2010).

El crecimiento exponencial en el valor y popularidad de este activo genera diversa controversia entre los inversionistas, se puede asumir que el precio es invariante de acuerdo con una oferta y demanda de dicho bien con respecto al tiempo. Por lo tanto, esto quiere decir que, en el paso del tiempo, los operantes invirtieron de una manera exponencial en dicho bien, y fue así, hasta que la criptomoneda alcanzó el punto crítico donde se encuentra el día de hoy. Expresado de otra forma, el [BC] es un modelo de efecto mariposa y la especulación en la teoría del caos. En el siguiente gráfico se puede observar el valor histórico del precio de la criptomoneda Bitcoin.

Figura 1.4 Crecimiento del BITCOIN en el periodo 2011-2018.



Fuente: Información extraída a través de página oficial de Investing.com Grafico del precio histórico del Bitcoin (2011- marzo 2018).

La figura 1.4. muestra el crecimiento exponencial que ha caracterizado al Bitcoin en los últimos años.

Se debe tener en cuenta que esta variable en particular presenta un grado alto de volatilidad en sus componentes. Por lo tanto, si se analiza desde la perspectiva en donde los mercados se mueven a través de una oferta y demanda, se puede especular que el mercado no sería eficiente, ya que, si el precio del Bitcoin se desploma, los inversionistas serian expuestos a una quiebra, y el mercado se adentraría a un caos financiero.

Entonces, para sintetizar el apartado de la teoría de los mercados eficientes y sus implicaciones, debemos mencionar las siguientes características:

- Los modelos tradicionales de estimación calibran modelos a través de la teoría de los mercados eficientes.
- La hipótesis de los mercados eficientes presenta diversas implicaciones en su funcionamiento para alcanzar su óptimo proceso.
- El ser humano no tiene una racionalidad adversa al riesgo, su comportamiento siempre está enfocado en un desarrollo personal. Sus decisiones repercuten en las inversiones de otro operante, formando una correlación estadística en el mercado.
- Si el valor de los activos muestra una persistencia o anti-persistencia en su desplazamiento histórico, las variables financieras en el sector financiero mexicano son susceptibles a analizar a través de la hipótesis fractal, y así prever un comportamiento caótico financiero.

En este apartado de la investigación se ha planteado que las series de tiempo son una herramienta fundamental para generar modelos econométricos de estimación, los modelos de sucesiones temporales están conformados por diversos componentes que definen el desplazamiento de una variable a lo largo de una trayectoria periódica. Como consecuencia, se generan modelos a través de diversas hipótesis.

La teoría de los modelos tradicionales define que los movimientos de los activos son impredecibles y a su vez presentan una *complejidad* en el sistema, es necesario generar supuestos de memoria corta en donde la información disponible sea la más reciente, se infiere que el mercado se mueve a través de un paseo aleatorio. Diversos autores como (Bachelier, 2011), definen que, si se especula que un mercado es eficiente, se debe mantener diversas implicaciones, y de no ser consideradas correctamente se puede incursionar en un caos financiero.

1.5 Teoría del Caos

A partir del siglo XX con la implementación de la física cuántica, se desarrolló el concepto de *sistemas complejos* [SC], Ludwing Von Bertalanffy define a un sistema complejo como un modelo compuesto por diversas partes interconectadas o entrelazadas para describir un fenómeno, los SC crean vínculos de información adicional la cual, no es visible por el observador, generando eventualidades complejas y susceptibles en los sucesos para imposibilitar su medición de forma perfecta. Por lo tanto, los modelos caóticos son generados a través de sistemas complejos, irregulares y altamente impredecibles, (Saupe, 2003).

La propiedad más importante que revela la característica del caos es la extrema sensibilidad a las condiciones iniciales. Si un cambio infinitesimal se da en las condiciones iniciales de una serie de tiempo caótica, los cambios posteriores en el tiempo t se verán reflejados de una manera simultánea s su crecimiento exponencial a través de la trayectoria. Esto es conocido como “el efecto mariposa”, (Duarte, 2013). Para sintetizar lo anterior, se puede inferir que el caos tiene un principio, un pequeño estímulo que proyecta su desplazamiento bizantino en el tiempo y de ser así, se puede modelar.

Un ejemplo para entender de manera puntual la teoría del caos se puede encontrar en la naturaleza, el 11 de marzo del 2010 un terremoto se presentó en el país de Chile, según el geofísico Richard Gross dicho catástrofe movió el eje de figura de la Tierra alrededor de 8 cm (3 pulgadas), (Ciencia.nasa.gov); Por lo tanto, quizá el día de hoy el sismo no presenta ninguna repercusión en la vida diaria, pero a millones de años dicha eventualidad propiciará que el planeta se desplace a través de una trayectoria diferente a la natural y salga de su órbita, ocasionando su extinción.

Los mercados financieros son caóticos por definición, donde pequeñas variaciones iniciales, pueden producir grandes cambios de movimiento de los precios finales. Por consiguiente, el mercado caótico puede estar representado por las siguientes implicaciones:

- Inmensidad de sistemas complejos en el mercado.

Los inversores operan en el mercado a través de diversas circunstancias, los montos de compra o venta son sistemas altamente aleatorios y complejos, en otras palabras, presentarán un alto nivel de rugosidad en su forma de operación, ya que el sistema en donde se encuentra este proceso se determina por un sistema afectado por circunstancias de orden multivariado.

- Irracionalidad de los operadores

Diversos inversores operan a través de transacciones irracionales buscando únicamente el máximo beneficio, sin importar la estabilidad o eficiencia del mercado.

- Sensibilidad a las condiciones iniciales.

El desplazamiento del activo depende totalmente de todo su histórico, cualquier impulso en el pasado sea positivo o negativo repercutirá en un movimiento de un grado elevado de volatilidad, generando así un comportamiento caótico en los precios del activo, o en el peor de los casos, en todo el mercado.

Como herramienta a la medición o prevención del caos financiero y los sistemas complejos surge la hipótesis de los mercados fractales; Esta metodología está basada en una descomposición de escalamiento en donde a través del supuesto de memoria larga se identifica si existe un fenómeno invariante de este tipo. La metodología fractal calibra modelos no estacionarios, eso quiere decir que toma las variables en su forma original y a través de una descomposición de los elementos básicos de las series de tiempo proyecta su valor en el futuro, midiendo el fenómeno de la volatilidad a lo largo de la sucesión a través del supuesto de condiciones iniciales y previendo el caos de acuerdo con su característica fraccional.

Si las variables en el sector financiero mexicano satisfacen el supuesto de *memoria larga* entonces es susceptible de ser analizada mediante análisis fractal. En el segundo capítulo de la investigación se adentrará a los conceptos básicos de esta hipótesis, infiriendo que en el sector financiero mexicano se puede encontrar el fenómeno de memoria larga generada en una dimensión fractal.

Capítulo 2. Caos en los mercados bursátiles.

2.1 Geometría Fractal

Los modelos matemáticos siempre se han caracterizado por demostrar procesos y fenómenos de carácter científico con el objetivo de simular la realidad con mayor exactitud para entender el comportamiento de eventualidades que se presentan en un desplazamiento físico, económico, financiero, etc. Cuando se habla de *sistemas complejos* estos modelos presentan diversos inconvenientes de transición ya que están formulados por diversos componentes susceptibles e imposibles de observar a través de un reajuste de carácter lineal por su alto grado de rigurosidad en su inconsistencia.

Como medida correctiva a las deficiencias de la geometría euclidiana para la medición de sistemas complejos surge la metodología fractal. (Mandelbrot B. , 1982), Padre de la geometría fractal, define a este concepto como una parte fraccionaria extraída de la realidad, consiste en encontrar una similitud y asimetría en escalas diversas de una figura, y de esta forma establecer un logaritmo formulado principalmente por esas partes fraccionarias y así construir la realidad a través de un escalamiento.

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas. En palabras de (Kadanoff, 1962): “un fractal contiene copias de sí mismo, dentro de sí mismo”. Por consiguiente, la geometría fractal mantiene su postura en tres elementos esenciales. *Similitud, afinidad y dimensión fractal.*

2.1.1 Auto-Similitud

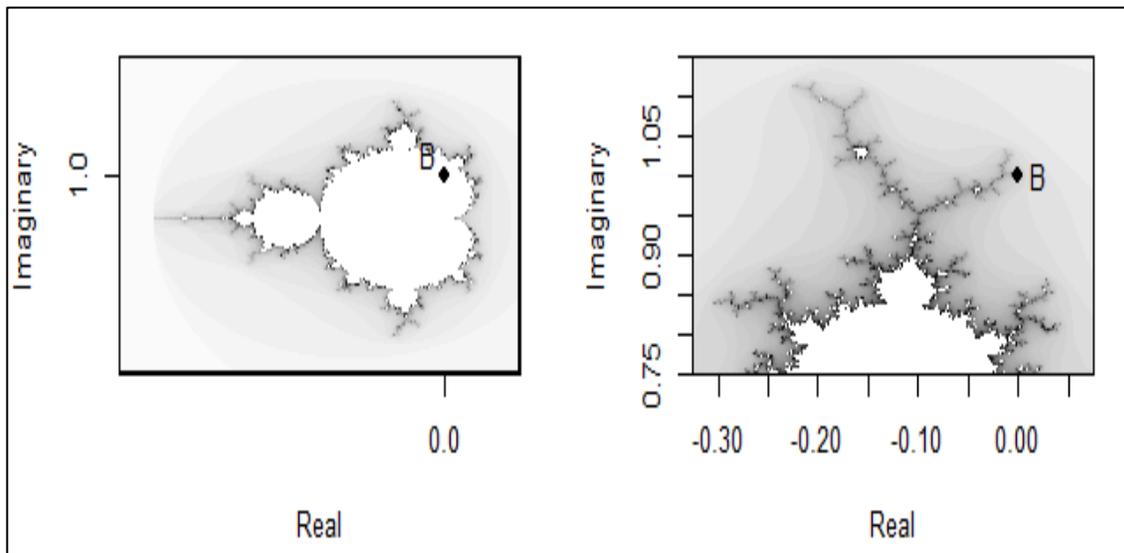
La transformación de similitud o escalamiento consiste en generar una copia similar de un objeto cualquiera en una escala diferente. De este modo, dos objetos son similares si poseen la misma geometría, aunque tengan diferente tamaño. (Anna Batlle Montoro, 2009)

Los fractales autosimilares son estructuras que permanecen invariantes a los cambios de escala, son isotrópicos (tienen las mismas propiedades en todas las direcciones), permanecen invariantes cuando cambia la escala uniformemente en todas las direcciones. Al generar o simular un objeto a través de escalas, se puede apreciar una simetría a la imagen anterior. Un ejemplo de un modelo fractal puede ser definido con la siguiente expresión. Un conjunto compacto X es autosimilar si existe un *conjunto sobreectivo* $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_n\}$

Para el cual:
$$X = \bigcup_{k=1}^n F_k(X) \quad [2.1]$$

Si $X \subset Y$ Entonces X es autosimilar, visto de otra forma.

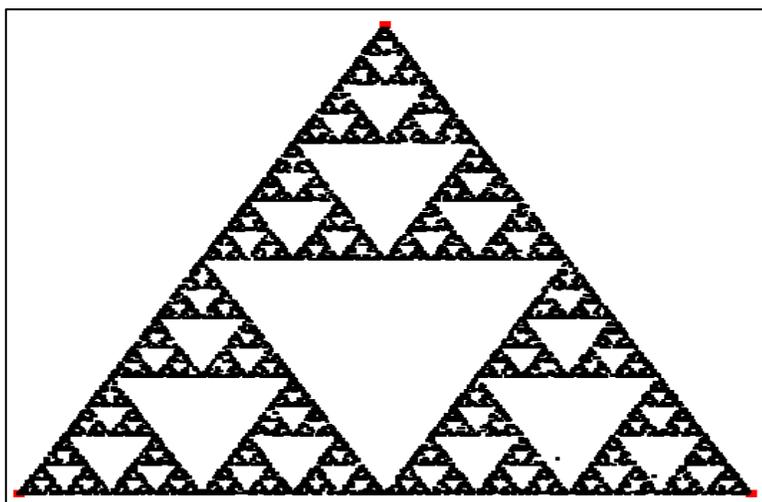
Figura 2.1 Conjunto de Mandelbrot superpuesto con los conjuntos de Julia, figura original, figura con escala.



Fuente: Esta simulación se realizó en el programa estadístico R. studio versión 3.2.3.

En la figura 2.1. Se observa un ejemplo gráfico de un conjunto fractal, a través del componente de Julia, Los conjuntos de Julia, así llamados por el matemático Gastón Julia, son una familia de conjuntos fractales que se obtienen al estudiar el comportamiento de los números complejos al ser iterados por una *función holomorfa*.

Figura 2.2 Modelo de Sierpinski.

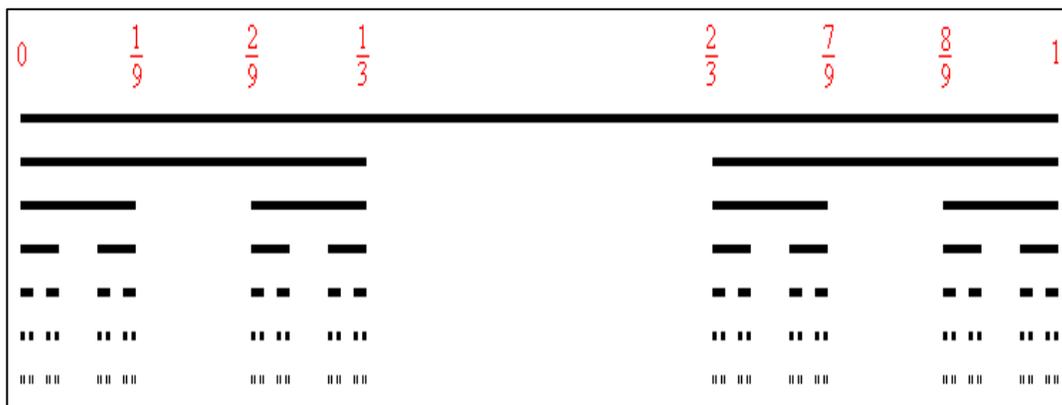


Fuente: Esta simulación se realizó en el programa estadístico R. studio versión 3.2.3.

2.1.2 Auto-Afinidad

Un objeto fractal se dice que es auto-afín cuando permanece invariante bajo la escala de transformación anisotrópica (diferentes escalas en todas las direcciones). A pesar de sus diferencias, en una escala de transformación, las direcciones no son completamente independientes, (Anna Batlle Montoro, 2009).

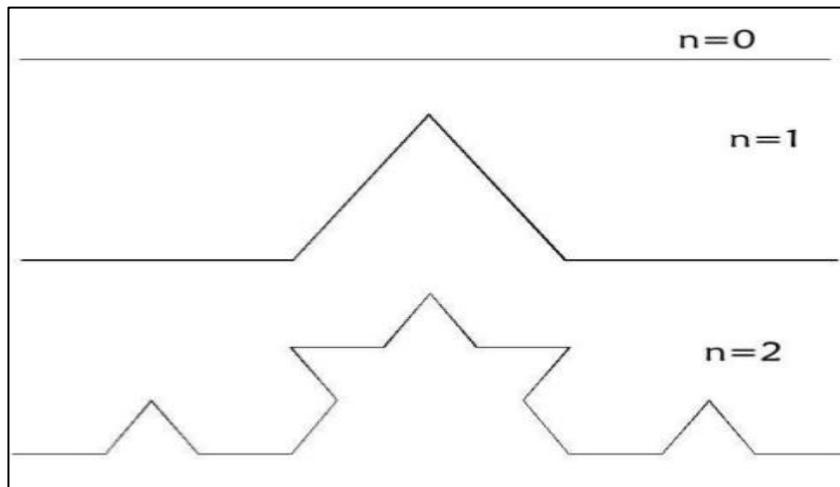
Figura 2.3 Conjunto de Cantor.



Fuente: Esta simulación se realizó en el programa estadístico R. studio versión 3.2.3.

Para comprender la auto-afinidad por medio de un fractal natural se puede ejemplificar con el siguiente suceso, un árbol está formado por múltiples copias, que son las ramas, aproximadamente similares al todo. A su vez las ramas de las ramas contienen copias de sí mismas, las subramas. Para expresar de forma gráfica el ejemplo anterior se puede manifestar al conjunto de Von Koch, el cual construye una afinidad a partir de un conjunto de estímulos o receptores en el movimiento de cambio cinético de un desplazamiento constante o continuo.

Figura 2.4 Conjunto de Von Koch.



Fuente: (K.Falconer, 1985) El copo de nieve de Koch, también llamado estrella de Koch, es una curva cerrada continua pero no diferenciable en ningún punto descrita por el matemático sueco Helge Von Koch en 1904.

2.2 Dimensión Fractal.

Cuando un sistema complejo presenta características y elementos de medición caóticos o fraccionarios como la similitud y la afinidad se deben tener en mente que los desplazamientos de rugosidad no estarán expresados en una dimensión euclidiana. Suponiendo un plano cartesiano se tiene lo siguiente; Un punto se puede expresar en la dimensión 1 (ejes de X o Y, respectivamente.), una línea recta en la dimensión 2, un plano en la extensión 3, pero una representación topológicamente compleja se expresa en una dimensión fractal. (Saupe, 2003), infiere que para calcular la dimensión de un fractal se usan los conceptos de límite, logaritmo y medias de un sistema complejo fraccional.

El concepto de dimensión juega un papel fundamental en la geometría fractal. Pero en la mayoría de los fractales su valor raramente puede ser expresado con un número entero. La fractalidad, se puede definir de diferentes maneras, siendo la más rigurosa e intuitiva se presenta la dimensión de Hausdorff, (Dimensión Fractal). Antes de definir este concepto se debe señalar dos aspectos importantes relativos a la escala de medición y su relación con la expresión del tamaño y con la dimensión topológica para destacar que:

- El valor del tamaño depende del valor de la escala
- Los valores de la dimensión topológica son independientes de la escala.

La dimensión definida por Félix Hausdorff en 1919, y perfeccionada más tarde por Besicovitch está recogida en la definición de fractal que propone Benoit B. Mandelbrot: “*Un fractal es, por definición, un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica*” (K.Falconer, 1985).

2.2.1 Dimensión de Hausdorff-Besicovitch.

Dado $A \in \mathbb{R}^N$ y $\varphi > 0$, se recubre A con una colección $\{U_i\}_i$ de conjuntos de diámetros U_i . Tal colección se denomina -recubrimiento de A Para $t > 0$ la medida de Hausdorff t -dimensional en \mathbb{R}^N se define como extensión natural de la definición de la medida de Lebesgue L^N .

Para un ‘grado de resolución’ $\varphi > 0$ se recubre el conjunto A mediante conjuntos arbitrarios de diámetro no mayor que φ y se evalúa el ‘tamaño’ t -dimensional del recubrimiento. i. e. $\sum_i \|U_i\|^t$ Se escoge la suma ‘más eficaz’, que se denomina $H_\varphi^t(A)$, (Simó, 1995). Por lo tanto la dimensión de Hausdorff-Besicovitch estará generalizada por la siguiente expresión.

$$H_\varphi^t(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in N} \|U_i\|^t : \{U_i\}_i \varphi - A \right\} \quad [2.2]$$

La medida t -dimensional de Hausdorff se define entonces cuando la resolución se hace 0.

$$H^t(A) = \lim_{\varphi \rightarrow 0} H_\varphi^t(A) = \max_{\varphi \rightarrow 0} H^t(A) \quad [2.3]$$

Donde H^t representa el coeficiente de Hurst de la función A , y a través de este indicador se conoce si la dimensión en la que se encuentra esta estructura tiene consistencias fraccionales, dicho en otras palabras, si está ubicada en el marco o espacio fractal y de esta forma adaptar a un sistema complejo que cumpla con estas características para su estimación puntual.

2.3 Coeficiente de Hurst, un indicador de persistencia

“El índice H es llamado parámetro de Hurst en honor del científico británico Harold Edwin Hurst (1880-1978); se trata de una medida de independencia de las series de tiempo y una forma de caracterizar series fractales. Cabe destacar que el movimiento browniano estándar puede obtenerse del movimiento browniano fraccional sí $H = \frac{1}{2}$, ya que en este caso particular se tiene la misma función de covarianza”, (Aguilar).

$$2^H = 2 + 2p \quad \left(-\frac{1}{2} < p < 1 \right) \quad [1.6]$$

- En donde $\Delta y(t)$ estarán correlacionados por p .
 - Los cambios escalantes son invariantes en el tiempo (t).
 - Además, σ constante en diversas escalas del tiempo (t)
-
- Si $H = \frac{1}{2}$ entonces la variable tendrá un comportamiento de ruido blanco, expresado de otra forma, la serie de tiempo se adapta mejor a un modelo estacionario ya que la mayor parte de su estructura es expresada a través de un movimiento aleatorio, por consecuencia está fundamentado por los supuestos de la teoría de los mercados eficientes y los modelos tradicionales de predicción.
 - Si $H < \frac{1}{2}$ la variable presenta un comportamiento de ruido rosa, el cual está especificado por el desplazamiento de anti-persistencia o modelos autoafines, es invariante bajo la escala de transformación anisotrópica, son modelos de memoria larga con características anti-persistentes añadidos a un estudio en la dimensión fractal.

- Si $H > \frac{1}{2}$ la variable presenta un comportamiento de ruido negro, es representado por una persistencia o auto-similitud, genera una copia similar de un objeto cualquiera en una escala diferente, son modelos fractales de memoria larga con trayectorias persistentes. En el capítulo cuarto de la investigación se retomará este concepto y se expondrá las diversas metodologías de estimación para la captura de este indicador fractal y comprobar la hipótesis de que el sector financiero mexicano puede exhibir a su vez un comportamiento basado en la teoría del mercado fractal.

2.3.1 Fractales en las series de tiempo

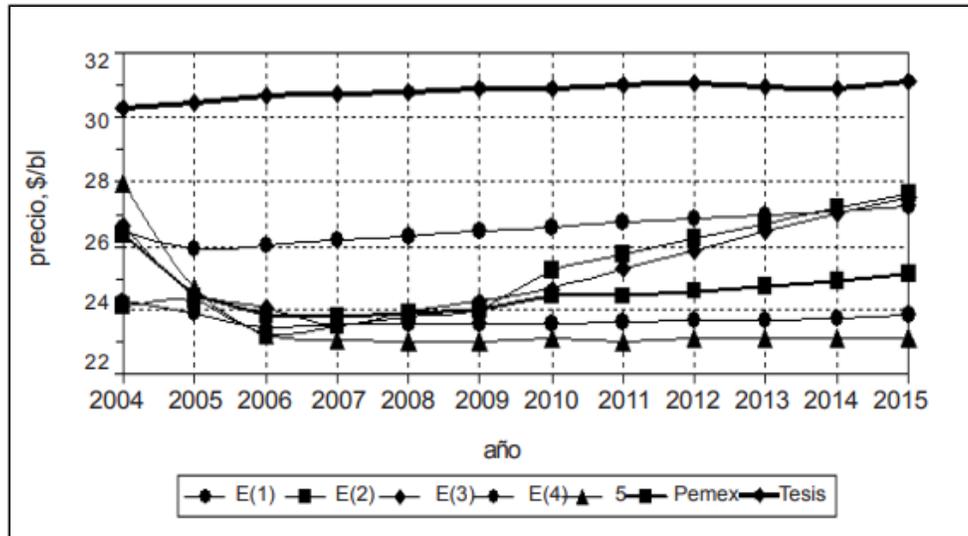
El estudio de variables en sucesiones temporales de característica fraccional se ha convertido en una herramienta confiable para el análisis de medidas en modelos dinámicos y fluctuantes, la recreación de modelos a partir de señales experimentales y observaciones de sistemas complejos parte de los supuestos de afinidad y similitud para su funcionamiento.

Cuando se exhibe la estimación de una serie de tiempo se debe considerar los cuatro conceptos fundamentales de estas series, tendencia, estacionalidad, ciclo, estacionariedad. Pero a diferencia de los modelos tradicionales o lineales, los modelos fractales de series de tiempo son no estacionarios ya que el fenómeno que se desea captar parte del supuesto de sistemas complejos y caóticos.

(Morales Matamoros, Balankin, & Hernandez Simon, 2005) demostraron que las fluctuaciones de los precios del petróleo tienen una correlación estadística en un largo periodo de tiempo, es decir, estas fluctuaciones cuentan con una *memoria larga* en su desplazamiento histórico”, esta investigación demuestra que el movimiento de los precios está sujeto a una afinidad y similitud en su escalamiento en diversos puntos críticos de la serie temporal, y de esa forma se obtiene un modelo de estimación para sus valores subsecuentes; en otras palabras dicha variable muestra un comportamiento de complejidad susceptible a ser analizada a través de una dimensión fractal.

Para enfatizar lo anterior, la siguiente gráfica muestra el comportamiento de escalamiento en una dimensión fractal para los precios de petróleo (WTI) definido en las escalas $\tau = 10$, $\tau = 25$, $\tau = 15$, $\tau = 198$ días, donde σ es la desviación estándar de los rendimientos logarítmicos.

Figura 2.5 Escalamiento dinámico de los precios del petróleo con H=0.36.



Fuente: (Morales Matamoros, Balankin, & Hernandez Simon, 2005), definieron que los rendimientos logarítmicos de la serie de los precios diarios del West Texas presentan escalamiento dinámico con un índice de Hurst de 0.36, un exponente de crecimiento 0.5 y un exponente dinámico 1.39.

2.4 Supuesto de memoria larga

Los modelos de memoria larga son sistemas complejos definidos por medio de términos que presentan persistencia en las observaciones, están auto-correlacionadas entre sí y de esta forma determinan un desplazamiento cinético y dinámico en la memoria de la serie temporal, (Rossi, 2012). El coeficiente de Hurst además de determinar si una variable es fraccional en la dimensión de Hausdorff, puede medir la persistencia o anti-persistencia de un desplazamiento y así de esta forma, analizar si un sistema presenta memoria en sus componentes. Por lo tanto, un modelo de memoria larga se puede generalizar con la siguiente expresión.

Donde:

$$\varphi(k) \approx C_{\varphi} k^{-\alpha}$$

Se tiene

$$\|k\| \rightarrow \Phi \text{ y } 0 < C_\varphi < \phi$$

Si $\alpha = 1$ implica que

$$\sum_{k=-\phi}^{\phi} \|\rho(k)\| = \phi$$

Como consecuencia las correlaciones de un modelo se reducen a cero tan lentamente que no son sumables, la interpretación intuitiva demostraría que el proceso está basado en un movimiento de memoria larga. Un proceso aleatorio con correlaciones que se descomponen lentamente es denominado como proceso de memoria larga o dependencia a largo tiempo. Esto es esencialmente equivalente a la densidad espectral que tiene un polo en cero, la densidad espectral es definida por:

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \sum_{k=-\phi}^{\phi} \varphi(k) e^{i\omega k} \quad [2.4]$$

Implicando que

$$f(\omega) \approx Cf \|k\|^{\alpha-1} \quad [2.5]$$

Como $\omega \rightarrow 0$ donde $Cf > 0$ es una constante positiva. Entonces para $\alpha - 1$ que tiende a infinito (ϕ) para $\omega = 0$.

Si las variables temporales satisfacen el supuesto de memoria larga entonces son susceptibles de ser analizadas mediante análisis fractal; que en conjunto con la descomposición multiespectral podemos analizar tendencias sobre la variable.

A través del supuesto memoria larga se demuestra si los modelos de series de tiempo se adaptan a las dimensiones fractales como Hausdorff-Besicovitch, y de ser así representar una distribución de colas pesadas para altos niveles de causalidad y ocurrencia según la geometría fractal y el análisis wavelet para su proyección. Por consiguiente, es necesario conocer la distribución probabilística en la que incurre un modelo basado en esta técnica la cual es conocida y definida en el siguiente apartado como *ley de potencias*.

2.4.2 Distribuciones de colas pesadas y Ley de potencias

“Partiendo de la función básica $Y = f(x)$, la función de una variable dependiente cuya variable independiente X tiene un exponente escalar, tal que $Y = aX^H$, se dice que esta función cumple la ley de potencia. Esto indica que el valor de Y se determina en diferentes escalas dependiendo del valor escalar H”, (Medina, 2005).

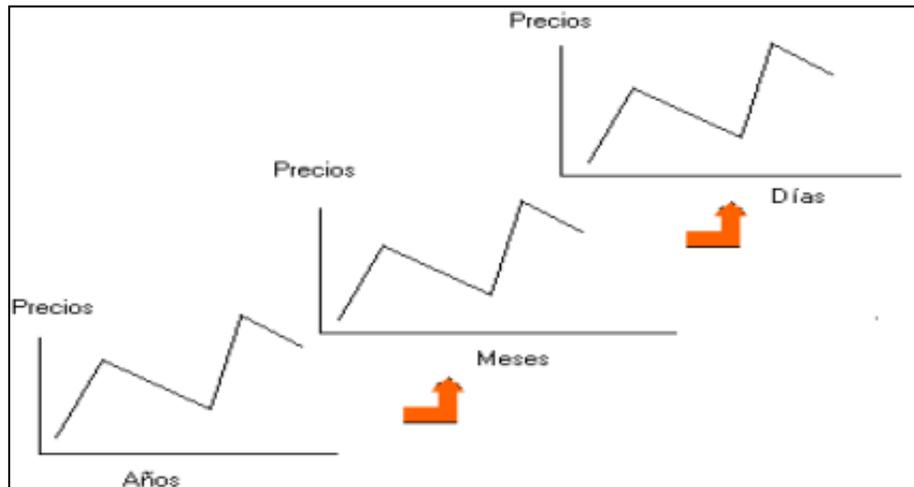
La ley de potencia es un método que capta el fenómeno de la auto-semejanza de manera análoga para visualizar observaciones independientes de escala y a su vez interrelacionarlas entre sí y de esa manera producir estructuras de un horizonte superior.

Pocas distribuciones siguen una ley de potencias sobre el rango entero, normalmente es a partir de un valor fraccional en donde se comienza a observar la ley de potencia. Por lo tanto, es común definir las como distribuciones de colas pesadas. El siguiente gráfico representa el escalamiento y semejanza en un espacio temporal de los mercados bursátiles propuesto por una ley de potencias.

Tal que:
$$Y = aX^H \quad [2.6]$$

Se observa lo siguiente:

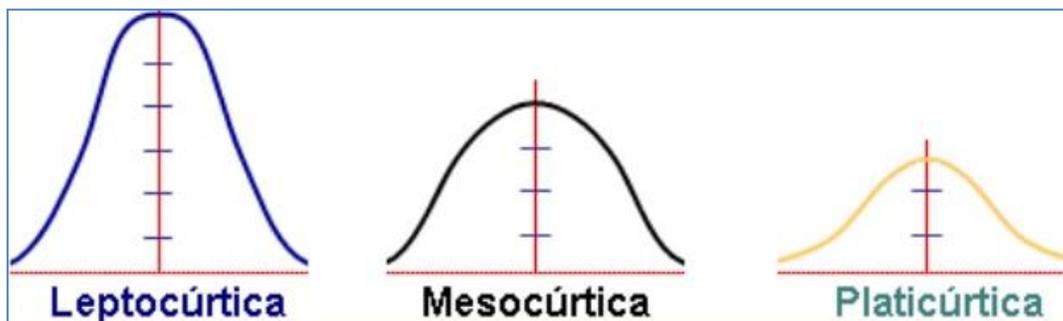
Figura 2.6 Gráfico Fractal. Escala temporal en los mercados financieros.



Fuente: (Kadanoff, 1962).

Una distribución estadística con valor alto de curtosis se relaciona con una de colas pesadas, esto significa que la probabilidad de ocurrencia está sujeta a un nivel alto persistencia en la serie temporal, “en finanzas el estudio de distribuciones con alta probabilidad en las colas comparada con una distribución normal supone que el capital de una compañía puede verse gravemente afectado si la distribución de pérdidas de un activo financiero es bien modelada por una distribución de colas pesadas puesto que existe una probabilidad, muy baja, de que un evento extremo ocurra pero cuando este evento sucede causa grandes pérdidas”, (Valencia, 2010). Una distribución de colas pesadas está fundamentada por una forma leptocúrtica a diferencia de una normal.

Figura 2.6 Formas de Distribución con respecto colas de probabilidad.



Fuente: (htt2) Muestra los diferentes escenarios para las distribuciones mesocúrtica, leptocúrtica, platicúrtica según su curtosis.

$(g^2 = 0) \rightarrow$ *distribución Mesocúrtica: (± 0.5 aprox)*

$(g^2 > 0) \rightarrow$ *distribución Leptocúrtica*

$(g^2 < 0) \rightarrow$ *distribución Platicúrtica*

Para sintetizar el apartado anterior, se puede definir que los fractales como su nombre lo indica, son partes fraccionales de un todo que explican el comportamiento rugoso de una eventualidad o inconsistencia a través de escalamientos y persistencias; Surgen como solución a los sistemas complejos que imposibilitan la proyección o estimación de valores subsecuentes a través del tiempo y los generalizan en una dimensión no lineal, por lo mismo, infieren que cuando se analizan series de tiempo financieras existe un fenómeno denominado memoria larga el cual la teoría puntualiza que de no ser identificado correctamente se puede incurrir en un caos financiero; A su vez modela el fenómeno de memoria larga por medio de la ley de potencias y la enfoca en una distribución de colas pesadas por su alta sensibilidad a estímulos iniciales en el tiempo.

En la siguiente sección se exhibe la teoría de los mercados fractales y los supuestos con los que garantiza un funcionamiento adecuado para contraer las implicaciones o fallos surgidos por la hipótesis de los mercados eficientes.

2.5 Fractales en los mercados financieros

“Los mercados financieros son sistemas complejos que se desarrollan entre el orden y el caos, donde pequeñas variaciones iniciales producen grandes cambios en los movimientos de los precios finales. Entonces la pregunta que interesa conocer es si este mercado tiene algún atractor, es decir, si existen algunas pautas o fórmulas que nos permitan determinar el estado final al que son atraídas las cotizaciones de estos sistemas complejos. La búsqueda de un atractor nos permite conocer, con antelación, el estado final de las cotizaciones.”, (Medina, 2005).

(Anna Batlle Montoro, 2009), define a un atractor como un concepto fundamental de la teoría del caos que se utiliza para representar la evolución en un sistema dinámico en un espacio temporal, además describe que un atractor puede ser representado por diversas estructuras geométricas según su rigurosidad, por ejemplo, cuando se habla de un sistema estable dicho

espacio esta representados por curvas o sistemas lineales, pero cuando se refiere a un sistema complejo estará ocasionado por un atractor extraño o denominado de otra forma, un atractor fractal. Diversos autores puntualizan que un atractor puede generalizarse de acuerdo a su naturaleza de la siguiente manera:

a) Atractor puntual

Es un atractor que presenta a la linealidad como su característica fundamental, en el se puede apreciar el impulso respectivo de dos fuerzas diferentes que traslapan a un activo a través del tiempo. Un ejemplo contundente se muestra en la ley de oferta y demanda.

b) Atractor cíclico.

Un atractor cíclico representa una parte fundamental de los desplazamientos de las series de tiempo, consiste en mostrar una repetición periódica en diversos espacios temporales. Un ejemplo de estos atractores son las ondas de Elliot¹.

c) Atractor extraño.

Un atractor extraño tiene naturaleza fractal, es decir su estructura está producida por sucesivos escalamientos del espacio sobre sí mismo. Tiene como característica que los puntos nunca se repiten y las orbitas nunca se interceptan. Un atractor extraño está basado en los siguientes supuestos, (Anna Batlle Montoro, 2009).

- Son altamente sensibles a las condiciones iniciales. Un pequeño cambio en el punto de inicio puede causar un resultado enormemente diferente, (teoría del caos).
- Parecen desordenados y fortuitos, pero no lo son porque existe implícito un cierto patrón y sentido del orden (supuesto de memoria larga).
- Son deterministas en tanto que existe alguna ecuación que gobierna su conducta (dimensión de Hausdorff y coeficiente de Hurst).

¹Ondas de Elliot. Teoría desarrollada por Ralph Nelson Elliot en los años 30, es una teoría dentro del análisis técnico que estudia los patrones que forman los precios en el gráfico. Analiza los distintos movimientos u "ondas" en cualquier plazo de tiempo, tanto las ondas alcistas como las bajistas, (Economipedia, s.f.).

2.5.1 Teoría del mercado fractal

La teoría de los mercados fractales como hipótesis a modelos no estacionarios de memoria larga, ha creado discrepancia entre el análisis de la conducta del mercado, “propone crear horizontes escalados en diferentes espacios temporales, en donde cada operación repercute de manera directa al valor del activo, llevando a un panorama en el cual la persistencia es considerada como un factor muy importante para mantener la estabilidad, y de no ser así, el mercado podría tornarse a un caos financiero”. (Anna Batlle Joher, 2008). Esta hipótesis tiene los siguientes supuestos.

- Se encuentra una estabilidad cuando en el mercado se opera desde diversos horizontes.
- Los activos muestran una conducta de persistencia al ser estimulados por inversores en un periodo de largo plazo.
- Al no contar con una estabilidad en el mercado se pierde liquidez en el volumen de operación, y eso puede incurrir en un caos financiero.
- Se tiene un grado de sensibilidad mayor a estímulos de condiciones iniciales, al contar con distribuciones de colas pesadas, esto crea un espacio de temporalidad en la memoria de los componentes de los activos.
- Los activos son desplazados a través de conductas de escalamiento y similitud.
- Los inversores al operar desde diversos horizontes pueden presentar conductas adversas, amantes o prudentes al riesgo.
- Si se mantiene una postura de memoria larga se puede suavizar el fenómeno conocido como volatilidad, ya que se intenta modelar a través de supuestos que prevén la teoría del caos y la especulación simultáneamente.
- Existen diversos atractores financieros que nos indican la naturaleza del desplazamiento del activo en el espacio temporal.
- Los modelos basados en la hipótesis del mercado fractal son series de tiempo en niveles o no estacionarias, ya que lo que se intenta identificar es la naturaleza de las condiciones iniciales y los puntos de quiebre en dicha serie.

Por consiguiente, en el capítulo posterior se plantea el desarrollo del modelo ARMA+GARCH para observar los supuestos establecidos en la teoría de los mercados eficientes y simultáneamente las fallas que pueden incurrir estos algoritmos y de ser así dar pauta a la hipótesis de que las variables en el sector financiero mexicano pueden estar distribuidas en una dimensión no lineal y compleja, en palabras de Benoit Mandelbrot estar representadas por una dimensión fractal.

Capítulo 3. Metodología Box-Jenkins.

A partir de 1970 con la aportación de *George E. P. Box*² y *Gwilym Jenkins*³, se creó el instrumento de identificación de un modelo en donde las variables captadas tuvieran la capacidad de ser estimadas en valores futuros a través de una serie temporal de datos en el pasado ; en honor a estos grandes estadísticos fue llamada metodología Box-Jenkins [B-J]. Esta herramienta ha sido utilizada en la actualidad en diversas áreas en donde se tiene la incertidumbre del mañana.; Pretende una *campana Gaussiana* en donde los errores de una variable a lo largo de un periodo se distribuyen de manera normal ;(Teorema del límite central⁴.) La técnica conocida como metodología Box-Jenkins consiste en generar modelos autorregresivos de una sola variable para captar su comportamiento en el futuro.

Los modelos de George y Gwilym están caracterizados por la *estacionariedad*, contemplan un *ruido blanco* en donde las frecuencias de los valores no guardan una correlación estadística, garantizando así la *teoría de los mercados eficientes* en donde se pretende crear modelos a través de la actualización de los datos más recientes y augurando su movimiento a través de ellos, por lo tanto, la metodología [B-J] crea modelos de memoria corta, en donde el reajuste de valores es necesario para su funcionamiento. Por lo tanto, si estos modelos mantienen dicha postura, su percepción de valores futuros con series sumamente volátiles como el tipo de cambio sería la inadecuada para el uso del inversionista en periodos grandes de tiempo.

²George Edward Pelham Box (18/10/1919 – 28/03/2013). Fue un estadístico británico que trabajó en las áreas de control de calidad, análisis de series temporales, diseño de experimentos, y la inferencia bayesiana, autor y colaborador en la creación de la metodología Box-Jenkins.

³Gwilym Meirion Jenkins (12/08/1932 – 10/07/1982). Fue un ingeniero británico en estadística y sistemas; notable por su trabajo pionero con George Box en modelos de media móvil autorregresivos en el análisis de series de tiempo.

Cuando se analiza el comportamiento de las divisas o activos con alta variabilidad en su precio de cierre siempre existe un fenómeno que está presente en dicho precio de mercado el cual es denominado *volatilidad*, pretende una conducta variable del activo, desplazándose de un extremo a otro sin movimiento uniforme de cambio; La metodología Box-Jenkins al ser una herramienta de carácter lineal no capta dicha variación en su totalidad, asume que los errores y variaciones se distribuyen de una forma normal, forzando así, que los datos se ajusten a una línea recta impidiendo la medición de dicho suceso.

Como medida correctiva a estos inconvenientes, Robert F. Engel ⁵propone un análisis en las series temporales a través de una construcción de la metodología BJ y un modelo que exhibe la volatilidad, denominado modelos ARCH.

Más tarde, el proceso fue generalizado y complementado, en el cual “se pretende que el comportamiento de la volatilidad de las variables sea fluctuante, esto exhibe que la varianza de dichos errores en el modelo tendría una relación con las del pasado”. Y de esta forma dicho fenómeno es captado. (Damodar N. Gujarati, quinta edición 2010). En honor a este procedimiento de generalización se le nombro modelo GARCH, propuesto por Bollerslev⁶.

En este proyecto de tesis analizaremos la metodología Box-Jenkins siendo complementada con un modelo GARCH para la captación de la volatilidad si esta estuviera presente, ya que a pesar de su potencialidad, estos modelos híbridos; ARIMA+GARCH; están basados en los supuestos de linealidad y normalidad simultáneamente, por lo tanto no contemplan la hipótesis de los mercados fractales basada en la memoria larga de los mercados. Para la implementación de estos modelos a continuación se define los fundamentos básicos de desarrollo y posteriormente la demostración práctica de esta metodología, así como las deficiencias en la que puede incurrir su estimación a no contemplar los fenómenos establecidos en la teoría del caos.

⁵Robert F. Engle (10 de noviembre de 1942, Nueva York) recibió el Premio Nobel de Economía el año 2003, compartido con Clive W. J. Granger, "por sus métodos de análisis de series temporales económicas con volatilidad variable en el tiempo ARCH.

⁶**Tim Peter Bollerslev** (nacido el 11 de mayo de 1958) es un economista danés, Bollerslev es conocido por sus ideas para medir y pronosticar la volatilidad del mercado financiero y por el modelo GARCH (heterocedasticidad condicional autorregresiva generalizada).

3.1.1 Modelos Autorregresivos (AR)

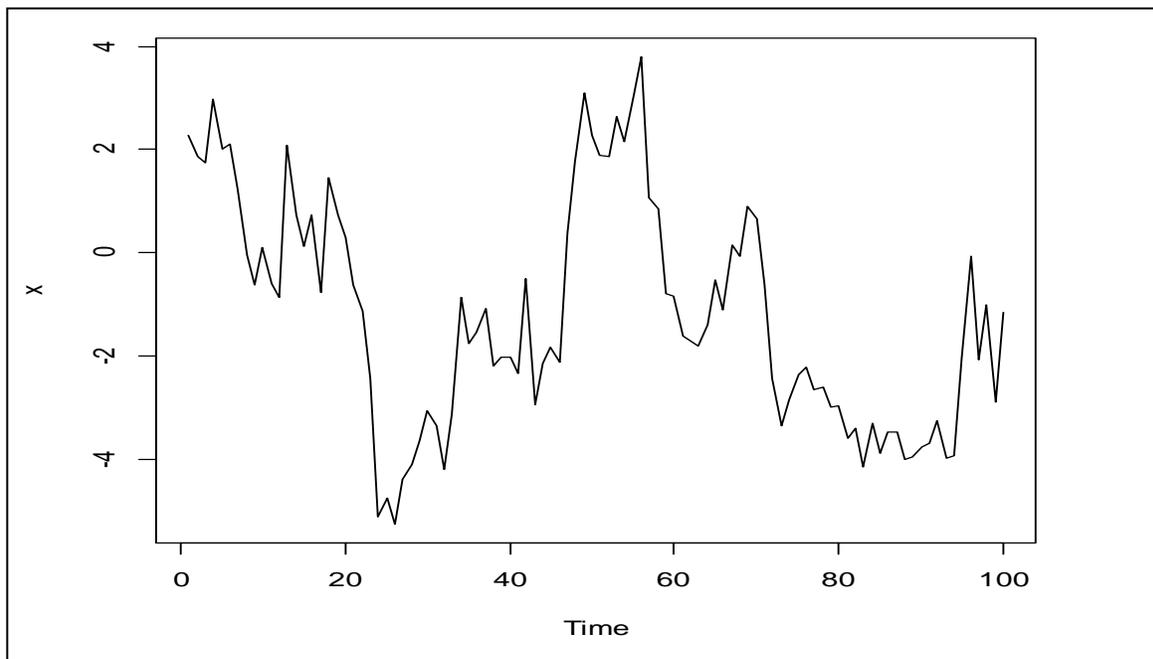
Sea Y_t el logaritmo de la variable en el sector financiero mexicano en el periodo t . Si se modela como:

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + u_t \quad [3.1]$$

Donde δ es la media de Y , además se tiene que u_t es un término de error aleatorio no correlacionado con media cero y varianza constante σ^2 (es decir, *ruido blanco*), se dice que Y_t sigue un proceso estocástico autorregresivo de primer orden, o AR (1).

Este modelo dice que el valor de pronóstico de Y en el periodo t es simplemente alguna proporción ($= \alpha_1$) de su valor en el periodo $(t - 1)$ más un “choque” o perturbación aleatoria en el tiempo t ; de nuevo, los valores de Y están expresados alrededor del valor de su media, (Damodar N. Gujarati, quinta edición 2010). Expresado en otras palabras, la significancia de la variable Y_t rezagada $t - 1$ periodos repercute en el futuro mismo de la variable Y_t en el tiempo $t + 1$. Un modelo AR (1) se puede representar a través de la siguiente simulación.

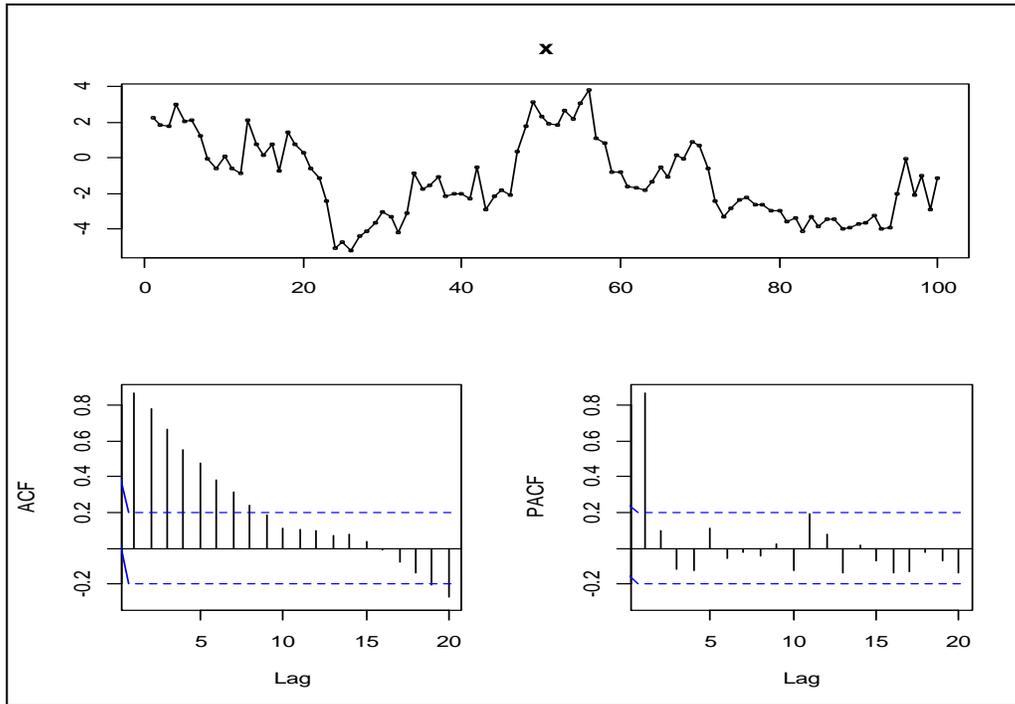
Figura 3.1 Simulación proceso AR (1), generador de datos.



Fuente: (Elaboración propia). A través del programa estadístico R.studio versión 3.2.3.

La figura 3.1 Muestra el desplazamiento en el tiempo de una simulación AR (1). Se puede definir un proceso temporal de alguna variable, por lo tanto, se especula que es un generador de datos no estacionario, para conocer el orden autorregresivo y la estacionariedad de dicha serie se tiene lo siguiente:

Figura 3.2 Identificación visual de un modelo AR (1).



Fuente: (Elaboración propia). A través del programa estadístico R.studio versión 3.2.3.

La figura 3.2. Muestra la identificación visual de un proceso AR (1) a través de las pruebas de correlogramas parciales. Por consiguiente, si se considera el siguiente modelo:

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + \alpha_3(Y_{t-2} - \delta) + u_t$$

Se dice que Y_t sigue un proceso autorregresivo de segundo orden o AR (2). El valor de Y en el tiempo t depende de sus valores en los dos periodos anteriores, los valores de Y expresados alrededor del valor de su media δ .

Entonces, se puede generalizar lo siguiente:

$$(Y_t - \delta) = \alpha_1(Y_{t-1} - \delta) + \alpha_3(Y_{t-2} - \delta) + \dots + \alpha_p(Y_{t-p} - \delta) + u_t \quad [3.2]$$

En donde Y_t es un proceso autorregresivo de orden AR (p)

3.1.2 Modelos de medias móviles (MA)

El proceso AR recién expuesto no es el único mecanismo que pudo generar a Y . Además de los modelos autorregresivos un modelo de series de tiempo puede estar expresado por los modelos de medias móviles (MA). Suponga que se plantea un modelo de Y de la siguiente manera:

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}$$

En donde μ es una constante y u , al igual que antes, es el término de error estocástico de ruido blanco. Aquí, Y en el periodo t es igual a una constante más un promedio móvil de los términos de error presente y pasado. Así, en este caso decimos que, Y sigue un proceso de promedios móviles de primer orden, o MA (1).

Por lo tanto, un proceso MA (2). De manera más puntual puede denotarse de la siguiente manera:

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2}$$

Y como consecuencia un proceso MA (3)

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \beta_3 u_{t-3}$$

Entonces, se puede definir que un proceso MA (q) es un proceso de medias móviles que realiza una combinación lineal acerca de los errores de un ruido blanco para satisfacer un método de pronóstico. Se generaliza a través de la siguiente expresión, (Damodar N. Gujarati, quinta edición 2010).

En donde MA (q):

$$Y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \beta_2 u_{t-2} + \beta_3 u_{t-3} + \dots + \beta_q u_{t-q} \quad [3.3]$$

3.1.3 Modelos autorregresivos y de medias móviles (ARMA)

Los modelos (ARMA) como su nombre lo indica, son procesos estacionarios que surgen a partir de la teoría de los mercados eficientes, los cuales están basados en la combinación de los procesos autorregresivos AR (p) y los procesos de medias móviles MA (q). En pocas palabras, la media y la varianza de una serie de tiempo estacionaria son constantes y su covarianza es invariante en el tiempo, dando pauta a los modelos ARMA de orden (p, q), según sea el caso.

Para un modelo ARMA (1,1) se tiene lo siguiente:

$$Y_t = \theta + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1}$$

Como consecuencia, un modelo ARMA (p, q) se puede generalizar con la siguiente expresión.

$$Y_t = \theta + \alpha_1 Y_{t-1} + \beta_0 u_t + \beta_1 u_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \beta_q u_{t-q} \quad \text{Ec. (3.4)}$$

Para poder estimar un modelo óptimo a través de modelos ARMA se debe tomar en cuenta diversos criterios de información que contemplen cada uno de los hechos estilizados expuestos en las propiedades de las series de tiempo, y a su vez cumplan con cada uno de los supuestos implementados en los modelos lineales de estimación. En el siguiente apartado se presentan algunos de los criterios para identificar y calibrar el modelo con mayor potencialidad a la hora de realizar un pronóstico.

3.2 Criterios de identificación para modelos óptimos

Cuando se plantea la identificación de un modelo autorregresivo y de medias móviles (ARMA) a partir de metodologías como Box-Jenkins y los modelos GARCH para predecir el comportamiento de una variable en un espacio temporal se tiene que recurrir a la técnica de elección que exhiba al modelo óptimo esperado.

Los criterios de información pueden estar formulados a través de supuestos estadísticos, ya que los fenómenos a analizar son tratados mediante secuencias de test de hipótesis. Esta selección se puede realizar mediante el uso de los criterios de información de Akaike, Schwarz y la prueba del cociente de verosimilitudes.

3.2.1 Criterio de Akaike (AIC)

El criterio de información de Akaike es una medida de la bondad de ajuste de un modelo estadístico. Se puede denominar la coexistencia entre el sesgo y varianza en la construcción del modelo, o hablando de manera general acerca de la exactitud y complejidad del modelo.

“El AIC no es una prueba del modelo en el sentido de prueba de hipótesis. Más bien, proporciona un medio para la comparación entre los modelos de una herramienta para la selección del modelo. Dado un conjunto de datos, varios modelos candidatos pueden ser clasificados de acuerdo con su AIC, con el modelo que tiene el mínimo AIC es la mejor. A partir de los valores de la AIC también se puede inferir que, por ejemplo, los dos primeros modelos están más o menos empatados y el resto son mucho peores, (Pollock, Nov 17, 1999). Este criterio se puede generalizar de la siguiente manera:

$$AIC = 2k - 2(\ln(L)) \quad [3.5]$$

- En donde k es el número de parámetros del modelo.
- Y se tiene que $\ln(L)$ es la *función de log-verosimilitud* para el modelo estadístico.

3.2.2 Criterio de Schwartz (SIC)

Criterio de Información Bayesiano (BIC) o criterio Schwartz (SIC) es una medida de bondad de ajuste de un modelo estadístico, y es a menudo utilizado como un criterio para la selección de modelos entre un conjunto finito de modelos. Se basa en la función de probabilidad logarítmica (LLF) y está estrechamente relacionado con el criterio de información de Akaike, (Pollock, Nov 17, 1999).

Al igual que en la AIC, BIC introduce un término de penalización para el número de parámetros en el modelo, pero la pena es mayor que uno en la AIC. Este criterio se puede generalizar de la siguiente manera:

$$BIC = k \times \ln n - 2(\ln(L)) \quad Ec. (3.6)$$

- En donde k es el número de parámetros del modelo.
- Se tiene que $\ln(L)$ es la función de log-verosimilitud para el modelo estadístico.

3.2.3 Criterio de Máxima-Verosimilitud

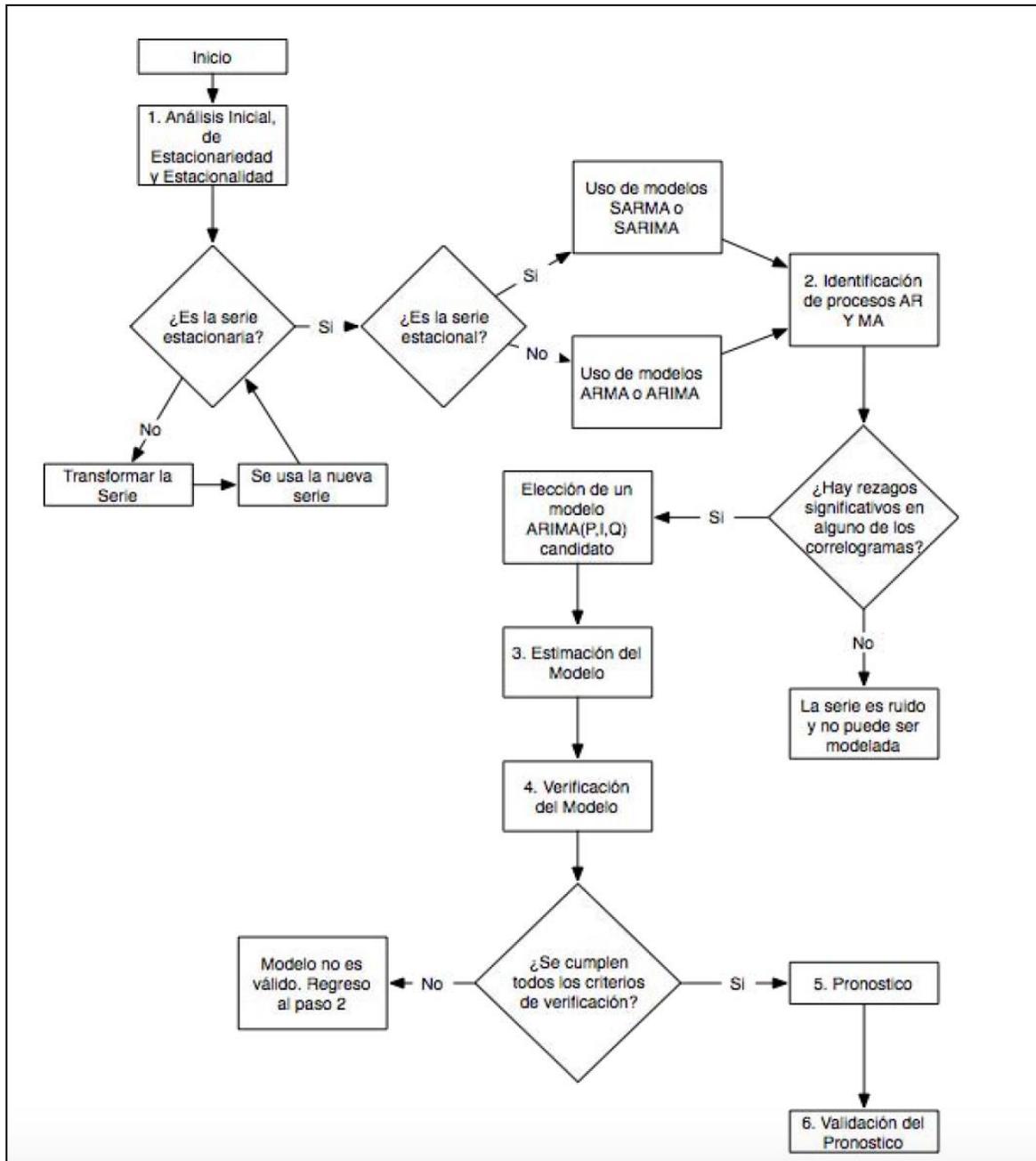
Una vez que se ha realizado la especificación del modelo tentativo y se han elegido los valores del orden autorregresivo p y el orden de las medias móviles q ; se debe obtener la función de verosimilitud condicional asociada a los parámetros $(\delta_0, \vartheta, \theta, \sigma)$ en donde se identifica aquellos residuales generados por el modelo que especifica las características de los residuales y augurando el modelo óptimo, (Videgaray, 2011). El criterio consiste en generar las siguientes propiedades.

- Consistencia
- Normalidad
- Eficiencia

La función estadística del proceso máxima verosimilitud puede generalizarse a través de la siguiente expresión:

$$L(\delta_0, \vartheta, \theta, \sigma) = \frac{-(N - d - Ds) \ln(2\pi\sigma^2) S(\delta_0, \vartheta, \theta)}{2} \frac{1}{2\sigma^2} \quad [3.7]$$

Figura 3.3 Diagrama de la Metodología Box-Jenkins



Fuente: (Duarte, 2013).

En la figura 3.4. Se pueden sintetizar por medio de este diagrama el cual muestra los pasos que se debe seguir en la investigación para identificar el modelo óptimo para la variable de investigación, posteriormente se analiza si existe el fenómeno de volatilidad en el modelo y de ser así identificarlo con un modelo GARCH (p, q) expuesto en el apartado siguiente.

3.3 Modelos GARCH

Es un modelo estadístico implementado por Bollerslev en 1986 generalizado a través de un modelo (ARCH) utilizado para prever la volatilidad donde la variable subyacente puede exhibir una reversión de la media. GARCH es el acrónimo inglés de heteroscedasticidad condicional autorregresiva generalizada. El proceso consiste en generar modelos autorregresivos a partir de las varianzas y medias de los errores estocásticos de un modelo para medir el fenómeno denominado volatilidad. En esta investigación será de suma importancia para medir los datos de suma variabilidad en el estudio. Un modelo GARCH en su forma más simple es el GARCH (1,1) y puede expresarse con la siguiente ecuación.

$$Y_t = X_t + \varepsilon_t$$
$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

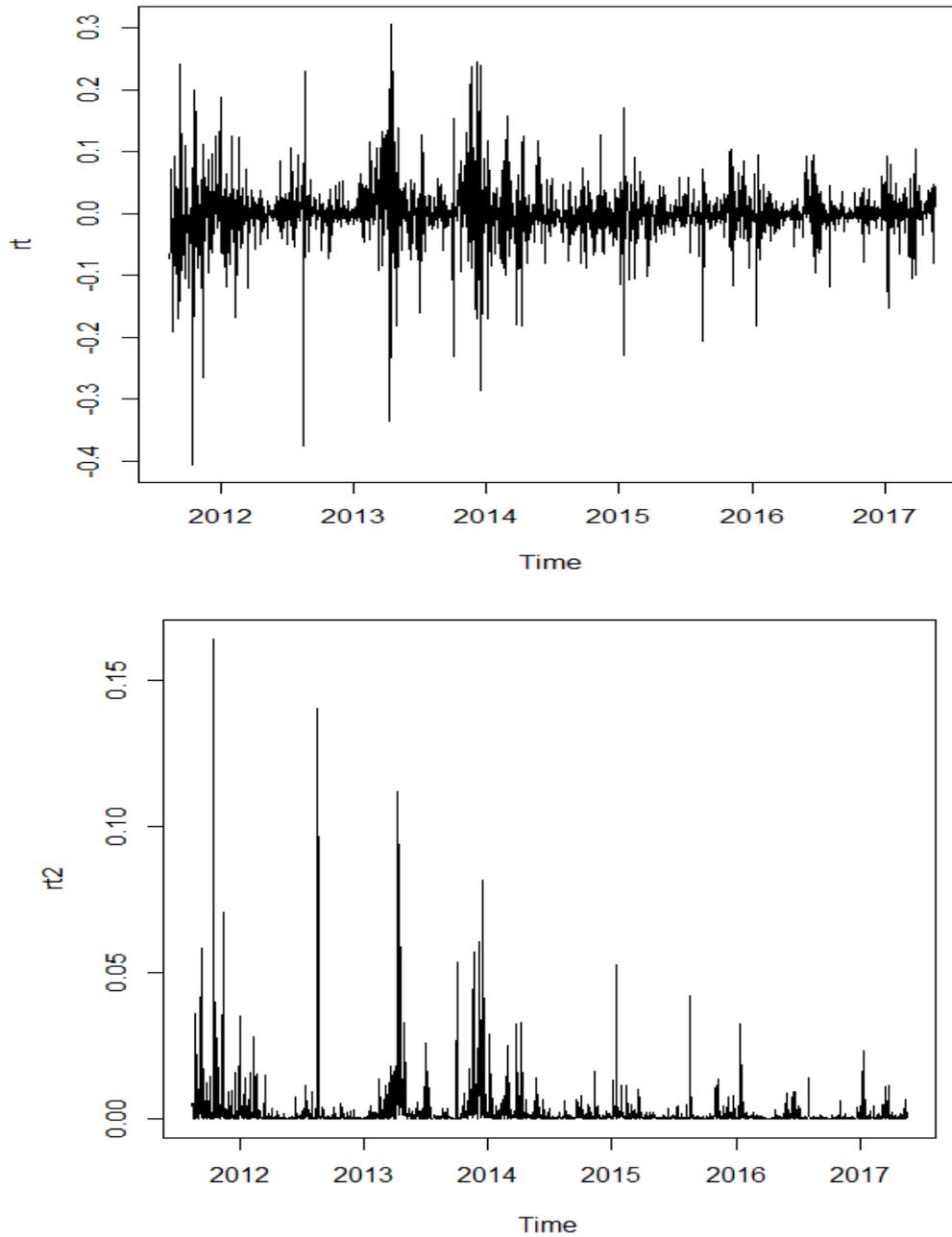
Donde la ecuación para la media recogida se escribe Y_t como función de unas variables exógenas con un término de error. La ecuación para la varianza condicional especificada es una función de tres términos: la media (ω), información acerca de la volatilidad en el periodo previo, medida como el retardo de los residuos al cuadrado en la ecuación de la media $Y_t = X_t + \varepsilon_t$ (el término ARCH), y el último periodo estimado de la varianza σ_t^2 (el término GARCH).

En general la representación de la varianza según un GARCH (p, q) es:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad [3.8]$$

Donde p es el orden del término GARCH y q el orden del término ARCH. Luego un modelo ARCH (q) se plantea como un caso concreto de este modelo GARCH, en el que los parámetros β i son iguales a cero. Gráficamente un proceso GARCH puede apreciarse de la siguiente manera.

Figura 3.4 Simulación de un modelo GARCH (1,1) volatilidad por un proceso (σ, σ^2)



Fuente: Elaboración Propia. A través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3.

En la figura 3.4. Se exhibe el GARCH, al ser generado a través de los cuadrados de sus errores, demostrando con la implosión de los puntos máximos, su crecimiento y comprobando la existencia del fenómeno.

3.4 Bolsa Mexicana de valores; ICA (Ingenieros Civiles Asociados) una variable incurrida en el caos financiero

Para comenzar con la construcción del modelo de series de tiempo tradicional el primer paso es determinar la variable a la que estará concentrada el proceso, en esta ocasión la variable a demostrar es ICA un activo financiero el cual opera en la bolsa mexicana de valores [BMV].

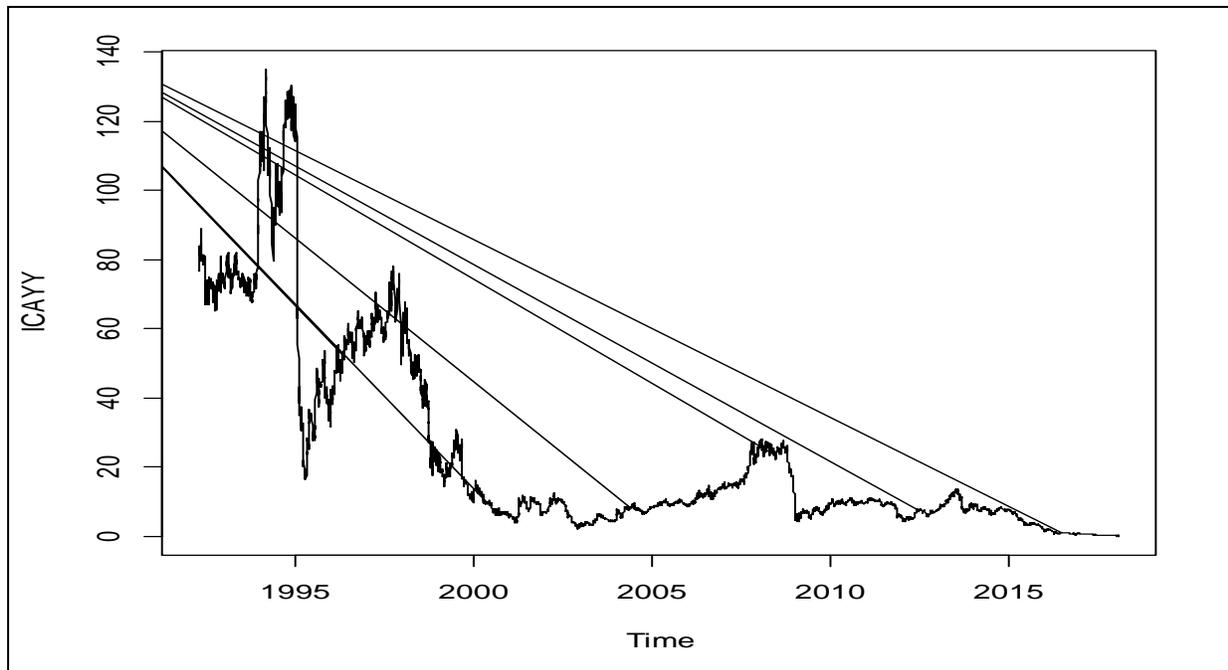
A través de su página web oficial la BMV está definida como “una entidad financiera privada (perteneciente al Grupo BMV), con apego a la Ley del Mercado de Valores que brinda facilidades necesarias para que sus miembros, atendiendo mandatos de sus clientes, introduzcan órdenes y realicen negociaciones de compra y venta de valores bursátiles. En ella se llevan a cabo las operaciones del mercado de valores organizado en México, siendo su objeto el facilitar las transacciones con valores y procurar el desarrollo del mercado, fomentar su expansión y competitividad”, (Grupo BMV, s.f.).

ICA (Ingenieros Civiles Asociados) es una empresa mexicana de infraestructura involucrada en el sector construcción que ejerce proyectos como carretera, hidroeléctrica, puertos marinos, aeropuertos, entre otros. Esta compañía cotiza en la BMV y exhibió su precio de cotización máximo el 9 de febrero de 1994 con un valor de cierre de \$134.99 por acción [ICAYY].

Con el paso del tiempo ICAYY presento diversos periodos de desplazamientos sumamente atípicos en su comportamiento y fue hasta el primer trimestre del 2018 que alcanzó su mínimo histórico con un \$0.011 por acción.

Por lo tanto resulta evidente que el fenómeno de la volatilidad en los precios del mercado es algo que afecto de forma directa al inversionista a lo largo del tiempo y se plantea el análisis de que algún especulador incurrió en un caos financiero por la ausencia preventiva al riesgo que eclosiona este supuesto por la teoría de los mercados eficientes. A través del siguiente gráfico se puede observar que la variable ICA presentó incontables puntos de quiebre en la serie y fue así hasta que sus precios de cotización alcanzaron la quiebra, dicho en otras palabras, se incurrió en un sistema complejo y de carácter caótico.

Figura 3.5. ICA precios de cierre 1992-2018.



Fuente: A través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3 se realizó la serie de tiempo para la variable ICAYY para el periodo 1992-2018, datos de periodicidad diaria extraídos a través de la página oficial de Investing.com

Diversos analistas infieren que la crisis económica que sufrió los precios de ICAYY puede estar explicada por disímiles circunstancias, (4 Razones para entender el desplome de ICA en la Bolsa Mexicana de Valores, 2017) expone que los puntos fundamentales son los siguientes.

- Pocos contratos civiles.
- Estrategias de crecimiento fallidas.
- Fuertes Pérdidas.
- Pagos impuntuales por parte de acreedores.

Mediante el estudio empírico se infiere que esta variable puede presentar una similitud y un escalamiento en la sucesión temporal identificando un atractor extraño en la dimensión fractal, entonces se genera de esta forma el concepto de sensibilidad inicial a la condición de caos que presentó ICAYY al principio del primer trimestre del 2018.

Para implementar la hipótesis de memoria larga y los mercados fractales primero se debe identificar si los modelos tradicionales presentan algún inconveniente o falla para contemplar los supuestos establecidos por la teoría de los mercados eficientes. Los siguientes apartados de la investigación están basados en la construcción de los modelos econométricos y de esta forma conocer a través de hechos estilizados si ICAYY está controlada por la teoría de los mercados eficientes o puede ser adaptada a modelos de carácter volátil, dimensión fractal o modelos de memoria larga.

3.5 Generación de un modelo a través de la metodología Box-Jenkins+Garch

Una vez fundamentado el marco teórico de la metodología Box-Jenkins el siguiente paso a confrontar consiste en generar los modelos de manera sistemática y ordenada que permita elegir una opción ARIMA (p, d, q) que satisfaga las expectativas en cuanto a los pronósticos y los supuestos establecidos por la teoría de los mercados eficientes. Se debe mencionar, que los modelos [B-J] se caracterizan en dos principios generales; parsimonia y aproximaciones sucesivas.

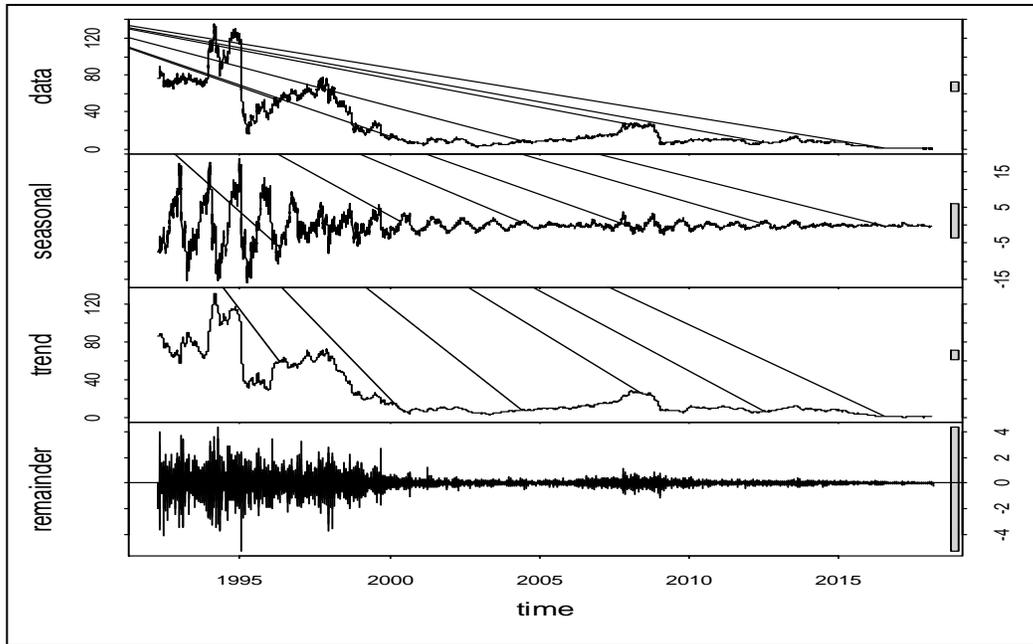
El primer objetivo es identificar el modelo tentativo o preliminar para la serie de tiempo ICAYY, posteriormente mejorarlo y construir otros modelos para que de todos ellos se elija el modelo óptimo según los criterios ya establecidos. La metodología ofrece el siguiente procedimiento.

3.5.1 Identificación

(Videgaray, 2011) , puntualiza que el procedimiento para identificar el modelo adecuado consiste en contar con una especie de “catálogo” de los diversos modelos ARMA y sus características esenciales, para compararlas con las de los datos reales y seleccionar las más parecidas.

En primera instancia debe verificarse que la serie sea estacionaria e intentar eliminar la variación estacional, si ésta existe. A través de las pruebas de raíces unitarias comprobar si la serie ya es estacionaria o es necesaria una transformación matemática para su estimación.

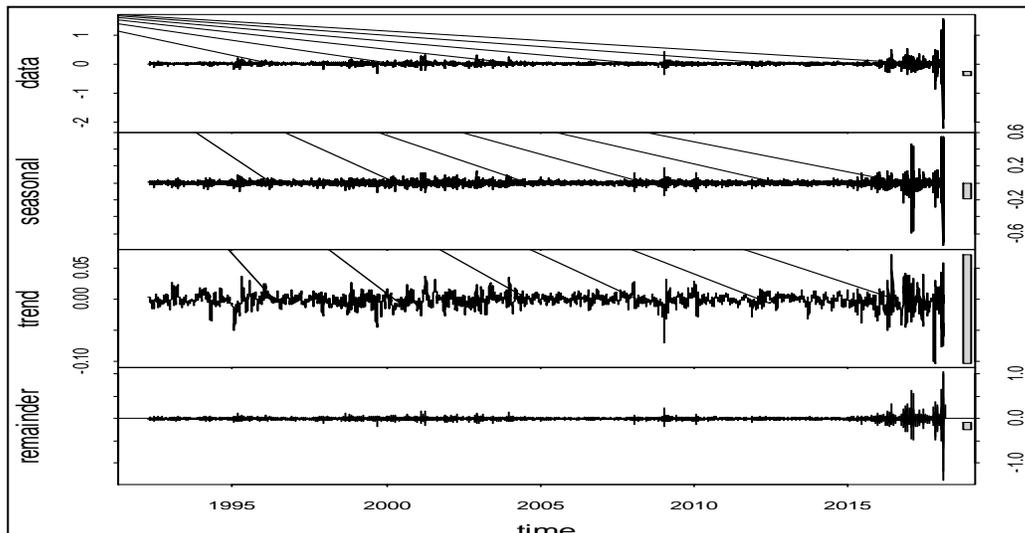
Figura 3.6 Componentes No estacionarios de la serie en niveles.



Fuente: Elaboración propia, Se puede observar los componentes Tendencia, Estacionalidad en la serie de tiempo ICAYY en el periodo 1992-2018; al no comportarse como un ruido blanco y tener una tendencia en la serie se puede inferir que se presenta el fenómeno de no estacionariedad.

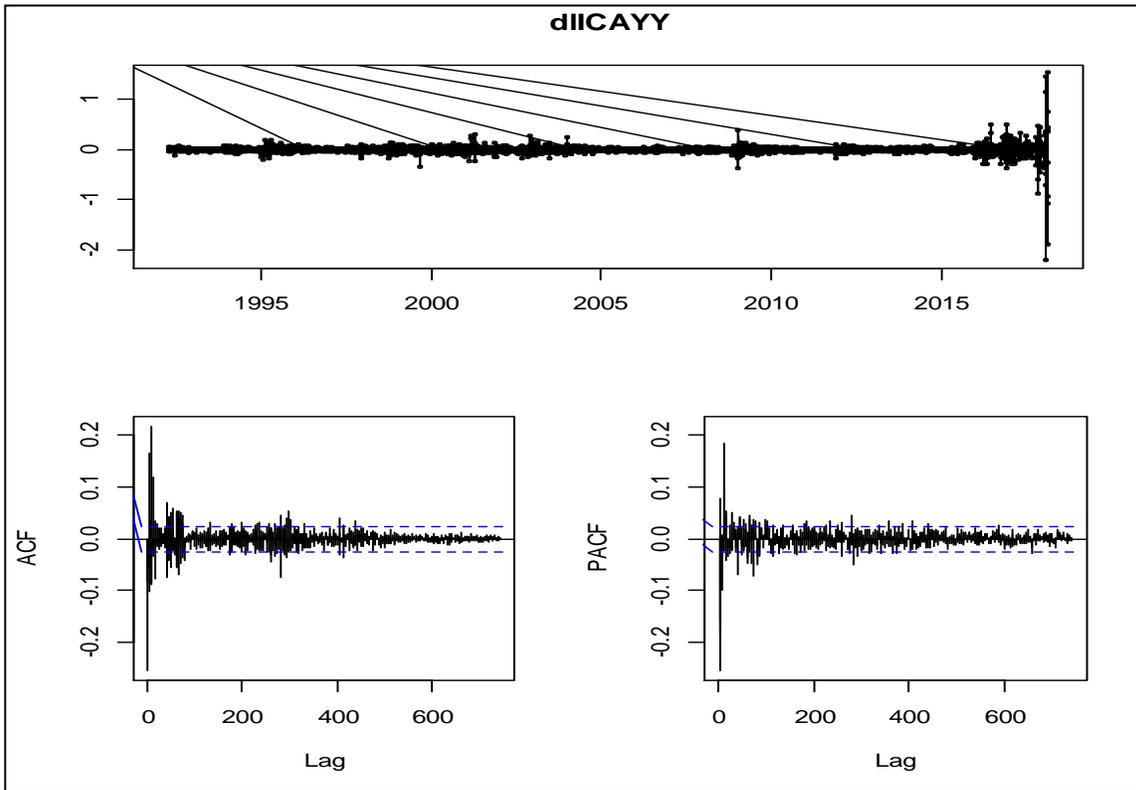
Para la eliminación del componente estacional y la tendencia de la serie, se debe aplicar una transformación matemática que minimice este fenómeno y lo adjudique a un ruido blanco, en esta ocasión serán las primeras diferencias logarítmicas a la variable en niveles ICAYY. A continuación, se muestra el comportamiento de la variable a través de este método de ajuste de datos.

Figura 3.7. Transformación primera diferenciación ICAYY.



La figura 3.7 establece que la serie se ha descompuesto de forma correcta y que ahora está determinada por un ruido blanco, para comprobar la definición anterior se debe establecer las pruebas de autocorrelación por medio de las raíces unitarias y los correlogramas FAC y PACF.

Figura 3.8 Correlogramas ACF Y PACF pruebas de estacionariedad.



Fuente: Elaboración propia. Los correlogramas presentan un comportamiento estable, además tras la transformación, la variable presenta indicios de ruido blanco y principios de teorema de límite central garantizando así la estacionariedad.

Tabla 3.1. Prueba de Raíz Unitaria.

| Coefficients | Estimate | Std.Error | t value | Pr(> t) | Signf. |
|---|-----------|-----------|---------|----------|--------|
| (Intercept) | 8.46E-04 | 1.71E-03 | 0.496 | 0.61 | |
| z-lag.1 | -1.46E+00 | 1.97E-02 | -73.91 | <2E-16 | *** |
| tt | -8.04E-07 | 4.61E-02 | -1.743 | 0.0814 | * |
| z.diff.lag | 1.61E-01 | 1.24E-02 | 12.93 | <2E-16 | *** |
| Value of test-statistics is: -73.91; 1821.202; 2731.796 | | | | | |
| Critical value for test statistics: | | | | | |
| | | 1pct | 5pct | 10pct | |
| | tau3 | -3.96 | -3.41 | -3.12 | |
| | phi2 | 6.09 | 4.68 | 4.03 | |
| | phi3 | 8.27 | 6.95 | 5.34 | |

Fuente: Elaboración Propia. En la Tabla 3.1 se puede observar que la variable ya es estacionaria al no contar con raíces unitarias.

3.5.2 Estimación

Una vez que se realizó la descomposición de la serie de tiempo y se ha identificado mediante la transformación matemática que la serie es estacionaria, se pretende crear el modelo óptimo por medio de los criterios estadísticos que mejor le adjudique.

Para ICAYY el número máximo de autorregresivos y de medias móviles serán siete correspondientemente, ya que la periodicidad de los datos es diaria de acuerdo al precio de cierre de cotización emitido por la BMV. Además, se procura cumplir con el supuesto de parsimonia. A través del programa estadístico E Views se calibraron 36 modelos ARMA (p, q) de los cuales mediante los criterios LogL, AIC, BIC se muestra el top 10 de los resultados obtenidos.

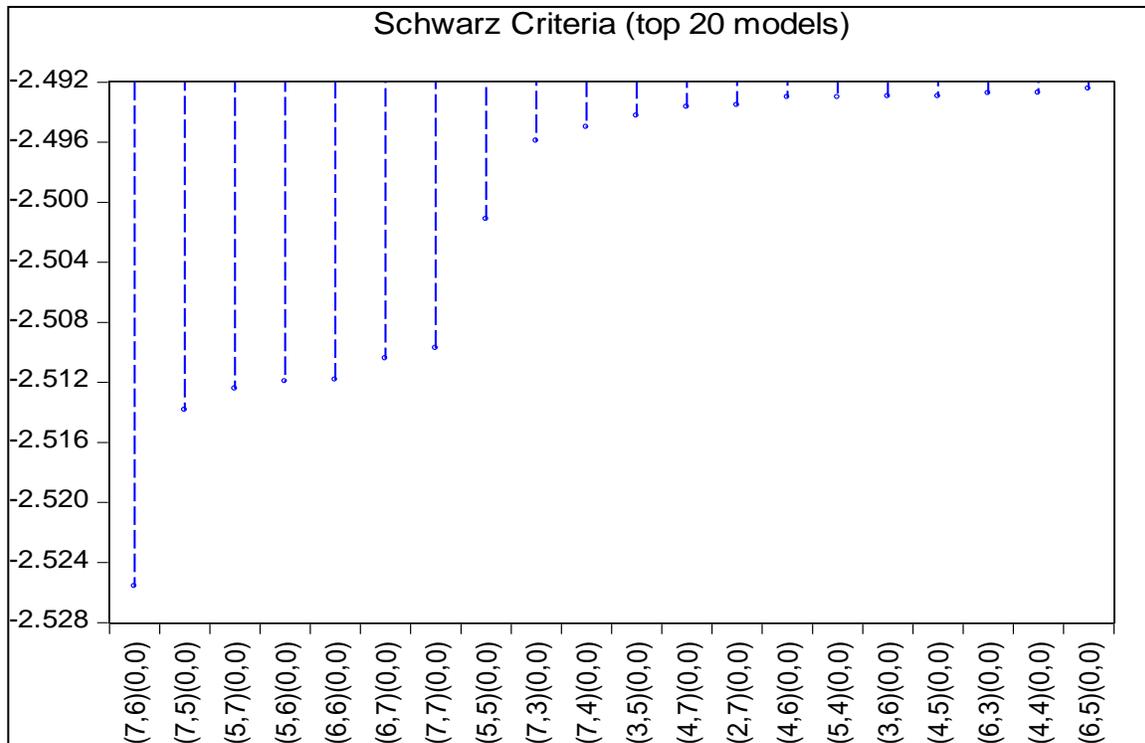
Tabla 3.2 Model Selection Criteria Table.

| Dependent Variable: DLICAYY | | | | |
|-----------------------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| Included observations: 6408 | | | | |
| Model | LogL | AIC | BIC* | HQ |
| (7,6)(0,0) | 8467.40611 | -2.540931 | -2.525593 | -2.535632 |
| (7,5)(0,0) | 8423.96066 | -2.528171 | -2.513856 | -2.523226 |
| (5,7)(0,0) | 8419.16948 | -2.526731 | -2.512415 | -2.521785 |
| (5,6)(0,0) | 8413.2017 | -2.525237 | -2.511944 | -2.520645 |
| (6,6)(0,0) | 8417.24503 | -2.526152 | -2.511837 | -2.521207 |
| (6,7)(0,0) | 8416.89607 | -2.525747 | -2.510409 | -2.520448 |
| (7,7)(0,0) | 8418.97247 | -2.52607 | -2.50971 | -2.520418 |
| (5,5)(0,0) | 8372.83087 | -2.513402 | -2.501131 | -2.509163 |
| (7,3)(0,0) | 8355.48571 | -2.508187 | -2.495917 | -2.503949 |
| (7,4)(0,0) | 8356.80013 | -2.508282 | -2.494989 | -2.50369 |
| (3,5)(0,0) | 8341.1664 | -2.504484 | -2.494259 | -2.500952 |

Fuente: Elaboración propia

Al contemplar los criterios de información estadística se obtiene que el modelo óptimo para este proceso en el periodo 1992-2018 para la variable [ICAYY] sea un modelo ARMA (7,6) sin componente estacional. El siguiente gráfico muestra el resultado expresado anteriormente.

Figura 3.9 Top 20 de modelos ARMA (p, q) para el caso de ICAYY (1992-2018).



Fuente: Elaboración propia por medio del programa estadístico E views9.

3.5.3 Validación del modelo.

Cuando se ha establecido que existe un modelo óptimo se debe presentar un criterio que avale que el modelo fue capturado y estimado de forma correcta y precisa. En los procesos ARMA el procedimiento de validación consiste en exhibir los supuestos de linealidad y heteroscedasticidad que cumplan con los hechos estilizados de un modelo de regresión múltiple. En otras palabras, se identifica si los autorregresivos del generador de predicción establecen una significancia en la esencia del suceso.

En la tabla 3.3 se puede observar que todos los procesos autorregresivos y de medias móviles identificados por la función stepwise y los criterios de información estadística resultan significativos para el modelo ARMA (7,6), además se exhibe que no se encuentra autocorrelación y heteroscedasticidad en el modelo por medio de la prueba Durbin-Watson.

En este modelo se debe mencionar que la R-squared es demasiado baja y esto es propiciado porque la variable endógena debe estar explicada por un número mayor de variables exógenas que afectan su comportamiento a lo largo del tiempo.

Tabla 3.3 Dependent Variable: DLICAYY, ARMA (BIC) Criteria.

| Method: ARMA (BIC) CRITERIA | | | | |
|--|--------------------|---------------------------|--------------------|----------------|
| Convergence achieved after 154 iterations | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | t-Statistic | Signif. |
| C | -0.001208 | 0.000618 | -1.956256 | |
| AR(1) | -2.445851 | 0.012579 | -194.4334 | *** |
| AR(2) | -3.907422 | 0.022057 | -177.1524 | *** |
| AR(3) | -4.78115 | 0.03689 | -129.6056 | *** |
| AR(4) | -4.354749 | 0.038844 | -112.1079 | *** |
| AR(5) | -3.022676 | 0.027567 | -109.6482 | *** |
| AR(6) | -1.539305 | 0.019302 | -79.74865 | *** |
| AR(7) | -0.421532 | 0.003906 | -107.9098 | *** |
| MA(1) | 2.154074 | 0.013921 | 154.7306 | *** |
| MA(2) | 3.105142 | 0.022982 | 135.1097 | *** |
| MA(3) | 3.363639 | 0.037831 | 88.91339 | *** |
| MA(4) | 2.612748 | 0.037842 | 69.04328 | *** |
| MA(5) | 1.434411 | 0.027928 | 51.36076 | *** |
| MA(6) | 0.494237 | 0.017434 | 28.34928 | *** |
| R-squared | 0.183721 | Durbin-Watson stat | 1.98730 | |
| Adjusted R-squared | 0.181933 | F-statistic | 102.7771 | |
| S.E. of regression | 0.064617 | Sum squared resid | 26.69327 | |

Fuente: Elaboración propia.

Cuando se estudia una serie de tiempo de carácter rugoso como lo es una acción es importante analizar la curtosis que distribuye su función de densidad como fue explicado en el capítulo dos, si la variable presenta una curtosis superior a 3 se puede proponer que la sucesión histórica presenta un fenómeno conocido como volatilidad, de ser así se propone los modelos GARCH para su captación e identificación. A través de los siguientes elementos se pretende conocer si ICAYY mantiene procesos de volatilidad en su valor de cotización histórico:

- Leptocurtosis

Es decir, es la tendencia de los rendimientos de activos financieros a tener distribuciones que exhiben colas gruesas y exceso de pico en la media.

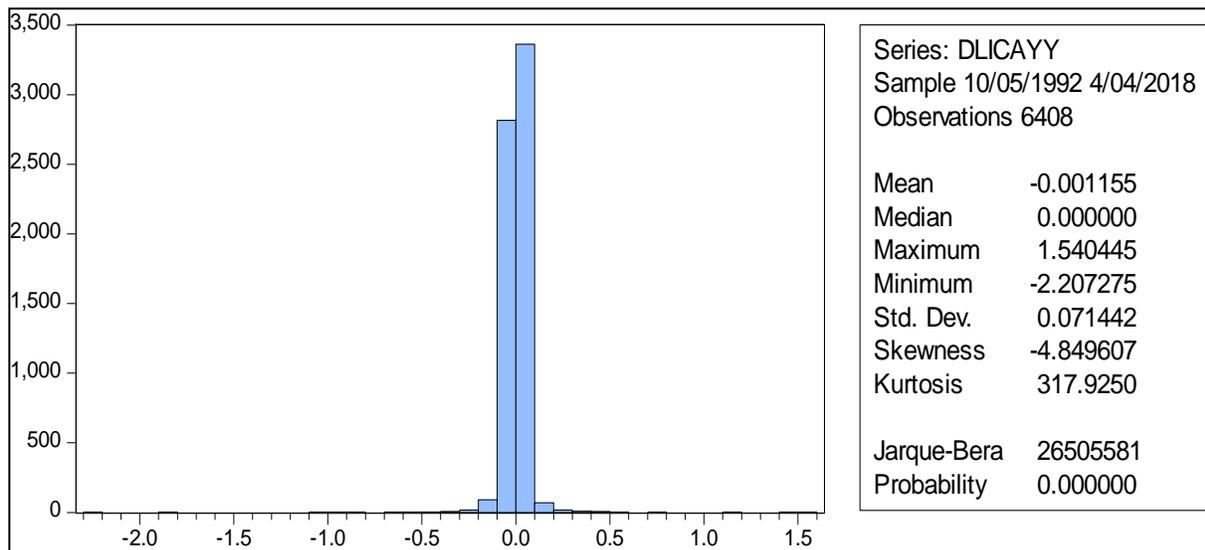
- Agrupamiento de volatilidad

La tendencia a la volatilidad en mercados financieros para aparecer en agrupamientos. Así grandes retornos (de cualquiera señal) se espera que sigan grandes retornos y pequeños retornos (de cualquier signo) para seguir pequeños retornos. Una explicación plausible para este fenómeno, que parece ser una característica casi universal del activo serie de retorno en las finanzas, es que las llegadas de información que conducen los cambios en los precios ocurren en agrupamientos en lugar de ser equitativamente espaciado en el tiempo.

- Efectos de apalancamiento

La tendencia a que la volatilidad aumente más después de una gran caída de precios que después de un aumento de precios de la misma magnitud.

Figura 3.10 Histograma estadístico de la distribución de ICAYY



Fuente: Elaboración Propia.

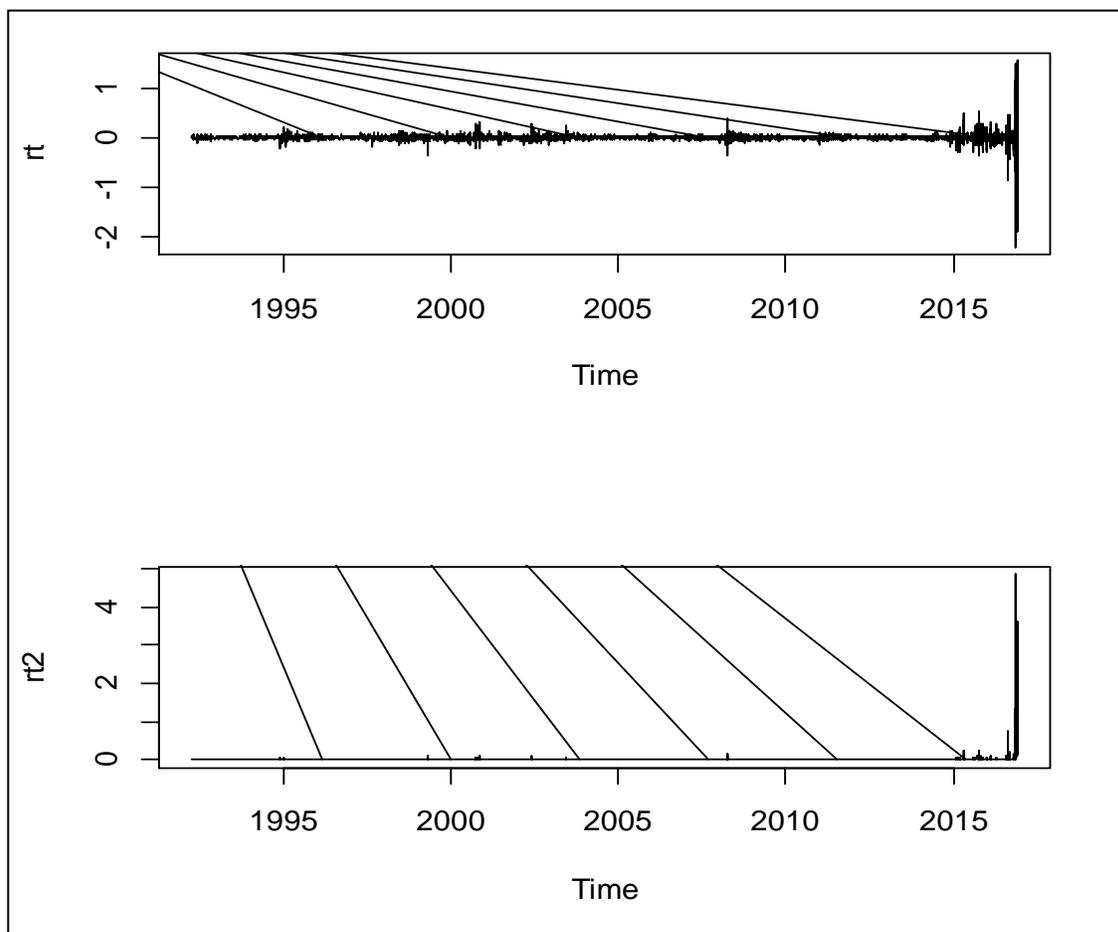
Por medio de la figura 3.10 se puede apreciar que el fenómeno de volatilidad puede estar presente en la variable al contar con una curtosis distribuida en una función leptocúrtica, por consecuencia se debe realizar la identificación de este suceso con un modelo GARCH.

Para la identificación del modelo autorregresivo generalizado de heteroscedasticidad condicionada el primer paso es generar un modelo a través de la forma más simple de captación, este modelo será un GARCH (1,1). En este primer paso se generará un modelo de regresión lineal el cual esté garantizado por la siguiente expresión.

$$dICAYY = dICAYY + 1 \quad (3.9)$$

Mediante la ecuación 3.9 se construye el modelo de regresión lineal para la variable ICAYY y posteriormente se extraen los residuos al cuadrado de este modelo para observar de forma gráfica el posible comportamiento que nos permita augurar la presencia del fenómeno volatilidad. La extracción de los residuos del modelo se aprecia en la figura (rt).

Figura 3.11 Extracción de residuos del modelo ICAYY~1



Fuente: Elaboración propia.

Para poder apreciar los puntos máximos de la serie y medir los choques con mayor impulso del modelo es necesario hacer una transformación que nos permita exhibir el comportamiento volátil de la serie, por lo tanto, como consecuencia a este tratamiento se elevará los residuos al cuadrado y de esta forma se podrán apreciar los siguientes momentos en el comportamiento volátil de la serie. Esto puede observarse en la gráfica (rt2).

Entonces con la ayuda de estos gráficos se puede afirmar que el fenómeno de la volatilidad está presente en el comportamiento en el tiempo para la variable ICAYY, para validar la afirmación anterior se presenta el siguiente análisis con respecto al modelo de regresión lineal múltiple para la identificación de la volatilidad en ICAYY.

Tabla 3.4. Identificación del Modelo de Volatilidad GARCH.

| Rezagos de la volatilidad inmediata. | | | | | |
|---|-----------------|---------------------------|----------------|--------------------|---------------|
| Coefficients | Estimate | Std. Error | t-Value | Pr(> t) | Signf. |
| (Intercept) | 0.0022891 | 0.0009643 | 2.374 | 0.01763 | * |
| rezago1 | 0.5352739 | 0.0125067 | 42.799 | <2e-16 | *** |
| rezago2 | -0.2490093 | 0.014528 | -17.557 | <2e-16 | *** |
| rezago3 | 0.359505 | 0.0141828 | 24.783 | <2e-16 | *** |
| rezago4 | -0.101283 | 0.0151719 | -6.676 | <2e-16 | *** |
| rezago5 | 0.04666597 | 0.01477 | 3.159 | 0.00159 | ** |
| rezago6 | -0.0385609 | 0.0145584 | -2.649 | 0.0081 | ** |
| rezago7 | 0.0053571 | 0.0149792 | 0.358 | 0.72063 | |
| R-squared | 0.2869 | Adjusted R-squared | | 0.2861 | |
| | | Durbin-Watson | | 1.9879876 | |

Fuente: Elaboración propia, resultados extraídos por medio del programa estadístico R. studio versión 3.2.3.

En la tabla 3.4 se observa que los rezagos de la volatilidad inmediata de la variable resultan ser significativos, por lo tanto, se afirma que los autorregresivos de la varianza de los errores del modelo encuentran un comportamiento atípico en su comportamiento en 6 pasados inmediatos de esta misma.

Cuando se ha identificado que el fenómeno de la volatilidad está presente en la variable de estudio, el paso siguiente a confrontar con las variables financieras es identificar si exhibe un efecto de apalancamiento positivo o negativo en sus componentes de desplazamiento temporal. Para calibrar este efecto se hace uso del análisis de regresión múltiple que adjudique la medición de este suceso por medio del modelo GARCH (1,1) previamente identificado. Con la herramienta de análisis E Views versión 9 se obtienen los resultados que se muestran a continuación.

Tabla 3.5. Identificación del efecto apalancamiento.

| Dependent Variable: DLICAYY | | | | |
|---|-------------|------------------------------|-------------|-----------|
| Method: ML ARCH - Normal distribution (BFGS / Marquardt steps) | | | | |
| GARCH = C(1) + C(2)*RESID(-1)^2 + C(3)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) + C(4)*GARCH(-1) C(4)*GARCH(-1) | | | | |
| Variable | Coefficient | Std. Error | z-Statistic | Signf. |
| Variance Equation | | | | |
| C | 8.60E-06 | 8.44E-07 | 10.19152 | *** |
| RESID(-1)^2 | 0.05213 | 0.003543 | 14.71327 | *** |
| RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) | 0.087472 | 0.005263 | 16.62169 | *** |
| GARCH(-1) | 0.908156 | 0.002313 | 392.6227 | *** |
| R-squared | -0.000261 | Mean dependent var | | -0.001155 |
| Adjusted R-squared | -0.000105 | S.D. dependent var | | 0.071442 |
| S.E. of regression | 0.071446 | Akaike info criterion | | -4.012629 |
| Sum squared resid | 32.7097 | Schwarz criterion | | -4.008406 |
| Log likelihood | 12860.46 | Hannan-Quinn criter. | | -4.011167 |
| Durbin-Watson stat | 2.499322 | | | |

Fuente: Elaboración propia.

La variable resaltada en color azul muestra el fenómeno de apalancamiento con un signo positivo, se asume que el apalancamiento es un factor que afecta a la variable ICAYY en su valoración en los precios históricos afectando el crecimiento dinámico de la volatilidad a condiciones sensibles a la disminución del precio al momento de operar en la bolsa mexicana de valores.

Para sintetizar los apartados anteriores se tiene lo siguiente:

- El modelo generado por la variable ICAYY es el proceso ARMA (7,6).
- El modelo presenta índices de volatilidad en su comportamiento con un número máximo de seis autorregresivos. A través del modelo GARCH (1,1) se analizó que la serie es volátil.
- La variable presenta efectos de apalancamiento, esto describe que cuando los precios de cotización tuvieron fuertes caídas, la volatilidad de la variable aumento en su naturaleza.
- Los agrupamientos de volatilidad se presentan en el proceso, la gran caída en los precios fue inducidas por la fuerte volatilidad en el mercado y no por procesos espaciados en el tiempo.
- A pesar de que el modelo ARMA (7,6) +GARCH (1,1) pudiera expresar de forma precisa los valores futuros inmediatos de la variable, rompe con diversos supuestos implicados en la teoría de los mercados eficientes, dando pauta a que el comportamiento de carácter fractal o fraccionario pudiera estar presente en el mercado.

3.6 Fallos del modelo Tradicional

Cuando se ha estimado el modelo autorregresivo por el cual está representado el pasado inmediato de la variable ICAYY se puede observar que este presenta diversos inconvenientes de acuerdo con lo establecido en la teoría de los mercados eficientes generalizado en el capítulo 1. Para hacer una mención de aquellos escenarios en el cual el mercado pierde su eficiencia se tiene lo siguiente.

a) Volatilidad.

Por medio del modelo GARCH (1,1) se identificó que los modelos presentan el fenómeno de la volatilidad en sus componentes, por lo tanto, se puede exhibir que esta variable rompe con diversos supuestos que la teoría pretende:

- I) La media y la varianza son constantes, la distribución estadística no está representada por una distribución normal con curtosis 3.
- II) Existen efectos de apalancamiento.
- III) La volatilidad es inducida por medio de agrupamientos temporales.

b) Los inversionistas no son adversos al riesgo.

Al estar presente la volatilidad en una variable financiera los inversionistas están sujetos a un riesgo por naturaleza, por lo tanto, si el especulador invierte su capital en series altamente volátiles como lo es ICAYY este supuesto es declinado inevitablemente.

c) Los modelos presentan memoria.

Si la variable ICAYY presenta conjeturas de memoria en sus desplazamientos en el tiempo se puede inferir que existen diversos atractores extraños que determinen la sensibilidad de condiciones iniciales para estos momentos de volatilidad. Por lo tanto, el no contemplar este suceso propiciaría un caos financiero para el especulador. Entonces, el cuarto capítulo de la investigación está concentrado en la identificación del supuesto de memoria larga para la variable ICAYY

Capítulo 4. Hipótesis del comportamiento fractal en los mercados.

En este capítulo se aplica el método fractal para la identificación del supuesto de memoria larga en la variable ICAYY. Para la captura del efecto fraccional se aplica la estimación del coeficiente de Hurst con respecto a diversas formas de identificar este índice en la serie de tiempo establecida. Es necesario demostrar que el comportamiento del Hurst estimado presenta un comportamiento de similitud o afinidad o se comporta como un paseo aleatorio.

De igual forma es necesario demostrar que el comportamiento de persistencia o anti-persistencia cumple con las características de dimensión fractal y analizar el por qué esta serie de tiempo se ajusta a una distribución de colas pesadas o de Levy⁷.

La decisión de demostrar la presencia del comportamiento fractal en los mercados financieros, resulta de la información empírica que avala la siguiente afirmación: “que si las fluctuaciones de los precios del petróleo son captadas con la geometría euclidiana como en el caso de la metodología Box-Jenkins, se genera un comportamiento *caótico financiero* en la medición de la volatilidad”, (Carrasco, 2016) . De esta forma, el estudio propone analizar si la variable de estudio presenta índices de memoria y de esta forma generar una prevención al caos financiero y establecer la teoría de los mercados fractales como una herramienta alternativa a la medición de sistemas complejos en el sector financiero mexicano.

4.1 Métodos de estimación del coeficiente de Hurst

La evaluación del coeficiente de Hurst es el primer paso para identificar la caracterización de los modelos complejos en las series de tiempo. Este indicador permite establecer una diferencia entre las series de tiempo rugosas y otras que están simplemente determinadas por una caminata aleatoria. Si este fenómeno capta una persistencia o anti-persistencia en la sucesión temporal se

⁷ Distribución α -estable de Lévy. Si es una combinación lineal de dos o más copias independientes de una muestra aleatoria que tiene la misma distribución de probabilidad, salvo por quizá algún parámetro de localización o factor de escala, (Dickey D., 1979).

determinará si esta adjudica una correlación positiva o negativa, respectivamente, en los desplazamientos del mercado financiero, en este capítulo se plantea demostrar que la variable ICAYY presenta una correlación positiva en su valor histórico persistente.

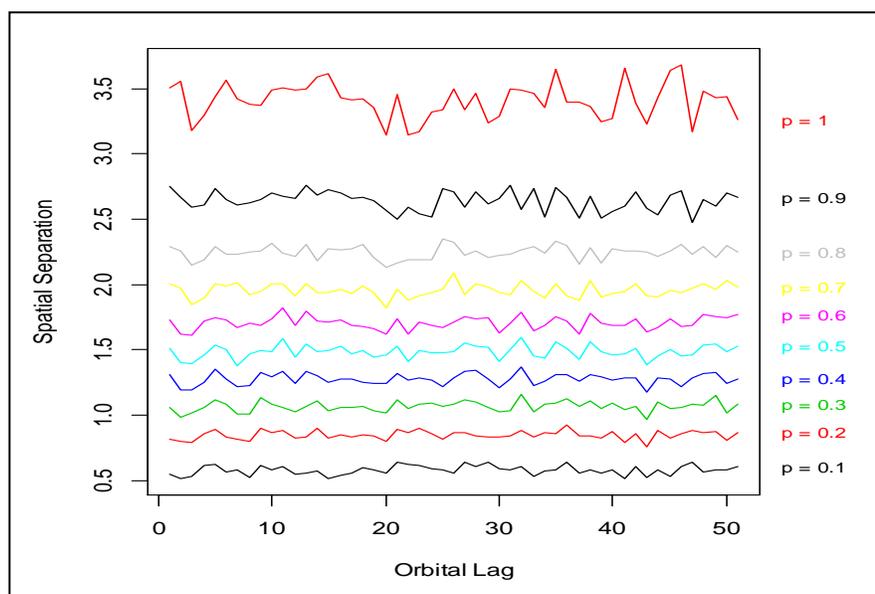
(Mandelbrot B. B., 1982), establece que un coeficiente de Hurst en el rango $H > 0.5$ determinará que la serie muestra una persistencia a lo largo de una trayectoria, en otras palabras, cuando ocurre un aumento a la implosión de esa serie hay más probabilidad que presente otro similar. Entonces se dice que es auto-correlacionado positivamente.

Cuando los valores del indicador están ubicados en $H < 0.5$ corresponde a un comportamiento anti-persistente. Esto significa que un periodo de crecimiento es seguido por uno de decrecimiento o viceversa. Existe mayor probabilidad que el próximo periodo se encuentre por debajo de la media del anterior.

Finalmente, si $H = 0.5$ se infiere que la variable se comporta como un movimiento browniano aleatorio, No se encuentra ninguna memoria en su desplazamiento y se afirma que tiene una autocorrelación nula o igual a cero. Por lo tanto, un aumento de los precios puede ser inducido por cualquier circunstancia externa a la tendencia temporal.

Para analizar el coeficiente de Hurst se pretende puntualizar las diversas técnicas de estimación para este parámetro como lo son, la técnica de Rango reescalado (R/S), wavelets (wv), y el espectro de potencias (P/S).

Figura 4.1 Representación gráfica de un escalamiento fractal a través de un ruido blanco.



Fuente: Elaboración propia, a través del programa estadístico R.studio versión 3.2.3

4.1.1 Análisis de Rango reescalado (R/S)

Para (Medina, 2005) , el método estadístico de rango reescalado (R/S) permite el cálculo del parámetro de autosimilitud H para medir la intensidad de dependencia de largo plazo en una serie de tiempo. A través de la siguiente expresión es como se generaliza este proceso.

Se tiene una serie de tiempo con longitud n.

$$X = \{ X_t : t = 1, 2, 3, \dots n \}$$

R/S es definido como el coeficiente del recorrido máximo normalizado de la señal integrada R(n) entre la desviación estándar S(n):

$$\frac{R(n)}{S(n)} = \frac{\max\{0, r_t : t = 1, 2, 3 \dots n\} - \min\{0, r_t : t = 1, 2, 3 \dots n\}}{\sqrt{S^2(n)}}$$

Donde:

$$\max\{0, r_t : t = 1, 2, 3 \dots n\} - \min\{0, r_t : t = 1, 2, 3 \dots n\} \quad [1]$$

$$rk = \sum_{t=1}^k X_t - \frac{K}{n} \sum_{t=1}^n X_t \quad [2]$$

$$S(n) = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \left(X_t - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad [3]$$

La ecuación [1] representa el recorrido de los valores con respecto al tiempo, la expresión [2] puntualiza la diferencia de los puntos máximos y mínimos de la serie, mientras que la fórmula [3] puntualiza de manera confiable la estimación de la desviación estándar. Por lo tanto, la estimación del coeficiente de Hurst con respecto al análisis de rango reescalado que se generaliza de la siguiente manera.

$$\frac{R(n)}{S(n)} \approx cn^H \quad 0 \leq H \leq 1 \quad [4.1]$$

4.1.2 Método de Espectro de potencias (P/S)

Para (Shiller, 1967), el método de espectro de potencias determina la existencia de dependencia a largo plazo en las series de tiempo, con respecto a la forma espectral de un proceso dependiente. Además, Shiller infiere que los métodos de (P/S) tienen su origen en el análisis espectral y pueden ser aplicados a series de tiempo. La función de densidad del análisis espectral para datos aleatorios describe los datos en términos de densidad espectral del valor del cuadrado de su media para diferentes frecuencias. Por lo tanto, la función de densidad espectral de potencia se generaliza a través de la transformada de Fourier de la función de autocorrelación con la finalidad de capturar sistemas rugosos y complejos.

Entonces se tiene lo siguiente:

$$(1) \quad PS(f) = \sum_{n=0}^{N-1} r_{xx}(n)e^{-j2\pi fT} \quad [4.2]$$

Donde r_{xx} , la función de autocorrelación se define como:

$$(2) \quad r_{xx}(n) = \sum_{k=1}^N x(k)x(k+n) \quad [4.3]$$

El (P/S) permite determinar la distribución de la potencia de una señal a lo largo de un intervalo de frecuencias. Por lo tanto, la densidad del espectro exhibirá si la variable se comporta como una variable estacionaria o lo que es igual, demuestra si la densidad de la función es generada por un ruido blanco, o si es un modelo de memoria larga distribuida en el tiempo t .

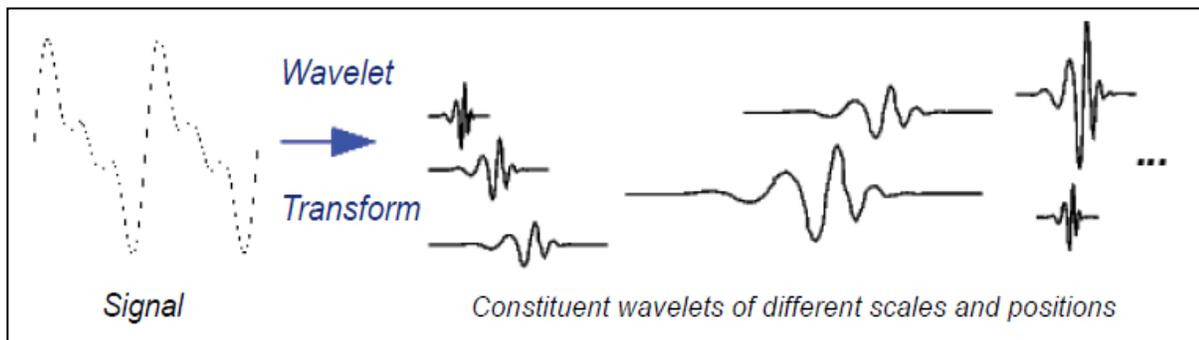
4.1.3 Análisis Wavelet (WV)

El análisis wavelet o proceso de ondeletas es un complemento del método de (P/S), pero a diferencia de este, no solo capta la frecuencia con la cual se presentan los impulsos de cambio, sino que además nos indica cuando ocurren esos choques y cuál es su duración en el desplazamiento de la serie. Por lo tanto, el análisis (WV) se puede puntualizar de la siguiente manera:

- La transformada de wavelets fue diseñada originalmente para estudiar señales no estacionarias.
- Como presenta covarianza con los rezagos, presenta diversas virtudes para captar procesos rugosos y de alta densidad espectral.
- Plantea un análisis de tiempo-frecuencia.
- Es capaz de relevar aspectos de quiebre, tendencias, discontinuidades, y lo más importante; autosimilitud.

El análisis wavelet consiste en descomponer una señal en versiones escaladas móviles de la wavelet original (“madre”).

Figura 4.2, Transformada wavelet.



Fuente: (Bermejo, 2011)

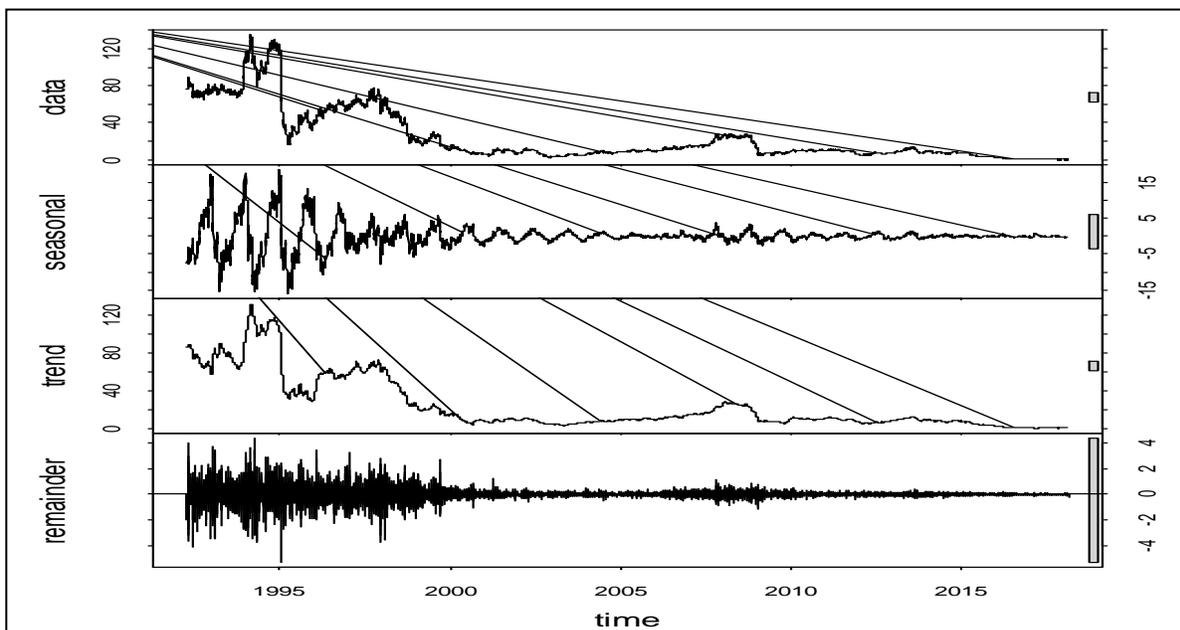
El objetivo del análisis wavelet es el de expresar una señal de entrada en una serie de coeficientes de condiciones iniciales especificadas. Los números asociados a cada coeficiente determinan toda la información necesaria para describir completamente a la serie. Entonces se afirma que las ondeletas son empleadas para la descomposición.

4.2 Identificación del supuesto de memoria larga

Cuando el fenómeno de la volatilidad es exhibido en los componentes de la serie de tiempo se plantea el supuesto de que los desplazamientos temporales de una variable pueden estar concatenados a una memoria. Por medio de la técnica (R/S) se plantea la identificación de este supuesto, si la varianza de los errores de la variable ICAYY muestra conjeturas de desplazamientos correlacionados o de memoria larga, dicha variable será susceptible a ser representada en una dimensión fractal y posteriormente a ser modelada por una descomposición wavelet o multifractal, técnicas basadas en la teoría del mercado fractal. A través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3 y la paquetería “fractal”⁸ se calibró la identificación de este supuesto y se obtuvieron los siguientes resultados.

El primer paso para efectuar la identificación del supuesto de memoria larga y el comportamiento fractal en la variable ICAYY es representar la variable con la serie original o en niveles para analizar el comportamiento de su naturaleza. Por lo tanto, a continuación, se plantea las pruebas de estacionariedad expuestas anteriormente en el capítulo 1

Figura 4.3 Componentes de la serie ICAYY, no estacionariedad.

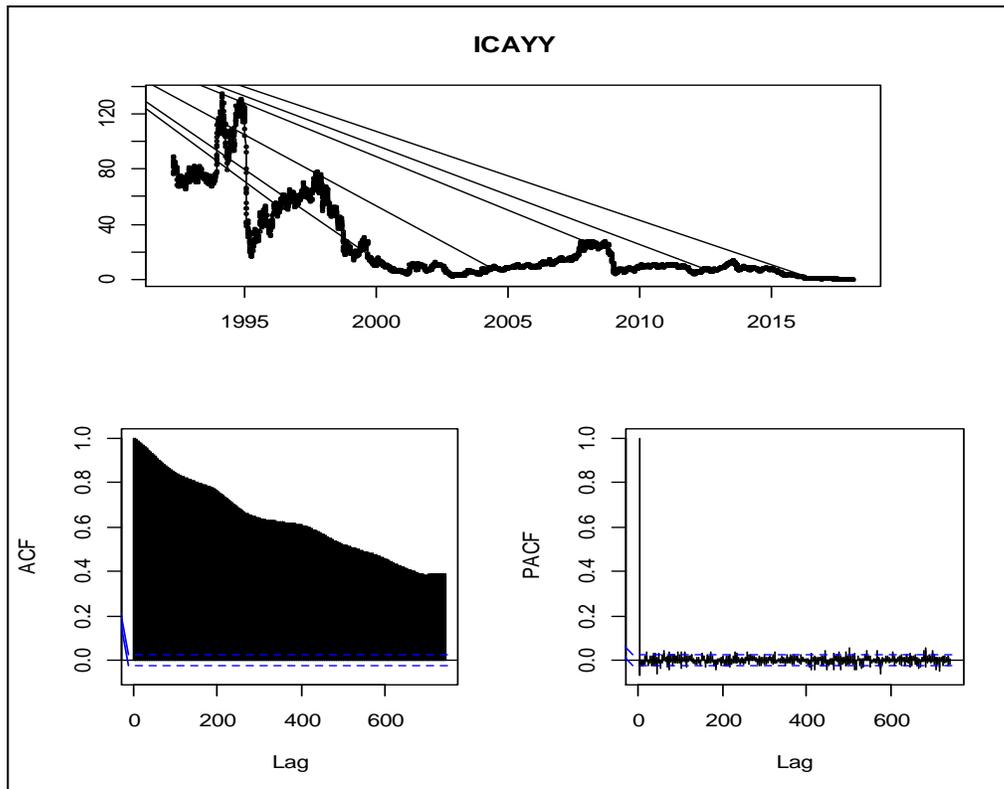


Fuente: Elaboración propia.

⁸ Paquetería fractal, enlace de descarga. <https://cran.r-project.org/web/packages/fractal/fractal.pdf>

En la figura 4.3 y 4.4 se puede observar el comportamiento no estacionario de la variable ICAYY por medio de los componentes de la serie de tiempo, en estas figuras se puntualiza que la variable mantiene una tendencia en su consistencia periódica y a su vez determina una estacionalidad de acuerdo con sus valores históricos atribuidos en el periodo 1992- 2018.

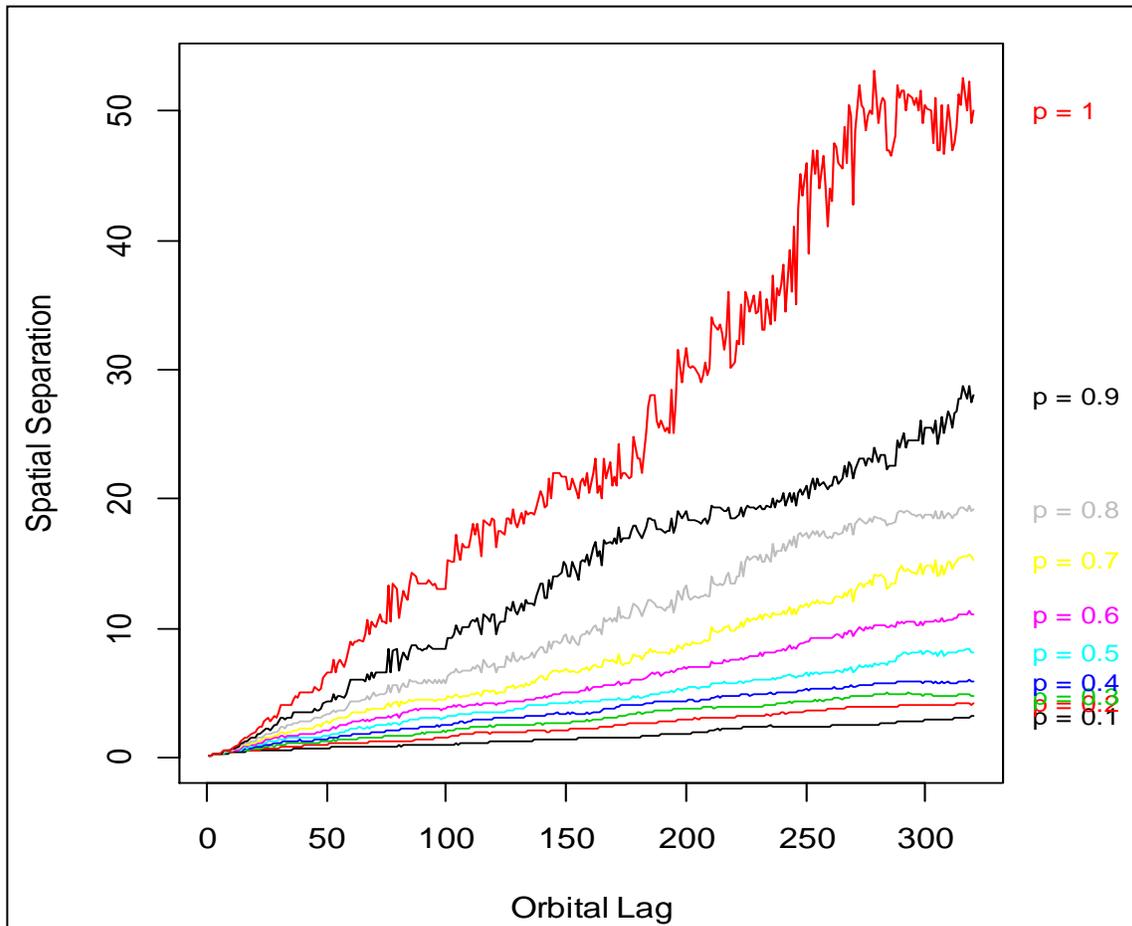
Figura 4.4 Pruebas ACF y PACF para identificar no estacionariedad.



Fuente: Elaboración propia.

Para poder captar la rigurosidad a la que fue expuesta la variable de estudio a través del tiempo se analiza la serie en niveles, en la figura 4.3 y 4.4 se observa la no estacionariedad de la variable ICAYY al ser evaluada sin ninguna transformación matemática y así contemplar todos los atractores a los que pudiera estar representada. Por lo tanto, una vez efectuado este proceso se prosigue a la identificación del coeficiente de Hurst para conocer si presenta alguna persistencia en la sucesión o se comporta como un ruido blanco.

Figura 4.5 Escalamiento Fractal ICAYY.



Fuente: Elaboración propia.

En la figura 4.5 se observa que la variable ICAYY tiene un comportamiento persistente o autosimilar, se debe recordar que los fractales autosimilares son estructuras que permanecen invariantes a los cambios de escala, son isotrópicos (tienen las mismas propiedades en todas las direcciones), permanecen invariantes cuando cambia la escala uniformemente en todas las direcciones. Al generar o simular un objeto a través de escalas, se puede apreciar una simetría a la imagen anterior. En esta figura se puede apreciar que la variable ICAYY presenta un comportamiento invariante en la escala fraccional por consecuencia se aprecia gráficamente de esta forma las propiedades de similitud y dimensión fractal en la serie de tiempo financiera.

Un proceso de (R/S) se define como:

$$2^{2H} = 2 + 2\rho \quad -1 \leq \rho \leq 1$$

H = Es determinada por el coeficiente de Hurst para todo índice en parámetros $0 < H < 1$.

ρ = Es el indicador de autocorrelación en el desplazamiento temporal.

Entonces para un ruido blanco se tiene que:

$$2^{2(0.5)} = 2 + 2\rho$$

$$2 = 2 + 2\rho$$

$$2 - 2 = 2\rho$$

$$\rho = \frac{2 - 2}{2}$$

$$\rho = 0$$

Por lo tanto, se infiere que no existe autocorrelación en los desplazamientos temporales con un coeficiente $H = 1/2$. A través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3 y la paquetería fractales se obtiene el siguiente resultado en la estimación del coeficiente de Hurst que parte de la siguiente demostración.

Donde:

$$\rho_{ICAYY} = \frac{2^{2H} - 2}{2}$$

$$\hat{H} = 0.612607644803729$$

$$\rho_{ICAYY} = \frac{2^{2(0.612607644803729)} - 2}{2}$$

$$\rho_{ICAYY} = 0.168951675147298$$

Al obtener un coeficiente de $H = 0.612607644803729$ de la serie histórica de los precios de cierre durante el periodo 1992-2018 de la variable ICAYY se demuestra que la variable cuenta con un coeficiente de correlación $\rho_{ICAYY} = 0.168951675147298$, el cual indica que existe el fenómeno de memoria en los componentes de la serie. Por consiguiente, la demostración anterior se sintetiza en las siguientes implicaciones.

- La sucesión histórica de ICAYY presenta una persistencia isotrópica a lo largo del tiempo.

Este supuesto hace mención de que la variable tiene una similitud en una dimensión fraccional, por lo cual, el desplazamiento volátil de la serie de tiempo se encuentra sujeta a un escalamiento invariante a la escala con la cual se define el comportamiento browniano.

- La variable ICAYY se puede modelar en una dimensión de Hausdorff-Bersicovitch.

Al exhibir un $H = 0.612607644803729$ el desplazamiento es susceptible a ser analizado en una dimensión fractal ya que los parámetros establecidos por medio de la persistencia generada en el coeficiente indica de forma empírica que la dimensión es de carácter rugosa y por lo tanto fraccional. Entonces la dimensión fractal estará representada por la diferencia entre la dimensión euclídea y el valor de H. Por lo cual, si la dimensión fractal toma valores $1 < D_f < 1,5$, para $H > 0,5$ la dimensión de la variable puede ser modelada en una dimensión de Hausdorff-Bersicovitch. La afirmación anterior se demuestra de la siguiente manera:

Donde

$$DF = 2 - H \quad [4.4]$$

El número dos representa la dimensión euclídea de una línea recta al ser perteneciente a un eje de X y de Y respectivamente en un espacio muestral.

$$DF = 2 - (0.612607644803729)$$

$$DF = 1.387392355196271$$

De esta forma se puede observar que en una dimensión con ejes X y Y la variable ICAYY puede ser modelada a través de una fraccionalidad de 1.387392355196271; se debe mencionar que un ruido blanco presenta una dimensión de 1.5 de tal forma también es susceptible a ser analizado mediante una dimensión de Hausdorff-Bersicovitch

- El fenómeno de memoria larga en los mercados eficientes.

Una vez que se ha garantizado que la serie presenta desplazamientos de persistencia y memoria larga en sus componentes se rompe con la eficiencia del mercado como pretende la teoría tradicional; al contemplar el supuesto de memoria larga se demuestra que las variables que operan en el sector financiero mexicano guardan una correlación estadística en sus desplazamientos temporales por lo tanto el especulador no cuenta con la información necesaria para un análisis de riesgo y preventivo a el caos financiero.

- Los errores cuadráticos de la variable se adaptan de manera óptima a una distribución de colas pesadas.

Cuando se ha identificado que los valores históricos de ICAYY están sujetos a una distribución leptocúrtica y que por consecuencia contempla el fenómeno de la volatilidad en sus componentes, el supuesto de memoria larga presente afirma que la variable está expuesta a un alto nivel de sensibilidad a las condiciones iniciales que propician dicha volatilidad.

Para el caso de ICAYY se determinó que existe un efecto de apalancamiento positivo, por consecuencia se puede afirmar que las condiciones iniciales a la catástrofe financiera que presento en el primer trimestre del 2018 fue generado por consecuencia de los altos impactos negativos al precio de cierre adjudicados a través del tiempo.

- Se puede descomponer la serie para realiza un análisis multifractal.

Si bien es cierto que el primer paso para la identificación del análisis multifractal en series de tiempo es la calibración del coeficiente de Hurst estimado por medio del análisis de rango reescalado. Con el análisis multifractal se puede descomponer la serie de tiempo en todos los componentes que la definen y de esa forma comprobar si cada uno de ellos mantiene un indicador de memoria, de esta manera se pretende formular un análisis basado en la teoría de los mercados fractales el cual permita al especulador determinar los atractores que determinan las condiciones

iniciales a la volatilidad del activo y simultáneamente generar una inversión con prevención al caos financiero.

Una vez demostrado que el pasado de ICAYY está fundamentado por un índice de persistencia en la dimensión fractal se pretende ejemplificar de una manera más extensa y complementaria repitiendo el proceso con las siguientes variables:

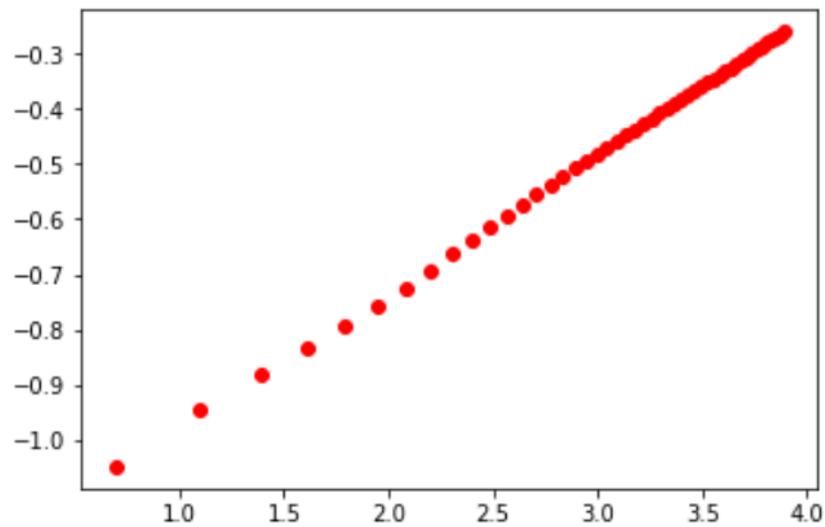
Tabla 4.1 Variables de estudio para la identificación del coeficiente de Hurst y el supuesto de memoria larga.

| VARIABLE | PERIODO OBSERVADO |
|------------------------------------|--------------------------|
| TIPO DE CAMBIO PESO DÓLAR | 02/01/1990 20/06/2018 |
| TIPO DE CAMBIO PESO EURO | 25/01/1990 20/06/2018 |
| TIPO DE CAMBIO EURO DÓLAR | 21/05/1990 20/06/2018 |
| PRECIO DE CIERRE CMXCPO (CEMEX) | 07/02/2001 20/06/2018 |
| PETROLEO CRUDO WTI | 21/05/1990 20/06/2018 |

Fuente: Elaboración Propia.

La tabla 4.1 muestra las variables que serán utilizadas para replicar el proceso expuesto a lo largo del capítulo para complementar la demostración de la importancia en la identificación del coeficiente de Hurst en variables que presentan volatilidad en sus parámetros. A través del mismo tratamiento de construcción de los modelos propuestos se obtiene lo siguiente.

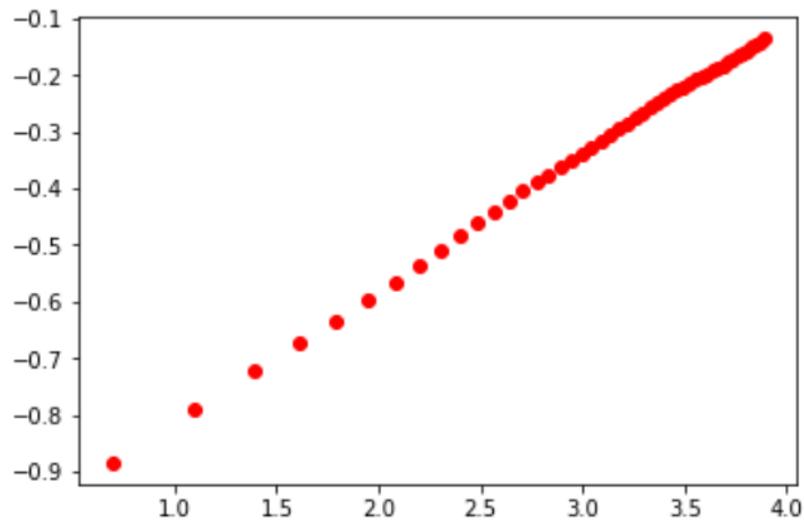
Figura 4.6 Ajuste del tipo de cambio MXM/USD al índice de Hurst



hurst: 0.4993276101424201

Fuente: Elaboración propia, a través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3, ajuste al coeficiente de Hurst para el periodo 1990-2018, datos obtenidos por medio de Investing.com.

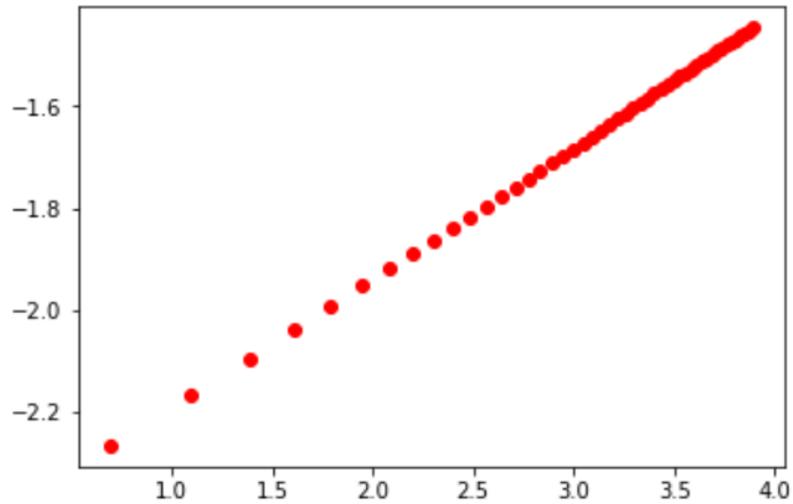
Figura 4.7 Ajuste del tipo de cambio MXM/EUR al índice de Hurst



hurst: 0.47244922806099715

Fuente: Elaboración propia, a través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3, ajuste al coeficiente de Hurst para el periodo 1990-2018.

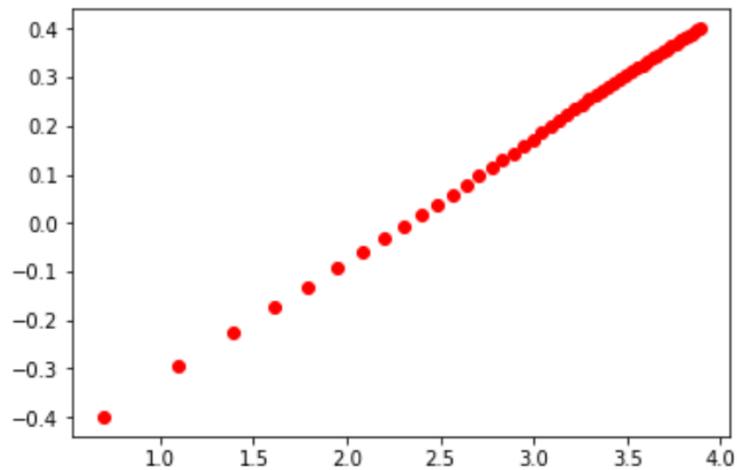
Figura 4.8 Ajuste del tipo de cambio USD/EUR al índice de Hurst



hurst: 0.5174279008354029

Fuente: Elaboración propia, a través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3, ajuste al coeficiente de Hurst para el periodo 1990-2018, datos obtenidos por medio de Investing.com.

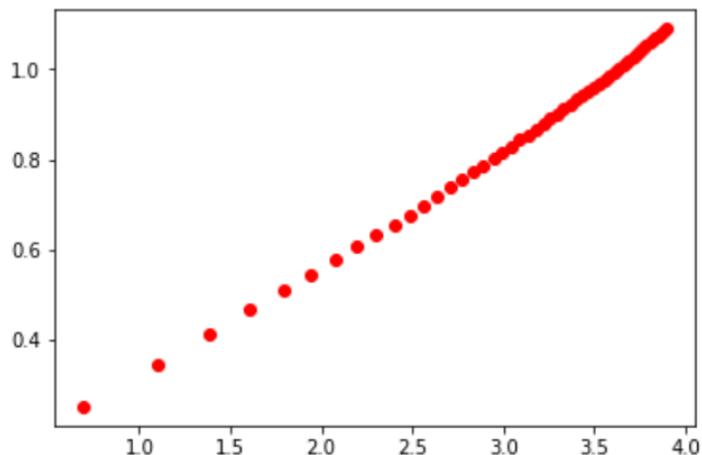
Figura 4.9 Ajuste del precio histórico CMXCPO (CEMEX) al índice de Hurst



hurst: 0.506061477441398

Fuente: Elaboración propia, a través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3, ajuste al coeficiente de Hurst para el periodo 2001-2018, datos obtenidos por medio de Investing.com.

Figura 4.10 Ajuste del precio histórico del Petróleo crudo (WTI) al índice de Hurst



hurst: 0.53639520139252

Fuente: Elaboración propia, a través del programa estadístico R. studio versión 3.2.3, ajuste al coeficiente de Hurst para el periodo 1990-2018, datos obtenidos por medio de Investing.com.

Tabla 4.2 Resumen de los resultados obtenidos para el coeficiente de Hurst

| Periodo Observado | Variable | Hurst | Dimensión Fractal | Indicador de Autocorrelación (R/S) | Desplazamiento |
|-----------------------|---------------------------------|------------|-------------------|------------------------------------|-----------------|
| 02/01/1990-20/06/2018 | TIPO DE CAMBIO PESO DÓLAR | 0.49932761 | 1.50067239 | -0.00134478 | Ruido Blanco |
| 25/01/1990-20/06/2018 | TIPO DE CAMBIO PESO EURO | 0.47244923 | 1.52755077 | -0.055101544 | Antipersistente |
| 21/05/1990-20/06/2018 | TIPO DE CAMBIO EURO DÓLAR | 0.5174279 | 1.48257251 | 0.034855802 | Persistente |
| 07/02/2001-20/06/2018 | PRECIO DE CIERRE CMXCPO (CEMEX) | 0.50606148 | 1.4939852 | 0.012122955 | Ruido Blanco |
| 21/05/1990-20/06/2018 | PRECIO DE PETROLEO CRUDO WTI | 0.5363952 | 1.4636048 | 0.072790403 | Persistente |

Fuente: Elaboración propia.

En esta tabla se exhiben los resultados estimados para el desplazamiento de cada una de las variables volátiles escogidas sin mayor preámbulo del sector financiero mexicano.

En la tabla 4.2 se puede apreciar que todas las variables de estudio cuentan con un caso particular de desplazamiento según la metodología de fractales y la identificación de memoria larga. De acuerdo al criterio estipulado por el investigador se decidió adjudicar cada categoría mencionada en la columna “Desplazamiento”; Se puede distinguir que variables como el tipo de cambio MXN/USD y el precio de cierre para la compañía CEMEX de México manifiestan un movimiento browniano direccionado por un ruido blanco, por el cual se infiere que la volatilidad de estas dos variables puede ser medida a través de un modelo que cumpla los supuestos de la metodología tradicional como un modelo GARCH sin mayor aversión a la teoría del caos financiero.

Para el caso de las variables que presentan un desplazamiento de carácter fractal porque cumplen los dos elementos fundamentales de la teoría como son similitud y escalamiento, dicho de otra forma, persistencia o anti-persistencia, se debe inferir que el estudio deberá proponer una advertencia para no incurrir en el caos financiero, de esta manera la metodología estipula que la volatilidad de estos componentes estará representada por una sensibilidad a condiciones iniciales por lo tanto las variables mantendrán una memoria larga en los atractores extraños que propician esta volatilidad futura, así mismo para dar una solución a este modelo complejo será necesario construir un modelo multifractal para percibir este suceso y modelar la volatilidad en el tiempo para cada caso en particular.

Con el análisis multifractal se puede descomponer la serie de tiempo en todos los componentes que la definen y de esa forma comprobar si cada uno de ellos mantiene un indicador de memoria, de esta manera se puede formular un algoritmo basado en la teoría de los mercados fractales el cual permita al especulador determinar los atractores que determinan las condiciones iniciales a la volatilidad del activo y simultáneamente generar una inversión con prevención al caos financiero.

Con este procedimiento se ha demostrado que las variables en el sector financiero mexicano presentan índices de similitud y persistencia, entonces la investigación comprueba cada uno de los objetivos planteados en primera instancia al lector, para llegar un paso más allá, se expondrá la importancia de construir un análisis multifractal y la posible implementación de esta metodología en investigaciones futuras.

4.3 Análisis Multifractal.

Como se ha especificado en los capítulos anteriores, la medición de un sistema complejo y rugoso presenta diversos factores susceptibles a un análisis para su total captación y estimación de valores subsecuentes en el futuro. La metodología de análisis multifractal pretende crear un panorama óptimo a la identificación de aquellas circunstancias que propician la volatilidad y los desplazamientos atípicos de un sistema en el tiempo.

El análisis multifractal de series de tiempo financieras consiste en crear horizontes a través de la descomposición total de la variable y de esta forma determinar el desplazamiento de la trayectoria de un activo en específico.

En este estudio se ha planteado que el análisis fractal está basado en primera instancia en la identificación del supuesto de memoria larga para extraer de esa forma las propiedades necesarias que se adapten a modelos con estas características, recapitulando un poco, *similitud*, *escalamiento* y *dimensión fractal*.

Como se mencionó en el apartado 4.2.3, el proceso wavelet es una técnica de análisis multifractal que consiste en la descomposición de los elementos de la serie temporal para asemejar por medio de un modelo el comportamiento natural de la variable. Entonces una [ST] se puede formular con la siguiente expresión multifractal.

$$Y_t = \text{Tendencia} + \text{Ciclo} + \text{Estacionalidad} + \text{volatilidad}$$

Se infiere que cada uno de estos componentes tendrá una característica de memoria diferente para inusuales espacios temporales que se determinaran por una dimensión fraccionaria particular para cada suceso. De esta forma se pretende encontrar el proceso que capture la rigurosidad de una serie de tiempo desde la construcción de ella misma en intervalos de similitudes y escalamientos. En la siguiente ecuación se observa el método wavelet para la obtención de los componentes de una serie.

$$T\psi S(t, \Delta t) \equiv \int d\tau s(\tau) \frac{1}{\Delta t} \psi\left(\frac{t-\tau}{\Delta t}\right) \quad [4.5]$$

Donde el coeficiente de singularidad se presenta de la siguiente forma:

$$T\psi S(t, \Delta t) \equiv \alpha \psi(t) (\Delta t)^{h(t)} \quad [4.6]$$

Los modelos fractales surgen de la idea de generar parámetros de medición a las condiciones iniciales que propician un cambio en la volatilidad de un activo para prever las eventualidades de caos financiero y complementar los fallos que presentan las variables financieras al suponer que el mercado se opera desde un horizonte de eficiencia y catástrofe regulado.

4.4 Comparación entre metodología Box-Jenkins y un análisis multifractal.

Con la identificación del supuesto de memoria larga en la variable ICA (ingenieros Civiles Asociados) se ha demostrado que el sector financiero mexicano puede estar presidido por un desplazamiento de autocorrelación en los índices de precios y la volatilidad que exhiben estos al operar en el mercado, Por lo tanto se infiere que la bolsa mexicana de valores se adapta a modelos que captan la sensibilidad a condiciones iniciales partiendo del supuesto de que el mercado presenta diversos atractores que manifiestan una interferencia en la eficiencia que la teoría tradicional pretende.

La metodología Box-Jenkins y los modelos autorregresivos de heteroscedasticidad condicional (GARCH) han sido de suma relevancia para cumplir con el objetivo de demostrar que este suceso está presente en el mercado. A continuación, se muestra un cuadro de implementación que define la comparación entre las dos metodologías propuestas en la investigación y a su vez las características que estas presentan en su naturaleza de procesamiento.

El cuadro 4.1 representa las características por la cual están definidas las metodologías implementadas en el análisis de la investigación presente, en el se puede observar las diferencias que conlleva el modelar a través de cada una de estas técnicas de modelación, así como la teoría del mercado por la que está prevista cada una de ellas.

Además, se propone la idea de que la metodología fractales puede ser una complementación para identificar la prevención del caos financiero y fortalecer la estimación al surgir como herramienta a diversas implicaciones que la teoría de los mercados eficientes representa.

Cuando los modelos identifican el fenómeno de la volatilidad se puede crear modelos complementarios el cual se encargue de modelar este fenómeno y a su vez intente identificar las condiciones iniciales de ese suceso.

Por lo tanto, la metodología de fractales es una herramienta que permite al especulador crear un panorama diverso y con mayor amplitud ante las circunstancias atípicas por la que los activos presentan desplazamientos estocásticos en los mercados bursátiles.

Cuadro 4.1 Comparación entre modelos predictivos, metodología Box-Jenkins y un análisis multifractal: Aplicación al sector financiero mexicano.

| Modelos Autorregresivos y de medias móviles (ARMA) | | Modelos multifractales |
|---|--|--|
| teoría de los mercados eficientes | | teoría de los mercados fractales |
| modelos estacionarios | | modelos no estacionarios |
| desplazamientos aleatorios contemplados por un ruido blanco | | desplazamientos contemplados por una persistencia |
| exhibe la volatilidad con la complementación de los modelos GARCH | | exhibe la volatilidad a través de la descomposición total de la serie de tiempo |
| son modelos que se adaptan de manera óptima a variables económicas | | son modelos que se adaptan a cualquier proceso que considere la medición de la rigurosidad |
| establece reajustes lineales para la estimación | | establece escalamientos y similitudes para observar el comportamiento a través de la naturaleza de las variables |
| genera procesos a partir de un ruido blanco | | genera procesos a partir de un ruido negro o rosa |
| no contempla supuestos ante la teoría del caos | | a partir de la teoría del caos surge la metodología de fractales |
| cuando la serie se adapta a una distribución leptocúrtica se infiere que existe volatilidad | | cuando la serie se adapta a una distribución leptocúrtica se infiere que existe una sencibilidad a condiciones iniciales que propician la existencia de la volatilidad |
| Puede ser una complementación del análisis multifractal al modelar la volatilidad a través de los modelos GARCH | | Puede ser una complementación a la metodología Box-Jenkins al identificar el supuesto de memoria larga y preveer la teoría del caos ante las condiciones |

Fuente: Elaboración propia

Conclusiones

A lo largo del tiempo se han desarrollado diversas metodologías y algoritmos matemáticos que pretenden predecir el comportamiento de sistemas complejos como lo es el sector financiero mexicano, en esta investigación se han planteado dos técnicas de proyección a través de series de tiempo para describir y modelar este fenómeno. Ambas metodologías manifiestan una cierta afinidad con respecto a los supuestos que establece la eficiencia y la ineficiencia del mercado, atentado por un factor imposible de no percibir denominado memoria larga.

Por medio de las teorías que conlleva la construcción de modelos de series de tiempo se percibió que el componente estacionariedad adjudica un compuesto de suma relevancia para interpretar los desplazamientos de un activo, ya sea de manera lineal o fraccionaria según sea el caso.

Cuando un sistema tiene características fraccionales de desplazamientos se dice que puede incurrir en un cataclismo expresado en la Teoría del Caos y, por lo tanto, es denominado sistema complejo, como medida preventiva a estos fenómenos de memoria larga surge la metodología fractales.

El objetivo fundamental de esta tesis fue el demostrar la presencia del supuesto de memoria larga planteando un modelo econométrico basado en la geometría fractal, a través de la técnica conocida como wavelet, rango escalado y el coeficiente de Hurst para la identificación de la teoría de los mercados fractales en el sector financiero mexicano.

En la presente tesis se demuestra la hipótesis de que diversas variables en el sector financiero mexicano pueden ser adaptadas a una *dimensión de Hausdorff-Besicovitch*. Por lo tanto, a través del coeficiente de Hurst y sus diversas formas de estimar este indicador se analizó por qué las variables de estudio son sujetas a una memoria en sus componentes y son susceptibles a ser modeladas a través de un análisis fractal garantizando la prevención de un *caos financiero* y facilitando la medición de sistemas *complejos* y rugosos ante la teoría tradicional.

Así pues, la aportación principal de esta investigación consistió en comparar la teoría de los mercados eficientes con la teoría fractales para demostrar que los modelos de memoria larga existen en el sector financiero mexicano, por lo tanto, son sensibles a condiciones iniciales de desplazamiento en la tendencia de su comportamiento.

Cuando se garantizó que las variables estudiadas manifiestan una volatilidad en su movimiento histórico y además para el caso de ICA existe un desplazamiento en la dimensión de *Hausdurf-Bersicovich* y por lo tanto esta representa con una distribución de colas pesadas, se demuestra que la metodología fractales es una herramienta alterna y complementaria a la metodología tradicional, dicho de otra manera, la coevolución de ambas metodologías puede generar un estudio con mayor potencialidad.

En base a los resultados obtenidos se plantea la idea que para comenzar con un análisis financiero de carácter preventivo al caos, se debe identificar principalmente si existe volatilidad en los activos de investigación a través del tiempo, posteriormente observar por medio del análisis de rango reescalado si la tendencia de esta volatilidad presenta un índice de Hurst que cumpla los parámetros del criterio de memoria larga, por medio de esta metodología se podrá acceder a un panorama con mayor amplitud a la hora de modelar una variable volátil y simultáneamente asignar la teoría de mercado que mejor se adjudique al caso particular que se pretende estudiar.

Se debe entender que la comparación de estas dos metodologías al momento de realizar un pronóstico debe cumplir las mismas facultades de potencialidad, esto quiere decir que un análisis multifractal para proyectar una volatilidad futura estará expuesto a la comparación con un tipo específico de la familia de los modelos GARCH y no esté en su manera simple, de esta forma se podrá realizar la comparativa entre modelos con características similares de potencialidad y hacer un análisis de manera ecuánime, por lo tanto, esta investigación propicia los conocimientos básicos para entender ambas teorías y los procedimientos de estimación dando pauta al lector a crear proyectos futuros de investigación a partir de estos elementos básicos estudiados en este documento.

Anexo 1. Lenguaje de Programación utilizado en la investigación (R. studio versión 3.5.1)

```
+++++ Simulación Box-Jenkins +++++
install.packages (#nombre de libreria#)

library(forecast)

library(urca)

library(strucchange)

library(sandwich)

library(fUnitRoots)

datos<-read.csv(file.choose(),header=T)

attach(datos)

datos

yt<-ts(y,start=c(1996,1),freq=4)

plot.ts(yt)

lVariable<-log(yt)

plot(stl((lVariable), s.window=4, t.window=12))

urdfTest(lVariable, lags = 1, type = c("nc"), doplot = F)

urdfTest(lVariable, lags = 1, type = c("c"), doplot = F)

urdfTest(lVariable, lags = 1, type = c("ct"), doplot = F)

ndiffs(yt, alpha=0.05, test=c("adf"), max.d=2)

tsdisplay(lVariable, lag.max=60, main = "Variable")

nsdiffs(yt, m=4, test=c("ocsb"), max.D=2)

dlVariable<-diff(log(yt))

plot(stl((dlVariable), s.window=4, t.window=12))

arima_x=auto.arima(yt, max.p=2, max.q=2, max.P=2, max.Q=2, max.d=1, max.D=1, start.p=2, start.q=2,
start.P=1, start.Q=1,stationary=FALSE , seasonal=TRUE, ic=c("bic"), test=c("kpss"), seasonal.test=c("ocsb"))

arima_x

arima_x1=auto.arima(yt, max.p=12, max.q=12, max.P=12, max.Q=12, max.d=1, max.D=1, start.p=2, start.q=2,
start.P=1, start.Q=1,stationary=FALSE , seasonal=TRUE, ic=c("bic"),stepwise=T, test=c("kpss"),
seasonal.test=c("ocsb"))

arima_x1
```

```
summary(yt.arima<-Arima(yt, order=c(0,1,1), seasonal=c(0,1,1),include.mean=T, include.drift=F,
include.constant=T, method=c("ML"))))
```

```
summary(yt.arima1<-Arima(yt, order=c(0,1,1), seasonal=c(0,1,1),include.mean=F, include.drift=F,
include.constant=T, method=c("ML"))))
```

```
res1<-(residuals(yt.arima))
```

```
plot(res1)
```

```
pronostico<-forecast(yt.arima, h=5, level=c(95))
```

```
pronostico
```

```
plot(pronostico , main = "Horizonte=1")
```

```
+++++ Varianzas +++++
```

```
lVariable<-log(yt)
```

```
dlVariable<-diff(log(yt))
```

```
my<-mean(dlVariable)
```

```
xt<-dlVariable-my
```

```
plot(xt)
```

```
x2t<-xt^2
```

```
plot(x2t)
```

```
class(x2t)
```

```
reg1<-lm(x2t~xr1)
```

```
summary(reg1)
```

```
U<-ts.union(x2t,xr1,xr2,xr3)
```

```
xr1<-(lag(x2t,-1))
```

```
xr2<-(lag(x2t,-2))
```

```
xr3<-(lag(x2t,-3))
```

```
Ut<-lm(x2t~xr1+xr2+xr3)
```

```
summary(Ut)
```

+++++ Fractales +++++

```
Sierpinski <- function(puntos=3000, tipo="*", color="black"){
  x <- 0
  y <- 0

  x[1] <- abs(rnorm(1))

  if(x[1] < 0.5)
    y[1] <- abs(rnorm(1)*sqrt(3)*x[1])
  else
    y[1] <- abs(rnorm(1)*(-sqrt(3)*x[1]+sqrt(3)))

  plot.new()
  points(c(0,1,0.5,0),c(0,0,sqrt(3)/2,0), pch=tipo, col=color)

  points(x[1],y[1], pch=tipo, col=color)

  {
    aux <- abs(3*rnorm(1))

    if(aux <= 1)
      {
        x[i] <- x[i-1]/2
        y[i] <- y[i-1]/2
      }
    else
      {
        if(aux <= 2)
          {
            x[i] <- (1+x[i-1])/2
            y[i] <- y[i-1]/2
          }
        else
          {
            x[i] <- (0.5+x[i-1])/2
            y[i] <- ((sqrt(3)/2)+y[i-1])/2
          }
      }
  }

  points(x,y,pch=tipo, col=color)
}
```

+++++ Hurst +++++

```
install.packages("fractal")
install.packages("sos")
library(fractal)

FD<-FDWhittle(yt) #* Estimate the Hurst coefficient by Whittle's method

hurstACVF(yt) *Estimate the Hurst coefficient by regression of scaled asinh plot of ACVF vs log(lag)

hurstBlock(yt)*Hurst coefficient estimation in the time domain.

hurstSpec(yt) *

dispersion(yt,front=FALSE)* Dispersion analysis
```

```

EMEM<-embedSeries(yt)*Creates a delay embedding of a single variable time series

plot(EMEM)

FDS<-FDSimulate(yt)*Simulation of an FD process with time varying model parameters

plot(FDS)

plot(FNN(yt))

FNN(yt) *Estimation of the proper embedding dimension for a single-variabletime series

FNS(yt) *Estimation of the proper embedding dimension for a single-variabletime series

fractalBlock()

fractalBlock(time,estimator, exponent, exponent.name,scale, stat, stat.name, detrend, overlap,data.name,
sum.order, series, logfit, sdf=NULL)

+++++ Hurst (R/S) +++++

M<-mean(yt)          -9620.6031  -8866.0531

Z<-(yt-M)           FD<- coeficiente de hurst

Y

(M-((68*M)/(68))) Z

RS<-yt*(68)^0.9249783

RSl<-log(RS)

plot(RSl)

plot(RS)

plot(yt)

plot(forecast(RS))

plot(pronostico , main = "Horizonte=1")

mean(RS)

```

Referencias bibliográficas

- (s.f.). Recuperado el 24 de 03 de 2018, de
<https://matap.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo1/frames.htm>
- (s.f.). Obtenido de
https://www.google.com.mx/search?q=diferencia+entre+una+distribuci%C3%B3n+leptocurtica+a+y+una+mesocurtica&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjxzOGb1ujaAhXSuFMKHTKYBCOQ_AUICigB&biw=1280&bih=694#imgrc=cnJM6v37hm9EDM:
- 4 Razones para entender el desplome de ICA en la Bolsa Mexicana de Valores. (7 de Marzo de 2017).
Expansión, en alianza con CNN.
- Aguilar, R. R. (s.f.). *El coeficiente de Hurst y el parámetro alfa-estable para el análisis de series financieras*. Escuela Superior de Economía, Instituto Politecnico Nacional.
- Anna Batlle Joher, S. g. (2008). *fractales en los mercados financieros, tesina mercados financieros*.
- Anna Batlle Montoro, S. G. (2009). *Tesina "Fractales en los mercados financieros"*.
- Bachelier, L. (2011). *The Theory of Speculation*. TeXnicCenter version 1.0.
- Bermejo, E. L. (2011). *Métodos wavelet para en análisis estadístico de series funcionales*. Universidad Granada.
- Carrasco, S. M. (2016). *Análisis Sistemico del escalamiento dinamico de las fluctuaciones del petroleo: caso Wti*. Mexico, Df.
- Ciencia.nasa.gov*. (s.f.). Obtenido de https://ciencia.nasa.gov/science-at-nasa/2010/11mar_figureaxis
- Cursos de prediccion economica y empresarial*. (s.f.). Recuperado el 12 de febrero de 2018, de
www.uam.es/predysim
- Damodar N. Gujarati, D. C. (quinta edicion 2010). *Econometria*. Mc Graw Hill.
- Dickey D., F. W. (1979). Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root.
Journal of the amaerican Statistical Association, 427-431.
- Diethelm Wuertz, T. S. (2017). *Patent No. Version 3042.79*.
- Dimensión Fractal*. (s.f.). Recuperado el 23 de 03 de 2018, de
http://www.asociacionceat.org/aw/2/dimension_fractal.htm
- Duarte, J. B. (2 de Octubre de 2013). Obtenido de
<http://congreso.investiga.fca.unam.mx/docs/xviii/docs/11.09.pdf>

- Economipedia. (s.f.). Recuperado el 01 de 05 de 2018, de <http://economipedia.com/definiciones/teoria-de-ondas-elliott.html>
- Enders, W. (1948). *Applied Econometric Time Series*. Wiley.
- Fama, E. F. (1991). Efficient Capital Markets. *The Journal of Finance*.
- Feldman, S. B. (1985). *Multiple Regression in Practice, University paper series on quantitative application in the social sciences*. Newbury Park CA.
- Grupo BMV. (s.f.). Obtenido de https://www.bmv.com.mx/es/Grupo_BMV
- Gujarati, D. N. (2010). *Econometría*. Mc Graw Hill.
- Heinz-Otto Peitgen, H. J. (2004). *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. New York: Springer.
- Jose Angel Roldan Casas, R. D. (2006). *Análisis de detección de raíces unitarias en series de tiempo. Un enfoque metodológico con tests no similares*. Córdoba Dpo de Estadística e Investigación Operativa E.S.I.A y de Montes: Universidad de Córdoba .
- K.Falconer. (1985). *"The Geometry of Fractal Sets"*.
- Lorents, E. (1969). La teoría del caos y la bolsa. *in Bestia* , 53.
- Lütkepohl, H. (1991). *Introduction to multiple time series analysis*. Springer.
- Mandelbrot, B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. W.FREEMAN AND COMPANY.
- Mandelbrot, B. B. (1982). *THE FRACTAL GEOMETRY OF NATURE*.
- Martínez, L. A. (20 de noviembre de 2010). *El Economista.es*. Recuperado el 01 de 04 de 2018, de <http://www.eleconomista.es/cruce/BTCUSD>
- Medina, E. T. (2005). *"Análisis Fractal del Mercado de Valores de México (1978-2004)"*. México, D.F.: Instituto Politécnico Nacional, Doctorado en ciencias con especialidad en ciencias administrativas.
- Morales Matamoros, O., Balankin, A., & Hernandez Simon, L. (2005). Metodología de predicción de precios del petróleo basada en dinámica fractal. *Científica*, vol. 9, núm. 1, 2005, pp. 3-11, pp. 3-11.
- Morales, R. (28 de septiembre de 2017). Comercio estacional fracturaría TLCAN: SE. *El Economista*, pág. 56.
- Pollock, D. S. (Nov 17, 1999). *Handbook of Time Series Analysis, Signal Processing, and Dynamics*; .

- Puig, X. (29 de marzo de 2009). *El Economista*. Recuperado el 26 de Marzo de 2018, de <http://www.economista.es/diccionario-de-economia/volatilidad>
- Rossi, E. (2012). *Long Memory Processes, Econometric specifications*. Universidad de Pavia.
- Saupe, P. J. (2003). *Chaos and Fractals, New Frontiers of Science*. Springer.
- Shiller, R. J. (1967). *Human Behavior and the Efficiency of the Financial System*.
- Simó, J. M. (1995). *Geometría de medidas y conjuntos autosemejantes*. Madrid, Universidad Complutense: Tesis Doctoral, Facultad de Matemáticas.
- Valencia, A. M. (2010). *Estimadores del índice de cola y el valor del riesgo*. Bogotá, Colombia: Means of estimating the tail index and the value at risk.
- Videgaray, M. C. (s.f.). *Pronosticos, Metodología Box-Jenkins*. Facultad de Estudios Superiores Acátlan.