UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"Propiedades de la función T de Jones y otras funciones tipo conjunto"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ANGELA MARTÍNEZ RODRÍGUEZ

ASESORES:

DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO

DR. FÉLIX CAPULÍN PÉREZ

DR. NORBERTO ORDOÑEZ RAMIREZ

TOLUCA, MÉXICO, NOVIEMBRE 2018

A mi familia, por su apoyo,
comprensión y cariño.

Universidad Autónoma del Estado de México
UAEM

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN CIENCIAS

DRA. PETRA SÁNCHEZ NAVA
COORDINADORA DE INVESTIGACIÓN
Y ESTUDIOS AVANZADOS

PRESENTE

Nos permitimos informarle que hemos revisado la tesis tradicional titulada: **"Propiedades de la función *T* de Jones y otras funciones tipo conjunto"**, que presenta la **Mat. Angela Martínez Rodríguez.** Dicho trabajo cuenta con nuestro **Voto Aprobatorio.**

ATENTAMENTE

DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO

DR. FÉLIX CAPULÍN PÉREZ

DR. NORBERTO ORDOÑEZ RAMÍREZ

DR. FERNANDO OROZCO ZITLI

DRA. MARÍA DE JESÚS LÓPEZ TORIZ

DR. DAVID MAYA ESCUDERO

DR. ALFREDO CANO RODRÍGUEZ

NORBERTO ORDOÑEZ

Acta 112 Acuerdo 343/MC
c.c.p. Archivo
PSN/nmg

Facultad de Ciencias

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer a mi familia, que con su apoyo, comprensión y cariño, me han mostrado que la perseverancia y el esfuerzo son los caminos para alcanzar mis metas, por demostrarme que la familia siempre está para apoyarse, aún en los momentos más difíciles. Que a pesar de nuestras diferencias hemos sabido tolerar y encaminar cada uno de estos aspectos para crear lazos que perdurarán por siempre, por enseñarme el valor de la responsabilidad y el trabajo en equipo.

A mi mamá, Silvia quien con su cariño supo iluminar mis días, por ser más que una madre, por ser mi consejera y amiga.

A mis papás, Graciela y Severiano por ser los pilares de mi gran familia, por mostrarme que la humildad y el trabajo duro forjan el caracter, pero sobre todo por su apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida.

A José Luis quien me ha enseñado a forjar un mejor carácter, por brindarme su apoyo, por escucharme mientras divagaba, por mostrarme que siempre existe alguien en la vida diseñado para ti.

A mis tíos Rubén, Saúl, Guadalupe, Severiano, Marisol, Nancy, Leticia y Mary Carmen por ser mis guías y ejemplos a seguir.

Agradezco enormemente a mis asesores, Dr. Enrique Castañeda Alvarado, Dr. Félix Capulín Pérez y Dr. Norberto Ordoñez Ramirez, por enriquecer día a día el trabajo, por sus ideas, sus consejos y regaños. Por aceptar ser mis asesores y tener la paciencia de trabajar conmigo.

Agradezco a mis revisores, Dr. David Maya Escudero, Dr. Fernando Orozco Zitli, Dra. María de Jesús López Toriz y al Dr. Alfredo Cano Rodríguez por tomarse el tiempo para revisar este trabajo y enriquecerlo con sus comentarios.

Finalmente quiero agradecer a mis amigos y compañeros Miguel Angel, Marlen, Lucero, Daniel y Mario quienes siempre me apoyaron en mis locuras e hicieron divertida mi estadia en la facultad. Sus ideas academicamente me enriquecieron bastante.

Sé que habrá alguien a quien he olvidado agradecer, si así fuera el caso, estás son líneas para aquellos y aquellas a quienes no nombré y que han sido parte importante en esta gran experiencia.

Resumen

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un subconjunto de X es un subcontinuo, si es en si un continuo. El hiperespacio de subcontinuos de X es denotado por $C(X)$.

Si X es un espacio métrico compacto y $\mathcal{P}(X)$ el conjunto potencia de X. Una función $\mathcal{L}$ es tipo conjunto si va del conjunto potencia de X en si mismo, es decir, $\mathcal{L} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

En este proyecto de investigación se estudian tres funciones tipo conjunto. Las funciones T y K definidas por F. B. Jones como:

$$T(A) = X \setminus \{x \in X : \text{existe } W \in C(X) \text{ tal que } x \in \text{Int}(W), W \subset X \setminus A\}$$

$$K(A) = \bigcap \{B \in C(X) : A \subset \text{Int}B\}$$

y la función T^{∞} definida por L. Fernández y S. Macías como:

$$T^{\infty}(A) = \bigcap \{B \subset X : T(B) = B, A \subset \text{Int}(B)\}.$$

El trabajo se compone de tres capítulos. En el Capítulo 1 se exponen conceptos necesarios de Topología General, así como clases de funciones entre espacios métricos.

En el Capítulo 2 definimos los aspectos básicos de las funciones tipo conjunto: aditividad, simetría, simetría puntual. Así como las propiedades generales de las funciones T, K y T^{∞}.

En el Capítulo 3 damos a conocer resultados propios obtenidos durante la investigación, correspondientes a la invarianza y coinvarianza de la función T, se generalizan resultados sobre la función T^{∞}, y mostramos algunos conjuntos para los cuales la función K es K-aditiva, así como que la función K es coinvariante bajo funciones monótonas.

Introducción

El siguiente trabajo pertenece a la rama de la Topología General conocida como *Teoría de Continuos y sus Hiperespacios*. Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Para un continuo X, se consideran las siguientes familias de subconjuntos de X:

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío en } X\},$$

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo en } X\}.$$

Estas familias de subconjuntos de X, dotadas con la métrica de Hausdorff, o equivalentemente, con la topología de Vietoris, se denominan el hiperespacio de cerrados de X y el hiperespacio de subcontinuos de X, respectivamente.

En 1948, en el artículo *Concerning nonaposyndetic continua* [7], F. Burton Jones define las funciones de tipo conjunto T y K, las cuales están relacionadas fuertemente con el concepto de aposindésis en continuos. La función T, conocida también como *T de Jones*, ha sido ampliamente estudiada y se conocen bastantes resultados relacionados con este concepto, mientras la función K ha sido estudiada en años más recientes.

En 1998, bajo la dirección de Sergio Macías Álvarez, María Antonieta Molina Garza Galindo presenta la tesis de licenciatura titulada *Algunos aspectos sobre la función T de Jones* [15], donde desglosada algunos de los resultados que son base para nuestro estudio y los cuales presentamos en algunos capítulos de este trabajo.

Se ha vuelto tan frecuente el estudio de la función T de Jones, que en 2005, Sergio Macías introduce un capítulo acerca de esta función en su libro *Topics on continua* [12].

En 2010, bajo la dirección de Sergio Macías, Leobardo Fernández Román presenta la tesis doctoral titulada *Funciones del conjunto potencia de un conjunto en sí mismo* [4], donde además de presentar algunas propiedades de dichas funciones, también muestra resultados de las funciones T y K. Más aún, en el mismo año, presentan el artículo *The set functions T and K and irreducible continua* [5] en coautoría con Sergio Macías.

Posteriormente en 2015, David B. Bellamy, Leobardo Fernández y Sergio Macías presentan el artículo *On T-closed sets* [2], donde además de estudiar las funciones T y K de Jones, introducen el concepto de función T^∞ y muestran diversos resultados al respecto.

Este trabajo de tesis está compuesto por tres capítulos. En el Capítulo 1, hacemos un resumen de los resultados necesarios para el desarrollo de nuestro trabajo, tomados de la teoría de continuos, tales como la conexidad local, continuos unicoherentes, la propiedad de aposindésis y semiaposindésis. Además, mostramos algunos resultados acerca de algunas clases de funciones especiales entre continuos tales como funciones abiertas, atómicas, confluentes, cuasimonótonas, débilmente confluentes, monótonas, etc.

En el Capítulo 2 primera sección, definimos algunas propiedades básica de las funciones tipo conjunto, como son la aditividad, la simetría y la simetría puntual. En la segunda sección, revisamos las propiedades más relevantes de la función T tales como su aditividad, simetría, la relación que tiene con algunos tipos especiales de continuos como son los localmente conexos o los hereditarriamente unicoherentes; además de la relación de la función T de Jones con algunas clases de funciones especiales entre continuos. En la tercera sección, mostramos propiedades generales de la función T^∞ así como su relación con la función T. Finalmente, en la cuarta sección, mostramos propiedades de la función K de manera similar a como lo hacemos en la sección 2 para la función T.

En el Capítulo 3, mostramos resultados originales obtenidos de la investigación realizada bajo la asesoría de Enrique Castañeda Alvarado, Félix Capulín Pérez y Norberto Ordoñez Ramírez. Este capítulo, está dividido en tres secciones, en la primera, desarrollamos conceptos de la función T de Jones relacionados con la invarianza y coinvarianza de funciones, además de las propiedades de T- aditividad y T-simetría, los cuales nos ayudan a resolver de manera parcial a la siguiente pregunta:

Pregunta 0.1. *Sea $f : X \to Y$ es una función entre continuos con una propiedad P, ¿Será que Y es T-simétrico (respectivamente, T-aditivo), si X es T-simétrico (respectivamente, T-aditivo)?*

Resulta que la T-simetría (respectivamente, T-aditividad) es invariante bajo funciones atómicas, casi monótonas, hereditarimente confluentes, hereditariamente monótonas y homeomorfismos, pero la T-aditividad no es invariante bajo funciones juntadoras o ligeras. Por otro lado, la T-simetría (respectivamente, T-aditividad) no es coinvariante bajo las funciones atriódicas, casimonótonas, cuasimonótonas, seudomonótonas, débilmente monótonas, confluentes, débilmente confluentes, semiconfluentes, seudoconfluentes, juntadoras y casi interiores. En la segunda sección, mostramos las generalizaciones hechas por nosotros de algunos teoremas extraídos de [12] acerca de la función T^∞. Finalmente, en la tercera sección, mencionamos algunos tipos de continuos los cuales son K-aditivos, además de que la K-aditividad es coinvariante bajo funciones monótonas y abiertas.

Angela Martínez Rodríguez
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma del Estado de México

Antecedentes

En 1938 F. B. Jones, consulto al Dr. Leon en el Departamento de Letras Clásicas de la Universidad de Texas. No fue fácil explicarle a alguien que sabía casi nada de matemáticas lo que quería decir, que un continuo tenga a p en su interior pero no tuviera a q. Después de 30 minutos sin embargo, el captó la idea y construyó la palabra "aposindético". La terminología "Deo"quiere decir envolver, "sin"significa "junto", y "apo"quiere decir "lejos". El conjunto M es aposindético en p con respecto a q significa que "M envuelve a p lejos de q".

La función T fue definida por F. B. Jones en [7]. La noción de aposindésis fue la motivación de Jones para definir la función T.

En 2005, S. Macías en [12] hace la siguiente pregunta, ¿Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta entre continuos y X es T-simétrico (T-aditivo) entonces Y es T-simétrico (T-aditivo)?.

F. B. Jones en 1948, también define la función K. Y en 2009, S. Macías en [11], prueba que la función K no implica la continuidad de la función T. Para el año 2010, L. Fernández y S. Macías en [5], prueban que si X es un espacio irreducible entonces $K(A)$ es conexo y que $T(K(A)) = K(T(A))$ para cada subconjunto cerrado A de X. Además de una caracterización de continuos irreducibles K-simétricos.

Para 2015, D. P. Bellamy, L. Fernández, S. Macías en su artículo [2], definen la clase de los conjuntos T-cerrados de un continuo y estudian sus propiedades, en particular presentan una caracterización de los elementos de está clase. Así mismo, definen una nueva función tipo conjunto, la función T^{∞}, considerando la familia mínimal de conjuntos T-cerrados.

Hipótesis

Se sabe que si $f : X \longrightarrow Y$ es una función monótona y suprayectiva entre continuos, si X es T-simétrico (T-aditivo) entonces Y es T-simétrico (T-aditivo). Surge entonces la pregunta si $f : X \longrightarrow Y$ es una función entre continuos suprayectiva con una propiedad P, ¿sí X es T-simétrico (T-aditivo) entonces Y es T-simétrico (T-aditivo)?.
Para nuestro problema necesitamos conocer las clases de funciones y su comportamiento.

Objetivo

El próposito principal de este trabajo es estudiar propiedades de las funciones tipo conjunto T de Jones, función K y función T^∞. En particular, si $f : X \longrightarrow Y$ es una función entre continuos suprayectiva con una propiedad P nos interesa saber lo siguiente ¿sí X es T-simétrico (T-aditivo) entonces Y es T-simétrico (T-aditivo)?.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo mostraremos algunos conceptos básicos de topología general, teoría de continuos e hiperespacios de continuos. Además mostramos algunas clases de funciones entre continuos que serán de utilidad a lo largo de este trabajo.

Notación

Dados un espacio topológico X y $A \subset X$. Denotamos por Int(A) y Fr(A), el interior y la frontera de A en X; Int$_Y(A)$ y Fr$_Y(A)$, denota el interior y la frontera de A en un subespacio Y de X. La cerradura de A lo denotamos con Cl(A); Cl$_Y(A)$ denota la cerradura de A en un subespacio Y de X.
Dado un espacio métrico X, con métrica d. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in X$. Denotamos por,

$$B_d(\varepsilon, x) = \{q \in X : d(x, q) < \varepsilon\},$$

a la bola abierta de radio ε con centro en x.
Si no existe confusión con la métrica del espacio, escribiremos $B(\varepsilon, x)$ en lugar de $B_d(\varepsilon, x)$.

1.1. Conceptos de topología

En esta sección recordamos algunas propiedades de los espacios topológicos que utilizaremos posteriormente. Las pruebas aquí mostradas pueden también ser consultadas en [9], [10] y [16].

Teorema 1.1. *(de reducción de Brouwer) Si X es un espacio segundo numerable y $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de subconjuntos cerrados de X, con la propiedad de que para cada sucesión creciente, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$, de elementos de $\mathcal{A}$ existe un elemento, A de $\mathcal{A}$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A$. Entonces $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal.*
Si $\mathcal{A}$ es una familia no vacía de subconjuntos cerrados de X, con la propiedad de que para cada sucesión decreciente, $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, de elementos de $\mathcal{A}$ existe un elemento, A de $\mathcal{A}$, tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \supset A$. Entonces A tiene un elemento minimal.

Demostración. Fijemos un elemento $A_0 \in \mathcal{A}$ y una base numerable, $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, para la topología de X. Consideremos la subcolección $\mathcal{A}_1$ de la familia $\mathcal{A}$ definida como sigue:

$$\mathcal{A}_1 = \{A \in \mathcal{A} : A_0 \subsetneq A \text{ y } A \cap B_1 \neq \emptyset\}.$$

Si $\mathcal{A}_1$ es no vacía, entonces fijamos un elemento $A_1 \in \mathcal{A}_1$. Si la colección $\mathcal{A}_1$ es vacía, entonces definimos $A_1 = A_0$.
Análogamente tomemos la subcolección $\mathcal{A}_2$ de la familia $\mathcal{A}$ definida como sigue:

$$\mathcal{A}_2 = \{A \in \mathcal{A} : A_1 \subsetneq A \text{ y } A \cap B_2 \neq \emptyset\}.$$

Si $\mathcal{A}_2$ es no vacía, entonces fijamos un elemento $A_2 \in \mathcal{A}_2$. Si la colección $\mathcal{A}_2$ es vacía, entonces definimos $A_2 = A_1$. Siguiendo con está construcción, supongamos se han determinado n elementos de $\mathcal{A}$, digamos $A_1, A_2, ..., A_n$ tales que $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ y si, A_{i-1} está contenido propiamente en A_i, entonces $A_i \cap B_i \neq \emptyset$, para cada $i \in \{1, 2, , ..., n\}$. Consideremos la subcolección $\mathcal{A}_{n+1}$ de la familia $\mathcal{A}$ definida por:

$$\mathcal{A}_{n+1} = \{A \in \mathcal{A} : A_n \subsetneq A \text{ y } A \cap B_{n+1} \neq \emptyset\}.$$

Si A_{n+1} es no vacía, entonces fijamos un elemento $A_{n+1} \in \mathcal{A}_{n+1}$. Si la colección $\mathcal{A}_{n+1}$ es vacía, entonces definimos $A_{n+1} = A_n$. De este modo, inductivamente, se ha determinado una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{A}$,

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots,$$

con la propiedad adicional que, para cada $n \in \mathbb{N}$, si A_n está contenido propiamente en A_{n+1}, entonces $A_{n+1} \cap B_{n+1} \neq \emptyset$.
Por la hipótesis, existe un elemento A de $\mathcal{A}$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A$. Probemos que A es un elemento maximal en $\mathcal{A}$. Para esto, supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existe un elemento $A' \in \mathcal{A}$ que contiene propiamente al conjunto A y fijemos un punto $x \in A' \setminus A$. Se tiene que $X \setminus A$ es un conjunto abierto en X que contiene al punto x. Luego, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_m \subset X \setminus A$. Por otro lado, como $A_m \subset A$ y $A \cap B_m = \emptyset$, se tiene que $A_m \cap B_m = \emptyset$. Ahora, puesto que $A_{m-1} \subset A$ y A está contenido propiamente en A', se tiene que A_{m-1} está contenido propiamente en A'. Además, como $x \in A' \cap B_m$, se sigue que $A' \cap B_m \neq \emptyset$. Luego, A' es un elemento de la colección $\mathcal{A}_m$. Es decir, la colección $\mathcal{A}_m$ que usamos para determinar el elemento A_m de la sucesión construida, no es vacía. Luego, el elemento A_m está determinado de tal forma que $A_m \cap B_m \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción de modo que A es un elemento maximal en $\mathcal{A}$. Análogamente se puede probar que $\mathcal{A}$ tiene un elemento minimal. □

Definición 1.2. *Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una cubierta para X, diremos que $\mathcal{U}$ es* ***esencialmente infinita*** *si no tiene una subcubierta finita para X.*

Observación 1.3. *Un espacio topológico X es compacto, si no tiene cubiertas abiertas esencialmente infinitas.*

Una prueba del siguiente Lema puede consultarse en [8, Página 139].

Lema 1.4. *(Lema de Alexander) Si $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología de un espacio X tal que cada cubierta para X por elementos de $\mathcal{S}$ tiene una subcubierta finita, entonces X es compacto.*

Teorema 1.5. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y F un subespacio de X. Si F es compacto, entonces F es un subconjunto cerrado de X.*

Demostración. Sea $x \in X \backslash F$. Para cada $y \in F$, existen U_y y V_y subconjuntos abiertos ajenos, tales que $x \in U_y$ y $y \in V_y$. Luego $\{V_y : y \in F\}$ es una cubierta abierta de F; así por la compacidad de F, existe una subcubierta finita, digamos $\{V_{y_i}\}_{i=1}^{n}$. Sean $V = V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}$ y $U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Notemos que $U \cap V = \emptyset$, ya que si $z \in V$ entonces $z \in V_{y_i}$ para algún $i = 1, 2, ..., n$, entonces $z \notin U_{y_i}$, y así $z \notin U$. Por lo tanto, U es un subconjunto abierto tal que $x \in U$ y $U \cap F = \emptyset$. De esta manera F es un subconjunto cerrado. $\square$

Teorema 1.6. *Sea X un espacio topológico compacto y Y un espacio de Hausdorff. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua, entonces f es una función cerrada.*

Demostración. Sea F un subconjunto cerrado de X, entonces F es compacto. La función $f|_F : F \longrightarrow f(F)$ es continua y suprayectiva. Dado que F es compacto, se sigue que $f(F)$ es compacto. Ahora, como Y es de Hausdorff y $f(F)$ es compacto, por el Teorema 1.5, $f(F)$ es un subconjunto cerrado. De donde, f es una función cerrada. $\square$

Definición 1.7. *Sean X y Y dos espacio métricos compactos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es un **homeomorfismo** si f es continua, biyectiva y la función inversa f^{-1} es continua.*

Teorema 1.8. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto y Y es de Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Como f es una función continua y biyectiva, por el Teorema 1.6 f es cerrada. De donde f^{-1} es continua. Por lo tanto, f es un homeomorfismo. $\square$

Proposición 1.9. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre espacios topológicos. Si $A \subset X$ y $B \subset Y$, entonces*

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

Demostración. Se sabe que $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$. Basta probar que $f(A) \cap B \subset f(A \cap f^{-1}(B))$. Para ello, sea $y \in f(A) \cap B$. Como $y \in B$, tenemos que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(B)$. Más aún, $A \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$, ya que $y \in f(A)$.

Ahora, sea $x \in A \cap f^{-1}(y)$, se sigue que, $x \in A \cap f^{-1}(B)$ de tal manera que $y = f(x) \in f(f^{-1}(B) \cap A)$. Por lo tanto, $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$. $\square$

1.2. Continuos

En esta sección hablaremos de un tipo especial de espacios topológicos, los llamados continuos, los cuales han sido ampliamente estudiados en [6], [12] y [15]. Los resultados recopilados en ésta sección serán de gran utilidad para los capítulos posteriores.

Definición 1.10. *Un* ***continuo*** *es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío.*

Ejemplo 1.11. *El* ***intervalo*** $I = [0, 1]$ *es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Por lo que es un continuo (véase Figura 1.1).*

Figura 1.1: Intervalo $[0, 1]$

Ejemplo 1.12. *Diremos que un espacio topológico A es un* ***arco****, si A es homeomorfo al intervalo $I = [0, 1]$ (véase Figura 1.2).*

Figura 1.2: Arco

Ejemplo 1.13. *Sea $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Notemos que S es un espacio métrico, es compacto por ser un espacio cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, es conexo pues es la imagen continua del intervalo $[0, 2\pi]$. Así, S es el continuo llamado* ***circunferencia unitaria*** *(véase Figura 1.3).*

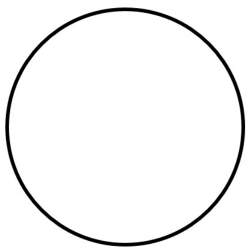


Figura 1.3: Circunferencia unitaria

Ejemplo 1.14. *Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 3$. Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ arcos, si existe un único punto p tal que $A_i \cap A_j = \{p\}$ para cada $i, j \in \{1, ..., n\}$ con $i \neq j$, diremos que $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es un* ***n-odo simple****. Notemos que Y es un espacio métrico y no vacío, dado que Y es la unión finita de espacios conexos y compactos que se intersectan, Y es conexo y compacto. Por lo que Y es un continuo. En la Figura 1.4 se muestra un 6-odo simple.*

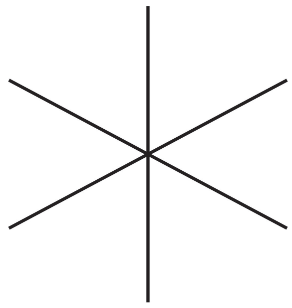


Figura 1.4: 6-odo simple

Ejemplo 1.15. *Sea G una unión finita de arcos de tal manera que cada dos de ellos se intersectan en un conjunto finito. Por la construcción, G es un espacio métrico, conexo, compacto y no vacío. A los continuos formados de esta manera los llamamos* ***gráficas finitas*** *(véase Figura 1.5).*

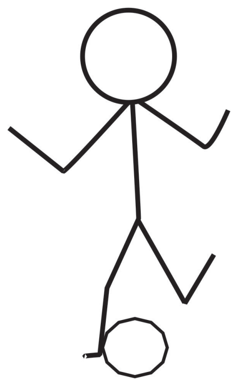


Figura 1.5: Ejemplo de una gráfica finita

Ejemplo 1.16. *Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1], y = sen(\frac{1}{x})\}$. Consideremos, $X = Cl(A)$. Notemos que X es un espacio métrico no vacío, A es conexo y por tanto $Cl(A)$ es conexo, X es compacto por ser cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$. Así, X es un continuo llamado* ***curva senoidal*** *(véase Figura 1.6).*

Ejemplo 1.17. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y = \frac{x}{n}\}$ y sea $A_0 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$. Consideremos $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_i$, X es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Por lo tanto, X es un continuo llamado* ***abanico armónico*** *(véase Figura 1.7).*

Definición 1.18. *Un* ***subcontinuo*** *es un subconjunto de un continuo que a su vez es un continuo.*

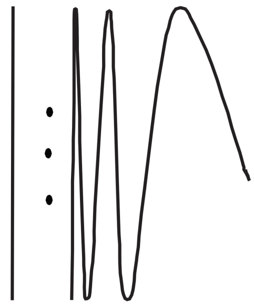


Figura 1.6: Curva senoidal

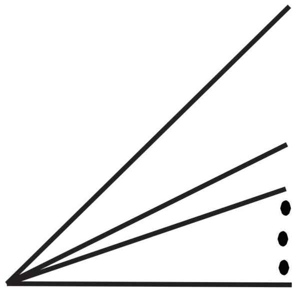


Figura 1.7: Abanico ármonico

Figura 1.8: El intervalo $[a, b]$ es un subcontinuo del intervalo $[0, 1]$

.

Ejemplo 1.19. *Los intervalos de la forma* $[a, b]$ *con* $0 \leq a < b \leq 1$ *son subcontinuos del intervalo* $I = [0, 1]$ *(véase Figura 1.8).*

Teorema 1.20. *Si* X *es un continuo y* $A_1, A_2, ...$ *es una sucesión de subcontinuos anidados de* X*, es decir,* $A_1 \supset A_2, \supset \cdots$ *entonces* $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *es un subcontinuo de* X.

Demostración. Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es un subconjunto cerrado de X. Se sigue que A es un subconjunto cerrado de X, por definición. Además, como X es compacto y $A \subseteq X$, tenemos que A es un subconjunto compacto de X. Por otro lado:

$$X \setminus A = X \setminus (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n).$$

Supongamos que $A = \emptyset$. Entonces $\{X \setminus A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para X y como X es compacto, entonces existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $X = \bigcup_{i=1}^{m}(X \setminus A_{n_i})$, sin pérdida de generalidad, supongamos que $n_i < n_{i+1}$, para cada $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, de manera que:

$$X = \bigcup_{i=1}^{m}(X \setminus A_{n_i}) = X \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{m} A_{n_i}\right) = X \setminus A_{n_m},$$

se sigue que A_{n_m} es un subconjunto vacío de X, lo cual es una contradicción, ya que A_{n_m} es un subcontinuo de X. Por lo que $A \neq \emptyset$.

Probemos ahora que A es conexo. Para ello, supongamos que A es disconexo, es decir, existen K y L subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de A tales que $A = K \cup L$. Por otro lado, como X es un espacio métrico, tenemos que X es un espacio normal, de tal manera que existen U y V subconjuntos abiertos de X, tales que $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$. Se sigue que

$$X \setminus (U \cup V) \subseteq X \setminus (K \cup L) = X \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n).$$

De tal manera que $\{X \setminus A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta para $X \setminus (U \cup V)$, más aún, como $X \setminus (U \cup V)$ es un compacto en X, tenemos que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $X \setminus (U \cup V) = \bigcup_{j=1}^{l}(X \setminus A_{n_j})$, sin perdida de generalidad, supongamos que $n_j < n_{j+1}$ para cada $j \in \{1, \ldots, l-1\}$, de tal manera que:

$$X \setminus (U \cup V) = \bigcup_{j=1}^{l} \left(X \setminus A_{n_j}\right) = X \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{l} A_{n_j}\right) = X \setminus A_{n_l},$$

por lo que $A_{n_l} \subseteq U \cup V$. Por otro lado, como $K \subseteq A \subseteq A_{n_l}$, tenemos que $K \cap A_{n_l}$ es un subconjunto no vacío de X. De forma análoga, $L \cap A_{n_l}$ es un subconjunto no vacío de X. Además, como $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$, se sigue que $A_{n_l} \cap U \neq \emptyset$ y $A_{n_l} \cap V \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción, ya que A_{n_l} es un subcontinuo de X. Por lo tanto, A es conexo.

Finalmente, como $A \subseteq X$, tenemos que A es un espacio métrico, por lo que A es un subcontinuo de X. $\square$

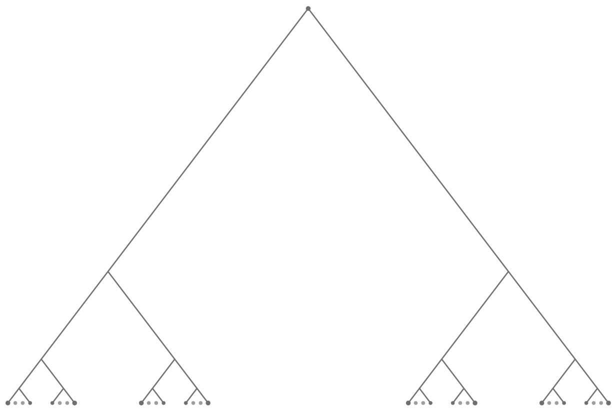


Figura 1.9: Dendrita de Gehman

Definición 1.21. *Sean X un continuo y $x \in X$. Decimos que X es* **localmente conexo en** x*, si para cualquier subconjunto abierto U en X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V tal que $x \in V$ y $V \subseteq U$. Diremos que X es* **localmente conexo** *si es localmente conexo en cada uno de sus puntos.*

Ejemplo 1.22.

- El intervalo $I = [0, 1]$ es un continuo localmente conexo.
- Un n-odo simple es un continuo localmente conexo.
- El continuo llamado *dendrita de Gehman*, definido en [6, Página 8], es un continuo localmente conexo (véase Figura 1.9).
- El abanico armónico es un continuo que no es localmente conexo.
- La curva senoidal es un continuo que no es localmente conexo.

Definición 1.23. *Sean X un espacio topológico y C un subconjunto de X, se dice que C es una* ***componente conexa*** *de X si C es conexo y para cada D subconjunto conexo de X tal que $C \subseteq D$, se tiene $C = D$.*

El siguiente lema es importante para nuestro trabajo.

Lema 1.24. *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X con un número finito de componentes. Si $p \in Int(A)$, entonces p está en el interior de la componente que la contiene.*

Demostración. Sean $C_1, \ldots, C_n$ las componentes de A. Dado que $p \in \text{Int}(A)$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B(\varepsilon_1, p) \subseteq A$. Sin perdida de generalidad, supongamos que $p \in C_1$. Dado que C_1 es cerrado y $C_1 \cap C_i = \emptyset$ para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$, se tiene que $d(C_1, C_i) > 0$ para cada $i \in \{2, \ldots, n\}$. Denotemos por $\lambda = \text{mín}\{d(C_1, C_i) : i \in \{2, \ldots, n\}\}$, notemos que $\lambda > 0$. Consideremos $\varepsilon = \text{mín}\{\frac{\lambda}{2}, \varepsilon_1\}$.

Afimación: $B(\varepsilon, p) \subseteq C_1$. Consideremos $x \in B(\varepsilon, p)$, se sigue que $d(x,p) < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, de tal manera que $x \in B(\varepsilon_1, p) \subseteq A$. Luego, como $x \in A$, supongamos que $x \in C_i$ para algún $i \in \{2, \ldots, n\}$, de tal forma que $\varepsilon \leq \frac{\lambda}{2} < \lambda \leq d(C_1, C_i) < d(x,p) < \varepsilon$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, p está en el interior de C_1. $\square$

Definición 1.25. *Un continuo X es* **descomponible***, si $X = A \cup B$ donde A y B son subcontinuos propios de X. Decimos que X es* **indescomponible** *si X no es descomponible.*

Ejemplo 1.26. *Los siguientes son ejemplos de continuos descomponibles:*

- El intervalo $I = [0, 1]$.
- La circunferencia unitaria S.
- Un n-odo simple.
- El círculo de Varsovia, definido en [6, Página 6] y mostrado en la *Figura 1.10*.

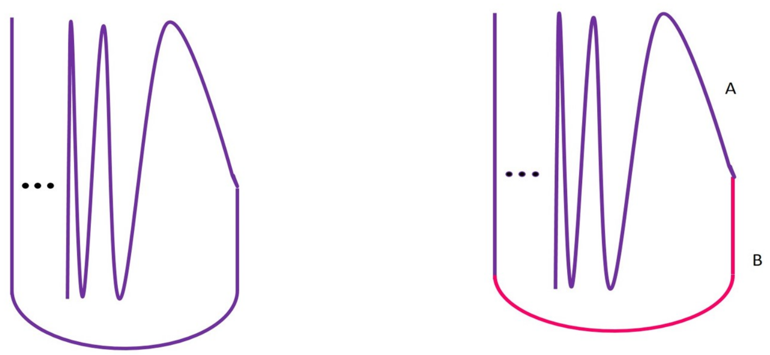


Figura 1.10: Círculo de Varsovia y Círculo de Varsovia como unión de dos subcontinuos propios.

Ejemplo 1.27. *El arcoiris de Knaster, definido en [6, Página 16] y mostrado en Figura 1.11, es un continuo indescomponible.*

Definición 1.28. *Un continuo X es* **hereditariamente descomponible** *si para cada subcontinuo A no degenerado de X se tiene que A es descomponible. De manera similar, decimos que X es* **hereditarimente indescomponible** *si todo subcontinuo de X es indescomponible.*

Definición 1.29. *Un continuo X es* **unicoherente** *si para cualesquiera A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$ se tiene que $A \cap B$ es conexo.*

Ejemplo 1.30. *Los siguientes son ejemplos de continuos unicoherentes.*

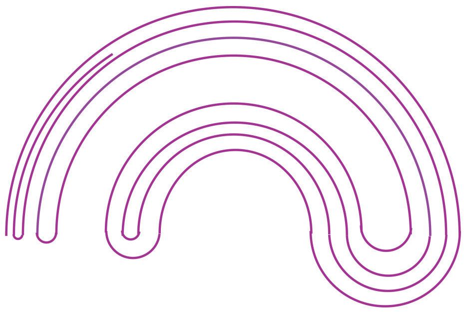


Figura 1.11: Arcoiris de Knaster.

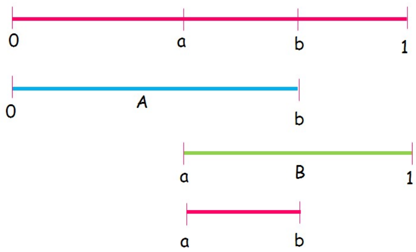


Figura 1.12: El intervalo $I = [0, 1]$ como la unión de los subintervalos A y B.

- El intervalo $I = [0, 1]$, (véase *Figura 1.12*).
- Un n-odo simple.

Ejemplo 1.31. *Los siguientes son ejemplos de continuos no unicoherentes.*

- La circunferencia, (véase *Figura 1.13*).

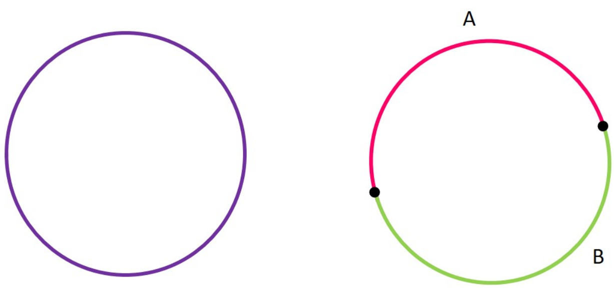


Figura 1.13: Circunferencia y circunferencia como unión de los subcontinuos A y B.

- El círculo de Varsovia.

Definición 1.32. *Un continuo X es* **hereditariamente unicoherente** *si cada subcontinuo A de X es unicoherente.*

Definición 1.33. *Un espacio métrico X es* ***conexo por continuos*** *si para cada par de puntos x y y de X, existe un subcontinuo A de X tal que $\{x, y\} \subseteq A$.*

Notemos que todo continuo es conexo por continuos. En particular el abanico armónico es conexo por continuos, sin embargo el conjunto de Cantor no lo es.

Definición 1.34. *Un continuo X es* ***débilmente irreducible*** *si el complemento de cada unión finita de subcontinuos tiene solo un número finito de componentes.*

Ejemplo 1.35. *La circunferencia, el arco y los n-odos simples son ejemplos de continuos débilmente irreducibles.*

Ejemplo 1.36. *El abanico armónico es un continuo que no es débilmente irreducible, ya que el complemento de la barra límite no tiene un número finito de componentes (véase Figura 1.14).*

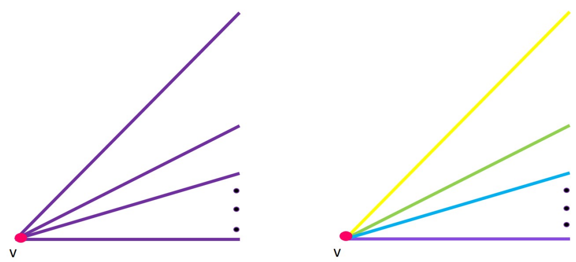


Figura 1.14: Abanico armónico, en la figura del lado derecho se muestran un ejemplo de porqué no es débilmente irreducible.

Definición 1.37. *Sean X un continuo, p y q puntos en X. Decimos que X es* **irreducible entre los puntos** *p y q, si para cada subcontinuo A de X tal que $\{p, q\} \subseteq A$, entonces $A = X$.*

Ejemplo 1.38. *El arco es irreducible entre sus puntos extremos.*

Ejemplo 1.39. *La circunferencia, un n-odo simple y el abanico armónico son ejemplos de continuos que no son irreducibles. Notemos en la Figura 1.15, que el $5-$odo simple es un continuo que no es irreducible entre los puntos p y q.*

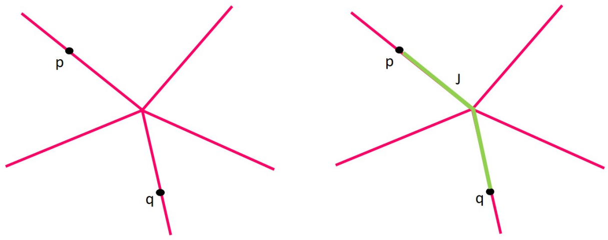


Figura 1.15: 5-odo simple

Lema 1.40. *Si X es un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$, entonces X no puede ser expresado como la unión de dos subcontinuos propios, A y B, tales que $a \in A \cap B$ o $b \in A \cap B$.*

Demostración. Notemos que si $X = A \cup B$ con A y B subcontinuos propios de X tales que $a \in A \cap B$, entonces $b \in A$ o $b \in B$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $b \in B$, entonces $a, b \in B$, se sigue por la irreducibilidad de X que $B = X$. Lo cual es una contradicción, ya que $B \subsetneq X$. □

Lema 1.41. *Sean X un continuo irreducible entre a y b, con $a, b \in X$; y C un subcontinuo de X. Entonces se cumple lo siguiente:*

(1) Si $X \setminus C$ es no conexo, entonces $X \setminus C$ es la unión de dos subconjuntos abiertos y conexos, U y V, tales que $\{a, b\} \cap (U \setminus V) \neq \emptyset$ y $\{a, b\} \cap (V \setminus U) \neq \emptyset$.

(2) Si $a \in C$ o $b \in C$ entonces $X \setminus C$ es conexo.

Demostración. Primero probaremos (2). Supongamos que $X \setminus C$ es no conexo entonces existen U y V subconjuntos abiertos no vacíos en $X \setminus C$ tales que $X \setminus C = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Luego, por la [16, Proposición 6.3], tenemos que $A = C \cup U$ y $B = C \cup V$ son conexos en X, se sigue que

$$X = A \cup B, \ A \cap B = C \text{ con } A \text{ y } B \text{ subconjuntos propios de } X.$$

De aquí que, por el Lema 1.40, $a \notin C$ y $b \notin C$. Por lo que se prueba (2).

Ahora probaremos (1). Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \in A$. Así $b \in B$. Entonces $b \in V$. De manera análoga, $a \in U$.

Finalmente veamos que U y V son conexos. En efecto, si suponemos que U es no conexo, entonces existen L y M subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos tales que $U = L \cup M$. Supongamos que $a \in L$. Entonces como $X \setminus C = M \cup (L \cup V)$, se sigue que $C \cup L \cup V$ es un subcontinuo propio de X que contiene tanto a los puntos a y b. Lo cual es una contradicción ya que X es irreducible entre a y b. Por lo tanto, U es conexo.

De manera similar se prueba que V es conexo. De donde obtenemos (1). □

Definición 1.42. *Sean X un continuo y $x \in X$, se dice que X es* ***conexo en pequeño en*** *x si para cada cerrado D de X contenido en $X \setminus \{x\}$, existe un subcontinuo C tal que $x \in$ Int$(C) \subseteq C \subseteq X \setminus D$.*

Proposición 1.43. *Sean X un continuo y $x \in X$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) X es conexo en pequeño en x.

(2) Para todo subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq U$ y para cada $y \in V$, distinto de x, existe un subconjunto conexo que contiene a $\{x, y\}$ y está contenido en U.

(3) Para todo subconjunti abierto U de X que contiene a x, existe un subcontinuo V de X tal que $x \in Int(V) \subseteq V \subseteq U$.

Demostración. $[(1) \Rightarrow (2)]$ Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Notemos que $X \setminus U$ es cerrado en X y $X \setminus U \subset X \setminus \{x\}$, por (1), existe un subcontinuo C de X tal que $x \in \text{Int}(C) \subseteq C \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Sea $V = \text{Int}(C)$, para todo punto $y \in V$, C es un subconjunto conexo que contiene a $\{x, y\}$ y $V \subset U$.

$[(2) \Rightarrow (3)]$ Sean $x \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Sea U' un subconjunto abierto de X tal que $U \subset U' \subset \text{Cl}(U') \subset \text{Cl}(U)$, por (2), existe un subconjunto abierto W de X, tal que $x \in W \subset U'$ y para toda $y \in W$ existe un conjunto conexo C_y, tal que $x, y \in C_y \subset U'$. Sea $C = \bigcup_{y \in W \setminus \{x\}} C_y$, notese que C es un conexo. Consideremos $V = \text{Cl}(C)$, V es un continuo contenido en $\text{Cl}(U') \subset U$ y tal que $x \in W \subset V$.

$[(3) \Rightarrow (1)]$ Sean $x \in X$ y D un subconjunto cerrado de X tal que $D \subset X \setminus \{x\}$. Como D es un subconjunto cerrado de X entonces $X \setminus D$ es subconjunto abierto de X. Así, por (3) existe un subcontinuo C tal que $x \in \text{Int}(C) \subset C \subset X \setminus D$. □

Definición 1.44. *Sean X un continuo y A un subcontinuo de X. Diremos que A es un* **continuo terminal** *de X si para cada subcontinuo B de X tal que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \subseteq B$ o $B \subseteq A$.*

Observación 1.45. *En un continuo X los conjuntos singulares son continuos terminales de X.*

Ejemplo 1.46. *Sea X la curva senoidal, definida en el Ejemplo 1.16. Consideremos $J = \{0\} \times [-1, 1]$ como subconjunto de X, notemos que J es un subcontinuo terminal de X, pero cualquier otro subcontinuo no degenerado A de J no es subcontinuo terminal de X (véase Figura 1.16).*

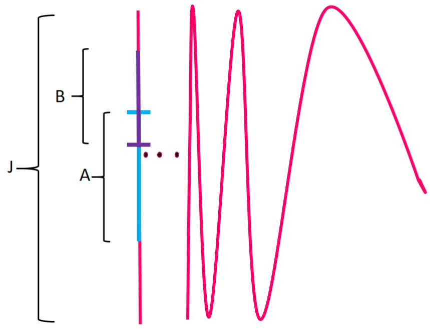


Figura 1.16: Curva senoidal.

Definición 1.47. *Sean X un continuo, x y y puntos en X. Decimos que X es* **aposindético en** x **con respecto a** y*, si existe un subcontinuo K de X tal que $x \in Int(K)$ y $y \notin K$. Decimos que X es* **aposindético en** x*, si X es aposindético en x con respecto a cualquier otro punto de X. Se dice que X es aposindético, si es aposindético en cada uno de sus puntos.*

Ejemplo 1.48. *La curva senoidal X no es aposindético (véase Figura 1.17). Sean A como en el Ejemplo 1.16 y J como en el Ejemplo 1.46, tenemos que $X = J \cup A$ de tal manera que:*

- *Si $x \in J$ y $y \in A$, entonces X es apodindético en x con respecto a y.*
- *Si $x, z \in J$ son tales que $x \neq z$, entonces X no es aposindético en x con respecto a z.*
- *Si $y \in A$, entonces X es aponsindético en y.*

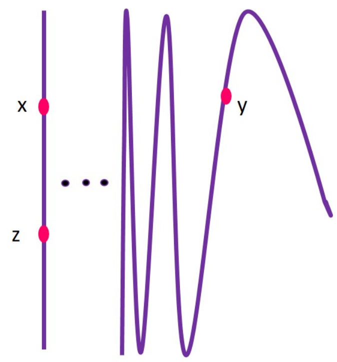


Figura 1.17: Aposindésis en la curva senoidal.

Definición 1.49. *Un continuo X es* ***semiaposindético*** *si para cualesquiera dos puntos x y y de X, existe un subcontinuo W de X tal que $\{x, y\} \cap Int(W) \neq \emptyset$ y $\{x, y\} \cap X \setminus W \neq \emptyset$.*

Observación 1.50. *Si X es un continuo aposindético, entonces X es semiaposindético. Sin embargo, el recíproco es falso, para ver esto basta considerar el abanico armónico, definido en el Ejemplo 1.17, y los puntos x y y como se muestra en la Figura 1.18.*

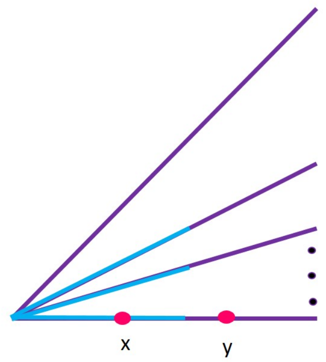


Figura 1.18: El abanico armónico es semiaposindético pero no aposindético.

1.3. Hiperespacios

Los hiperespacios son familias de subconjuntos de un espacio topológico, X, con alguna característica particular. Los más estudiados son:

$$2^X = \{F \subset X : F \text{ es no vacío y cerrado en } X\},$$
$$C(X) = \{F \in 2^X : F \text{ es conexo}\} \text{ y, para cada } n \in \mathbb{N},$$
$$F_n(X) = \{F \in 2^X : F \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos}\} \text{ y}$$
$$C_n(X) = \{F \in 2^X : F \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}.$$

Observación 1.51. *Por la forma en que se definen $C(X)$, $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son subconjuntos de 2^X, además $C(X) = C_1(X)$, $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$ y $F_n(X) \subset F_{n+1}(X)$, para cada $n \in \mathbb{N}$.*

1.3.1. Métrica de Hausdorff

Por la Observación 1.51 para dar una métrica a los conjuntos, $F_n(X)$ y $C_n(X)$, bastará dar una métrica al conjunto 2^X. Para ver esto, antes revisemos algunos conceptos.

Definición 1.52. *Dados X un espacio metrizable con métrica d, $F \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Definimos la* **nube** *de radio ε alrededor de F en X, $N_d(\varepsilon, F)$, como*

$$N_d(\varepsilon, F) = \{x \in X : \textit{ existe } y \in F \textit{ tal que } d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Proposición 1.53. *Sean X un espacio métrico compacto con métrica d, $F \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Se tiene que:*

(1) $N_d(\varepsilon, F) = \bigcup_{x \in F} B(\varepsilon, x)$*;*

(2) $N_d(\delta, F) \subset N_d(\varepsilon, F)$ *para* $\delta \in (0, \varepsilon]$*;*

(3) $N_d(\varepsilon, F) = \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F)$*;*

(4) Si U es un subconjunto abierto de X y $F \subset U$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N_d(\delta, F) \subset U$;

(5) Si $E \in 2^X$ tal que $F \cap E = \emptyset$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $N_d(\delta, F) \cap N_d(\delta, E) = \emptyset$.

Demostración.
(1) Consideremos $x \in N_d(\varepsilon, F)$, entonces existe $y \in F$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$, se tiene que $x \in B(\varepsilon, y) \subset \bigcup_{y \in F} B(\varepsilon, y)$. Así $N_d(\varepsilon, F) \subseteq \bigcup_{x \in F} B(\varepsilon, x)$.
Ahora, sea $x \in F$ entonces $d(x,y) < \varepsilon$ para cada $y \in B(\varepsilon, x)$. Así, $y \in N_d(\varepsilon, F)$ para cada $y \in B(\varepsilon, x)$. Es decir, $B(\varepsilon, x) \subset N_d(\varepsilon, F)$. Como x es arbitrario, se tiene que $\bigcup_{x \in F} B(\varepsilon, x) \subseteq N_d(\varepsilon, F)$.

(2) Tomemos $\delta \in (0, \varepsilon]$, veremos que $N_d(\delta, F) \subset N_d(\varepsilon, F)$, para ello consideremos $x \in N_d(\delta, F)$, es decir, existe $y \in F$ tal que $d(x,y) < \delta$, dado que $0 < \delta \leq \varepsilon$, se sigue que $d(x,y) < \varepsilon$, entonces $x \in N_d(\varepsilon, F)$.

(3) Por lo realizado en (2), se sigue que $\bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F) \subset N_d(\varepsilon, F)$. Así, resta probar que $N_d(\varepsilon, F) \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F)$. Para ello, sea $x \in N_d(\varepsilon, F)$, entonces existe $y \in F$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$; consideremos $\delta > 0$ fijo, tal que $d(x,y) < \delta < \varepsilon$. Luego, $x \in N_d(\delta, F) \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F)$, es decir, $N_d(\varepsilon, F) \subset \bigcup_{0<\delta<\varepsilon} N_d(\delta, F)$.

(4) Notemos que para cada $x \in F$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $B(\varepsilon_x, x) \subset U$. Como F es un subconjunto cerrado y no vacío en un espacio métrico compacto, se sique que F es compacto. Además, $\mathcal{B} = \{B\left(\frac{\varepsilon_x}{2}, x\right) : x \in F\}$ es una cubierta abierta para F. Entonces existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in F$ tales que $F \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(\frac{\varepsilon_{x_i}}{2}, x_i\right)$. Consideremos $\delta = \text{mín}\{\frac{\varepsilon_{x_i}}{2} : i \in \{1, \ldots, n\}\}$. Veamos ahora que $N_d(\delta, F) \subset U$. Para ello,

sea $y \in N_d(\delta, F)$ entonces existe $x \in F$ tal que $d(y,x) < \delta$ se tiene, que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in B\left(\frac{\varepsilon_{x_i}}{2}, x_i\right)$. Luego, como

$$d(y, x_i) \leq d(y, x) + d(x, x_i) < \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} + \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} = \varepsilon_{x_i}.$$

De aquí que $y \in B(\varepsilon_{x_i}, x_i)$, y así $y \in U$.

(5) Como X es un espacio métrico compacto entonces X es normal. Luego, como E y F son subconjuntos cerrados ajenos existen $U, V \subset X$ abiertos y ajenos tales que $E \subset U$ y $F \subset V$. Así, por (4) existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que $N_d(\delta_1, E) \subset U$ y $N_d(\delta_2, F) \subset V$. Consideremos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ entonces por (2) se tiene que $N_d(\delta, E) \subset U$ y $N_d(\delta, F) \subset V$. Más aún, como $U \cap V = \emptyset$ se sigue que $N_d(\delta, E) \cap N_d(\delta, F) = \emptyset$. $\square$

De ahora en adelante escribiremos $N(\varepsilon, F)$ para hacer referencia a $N_d(\varepsilon, F)$ siempre y cuando no exista confusión en la métrica.

Notación 1.54. *Sea X un espacio métrico compacto. Para cada par de elementos $A, B \in 2^X$ definamos el siguiente conjunto:*

$$E(A, B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Ya que hemos definido lo que es una nube, definamos ahora la métrica para 2^X conocida como *métrica de Hausdorff*.

Definición 1.55. *Dados X un espacio métrico compacto y $A, B \in 2^X$, se define $H : 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ como:*

$$H(A, B) = \inf E(A, B).$$

Algo que debemos verificar es que H es una métrica para 2^X. Lo cual hacemos en el siguiente resultado.

Proposición 1.56. *Sean X un espacio métrico compacto y $A, B, C \in 2^X$, se cumple:*

(1) $H(A, B)$ está bien definida;

(2) $H(A, B) \geq 0$;

(3) $H(A, B) = H(B, A)$;

(4) $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$;

(5) $H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B)$ (desigualdad del triángulo).

Demostración.
(1) Veamos que $H(A, B)$ está bien definida, es decir, probaremos que $E(A, B) \neq \emptyset$ y está acotado inferiormente. Primero veamos que es no vacío, para ello, notemos que $d(x, y) < diam(X) + 1$ para cualesquiera $x, y \in X$. De esta manera $A \subset$

$N(diam(X)+1, B)$ y $B \subset N(diam(X)+1, A)$. De tal forma que el número $diam(X)+1 \in E(A,B)$ lo cual muestra que el conjunto $E(A,B)$ es no vacío. Notemos que el conjunto es acotado inferiormente por el 0, por lo tanto $H(A,B)$ está bien definida.

(2) Como ínf $E(A,B) \geq 0$, se sigue que $H(A,B) \geq 0$.

(3) Notemos que:

$$H(A,B) = \text{ínf } E(A,B) = \text{ínf } E(B,A) = H(B,A).$$

(4) Supongamos $A = B$ entonces $H(A,B) = H(A,A) = \text{ínf } E(A,A) = \text{ínf}([0,\infty)) = 0$, por lo tanto $H(A,B) = 0$.

Ahora, supongamos que $H(A,B) = 0$, probaremos que $A = B$. Para ello consideremos $x \in A$ y $\varepsilon > 0$ fijos, notemos que $H(A,B) = 0 < \varepsilon$, por lo cual existe $\delta \in E(A,B)$ tal que $\delta < \varepsilon$, y así $A \subset N(\delta, B)$, se sigue que existe $y \in B$ tal que $d(x,y) \leq \delta < \varepsilon$, de aquí que $B(\varepsilon, x) \cap B \neq \emptyset$ y por la arbitrariedad de ε se sigue que $x \in \text{Cl}(B) = B$ es decir $x \in B$, se concluye que $A \subset B$.
De forma similar $B \subset A$. Por esto $A = B$.

(5) Por la forma en que definimos H, tenemos que probar que:

$$\text{ínf } E(A,C) \leq \text{ínf } E(A,B) + \text{ ínf } E(B,C).$$

Recordemos que el ínfimo de una suma de conjuntos es la suma de los ínfimos de los conjuntos, por lo que tenemos que probar que:

$$\text{ínf } E(A,C) \leq \text{ínf } \{\delta + \eta : \delta \in E(A,B) \text{ y } \eta \in E(B,C)\}.$$

Para hacer esto, tomemos dos elementos cualesquiera $\delta \in E(A,B)$ y $\eta \in E(B,C)$. Por definición, $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\eta, C)$. Dada $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $d(x,y) < \delta$, además existe $z \in C$ tal que $d(y,c) < \eta$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $d(x,z) < \delta + \eta$. Hemos probado que $A \subset N(\delta + \eta, C)$. De forma análoga se prueba que $C \subset N(\delta + \eta, A)$. De tal forma que $\delta + \eta \in E(A,C)$. Luego,

$$\text{ínf } E(A,C) \leq \delta + \eta.$$

Esto implica que ínf $E(A,C)$ es una cota inferior del conjunto $\{\delta + \eta : \delta \in E(A,B)$ y $\eta \in E(B,C)\}$ y, por tanto ínf $E(A,C) \leq$ ínf $\{\delta + \eta : \delta \in E(A,B)$ y $\eta \in E(B,C)\}$. $\square$

Por la Proposición 1.56, H es una métrica y es llamada la **métrica de Hausdorff** para 2^X.

Lema 1.57. *Sean X un espacio métrico compacto, $A, B \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $H(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si, $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.*

Demostración. Supongamos que $H(A,B) < \varepsilon$. Luego, existe $\delta \in E(A,B)$ tal que $0 < \delta < \varepsilon$. Por (2) de la Proposición 1.53, se tiene que $N(\delta, A) \subset N(\varepsilon, A)$ y $N(\delta, B) \subset N(\varepsilon, B)$. Además, $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Se sigue, que $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Recíprocamente, supongamos $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$ entonces por (3) de la Proposición 1.53, tenemos que $A \subset \bigcup\limits_{0<\delta<\varepsilon} N(\delta, B)$. Dado que A es compacto, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\delta_1, \ldots, \delta_n$ tales que $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\alpha = \text{máx}\ \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Luego, $N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. De tal forma que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} N(\delta_i, B) \subset N(\alpha, B)$. Luego, $A \subset N(\alpha, B)$.
De forma análoga, como $B \subset N(\varepsilon, A)$, existe $0 < \gamma < \varepsilon$ tal que $B \subset N(\gamma, A)$. Sea $\beta = \text{máx}\{\alpha, \gamma\}$. Tenemos que $\beta < \varepsilon$, $A \subset N(\beta, B)$ y $B \subset N(\beta, A)$. Así $\beta \in E(A,B)$, se sigue que $H(A,B) \leq \beta < \varepsilon$. Por esto $H(A,B) < \varepsilon$. $\square$

Notación 1.58. *Sean X un espacio métrico compacto y $A \subset X$. Definimos las siguientes subcolecciones del hiperespacio 2^X:*

$$\Gamma(A) = \{B \in 2^X : B \subset A\};$$
$$\Lambda(A) = \{B \in 2^X : B \cap A \neq \emptyset\} \text{ y}$$
$$\Phi(A) = \{B \in 2^X : A \subset B\}.$$

Proposición 1.59. *Sean X un espacio métrico compacto. Entonces se tiene que*

(a) *Si U es abierto en X, entonces $\Gamma(U)$ y $\Lambda(U)$ son abiertos en 2^X.*

(b) *Si A es cerrado en X, entonces $\Gamma(A)$, $\Lambda(A)$ y $\Phi(A)$ son cerrados en 2^X.*

Demostración.
(a) Veamos que $\Gamma(U)$ es un subconjunto abierto de 2^X. Sea $B \in \Gamma(U)$, es decir, $B \in 2^X$ y $B \subset U$. Puesto que U es un subconjunto abierto en X, por la Proposición 1.53 inciso (4), se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B \subset N(\varepsilon, B) \subset U$. Denotemos por

$$\mathbf{B}(B, \varepsilon) = \{C \in 2^X : H(C, B) < \varepsilon\}.$$

Veamos que $\mathbf{B}(B, \varepsilon) \subset \Gamma(U)$. Sea $C \in \mathbf{B}(B, \varepsilon)$. Entonces $H(C, B) < \varepsilon$. Luego, por el Lema 1.57, $C \subset N(\varepsilon, B)$; y como $N(\varepsilon, B) \subset U$, se sigue que $C \subset U$. Así $C \in \Gamma(U)$. Luego $\mathbf{B}(B, \varepsilon) \subset \Gamma(U)$. Por lo tanto $\Gamma(U)$ es un subconjunto abierto de 2^X.

Ahora veamos que $\Lambda(U)$ es un subconjunto abierto de 2^X. Sea $B \in \Lambda(U)$, es decir, $B \in 2^X$ y $B \cap U \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap U$. Como U es abierto en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\varepsilon, x) \subset U$. Veamos que $\mathbf{B}(\varepsilon, B) \subset \Lambda(U)$. Sea $C \in \mathbf{B}(B, \varepsilon)$. Entonces $H(B, C) < \varepsilon$. Luego, por el Lema 1.57, $B \subset N(\varepsilon, C)$. Puesto que $x \in B$, existe

$y \in C$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, es decir, $y \in B(\varepsilon, x)$. Así $y \in U$. Luego $y \in C \cap U$ de manera que $C \cap U \neq \emptyset$. De aquí, $C \in \Lambda(U)$. Así $\mathbf{B}(B, \varepsilon) \subset \Lambda(U)$, es decir, $\Lambda(U)$ es un subconjunto abierto de 2^X.

(b) Para probar que $\Gamma(A)$ es un subconjuto cerrado basta con probar que Cl$(\Gamma(A)) \subset \Gamma(A)$. Sea $B \in$ Cl$(\Gamma(A))$ y supongamos que $B \notin \Gamma(A)$. Tomemos $y \in B \setminus A$. Como A es compacto en X y $y \notin A$, se tiene que $d(A, y) > 0$. Sea $\varepsilon = d(A, y)$. Puesto que $B \in$ Cl$(\Gamma(A))$, se sigue que $\mathbf{B}(B, \varepsilon) \cap \Gamma(A) \neq \emptyset$. Tomemos $C \in \mathbf{B}(B, \varepsilon) \cap \Gamma(A)$, tenemos que $H(B, C) < \varepsilon$ y $C \subset A$. Luego, por el Lema 1.57, $B \subset N(\varepsilon, C)$. Como $y \in B$, existe $z \in C$ tal que $d(y, z) < \varepsilon$. Puesto que $C \subset A$ se tiene que $z \in A$. Así, $d(y, A) \leq d(y, z)$. De tal forma que $d(y, A) < \varepsilon$ lo cual es una contradicción. Así, $B \in \Gamma(A)$. Concluimos que Cl$(\Gamma(A)) \subset \Gamma(A)$. Por esto $\Gamma(A)$ es un subconjunto cerrado de 2^X.

Por otro lado, si A es un subconjunto cerrado de X, entonces $X \setminus A$ es un subconjunto abierto de X. Por (1), se tiene que $\Gamma(X \setminus A)$ es un subconjuto abierto en 2^X. Dado que $2^X = \Lambda(A) \cup \Gamma(X \setminus A)$ y $\Lambda(A) \cap \Gamma(X \setminus A) = \emptyset$. Se sigue que $\Lambda(A)$ es un subconjunto cerrado de 2^X.

Ahora veamos que $\Phi(A)$ es un subconjunto cerrado de 2^X. Sea $B \in$ Cl$(\Phi(A))$ y supongamos que $B \notin \Phi(A)$. Entonces $A \not\subset B$. Sea $x \in A \setminus B$. Notemos que $d(B, x) > 0$. Sea $\varepsilon = d(B, x)$. Puesto que $B \in$ Cl$(\Phi(A))$, se tiene que $\Phi(A) \cap \mathbf{B}(B, \varepsilon) \neq \emptyset$. Tomemos $C \in \Phi(A)$ tal que $H(B, C) < \varepsilon$. Como $x \in A$ y $A \subset C$, existe $y \in B$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$. Puesto que $d(x, B) \leq d(x, y)$ se sigue $\varepsilon < \varepsilon$, lo cual es una contradicción, por esto $B \in \Phi(A)$. Así, Cl$(\Phi(A)) \subset \Phi(A)$. Con lo cual concluimos que $\Phi(A)$ es un subconjunto cerrado de 2^X. $\square$

1.3.2. Topología de Vietoris

En esta subsección exponemos la topología de Vietoris para la familia de subconjuntos cerrados, no vacíos, de un espacio topológico.

Notación 1.60. *Sean X un espacio métrico compacto no vacío, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos de X. Definimos la siguiente colección de subconjuntos de 2^X:*

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Lema 1.61. *Sean X un espacio métrico compacto, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_n$ subconjuntos de X. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$.

(b) *Para cada subconjunto A de X, $\Gamma(A) = \langle A \rangle$.*

(c) *Para cada subconjunto A de X, $\Lambda(A) = \langle X, A \rangle$.*

Demostración.
(a) Notemos que

$$\begin{aligned}\langle U_1,\ldots,U_n\rangle &= \{A\in 2^X : A\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i\}\cap\{A\in 2^X : A\cap U_i\neq\emptyset,\\ &\quad \text{para cada } i\in\{1,\ldots,n\}\}\\ &= \Gamma(\bigcup_{i=1}^{n} U_i)\cap(\bigcap_{i=1}^{n}\Lambda(U_i)).\end{aligned}$$

Se concluye lo deseado.

(b) Sea $A\subset X$. Observemos que, por la Notación 1.60,

$$\langle A\rangle=\{B\in 2^X : B\subset A\}=\Gamma(A).$$

(c) Sea $A\subset X$, por la Notación 1.60, tenemos que

$$\langle X,A\rangle=\{B\in 2^X : B\subset X \text{ y } B\cap A\neq\emptyset\}=\Lambda(A).$$

□

Lema 1.62. *Sean X un espacio métrico compacto, $m,n\in\mathbb{N}$, $U_1,\ldots,U_n$ y $V_1,\ldots,V_m$ subconjuntos de X. Si $U=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$ y $V=\bigcup_{j=1}^{m}V_j$, entonces*

$$\langle U_1,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,\ldots,V_m\rangle=\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle.$$

Demostración. Sea $A\in\langle U_1,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,\ldots,V_m\rangle$, por (a) del Lema 1.61 tenemos que

$$\langle U_1,\ldots,U_n\rangle\cap\langle V_1,\ldots,V_m\rangle=\left(\Gamma(U)\cap(\bigcap_{i=1}^{n}\Lambda(U_i))\right)\cap\left(\Gamma(V)\cap(\bigcap_{j=1}^{m}\Lambda(V_j))\right).$$

Así, $A\subset U\cap V$. Además:

$$\begin{aligned}U\cap V &= (U\cap V)\cap(V\cap U)\\ &= (U\cap\bigcup_{j=1}^{m}V_j)\cap(V\cap\bigcup_{i=1}^{n}U_i)\\ &= \bigcup_{j=1}^{m}(U\cap V_j)\cap(\bigcup_{i=1}^{n}(V\cap U_i).\end{aligned}$$

Por otro lado, como $A\cap U_i\neq\emptyset$, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$ y $A\subset V$, observamos que $A\cap(V\cap U_i)\neq\emptyset$, para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$. De forma similar, $A\cap(U\cap V_j)\neq\emptyset$, para cada $j\in\{1,\ldots,m\}$. De manera que $A\in\langle V\cap U_1,\ldots,V\cap U_n,U\cap V_1,\ldots,U\cap V_m\rangle$.

Ahora, sea $A \in \langle V \cap U_1, \ldots, V \cap U_n, U \cap V_1, \ldots, U \cap V_m \rangle$. Se sigue que $A \subset U \cap V$. Así $A \in \Gamma(U)$ y $A \in \Gamma(V)$. Por otra parte, como $A \cap (U \cap V_j) = A \cap V_j \neq \emptyset$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, tenemos que $A \in \bigcap_{j=1}^{m} \Lambda(V_j)$. De forma análoga, $A \in \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)$. Concluimos que $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. $\square$

Teorema 1.63. *Sean X un espacio métrico compacto y*

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \ldots, U_n \rangle : n \in \mathbb{N} \text{ y } U_i \text{ es abierto para cada } i \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Entonces $\mathcal{B}$ es base para una topología del hiperespacio 2^X.

Demostración. Primero veamos que $2^X = \bigcup \mathcal{B}$. Notemos que $\langle X \rangle = \{A \in 2^X : A \subset X\} = 2^X$. Así $2^X \in \mathcal{B}$. De tal forma que, $2^X \subset \bigcup \mathcal{B}$. Luego, $2^X = \bigcup \mathcal{B}$.

Falta probar que para cada par de elementos, $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $\langle V_1, \ldots, V_n \rangle$, de $\mathcal{B}$ si $A \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$ existe $\langle W_1, \ldots, W_n \rangle \in \mathcal{B}$ tal que $A \in \langle W_1, \ldots, W_n \rangle \subset \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$. Pero por el Lema 1.62 basta con considerar $\langle W_1, \ldots, W_n \rangle = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \ldots, V_m \rangle$.

Por esto, $\mathcal{B}$ es base para una topología de 2^X. $\square$

Definición 1.64. *La topología generada por $\mathcal{B}$, denotada por τ_V, es conocida como* **topología de Vietoris**.

Teorema 1.65. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces el conjunto $\mathcal{S} = \{\Gamma(U) : U \text{ es subconjunto abierto de } X\} \cup \{\Lambda(U) : U \text{ es un subconjunto abierto de } X\}$ es una subbase para la topología de Vietoris.*

Demostración. Sea $\mathcal{S}' = \{\bigcap \mathcal{W} : \mathcal{W}$ es un subconjunto finito de $\mathcal{S}\}$. Para ver que $\mathcal{S}$ es una subbase para la topología de Vietoris, basta probar que $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$.

Sea $\mathfrak{U} \in \mathcal{B}$. Luego, sean $U_1, \ldots, U_n$ abiertos en X tales que $\mathfrak{U} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ y $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Por (a) del Lema 1.61, tenemos que $\mathfrak{U} = \Gamma(U) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$, es decir, $\mathfrak{U}$ se puede expresar como intersección finita de elementos de $\mathcal{S}$, así $\mathfrak{U} \in \mathcal{S}'$.

Por otro lado, podemos ver que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$, ya que si $\mathfrak{V} \in \mathcal{S}$, luego $\mathfrak{V} = \langle \Gamma(U) \rangle$ o $\mathfrak{V} = \langle \Lambda(U) \rangle$ para algún U abierto en X, es decir, $\mathfrak{V} = \langle U \rangle$ o $\mathfrak{V} = \langle X, U \rangle$, con lo cual tenemos que $\mathfrak{V} \in \mathcal{B}$. Más aún, por el Lema 1.62 tenemos que $\mathcal{B}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, de modo que $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{B}$. Por lo tanto $\mathcal{S}' = \mathcal{B}$. $\square$

Teorema 1.66. *Sea X un espacio métrico compacto. En el hiperespacio 2^X la topología de Vietoris y la topología inducida por la métrica de Hausdorff coinciden.*

Demostración. Denotamos por τ_H a la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Probaremos que $\tau_V = \tau_H$.

Veamos que, $\tau_V \subset \tau_H$. Bastará con demostrar que la subbase de la topología τ_V está contenida en τ_H. Para esto consideramos $A \subset X$ abierto fijo. Demostraremos que $\Gamma(A)$ y $\Lambda(A)$ son elementos de τ_H.

Si $A = X$, entonces $\Gamma(A) = \Lambda(A) = 2^X$ y, si $A = \emptyset$, entonces $\Gamma(A) = \Lambda(A) = \emptyset$. De tal forma que $\Gamma(A), \Lambda(A) \in \tau_H$ si $A = X$ o $A = \emptyset$. En lo que sigue, suponemos que $A \neq X$ y $A \neq \emptyset$. Fijemos $B \in \Gamma(A)$ y denotemos $\varepsilon = d(B, X \setminus A)$. Dado que B y $X \setminus A$ son compactos ajenos se tiene que $\varepsilon > 0$.

Afirmación (i): $\mathbf{B}(B,\varepsilon) \subset \Gamma(A)$. En consecuencia, $\Gamma(A) \in \tau_H$. En efecto, sea $C \in \mathbf{B}(B,\varepsilon)$ y supongamos que existe $z \in C \cap (X \setminus A)$. Por el Lema 1.57 se tiene que $C \subset N(\varepsilon, B)$, lo que implica que existe $y \in B$ tal que $d(y,z) < \varepsilon$. Se sigue que $d(B, X \setminus A) \leq d(y,z) < \varepsilon = d(B, X \setminus A)$, lo cual es una contradicción. Esto prueba que $C \cap (X \setminus A) = \emptyset$, es decir, $C \subset A$. Por lo tanto $C \in \Gamma(A)$. Lo cual prueba lo deseado.

Ahora fijemos $B \in \Lambda(A)$ y un punto $p \in A \cap B$. Pongamos $\varepsilon = d(p, X \setminus A)$. Es claro que $\varepsilon > 0$.

Afirmación (ii): $\mathbf{B}(B,\varepsilon) \subset \Lambda(A)$. En consecuencia, $\Lambda(A) \in \tau_H$. En efecto, sea $C \in \mathbf{B}(B,\varepsilon)$ y supongamos que $C \subset (X \setminus A)$. Por el Lema 1.57 se tiene que $B \subset N(\varepsilon, C)$. En consecuencia existe $z \in C$ tal que $d(p,z) < \varepsilon$. Se sigue que $d(p, X \setminus A) \leq d(p,z) < \varepsilon = d(p, X \setminus A)$, lo cual es una contradicción. Esto implica que $C \cap A \neq \emptyset$. De esta manera se demuestra lo indicado.

De las afirmaciones (i) y (ii) se obtiene que $\tau_V \subset \tau_H$.

Ahora, veamos que $\tau_H \subset \tau_V$. Para probar esto, fijamos $D \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$.

Afirmación (iii): $\mathbf{B}(D,\varepsilon) \in \tau_V$. En consecuencia, $\tau_H \subset \tau_V$. Como D es compacto y $D \subset \displaystyle\bigcup_{y \in D} B(\frac{\varepsilon}{2}, y)$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $y_1, \ldots, y_n \in D$ tales que $D \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B(\frac{\varepsilon}{2}, y_i)$. Denotemos por $U_i = B(\frac{\varepsilon}{2}, y_i)$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Observemos que $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ es un elemento de la topología τ_V y $D \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Veamos que:

Afirmación (iv): $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \subset \mathbf{B}(D,\varepsilon)$. Tomemos $C \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Se tiene que $C \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_i$. Así, $C \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B(\frac{\varepsilon}{2}, y_i) \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, D) \subset N(\varepsilon, D)$.

Por otra parte, si $y \in D$ existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $y \in U_i$. Como $C \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$, se tiene que $C \cap U_i \neq \emptyset$. Fijemos $z \in C \cap U_i$. Así, $y, z \in U_i$. Luego, $d(y,z) \leq d(y, y_i) + d(y_i, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto, $D \subset N(\varepsilon, C)$.

Hemos demostrado que $D \subset N(\varepsilon, C)$ y $C \subset N(\varepsilon, D)$. Del Lema 1.57, se obtiene que $H(C,D) < \varepsilon$, es decir, $C \in \mathbf{B}(D,\varepsilon)$. Esto demuestra lo que se indica en la Afirmación (iv), lo cual a su vez demuestra la Afirmación (iii).

Con todo esto, la prueba de que $\tau_V = \tau_H$ está completa. $\square$

1.3.3. Límites de sucesiones en Hiperespacios

En éste pequeño apartado daremos algunos resultados acerca de límites de sucesiones de conjuntos en espacios topológicos, que aplicaremos en la teoría de continuos e hiperespacios. Los resultados aquí mostrados pueden ser consultados en [16, Capítulo IV].

Definición 1.67. *Sea X un espacio topológico. El **límite inferior** y el **límite superior** de una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos de X, denotados por $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ y $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, respectivamente, se definen de la siguiente manera:*

(a) $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :$ *para cada abierto U en X que contiene al punto x, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \geq N$*$\}$.

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \{x \in X :$ *para cada abierto U en X que contiene al punto x, existe un conjunto infinito, $J \subset \mathbb{N}$, tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$, para cada $n \in J$*$\}$,

(véase Figura 1.19).

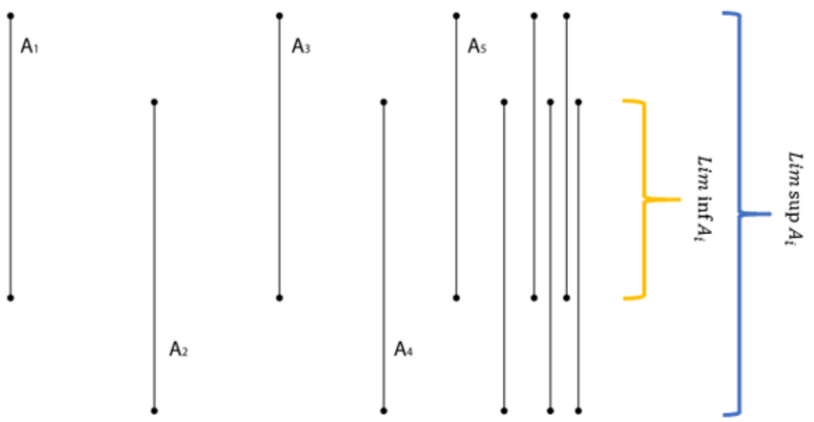


Figura 1.19: Límites inferior y superior de una sucesión de conjuntos.

Definición 1.68. *El* ***límite*** *de una sucesión de subconjuntos,* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$*, de un espacio* X*, existe y es igual al conjunto* A *si* $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = A = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$*. En este caso, escribimos* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$*.*

Lema 1.69. *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos no vacíos de un espacio* X*, entonces*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

Demostración. Si $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ y U es un subconjunto abierto de X que contiene a x entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Considerando $J = \{n \in \mathbb{N} : n \geq N\}$, se tiene que $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Por lo tanto, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. $\square$

Lema 1.70. *Sea* X *un espacio topológico. Sean* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos de* X *y* $A \subset X$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$

(2) $A \subseteq \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ *y* $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq A$*.*

Demostración.
$[(1) \Rightarrow (2)]$ Supongamos $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$, entonces $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = A = \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Así $A \subseteq \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ y $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq A$.

$[(2) \Rightarrow (1)]$ Por hipótesis y el Lema 1.69, tenemos que

$$A \subseteq \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq A.$$

Por la Definición 1.68, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. $\square$

Proposición 1.71. *Sea* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de subconjuntos cerrados y no vacíos en un espacio* X*. Entonces* $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ *y* $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ *son subconjuntos cerrados de* X*.*

Demostración. Veamos que $\mathrm{Cl}(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n) \subset \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Sean $x \in \mathrm{Cl}(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n)$ y U un abierto de X tales que $x \in U$. De aquí $U \cap \liminf\limits_{n\to\infty} A_n \neq \emptyset$, entonces existe $y \in U \cap \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Como $y \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ y $y \in U$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Así, $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Por lo tanto, $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ es cerrado.

Ahora, veamos que $\mathrm{Cl}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n) \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Sean $x \in \mathrm{Cl}(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n)$ y U un abierto de X tales que $x \in U$. Se sigue que $U \cap \limsup\limits_{n\to\infty} A_n \neq \emptyset$, entonces existe $z \in U \cap \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Luego, $z \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ y $z \in U$, por lo que existe $J \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J$. Así, $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Por lo tanto, $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ es cerrado. $\square$

Proposición 1.72. *Sean X y Y espacios métricos compactos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si, para cada punto $y \in Y$ y toda sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ se cumple que*

$$\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subseteq f^{-1}(\{y\}).$$

Demostración. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y sea $x \in \limsup f^{-1}(\{y_n\})$. Existe una sucesión $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ y un punto $x_{n_j} \in f^{-1}(\{y_{n_j}\})$ para cada $j \in \mathbb{N}$, tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_j} = x$. Como f es continua, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n_j})$ $= f(x)$. Notemos que $\{f(x_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$, por lo que $\{f(x_{n_j})\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_{n_j}) = y$. De donde $f(x) = y$, es decir, $x \in f^{-1}(\{y\})$. Por lo tanto, $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subseteq f^{-1}(\{y\})$.

Ahora, supongamos que para cada punto $y \in Y$ y toda sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ se cumple que $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subseteq f^{-1}(\{y\})$. Consideremos un punto $x_0 \in X$ y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente a x_0 tal que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $y_0 \in Y$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$, entonces $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{f(x_n)\}) \subseteq$ $f^{-1}(\{y_n\})$. Notemos que

$$\begin{aligned} x_0 \in \limsup_{n\to\infty} \{x_n\} &\subseteq \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(f(\{x_n\})) \\ &= \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{f(x_n)\}) \\ &\subseteq f^{-1}(\{y_0\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x_0) = y_0$, es decir, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$. Así, f es continua. □

Lema 1.73. *Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de un espacio X. Si $A_n \subset A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} A_n =$ Cl $\left(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$.*

Demostración. Por Lema 1.70, basta probar que $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq$ Cl $\left(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}\right) \subseteq \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Primero veamos que $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq$ Cl $\left(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$. Sean $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ y U un subconjunto abierto de X que contiene a x. Entonces, existe un conjunto infinito, $J \subseteq \mathbb{N}$, tal que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \in J$. Así, $x \in$ Cl $(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$.

Ahora, veamos que Cl $(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}) \subseteq \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Sea $x \in$ Cl $(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\})$ y U un subconjunto abierto de X que contiene a x, entonces $U \cap (\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}) \neq \emptyset$. Así, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap A_N \neq \emptyset$. Como $A_N \subseteq A_{N+1}$, se tiene que $U \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Por lo que $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Así, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n =$ Cl $\left(\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}\right)$. □

Teorema 1.74. *Si X es un espacio métrico compacto, entonces 2^X es compacto.*

Demostración. Consideremos al conjunto $\mathcal{S}$ como en el Teorema 1.65. Por el Lema 1.4 y el Teorema 1.65, es suficiente probar que cada cubierta de 2^X por elementos de $\mathcal{S}$ tiene una subcubierta finita. Sea

$$\mathcal{L} = \{\Gamma(U_\sigma) : \sigma \in \Sigma\} \cup \{\Lambda(V_\omega) : \omega \in \Omega\},$$

tal que $2^X \subset \bigcup \mathcal{L}$, es decir,

$$2^X = \left[\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Gamma(U_\sigma)\right] \cup \left[\bigcup_{\omega \in \Omega} \Lambda(V_\omega)\right].$$

Sea $Y = X \setminus (\bigcup\{V_\omega : \omega \in \Omega\})$. Ahora, consideremos los siguientes dos casos.

Caso I. Si $Y = \emptyset$. Entonces $X = \bigcup\{V_\omega : \omega \in \Omega\}$. Luego, dado que X es compacto, existe un subconjunto finito Ω_0 de Ω. tal que $X = \bigcup\{V_\omega : \omega \in \Omega_0\}$. De donde, se sigue que

$$2^X = \bigcup_{\omega \in \Omega_0} \Lambda(V_\omega).$$

Caso II. Si $Y \neq \emptyset$. Entonces, Y es cerrado en X. Así, $Y \in 2^X$ y $Y \notin \Lambda(V_\omega)$ para algún $\omega \in \Omega$. Luego, dado que $2^X = \bigcup \mathcal{L}$, existe $\alpha \in \Sigma$ tal que $Y \in \Gamma(U_\alpha)$. Donde, $Y \subset U_\alpha$. Entonces,

$$X \setminus U_\alpha \subset \bigcup\{V_\omega : \omega \in \Omega\}.$$

Así, dado que $X \setminus U_\alpha$ es cerrado y por tanto compacto, existe un conjunto finito Ω_1 de Ω, tal que $X \setminus U_\alpha \subset \bigcup\{V_\omega : \omega \in \Omega_1\}$. De aquí tenemos que,

$$2^X = \Gamma(U_\alpha) \cup \left[\bigcup_{\omega \in \Omega_1} \Lambda(V_\omega)\right].$$

Con ambos casos, se tiene que 2^X es compacto. $\square$

Corolario 1.75. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces cada sucesión en 2^X tiene una subsucesión convergente. Más general, si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados no vacíos de X, entonces existe una subsucesión $\{A_{i(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que el $\lim_{n\to\infty} A_{i(j)}$ existe y $\lim_{n\to\infty} A_{i(j)} \in 2^X$.*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Dado que 2^X es un espacio métrico compacto, existe una subsucesión $\{A_{i(j)}\}_{j \in \mathbb{N}}$ de $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que el $\lim_{n\to\infty} A_{i(j)}$ existe. Ahora, por la Proposición 1.71, se sigue que $\lim_{n\to\infty} A_{i(j)} \in 2^X$. $\square$

Definición 1.76. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto y $\varepsilon > 0$.*

(a) *Un subconjuto finito, no vacío e indexado de X, digamos $\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset X$, es una (d, ε)-**cadena**, si $d(x_i, x_{i-1}) < \varepsilon$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$.*

(b) *Se dice que una (d, ε)-cadena, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, va de p a q, si $p = x_1$ y $q = x_n$. (El orden de los índices es importante).*

(c) *Un subconjunto Z de X es (d, ε)-**encadenado**, si para cualesquiera dos puntos $p, q \in Z$, existe una (d, ε)-cadena de p a q en Z.*

(d) *Un subconjunto Z de X que es (d, ε)-encadenado para cada $\varepsilon > 0$ se dice que es d-**bien encadenado.***

Lema 1.77. *Sea (X, d) un espacio métrico compacto, y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión en 2^X que converge a A en 2^X. Si cada A_i es (d, ε_i)-encadenado, donde ε_i converge a 0 cuando i tiende a ∞, entonces $A \in C(X)$.*

Demostración. Supongamos que A es no conexo. Entonces, $A = K \cup L$, donde K y L son dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X. Así, dado que X es normal, existen subconjuntos abiertos U y V de X, tales que $K \subset U$, $L \subset V$ y $\text{Cl}(U) \cap \text{Cl}(V) = \emptyset$. Luego, $A \in \langle U, V \rangle$. Ahora, dado que $\langle U, \text{Cl}(V) \rangle$ es un subconjunto abierto de 2^X y $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a A, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \in \langle U, V \rangle$ para todo $i \geq N$.

Ahora, sea $\delta = \text{ínf}\{d(x, y) : x \in \text{Cl}(U), y \in \text{Cl}(V)\}$ y observemos que $\delta > 0$ dado que $\text{Cl}(U)$ y $\text{Cl}(V)$ son subconjuntos compactos y ajenos. Así que, como ε_i converge a 0 cuando i tiende a ∞, existe $k \in \mathbb{N}$, $k \geq N$ tal que $\varepsilon_k < \delta$. Luego, $A_k \in \langle U, V \rangle$, $A_k \cap U \neq \emptyset$ y $A_k \cap V \neq \emptyset$. Pero, como A_k es (d, ε_k)-*encadenado* y $\varepsilon_k < \delta$, esto es imposible. Por lo tanto, A es conexo. Y así, $A \in C(X)$. □

Lema 1.78. *Si X es un espacio métrico compacto, conexo y no vacío, entonces $C(X)$ es compacto.*

Demostración. Por Teorema 1.74 el espacio 2^X es compacto, así basta probar que $C(X)$ es cerrado en 2^X.
Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$ convergente y supongamos que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$. Deseamos probar que $A \in C(X)$. Procedamos por contradicción, supongamos que A es no conexo, es decir, existen G y K subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de X, tales que $A = G \cup K$. Sea $\varepsilon = \text{ínf}\{d(p, q) : p \in G, q \in K\}$. Como G y K son cerrados en X, se sigue que son compactos, por lo que $\varepsilon > 0$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H(A, A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, $A \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A_n)$ y $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, A) = N(\frac{\varepsilon}{2}, G) \cup N(\frac{\varepsilon}{2}, K)$. De la elección de ε, los conjuntos $N(\frac{\varepsilon}{2}, G)$ y $N(\frac{\varepsilon}{2}, K)$ son ajenos y abiertos. Como $A_n \in C(X)$, $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, G)$ ó $A_n \subset N(\frac{\varepsilon}{2}, K)$. Sin perdida de generalidad supongamos que $A_n \in N(\frac{\varepsilon}{2}, G)$, entonces

$$K \subset A \subset N\left(\frac{\varepsilon}{2}, A_n\right) \subset N(\varepsilon, G).$$

Pero K es ajeno a $N(\varepsilon, G)$, así K es vacío. Contradiciendo el hecho de que no lo era, por lo cuál A es conexo. Por lo tanto, $A \in C(X)$ y $C(X)$ es cerrado en 2^X. □

La demostración del siguiente Lema puede ser consultado en [16, página 63].

Lema 1.79. *Sean X un espacio métrico con métrica d, $Z \subseteq X$ y $\varepsilon > 0$, si*

$$\mathfrak{C}(Z, \varepsilon) = \{x \in X : \text{existe una } (d, \varepsilon)\text{-cadena en } X \text{ de algún punto de } Z \text{ a } x\}.$$

Entonces $\mathfrak{C}(Z, \varepsilon)$ es abierto y cerrado en X.

Teorema 1.80. ***(Del cable cortado)*** *Sea X un espacio métrico compacto, sean A y B dos subconjuntos cerrados de X. Si ningún subconjunto conexo de X intersecta tanto a A como a B, entonces existen X_1 y X_2, tales que $X = X_1 \cup X_2$ donde X_1 y X_2 son dos cerrados ajenos de X con $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

Demostración. Por la Definición 1.76 parte *a)*, supongamos que, para cada $i \in \mathbb{N}$, existe una $(d, \frac{1}{2^i})$-cadena K_i en X de un punto $a_i \in A$ a un punto $b_i \in B$. Entonces, por el Corolario 1.75, existe una subsucesión $\{K_{i(j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a $K \in 2^X$. Por el Lema 1.77, como cada K_i es $(d, \frac{1}{2^i})$ encadenado donde $\frac{1}{2^i}$ converge a 0 cuando i tiende a ∞, entonces $K \in C(X)$.

Veamos que K intersecta a A y a B. Como A y B son subconjuntos cerrados, se tiene que $a \in A$ y $b \in B$, donde $a_i \longrightarrow a$ y $b_i \longrightarrow b$,y además $a, b \in K$ pues K es un subconjunto cerrado. Por lo tanto, tenemos una contradicción.

Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathfrak{C}(A, \varepsilon) \cap B = \emptyset$ donde

$$\mathfrak{C}(A, \varepsilon) = \{x \in X : \text{existe una } (d, \varepsilon)\text{-cadena de algún punto de } A \text{ a } x\}.$$

Sea $X_1 = \mathfrak{C}(A, \varepsilon)$ y $X_2 = X \setminus \mathfrak{C}(A, \varepsilon)$. Por el Lema 1.79, X_1 y X_2 son subconjuntos cerrados ajenos de X tales que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$. $\square$

Teorema 1.81. ***(De los golpes en la frontera)*** *Sean X un continuo, U un subconjunto abierto, propio y no vacío de X. Si K es una componente de $Cl(U)$ entonces $K \cap Fr(U) \neq \emptyset$. Equivalentemente a, dado $K \subset Cl(U)$ y U es abierto entonces $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos $K \cap \mathrm{Fr}(U) = \emptyset$ entonces por el Teorema 1.80, $\mathrm{Cl}(U) = M_1 \cup M_2$. Donde M_1 y M_2 son subconjuntos cerrados, ajenos de $\mathrm{Cl}(U)$ con $K \subset M_1$ y $\mathrm{Fr}(U) \subset M_2$. Sea $M_3 = M_2 \cup (X \setminus U)$.

Veamos que X no es conexo. Como $\mathrm{Cl}(U) = M_1 \cup M_2$, $X = M_1 \cup M_3$. Notemos que M_1 y M_3 son subconjuntos cerrados de X. Como $K \neq \emptyset$, pues es una componente de un conjunto no vacío, y $K \subset M_1$, $M_1 \neq \emptyset$. Dado que $X \setminus U \subset M_3$ y $U \neq X$, $M_3 \neq \emptyset$. Ahora, veamos que $M_1 \cap M_3 = \emptyset$ primero notemos que $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Luego

$$M_1 \cap M_3 = M_1 \cap (M_2 \cup (X \setminus U)) = M_1 \cap (X \setminus U).$$

Entonces, como $M_1 \subset \mathrm{Cl}(U)$ y $X \setminus U$ esun subconjunto cerrado de X,

$$M_1 \cap M_3 \subset \mathrm{Cl}(U) \cap (X \setminus U) = \mathrm{Fr}(U) \subset M_2.$$

Pero, como $M_1 \cap M_3 = \emptyset$. Por las propiedades de M_1 y M_3, se tiene una separación de X. Por lo que, X es no conexo lo cual es una contradicción pues X es un continuo. Por lo tanto, $K \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. $\square$

1.4. Funciones entre continuos

En ésta sección definiremos algunas clases de funciones entre espacios métricos compactos, y estudiaremos la relación que existe entre ellas. Estas funciones fueron ampliamente estudiadas en la tesis doctoral de *T. Maćkowiak* la cual puede ser consulta en [13] y de donde tomamos la mayor parte de éstas relaciones. Comenzaremos la sección listando las definiciones de algunas clases de funciones.

Definición 1.82. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y supravectiva entre espacios métricos compactos. Diremos que f es:*

(1) ***abierta****, si para cada subconjunto abierto U de X se tiene que $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y;*

(2) ***atómica****, si para cada subcontinuo K de X tal que $f(K)$ es un subconjunto no degenerado de Y, se cumple que $f^{-1}(f(K)) = K$;*

(3) ***atriódica****, si para todo subcontinuo Q de Y, existen dos componentes C_1 y C_2 de $f^{-1}(Q)$ tales que $f(C_1) \cup f(C_2) = Q$ y para cada componente E de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(E) = Q$ o $f(E) \subseteq f(C_1)$ o $f(E) \subseteq f(C_2)$;*

(4) ***casi interior*** *, si para cada $y \in Y$ y cada subconjunto abierto U de X tal que existe una componente C de $f^{-1}(\{y\})$ con $C \subset U$ se tiene que $y \in Int(f(U))$;*

(5) ***casimonótona****, si el subconjunto $f^{-1}(Q)$ es conexo, para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío;*

(5) ***cerrada****, si para cada subconjunto cerrado G de X, se tiene que $f(G)$ es un subconjunto cerrado de Y;*

(6) ***confluente,*** *si para cada subcontinuo Q de Y y para cada componente C de $f^{-1}(Q)$, se tiene que $f(C) = Q$;*

(7) ***cuasimonótona****, si para cualquier subcontinuo Q en Y con interior no vacío se tiene que $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y si D es componente de $f^{-1}(Q)$, entonces $f(D) = Q$;*

(8) ***débilmente confluente****, si para cada subcontinuo Q de Y, existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$;*

(9) ***débilmente monótona****, si para cada subcontinuo Q de Y con interior no vacío, se tiene que cada componente C de $f^{-1}(Q)$, $f(C) = Q$;*

(10) ***hereditariamente atómica*** *(respectivamente,* ***atriódica****,* ***confluente****,* ***débilmente confluente****,* ***monótona****), si para cada subcontinuo K de X la función restricción $f|_K$*

es atómica (respectivamente, atriódica, confluente, débilmente confluente, monótona);

(11) ***juntadora****, si para cada subcontinuo Q de Y y cada dos componentes C_1 y C_2 de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(C_1) \cap f(C_2) \neq \emptyset$;*

(12) ***ligera****, si para cada y en Y, se tiene que $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo;*

(13) ***monótona****, si para cada y en Y, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.*

(14) ***semiconfluente****, si para cada continuo Q de Y y cada par de componentes C_1 y C_2 de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(C_1) \subset f(C_2)$ o $f(C_2) \subset f(C_1)$;*

(15) ***seudomonótona****, si para cualesquiera subcontinuos propios A y B de Y tales que $Y = A \cup B$ entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son conexos;*

(16) ***seudoconfluente****, si para cada subcontinuo irreducible Q de Y existe una componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$.*

En la literatura existen muchas más clases de funciones entre espacios métricos compactos, sin embargo no es la intención de este trabajo estudiarlas todas. Veamos algunos ejemplos de las funciones listadas.

Recordemos que en la Definición 1.7, mencionamos el concepto de *homeomorfismo*, veamos un ejemplo de ello:

Ejemplo 1.83. *Sean $X = [0,1]$, $Y = [0,2]$ y $f : X \longrightarrow Y$ definida como $f(x) = 2x$. La función f es continua y biyectiva. Notemos que la imagen inversa $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$ es también una función continua. Por tanto, f es un homeomorfismo (véase) Figura 1.20).*

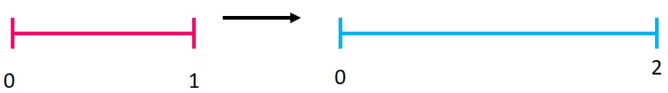


Figura 1.20: La función $f(x) = 2x$ es un homeomorfismo.

Ejemplo 1.84. *Consideremos a X como la curva senoidal dada en la Definición 1.16 y definamos $f : X \longrightarrow [0,1]$ como $f(x,y) = x$. Tenemos que, f es una función atómica, (véase Figura 1.21).*

Para ver que f definida en el *Ejemplo 1.84* es atómica, consideremos K un subcontinuo de X tal que $f(K)$ es no degenerado. Notemos que K puede ser de tres formas distintas:

(1) $K \subset A$, es decir $K = \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in [a,b]\}$ con $0 < a < b \leq 1$.

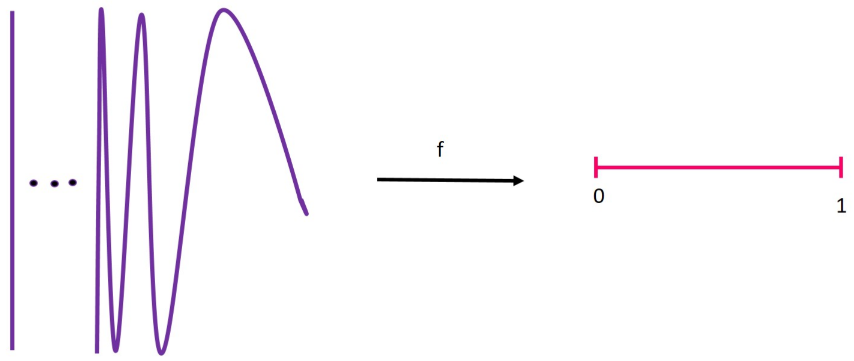


Figura 1.21: La función f es una función atómica.

(2) $K \subset \{0\} \times [-1, 1]$, es decir, $K = \{0\} \times [a, b]$ con $a, b \in [-1, 1]$.

(3) $K \subseteq X$ y K es homeomorfo a X.

Observemos que si K es como en (2), entonces $f(K) \subseteq \{0\}$, es decir, $f(K)$ es degenerado. Por lo que K no puede ser como en (2).

Supongamos que K es como en (1), entonces $K \subset A$. Notemos que $f|_A : A \to (0, 1]$ es una función biyectiva, más aún $f(\{0\} \times [-1, 1]) \subset \{0\}$. Además, $f(\{0\} \times [-1, 1]) \cap f(A) = \emptyset$. Así $f^{-1}(f(K)) = K$, ya que de no ser así estaríamos contradiciendo la inyectividad de $f|_A$.

Ahora, si K es como en (3), tenemos que $f(K) = [0, x_0]$ para algún $x_0 \in (0, 1]$, por otro lado, $f^{-1}(f(K)) = f^{-1}([0, x_0]) = K$. Por lo tanto, f es atómica.

Ejemplo 1.85. *Sea X la llamada curva senoidal dada en la Definición 1.16. Definamos $q : X \longrightarrow \{(x, sen(\frac{1}{x})) : x \in [\frac{1}{8}, 1]\}$ la función dada de la siguiente manera:*

$$q\left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \begin{cases} (x, sen(\frac{1}{x})) & \text{si } x \in [\frac{1}{8}, 1] \\ (\frac{1}{8}, sen(\frac{1}{8})) & \text{si } x \in \mathbf{Cl}_{\mathbb{R}^2}\left(\{\left(x, sen(\frac{1}{x})\right) : x \in (0, \frac{1}{8}]\}\right) \end{cases}$$

La función q es una función cociente y por tanto es una función monótona (véase Figura 1.22).

Ejemplo 1.86. *Sea $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Definamos $p : S^1 \longrightarrow [-1, 1]$ como $p(x, y) = x$. Así, p es una función confluente (véase Figura 1.23).*

Para ver que la función del Ejemplo 1.86 es confluente, consideremos Q un subcontinuo de $[-1, 1]$, sabemos que Q es un arco o bien Q es un subconjunto de un solo punto.

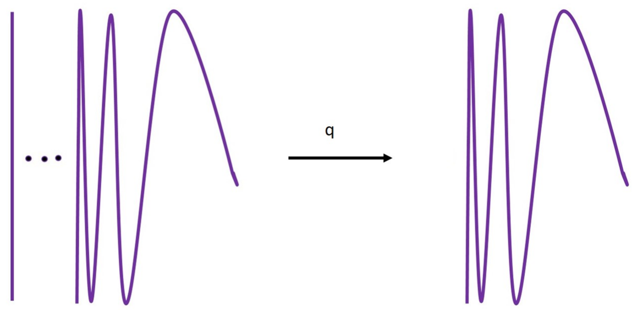


Figura 1.22: La función q es una función monótona.

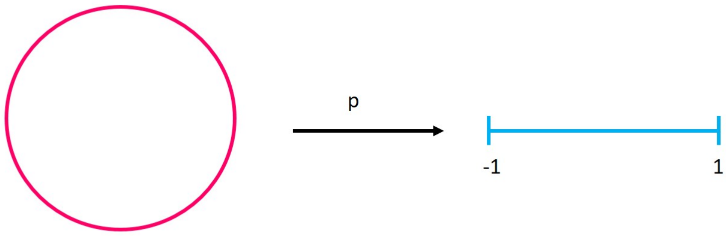


Figura 1.23: La función p es una función confluente.

Observemos que si Q es un arco es de la forma $[a, b]$ con $-1 \leq a < b \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} p^{-1}(Q) &= \{(x, y) \in S^1 : x \in [a, b] \text{ y } y = \pm\sqrt{1 - x^2}\} \\ &= \{(x, y) \in S^1 : x \in [a, b] \text{ y } y = \sqrt{1 - x^2}\} \\ &\quad \cup\{(x, y) \in S^1 : x \in [a, b] \text{ y } y = -\sqrt{1 - x^2}\}, \end{aligned}$$

no es difícil darse cuenta que $p^{-1}(Q)$ es la unión de dos arcos,

$$\begin{gathered} A = \{(x, y) \in S^1 : x \in [-1, 1] \text{ y } y = \sqrt{1 - x^2}\} \quad \text{y} \\ B = \{(x, y) \in S^1 : x \in [-1, 1] \text{ y } y = -\sqrt{1 - x^2}\}. \end{gathered}$$

Como A y B son conexos $p(A) = K$, $p(B) = K$ o bien $p(A \cup B) = K$ si $A \cap B \neq \emptyset$. De manera similar se observa para cuando K es degenerado. Por lo tanto p es confluente.

Ejemplo 1.87. *Sean* $E_n = \{(x, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1]\}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$, $E = [0, 1] \times \{0\}$ *y* $F = \{0\} \times [0, 1]$. *Consideremos* $X = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n) \cup E \cup F$. *Definamos* $g : X \longrightarrow [0, 1]$ *como* $g(x, y) = x$. *Así,* g *es una función semiconfluente (véase Figura 1.24).*

Es fácil darse cuenta que si Q es un subcontinuo de $[0, 1]$, entonces $Q = [a, b]$ tal que $0 \leq a \leq b \leq 1$. Si Q es un arco, entonces definimos $C_n = \{(x, \frac{1}{n}) : x \in [a, b]\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $C_0 = Q \times \{0\}$. Observemos que:

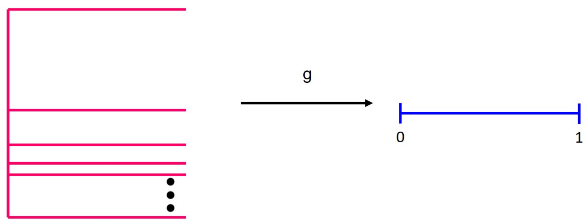


Figura 1.24: La función g es una función semiconfluente.

$$g^{-1}(Q) = \begin{cases} \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \cup C_0 & \text{si } a \neq 0 \\ \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \cup C_0 \cup F & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Observemos que, si $a = 0$, entonces $g^{-1}(Q)$ es conexo, de tal manera que tenemos que g es semiconfluente de manera trivial. Además, si $a > 0$ tenemos que $C_i \cap C_j = \emptyset$ para cada $i \neq j$. Más aún, $g(C_n) = Q$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, por lo que se cumple que g es semiconfluente.

Ejemplo 1.88. *Definamos* $f : [-1, 2] \longrightarrow [0, 2]$ *como*

$$f(x) = |x|.$$

Esta función es llamada función valor absoluto y es tal que f *es débilmente confluente (véase Figura 1.25).*

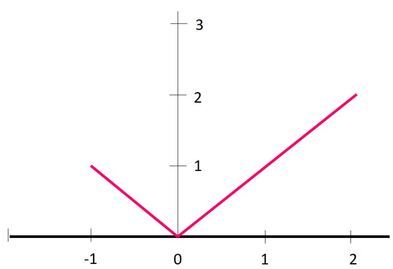


Figura 1.25: La función valor absoluto es débilmente confluente.

Para ver que la función f dada en la Definición 1.88 es débilmente confluente consideremos un subcontinuo Q de $[0, 2]$, notemos que $Q = [a, b]$ tal que $0 \leq a \leq b \leq 2$. Tenemos dos casos:

(1) $1 \in \text{Int}(Q)$, si esto ocurre, entonces $f^{-1}(Q) = [-1,-a] \cup [a,b]$ y $f([a,b]) = [a,b] = Q$.

(2) $1 \notin \text{Int}(Q)$, si esto ocurre, entonces tenemos dos subcasos:

(2.1) $f^{-1}(Q) = [-b,-a] \cup [a,b]$, con $b \leq 1$ entonces $f([a,b]) = [a,b] = Q$.

(2.2) $f^{-1}(Q) = [a,b]$, con $1 \leq a$ entonces $f([a,b]) = [a,b] = Q$.

Por tanto, f es débilmente confluente. No es difícil convencerse que f también es semiconfluente.

Ejemplo 1.89. *Sean* $A = [0,1] \times \{0\}$*,* $B = \{0\} \times [0,1]$*,* $C = \{1\} \times [0,1]$*,* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,\frac{1}{2}], y = 2x\}$ *y* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\frac{1}{2},1], y = 2-2x\}$*. Consideremos* $X = A \cup B \cup C$ *y* $Y = A \cup D \cup E$*. Definamos* $f : X \longrightarrow Y$ *como*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in A, \\ (\frac{y}{2}, y) & \text{si } (x,y) \in B, \\ (\frac{2-y}{2}, y) & \text{si } (x,y) \in C. \end{cases}$$

f es una función atriódica (véase Figura 1.26).

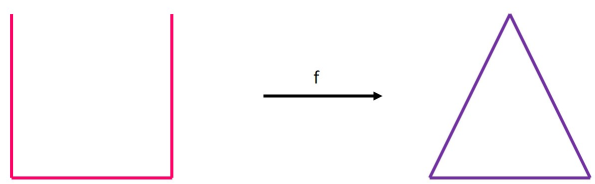


Figura 1.26: La función f es atriódica.

Observemos que:

(1) Si Q es un subcontinuo de Y que no continene a $(\frac{1}{2},1)$, entonces $f^{-1}(Q)$ es conexo. Así, f es atriodica.

(2) Si Q es un subcontinuo propio de Y que contiene a $(\frac{1}{2},1)$, entonces $f^{-1}(Q)$ tiene dos componentes y por tanto f es atriódica.

(3) Si $Q = Y$ es inmediato que f es atriódica.

Ejemplo 1.90. *Sean* $T = \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,1]\} \cup \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y \in [0,1]\} \cup \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1]\}$*. Definamos* $f : T \longrightarrow [0,1]$ *como*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x & \text{si } (x,y,z) \in \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,1]\}, \\ y & \text{si } (x,y,z) \in \{(0,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y \in [0,1]\}, \\ z & \text{si } (x,y,z) \in \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1]\}, \end{cases}$$

Así, f es una función ligera (véase Figura 1.27).

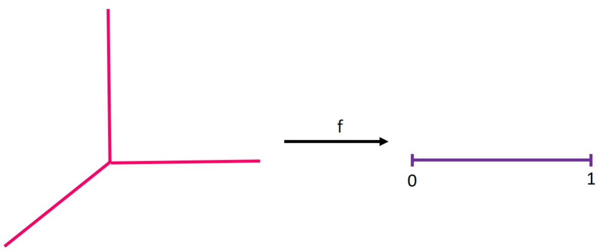


Figura 1.27: La función f es ligera pues las fibras son totalmente disconexas.

No es difícil convencerse que la función f dada en la Definición 1.90 es ligera, ya que si $x \in [0,1]$, tenemos que $f^{-1}(\{x\}) = \{(x,0,0),(0,x,0),(0,0,x)\}$ el cual es un conjunto totalmente disconexo.

Ejemplo 1.91. *Sean $Y = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\}$, $A = \{0\} \times [-1,1]$ y $B = \{0\} \times [-1,2]$ Definamos $g : Y \cup B \longrightarrow Y \cup A$*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in Y \cup A, \\ (0,1) & \text{si } (x,y) \in \{0\} \times [1,2]. \end{cases}$$

Así, es una función casimonótona (véase Figura 1.28).

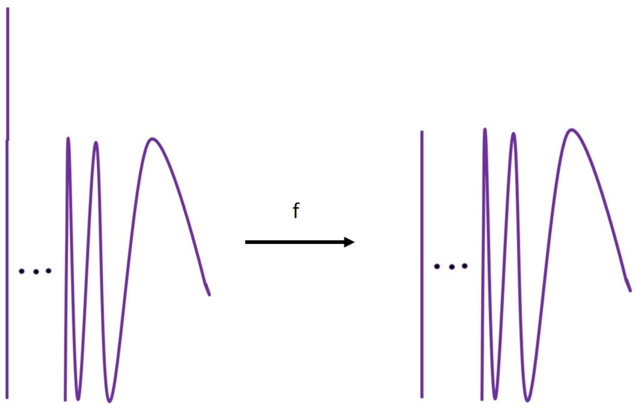


Figura 1.28: La función f es una función casimonótona.

Notemos que los subcontinuos Q de $Y \cup A$ con interior no vacío son de la forma:

(1) $Q = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}$ con $0 < a \leq b \leq 1$.

(2) $Q = A \cup \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, b]\}$ con $0 < b \leq 1$.

Observemos que si Q es como en (1) entonces $f^{-1}(Q) = Q$. Por lo que, f es casi-monótona.

Ahora, si Q es como en (2) entonces $f^{-1}(Q) = Q \cup (\{0\} \times [1, 2])$. De donde, $f^{-1}(Q)$ es conexo. Por lo tanto f es cuasimonótona.

Ejemplo 1.92. *Sean* $A = \{0\} \times [-1, 1]$, $B = [-1, 1] \times \{0\}$ *y* $C = [0, 1]$. *Consideremos* $X = A \cup B$. *Definamos* $f : X \longrightarrow C$ *como*

$$f(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [0, 1], \\ -y & \text{si } (x, y) \in \{0\} \times [-1, 0], \\ x & \text{si } (x, y) \in [0, 1] \times \{0\}, \\ -x & \text{si } (x, y) \in [-1, 0] \times \{0\}. \end{cases}$$

Así, f es una débilmente monótona (véase Figura 1.29).

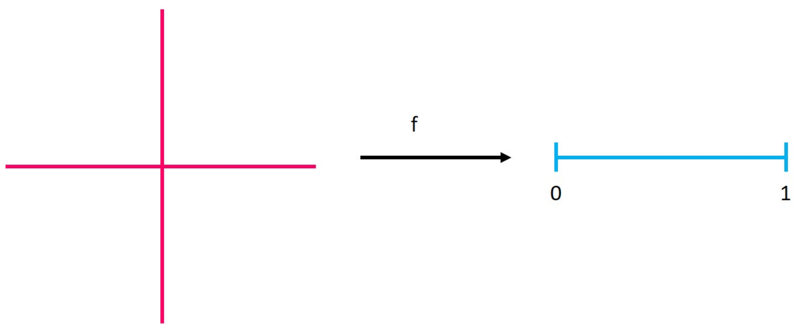


Figura 1.29: La función f es una función débilmente monótona.

Ahora daremos algunos resultados que muestran la relación entre las funciones listadas en la *Definición 1.82*. Los siguientes resultados se obtienen directamente de la Definición 1.82.

Proposición 1.93. *Cada homeomorfismo es una función atómica.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Sea K un subcontinuo de Y tal que $f(K)$ es no degenerado. Como f es biyectiva se tiene que $K = f^{-1}(f(K))$. $\square$

Proposición 1.94. *Cada homeomorfismo es una función abierta.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homeomorfismo. Sea U un subconjunto abierto de X. Luego, como f^{-1} es continua se tiene que $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de Y. $\square$

Proposición 1.95. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. Entonces f es monótona si y sólo si $f^{-1}(A)$ es un subcontinuo de X para cada subcontinuo A de Y.*

Demostración. Supongamos que f es monótona y sea A un subcontinuo de Y. Notemos que $f^{-1}(A)$ es compacto y no vacío. Basta ver que $f^{-1}(A)$ es conexo. Supongamos que existen B y C dos subconjuntos cerrados de X y ajenos tales que $f^{-1}(A) = B \cup C$.

Por la suprayectividad de f se tiene que $A = f(B) \cup f(C)$, donde $f(B)$ y $f(C)$ son cerrados en Y. Si $y \in f(B) \subset A$ entonces $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(A) = B \cup C$. Por hipótesis $f^{-1}(\{y\})$ es conexo y $f^{-1}(\{y\}) \cap B \neq \emptyset$ entonces $f^{-1}(\{y\}) \cap C = \emptyset$. Luego $y \notin f(C)$. De donde, $f(C) \cap f(B) = \emptyset$. Como A es conexo en Y, se sigue que $f(B) = \emptyset$ o $f(C) = \emptyset$, es decir, $B = \emptyset$ o $C = \emptyset$. Por lo tanto, $f^{-1}(A)$ es conexo.

Por otro lado, si $f^{-1}(A)$ es conexo para cada A subcontinuo de Y en particular para cada $y \in Y$ se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo. $\square$

Proposición 1.96. *Cada función monótona es una función confluente.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona. Sea Q un subcontinuo de Y. Como f es monótona se tiene por la Proposición 1.95, que $f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X. Es decir, $f^{-1}(Q)$ tiene sólo una componente. Así, $f(f^{-1}(Q)) = Q$. $\square$

Proposición 1.97. *Cada función confluente es semiconfluente.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función confluente y Q un subcontinuo de Y. Sean C_1 y C_2 dos componentes de $f^{-1}(Q)$, como f es confluente entonces $f(C_1) = Q$ y $f(C_2) = Q$. Así, $f(C_1) \subset f(C_2)$ y $f(C_2) \subset f(C_1)$. $\square$

Proposición 1.98. *Cada función semiconfluente es juntadora.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función semiconfluente y Q un subcontinuo de Y. Sean C_1 y C_2 dos componentes de $f^{-1}(Q)$, como f es semiconfluente $f(C_1) \subset f(C_2)$ o $f(C_2) \subset f(C_1)$. Así, $f(C_1) \cap f(C_2) = f(C_1) \neq \emptyset$ o $f(C_1) \cap f(C_2) = f(C_2) \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 1.99. *Cada función débilmente confluente es atriódica.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función débilmente confluente y Q un subcontinuo de Y. Como f es débilmente confluente existe C_1 una componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C_1) = Q$. Consideremos a C_2 una componente de $f^{-1}(Q)$ entonces $f(C_1) \cup f(C_2) = Q \cup f(C_1) = Q$. Por lo que para cada C componente de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(C) \subset f(C_1)$. $\square$

Proposición 1.100. *Cada función semiconfluente es débilmente confluente.*

Demostración. Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función semiconfluente y Q un subcontinuo de Y. Veamos que existe B una componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(B) = Q$. Consideremos

$$\mathcal{A} = \{A \subset Y : A \text{ es un subcontinuo de } Q \text{ y existe una componente, } C, \text{ de } f^{-1}(Q) \text{ tal que } A \subset f(C)\}.$$

La familia $\mathcal{A}$ es no vacía. Para probarlo, sea $y \in Q$, y sea x un punto en $f^{-1}(y)$. Consideremos a C la componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $x \in C$. Así, $\{y\} \subset f(C)$ entonces $\{y\} \in \mathcal{A}$.
Ahora, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$ tal que $A_n \subset A_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $A = Cl_Y\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$, notemos que $A \in \mathcal{A}$. Sea C_n la componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $A_n \subset f(C_n)$. Dado que X es un espacio compacto se sigue que $f^{-1}(Q)$ es compacto y existe una subsucesión convergente $\{C_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $C = \lim_{n\to\infty} C_{n_j}$, como $f(C) \subset Q$ y C es un subcontinuo, existe una componente C_0 de $f^{-1}(Q)$ tal que $C \subset C_0$. Por la continuidad de f se tiene que $A \subset f(C)$ y $A \subset f(C_0)$ lo cual implica que $A \in \mathcal{A}$. Se sigue del Teorema 1.1 que $\mathcal{A}$ tiene un elemento maximal, digamos K. Como $K \in \mathcal{A}$ existe B una componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $K \subset f(B)$.

Afirmación: $f(B) = Q$. Supongamos $f(B) \neq Q$, entonces existe $p \in Q \setminus f(B)$ y tomemos una componente C' de $f^{-1}(Q)$ tal que $p \in f(C')$. Como f es semiconfluente, tenemos que $f(B) \subset f(C')$ o $f(C') \subset f(B)$. Dado que $p \notin f(B)$ se tiene que $f(B) \subset f(C') \setminus \{p\}$, lo cual contradice el hecho de que K sea el máximo. Así, $f(B) = Q$. □

Proposición 1.101. *Cada función atómica es monótona.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función atómica. Supongamos que f no es monótona, entonces existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(\{y\})$ no es conexo en X. Así, existen A y B dos subconjuntos cerrados en $f^{-1}(\{y\})$, no vacíos y ajenos tales que $f^{-1}(\{y\}) = A \cup B$. Como f es continua entonces, $f^{-1}(\{y\})$ es cerrado en X, por lo que A y B son cerrados en X. Como X es métrico, en particular es normal de tal manera que, existen subconjuntos abiertos U y V de X tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. Sea D una componente de $\mathrm{Cl}_X(U)$ tal que $f^{-1}(y) \cap D \neq \emptyset$ por el Teorema 1.81, tenemos que $D \cap \mathrm{Fr}(U) \neq \emptyset$, por lo que $f(D)$ es no degenerado.

Afirmación: $D \subsetneq f^{-1}(f(D))$. Notemos que $y \in f(D)$ por lo que $f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(f(D))$. Luego, como $f^{-1}(\{y\}) \cap B \neq \emptyset$ y $B \subset V$ se tiene que $f^{-1}(\{y\}) \cap V \neq \emptyset$. Por otro lado, $D \cap V = \emptyset$. Así, $D \subsetneq f^{-1}(f(D))$.

Por lo tanto, f no es atómica. Ya que D es un subcontinuo de Y no degenerado tal que $D \subsetneq f^{-1}(f(D))$. □

Proposición 1.102. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, entonces f es abierta si y sólo si, para cada $y \in Y$ y para cada sucesión, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, contenida en Y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, se tiene que*

$$\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) = f^{-1}(y).$$

Demostración. Sea U un subconjunto abierto en X. Sea $y \in \mathrm{Cl}_Y(Y \setminus f(U))$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Veamos que $x \in X \setminus U$. Consideremos una sucesión, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, contenida en $Y \setminus f(U)$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

Por hipótesis $x \in f^{-1}(\{y\}) = \limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\})$, de esta manera existe una subsucesión $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, tal que para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$x_{n_j} \in f^{-1}(\{y_n\}) \text{ y } \lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x.$$

Dado que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = y_n$, y $f^{-1}(\{y_n\}) \cap U = \emptyset$, se tiene que $x_{n_j} \in X \setminus U$ para toda $j \in \mathbb{N}$. Como $X \setminus U$ es un subconjunto cerrado de X y $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_j} = x$ se sigue que $x \in X \setminus U$. De modo que $f(x) \in Y \setminus f(U)$, es decir, $y \in Y \setminus f(U)$. Por lo tanto, $Y \setminus f(U)$ es un subconjunto cerrado de Y, lo cual implica que f es una función abierta.

Ahora, sea $y \in Y$ y supongamos que existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión contenida en Y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Veamos que

$$\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) = f^{-1}(\{y\}).$$

Por lo cual, basta probar que

$$f^{-1}(\{y\}) \subset \liminf_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \text{ y } \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subset f^{-1}(\{y\}).$$

Dado que f es una función continua, por la Proposición 1.72, se tiene que

$$\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subset f^{-1}(\{y\}).$$

Ahora, tomemos un punto $x \in f^{-1}(\{y\})$ y U un subconjunto abierto de X tal que $x \in U$. Como f es una función abierta, $f(U)$ es un subconjunto abierto de Y que contiene al punto $f(x) = y$. Dado que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n > N$, $y_n \in f(U)$, esto es, $f^{-1}(\{y_n\}) \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in \liminf\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\})$. Esto prueba que $f^{-1}(\{y\}) \subset \liminf f^{-1}(\{y_n\})$. $\square$

Proposición 1.103. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \longrightarrow Y$ una función abierta. Si Z es un subconjunto no vacío de Y entonces $f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$ es una función abierta.*

Demostración. Como f es una función abierta y $Z \subset Y$ no vacío, sabemos que $f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$ es continua y suprayectiva. Sea W un subconjunto abierto en $f^{-1}(Z)$ entonces existe U subconjunto abierto de X tal que $W = U \cap f^{-1}(Z)$. Luego, $f|_{f^{-1}(Z)}(W) = f|_{f^{-1}(Z)}(U \cap f^{-1}(Z)) = f(U \cap f^{-1}(Z)) \subset f(U) \cap Z$.

Por otro lado, sea $y \in f(U) \cap Z$ existe $x \in U$ tal que $f(x) = y$, de manera que $x \in U \cap f^{-1}(Z)$. Es decir, $f(U) \cap Z \subset f|_{f^{-1}(Z)}(U \cap f^{-1}(Z)) = f|_{f^{-1}(Z)}(W)$. Por lo que, $f|_{f^{-1}(Z)}(W) = f(U) \cap Z$. Dado que f es abierta, se sigue que $f(U)$ es un subconjunto abierto en Y y por lo tanto $f|_{f^{-1}(Z)}(W)$ es un subconjunto abierto en Z. Por lo tanto, $f|_{f^{-1}(Z)}$ es una función abierta. $\square$

Proposición 1.104. *Cada función abierta es confluente.*

Demostración. Supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es abierta y no es confluente, es decir, existen Q un subcontinuo de Y y una componente K de $f^{-1}(Q)$ tales que $f(K) \neq Q$. Así, existe $q \in Q$ tal que $q \notin f(K)$. De donde, $f^{-1}(\{q\}) \cap K = \emptyset$.
Observemos que no existe un subconjunto conexo D de X tal que $D \cap f^{-1}(\{q\}) \neq \emptyset$ y $D \cap K \neq \emptyset$, en caso contrario, como K es una componente conexa de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $D \subset K$ y así $f^{-1}(\{q\}) \cap K \neq \emptyset$ lo cual no es posible.

Además, $f^{-1}(\{q\})$ y K son subconjuntos cerrados de $f^{-1}(Q)$. Luego, por el Teorema 1.80, existe un subconjunto abierto y cerrado G en $f^{-1}(Q)$ tal que $f^{-1}(\{q\}) \subset G$ y $G \cap K = \emptyset$. Sea $H = f^{-1}(Q) \setminus G$. Así, G y H son cerrados en $f^{-1}(Q)$ tales que $f^{-1}(Q) = G \cup H$, $K \subset H$, $f^{-1}(\{q\}) \subset G$ y $G \cap H = \emptyset$.

Como $f(G) = Q \cap f(G)$, se tiene que $f(G)$ es un subconjunto cerrado de Q. Por otro lado, como $G = (X \setminus H) \cap f^{-1}(Q)$ se tiene que G es un subconjunto abierto en $f^{-1}(Q)$. Por la Proposición 1.103, se tiene que $f|_{f^{-1}(Q)}$ es una función abierta, por lo que $f|_{f^{-1}(Q)}(G) = f(G)$ es un subconjunto abierto en Q.

Ahora, si $q \in f(G)$ existe $x \in G$ tal que $f(x) = q$, de manera que $x \in f^{-1}(Q) \subset H$. Así, $x \in G \cap H$, lo cual es una contradicción ya que $G \cap H = \emptyset$. De donde $q \in Q \setminus f(G)$. Por lo que, $f(G) \neq Q$ y además $f(G) \neq \emptyset$.
Luego, $f(G)$ es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de Q, $f(G) \neq Q$ y $f(G) \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción al hecho de que Q es conexo. Por lo tanto, f es confluente. $\square$

Proposición 1.105. *Sean X y Y dos espacios métricos compactos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Los siguientes enunciados se cumplen:*

(1) Si f es hereditariamente atómica entonces f es atómica.

(2) Si f es hereditariamente monótona entonces f es monótona.

(3) Si f es hereditariamente confluente entonces f es confluente.

(4) Si f es hereditariamente débilmente confluente entonces f es confluente.

(5) Si f es hereditariamente atriódica entonces f es atriódica.

Demostración. Observemos que el resultado se sigue inmediatamente de la Definición 1.82, considerando $X = K$. □

Corolario 1.106. *Sean X y Y dos espacio métricos compactos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Las siguientes proposiciones se cumplen:*

(1) Si f es hereditariamente monótona, entonces f es hereditariamente confluente.

(2) Si f es hereditariamente confluente, entonces f es hereditariamente débilmente confluente.

(3) Si f es hereditariamente débilmente confluente, entonces f es hereditariamente atriódica.

Demostración. Sea K un subcontinuo de X.
(1) Si f es hereditariamente monótona entonces $f|_K$ es monótona. Luego por Proposición 1.96, $f|_K$ es confluente. Por lo tanto, f es hereditariamente confluente.

(2) Si f es hereditariamente confluente entonces $f|_K$ es confluente. Luego por Proposición 1.97, $f|_K$ es semiconfluente. Se sigue de la Proposición 1.98, que $f|_K$ es débilmente confluente. Por lo tanto, f es hereditariamente débilmente confluente.

(3) Si f es hereditariamente débilmente confluente entonces $f|_K$ es débilmente confluente. Luego por Proposición 1.99, $f|_K$ es atriódica. Por lo tanto, f es hereditariamente atriódica. □

Proposición 1.107. *Sean X y Y continuos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ continua y suprayectiva es atómica, si y sólo si es hereditariamente atómica.*

Demostración. Sea Q un subcontinuo de X. Veamos que $f|_Q$ es atómica. Consideremos K un subcontinuo de Q tal que $f|_Q(K)$ es no degenerado. Notemos que K es un subcontinuo de X. Además $f|_Q(K) = f(K)$, por lo cual $f(K)$ es no degenerado y como f es atómica, se tiene que $K = f^{-1}(f(K))$. Por otro lado,

$$K \subset f|_Q^{-1}(f|_Q(K)) = f^{-1}(f|_Q(K)) = f^{-1}(f(K)) = K,$$

así tenemos, $f|_Q^{-1}(f|_Q(K)) = K$. De donde, $f|_Q$ es atómica. Por lo tanto, f es hereditariamente atómica.
El recíproco se sigue de la Proposición 1.105. □

Corolario 1.108. *Sean X y Y dos continuos. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva. Si f es atómica entonces f es hereditariamente monótona.*

Demostración. Sea K un subcontinuo de X. Como f es atómica entonces por Proposición 1.107, f es hereditariamente atómica. Se sigue que $f|_K$ es atómica. Luego por la Proposición 1.101, $f|_K$ es monótona. Por lo tanto, f es hereditariamente monótona. □

Proposición 1.109. *Sean X y Y dos espacios métricos compactos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva, si f es abierta entonces f es casi interior.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y U un subconjunto abierto de X tal que existe una componente C de $f^{-1}(\{y\})$ que satisface que $C \subset U$.

Notemos que $f(C) = \{y\}$ y $f(C) \subset f(U)$, así $y \in f(U)$. Dado que f es abierta, se sigue que $y \in \text{Int}(f(U)) = f(U)$. Por lo tanto, f es casi interior. $\square$

Proposición 1.110. *Sean X y Y dos espacios métricos compactos. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función monótona entonces f es casi interior.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Supongamos f no es casi interior en y, entonces existe un subconjunto abierto U de X tal que para cada componente C de $f^{-1}(\{y\})$ con $C \subset U$, se tiene que $y \notin \text{Int}(f(U))$. Así, $y \in \text{Fr}(f(U))$. De donde, $y \in \text{Cl}(Y \setminus f(U))$. Se sigue que existe $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $Y \setminus f(U)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Por la Proposición 1.72, se tiene que $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subset f^{-1}(\{y\})$. Además, dado que f es monótona se tiene que $f^{-1}(\{y\})$ es un conjunto conexo en X, sea $C = f^{-1}(\{y\})$. Así, $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) = C$.

Ahora, como $y_n \in Y \setminus f(U)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f^{-1}(\{y_n\}) \subset X \setminus U$. Luego como f es suprayectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Notemos que $x_n \in X \setminus U$ el cual es un subconjunto cerrado, y por tanto compacto, por lo que existe una subsucesión convergente de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea $x = \lim x'_n$. Como $X \setminus U$ es un subconjunto cerrado entonces $x \in X \setminus U$ y $x \in \limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\})$. Por otro lado, como $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subset C \subset U$ se sigue que $x \in U$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $y \in \text{Int}\,(f(U))$. Así, f es casi interior en el punto y y por tanto f es casi interior. $\square$

Teorema 1.111. *Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos y $y \in Y$. La función f es casi interior en y si y sólo si para cada sucesión, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ y para cada componente C de $f^{-1}(\{y\})$, se tiene que $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que f es casi interior en el punto y. Sean $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ y C una componente de $f^{-1}(\{y\})$. Veamos que, $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$.

Supongamos que $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C = \emptyset$. Por la Proposición 1.71, se tiene que $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\})$ y C son subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Como X es un espacio métrico entonces es normal, por lo que existen U y V subconjuntos abiertos de X tales que $\limsup\limits_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subset V$ y $C \subset U$ con $U \cap V = \emptyset$. De modo que $V \cap$

$\mathrm{Cl}(U) = \emptyset$. Como $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subset V$ entonces $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap \mathrm{Cl}(U) = \emptyset$.

Por otro lado, por hipótesis $y \in \mathrm{Int}(f(U))$. Así, como $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $y_n \in \mathrm{Int}(f(U)) \subset f(U)$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, fijemos $x_n \in U$ tal que $f(x_n) = y_n$. De esta manera, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in f^{-1}(\{y_n\}) \cap U$. Luego, existe $\{x'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x'_n = x$ para algún $x \in \mathrm{Cl}(U)$. Notemos que $x \in \limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\})$ y $x \in \mathrm{Cl}(U)$, lo cual es una contradicción. Así, $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$.

Ahora, supongamos que para cada sucesión, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y para cada componente C de $f^{-1}(\{y\})$, se tiene que $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$. Sea C una componente de $f^{-1}(\{y\})$ y U un subconjunto abierto de X tal que $C \subset U$. Veamos que $y \in \mathrm{Int}(f(U))$. Para ello, supongamos que $y \notin \mathrm{Int}(f(U))$. Por lo que $y \in \mathrm{Fr}(f(U)) \subset \mathrm{Cl}(Y \setminus f(U))$. Podemos considerar una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $Y \setminus f(U)$ convergente a y. Por hipótesis, $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$. Por otro lado, como f es suprayectiva, para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X \setminus U$. Así, $f^{-1}(\{y_n\}) \subset X \setminus U$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue que, $f^{-1}(\{y_n\}) \cap U = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subset X \setminus U$. Sea $x \in \liminf_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\})$, supongamos que $x \in U$. Así existe un subconjuntos infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-1}(\{y_n\}) \neq \emptyset$, para cada $n \in J$. Lo cual es una contradicción, de modo que $x \in X \setminus U$. Se sigue que, $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \subset X \setminus U$. Por otro lado, como $C \subset U$ se tiene que $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C = \emptyset$, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto, $y \in \mathrm{Int}(f(U))$. □

Corolario 1.112. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos. La función f es casi interior si y sólo si para cada $y \in Y$ y para cada sucesión, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y para cada componente C de $f^{-1}(\{y\})$, se tiene que $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $y \in Y$, por Teorema 1.111, la función f es casi interior en y si y sólo si para cada sucesión, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y para cada componente C de $f^{-1}(\{y\})$, se tiene que $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$.

Por lo tanto, f es cais interior si y sólo si para cada $y \in Y$ y para cada sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ y para cada componente C de $f^{-1}(\{y\})$, se tiene que $\limsup_{n\to\infty} f^{-1}(\{y_n\}) \cap C \neq \emptyset$. □

Proposición 1.113. *Si $f : X \to Y$ es una función ligera entre espacios métricos compactos y A es un subespacio conexo de X, entonces la restricción $f|_A : A \to f(A)$ es también una función ligera.*

Demostración. Consideremos $g = f|_A$. Veamos que g es ligera. Es claro que g es continua y suprayectiva pues f lo es. Sea $y \in f(A)$ y B un subconjunto conexo de $g^{-1}(\{y\})$. Notemos que $g^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\{y\}) \cap A$. Luego, $B \subset f^{-1}(\{y\})$. Como f es ligera y B es conexo en $A \subset X$, entonces B es conexo en X. Se sigue que B es degenerado. Por lo tanto, g es ligera. □

Teorema 1.114. *Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son funciones continuas y suprayectivas entre espacios métricos tales que g es ligera y $g \circ f$ es casi interior, entonces g es abierta.*

Demostración. Sean U un subconjunto abierto de Y y $y \in U$. Llamemos z al punto $g(y)$ y tomemos una componente C de $f^{-1}(\{y\})$. Notemos que $C \subset (g \circ f)^{-1}(\{z\})$, sea C' la componente de $f^{-1}(g^{-1}(\{z\}))$ que contiene a C. Tenemos que $(g \circ f)(C') = \{z\}$.

Así, que $f(C') \subset g^{-1}(\{z\})$, pero como g es una función ligera, entonces $f(C')$ es un conjunto degenerado, por lo que $f(C') = \{y\}$. Así $C' \subset f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(g^{-1}(\{z\}))$, por lo que C' debe ser una componente de $f^{-1}(\{y\})$, en otras palabras tenemos que $C = C'$. Como $C' = C \subset f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(U)$ donde $f^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto y $g \circ f$ es casi interior, de modo que $z \in \text{Int}(g \circ f(f^{-1}(U))) = \text{Int}(g(U))$. Esto implica que $g(U) \subset \text{Int}(g(U))$, es decir, $g(U)$ es un subconjunto abierto. Por lo tanto g es abierta. □

Proposición 1.115. *Sean X, Y y Z espacios métricos compactos. Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son funciones confluentes entonces $g \circ f$ es una función confluente.*

Demostración. Consideremos un subcontinuo Q de Z y K una componente de $(g \circ f)^{-1}(Q)$. Veamos que $(g \circ f)(K) = Q$. Sean C la componente de $g^{-1}(Q)$ tal que $f(K) \subset C$ y E la componente $f^{-1}(C)$ tal que $K \subset E$. Notemos que $K \subset E \subset f^{-1}(C) \subset f^{-1}(g^{-1}(Q))$, así $K \subset E \subset f^{-1}(g^{-1}(Q))$. Ya que K es una componente de $(g \circ f)^{-1}(Q)$, se tiene que $E = K$. Como $g^{-1}(Q)$ es cerrado en Y, se sigue que C es un subcontinuo de Y y dado que f es confluente, se tiene que $f(E) = C$. Dado que g es confluente y Q es un subcontinuo de Z se tiene que $Q = g(C) = g(f(E))$, es decir, $g(f(K)) = g \circ f(K) = Q$. De esta manera tenemos que $g \circ f$ es una función confluente. □

Haciendo uso del siguiente resultado vamos a probar que las funciones casi interiores son confluentes. Para una prueba de éste vea [16, Teorema 13.3, p. 279].

Teorema 1.116. ***(de factorización monótona ligera)*** *Sean X y Y espacios métricos compactos. $Sif : X \longrightarrow Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces existe un espacio métrico compacto Z y funciones $g : X \longrightarrow Z$ y $h : Z \longrightarrow Y$ tales que $f = h \circ g$ con g monótona y h ligera.*

Teorema 1.117. *Sean X y Y espacios métricos compactos y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Si f es casi interior entonces f es confluente.*

Demostración. Como f es una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos, por el Teorema 1.116, existen un espacio métrico compacto, Z, y funciones $g : X \longrightarrow Z$ y $h : Z \longrightarrow Y$ tales que g es monótona, h es ligera y $f = h \circ g$. Como g es monótona, por la Proposición 1.96 tenemos que g es confluente. Aplicando el Teorema 1.114, obtenemos que h es abierta. Por la Proposición 1.104, h es confluente. Se sigue de la Proposición 1.115 que $h \circ g = f$ es confluente. $\square$

Proposición 1.118. *Toda función casimonótona es cuasimonótona.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función casimonótona entre espacios métricos compactos. Sea Q un subcontinuo en Y tal que $Int_Y(Q) \neq \emptyset$. Como f es casimonótona $f^{-1}(Q)$ es conexo por lo que $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes, a saber una. Además, $f(f^{-1}(Q)) = Q$. Por lo tanto, f es cuasimonótona. $\square$

Proposición 1.119. *Toda función cuasimonótona es débilmente monótona.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función cuasimonótona entre espacios métricos compactos. Sea Q un subcontinuo en Y tal que $Int_Y(Q) \neq \emptyset$. Como f es cuasimonótona, $f^{-1}(Q)$ tiene un número finito de componentes y para cada componente D de $f^{-1}(Q)$ se tiene que $f(D) = Q$. Por lo tanto, f es débilmente monótona. $\square$

Proposición 1.120. *Cada función confluente es débilmente monótona.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función confluente entre espacios métricos compactos. Sea Q un subcontinuo en Y tal que $\mathrm{Int}(Q) \neq \emptyset$. Como f es confluente entonces $f(D) = Q$ para cada componente D de $f^{-1}(Q)$. Por lo tanto, f es débilmente monótona. $\square$

Proposición 1.121. *Cada función confluente es seudoconfluente.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función confluente entre espacios métricos compactos. Sea Q un subcontinuo irreducible en Y. Como f es confluente entonces $f(D) = Q$ para cada componente, D, de $f^{-1}(Q)$. Por lo tanto, existe C una componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$. Así, f es seudoconfluente. $\square$

Proposición 1.122. *Cada función débilmente confluente es seudoconfluente.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función débilmente confluente entre espacios métricos compactos. Sea Q un subcontinuo irreducible de Y. Como f es es débilmente confluente, existe C una componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(C) = Q$. Por lo que f es seudoconfluente. $\square$

Proposición 1.123. *Cada función casimónotona es seudomonótona.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función casimonótona entre espacios métricos compactos. Sean A y B dos subcontinuos propios de Y tales que $Y = A \cup B$. Notemos que A y B tienen interior no vacío. Así, como f es casimonótona $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ son subconjuntos conexos de X. $\square$

Proposición 1.124. *Cada función monótona es casimonótona.*

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona entre espacios métricos compactos. Sean Q un subcontinuo de Y con $\text{Int}_Y(Q) \neq \emptyset$. Como f es monótona, entonces $f^{-1}(Q)$ es conexo. Por lo tanto, f es casimonótona. $\square$

El siguiente resultado puede ser consultado en [13, Corolario (4.45), página 26].

Proposición 1.125. *Toda función hereditariamente confluente es cuasimonótona.*

La Figura 1.30 muestra la relación que hay entre todas las clases de funciones anteriores.

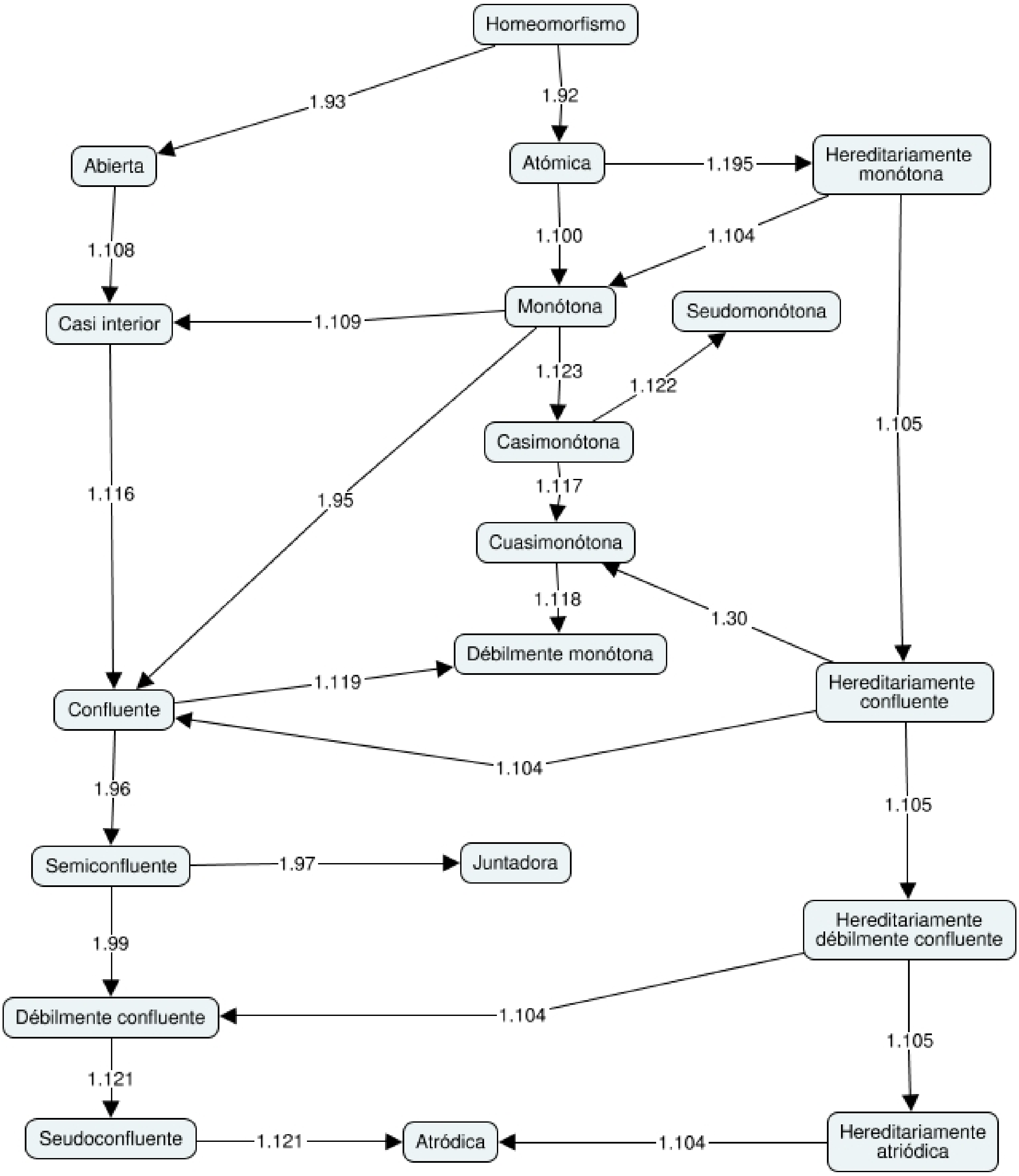


Figura 1.30: Relación entre funciones.

Capítulo 2

Funciones tipo conjunto

En este capítulo mostramos algunos resultados básicos acerca de funciones tipo conjunto, los cuales pueden ser consultados en [2], [4], [11], [12], [15]. Primero definiremos que es una función tipo conjunto y posteriormente daremos la definición de función T de Jones, T^{∞} y K, sobre las cuales hablaremos en este trabajo.

2.1. Aspectos básicos de las funciones tipo conjunto

En esta sección mencionamos algunas definiciones básicas de las funciones tipo conjunto, comenzamos mencionando el concepto bastante conocido como el conjunto potencia:

Definición 2.1. *Sea X un espacio métrico y compacto, denotamos por $\mathcal{P}(X)$ al conjunto potencia de X, es decir, $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$.*

Definición 2.2. *Sea X un espacio métrico y compacto, decimos que una función $\mathcal{L}_X$ es de **tipo conjunto**, si $\mathcal{L}_X$ está definida del conjunto potencia de X en sí mismo.*

Escribimos $\mathcal{L}$ en lugar de $\mathcal{L}_X$ si no existe una posibilidad de confusión.

Definición 2.3. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{L} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ una función tipo conjunto. Decimos que:*

(1) X es $\mathcal{L}$-simétrico puntual siempre que para cada par de puntos x_1 y x_2 de X, $x_1 \notin \mathcal{L}(\{x_2\})$ si y sólo si $x_2 \notin \mathcal{L}(\{x_1\})$.

(2) X es $\mathcal{L}$-simétrico siempre que para cada par de subconjuntos cerrados A y B de X, $A \cap \mathcal{L}(B) = \emptyset$ si y sólo si $B \cap \mathcal{L}(A) = \emptyset$.

(3) X es $\mathcal{L}$-aditivo si para cada par de subconjuntos cerrados A y B de X, $\mathcal{L}(A) \cup \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(A \cup B)$.

(4) $\mathcal{L}$ es idempotente si $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}^2(A) = \mathcal{L}(A)$ para cada subconjunto A de X.

(5) $\mathcal{L}$ *es idempotente en subconjuntos cerrados si* $\mathcal{L}(\mathcal{L}(A)) = \mathcal{L}^2(A) = \mathcal{L}(A)$ *para cada subconjunto cerrado* A *de* X*.*

Para un punto x *en* X *denotamos por* $\mathcal{L}(x)$ *a* $\mathcal{L}(\{x\})$*.*

En las secciones posteriores de este capítulo mostraremos algunos ejemplos de funciones tipo conjunto.

2.2. La función T

En esta sección estudiaremos algunas propiedades ya conocidas acerca de la función T definida por F. Burton Jones en 1948 (véase [7]). Función que está relacionada con el concepto de aposindésis.

Definición 2.4. *Sea* X *un espacio métrico compacto. Definimos* $T : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ *de la siguiente manera:*

$$T(A) = X \setminus \{x \in X : \text{existe un subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que } x \in \text{Int}\,(W) \subset W \subset X \setminus A\}.$$

La función T es llamada función T de Jones, la cual es una función tipo conjunto.

Observación 2.5. *Debido a que la función* T *está definida a partir de complementos de conjuntos, también puede definirse de la siguiente manera:*

$$T(A) = \{x \in X : \text{para cada subcontinuo } W \text{ de } X \text{tal que } x \in \text{Int}\,(W),\ \text{ se tiene que } A \cap W \neq \emptyset\}.$$

Teorema 2.6. *Sea* X *un espacio métrico compacto. Si* A *y* B *son subconjuntos de* X*, se tiene que:*

(1) $A \subset T(A)$*.*

(2) $T(A)$ *es cerrado en* X*.*

(3) Si $A \subset B$*, entonces* $T(A) \subset T(B)$*.*

(4) $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$*.*

Demostración.
(1) Si $x \notin T(A)$, entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in \text{Int}(W) \subset W \subset X \setminus A$. Así, $x \notin A$.

(2) Basta ver que $X \setminus T(A)$ es abierto. Sea $x \notin T(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in \text{Int}(W) \subset W \subset X \setminus A$. Notemos que para cada $y \in \text{Int}(W)$, $y \in X \setminus T(A)$. Así, $\text{Int}(W) \subset X \setminus T(A)$. Por lo tanto, $X \setminus T(A)$ es abierto.

(3) Sea $x \in X \setminus T(B)$, entonces existe W un subcontinuo de X tal que $x \in \text{Int}(W) \subset W \subset X \setminus B$. Como $A \subset B$, entonces $X \setminus B \subset X \setminus A$. Así, $x \in \text{Int}(W) \subset W \subset X \setminus A$. Por lo tanto, $x \in X \setminus T(A)$.

(4) Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, por (3) se sigue que $T(A) \subset T(A \cup B)$ y $T(B) \subset T(A \cup B)$. Por lo tanto, $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$. □

Teorema 2.7. *Si X es un espacio métrico y compacto con una cantidad finita de componentes entonces, $T(\emptyset) = \emptyset$.*

Demostración. Sean $x \in X$ y C la componente de X que lo contiene. Como X tiene un número finito de componentes, se sigue del Lema 1.24, que $x \in \text{Int}(C)$. Notemos que C es un subcontinuo de X tal que $x \in \text{Int}(C) \subset C \subset X \subset X \setminus \emptyset$. Así, $x \in X \setminus T(\emptyset)$. Por lo tanto, $X \subset X \setminus T(\emptyset)$. □

Corolario 2.8. *Sea X un continuo, entonces $T(\emptyset) = \emptyset$.*

Demostración. Como X es un continuo el resultado se sigue del Teorema 2.7. □

Teorema 2.9. *Si X es un continuo y W es un subcontinuo de X, entonces $T(W)$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Sea W un subcontinuo de X. Luego, por (1) y (2) del Teorema 2.6, se tiene que $T(W)$ es cerrado en X y $W \subset T(W)$. Por lo que, $T(W)$ es compacto en X y $T(W) \neq \emptyset$.

Solo basta probar que $T(W)$ es conexo. Para ello, supongamos que $T(W)$ no es conexo. Entonces existen $A, B \subset X$ cerrados y ajenos tales que $T(W) = A \cup B$. Como W es conexo y $W \subset T(W)$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $W \subset A$. Como X es un espacio métrico, existe U un abierto de X tal que $A \subset U$ y $\text{Cl}(U) \cap B = \emptyset$.

Notemos que $\text{Fr}(U) \cap T(W) = \emptyset$. Entonces $z \notin T(W)$ para cada $z \in \text{Fr}(U)$. Así, para cada $z \in \text{Fr}(U)$ existe W_z un subcontinuo de X tal que $z \in \text{Int}(W_z) \subset W_z \subset X \setminus W$. Como $\text{Fr}(U)$ es compacto y $\{\text{Int}(W_z)\}_{z \in \text{Fr}(U)}$ es una cubierta abierta de $\text{Fr}(U)$, existen $z_1, ..., z_n \in \text{Fr}(U)$ tales que $\text{Fr}(U) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(W_{z_i}) \subset \bigcup_{i=1}^n W_{z_i}$. Sean

$$V = U \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} W_{z_i})$$

y

$$Y = X \setminus V = (X \setminus U) \cup (\bigcup_{i=1}^{n} W_{z_i}).$$

Por el Teorema 1.81, Y tiene un número finito de componentes. Observemos que $B \subset X \setminus \mathrm{Cl}(U) \subset X \setminus U \subset Y$. Por lo tanto, $B \subset \mathrm{Int}(Y)$. Sea $b \in B$ y sea C la componente de Y que lo contiene. Por el Lema 1.24, $b \in \mathrm{Int}(C)$. Por otra parte $Y \cap W = \emptyset$, así $C \cap W = \emptyset$. Por lo que, $b \in X \setminus T(W)$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $T(W)$ es conexo y así $T(W)$ es un subcontinuo de X. □

Teorema 2.10. *Sean X un espacio métrico compacto, A y B subconjuntos cerrados no vacíos de X. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) $T(A) \cap B = \emptyset$.

(2) Existen dos subconjuntos cerrados M y N de X tales que $A \subset$ Int(M), $B \subset$ Int(N) y $T(M) \cap N = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $T(A) \cap B = \emptyset$, entonces $B \subset X \setminus T(A)$. Así, para cada $b \in B$ existe W_b un subcontinuo de X tal que $b \in \mathrm{Int}(W_b) \subset W_b \subset X \setminus A$. Luego $\{\mathrm{Int}(W_b)\}_{b \in B}$ es una cubierta abierta de B. Como B es compacto, existen $b_1, ..., b_n \in B$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(W_{b_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{b_i} \subset X \setminus A$. Como X es un espacio métrico existen dos subconjuntos abiertos U y V de X tales que

$$A \subset U \subset \mathrm{Cl}(U) \subset X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} (W_{b_i})) \quad \text{y}$$

$$B \subset V \subset \mathrm{Cl}(V) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Int}(W_{b_i}).$$

Sean $M = \mathrm{Cl}(U)$ y $N = \mathrm{Cl}(V)$. Entonces M y N son subconjuntos cerrados de X tales que $A \subset \mathrm{Int}(M)$ y $B \subset \mathrm{Int}(N)$. Notemos que $T(M) \cap N = \emptyset$, ya que de lo contrario si existe $x \in X$ tal que $x \in T(M) \cap N$, entonces existe un subcontinuo de X, digamos Z, tal que $x \in \mathrm{Int}(Z) \subset Z \subset X \setminus M$ y $x \in N$.

Ahora, supongamos que existen dos cerrados M y N de X tales que

$$A \subset \mathrm{Int}(M), B \subset N \text{ y } T(M) \cap N = \emptyset.$$

Se sigue de la Proposición 2.6, que $T(A) \subset T(\mathrm{Int}(M)) \subset T(M)$. Así $T(A) \cap B = \emptyset$. □

Teorema 2.11. *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Entonces X es semiaposindético en p y q si y sólo si $p \in X \setminus T(\{q\})$ o $q \in X \setminus T(\{p\})$.*

Demostración. Supongamos X es semiaposindético en p y q, entonces existe W subcontinuo de X tal que $\{p, q\} \cap \mathrm{Int}(W) \neq \emptyset$ y $\{p, q\} \cap X \setminus W \neq \emptyset$. Así, $p \in \mathrm{Int}(W)$ y $q \notin W$ o bien $q \in \mathrm{Int}(W)$ y $p \notin W$. De donde $p \in \mathrm{Int}(W) \subset W \subset X \setminus \{q\}$ o $q \in \mathrm{Int}(W) \subset W \subset X \setminus \{p\}$. Por lo tanto $p \in X \setminus T(q)$ o $q \in X \setminus T(p)$.

Ahora, supongamos que $p \in X \setminus T(q)$ o $q \in X \setminus T(p)$. Entonces existe W un subcontinuo de X tal que $p \in \mathrm{Int}(W) \subset W \subset X \setminus \{q\}$ o $q \in \mathrm{Int}(W) \subset W \subset X \setminus \{p\}$. Luego $p \in \mathrm{Int}(W)$ y $q \notin W$ o $q \in \mathrm{Int}(W)$ y $p \notin W$. Así $\{p, q\} \cap \mathrm{Int}(W) = \{p\}$ y

$\{p,q\} \cap X \setminus W = \{q\}$ o $\{p,q\} \cap \text{Int}(W) = \{q\}$ y $\{p,q\} \cap X \setminus W = \{p\}$. Se sigue que $\{p,q\} \cap \text{Int}(W) \neq \emptyset$ y $\{p,q\} \cap X \setminus W \neq \emptyset$. Por lo tanto X es semiaposindético en p y q. $\square$

Teorema 2.12. *Sean X un continuo y $p,q \in X$. Entonces X es aposindético en p con respecto a q si y sólo si $p \in X \setminus T(q)$.*

Demostración. Si X es aposindético en p con respecto a q, entonces existe W un subcontinuo de X tal que $p \in \text{Int}(W)$ y $q \in X \setminus W$. Así $p \in \text{Int}(W) \subset W \subset X \setminus \{q\}$. Por lo tanto $p \in X \setminus T(q)$.

Ahora supongamos $p \in X \setminus T(q)$, de esta manera existe C un subcontinuo de X tal que $p \in \text{Int}(C) \subset C \subset X \setminus \{q\}$. Luego, $p \in \text{Int}(C)$ y $q \in X \setminus C$. Por lo tanto, X es aposindético en p con respecto a q. $\square$

Teorema 2.13. *Un continuo X es aposindético si y sólo si $T(p) = \{p\}$ para cada $p \in X$.*

Demostración. Supongamos que X es aposindético. Sea $p \in X$, entonces $\{p\} \subset T(p)$. Como X es aposindético, X es aposindético en p con respecto a q para cada $q \in X \setminus \{p\}$. Se sigue del Teorema 2.11 que $q \in X \setminus T(p)$, para cada $q \in X \setminus \{p\}$. Así, $X \setminus \{p\} \subset X \setminus T(p)$. Entonces $T(p) \subset \{p\}$. Por lo tanto, $T(p) = \{p\}$.

Sea $p \in X$ y supongamos $T(p) = \{p\}$. Sea $q \in X$ con $q \neq p$. Entonces $q \notin T(p)$, es decir, $q \in X \setminus T(q)$. Luego, por el Teorema 2.12, X es aposindético en p con respecto a q. Como es para cualquier p y q en X, se sigue que X es aposindético. $\square$

Proposición 2.14. *Sea X un continuo. Entonces X es localmente conexo si y sólo si para todo subconjunto cerrado A de X se tiene que $T(A) = A$.*

Demostración. Supongamos X es localmente conexo. Sea A un subconjunto cerrado de X. Por la Proposición 2.6, $A \subset T(A)$. Veamos que $T(A) \subset A$, mostrando que, $X \setminus A \subset X \setminus T(A)$.

Sea $p \in X \setminus A$. Como $X \setminus A$ es abierto, existe un subconjunto abierto U de X tal que $p \in U \subset \text{Cl}(U) \subset X \setminus A$. Como X es localmente conexo, existe V un subconjunto abierto y conexo de X tal que $p \in V \subset \text{Cl}(V) \subset \text{Cl}(U) \subset X \setminus A$. Así, $p \in X \setminus T(A)$. Se sigue que, $T(A) \subset A$. Por lo tanto, $T(A) = A$.

Ahora, supongamos $T(A) = A$, para cada subconjunto cerrado A de X. Sea $p \in X$ y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Como $X \setminus U$ es cerrado, por hipótesis $T(X \setminus U) = X \setminus U$. Así, $p \notin X \setminus U$. Se sigue que, existe W un subcontinuo de X tal que $p \in \text{Int}(W) \subset W \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. De la Proposición 1.43, X es conexo en pequeño en p. Como p es arbitrario, se tiene que X es conexo en pequeño en cada punto y por tanto es localmente conexo. $\square$

Teorema 2.15. *Sea X un continuo. Entonces X es localmente conexo si y sólo si $T(Y) = Y$ para cada subcontinuo Y de X.*

Demostración. Supongamos X es localmente conexo. Consideremos Y un subcontinuo de X, como Y es cerrado se sigue de la Proposición 2.14 que $T(Y) = Y$.

Ahora, supongamos $T(Y) = Y$ para cada subcontinuo Y de X. Sea Q un abierto de X, basta probar que las componentes de Q son abiertas.

Sea $p \in Q$, por hipótesis $T(p) = \{p\}$. Así, para cada $x \in X \setminus Q \subset X \setminus \{p\}$. Existe W_x subcontinuo de X tal que $x \in \text{Int}(W_x) \subset W_x \subset X \setminus \{p\}$. Como $X \setminus Q$ es compacto y $\{\text{Int}(W_x)\}_{x \in Q}$ es una cubierta abierta de $X \setminus Q$, existen $W_1, ..., W_n$ continuos tales que $X \setminus Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i \subset X \setminus \{p\}$, sin pérdida de generalidad supongamos que n es el menor natural tal que $W_1, ..., W_n$ cubren a $X \setminus Q$.

Sea $U = X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} W_i)$ y sea P la componente de $\text{Cl}(U)$ tal que $p \in P$. Veamos que $p \in \text{Int}(P) \subset P \subset Q$. Por el Teorema 1.81, cada componente de $\text{Cl}(U)$ intersecta a $\bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Sea P' una componente de $\text{Cl}(U)$, distinta de P y supongamos que P' intersecta a W_j y W_k, donde $j, k \in \{1, ..., n\}$ y $j \neq k$. De esta manera $P' \cup W_j \cup W_k$ es un continuo pues es cerrado y conexo.

Sea $W' = \{W_1, W_2, ..., W_n, P' \cup W_j \cup W_k\} \setminus \{W_j, W_k\}$. Entonces W' tiene $n - 1$ elementos y $X \setminus Q \subset (\bigcup_{l \neq j,k} W_l) \cup (P' \cup W_j \cup W_k)$ lo cual es una contradicción al hecho de suponer que n era la mínima cantidad de continuos que cubren a $X \setminus Q$. Por la minimalidad de n, ninguna componente de $\text{Cl}(U)$, salvo P, puede intersectar a más de un W_j, pues de lo anterior, si para cada $j \in \{1, ..., n\}$, A_j denota la unión de todas las componentes de $\text{Cl}(U)$ que intersectan a W_j entonces para cada $j \neq k$ $A_j \cap A_k \subset P$.

Por otro lado, como $p \notin T(W_j) = W_j$ para cada $j \in \{1, ..., n\}$, existe un subcontinuo K_j tal que $p \in \text{Int}(K_j) \subset K_j \subset X \setminus W_j$. Entonces $K_j \cap (A_j \setminus P) = \emptyset$. Para ver esto, supongamos existe $x \in K_j \cap (A_j \setminus P)$. Sea L la componente de $K_j \cap \text{Cl}(U)$ que contiene a x. Por el Teorema 1.81, $L \cap \text{Fr}_{K_j}(K_j \cap \text{Cl}(U)) \neq \emptyset$. Esta frontera está contenida en $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Si $y \in \text{Fr}_{K_j}(K_j \cap \text{Cl}(U))$, entonces $y \in \text{Cl}(U)$. Por otro lado, si $y \in U$ entonces $y \in K_j \cap U \subset K_j \cap \text{Cl}(U)$ y $(K_j \cap U) \cap (K_j \setminus (K_j \cap \text{Cl}(U))) = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $y \in \text{Cl}(U) \setminus U \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} W_i$. Por tanto, existe, $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$ tal que $L \cap W_k \neq \emptyset$. Pero $L \subset M$, para alguna componente M de $\text{Cl}(U)$, $M \neq P$ y $P \subset A_j$, por lo que $M \cap W_k = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} K_j \cap (\bigcup_{i=1}^{n}(A_j \setminus P)) = \emptyset$. De donde se tiene que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} K_j \subset P$. Como $p \in \text{Int}(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} K_j)$, resulta que $p \in \text{Int}(P)$. Por lo que, P es una vecindad conexa de p contenida en Q. Como p es arbitrario de Q, se tiene que las componentes de Q son abiertas. $\square$

Proposición 2.16. *Sea X un continuo. Entonces X es indescomponible si y sólo si $T(p) = X$, para todo punto $p \in X$.*

Demostración. Supongamos que X es indescomponible, entonces todo subcontinuo propio de X tiene interior vacío. Luego, $T(p) = X$, para todo $p \in X$.

Ahora, supongamos que $T(p) = X$ para todo $p \in X$. Supongamos X es descomponible. Entonces existen A y B subcontinuos propios de X tales que $X = A \cup B$. Sean $a \in A$ y $b \in B$ tales que $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. Entonces $b \in \text{Int}(B) \subset B \subset X \setminus \{a\}$. Por lo que, $T(a) \neq X$. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es indescomponible. $\square$

Corolario 2.17. *Si X es un continuo indescomponibe, entonces $T(A) = X$ para cada subconjunto cerrado A de X.*

Demostración. Sea $A \subset X$ cerrado. Como $A = \bigcup_{p \in A} \{p\}$ se sigue que $\bigcup_{p \in A} T(p) \subset T(A)$. Pero por la Proposición 2.16, $T(p) = X$ para cada $p \in A$. Así $X \subset T(A)$. Por lo tanto, $T(A) = X$. $\square$

Lema 2.18. *Sean X es un continuo descomponible e irreducible, Y y Z subcontinuos propios y ajenos de X. Entonces $X \setminus (Y \cup Z)$ tiene a lo más tres componentes.*

Demostración. Dado que X es irreducible, por el Teorema 1.41, $X \setminus Y$ tiene a lo más dos componentes. Supongamos que $X \setminus Y = U \cup V$, donde U y V son subconjuntos abiertos y conexos de X, $Z \subset U$ y V ser vacío. De manera análoga, supongamos que $X \setminus Z = H \cup K$, donde H y K son subconjuntos abiertos y ajenos de X, $Y \subset H$ y K puede ser vacío. Sea $R = (U \setminus Z) \cap (H \setminus Y)$. Observemos que R es un subconjunto abierto de X, que $\text{Cl}(R) \cap Y \neq \emptyset$ y que $\text{Cl}(R) \cap Z \neq \emptyset$.

Afirmación (i): R es conexo. Supongamos que no lo es. Por el Teorema 1.81, se tiene que si C es una componente de R entonces $\text{Cl}(C) \cap (Y \cup Z) \neq \emptyset$. Si existiera una componente C de R tal que $\text{Cl}(C) \cap Y \neq \emptyset$ y que $\text{Cl}(C) \cap Z \neq \emptyset$ entonces $V \cup Y \cup \text{Cl}(C) \cup Z \cup K$ sería un subcontinuo de X que contendría a sus puntos de irreducibilidad, de donde $X = V \cup Y \cup \text{Cl}(C) \subset Z \cup K$. Como $R \cap (V \cup Y \cup Z \cup K) = \emptyset$ resultaría que $R \subset \text{Cl}(C)$. De donde R sería conexo, pues $C \subset R \subset \text{Cl}(C)$, lo cual contradiría nuestra suposición. Por tanto, para toda componente C de R se tiene que $\text{Cl}(C) \cap Y = \emptyset$ o $\text{Cl}(C) \cap Z = \emptyset$. Sean

$$\mathcal{A} = \{\text{Cl}(C) : C \text{ es una componente de } R \text{ y } \text{Cl}(C) \cap Y \neq \emptyset\}$$
$$\text{y}$$
$$\mathcal{B} = \{\text{Cl}(C) : C \text{ es una componente de } R \text{ y } \text{Cl}(C) \cap Z \neq \emptyset\}.$$

Afirmación (ii): $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son no vacíos. Supongamos $\mathcal{B} = \emptyset$. Observemos que $V \cup Y \cup (\bigcup \mathcal{A})$ es un conjunto conexo y que $(\bigcup \mathcal{A})$ no lo es. Así que existen dos subconjuntos J y L de $V \cup Y \cup (\bigcup \mathcal{A})$ tales que $\bigcup \mathcal{A} = J \cup L$. Notemos que $V \cup Y \cup J$ y que $V \cup Y \cup L$ son conjuntos conexos (véase [10], página 133). De esta manera se tiene que $(V \cup Y \cup \text{Cl}(J)) \cap Z \neq \emptyset$ o que $(V \cup Y \cup \text{Cl}(L)) \cap Z \neq \emptyset$. Supongamos que

$(V \cup Y \cup \mathrm{Cl}(J)) \cap Z \neq \emptyset$. Por lo anterior resulta que, $(V \cup Y \cup \mathrm{Cl}(J)) \cup Z \cup K$ es un subcontinuo propio de X que contiene a sus puntos de irreducibilidad , lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Análogamente se tiene que $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Observemos que, como X es un continuo, Cl $(\bigcup \mathcal{A}) \cap$ Cl $(\bigcup \mathcal{B}) \neq \emptyset$. Sea $x \in \mathrm{Cl}(\bigcup \mathcal{A}) \cap \mathrm{Cl}\,(\bigcup \mathcal{B})$. Como $x \in \mathrm{Cl}(\bigcup \mathcal{A})$, existe una sucesión $\{a_n\}_{n \in N}$ de puntos de $\bigcup \mathcal{A}$ que converge a x. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathrm{Cl}(C_n) \in \mathcal{A}$ tal que $x \in \mathrm{Cl}(C_n)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la sucesión $\{\mathrm{Cl}(C_n)\}_{n \in N}$ de subcontinuos de X, converge a un subcontinuo T de X, pues $C(X)$ es compacto. Notemos que $T \cap Y \neq \emptyset$ y que $x \in T$. De manera semejante podemos argumentar la existencia de un subcontinuo T' de X tal que $T' \cap Z \neq \emptyset$ y que $x \in T'$. De lo anterior se sigue que, $V \cup Y \cup T \cup T' \cup Z \cup K$ es un subcontinuo propio de X que contiene a sus puntos de irreducibilidad, lo cual es una contradicción. Por lo tanto R es conexo.

Por otra parte observemos que

$$\begin{aligned}
X \setminus [(V \cup Y) \cup (Z \cup K)] &= (X \setminus V) \cap (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \cap (X \setminus K)\\
&= (U \cap Y) \cap (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \cap (H \cap Z)\\
&= U \cap H\\
&= U \cap (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z) \cap H\\
&= U \cap (X \setminus Z) \cap (X \setminus Y) \cap H\\
&= (U \setminus Z) \cap (H \setminus Y)\\
&= R.
\end{aligned}$$

Como $V \cap (Y \cup Z \cup K) = \emptyset$ y $K \cap (Z \cup Y \cup V) = \emptyset$ se tiene que $X \setminus (Y \cup Z) = V \cup R \cup K$. $\square$

Proposición 2.19. *Si X es un continuo irreducible, entonces X es débilmente irreducible.*

Demostración. Sea $\{Z_i\}_{i=1}^n$ una familia de subcontinuos de X ajenos entres sí. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, por el Lemma 1.41, podemos suponer que $X \setminus Z_j = U_j \cup V_j$ donde U_j y V_j son subconjuntos abiertos conexos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que para cada $j \in \{2, ..., n-1\}$, $\bigcup_{k=1}^{j-1} Z_k \subset U_j$ y $\bigcup_{k=j+1}^{n} Z_k \subset V_j$.

Para cada $j \in \{1, ..., n-1\}$, sea $R_j = (V_j \setminus Z_{j+1}) \cap (U_{j+1} \setminus Z_j)$. Por el Lema 2.18, R_j es un subconjunto abierto y conexo de X. Notemos que $X \setminus (\bigcup\limits_{j=1}^{n} Z_j) = U_1 \cup (\bigcup\limits_{j=1}^{n-1} R_j) \cup V_n$.

De donde $X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} Z_j$ tiene a lo más $n+1$ componentes. Por lo tanto, X es débilmente irreducible. $\square$

Para el siguiente ejemplo recordemos la Definición 2.3. El ejemplo muestra un continuo que no es T-simétrico.

Ejemplo 2.20. *Sea X el abanico armónico dado en la Definición 1.17. Consideremos los puntos $p = (\frac{1}{2}, 0)$, $q = (\frac{3}{4}, 0)$ en X. Notemos que, $T(p) = \{(x, 0) : x \in [\frac{1}{2}, 1]\}$ y $T(q) = \{(x, 0) : x \in [\frac{3}{4}, 1]\}$. Además, $T(q) \cap \{p\} = \emptyset$ pero $T(p) \cap \{q\} \neq \emptyset$. Por lo que, X no es T-simétrico (véase Figura 2.1).*

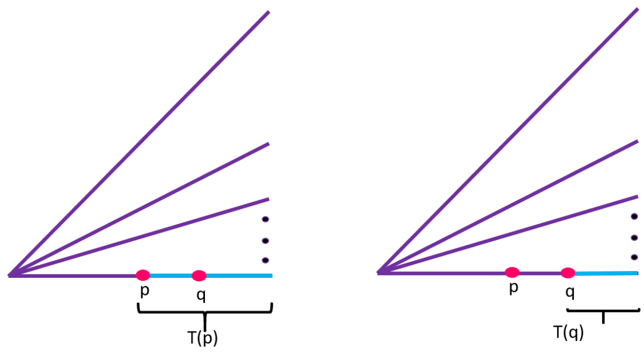


Figura 2.1: En la figura a la izquierda se observa $T(p)$ y en la figura a la derecha $T(q)$.

Teorema 2.21. *Si X es un continuo débilmente irreducible, entonces X es T-simétrico.*

Demostración. Sea X un continuo débilmente irreducible y sean A y B subconjuntos cerrados de X. Supongamos que $A \cap T(B) = \emptyset$. Veamos que $B \cap T(A) = \emptyset$. Como $A \cap T(B) = \emptyset$, para cada $a \in A$, existe W_a un subcontinuo de X tal que $a \in \text{Int}(W_a) \subset W_a \subset X \setminus B$. Como A es compacto y $\{\text{Int}(W_a)\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta de A, existen $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{a_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i} \subset X \setminus B$. De lo anterior, $B \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i} \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{a_i}) \subset X \setminus A$. Sea $b \in B$, como X es débilmente irreducible, $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$ tiene un número finito de componentes.

Afirmación: las componentes de $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$ son abiertas en X.

Supongamos $Z_1, ..., Z_m$ son las componentes de $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$, sabemos que cada Z_j es cerrado en $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$ por ser una componente de $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$. Sea $k \in \{1, ..., m\}$, entonces $\bigcup_{j=1, j \neq k}^{m} Z_j$ es cerrado en $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$. Observemos que $Z_k = (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}) \setminus (\bigcup_{j=1, j\neq k}^{m} Z_j)$. Por lo que Z_k es abierto en $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$. Como $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$ es abierto en

X y $Z_k = (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}) \cap V_k$ para V_k abierto en X, se sigue que Z_k es abierto en X.

Sea C la componente de $X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$ que contiene a b. Entonces, $b \in \text{Int}(C) \subset \text{Cl}(C) \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{a_i}) \subset X \setminus A$. Así, $b \notin T(A)$. Por lo tanto $B \cap T(A) = \emptyset$.

Análogamente, si $B \cap T(A) = \emptyset$ entonces $A \cap T(B) = \emptyset$. Por lo tanto, X es T-simétrico. □

Corolario 2.22. *Si X es un continuo irreducible, entonces X es T-simétrico.*

Demostración. Como X es irreducible por la Proposición 2.19, X es débilmente irreducible. Luego, por el Teorema 2.21, X es T-simétrico. □

De la *Definición 2.3*, podemos decir que un continuo X es T**-aditivo** si para cualquier pareja de subconjuntos cerrados A y B de X, $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$.

Proposición 2.23. *Un continuo T-simétrico es T-aditivo.*

Demostración. Sea X un continuo T-simétrico. Sean A y B subconjuntos cerrados de X. Por el Teorema 2.6, $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$. Veamos que $T(A \cup B) \subset T(A) \cup T(B)$. Sea $x \in T(A \cup B)$, entonces $\{x\} \cap T(A \cup B) \neq \emptyset$. Como X es T-simétrico $T(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. Por lo que, $T(x) \cap A \neq \emptyset$ o $T(x) \cap B \neq \emptyset$. Así, $\{x\} \cap T(A) \neq \emptyset$ o $\{x\} \cap T(B) \neq \emptyset$, pues X es T-simétrico. Entonces $x \in T(A)$ o $x \in T(B)$. Luego $T(A \cup B) \subset T(A) \cup T(B)$. Por lo tanto, $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$. □

El siguiente ejemplo muestra un continuo que no es T-aditivo.

Ejemplo 2.24. *La suspensión de la sucesión armónica es un continuo que no es T-aditivo, ver Figura 2.2. $T(a) = \{a\}$, $T(b) = \{b\}$ y $T(\{a, b\}) = ab$. Donde ab representa al arco límite (véase Figura 2.2).*

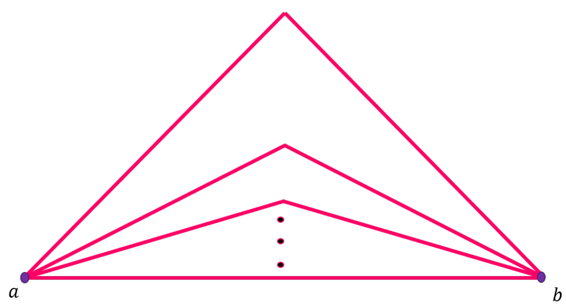


Figura 2.2: Suspensión de la sucesión armónica

Proposición 2.25. *Si X es un continuo hereditariamente unicoherente entonces X es T-aditivo.*

Demostración. Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Sean A y B subconjuntos cerrados de X. Por el Teorema 2.6, $T(A) \cup T(B) \subset T(A \cup B)$. Veamos que $T(A \cup B) \subset T(A) \cup T(B)$, para ello probaremos que $X \setminus (T(A) \cup T(B)) \subset X \setminus T(A \cup B)$.

Sea $x \in X \setminus (T(A) \cup T(B))$, entonces $x \in X \setminus T(A)$ y $x \in X \setminus T(B)$. Así, existen subcontinuos W_1 y W_2 de X tales que $x \in \text{Int}(W_1) \subset W_1 \subset X \setminus A$ y $x \in \text{Int}(W_2) \subset W_2 \subset X \setminus B$. Sea $W = W_1 \cap W_2$. Dado que X es hereditariamente unicoherente, W es un subcontinuo de X que contiene a x en su interior a saber,

$$x \in \text{Int}(W_1) \cap \text{Int}(W_2) \subset \text{Int}(W_1 \cap W_2) \subset W_1 \cap W_2 \subset X \setminus (A \cup B).$$

Por lo que, $x \in X \setminus T(A \cup B)$. Por lo tanto, $T(A \cup B) = T(A) \cup T(B)$. $\square$

Proposición 2.26. *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Si $p \notin T(A)$, entonces existe un subconjunto abierto U de X tal que $A \subset U$ y $p \notin T(Cl(U))$.*

Demostración. Como $p \notin T(A)$, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in \text{Int}(W) \subset W \subset X \setminus A$. Por la normalidad de X, existe un abierto U de X tal que $A \subset U \subset \text{Cl}(U) \subset X \setminus W$. Por lo tanto, $p \notin T(\text{Cl}(U))$. $\square$

Corolario 2.27. *Si X es un continuo T-aditivo y A es un subconjunto cerrado de X, entonces $T(A) = \bigcup\limits_{p \in A} T(p)$.*

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de X. Si $p \in A$, entonces $T(p) \subset T(A)$. Así, $\bigcup\limits_{p \in A} T(p) \subset T(A)$.
Ahora, sea $x \in X$ tal que $x \notin T(p)$ para cada $p \in A$. Por la Proposición 2.26, para cada $p \in A$, existe un abierto U_p de X tal que $p \in \{p\} \subset U_p$ y $x \notin T(\text{Cl}(U_p))$. Así, $\{U_p\}_{p \in A}$ es una cubierta abierta de A. Como A es compacto, existen $p_1, ..., p_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{p_i}$. Entonces $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} T(\text{Cl}(U_{p_i}))$. Dado que X es T-aditivo se tiene que $x \notin T(\bigcup\limits_{i=1}^{n} \text{Cl}(U_{p_i}))$ y por tanto $x \notin T(A)$. Por lo tanto, $\bigcup\limits_{p \in A} T(p) \subset T(A)$. $\square$

Proposición 2.28. *Si X es un continuo T-simétrico entonces X es T-simétrico puntual.*

Demostración. Sean p y q puntos en X, tenemos que $\{p\}$ y $\{q\}$ son cerrados en X. Como X es T-simétrico, $\{p\} \cap T(q) = \emptyset$ si y sólo si $\{q\} \cap T(p) = \emptyset$, es decir, X es T-simétrico puntual.

$\square$

Proposición 2.29. *Un continuo X es T-simétrico si y sólo si X es T-simétrico puntual y T-aditivo.*

Demostración. Supongamos que X es T-simétrico. Por la Proposición 2.23, X es T-aditivo. Además, por la Proposición 2.28, x es T-simétrico puntual.

Ahora, supongamos que X es T-simétrico puntual y T-aditivo. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X. Supongamos que $A \cap T(B) = \emptyset$ y $B \cap T(A) \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap T(A)$ entonces $x \in B$ y $x \in T(A)$, notemos que $x \notin A$ pues en caso contrario $x \in A \cap B \subset A \cap T(B)$, lo cual es una contradicción. Por otro lado, como X es T-aditivo, por el Corolario 2.27, tenemos que $T(A) = \bigcup\limits_{a \in A} T(a)$, así, existe $a \in A$, tal que $x \in T(a)$. Además como X es T-simétrico puntual, se sigue que $a \in T(x)$. Dado que $x \in B$ y $a \in T(x) \subset T(B)$ tenemos que $a \in A \cap T(B)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $B \cap T(A) = \emptyset$. Así, X es T-simétrico. □

Proposición 2.30. *Si X es un continuo T-aditivo y aposindético, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Por la Proposición 2.14, basta probar que $T(A) = A$ para cada subconjunto cerrado A de X.

Sea A un subconjunto cerrado de X, por el Corolario 2.27, $T(A) = \bigcup\limits_{p \in A} T(p)$. Como X es aposindético, por el Teorema 2.13, $T(p) = \{p\}$. Así, $T(A) = \bigcup\limits_{p \in A} T(p) = \bigcup\limits_{p \in A} \{p\} = A$. Por lo tanto, X es localmente conexo. □

Corolario 2.31. *Si X es un continuo hereditariamente unicoherente y aposindético entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Como X es hereditariamnete unicoherente, por la Proposición 2.25, X es T-aditivo. Como X es aposindético, por la Proposición 2.30, X es localmente conexo. □

El siguiente teorema es parte importante dentro de este trabajo y puede ser consultado en [15, Teorema 2.38, página 42].

Teorema 2.32. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Sean $A \subset X$ y $B \subset Y$ entonces:*

(1) $T_Y(B) \subset f(T_X(f^{-1}(B)))$.

(2) Si f es monótona, entonces $f(T_X(A)) \subset T_Y(f(A))$ *y* $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T_Y(B))$.

(3) Si f es monótona, entonces $T_Y(B) = f(T_X(f^{-1}(B)))$.

(4) Si f es abierta, entonces $f^{-1}(T_Y(B)) \subset T_X(f^{-1}(B))$.

(5) Si f es monótona y abierta, entonces $f^{-1}(T_Y(B)) = T_X(f^{-1}(B))$.

Demostración. (1) Sea $y \in Y \setminus f(T_X(f^{-1}(B)))$. Entonces $f^{-1}(y) \cap T_X(f^{-1}(B)) = \emptyset$. Se sigue que, para cada $x \in f^{-1}(y)$, $x \notin T_X(f^{-1}(B))$. Es decir, para cada $x \in f^{-1}(y)$ existe W_x un subcontinuo de X tal que $x \in \text{Int}(W_x) \subset W_x \subset X \setminus f^{-1}(B)$. Luego, como $f^{-1}(y)$ es compacto y $\{\text{Int}(W_x)\}_{x \in f^{-1}(y)}$ es una cubierta abierta de $f^{-1}(y)$, existen $x_1, ..., x_n \in f^{-1}(y)$ tales que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i} \subset X \setminus f^{-1}(B).$$

Entonces se tiene que, $(\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$ y $f^{-1}(y) \cap W_{x_i} \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Por lo que, $f(\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}) \cap B = \emptyset$ y dado que f es continua, tenemos que $f(\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i})$ es compacto conexo y no vacío, es decir, es un subcontinuo de Y.

Ahora, notemos que $Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} Int(W_{x_i}))$ es un subconjunto abierto en Y.

Afirmación: $Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{x_i})) \subset f(\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i})$.

Para ello, notemos que $\bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{x_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$, entonces $X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}) \subset X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{x_i}))$. Luego, $f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}) \subset f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{x_i}))$ entonces $Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{x_i})) \subset Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i})$. Dado que f es suprayectiva,

$$Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{x_i})) \subset f(X \setminus (X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}) = f(\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}).$$

De lo anterior se tiene que $f(\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i})$ es un subcontinuo de Y tal que

$$y \in Y \setminus f(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{x_i})) \subset Int(f(\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i})) \subset f(\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}) \subset Y \setminus B.$$

Así $y \in Y \setminus T_Y(B)$. Por lo que, $Y \setminus f(T_X(f^{-1}(B))) \subset Y \setminus T_Y(B)$. Es decir, $T_Y(B) \subset f(T_X(f^{-1}(B)))$.

(2) Supongamos que f es monótona. Veamos que $f(T_X(A)) \subset T_Y(f(A))$. Sea $y \in Y \setminus T_Y(f(A))$, entonces existe W un subcontinuo de Y tal que $y \in \text{Int}(W) \subset W \subset Y \setminus f(A)$. Se sigue que

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(\text{Int}(W)) \subset f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Y \setminus f(A)) \subset X \setminus A.$$

Por lo tanto, $f^{-1}(y) \subset X \setminus A$.

Como f es monótona y W es un subcontinuo de Y por la Proposición 1.95, se tiene que $f^{-1}(W)$ es un subcontinuo de X. Ahora, como $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(\text{Int}(W)) \subset f^{-1}(W) \subset X \setminus A$ se tiene que $f^{-1}(y) \cap T_X(A) = \emptyset$. Por lo tanto, $y \in Y \setminus f(T_X(A))$. De donde, $f(T_X(A)) \subset T_Y(f(A))$.

Veamos que $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T_Y(B))$. Sea $x \in X \setminus f^{-1}(T_Y(B))$ enonces $f(x) \notin T_Y(B)$. Así, existe W un subcontinuo de Y tal que $f(x) \in \text{Int}(W) \subset W \subset Y \setminus B$. Se sigue que,

$$x \in f^{-1}(\text{Int}(W)) \subset f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Y \setminus B) \subset f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B).$$

Dado que f es monótona, por la Proposición 1.95, tenemos que $f^{-1}(W)$ es un subcontinuo de X. Por lo que, $x \in X \setminus T_X(f^{-1}(B))$. Así $T_X(f^{-1}(B)) \subset X \setminus f^{-1}(T_Y(B))$.

(3) Supongamos f es monótona. Veamos que $T_Y(B) = f(T_X(f^{-1}(B)))$. Por el inciso (1), tenemos que $T_Y(B) \subset f(T_X(f^{-1}(B)))$ y por el inciso (2), tenemos que $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T_Y(B))$. De donde, $f(T_X(f^{-1}(B))) \subset f(f^{-1}(T_Y(B)))$. Dado que f es suprayectiva se tiene que $f(f^{-1}(T_Y(B))) = T_Y(B)$. De tal manera que $T_Y(B) \subset f(T_X(f^{-1}(B))) \subset T_Y(B)$. Por lo tanto, $f(T_X(f^{-1}(B))) = T_Y(B)$.

(4) Supongamos f es abierta. Sea $x \in X \setminus T_X(f^{-1}(B))$ entonces existe W un subcontinuo de X tal que $x \in \text{Int}(W) \subset W \subset X \setminus f^{-1}(B)$. Se sigue que,

$$f(x) \in f(\text{Int}(W)) \subset f(W) \subset f(X \setminus f^{-1}(B)) \subset f(X) \setminus f(f^{-1}(B)) \subset Y \setminus B.$$

Como f es abierta, $f(\text{Int}(W))$ es un subconjunto abierto de Y y dado que $f(W)$ notemos que $f(W)$ es un subcontinuo de Y entonces $f(\text{Int}(W)) \subset \text{Int}(f(W)) \subset f(W)$. Así, $f(x) \in Y \setminus T_Y(B)$. Por lo que, $x \in f^{-1}(Y \setminus T_Y(B)) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(T_Y(B)) = X \setminus f^{-1}(T_Y(B))$. De donde, $f^{-1}(T_Y(B)) \subset T_X(f^{-1}(B))$.

(5) Supongamos f es abierta y monótona. Por el inciso (2) se tiene que $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T_Y(B))$. Por (4) tenemos que $f^{-1}(T_Y(B)) \subset T_X(f^{-1}(B))$. Por lo tanto, $f^{-1}(T_Y(B)) = T_X(f^{-1}(B))$. □

Teorema 2.33. *Si $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, monótona y suprayectiva entre continuos tal que X es T-simétrico entonces Y es T-simétrico.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de Y tales que $A \cap T_Y(B) = \emptyset$. Entonces por (3) del Teorema 2.32, tenemos que $T_Y(B) = f(T_X(f^{-1}(B)))$. Así

$A \cap f(T_X(f^{-1}(B))) = \emptyset$. De donde, $f^{-1}(A) \cap T_X(f^{-1}(B)) = \emptyset$.
Como X es T-simétrico, sabemos que $T_X(f^{-1}(A)) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. Por la Proposición 1.9, se sigue que

$$\emptyset = f(T_X(f^{-1}(A)) \cap f^{-1}(B)) = f(T_X(f^{-1}(A))) \cap B. \tag{2.1}$$

Por el inciso (3) del Teorema 2.32, tenemos que $f(T_X(f^{-1}(A))) = T_Y(A)$, y aplicando (2.1) obtenemos:

$$f(T_X(f^{-1}(A))) \cap B = T_Y(A) \cap B = \emptyset.$$

Por lo tanto, Y es T-simétrico. □

Teorema 2.34. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua, monótona y suprayectiva entre continuos. Si X es T-aditivo entonces Y es T-aditivo.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de Y. Entonces, por el inciso (3) del Teorema 2.32. Tenemos:

$$\begin{aligned} T_Y(A \cup B) &= f(T_X(f^{-1}(A \cup B))) \\ &= f(T_X(f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B))) \\ &= f(T_X(f^{-1}(A)) \cup T_X(f^{-1}(B))) \\ &= f(T_X(f^{-1}(A))) \cup f(T_X(f^{-1}(B))) \\ &= T_Y(A) \cup T_Y(B). \end{aligned}$$

Por lo tanto, Y es T-aditivo. □

2.3. Propiedades de la función T^{∞}

En ésta sección analizaremos las propiedades la función tipo conjunto T^{∞}, definida en [2] y la cual está relacionada con la función T de Jones.
Para definir la función T^{∞} necesitamos del siguiente concepto:

Definición 2.35. *Dado un continuo X. Decimos que un subconjunto A de X es T-**cerrado** siempre que $T(A) = A$.*
Denotamos por $\mathfrak{T}(X)$ al conjunto de los subconjuntos T-cerrados de X.

$$\mathfrak{T}(X) = \{A \subset X : T(A) = A\}.$$

Teorema 2.36. *Dado X un continuo, notemos que se cumplen las siguientes proposiciones:*

(1) Si $A \in \mathfrak{T}(X)$, entonces A es un subconjunto cerrado de X, es decir, $\mathfrak{T}(X) \subset 2^X \cup \{\emptyset\}$.

(2) X es localmente conexo si y sólo si $\mathfrak{T}(X) = 2^X \cup \{\emptyset\}$.

(3) X es aposindético si y sólo si $F_1(X) \subset \mathfrak{T}(X)$.

Demostración.
(1) Por (2) del Teorema 2.6, tenemos que $T(A)$ es cerrado.
(2) Se sigue de la Proposición 2.14.
(3) Se sigue del Teorema 2.13. □

Teorema 2.37. *Sea X un continuo. Si $A \in \mathfrak{T}(X)$ y K es una componente de A, entonces $K \in \mathfrak{T}(X)$.*

Demostración. Sea $A \in \mathfrak{T}(X)$ y sea K una componente de A. Sabemos que $K \subset T(K)$ así por(3) del Teorema 2.6, $T(K) \subset T(A) = A$ y por el Teorema 2.9, tenemos que $T(K)$ es conexo. Como K es una componente de A y $K \subseteq T(K) \subset A$, se sigue que $T(K) = K$. Por lo tanto, $K \in \mathfrak{T}(X)$. □

Teorema 2.38. *Sea X un continuo. Si $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ es una familia de elementos de $\mathfrak{T}(X)$, entonces $\bigcap_{\lambda\in\Delta} A_\lambda \in \mathfrak{T}(X)$.*

Demostración. Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ una familia de elementos de $\mathfrak{T}(X)$. Entonces,

$$\begin{array}{rcll}
\bigcap\limits_{\lambda\in\Delta} A_\lambda & \subset & T(\bigcap\limits_{\lambda\in\Delta} A_\lambda) & \text{Por Teorema 2.6} \\
 & \subset & \bigcap\limits_{\lambda\in\Delta} T(A_\lambda) & \text{Por Teorema 2.6} \\
 & = & \bigcap\limits_{\lambda\in\Delta} A_\lambda &
\end{array}$$

Por lo tanto, $T(\bigcap_{\lambda\in\Delta} A_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Delta} T(A_\lambda)$. □

Teorema 2.39. *Si X es indescomponible, entonces $\mathfrak{T}(X) = \{X, \emptyset\}$.*

Demostración. Notemos que $\{X, \emptyset\} \subset \mathfrak{T}(X)$. Por otro lado, por la Proposición 2.16 tenemos que $T(p) = X$ para todo $p \in X$ pues X es indescomponible. Por lo que $T(Y) = X$ para todo Y subconjunto no vacío de X. Así, si $Y \in \mathfrak{T}(X)$ y $Y \neq \emptyset$ entonces $Y = X$. Por lo tanto, $\mathfrak{T}(X) = \{X, \emptyset\}$. □

Teorema 2.40. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ función monótona entre continuos. Si $B \in \mathfrak{T}(Y)$, entonces $f^{-1}(B) \in \mathfrak{T}(X)$.*

Demostración. Sea $B \in \mathfrak{T}(Y)$, entonces $T_Y(B) = B$. Notemos que $f^{-1}(B) \subset T_X(f^{-1}(B))$. Veamos que $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(B)$. Sea $x \in X \setminus f^{-1}(B)$, entonces $f(x) \notin B$. Como $T_Y(B) = B$, se sigue que $f(x) \notin T_Y(B)$. Así, existe un subcontinuo W de Y tal que $f(x) \in \text{Int}(W) \subset W \subset Y \setminus B$. Ahora, como f es monótona, $f^{-1}(W)$ es un subcontinuo de X y

$$x \in f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(\text{Int}(W)) \subset f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Y \setminus B) \subset X \setminus f^{-1}(B).$$

De donde, $x \notin T(f^{-1}(B))$. Luego $X \setminus f^{-1}(B) \subset X \setminus T(f^{-1}(B))$. Por lo tanto, $T(f^{-1}(B)) = f^{-1}(B)$. □

Corolario 2.41. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona entre continuos. Entonces $|\mathfrak{T}(Y)| \leq |\mathfrak{T}(X)|$.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathfrak{T}(Y) \longrightarrow \mathfrak{T}(X)$ definida como $\varphi(A) = f^{-1}(A)$. Notemos que, φ está bien definida, por el Teorema 2.40. Ahora, veamos que φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi(A) = \varphi(B)$ con $A, B \in \mathfrak{T}(Y)$. Como $\varphi(A) = f^{-1}(A)$ y $\varphi(B) = f^{-1}(B)$, se sigue que $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$. Luego dado que f es suprayectiva, $A = f(f^{-1}(A)) = f(f^{-1}(B)) = B$. Así, φ es inyectiva. Por lo tanto, $|\mathfrak{T}(Y)| \leq |\mathfrak{T}(X)|$. □

El siguiente ejemplo muestra como $|\mathfrak{T}(Y)|$ puede ser finita mientras que $|\mathfrak{T}(X)|$ es no numerable.

Ejemplo 2.42. *Sea K el arcoiris de Knaster ([6], página 16), y $B = [-1, 0] \times \{0\}$. Consideremos $X = K \cup B$ y definamos la función $f : X \longrightarrow K$ como*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in K \\ (0,0) & \text{si } (x,y) \in B. \end{cases}$$

Así, f es una función monótona. Notemos que, si A es un subconjunto cerrado y no vacío de $B \setminus \{(0,0)\}$, por el Teorema 2.39, $A \in \mathfrak{T}(X)$. Así, $\mathfrak{T}(X)$ es no numerable. Por otro lado, por el Teorema 2.16, $\mathfrak{T}(K) = \{K, \emptyset\}$ (véase Figura 2.3).

Por lo tanto, $|\mathfrak{T}(K)| < |\mathfrak{T}(X)|$

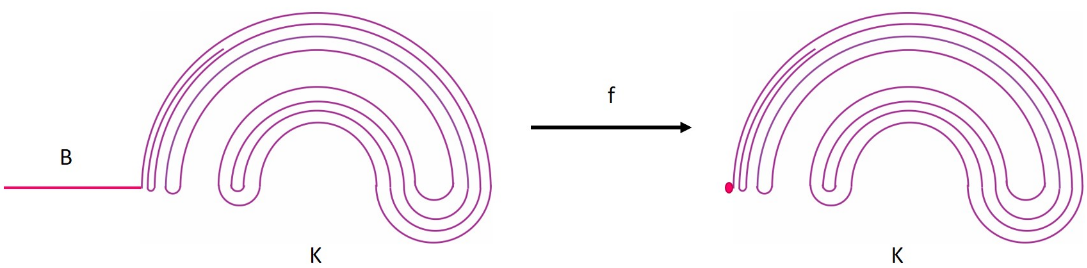


Figura 2.3: $f : X \to K$.

Definición 2.43. *Sean X un espacio métrico, $T : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ la función T de Jones. Definimos $T_X^{\alpha} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ de manera inductiva como:*

- $T_X^{\alpha}(A) = (T_X \circ T_X^{\alpha-1})(A)$, *si α es un ordinal sucesor.*
- $T_X^{\alpha}(A) = Cl(\bigcup_{\gamma<\alpha} T_X^{\gamma}(A))$, *si α es un ordinal límite.*

Cuando no haya confusión omitiremos el subíndice X y escribiremos solamente T^{α}.

Teorema 2.44. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona entre continuos. Si A es un subconjunto de X, entonces $f(T_X^\alpha(A))) \subset T_Y^\alpha(f(A))$ para todo ordinal α.*

Demostración. Procedamos por inducción transfinita.

- Consideremos $\alpha = 1$. Por el Teorema 2.32 sabemos que, $f(T_X^1(A)) = T_Y^1(f(A))$.
- Ahora supongamos $f(T_X^\alpha(A))) \subset T_Y^\alpha(f(A))$ para algún ordinal α.
- Veamos que para $\alpha + 1$ se tiene que $f(T_X^{\alpha+1}(A)) \subset T_Y^{\alpha+1}(f(A))$. Sabemos que,

$$\begin{aligned} f(T_X^{\alpha+1}(A)) &= f(T_X(T_X^\alpha(A))) \\ &\subset T_Y(f(T_X^\alpha(A))) \\ &\subset T_Y(T_Y^\alpha(f(A))) \\ &= T_Y^{\alpha+1}(f(A)). \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $f(T_X^{\alpha+1}(A)) \subset T_Y^{\alpha+1}(f(A))$.
- Ahora, consideremos un ordinal límite γ y supongamos que para cada $\alpha < \gamma$, $f(T_X^\alpha(A)) \subset T_Y^\alpha(f(A))$. Entonces

$$\bigcup_{\alpha<\gamma} f(T_X^\alpha(A)) \subset \bigcup_{\alpha<\gamma} T_Y^\alpha(f(A)). \tag{2.2}$$

  Se sigue que :

$$\begin{aligned} f(T_X^\gamma(A)) &= f(Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} T_X^\alpha(A))), && \text{por la Definición 2.43} \\ &= Cl(f(\bigcup_{\alpha<\gamma} T_X^\alpha(A))), && \text{pues } f \text{ es cerrada} \\ &= Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} f(T_X^\alpha(A))), && \text{por hipótesis de inducción} \\ &\subset Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} T_Y^\alpha(f(A))), && \text{por (2.2)} \\ &= T_Y^\gamma(f(A)), && \text{por la Definición 2.43.} \end{aligned}$$

  Así $f(T_X^\gamma(A)) \subset T_Y^\gamma(f(A))$.

Por lo tanto, $f(T_X^\alpha(A)) \subset T_Y^\alpha(f(A))$ para todo ordinal α. □

Definición 2.45. *Sea X un continuo, definimos la función $T^\infty : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ como*

$$T^\infty(A) = \bigcap\{B \in \mathfrak{T}(X) : A \subset B\}.$$

Teorema 2.46. *Sean X un continuo y $A \subset X$. Entonces*

(1) $T^\infty(A) \in \mathfrak{T}(X)$.

(2) $(T \circ T^\infty)(A) = (T^\infty \circ T)(A) = T^\infty(A)$.

Demostración. Sean X un continuo y $A \subset X$,

(1) Por el Teorema 2.38, $\bigcap\{B \in \mathfrak{T}(X) : A \subset B\} \in \mathfrak{T}(X)$. Luego, $T^\infty(A) \in \mathfrak{T}(X)$.

(2) Por el inciso (1), $T^\infty(A) \in \mathfrak{T}(X)$. Así, $T(T^\infty(A)) = T^\infty(A)$.
Notemos que,

$$\begin{aligned} T^\infty(T(A)) &= \bigcap\{B \in \mathfrak{T}(X) : T(A) \subset B\} \\ &\subset \bigcap\{B \in \mathfrak{T}(X) : A \subset B\} \\ &= T^\infty(A) \\ &= T(T^\infty(A)). \end{aligned}$$

Sea $a \in T^\infty(A) = \bigcap\{B \in \mathfrak{T}(X) : A \subset B\}$ entonces $a \in B$ para todo $B \in \mathfrak{T}(X)$ tal que $A \subset B$. Así, $a \in B$ para $B \in \mathfrak{T}(X)$ tal que $T(A) \subset T(B)$. Dado que $B \in \mathfrak{T}(X)$ se sigue que $a \in B$ para todo $B \in \mathfrak{T}(X)$ tal que $T(A) \subset B$. Por lo que, $T(T^\infty(A)) = T^\infty(T(A))$.

Por lo tanto, $(T \circ T^\infty)(A) = (T^\infty \circ T)(A) = T^\infty(A)$.

□

Teorema 2.47. *Si X es un continuo, entonces existe un ordinal α tal que $T^\infty = T^\alpha$.*

Demostración. Sea X un continuo. Consideremos γ el primer ordinal mayor a la cardinalidad de X. Entonces dado un subcontinuo A de X, para la sucesión transfinita $\{T^\beta(A)\}_{\beta<\gamma}$ existe un ordinal $\beta_A < \gamma$ tal que $T^{\beta_A+1}(A) = T^{\beta_A}(A)$. Dado que $\{T^\beta(A)\}_{\beta<\gamma}$ no puede aumentar γ veces cuando X tiene menos puntos que esos. Entonces $\alpha = \sup\{\beta_A : A \subset X\}$ es tal que $T^\infty = T^\alpha$. □

Teorema 2.48. *Un continuo X es aposindético si y sólo si $T^\infty(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$.*

Demostración. Por el Teorema 2.13 sabemos que X es aposindético si y sólo si $T(x) = \{x\}$ para todo $x \in X$. Así, $T(x) = \{x\}$ si y sólo si

$$T^\infty(x) = \bigcap\{B \in \mathfrak{T}(X) : \{x\} \subset B\} = \{x\},$$

para cada $x \in X$. □

Teorema 2.49. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si $T^\infty(A) = A$ para cada $A \in 2^X$.*

Demostración. Por el Teorema 2.14 sabemos que X es localmente conexo si y sólo si $T(A) = A$ para todo $A \in 2^X$. Así, $T(A) = A$ si y sólo si

$$T^\infty(A) = \bigcap\{B \in \mathfrak{T}(X) : A \subset B\} = A$$

para cada $A \in 2^X$. □

Teorema 2.50. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si $T^\infty(A) = A$ para cada subcontinuo A de X.*

Demostración. Por el Teorema 2.15 sabemos que X es localmente conexo si y sólo si $T(A) = A$ para todo A subcontinuo de X. Así, $T(A) = A$ si y sólo si

$$T^\infty(A) = \bigcap\{B \in \mathfrak{T}(X) : A \subset B\} = A$$

para cada $A \in C(X)$. □

Teorema 2.51. *Si X es un continuo indescomponible, entonces $T^\infty(A) = X$ para cada $A \in 2^X$.*

Demostración. Por el Teorema 2.16, sabemos que X es indescomponible si y sólo si $T(A) = X$ para todo $A \in 2^X$. Así,

$$T^\infty(A) = \bigcap\{B \in \mathfrak{T}(X) : A \subset B\} = X$$

para cada $A \in 2^X$. □

Teorema 2.52. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona entre continuos. Si A es un subconjunto de X, entonces $f(T_X^\infty(A)) \subset T_Y^\infty(f(A))$.*

Demostración. Por el Teorema 2.47 sabemos que $T^\infty = T^\alpha$ para algún ordinal α. Luego, por el Teorema 2.44, $f(T_X^\alpha(A)) \subset T_Y^\alpha(f(A))$. Así, $f(T_X^\infty(A)) \subset T_Y^\infty(f(A))$. □

Corolario 2.53. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona entre continuos. Si Y es aposindético, entonces $f|_{T_X^\infty(x)}$ es una función constante para cada $x \in X$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Por el *Teorema 2.52*, $f(T_X^\infty(x)) \subset T_Y^\infty(f(x))$ y por el *Teorema 2.48*, $T_Y^\infty(f(x)) = f(x)$. Por lo tanto, $f|_{T_X^\infty(x)}$ es constante. □

Teorema 2.54. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función abierta y monótona entre continuos. Si $B \subset Y$, entonces $T_X^\alpha(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^\alpha(B))$ para cada ordinal α.*

Demostración. Procedamos por inducción transfinita.

- Dado que f es abierta y monótona, se sigue del Teorema 2.32 que, $T_X^1(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^1(B))$.
- Supongamos que $T_X^\alpha(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^\alpha(B))$ para algún ordinal α.
- Veamos que para $\alpha + 1$ se cumple que $T_X^{\alpha+1}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha+1}(B))$.

$$\begin{aligned} T_X^{\alpha+1}(f^{-1}(B)) &= T_X(T_X^\alpha(f^{-1}(B))) \\ &= T_X(f^{-1}(T_Y^\alpha(B))) && \text{Por hipótesis de inducción} \\ &= f^{-1}(T_Y(T_Y^\alpha(B))) && \text{Por base de inducción} \\ &= f^{-1}(T_Y^{\alpha+1}(B)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T_X^{\alpha+1}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha+1}(B))$.

- Sea γ un ordinal límite y supongamos que para cada $\alpha < \gamma$ se tiene que $T_X^\alpha(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^\alpha(B))$. Mostraremos que, $T_X^\gamma(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^\gamma(B))$. Como $T_X^\alpha(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^\alpha(B))$, entonces

$$\bigcup_{\alpha<\gamma} T_X^\alpha(f^{-1}(B)) = \bigcup_{\alpha<\gamma} f^{-1}(T_Y^\alpha(B)).$$

Así,

$$\begin{aligned} T_X^\gamma(f^{-1}(B)) &= Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} T_X^\alpha(f^{-1}(B))) && \text{Por la Definición 2.43} \\ &= Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} f^{-1}(T_Y^\alpha(B))) && \text{Por hipótesis de inducción} \\ &= f^{-1}(Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} T_Y^\alpha(B))) \\ &= f^{-1}(T_Y^\gamma(B)) && \text{Por la Definición 2.43.} \end{aligned}$$

De donde, $T_X^\gamma(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^\gamma(B))$.

Por lo tanto, $T_X^\alpha(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^\alpha(B))$ para cada ordinal α. □

Teorema 2.55. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función abierta y monótona entre continuos, entonces $T_X^\infty(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^\infty(B))$ para cada $B \subset Y$.*

Demostración. Sean α_0 y α_1, como en el Teorema 2.46, los ordinales para X y Y, respectivamente, tales que

$$T_X^\infty = T_X^{\alpha_0} \text{ y } T_Y^\infty = T_Y^{\alpha_1}.$$

Por el Teorema 2.46, $T \circ T^\infty = T^\infty$. Así, $T_X^\infty = T_X^{\alpha_0+1}$ y $T_Y^\infty = T_Y^{\alpha_1+1}$.
Si $\alpha = \sup\{\alpha_0, \alpha_1\}$ entonces por el Teorema 2.54. Tenemos que,

$$T_X^\infty(f^{-1}(B)) = T_X^\alpha(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^\alpha(B)) = f^{-1}(T_Y^\infty(B)).$$

□

2.4. Propiedades de la función K

En esta sección estudiaremos algunas propiedades ya conocidas acerca de la función K definida en [7] por F. Burton Jones en 1948.

Definición 2.56. *Sea X un espacio métrico compacto, definimos la función $K : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ como*

$$K(A) = \bigcap\{C : C \textit{ es un subcontinuo de } X \textit{ tal que } A \subset Int(C)\}.$$

Ejemplo 2.57. *Consideremos a X, el abanico armónico dado en la Definición 1.17. Sea $p \in [0,1]$, consideramos $A = \{(p,0)\} \subseteq A_0$. Entonces $K(A) = \{(x,y) \in X : x \in [0,p], y = 0\}$ (véase Figura 2.4). Notemos que $T(A) = \{(x,y) \in X : x \in [p,1], y = 0\}$ distinto a $K(A)$.*

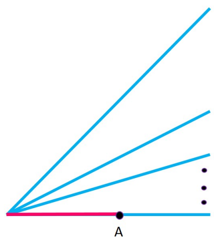


Figura 2.4: Abanico armónico

.

Ejemplo 2.58. *Consideremos a X, la curva senoidal dada en la Definición 1.16. Sean p, q, r tres puntos en A, $K(\{p, q, r\})$ es el arco más pequeño que contiene a los tres puntos. Si t es un punto en $J = \{0\} \times [-1, 1]$, entonces $K(t) = J$ (véase Figura 2.5).*

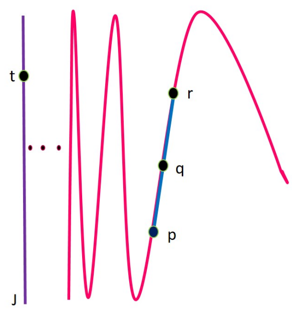


Figura 2.5: Curva Senoidal y puntos t, p, q, r.

Proposición 2.59. *Sea X un espacio métrico compacto, entonces*

(1) Si $A \subset X$, entonces $A \subset K(A)$.

(2) Si $A \subset X$,entonces $K(A)$ es un subconjunto cerrado de X.

(3) Si A y B son subconjuntos de X tales que $A \subset B$, entonces $K(A) \subset K(B)$.

(4) Si A y B son subconjuntos de X, entonces $K(A) \cup K(B) \subset K(A \cup B)$.

Demostración.
(1)Sea $x \in X \setminus K(A)$ entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \notin W$ y $A \subset \text{Int}(W)$. Luego, $x \in X \setminus A$. Por lo tanto, $A \subset K(A)$.

(2) Se sigue inmediatamente del hecho que $K(A)$ es intersección arbitraria de cerrados.

(3) Sean A y B subconjuntos de X tales que $A \subset B$. Si $x \in X \setminus K(B)$, entonces existe W un subcontinuo de X tal que $x \notin W$ y $B \subset \text{Int}(W)$. Como $A \subset B$, se sique que $x \notin W$ y $A \subset \text{Int}(W)$. De donde, $x \in X \setminus K(A)$. Por lo tanto, $K(A) \subset K(B)$.

(4) Dado que $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, se sigue del inciso (3) que, $K(A) \subset K(A \cup B)$ y $K(B) \subset K(A \cup B)$. Por lo tanto $K(A) \cup K(B) \subset K(A \cup B)$. □

Teorema 2.60. *Sean X un continuo y A un subconjunto cerrado de X. Si $x \in X \setminus K(A)$, entonces existe V un subcojunto abierto de X tal que $A \subset V$ y $x \notin K(Cl(V))$.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus K(A)$. Entonces existe W un subcontinuo de X tal que $x \notin W$ y $A \subset \text{Int}(W)$. Dado que X es un espacio métrico, existe V un subconjunto abierto de X tal que $A \subset V \subset \text{Cl}(V) \subset \text{Int}(W)$. Notemos que $K(\text{Cl}(V)) \subset W$, se sigue que $x \notin K(\text{Cl}(V))$. Por lo tanto, V es el subconjunto abierto de X buscado. □

Por (5) y (6) la Definición 2.3 consideremos cuando un X es K**-simétrico**, K**-simétrico puntual** y K**-aditivo**.

Teorema 2.61. *Si X es un continuo K-aditivo y A es un subconjunto cerrado de X, entonces $K(A) = \bigcup_{a \in A} K(a)$.*

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de X. Si $a \in A$ entonces $K(a) \subset K(A)$. Así, $\bigcup_{a \in A} K(a) \subset K(A)$.

Ahora, sea $x \in X \setminus \left(\bigcup_{a \in A} K(a) \right)$. Entonces $x \notin K(a)$ para todo $a \in A$. Así, por el Teorema 2.60, para cada $a \in A$ existe U_a un subconjunto abierto de X tal que $a \in U_a$ y $x \notin K(\text{Cl}(U_a))$. Dado que A es compacto y $\{U_a\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta de A, existen $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$. Además, como $x \notin K(\text{Cl}(U_{a_i}))$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$ entonces $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} K(\text{Cl}(U_{a_i})) = K\left(\bigcup_{i=1}^{n} \text{Cl}(U_{a_i}) \right)$. De está manera, como $K(A) \subset K\left(\bigcup_{i=1}^{n} \text{Cl}(U_{a_i}) \right)$ entonces $x \notin K(A)$. Por lo tanto, $K(A) = \bigcup_{a \in A} K(a)$. □

Teorema 2.62. *Si X es un continuo K-simétrico, entonces X es K-aditivo y K-simétrico puntual.*

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X. Veamos que $K(A) \cup K(B) = K(A \cup B)$. Es claro que $K(A) \cup K(B) \subset K(A \cup B)$. Ahora, sea $x \in K(A \cup B)$ entonces $\{x\} \cap K(A \cup B) \neq \emptyset$. Como X es K-simétrico se sigue que $K(x) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$. De donde, $K(x) \cap A \neq \emptyset$ o $K(x) \cap B \neq \emptyset$. Nuevamente, aplicando el ser K-simétrico se sigue que $\{x\} \cap K(A) \neq \emptyset$ o $\{x\} \cap K(B) \neq \emptyset$. Así,

$x \in K(A)$ o $x \in K(B)$. Es decir, $x \in K(A) \cup K(B)$. Por lo tanto, X es K-aditivo.

Ser K-simétrico puntual se sigue de la definición de K-simétrico. $\square$

Teorema 2.63. *Sea X un continuo, X es K-simétrico si y sólo si X es K-simétrico puntual y K-aditivo.*

Demostración. Del Teorema 2.62, se sigue que X es K-simétrico puntual y K-aditivo.

Ahora, supongamos X es K-simétrico puntual y K-aditivo. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X. Supongamos $A \cap K(B) = \emptyset$ y $B \cap K(A) \neq \emptyset$. Sea $x \in B \cap K(A)$, entonces $x \in B$ y $x \in K(A)$. Notemos que $x \notin A$, pues en caso contrario $x \in A \cap K(B)$ lo cual no es posible. Además, $K(A) = \bigcup_{a \in A} K(a)$ por el Teorema 2.61. Así, $x \in K(a)$ para algún $a \in A$. De donde, $\{x\} \cap K(a) \neq \emptyset$, así $\{a\} \cap K(x) \neq \emptyset$ pues X es K-simétrico puntual. Luego, $a \in K(x) \subset K(B)$ entonces $a \in A \cap K(B)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $B \cap K(A) = \emptyset$.

$\square$

Teorema 2.64. *Sea X un continuo, $K(A) = X$ para todo subconjunto cerrado A de X si y sólo si X es indescomponible.*

Demostración. Supongamos $K(A) = X$ para todo subconjunto cerrado A de X, entonces $X = \bigcap\{C : C$ es un subcontinuo de X tal que $A \subset \text{Int}(C)\}$ y todo A cerrado en X. Así, $X \subset C$ para cada subcontinuo de X tal que $A \subset \text{Int}(C)$. Por lo que, $\text{Int}(C) = \emptyset$ para todo subcontinuo propio de X. Por lo tanto, X es indescomponible.

Ahora como X es indescomponible, X es el único continuo con interior no vacío. Así,

$$K(A) = \bigcap\{C : C \text{ es un subcontinuo de } X \text{ tal que } A \subset \text{Int}(C)\} = X$$

para cada $A \subset X$. $\square$

Teorema 2.65. *Si X es un continuo, entonces $K(A) = \bigcup_{a \in A} K(a)$ para cada A subcontinuo de X.*

Demostración. Sea A un subcontinuo de X. Es claro que, si $a \in A$ entonces $K(a) \subset K(A)$. Así, $\displaystyle\bigcup_{a \in A} K(a) \subset K(A)$.

Ahora, sea $z \in X \setminus \displaystyle\bigcup_{a \in A} K(a)$ entonces $z \notin K(a)$ para cada $a \in A$. Así, existe un subcontinuo M_a de X tal que $z \notin M_a$ y $a \in \text{Int}(M_a)$ para cada $a \in A$. Dado que A es compacto y $\{\text{Int}(M_a)\}_{a \in A}$ es una subcubierta abierta de A, existen $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(M_{a_i}) \subset \bigcup M_{a_i}$. Sea $M = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} M_{a_i}$, M es un subcontinuo de X, ya que $A \subset M$, es decir, es conexo y no vacío. Además es unión finita de compactos, por lo que es compacto y al ser subconjunto de un espacio métrico se tiene que M es métrico, además M es tal que $A \subset \text{Int}(M)$ y $x \notin M$. Por lo que, $x \notin K(A)$. Por lo tanto, $K(A) = \displaystyle\bigcup_{a \in A} K(a)$. $\square$

W. Dwayne Collins en [3] define los continuos IUC para analizar la conexidad de $K(A)$.

Definición 2.66. *Un espacio métrico compacto X tiene la **propiedad** IUC siempre que cada subcontinuo propio A de X con interior no vacío es unicoherente. Si un continuo tiene la propiedad IUC hereditariamente entonces el continuo tiene la propiedad $HIUC$.*

Observación 2.67. *Notemos que la clase de continuos IUC incluye a todos los continuos que no contienen triodos, mejor conocidos como continuos **atriódicos** y continuos hereditariamente unicoherentes.*

Las pruebas de los siguientes Teoremas pueden ser consultada en [3, pág 703].

Teorema 2.68. *Sea X un continuo que tiene la propiedad IUC y $x \in X$ entonces $K(x)$ es un subcontinuo de X.*

Teorema 2.69. *Sea X un continuo que tiene la propiedad IUC y A es un subcontinuo de X, entonces $K(A)$ es un subcontinuo de X.*

Corolario 2.70. *Si X es un continuo hereditariamente unicoherente y $x \in X$ entonces $K(x)$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Sea X un continuo hereditariamente unicoherente, por la Observación 2.67, X es un continuo que tiene la propiedad IUC. Así por el Teorema 2.68, $K(x)$ es un subcontinuo de X. $\square$

En los siguientes teoremas se darán algunas relaciones entre la función K y ciertas clases de funciones entre espacios topológicos.

Teorema 2.71. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona entre continuos. Entonces, $K_X(A) \subset f^{-1}(K_Y(f(A)))$ para cada A subconjunto cerrado de X.*

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de X y sea $x \in X \setminus f^{-1}(K_Y(f(A)))$. Entonces, $f(x) \notin K_Y(f(A))$. Así, existe W un subcontinuo de Y tal que $f(x) \notin W$ y $f(A) \subset \text{Int}(W)$. Dado que f es monótona, $f^{-1}(W)$ es un subcontinuo de X tal que

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\text{Int}(W)) \subset \text{Int}(f^{-1}(W))$$

y $x \in f^{-1}(f(x)) \subset X \setminus f^{-1}(W)$.
Se sigue que, $x \in X \setminus K_X(A)$. Por lo tanto, $K_X(A) \subset f^{-1}(K_Y(f(A)))$. $\square$

Teorema 2.72. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona y abierta entre continuos, tal que $f^{-1}(y)$ son continuos terminales para cada $y \in Y$. Entonces $K_X(A) = f^{-1}(K_Y(f(A)))$ para cada subconjunto cerrado A de X.*

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de X. Como f es monótona por el Teorema 2.71, se sigue que $K_X(A) \subset f^{-1}(K_Y(f(A)))$.

Sea $x \in X \setminus K_X(A)$ entonces existe W un subcontinuo de X tal que $x \notin W$ y $A \subset \text{Int}(W)$. Se sigue, por hipótesis que, $f^{-1}(f(x))$ es un subcontinuo terminal de X. Supongamos que $f^{-1}(f(x)) \cap W \neq \emptyset$ entonces $f^{-1}(f(x)) \subset W$ o $W \subset f^{-1}(f(x))$. De esto se sigue que, $x \in f^{-1}(f(x)) \subset W$ o $\text{Int}(W) \subset W \subset f^{-1}(f(x))$. Por un lado $x \in f^{-1}(f(x)) \subset W$ obtenemos una contradicción. Pero si $\text{Int}(W) \subset W \subset f^{-1}(f(x))$ también tendríamos una contradicción pues $f^{-1}(f(x))$ es denso en ninguna parte. Por lo tanto, $f^{-1}(f(x)) \cap W = \emptyset$.

Entonces $f(W)$ es un subcontinuo de Y ya que f es continua y es tal que $f(x) \notin f(W)$, así dado que f es abierta $f(A) \subset f(\text{Int}(W)) \subset \text{Int}(f(W)) \subset f(W)$.Luego, $f(x) \notin K_Y(f(A))$ entonces $x \in X \setminus f^{-1}(K_Y(f(A)))$. Por lo tanto, $K_X(A) = f^{-1}(K_Y(f(A)))$. $\square$

Capítulo 3

Resultados

En ese capítulo se muestran los resultados obtenidos acerca de las funciones T, T^{∞} y K, que se estudiaron en el Capítulo 2. Ahora, se generalizan algunas propiedades de estas. En la una primera sección realizamos un análisis de la invarianza y coinvarianza de la función T. En la segunda sección hacemos un pequeño estudio de conjuntos T-cerrado Finalmente en la tercera sección, estudiamos la conexidad e invarianza que implica la función K.

A partir de este momento cuando hablemos de una función con la propiedad P, estaremos pensando en una función entre continuos con la propiedad P.

3.1. Invarianza y coinvarianza de la T-simétria y la T-aditividad

En esta sección mostraremos cuando ser T-aditivo y T-simétrico son propiedades invariantes y coinvariantes bajo las clases de funciones definidas en el Capítulo 1. Comenzamos dando la definición de invarianza y covarianza.

Definición 3.1. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos, decimos que una propiedad P es* ***invariante*** *bajo f si X tiene la propiedad P implica que $f(X)$ tiene la propiedad P. Diremos que P es* ***coinvariante*** *bajo f si Y tiene la propiedad P implica que $f^{-1}(Y)$ tiene la propiedad P.*

El siguiente Teorema es una generalización del Teorema 2.32. Ya que sabemos que toda función monótona es una función cuasimonótona.

Teorema 3.2. *(F. Capulín, E. Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sean $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva entre continuos. Si $A \subset X$ y $B \subset Y$ entonces se satisface lo siguiente:*

(1) Si f es cuasimonótona, entonces $f(T_X(A)) \subset T_Y(f(A))$ y $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T_Y(B))$.

(2) Si f es cuasimonótona, entonces $T_Y(B) = f(T_X(f^{-1}(B)))$.

(3) Si f es cuasimonótona y abierta, entonces $f^{-1}(T_Y(B)) = T_X(f^{-1}(B))$.

Demostración.
(1) Supongamos que f es cuasimonótona. Veamos que $f(T_X(A)) \subset T_Y(f(A))$. Sea $y \in Y \setminus T_Y(f(A))$, entonces existe un subcontinuo W de Y tal que $y \in \text{Int}(W) \subset W \subset Y \setminus f(A)$. Se sigue que,

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(\text{Int}(W)) \subset f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Y \setminus f(A)) \subset X \setminus f^{-1}(f(A)) \subset X \setminus A.$$

Como f es cuasimonótona y W es subcontinuo de Y con interior no vacío, pues $y \in \text{Int}(W)$, se tiene que $f^{-1}(W)$ tiene un número finito de componentes. Sea $x \in f^{-1}(y)$ y C_x la componente de $f^{-1}(W)$ que lo contiene. Notemos que $x \in \text{Int}(f^{-1}(W))$. Entonces por el Lema 1.24,

$$x \in \text{Int}(C_x) \subset C_x \subset f^{-1}(W) \subset X \setminus A.$$

Así, $x \in X \setminus T_X(A)$. De donde, $f^{-1}(y) \subset X \setminus T_X(A)$. Luego

$$y = f(f^{-1}(y)) \in f(X \setminus T_X(A)) \subset f(X) \setminus f(T_X(A)) \subset Y \setminus f(T_X(A)).$$

Por lo tanto $f(T_X(A)) \subset T_Y(f(A))$.
Ahora veamos que $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T_Y(B))$. Sea $x \in X \setminus f^{-1}(T_Y(B))$, entonces $f(x) \notin T_Y(B)$. Así, existe un subcontinuo W de Y tal que $f(x) \in \text{Int}(W) \subset W \subset Y \setminus B$. Notemos que $x \in f^{-1}(f(x)) \subset f^{-1}(\text{Int}(W)) \subset f^{-1}(W)$. Como W es un subcontinuo de Y con interior no vacío y como f es cuasimonótona $f^{-1}(W)$, tiene un número finito de componentes. Sea C la componente de $f^{-1}(W)$ tal que $x \in C$. Como $x \in \text{Int}(f^{-1}(W)$, por el Lema 1.24, $x \in \text{Int}(C)$. Así,

$$x \in \text{Int}(C) \subset C \subset f^{-1}(W) \subset f^{-1}(Y \setminus B) \subset f^{-1}(B).$$

Notemos que, C es un subcontinuo de X. Por lo que $x \in X \setminus T_X(f^{-1}(B))$. Por lo tanto, $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T_Y(B))$.

(2) Supongamos que f es cuasimonótona. Veamos que $T_Y(B) = f(T_X(f^{-1}(B)))$. Por el (1) del Teorema 2.32tenemos que, $T_Y(B) \subset f(T_X(f^{-1}(B)))$ y por (1) de este Teorema tenemos que $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T_Y(B))$. De donde, $f(T_X(f^{-1}(B))) \subset f(f^{-1}(T_Y(B)))$. Dado que f es suprayectiva se tiene que $f(f^{-1}(T_Y(B))) = T_Y(B)$. Así, $T_Y(B) \subset f(T_X(f^{-1}(B))) \subset T_Y(B)$. Por lo tanto, $f(T_X(f^{-1}(B))) = T_Y(B)$.

(3) Supongamos que f es abierta y cuasimonótona. Por el inciso (1) se tiene que, $T_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(T_Y(B))$. Por otro lado, por el Teorema 2.32 inciso (4), se tiene que $f^{-1}(T_Y(B)) \subset T_X(f^{-1}(B))$. Por lo tanto, $f^{-1}(T_Y(B)) = T_X(f^{-1}(B))$. □

Proposición 3.3. *(F. Capulín, E. Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) La imagen cuasimonótona de todo continuo T-simétrico es T-simétrico.*

Demostración. Sea X un continuo T-simétrico y $f : X \longrightarrow Y$ una función cuasimonótona entre continuos. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de Y tales que $A \cap T_Y(B) = \emptyset$. Por (3) del Teorema 3.2, $T_Y(B) = f(T_X(f^{-1}(B)))$. Así, $A \cap f(T_X(f^{-1}(B))) = \emptyset$. Luego,

$$\emptyset = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(f(T_X(f^{-1}(B)))) \supset f^{-1}(A) \cap T_X(f^{-1}(B))$$

Como X es T-simétrico, $T_X(f^{-1}(A)) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. De la Proposición 1.9, se sigue que

$$\emptyset = f(T_X(f^{-1}(A)) \cap f^{-1}(B)) = f(T_X(f^{-1}(A))) \cap B = T_Y(A) \cap B.$$

Por lo tanto, Y es T-simétrico. $\square$

Proposición 3.4. *(F. Capulín, E. Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) La imagen cuasimonótona de un continuo T-aditivo es T-aditivo.*

Demostración. Sean X un continuo T-aditivo y $f : X \longrightarrow Y$ una función cuasimonótona entre continuos. Consideremos A y B dos subconjuntos cerrados de Y. Entonces,

$$\begin{aligned} T_Y(A \cup B) &= f(T_X(f^{-1}(A \cup B))) && \text{Por (3) del Teorema 3.2} \\ &= f(T_X(f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B))) \\ &= f(T_X(f^{-1}(A)) \cup T_X(f^{-1}(B))) && \text{Pues } X \text{ es } T\text{-simétrico} \\ &= f(T_X(f^{-1}(A))) \cup f(T_X(f^{-1}(B))) \\ &= T_Y(A) \cup T_Y(B) && \text{Por (3) del Teorema 3.2.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, Y es T-aditivo. $\square$

Teorema 3.5. *La propiedad de ser T-simétrico es invariante bajo las siguientes clases de funciones:*

(1) Atómicas.

(2) Casi monótonas.

(3) Hereditariamente confluentes.

(4) Hereditariamente monótonas.

(5) Homeomorfismos.

Demostración. Sea X un continuo T-simétrico y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre continuos.

(1) Supongamos que f es atómica. Por la Proposición 1.101, f es monótona. Luego, por el Teorema 2.33, Y es T-simétrico.

(2) Supongamos que f es casimónotona. Por la Proposición 1.118, f es cuasimonótona. Luego, por el Teorema 3.3, Y es T-simétrico.

(3) Supongamos que f es hereditarimente confluente. Por la Proposición 1.125, f es cuasimonótona. Luego, por el Teorema 3.3, Y es T-simétrico.

(4) Supongamos que f es hereditariamente monótona. Por la Proposición 1.105, f es monótona. Luego, por el Teorema 2.33, Y es T-simétrico.

(5) Supongamos que f es un homeomorfismo. Por la Proposición 1.93, f es monótona. Luego, por el Teorema 2.33, Y es T-simétrico.

$\square$

Teorema 3.6. *La propiedad de ser T-aditivo es invariante bajo las siguientes clases de funciones:*

(1) Atómicas.

(2) Casi monótonas.

(3) Hereditariamente confluentes.

(4) Hereditariamente monótonas.

(5) Homeomorfismos.

Demostración. Sea X un continuo T-aditivo y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función entre continuos.

(1) Supongamos que f es atómica. Por la Proposición 1.101, f es monótona. Luego, por el Teorema 2.34, Y es T-aditivo.

(2) Supongamos que f es casimónotona. Por la Proposición 1.118, f es cuasimonótona. Luego, por el Teorema 3.4, Y es T-aditivo.

(3) Supongamos que f es hereditarimente confluente. Por la Proposición 1.125, f es cuasimonótona. Luego, por el Teorema 3.4, Y es T-aditivo.

(4) Supongamos que f es función hereditariamente. Por la Proposición 1.105, f es monótona. Luego, por el Teorema 2.34, Y es T-aditivo.

(5) Supongamos que f es un homeomorfismo. Por la Proposición 1.93, f es monótona. Luego, por el Teorema 2.34, Y es T-aditivo.

$\square$

Ejemplo 3.7. *El siguiente ejemplo muestra que las funciones juntadoras y ligeras no preservan la T-aditividad. Sea X el abanico armónico como se dió en la Definición 1.17. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2], y = \frac{2-x}{n}\}$, sean $B_0 = [1, 2] \times \{0\}$ entonces $Y = \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (A_n \cup B_n)$ es homeomorfo a la suspensión armónica.*

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A_n \longrightarrow A_n \cup B_n$ definida como

$$f_n\left(\left(t, \frac{t}{n}\right)\right) = \begin{cases} (2t, \frac{2t}{n}) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ (2t, \frac{2}{n} - \frac{2t}{n}) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Para $n = 0$, sea $f_0 : A_0 \longrightarrow A_0 \cup B_0$ definida como

$$f(t, 0) = (2t, 0)$$

.

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, f_n son funciones continuas y suprayectivas (véase Figura 3.1). Además, f está bien definida ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f_n\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right)\right) = \left(2, \frac{2}{n}\right)$ y $f_n\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right)\right) = \left(2, \frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right) = \left(2, \frac{2}{n}\right)$.

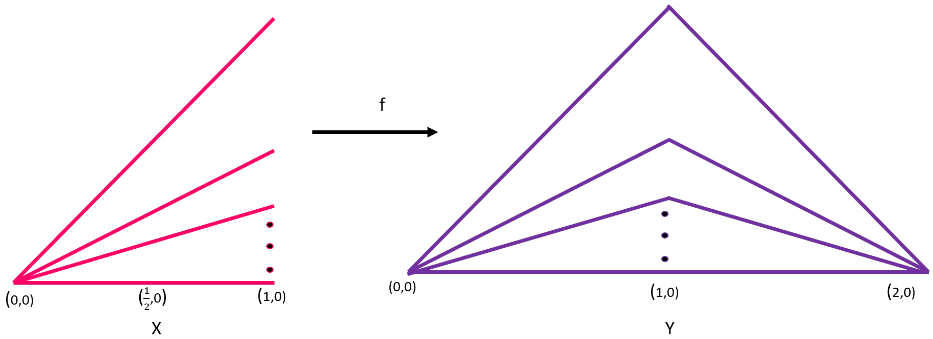


Figura 3.1: $f : X \to Y$.

Consideremos $f : X \longrightarrow Y$ como: $f(x) = f_n(x)$ si $x \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Notemos que por la construcción de f es continua y suprayectiva. Veamos que f es ligera. Para ello, sea $(a, b) \in Y$.

- *Si $(a, b) = (2t, \frac{2t}{n})$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [0, \frac{1}{2}]$, entonces $f^{-1}((a, b)) = \{(t, \frac{t}{n})\}$.*
- *Si $(a, b) = (2t, \frac{2}{n} - \frac{2t}{n})$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $t \in [\frac{1}{2}, 1)$, entonces $f^{-1}((a, b)) = \{(t, \frac{t}{n})\}$.*
- *Si $(a, b) = (2, 0)$, entonces $f^{-1}((a, b)) = \{(1, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{(1, 0)\}$ el cual es un subconjunto totalmente disconexo.*
- *Si $(a, b) = (2t, 0)$ y $t \in [0, 1)$ entonces $f^{-1}((a, b)) = \{t\}$ el cual es totalmente disconexo.*

Por lo tanto, f es ligera.

Veamos que f es juntadora. Sea Q un subcontinuo de Y.

- *Si* $(2,0) \in Q$ *y* $(0,0) \notin Q$, *entonces se tiene que* $f^{-1}(Q)$ *es conexo o bien para cada componente* C *de* $f^{-1}(Q)$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $(1, \frac{1}{n}) \in C$. *Así* $f((1, \frac{1}{n})) = (2,0)$, *por lo que si* C_1 *y* C_2 *son de* $f^{-1}(Q)$ *se tiene que* $(2,0) \in f(C_1) \cap f(C_2)$.
- *Si* $(2,0) \notin Q$ *y* $(0,0) \notin Q$, *entonces* Q *es un arco en* $B_n \cup A_n$ *para algún* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Así* $f^{-1}(Q)$ *es un arco en* A_n.
- *Si* $(2,0) \notin Q$ *y* $(0,0) \in Q$, *entonces* $f^{-1}(Q)$ *es conexo en* X *pues* $(0,0) \in f^{-1}(Q)$.

Así, f *es juntadora.*

Además, X *es un continuo* T*-aditivo y* Y *no es* T*-aditivo por el Ejemplo 2.24. Por lo que funciones juntadoras y ligeras no preservan la* T*-aditividad.*

En los siguientes ejemplos se mostrará que si $f : X \longrightarrow Y$ pertenence a alguna clase específica de funciones entre continuos entonces no se cumple la covarianza de la T-aditividad y la T-simetría, en el Teorema 3.9, diremos para cuales funciones entre continuos la T-aditividad y la T-simetría no es coinvariante. Pero antes veamos un ejemplo más.

Ejemplo 3.8. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *sea* $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y = \frac{1}{n}\}$ *y sea* $A_0 = [0,1] \times \{0\}$. *Sean,*

- $A = \{0\} \times [\frac{1}{2}, 1]$,
- $B = \{1\} \times [\frac{1}{2}, 1]$,
- $C = \{0\} \times [0, \frac{1}{2}]$,
- $D = \{1\} \times [0, \frac{1}{2}]$.

Definamos $E = \left(\bigcup_{n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus \{1\}} A_n \right) \cup C \cup D$ *y* $X = A_1 \cup A \cup B \cup E$.

Consideremos $Y = X/E$. *Sea* $f : X \to Y$ *la función inducida por el cociente (véase Figura 3.2).*
Por lo que f *es monótona.*

Además X *es no aditivo, ya que si consideramos* $x, y \in A_0$, *tenemos que* $T(x) = \{x\}$ *y* $T(y) = y$, *mientras que* $T(\{x,y\}) = Z$ *donde* Z *es el arco que tiene como puntos extremos a los puntos* x *y* y. *Por otro lado,* Y *es* T*-aditivo, ya que* Y *es localmente conexo, de tal manera que, por el Teorema 2.14, para* $x, y \in Y$, *tenemos que* $T(x) = \{x\}$, *y* $T(y) = \{y\}$. *Además tenemos que,* $T(\{x,y\}) = \{x\} \cup \{y\} = T(x) \cup T(y)$.

Proposición 3.9. *La* T*-aditividad no es coinvariante bajo funciones monótonas.*

Demostración. Véase el Ejemplo 3.8. □

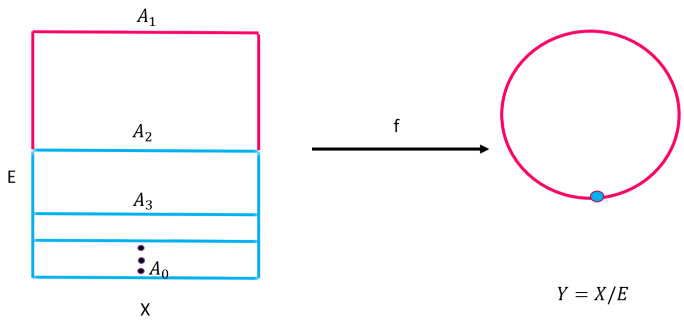


Figura 3.2: $f : X \to Y$.

Como consecuencia del Ejemplo 3.8 y la relación que existe entre las clases de funciones como se muestran en la Figura 1.30, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.10. *La T-aditividad no es coinvariante bajo las siguientes clases de funciones:*

- *f es casimonótona,*
- *f es cuasimonótona,*
- *f es seudomonótona,*
- *f es débilmente monótona,*
- *f es confluente,*
- *f es semiconfluente,*
- *f es débilmente confluente,*
- *f es juntadora,*
- *f es seudoconfluente,*
- *f es atriódica,*
- *f es casi interior.*

Ejemplo 3.11. *Sean A, D, X, A_0 y A_n para cada $n \in \mathbb{N}$ como en el Ejemplo 3.8. Consideremos $B_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{1}{2}], y = \frac{1}{n}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $B_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{1}{2}], y = 0\}$. Sea $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} B_n$. Definamos la función $f : X \longrightarrow Y$ como,*

$$f((x,y)) = \begin{cases} (0,y) & \text{si } x \in \{0,1\}, \\ \\ (x,y) & \text{si } x \in (0,\frac{1}{2}], \\ \\ (1-x,y) & \text{si } x \in [\frac{1}{2},1). \end{cases}$$

Notemos que la función f es continua, suprayectiva y abierta (véase Figura 3.3).

Para ver que es abierta, sea $(x_0, y_0) \in Y$. Sea $\{(x_m, y_m)\}_{m\in N}$ una sucesión de puntos en Y tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \{(x_m, y_m)\} = \{(x_0, y_0)\}$. Sabemos que

$$\limsup_{m\to\infty} f^{-1}(\{(x_m, y_m)\}) \subset f^{-1}(\{(x_0, y_0)\}).$$

Por otro lado, observemos que $f^{-1}(\{(x_m, y_m)\}) = \{(x_m, y_m), (1 - x_m, y_m)\}$ para cada $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea $(x, y) \in f^{-1}(\{(x_0, y_0)\})$ entonces

(1) $(x, y) = (x_0, y_0)$

(2) $(x, y) = (1 - x_0, y_0)$.

Dado que $\lim\limits_{m\to\infty} \{(x_m, y_m)\} = \{(x_0, y_0)\}$, notemos que si (x, y) es como (1) entonces $\lim\limits_{m\to\infty} \{(x_m, y_m)\} = \{(x, y)\}$. Si (x, y) es como en (2) entonces $\lim\limits_{m\to\infty} \{(1 - x_m, y_m)\} = \{(x, y)\}$. Así, sea U un abierto en X tal que $(x, y) \in U$. Entonces si $(x, y) = (x_0, y_0)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(x_m, y_m) \in U$ para $m > N$. Análogamente para $(x, y) = (1 - x_0, y_0)$. Luego, $(x, y) \in \limsup\limits_{m\to} f^{-1}(\{(x_m, y_m)\})$. Por lo tanto, $f^{-1}(\{(x_0, y_0)\}) \subset \limsup\limits_{m\to\infty} f^{-1}(\{(x_m, y_m)\})$.

Como $\limsup\limits_{m\to\infty} f^{-1}(\{(x_m, y_m)\}) = f^{-1}(\{(x_0, y_0)\})$ se sigue de la Proposición 1.102 que f es abierta.
Por el Ejemplo 3.8 X es un continuo que no es T-aditivo. Por otro lado, Y es T-aditivo.

Corolario 3.12. *La T aditividad no es coinvariante bajo funciones abiertas.*

Ejemplo 3.13. *Sea X el abanico armónico, dado en la Definición 1.17 y $Y = [0, 1]$. Sea $f : X \longrightarrow Y$ la función proyección definida como $f(x, y) = x$ (véase Figura 3.4).*
Notemos que la función f es continua y suprayectiva. Veamos que f es ligera. Sea $x \in [0, 1]$,

- *Si $x \in (0, 1]$ entonces $f^{-1}(x) = \{(x, \frac{1}{n}x)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{(x, 0)\}$ el cual es totalmente disconexo.*

- *Si $x = 0$ entonces $f^{-1}(x) = \{(0, 0)\}$ el cual es un sólo punto.*

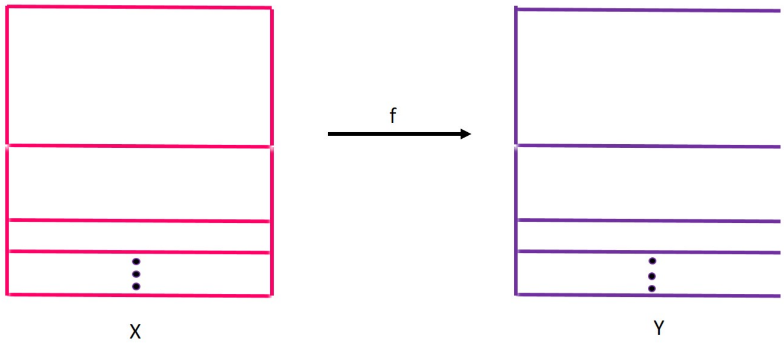


Figura 3.3: Función abierta

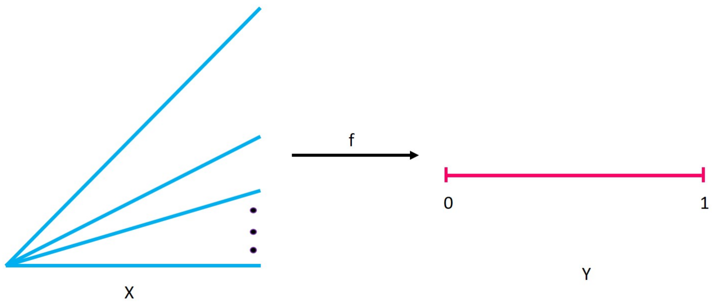


Figura 3.4: $f : X \to Y$.

Por lo tanto, f es ligera. No es difícil darse cuenta que f es abierta.

Además, X no es T-simétrico por el Ejemplo 2.20 y notemos que Y es T-simétrico pues es un continuo localmente conexo..

Del ejemplo anterior se puede probar fácilmente la siguiente Proposición.

Proposición 3.14. *La T-simetría no es coinvariante bajo funciones abiertas o ligeras.*

Ejemplo 3.15. *Sea X el abanico armónico dado en el Ejemplo 1.17. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{1}{n}], y = \frac{1}{n}x\}$ y $B_0 = \{0\}$. Sea $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} B_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : A_n \longrightarrow B_n$ definida por $f_n(x,y) = \frac{1}{n}(x,y)$. Consideremos $f : X \longrightarrow Y$ como (véase Figura 3.5):*

$$f((x,y)) = \begin{cases} f_n((x,y)) & \text{si } (x,y) \in A_n, \\ \\ (0,0) & \text{si } (x,y) \in A_0. \end{cases}$$

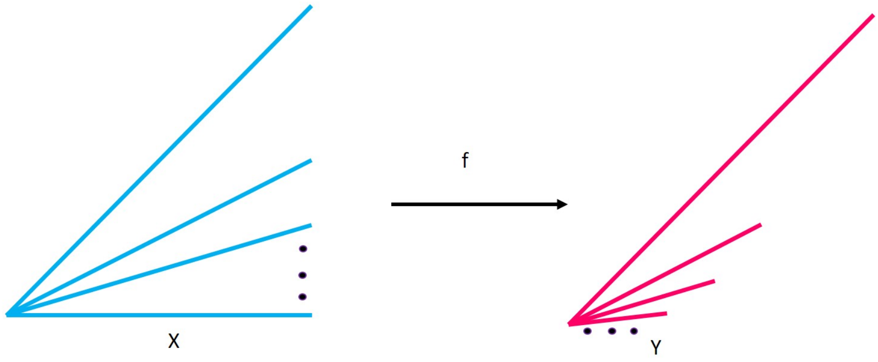


Figura 3.5: $f : X \to Y$.

Notemos que f es continua y suprayectiva. Veamos que f es monótona. Sea $(a, b) \in Y$, entonces $(a, b) \in B_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ o $(a, b) = (0, 0)$. Así, si $(a, b) = \frac{1}{n}(x, y)$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y $(x, y) \in A_n$ entonces $f^{-1}(a, b) = \{(x, y)\}$ el cual es conexo. Si $(a, b) = (0, 0)$ entonces $f^{-1}(a, b) = A_0$ el cual es conexo. Por lo tanto, X es monótona.

Además , X es un continuo que no es T-simétrico por el Ejemplo 2.20 y Y es T-simétrico por ser un continuo localmente conexo.

Del Ejemplo 3.15, prueba fácilmente la siguiente Proposición.

Lema 3.16. *La T-simetría no es coinvariante bajo funciones monótonas.*

Se sigue inmediatamente del Ejemplo 3.15 y la relación que existe entre las clase de funciones como se muestra en Figura 1.30.

Corolario 3.17. *La T-simetría no es coinvarinate bajo los siguientes tipos de funciones:*

- *f es casimonótona,*
- *f es cuasimonótona,*
- *f es seudomonótona,*
- *f es débilmente monótona,*
- *f es confluente,*
- *f es semiconfluente,*
- *f es débilmente confluente,*
- *f es juntadora,*

- *f es seudoconfluente,*
- *f es atriódica,*
- *f es casi interior.*

3.2. Sobre la función T^{∞}

En esta sección mostramos algunas generalizaciones de los conjuntos T-cerrados y de la función T^{∞}. El siguiente Teorema es una generalización del teorema 2.40, ya que toda función monótona es cuasimonótona.

Teorema 3.18. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función cuasimonótona entre continuos. Si $B \in \mathfrak{T}(Y)$, entonces $f^{-1}(B) \in \mathfrak{T}(X)$.*

Demostración. Sea $B \in \mathfrak{T}(Y)$ entonces $T_Y(B) = B$. Se sigue del Teorema 3.2 inciso (3) que, $T_X(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y(B))$. Por lo tanto, $T_X(f^{-1}(B)) = f^{-1}(B)$. □

Corolario 3.19. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función cuasimonótona entre continuos. Entonces $|\mathfrak{T}(Y)| \leq |\mathfrak{T}(X)|$.*

Demostración. Sea $\varphi : \mathfrak{T}(Y) \longrightarrow \mathfrak{T}(X)$ definida como $\varphi(A) = f^{-1}(A)$. Notemos que, φ está bien definida ya que, si $B \in \mathfrak{T}(Y)$, entonces por el Teorema 3.18, $f^{-1}(B) \in \mathfrak{T}(X)$. Ahora, veamos que φ es inyectiva. Para ello, consideremos $A, B \in \mathfrak{T}(Y)$ y supongamos que $\varphi(A) = \varphi(B)$. Como $\varphi(A) = f^{-1}(A)$ y $\varphi(B) = f^{-1}(B)$, se sigue que $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$. Luego, dado que f es suprayectiva, $A = f(f^{-1}(A)) = f(f^{-1}(B)) = B$. Así, φ es inyectiva. Por lo tanto, $|\mathfrak{T}(Y)| \leq |\mathfrak{T}(X)|$. □

El siguiente ejemplo muestra que puede darse la igualdad con las hipótesis del Corolario 3.19.

Ejemplo 3.20. *Sea X la curva senoidal definida en el Ejemplo 1.85. Consideremos $B = \{(0, -1), (0, 1)\}$ y la función cociente $f : X \longrightarrow X/B$ (véase Figura 3.6).*
Se tiene que f es una función cuasimonótona. Observemos que, $|\mathfrak{T}(X)| = |\mathfrak{T}(X/A)|$.

$$\mathfrak{T}(X) = \{C : C \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1], y = sen(\frac{1}{x})\}\} \cup \{J\}$$

y

$$\mathfrak{T}(Y) = \{f(C) : C \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1], y = sen(\frac{1}{x})\} \cup \{f(J)\}.$$

Proposición 3.21. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función cuasimonótona entre continuos. Si A es un subconjunto de X, entonces $f(T_X^{\alpha}(A))) \subset T_Y^{\alpha}(f(A))$ para todo ordinal α.*

Demostración. Procedamos por inducción transfinita.

- Consideremos $\alpha = 1$, sabemos por el Teorema 3.2 que, $f(T_X^1(A)) \subset T_Y^1(f(A))$.

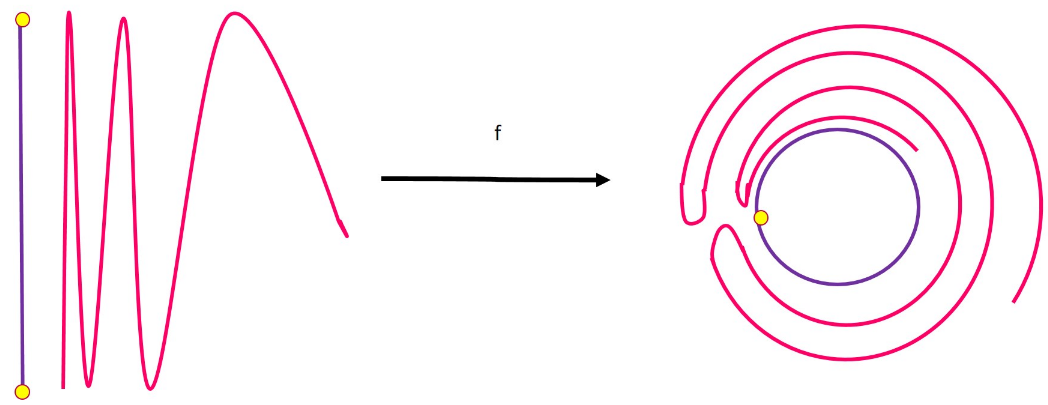


Figura 3.6: $f : X \to X \setminus A$.

- Ahora supongamos $f(T_X^{\alpha}(A))) \subset T_Y^{\alpha}(f(A))$ para algún ordinal α.
- Veamos que para $\alpha+1$ se tiene que $f(T_X^{\alpha+1}(A))) \subset T_Y^{\alpha+1}(f(A))$. Sabemos que,

$$\begin{aligned} f(T_X^{\alpha+1}(A)) &= f(T_X(T_X^{\alpha}(A))) \\ &\subset T_Y(f(T_X^{\alpha}(A))) \\ &\subset T_Y(T_Y^{\alpha}(f(A)) \\ &= T_Y^{\alpha+1}(f(A)). \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $f(T_X^{\alpha+1}(A)) \subset T_Y^{\alpha+1}(f(A))$.

- Ahora, consideremos γ ordinal límite. y supongamos que para cada $\alpha < \gamma$, $f(T_X^{\alpha}(A)) \subset T_Y^{\alpha}(f(A))$. Entonces,

$$\bigcup_{\alpha<\gamma} f(T_X^{\alpha}(A)) \subset \bigcup_{\alpha<\gamma} T_Y^{\alpha}(f(A)) \tag{3.1}$$

  Dado que f es cerrada, se sigue:

$$\begin{aligned} f(T_X^{\gamma}(A)) &= f(Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} T_X^{\alpha}(A))) && \text{Por la Definición 2.43} \\ &= Cl(f(\bigcup_{\alpha<\gamma} T_X^{\alpha}(A))) && \text{Pues } f \text{ es cerrada} \\ &= Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} f(T_X^{\alpha}(A))) \\ &\subset Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} T_Y^{\alpha}(f(A))) && \text{Por 3.1} \\ &= T_Y^{\gamma}(f(A)) && \text{Por la Definición 2.43.} \end{aligned}$$

  Así, $f(T_X^{\gamma}(A)) \subset T_Y^{\gamma}(f(A))$.

Por lo tanto, $f(T_X^{\alpha}(A))) \subset T_Y^{\alpha}(f(A))$ para todo ordinal α. $\square$

Proposición 3.22. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función cuasimonótona entre continuos. Si A es un subconjunto de X, entonces $f(T_X^{\infty}(A)) \subset T_Y^{\infty}(f(A))$.*

Demostración. Por el Teorema 2.47, $T^{\infty} = T^{\alpha}$ para algún ordinal α. Luego, por la Proposición 3.21, $f(T_X^{\alpha}(A)) \subset T_Y^{\alpha}(f(A))$. Así, $f(T_X^{\infty}(A)) \subset T_Y^{\infty}(f(A))$. $\square$

Corolario 3.23. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función cuasimonótona entre continuos. Si Y es aposindético, entonces $f|_{T_X^{\infty}(x)}$ es una función constante para cada $x \in X$.*

Demostración. Sea $x \in X$. Por la Proposición 3.22, $f(T_X^{\infty}(x)) \subset T_Y^{\infty}(f(x))$ y por el Teorema 2.48, $T_Y^{\infty}(f(x)) = f(x)$. Por lo tanto, $f|_{T_X^{\infty}(x)}$ es constante. $\square$

Proposición 3.24. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sea $f : X \to Y$ una función abierta y cuasimonótona entre continuos. Si $B \subset Y$, entonces $T_X^{\alpha}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha}(B))$ para cada ordinal α.*

Demostración. Procedamos por inducción transfinita.

- Dado que f es abierta y cuasimonótona se sigue del Teorema 3.2 que, $T_X^1(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^1(B))$.
- Supongamos que $T_X^{\alpha}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha}(B))$ para algún ordinal α.
- Veamos que para $\alpha + 1$ se cumple que $T_X^{\alpha+1}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha+1}(B))$.

$$\begin{aligned} T_X^{\alpha+1}(f^{-1}(B)) &= T_X(T_X^{\alpha}(f^{-1}(B))) \\ &= T_X(f^{-1}(T_Y^{\alpha}(B))) && \text{(Por hipótesis de inducción)} \\ &= f^{-1}(T_Y(T_Y^{\alpha}(B))) && \text{(Por base de inducción)} \\ &= f^{-1}(T_Y^{\alpha+1}(B)). \end{aligned}$$

  Por tanto, $T_X^{\alpha+1}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha+1}(B))$.

- Sea γ un ordinal límite y supongamos que para cada $\alpha < \gamma$ se tiene que $T_X^{\alpha}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha}(B))$. Mostraremos que, $T_X^{\gamma}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\gamma}(B))$. Como $T_X^{\alpha}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha}(B))$, entonces $\bigcup\limits_{\alpha<\gamma} T_X^{\alpha}(f^{-1}(B)) = \bigcup\limits_{\alpha<\gamma} f^{-1}(T_Y^{\alpha}(B))$.

  Así,

$$\begin{aligned} T_X^{\gamma}(f^{-1}(B)) &= Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} T_X^{\alpha}(f^{-1}(B))) \\ &= Cl(\bigcup_{\alpha<\gamma} f^{-1}(T_Y^{\alpha}(B))) \\ &= f^{-1}(Cl((\bigcup_{\alpha<\gamma} T_Y^{\alpha}(B)))) \\ &= f^{-1}(T_Y^{\gamma}(B)). \end{aligned}$$

  De donde, $T_X^{\gamma}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\gamma}(B))$.

Por lo tanto, $T_X^{\alpha}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha}(B))$ para cada ordinal α. $\square$

Proposición 3.25. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función abierta y cuasimonótona entre continuos. Entonces $T_X^{\infty}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\infty}(B))$ para cada $B \subset Y$.*

Demostración. Sean α_0 y α_1, como en el Teorema 2.46, los ordinales para X y Y, respectivamente, tales que

$$T_X^{\infty} = T_X^{\alpha_0} \text{ y } T_Y^{\infty} = T_Y^{\alpha_1}.$$

Por el *Teorema 2.46*, $T \circ T^{\infty} = T^{\infty}$. Así, $T_X^{\infty} = T_X^{\alpha_0+1}$ y $T_Y^{\infty} = T_Y^{\alpha_1+1}$.
Luego, sea $\alpha = \sup\{\alpha_0, \alpha_1\}$. Así, por el Teorema 3.24,

$$T_X^{\infty}(f^{-1}(B)) = T_X^{\alpha}(f^{-1}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\alpha}(B)) = f^{-1}(T_Y^{\infty}(B)).$$

$\square$

3.3. Sobre la función K

Recordemos que $K(A) = \bigcap\{B \in C(X) : A \subset Int(B)\}$ para cada $A \subset X$. En esta sección analizaremos cuando $K(A)$ resulta ser conexo y cuando ser K-aditivo es una propiedad coinvariante bajo funciones monótonas y abiertas. En esta primera parte veremos la conexidad de $K(A)$, en los continuos hereditariamente unicoherentes.

Teorema 3.26. *Si X es un continuo hereditariamente unicoherente y $x, y \in X$ entonces existe un único subcontinuo C_x^y irreducible entre x y y.*

Demostración. Supongamos f es hereditariamente unicoherente. Sean

$$x, y \in X \text{ y } H(x, y) = \{A \in C(X) : x, y \in A\}.$$

Notemos que $H(x, y) \neq \emptyset$ pues $X \in H(x, y)$. Como $x, y \in X$ existe $C_1 \in C(X)$ irreducible entre x, y.
Afirmación: C_1 es mínimal en $H(x, y)$.
Observemos que $C_1 \in H(x, y)$. Ahora veamos que es único en $H(x, y)$, supongamos existe $C_2 \in C(X)$ irreducible tal que $x, y \in C_2$. Como X es hereditariamente unicoherente $C_1 \cap C_2$ es conexo y $x, y \in C_1 \cap C_2$. Pero C_1 es irreducible entonces $C_1 \cap C_2 = C_1$. Análogamente $C_1 \cap C_2 = C_2$. Por lo que $C_1 = C_2$.
Veamos que $C_1 \subset M$ para todo $M \in H(x, y)$. Supongamos $\{x, y\} \subset C_1 \cap M$ y $C_1 \not\subset M$, entonces $C_1 \cap M$ es un subcontinuo propio de C_1 que contiene a x y y lo cual no es posible. Por lo tanto, C_1 es único y mínimal.

Supongamos existe un único subcontinuo C_x^y irreducible entre x y y, para cada $x, y \in X$. Sea A, B, D subcontinuos de X tales que $A = B \cup D$. Veamos que $B \cap D$ es conexo. Supongamos que $B \cap D$ tiene al menos dos componentes C_1, C_2. Sean $x_1, x_2 \in B \cap D$ tales que $x_1 \in C_1$ y $x_2 \in C_2$. Por hipótesis, existe un unico subcontinuo $C_{x_1}^{x_2}$ entre x_1 y x_2 irreducible. De donde, $C_{x_1}^{x_2} \subset B \cup C$. Más aún, $x_1 \in C_{x_1}^{x_2} \cap C_1$ y $x_2 \in C_{x_1}^{x_2} \cap C_2$. Así, $C_{x_1}^{x_2} \subset C_1$ y $C_{x_1}^{x_2} \subset C_2$. Por lo que, $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Luego $C_1 = C_2$.
Por lo tanto, $B \cap D$ es conexo. $\square$

Observación 3.27. *Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y $x, y \in X$, entonces $C_x^y = C_y^x$.*

Teorema 3.28. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y $x, y \in X$. Entonces $K(\{x, y\}) = K(x) \cup K(y) \cup C_x^y$, donde C_x^y es el único subcontinuo irreducible de X entre x y y.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Como $x, y \in \{x, y\}$ entonces $K(x) \cup K(y) \subset K(\{x, y\})$. Por otro lado, C_x^y es un subcontinuo de X tal que $C_x^y \subset A$ para cada A subcontinuo de X con $x, y \in \text{Int}(A)$. Así, $C_x^y \subset K(\{x, y\})$. De donde, $K(x) \cup K(y) \cup C_x^y \subset K(\{x, y\})$.

Ahora, sea $z \notin K(x) \cup K(y) \cup C_x^y$. Entonces $z \notin K(x)$, $z \notin K(y)$ y $z \notin C_x^y$. Así, existen W_1 y W_2 subcontinuos de X tales que $z \notin W_1$, $z \notin W_2$, $x \in \text{Int}(W_1)$ y $y \in \text{Int}(W_2)$. De donde, W_1, W_2, C_x^y son subcontinuos de X tales que y $x \in W_2 \cap C_x^y$ y $y \in W_2 \cap C_x^y$. Por lo que, $W = W_1 \cup W_2 \cup C_x^y$ es un subcontinuo de X tal que $\{x, y\} \subset \text{Int}(W)$ y $z \notin W$. Por lo tanto $z \notin K(\{x, y\})$ □

Corolario 3.29. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sean X un continuo hereditariamente unicoherente y $x, y \in X$. Entonces $K(\{x, y\})$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Sean $x, y \in X$. Por el Teorema 3.28, $K(\{x, y\}) = K(x) \cup K(y) \cup C_x^y$, donde C_x^y es el único subcontinuo irreducible entre x y y. Por el Corolario 2.70, $K(x)$ y $K(y)$ son subcontinuos de X y además $x \in K(x) \cap C_x^y$ y $y \in K(y) \cap C_x^y$. Por lo tanto, $K(\{x, y\})$ es un subcontinuo de X. □

Teorema 3.30. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Si X es un continuo hereditariamente unicoherente, entonces $K(A)$ es un subcontinuo de X para todo subconjunto cerrado A de X.*

Demostración. Sea X un continuo hereditariamente unicoherente. Si $A = \{x\}$ para algún $x \in X$ entonces por el Corolario 2.70, $K(A)$ es un subcontinuo de X. Sea A un subconjunto cerrado de X no degenerado y sea z un punto fijo en A. Veamos que $K(A) = \bigcup_{a \in A} (K(z) \cup K(a) \cup C_z^a)$ donde C_z^a, es el único subcontinuo irreducible entre z y a.

Como $a, z \in A$ entonces $K(\{z, a\}) = K(z) \cup K(a) \cup C_z^a$ por el Corolario 3.28, y $K(z) \cup K(a) \cup C_z^a \subset K(A)$ para cada $a \in A$. Entonces

$$\bigcup_{a \in A} (K(z) \cup K(a) \cup C_z^a) \subset K(A).$$

Ahora, si $x \notin \bigcup_{a \in A} (K(z) \cup K(a) \cup C_z^a)$, entonces $x \notin K(z) \cup K(a) \cup C_z^a$ para cada $a \in A$. Luego, para cada $a \in A$ existen W_z^a, W_a subcontinuos de X tales que $x \notin W_z^a$, $z \in \text{Int}(W_z^a)$ y $a \in \text{Int}(W_a)$. Dado que A es compacto y $\{\text{Int}(W_a)\}_{a \in A}$ es una cubierta abierta para A, existen $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(W_{a_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{a_i}$. Entonces, $A \subset \text{Int}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(W_z^{a_i} \cup W_{a_i} \cup C_z^{a_i})\right)$. Además, por el Corolario 3.29, $(W_z^{a_i} \cup W_{a_i} \cup C_z^{a_i})$ es un subcontinuo de X para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ y $z \in (W_z^{a_i} \cup W_{a_i} \cup C_z^{a_i}) \cap (W_z^{a_j} \cup W_{a_j} \cup C_z^{a_i})$ para cada $i \neq j$. Así, $W = \bigcup_{i=1}^{n}(W_z^{a_i} \cup W_{a_i} \cup C_z^{a_i})$ es un subcontinuo de X y $A \subset \text{Int}(W), x \notin W$. De donde, $x \notin K(A)$. Por lo tanto, $K(A) = \bigcup_{a \in A}(K(z) \cup K(a) \cup C_z^a)$.

Por el Corolario 3.29, $K(z) \cup K(a) \cup C_z^a$ es un subcontinuo para cada $a \in A$ y $z \in K(z) \cup K(a) \cup C_z^a$ para cada $a \in A$. Así, $K(A)$ es cerrado, no vacío y conexo, por lo que $K(A)$ es un subcontinuo de X. □

Definición 3.31. *Un espacio X se dice que es* ***cíclicamente conexo*** *si para cada dos puntos $x, y \in X$, existe una curva cerrada simple que S en X tal que $x, y \in S$.*

E. L. MacDowell en [14] define un tipo de conjuntos que generaliza el ser cíclicamente conexo.

Definición 3.32. *Sea X un espacio topológico, decimos que x es* ***débilmente cíclicamente conexo*** *si para cada tres puntos $x, y, z \in X$ existe un subcontinuo K de X tal que $x, y \in K$ y $z \notin K$.*

Observación 3.33. *Si X es un continuo cíclicamente conexo entonces X es débilmente cíclicamente conexo.*

Demostración. Sean $x, y, z \in X$. Como X es cíclicamente conexo, existe una curva cerrada simple S tal que $x, y \in S$ y $z \notin S$. Dado que S es un subcontinuo de X, X es débilmente cíclicamente conexo. □

Ejemplo 3.34. *La suspensión de la sucesión armónica es un continuo cíclicamente conexo. Por la Observación 3.33, X es débilmente cíclicamente conexo (veasé Figura 3.7).*

Ejemplo 3.35. *Sean $A = \{0\} \times [-2, 2] \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1], y = -\operatorname{sen} \frac{1}{x}\}$ y $B = \{2\} \times [-2, 2] \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (2, 3], y = \operatorname{sen} \frac{1}{x-2}\}$. Consideremos la siguiente construcción:*

(1) Identifiquemos a los puntos $(0, -2)$ y $(0, 2)$ en A obteniendo un continuo E.

(2) Identifiquemos los puntos $(2, -2)$ y $(2, 2)$ en B obteniendo un continuo F.

(3) Identifiquemos a los puntos $(3, \operatorname{sen} 1)$ y $(1, -\operatorname{sen} 1)$.

(4) Unamos los continuos E y F por un arco que sólo los intersecte en un punto a cada uno (veasé Figura 3.8).

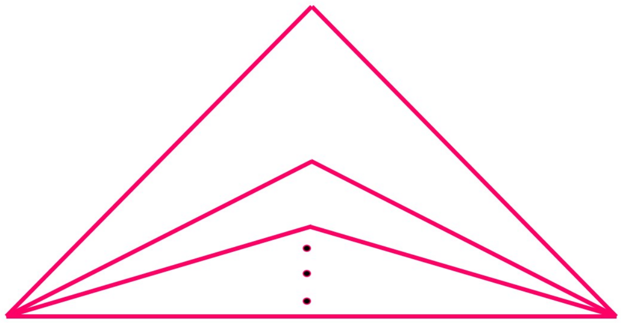


Figura 3.7: La suspensión de la sucesión armónica es débilmente cíclicamente conexo.

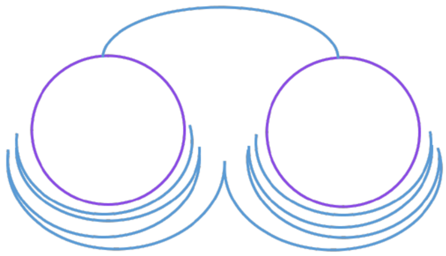


Figura 3.8: El continuo es débilmente cíclicamente conexo.

El continuo construido es un continuo débilmente cíclicamente conexo que no es cíclicamente conexo. Pues, X no es conexo por trayectorías.

Teorema 3.36. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sea X un continuo. Si X es débilmente cíclicamente conexo, entonces X es K-aditivo.*

Demostración. Si A y B subconjuntos cerrados de X, entonces $K(A) \cup K(B) \subset K(A \cup B)$. Sea $x \in X \setminus (K(A) \cup K(B))$, entonces $x \notin K(A)$ y $x \notin K(B)$. Dedonde existen C_1 y C_2 subcontinuos de X tales que $x \notin C_1$, $x \notin C_2$ y $A \subset \text{Int}(C_1), B \subset \text{Int}(C_2)$.

Sea $a \in A$ y $b \in B$ dado que X es débilmente cíclicamente conexo existe C_3 un subcontinuo de X tal que $a, b \in C_3$ y $x \notin C_3$. Notemos que, $C_1 \cup C_2 \cup C_3$ es un subcontinuo de X, tal que $A \cup B \subset \text{Int}(C_1 \cup C_2) \subset \text{Int}(C_1 \cup C_2 \cup C_3)$ y $x \notin C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Así, $x \notin K(A \cup B)$. Por lo tanto, $K(A) \cup K(B) = K(A \cup B)$. $\square$

Finalmente probaremos el siguiente resultado.

Teorema 3.37. *(F. Capulín, E.Castañeda, A. Martínez, N. Ordoñez) Sean X, Y continuos, $f : X \longrightarrow Y$ una función continua monótona, abierta y suprayectiva tal que $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo terminal de X para todo $y \in Y$. Si Y es K-aditivo, entonces X es K-aditivo.*

Demostración. Sea Y un continuo K-aditivo y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función monótona y abierta. Sean A y B dos subconjuntos cerrados de X. Por el Teorema 2.72,

$$\begin{aligned} K_X(A \cup B) &= f^{-1}K_Y f(A \cup B) \\ &= f^{-1}(K_Y(f(A) \cup f(B))) \\ &= f^{-1}(K_Y(f(A)) \cup K_Y(f(B))) \\ &= f^{-1}(K_Y(f(A))) \cup f^{-1}(K_Y f(B))) \\ &= f^{-1}(K_Y(f(A))) \cup f^{-1}(K_Y(f(B))) \\ &= K_X(A) \cup K_X(B). \end{aligned}$$

Por lo tanto, X es K-aditivo. □

Bibliografía

[1] A. M. Alzate, *Clases de funciones monótonas entre continuos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 2010.

[2] D. B. Bellamy, L. Fernández, S. Macías, *On T-closed sets*, Topology and its Applications, 195, 2015, 209-225.

[3] W. Dwayne Collins, *Monotone decompositions of IUC continua*, American Mathemathical Society, 282, 1984, 699-709.

[4] L. Fernández, *Funciones del conjunto potencia de un conjunto en sí mismo*, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias, UNAM, 2010.

[5] L. Fernández, S. Macías, *The set functions T and K and inrreducible continua*, Colloq. Math., 121, 2010, 79-91.

[6] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas, 28, Sociedad Matemática Mexicana, 2004.

[7] F. B. Jones, *Concerning nonaposyndetic continua*, Amer. J. Math., 70, 1948, 403-413.

[8] J.L. Kelley, *General Topology*, Springer, 1975.

[9] K. Kuratowski, *Topology. Vol. I*, Academic Press and PWN, 1966.

[10] K. Kuratowski, *Topology. Vol. II*, Academic Press and PWN, 1968.

[11] S. Macías, *On the continuity of the set function K*, Topology Proceedings, 34, 2009, 167-173.

[12] S. Macías, *Topics on continua*, Taylor and Francis Group, LLc, 2005.

[13] T. Maćkowiak, *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Mathematicae, Warszawa, 1979.

[14] E, L. McDowell, B. E. Wilder, *The conectivity structure of the Hyperspaces $C_\varepsilon(X)$*, Topology Proceedings, 27, 2003, 223-232.

[15] M. A. Molina, *Algunos aspectos sobre la función T de Jones*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1998.

[16] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 158, New York, 1992.

Discusión

Tras describir y analizar los diferentes resultados que surgen al revisar bibliografía de las funciones T, K y T^{∞}. Procedemos a realizar una discusión para consolidar los resultados obtenidos en la presente tesis.

El objetivo principal que planteamos en nuestra investigación, nos llevó a estudiar la invarianza y coinvarianza de las propiedades de T-aditividad y T-simétrico con distintas clases de funciones. Posteriormente, se pensó lo mismo para la función K.

Esto nos llevó a obtener resultados respecto al comportamiento de las propiedades ya mencionadas.

Conclusiones

Las aportaciones más relevantes del proyecto de investigación pueden ser resumidos en los siguientes resultados:

1. La propiedad de ser T-simétrico (T-aditivo) es invariante bajo las siguientes clases de funciones: atómicas, casi monótonas, hereditariamente confluentes, hereditariamente monótonas y homeomorfismos.

2. La propiedad de ser T-simétrico (T-aditivo) no es coinvariante bajo las siguientes clases de funciones: casimonótona, cuasimonótona, seudomonótona, débilmente monótona, confluente, semiconfluente, débilmente confluente, juntadora, seudoconfluente, atriódica, casi interior.

3. Si X es un continuo hereditariamente unicoherente, entonces $K(A)$ es un subcontinuo de X para todo A subconjunto cerrado de X.

4. Sea X un continuo. Si X es débilmente cíclicamente conexo entonces X es K-aditivo.

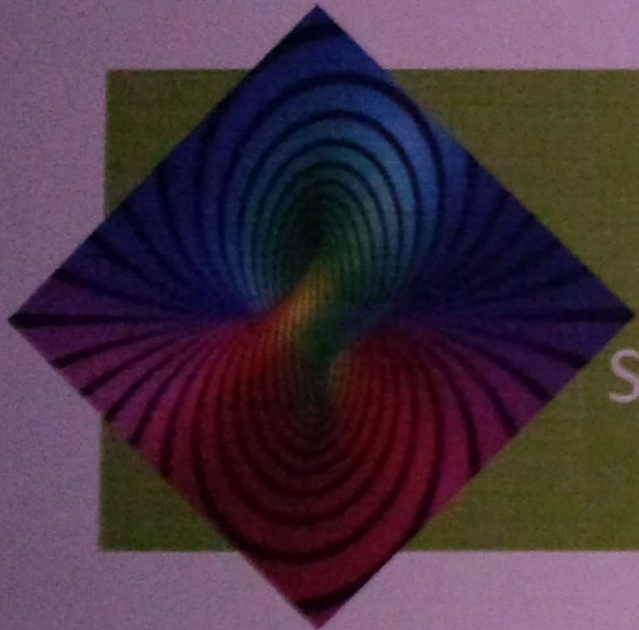
5. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua monótona y abierta entre continuos tal que $f^{-1}(y)$ es un subcontinuo terminal de X para todo $y \in Y$. Si Y es K-aditivo entonces X es K-aditivo.

Anexos

Durante la investigación se obtuvieron los siguientes productos:

- Plática "Sobre la invarianza y coinvarianza de la T-aditividad de la función de Jones" en el XI Taller estudiantil de teoría de los continuos y sus hiperespacios.
- Plática "Conjuntos T-cerrado y la función T^{∞}" en el 49 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.
- Plática "Algunas propiedades de la función K" en el XII Taller estudiantil de teoría de los continuos y sus hiperespacios.
- Plática "Sobre la función K" en el 50 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana.
- Plática "La simetría y la aditividad de las funciones T y K" en el V Congreso Internacional de Matemáticas y sus Aplicaciones.

XI Taller Estudiantil de Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios.
Universidad Juárez Autónoma de Tabasco,
Villahermosa, Tabasco del 4 al 7 de octubre de 2016.



CONSTANCIA A

Angela Martínez Rodríguez

quien presentó la plática

Sobre la invarianza y coinvarianza de la T -aditividad de la función de Jones.

Dr. Gerardo Delgadillo Piñón
Director de la División Académica de
Ciencias Básicas, UJAT

Dra. Isabel Puga Espinosa

Comité organizador

Facultad de Ciencias, UNAM; Posgrado en Ciencias Matemáticas, UNAM;
Universidad Autónoma Juárez de Tabasco; B. Universidad Autónoma de Puebla.

Scanned by CamScanner

La Sociedad Matemática Mexicana

otorga el presente

RECONOCIMIENTO

A: **Angela Martínez Rodríguez**

Por la presentación de la ponencia:
Conjuntos T cerrados y la función T^{∞}
realizada dentro de las Actividades del XLIX Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, llevado a cabo del 23 al 28 de Octubre de 2016 en Aguascalientes, México.

Octubre de 2016
Aguascalientes, México.

Dr. Gelasio Salazar Anaya
Presidente de la SMM

XLIX
Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana

XLIX - P - 145 - 2486

XII Taller estudiantil de teoría de los continuos y sus hiperespacios

Universidad Autónoma del Estado de México, 3 al 6 de octubre de 2017.

Constancia a

Angela Martínez Rodríguez

por su conferencia

Algunas propiedades de la función K

Dr. José Guadalupe Anaya Ortega
Director de la Facultad de Ciencias de la
Universidad Autónoma del Estado de México

FACULTAD DE CIENCIAS

Facultades de Ciencias: Universidad Autónoma del Estado de México, B. Universidad Autónoma de Puebla, Universidad Nacional Autónoma de México, Posgrado en Ciencias Matemáticas UNAM, COMECyT

COMECYT

FCFM

La Sociedad Matemática Mexicana

otorga el presente

RECONOCIMIENTO

A: **Angela Martínez Rodríguez**

Por la presentación de la ponencia:
Sobre la función K
realizada dentro de las Actividades del 50 Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana, llevado a cabo
del 22 al 27 de Octubre de 2017, en CU, México.

Octubre de 2017
Ciudad de México, México.

Dr. Gelasio Salazar Anaya
Presidente de la SMM

50° CONGRESO NACIONAL DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA MEXICANA

L - P - 468 - 2486

BUAP

5CIMA

INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS AND ITS APPLICATIONS

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Fifth International Conference on Mathematics and its Applications (5CIMA)

This certifies that

Ángela Martínez

has participated as ***speaker of the talk***

La simetría y la aditividad de las funciones T y K

at the 5CIMA, held on September 3-7, 2018 at the School of Physics and Mathematics of BUAP.

"Pensar bien, para vivir mejor"

September 7th 2018, Puebla, Mexico

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE PUEBLA · FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS · 1578

Dra. Martha Alicia Palomino Ovando	**Dr. Fernando Macías Romero**
Head of the School of Physics and Mathematics	Chairman of the 5CIMA