Soluciones Estables en Juegos Cooperativos bajo Incertidumbre

Borrero Molina, Diego Vicente (dborrero@us.es)
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Hinojosa Ramos, Miguel Ángel (mahinram@upo.es)
Departamento de Economía, Métodos Cuantitativos e Historia Económica
Universidad Pablo de Olavide
Mármol Conde, Amparo María (amarmol@us.es)
Departamento de Economía Aplicada III
Universidad de Sevilla

RESUMEN

Los juegos cooperativos con múltiples escenarios modelan situaciones de decisión bajo incertidumbre, cuando se tiene que repartir un bien entre un conjunto de individuos, teniendo en cuenta los valores de las coaliciones bajo diferentes escenarios simultáneamente o bajo diferentes estados de la naturaleza.

En este trabajo se proponen y analizan diferentes conceptos de solución para este tipo de juegos y se proporcionan procedimientos para calcular los repartos que generan. En particular, se introducen los núcleos de ponderación como solución y se analizan las relaciones entre éstos y los conceptos existentes en la literatura: núcleo de preferencia y núcleo de dominancia. A continuación, se considera la posibilidad de incorporar información parcial sobre las probabilidades de ocurrencia de los distintos escenarios con objeto de obtener conjuntos de repartos que sean estables cuando se dispone de información probabilística. Para ello se presentan nuevos conceptos de núcleo con información parcial que extienden las nociones de núcleo de preferencia y núcleo de dominancia. Se investigan las relaciones entre ellos y se proporciona el procedimiento para el cálculo de los resultados que generan.

Palabras clave: Teoría de juegos; Múltiples escenarios; Información parcial; Núcleo.
Área temática: A1-Optimización.

ABSTRACT

Multiple scenario cooperative games model situations where the worth of the coalitions is valued in several scenarios simultaneously or under different states of nature. We focus on the identification of those allocations which are stable in the sense that agents have no incentives to abandon the group. The stability of an allocation depends on how the quantities the coalitions obtain are compared with the vector-valued worth of the coalition, therefore, different extensions of the notion of core emerge, depending on how these comparisons are made.

We introduce the new notions of *weighting cores* and analize the relationships between them and the existing core solutions. We also address the inclusion in the model of partial information about the probabilities of occurrence of the scenarios. In order to identify allocations which are also stable in the presence of probability information, we extend the notions of core to this new setting, and provide results which permit the efective calculation of the corresponding sets of allocations.

1 INTRODUCCIÓN

Los juegos cooperativos con múltiples escenarios constituyen una clase particular de juegos cooperativos de utilidad transferible (TU), donde la valoración de cada coalición se mide por un vector en lugar de por un escalar. Estos juegos surgen cuando se tiene que repartir un bien entre un conjunto de individuos, teniendo en cuenta el valor de las coaliciones bajo diferentes escenarios. Los diferentes escenarios se pueden interpretar como los diferentes estados de la naturaleza en presencia de incertidumbre. En las situaciones en las que los agentes no pueden asignar probabilidades de ocurrencia a los estados de la naturaleza, no se pueden aplicar argumentos estándar de utilidad esperada y es necesario abordar su estudio mediante técnicas de decisión no probabilísticos.

En la literatura reciente se han tratado otros modelos de decisión colectiva y de juegos en ambiente de incertidumbre no probabilística. Por ejemplo, en Bossert y Peters (2001) y Mármol y Ponsatí (2008) se investigan modelos de negociación en este contexto, y en Caraballo et al. (2013) se analizan los equilibrios de ciertos modelos competitivos con incertidumbre en la demanda. En Hinojosa et al. (2005) se tratan por primera vez los juegos cooperativos en este contexto decisional.

Los juegos cooperativos con múltiples escenarios difieren de los juegos cooperativos tradicionales en la naturaleza del valor de cada coalición que se representa por un vector. En Fernández et al. (2002), se ha estudiado otra clase de juegos cooperativos con valoración vectorial, los juegos cooperativos multicriterio, en los que se reparte un conjunto de diferentes productos entre los jugadores en lugar de un único bien. Formalmente en juegos cooperativos con múltiples escenarios un reparto se representa por un vector mientras en juegos multicriterio se representa por una matriz.

El objetivo de este artículo es proponer y analizar diferentes conceptos de solución para la clase de juegos cooperativos con múltiples escenarios, y proporcionar procedimientos para obtener las soluciones. Nos centramos en el concepto de núcleo. La idea fundamental de núcleo es considerar repartos estables en el sentido de que ninguna coalición tiene incentivo para abandonar el grupo. La estabilidad de un reparto depende de cómo se comparan las cantidades obtenidas por las coaliciones y la valoración de cada coalición, por tanto, surgen diferentes extensiones de la noción de núcleo, dependiendo de cómo se hacen estas comparaciones.

Los distintos conceptos de núcleo basados en las extensiones del orden natural se estudiaron en Hinojosa et al. (2005), donde también se propuso un concepto de nucleolo generalizado. Las soluciones que introducimos en este trabajo se apoyan en las relaciones de los conjuntos de soluciones estables con los núcleos de los juegos que resultan al asignar a cada coalición una suma ponderada de sus valores en los distintos escenarios. Esto permite el tratamiento de la información parcial sobre las posibles ponderaciones, que en el contexto de incertidumbre pueden interpretarse como las probabilidades de ocurrencia de los escenarios.

La determinación de las ponderaciones, o de las probabilidades de ocurrencia de los distintos escenarios, es en general difícil y frecuentemente sólo se dispone de información parcial sobre éstas. En muchos casos, la única información disponible consiste en juicios sobre la importancia relativa de los escenarios. Una forma habitual de representar la información es mediante relaciones lineales entre probabilidades de ocurrencia de los distintos escenarios (ver Mármol et al. (2002)). La posibilidad de describir estos conjuntos de información a partir de sus puntos extremos nos permite establecer resultados para el cálculo de conjuntos de soluciones estables con información parcial.

El resto del trabajo está organizado como sigue: en la Sección 2, presentamos nociones básicas para juegos cooperativos y la notación usada en este trabajo. A continuación, presentamos el modelo en la Sección 3, introducimos una nueva extensión de la noción de núcleo y estudiamos las relaciones entre ésta y las extensiones ya existentes en la literatura. En la Sección 4 consideramos la posibilidad de incorporar información parcial sobre las probabilidades de ocurrencia de los distintos escenarios, presentamos nuevos conceptos con información parcial y los procedimientos para calcular los resultados que generan. En la Sección 5 se muestra un ejemplo. Finalmente, se exponen las conclusiones en la Sección 6.

2 PRELIMINARES

Definición 1 *Un* ***juego cooperativo de utilidad transferible*** *es un par (N,v) donde N={1,2,...,n} es el conjunto de jugadores, y v es la función característica del juego, que asocia a cada* ***coalición*** $S \subseteq N$ *un número* $v(S) \in \mathbb{R}$ *y cumple que* $v(\emptyset) = 0$.

El valor $v(S)$ se puede interpretar como la cantidad que la coalición S puede garantizarse por sí misma. En el caso de un juego de costes, $v(S)$ es el coste mínimo que los jugadores de S pagarían sin la colaboración de ninguno de los jugadores de $N \setminus S$. En el caso de un juego de beneficios, $v(S)$ representa el beneficio que se garantiza la coalición S por sí misma.[1] A $v(N)$ se le denomina **valor del juego** y coincide con la cantidad total a repartir. Un **reparto** es un vector de pagos $x \in \mathbb{R}^n$ que satisface $x_i \geq 0$, para todo $i \in N$ y $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$. Denotaremos el **conjunto de repartos** de un juego por $I^*(N, v)$.

Las componentes de $x \in \mathbb{R}^n$ representan el pago de cada jugador, x_i es el pago para el jugador i-ésimo. La suma $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ es el pago total obtenido por la coalición S.

Definición 2 *El* ***núcleo*** *de un juego cooperativo de utilidad transferible (N,v) se define*

[1] En los desarrollos teóricos de este trabajo supondremos que el juego es de beneficios.

como

$$C(N,v) = \{x \in I^*(N,v) \mid x(S) \geq v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

Los elementos de $C(N,v)$ asocian a cada coalición beneficios mayores o iguales que los que tal coalición puede garantizarse por sí misma. En este sentido, los elementos de $C(N,v)$ son estables, porque no dejan insatisfecha a ninguna coalición.

Usaremos la siguiente notación. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se dice que $x \leqq y$ si $x_j \leq y_j, \forall j = 1, ..., n$, y que $x > y$ si $x_j > y_j, \forall j = 1, ..., n$. Además $x \nleqq y$ ($x \nless y$) si $x \leqq y$ ($x < y$) no es verdad.

Lema 1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\Delta^{n-1} = \{\lambda \in \mathbb{R}^n \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$. Se cumplen las siguientes equivalencias:*

a) $x \geqq y$ si y sólo si $\lambda^t x \geq \lambda^t y$, $\forall \lambda \in \Delta^n$. Por lo tanto dicha desigualdad no se cumple ($x \ngeqq y$) si y sólo si $\exists \lambda \in \Delta^n, \lambda^t x < \lambda^t y$.

b) $x > y$ si y sólo si $\forall \lambda \in \Delta^n, \lambda^t x > \lambda^t y$. Por lo tanto dicha desigualdad no se cumple ($x \ngtr y$) si y sólo si $\exists \lambda \in \Delta^n, \lambda^t x \leq \lambda^t y$.

3 JUEGOS CON MÚLTIPLES ESCENARIOS

A continuación se considera una extensión de los juegos cooperativos de utilidad transferible, teniendo en cuenta que el valor de cada coalición es evaluado en diferentes escenarios simultáneamente o bajo diferentes estados de la naturaleza.

Definición 3 *Un **juego cooperativo con múltiples escenarios** es un par (N,v) donde N=$\{1,2,...,n\}$ es el conjunto de jugadores, y v es la función característica del juego, que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ un vector $v(S) \in \mathbb{R}^m$, con $v_j(N) = v_{j'}(N)$ para todo j, $j' \in N$, $j \neq j'$.*

Las componentes de $v(S)$ representan el valor de S en los m escenarios, es decir, $v_j(S)$ se puede interpretar como la cantidad que la coalición S puede obtener por sí misma bajo el escenario j. Un reparto en este tipo de juegos se define como en los juegos convencionales: una cantidad no negativa para cada jugador de forma que sumen la cantidad común $v_j(N)$ que se obtiene en cualquier escenario. El conjunto de repartos también se denota como $I^*(N, v)$.

Existen múltiples situaciones de la vida real en las que el estudio de estos juegos es de gran utilidad. En el siguiente ejemplo se muestra una de estas posibles aplicaciones en un juego de costes.

Ejemplo 1 *La empresa municipal LIPASAM se encarga del servicio de recogida de residuos urbanos en la ciudad de Sevilla. A través de un convenio de colaboración con la Universidad Pablo de Olavide, se está estudiando el diseño de las rutas óptimas de recogida. Dada la dimensión del problema se ha descartado una formulación del problema mediante un algoritmo exacto y se ha utilizado un metaheurístico tipo GRASP considerando como único objetivo minimizar la distancia total recogida. Para comprobar que el procedimiento es consistente se han realizado varias ejecuciones obteniéndose distintos trazados con ligeras variaciones en el resultado final.*

La información obtenida en el proceso anterior puede utilizarse para proponer un reparto del coste de ejecución del servicio de recogida entre los distintos distritos urbanos de la ciudad de la siguiente manera: Dada una ruta "óptima" de las obtenidas en el proceso anterior se puede definir un juego cooperativo de rutas con tantos jugadores como distritos urbanos existen en la ciudad donde la función característica asociada a cada distrito o coalición de distritos es el coste de la distancia del recorrido que hace la ruta considerada en el distrito o grupo de distritos mencionados, más la distancia de los tramos necesarios para convertir dicho recorrido en un circuito o conjunto de circuitos factibles[2] *y de mínima distancia. Estos juegos se conocen en la literatura como "routing games" (ver por ejemplo Potters et al. (1992) o Derks and Kuipers (1997)).*

Como la información disponible se refiere a distintas rutas con distintos trazados, se tienen por tanto distintas valoraciones de la función característica de las coaliciones.

[2]Aquí factible significa que el servicio de recogida sea posible hacerlo exclusivamente en el distrito ó coalición de distritos considerados.

El objetivo es proponer un reparto del coste total del servicio de recogida de basura en la ciudad aplicando las soluciones de la teoría de juegos cooperativos. Supondremos que dicho coste es proporcional a la distancia recorrida y consideraremos los valores de la función característica normalizados[3].

Se obtiene así un juego cooperativo con múltiples escenarios, donde los jugadores son los distintos distritos urbanos, los escenarios son las distintas rutas obtenidas en el proceso descrito arriba y los valores de la función característica representan los costes del servicio que cada distrito o conjunto de distritos pueden garantizarse en cada escenario.

Cuando extendemos el concepto de núcleo a problemas con múltiples escenarios, se obtienen diferentes conceptos dependiendo de la relación binaria que se considere para comparar los pagos y la valoración de las coaliciones. Esta relación binaria es, por lo general, reflexiva y transitiva, y recoge las preferencias sobre vectores de $\mathbb{R}^m$.

En lo que sigue, dada una relación binaria $\succcurlyeq$, y dados $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, abusamos de la notación para denotar por $a \succcurlyeq b$, cuando queremos decir que $(a, a, ..., a)^t \succcurlyeq (b_1, b_2, ..., b_m)^t$.

El núcleo de un juego cooperativo con múltiples escenarios correspondiente a la relación binaria $\succcurlyeq$, se define como

$$C_{\succcurlyeq}(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid x(S) \succcurlyeq v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

3.1 Núcleo de Preferencia y Núcleo de Dominancia

La relación considerada para comparar los pagos y la valoración de las coaliciones en el núcleo de preferencia es $\geqq$.

Definición 4 *El* ***núcleo de preferencia*** *de un juego cooperativo con múltiples escenarios* (N, v) *se define como*

$$PC(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid x(S) \geqq v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

[3]Dividiendo por la distancia total recorrida en la ruta que al final se utilice para la prestación del servicio de recogida

Obsérvese que la definición anterior es equivalente a

$$PC(N,v) = \{x \in I^*(N,v) \mid x(S) \geq v_j(S), \forall j = 1,...,m, \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

Un primer resultado es que el núcleo de preferencia es la intersección de los núcleos de cada juego escalar de escenario único, (N, v_j) inducido por el juego con múltiples escenarios.

$$PC(N,v) = \bigcap_{j=1}^{m} C(N, v_j).$$

Consideremos el juego escalar (N, v_{max}), cuya función característica se define como $v_{max}(S) = Max_{j=1,...m} v_j(S), \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$. El núcleo de este juego coincide con el núcleo de preferencia:

$$PC(N,v) = C(N, v_{max}).$$

A continuación, consideramos repartos en los que para cada coalición exista al menos un escenario en el cual no haya razón para desviarse.

Definición 5 *El* ***núcleo de dominancia*** *de un juego cooperativo con múltiples escenarios (N,v) se define como*

$$DC(N,v) = \{x \in I^*(N,v) \mid x(S) \not< v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

Obsérvese que la definición anterior es equivalente a

$$DC(N,v) = \{x \in I^*(N,v) \mid \text{para cada } S \subset N, S \neq \emptyset, \exists\, i \in \{1,...,m\}, x(S) \geq v_i(S)\}.$$

Consideremos el juego escalar (N, v_{min}), cuya función característica se define como $v_{min}(S) = Min_{j=1,...m} v_j(S), \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$. Es fácil probar que

$$C(N, v_{min}) = DC(N,v).$$

Normalmente, el núcleo de dominancia es un conjunto de repartos demasiado amplio, y el núcleo de preferencia es un conjunto de repartos demasiado restrictivo, incluso frecuentemente es vacío.

3.2 Núcleos de Ponderación

Dado un vector de ponderaciones $\lambda \in \Delta^{m-1} = \{\lambda \in \mathbb{R}^m \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$ y dados $x, y \in \mathbb{R}^m$, definimos la relación $\geq_\lambda$ como

$$x \geq_\lambda y \text{ si y sólo si } \lambda^t x \geq \lambda^t y.$$

Dado el juego con múltiples escenarios (N, v), para $\lambda \in \Delta^{m-1}$, denotamos por (N, v^Λ) al juego escalar cuya función característica es, para cada $S \subseteq N, S \neq \emptyset$,

$$v^\Lambda(S) = \lambda^t v(S) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j(S).$$

Obsérvese que el núcleo del juego ponderado (N, v^Λ) puede describirse como

$$C(N, v^\Lambda) = \{x \in I^*(N, v) \mid x(S) \geq_\lambda v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

Presentamos nuevas conjuntos de repartos que serán estables dependiendo de los $\lambda \in \Delta^{m-1}$ que se consideran en las relaciones $\geq_\lambda$.

Sea (N, v) un juego cooperativo con múltiples escenarios, definimos los siguientes conjuntos de repartos,

$$C^1(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid x(S) \geq_\lambda v(S), \forall \lambda \in \Delta^{m-1}, \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

$$C^2(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid \exists \lambda \in \Delta^{m-1}, x(S) \geq_\lambda v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

$$C^3(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid \text{para cada } S \subset N, \exists \lambda \in \Delta^{m-1}, x(S) \geq_\lambda v(S)\}.$$

Obsérvese que $C^1(N, v) \subseteq C^2(N, v) \subseteq C^3(N, v)$. Las relaciones entre estos tres conjuntos de repartos, los núcleos de los juegos ponderados, y el núcleo de preferencia y de dominancia, se establecen en la siguiente proposición.

Proposición 1 *Para cada juego cooperativo con múltiples escenarios, (N, v), se tiene:*

(i) $C^1(N, v) = \bigcap_{\lambda \in \Delta^{m-1}} C(N, v^\Lambda) = PC(N, v)$

(ii) $C^2(N, v) = \bigcup_{\lambda \in \Delta^{m-1}} C(N, v^\Lambda)$

(iii) $C^3(N,v) = DC(N,v)$

Demostración 1 *Sea* $x \in I^*(N,v)$*.*

(i) La primera igualdad se sigue de la definición.

Probemos que $\bigcap_{\lambda\in\Delta^{m-1}} C(N,v^\Lambda) = PC(N,v)$ *:*

$x \in \bigcap_{\lambda\in\Delta^{m-1}} C(N,v^\Lambda)$ *si y sólo si* $x \in C(N,v^\Lambda), \forall\lambda \in \Delta^{m-1}$*. Esto se cumple si y sólo si* $x(S) \geq \lambda^t v(S), \forall\lambda \in \Delta^{m-1}, S \subset N, S \neq \emptyset$*. Por el Lema 1 se sigue que* $x(S) \geq \lambda^t v(S), \forall\lambda \in \Delta^{m-1}$ *si y sólo si* $x(S) \geqq v(S)$*. Y por tanto la condición anterior es equivalente a que* $x \in PC(N,v)$*.*

(ii) Se sigue de la definición.

(iii) $x \in C^3(N,v)$ *si y sólo si para cada* $S \subset N, \exists\lambda \in \Delta^{m-1}, x(S) \geq \lambda^t v(S)$*. Por el Lema 1, esto se cumple si y sólo si para cada* $S \subset N, x(S) \not< v(S)$*. Y por tanto la condición anterior es equivalente a que* $x \in DC(N,v)$*.* ■

En lo que sigue, al conjunto $C^2(N,v)$ lo denominamos **núcleo de ponderación común** y lo denotamos por $CC(N,v)$.

Proposición 2 *El núcleo de ponderación común* $CC(N,v)$ *de un juego con múltiples escenarios es un conjunto convexo.*

Demostración 2 *Para probarlo veremos que todo reparto que sea combinación convexa de dos repartos pertenecientes a* $C^2(N,v)$*, pertenece también a* $C^2(N,v)$*. Sean* $x, y \in C^2(N,v)$*, entonces* $\exists\lambda \in \Delta^{m-1}$ *tal que* $x(S) \geq_\lambda v(S), \forall S \subset N$ *y* $\exists\overline{\lambda} \in \Delta^{m-1}$ *tal que* $y(S) \geq_{\overline{\lambda}} v(S), \forall S \subset N$*. Por tanto,* $\exists\lambda \in \Delta^{m-1}$ *tal que* $x(S) \geq \lambda^t v(S), \forall S$ *y* $\exists\overline{\lambda} \in \Delta^{m-1}$ *tal que* $y(S) \geq \overline{\lambda}^t v(S), \forall S$*. Una combinación convexa cualquiera de estos dos repartos es* $\alpha x + (1-\alpha)y$ *con* $\alpha \in [0,1]$*. Por tanto,* $\exists\lambda^* = \alpha\lambda + (1-\alpha)\overline{\lambda} \in \Delta^{m-1}$ *tal que* $(\alpha x + (1-\alpha)y)(S) \geq \lambda^{*t} v(S), \forall S$*, y se tiene que* $\alpha x + (1-\alpha)y \in C^2(N,v)$*.* ■

Corolario 1 *El cierre convexo de la unión de los núcleos de los juegos* (N, v_j)*,* $j = 1, \ldots, m$*, está contenido en el núcleo de ponderación común*[4]*.*

$$ch(\bigcup_{j=1}^{m} C(N, v_j)) \subseteq CC(N, v).$$

Con lo cual se tiene la siguiente cadena de inclusiones:

$$PC(N, v) \subseteq ch(\bigcup_{j=1}^{m} C(N, v_j)) \subseteq CC(N, v) \subseteq DC(N, v).$$

El contenido $ch(\bigcup_{j=1}^{m} C(N, v_j)) \subseteq CC(N, v)$ puede ser estricto como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 *Consideremos el juego cooperativo,* (N, v) *de dos personas* $N = \{1, 2\}$ *con tres escenarios, siguiente:*

S	*Escenario I*	*Escenario II*	*Escenario III*
{*1*}	*2*	*1*	*0*
{*2*}	*0.5*	*2.25*	*3.25*
{*1,2*}	*3*	*3*	*3*

Sea $x \in I^*(N, v)$ *el reparto que asigna* $x_1 = 1$ *al primer jugador y* $x_2 = 2$ *al segundo jugador.*

Es fácil comprobar que $x \in C(N, v^{\Lambda})$ *con* $\lambda = (1/3, 1/3, 1/3)^t$*. Por tanto* $x \in CC(N, v)$*. Sin embargo, este reparto no está en* $ch(\bigcup_{j=1}^{m} C(N, v_j))$*. Para que el reparto* $x = (1, 2)^t$ *pertenezca a* $ch(\bigcup_{j=1}^{m} C(N, v_j))$*, tiene que ser combinación convexa de repartos que pertenezcan a* $C(N, v_j)$ *para algún* $j = 1, 2, 3$*. Obsérvese que* $C(N, v_2) = \emptyset$*, y* $C(N, v_3) = \emptyset$*.*

Como todos los repartos, $y \in I^*(N, v)$*, cumplen* $y_1 + y_2 = 3$*, pueden escribirse como* $y = (1 - a, 2 + a)^t$ *con* $-2 \leq a \leq 1$*. Para que* $y \in C(N, v_1)$ *debe cumplirse que* $1 - a \geq 2$ *y* $2 + a \geq 0.5$*, es decir,* $-1.5 \leq a \leq -1$*. Nótese que* $x = (1, 2)^t \notin C(N, v_1)$*, y no puede expresarse como combinación convexa de dos repartos en las condiciones anteriores. Se sigue que* $x \notin ch(\bigcup_{j=1}^{m} C(N, v_j))$*.*

[4] ch(S) denota el cierre convexo del conjunto S.

Por otra parte, el contenido $CC(N, v) \subseteq DC(N, v)$ también puede ser estricto como se muestra a continuación.

Ejemplo 3 *Consideremos el juego cooperativo, (N, v) de dos personas $N = \{1, 2\}$ con dos escenarios, siguiente:*

S	*Escenario I*	*Escenario II*
{*1*}	*2*	*0.5*
{*2*}	*0.5*	*2*
{*1,2*}	*2*	*2*

Sea $x \in I^*(N, v)$ el reparto que asigna $x_1 = 1$ al primer jugador y $x_2 = 1$ al segundo jugador.

Este reparto está en el núcleo de dominancia pues para cada coalición S, existe $\lambda \in \Delta^1$ tal que $x(S) \geq \lambda^t v(S)$. Basta tomar $\lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 3/4$ para la coalición $\{1\}$ y $\mu_1 = 3/4, \mu_2 = 1/4$ para la coalición $\{2\}$.

Sin embargo, si existiese $\lambda \in \Delta^1$ tal que $x(S) \geq \lambda^t v(S)$ para $S = \{1\}$ y para $S = \{2\}$, entonces debería cumplirse $1 \geq 2\lambda_1 + 1/2\lambda_2$ y $1 \geq 1/2\lambda_1 + 2\lambda_2$. Es fácil ver que $\nexists\, \lambda \in \Delta^1$ que cumpla estas inecuaciones. Por tanto, $x \notin CC(N, v)$.

4 JUEGOS CON INFORMACIÓN PARCIAL

En lo que sigue, consideramos conjuntos de repartos que sean estables en presencia de información sobre la probabilidad de ocurrencia de los escenarios, e introduciomos nuevos conceptos de núcleo para juegos con información parcial que extienden las nociones de núcleo de preferencia, núcleo de dominancia y núcleo de ponderación común.

Dado un vector de ponderación $\lambda \in \Delta^{m-1}$, cada componente de λ representa la probabilidad de ocurrencia de un escenario. Si los jugadores son capaces de determinar estas probabilidades, el problema admitiría un análisis en términos de utilidad esperada. Pero la determinación exacta de estos probabilidades suele ser difícil y normalmente los jugadores solo son capaces de dar información parcial con respecto a las ponderaciones. En muchos casos, la única información disponible consiste en límites para las probabilidades o en juicios sobre la importancia relativa de los escenarios. Una posibilidad de representar la información es mediante las relaciones lineales entre las probabilidades de ocurrencia de los distintos escenarios. Esta manera de representar la información se puede ver en Mármol et al. (2002).

Consideraremos que los agentes admiten los vectores de probabilidad contenidos en un subconjunto $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1}$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^m$, definimos la relación $\geqq_\Lambda$ como

$$x \geqq_\Lambda y \text{ si y sólo si } x \geq_\lambda y, \forall \lambda \in \Lambda,$$

y la relación $\not<_\Lambda$ como

$$x \not<_\Lambda y \text{ si y sólo si } \exists \lambda \in \Lambda : x \geq_\lambda y.$$

Definición 6 *El* ***núcleo de preferencia con información*** $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1}$ *de un juego cooperativo con múltiples escenarios* (N, v) *se define como*

$$PC_\Lambda(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid x(S) \geqq_\Lambda v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

Definición 7 *El* ***núcleo de dominancia con información*** $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1}$ *de un juego cooperativo con múltiples escenarios* (N, v) *se define como*

$$DC_\Lambda(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid x(S) \not<_\Lambda v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

Definición 8 *El* ***núcleo de ponderación común con información*** $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1}$ *de un juego cooperativo con múltiples escenarios* (N, v) *se define como*

$$CC_\Lambda(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid \exists \lambda \in \Lambda, x(S) \geq \lambda^t v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset\}.$$

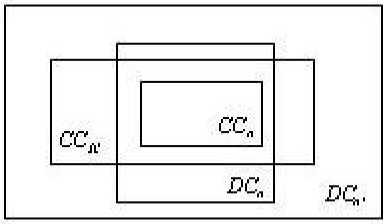
La siguiente proposición, cuya demostración se sigue de las definiciones anteriores, establece las relaciones existentes entre los conceptos de núcleo de preferencia y de dominancia, con o sin incorporación de información parcial.

Proposición 3 *Dado un juego cooperativo con múltiples escenarios* (N, v)*, e información parcial, si* $\Lambda \subseteq \Lambda' \subseteq \Delta^{m-1}$*, entonces*

a) $PC_{\Lambda'}(N, v) \subseteq PC_{\Lambda}(N, v) \subseteq DC_{\Lambda}(N, v) \subseteq DC_{\Lambda'}(N, v)$.

b) $DC_{\Lambda}(N, v) \supseteq CC_{\Lambda}(N, v) \subseteq CC_{\Lambda'}(N, v) \subseteq DC_{\Lambda'}(N, v)$.

La siguiente figura representa las inclusiones entre estos conjuntos.



Un caso particular relevante es cuando tenemos la información de que las componentes de $\lambda \in \Lambda$ verifican un sistema de desigualdades lineales que determinan un poliedro.

Dado el poliedro $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1}$, sea $E_{\Lambda} \in \mathbb{R}^{m \times r}$ la matriz cuyas columnas son los puntos extremos de Λ. Definimos el juego con valoración vectorial (N, v^{Λ}) donde $v^{\Lambda}(S) = E^t_{\Lambda} v(S) \in \mathbb{R}^r, \forall S \subset N, S \neq \emptyset$ y $v^{\Lambda}(N) = v(N)$.

El siguiente resultado establece la relación entre los núcleos de preferencia y dominancia con información parcial y los núcleos de preferencia y dominancia del juego transformado (N, v^{Λ}). Como consecuencia proporciona la manera de obtener estos conjuntos de repartos.

Proposición 4 *Sea* (N, v) *un juego cooperativo con múltiples escenarios y* $\Lambda \subseteq \Delta^{m-1}$*, entonces:*

(i) $PC_{\Lambda}(N, v) = PC(N, v^{\Lambda})$.

(ii) $DC_{\Lambda}(N, v) = DC(N, v^{\Lambda})$.

(iii) $CC_{\Lambda}(N, v) = CC(N, v^{\Lambda})$.

Demostración 3 *Sea* $x \in I^*(N, v)$.

(i) $x \in PC_\Lambda(N,v)$ *si y sólo si* $x(S) \geqq_\Lambda v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset$. *Por el lema 1, esto se cumple si y sólo si* $x(S) \geq \lambda^t v(S), \forall \lambda \in \Lambda, \forall S \subset N, S \neq \emptyset$.

Como $\lambda \in \Lambda$ *entonces* $\lambda = E_\Lambda \alpha$, *con* $\alpha \in \Delta^r$. *Por ello, dado* $S \subset N, S \neq \emptyset, x(S) \geq \lambda^t v(S), \forall \lambda \in \Lambda$ *si y sólo si* $x(S) \geq \alpha^t E_\Lambda^t v(S), \forall \alpha \in \Delta^r$ *y por tanto* $x(S) \geq \alpha^t v^\Lambda(S), \forall \alpha \in \Delta^r, \forall S \subset N, S \neq \emptyset$. *Por el lema 1, esto se cumple si y sólo si* $x(S) \geqq v^\Lambda(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset$, *y por tanto, la condición anterior es equivalente a que* $x \in PC(N, v^\Lambda)$.

(ii) $x \in DC_\Lambda(N,v)$ *si y sólo si* $x(S) \not<_\Lambda v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset$. *Por el lema 1, esto se cumple si y sólo si para cada* $S \subset N, \exists \lambda \in \Lambda, x(S) \geq \lambda^t v(S)$.

Como $\lambda \in \Lambda$ *entonces* $\lambda = E_\Lambda \alpha$, *con* $\alpha \in \Delta^r$. *Por ello, dado* $S, \exists \lambda \in \Lambda, x(S) \geq \lambda^t v(S)$ *si y sólo si* $\exists \alpha \in \Delta^r, x(S) \geq \alpha^t E_\Lambda^t v(S)$ *y por tanto* $\exists \alpha \in \Delta^r, x(S) \geq \alpha^t v^\Lambda(S)$. *Por el lema 1, esto se cumple si y sólo si* $x(S) \not< v^\Lambda(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset$, *y por tanto, la condición anterior es equivalente a que* $x \in DC(N, v^\Lambda)$.

(iii) $x \in CC_\Lambda(N,v)$ *si y sólo si* $\exists \lambda \in \Lambda, x(S) \geq \lambda^t v(S), \forall S \subset N, S \neq \emptyset$.

Como $\lambda \in \Lambda$ *entonces* $\lambda = E_\Lambda \alpha$, *con* $\alpha \in \Delta^r$. *Por tanto, la existencia de* $\lambda \in \Lambda, x(S) \geq \lambda^t v(S), \forall S$ *es equivalente a la existencia de* $\alpha \in \Delta^r, x(S) \geq \alpha^t E_\Lambda^t v(S), \forall S$ *y por tanto a la existencia de* $\alpha \in \Delta^r, x(S) \geq \alpha^t v^\Lambda(S), \forall S$. *De donde se sigue el resultado.* ■

5 EJEMPLO

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para calcular el núcleo de preferencia, de dominancia y aproximación del núcleo de ponderación común, con y sin información parcial. Los datos se han tomado de Hinojosa et al. (2005).

Consideremos un juego cooperativo de tres personas con tres escenarios. Para todos los escenarios, la valoración de las coaliciones formadas por una única persona es 0, y el valor de la gran coalición es 1. Los valores de las coaliciones formadas por dos personas, se muestran en la siguiente tabla:

S	Escenario I	Escenario II	Escenario III
{1,2}	0.3	0.3	0.1
{1,3}	0.5	0.3	0.5
{2,3}	0.4	0.7	0.7

El conjunto de repartos del juego es $I^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

El núcleo de preferencia y de dominancia de este juego con múltiples escenarios se obtienen como $C(N, v_{max})$ y $C(N, v_{min})$, respectivamente,

$$PC(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.3,\ x_1 + x_3 \geq 0.5,\ x_2 + x_3 \geq 0.7\},$$
$$DC(N, v) = \{x \in I^*(N, v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.1,\ x_1 + x_3 \geq 0.3,\ x_2 + x_3 \geq 0.4\}.$$

En la Figura 1 se representa el núcleo de preferencia y el núcleo de dominancia del juego en el simplex $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

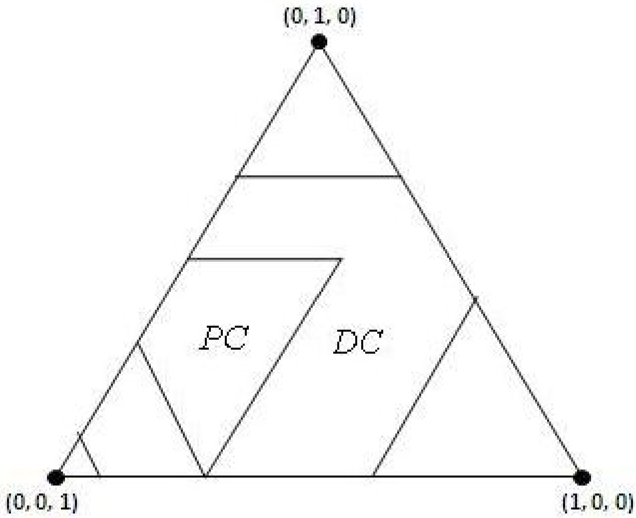


Figure 1: Núcleo de Preferencia y de Dominancia

Para obtener una aproximación al núcleo de ponderación común, $CC(N, v)$, consideremos los juegos de cada escenario individual.

$$C(N, v_1) = \{x \in I^*(N, v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.3,\ x_1 + x_3 \geq 0.5,\ x_2 + x_3 \geq 0.4\},$$
$$C(N, v_2) = \{x \in I^*(N, v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.3,\ x_1 + x_3 \geq 0.3,\ x_2 + x_3 \geq 0.7\},$$

$$C(N, v_3) = \{x \in I^*(N, v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.1,\ x_1 + x_3 \geq 0.5,\ x_2 + x_3 \geq 0.7\}.$$

En la Figura 2 se representa la unión de estos núcleos en el simplex $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$. En este caso, $ch(\bigcup_j C(N, v_j))$ coincide con el núcleo de dominancia y por tanto también con el núcleo de ponderación común.

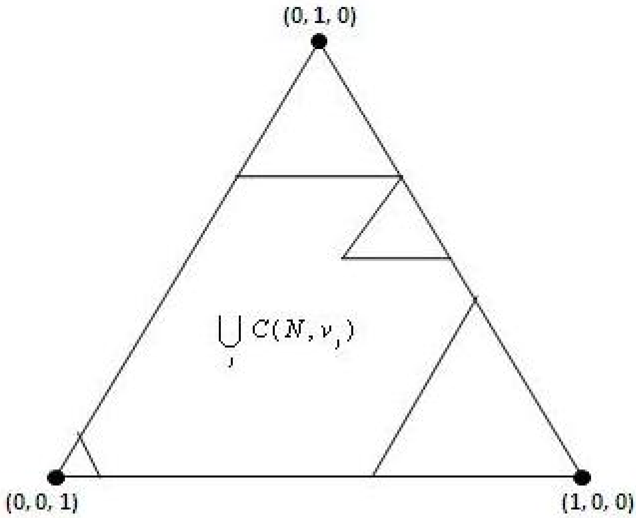


Figure 2: $\bigcup_j C(N, v_j)$

Supongamos ahora que se dispone de la siguiente información: la probabilidad de ocurrencia del primer escenario no es menor que la del segundo, y la probabilidad de ocurrencia del segundo no es menor que la del tercero. En este caso el conjunto de información parcial es:

$$\Lambda = \{\lambda \in \Delta^2 \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 0\}.$$

La matriz E_Λ cuyas columnas son los puntos extremos de Λ es la siguiente:

$$E_\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Consideramos el juego (N, v^Λ) donde $v^\Lambda(S) = E_\Lambda^t v(S), \forall S \subseteq N, S \neq \emptyset$. Vamos a calcular las valoraciones $v^\Lambda(S)$ para todas las coaliciones. Los valores para las coaliciones formadas por una persona es 0 y para la gran coalición es 1. Para el resto de coaliciones sería como sigue:

$$v^{\Lambda}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.2\widehat{3} \end{pmatrix}$$

$$v^{\Lambda}(1,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.4\widehat{3} \end{pmatrix}$$

$$v^{\Lambda}(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.7 \\ 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.55 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Con lo cual, ahora tenemos la siguiente tabla de valores de las coaliciones formadas por dos personas:

S	v_1^{Λ}	v_2^{Λ}	v_3^{Λ}
{1,2}	0.3	0.3	$0.2\widehat{3}$
{1,3}	0.5	0.4	$0.4\widehat{3}$
{2,3}	0.4	0.55	0.6

Aplicando $C(N, v^{\Lambda}_{max})$ y $C(N, v^{\Lambda}_{min})$, se obtiene el núcleo de preferencia y de dominancia con información parcial, respectivamente,

$$PC_{\Lambda}(N,v) = \{x \in I^*(N,v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.3,\ x_1 + x_3 \geq 0.5,\ x_2 + x_3 \geq 0.6\},$$
$$DC_{\Lambda}(N,v) = \{x \in I^*(N,v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.2\widehat{3},\ x_1 + x_3 \geq 0.4,\ x_2 + x_3 \geq 0.4\}.$$

En la Figura 3 se representan el núcleo de preferencia y el núcleo de dominancia con información parcial, en el simplex $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

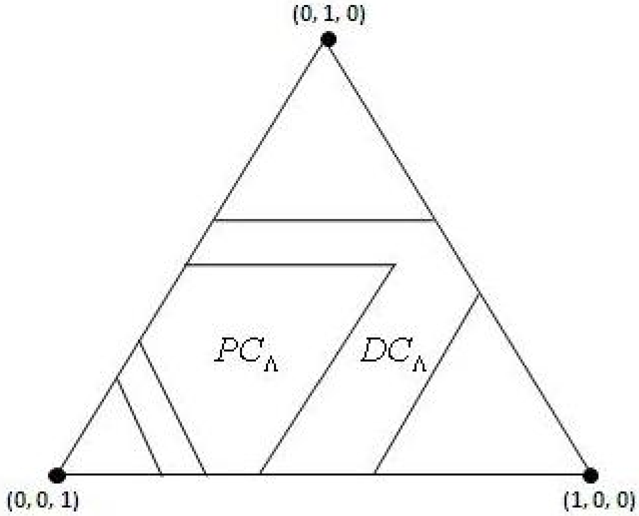


Figure 3: Núcleo de Preferencia y de Dominancia con Información Parcial

Un reparto en el núcleo de preferencia $PC_\Lambda(N, v)$ es estable en el sentido que los agentes y las coaliciones obtienen con este reparto al menos tanto como los distintos pagos esperados, para cualquier vector de probabilidades incluido en el conjunto de información.

Por otra parte, un reparto en el núcleo de dominancia $DC_\Lambda(N, v)$ es estable en el sentido que cada coalición obtiene un pago que no es peor que el pago esperado con algún vector de probabilidades del conjunto de información. No obstante, el vector de probabilidades puede ser distinto para cada coalición.

A continuación, buscamos una aproximación al núcleo de ponderación común con este conjunto de información. Los núcleos de los juegos componentes del juego $v^\Lambda(S)$ son:

$$C(N, v_1^\Lambda) = \{x \in I^*(N, v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.3,\, x_1 + x_3 \geq 0.5,\, x_2 + x_3 \geq 0.4\},$$
$$C(N, v_2^\Lambda) = \{x \in I^*(N, v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.3,\, x_1 + x_3 \geq 0.4,\, x_2 + x_3 \geq 0.55\},$$
$$C(N, v_3^\Lambda) = \{x \in I^*(N, v) \mid x_1 + x_2 \geq 0.2\widehat{3},\, x_1 + x_3 \geq 0.4\widehat{3},\, x_2 + x_3 \geq 0.6\}.$$

En la Figura 4 se representa la unión de estos núcleos en el simplex $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$. También en este caso, $ch(\bigcup_j C(N, v_j^\Lambda))$ coincide con el núcleo de dominancia y por tanto con el núcleo de ponderación común.

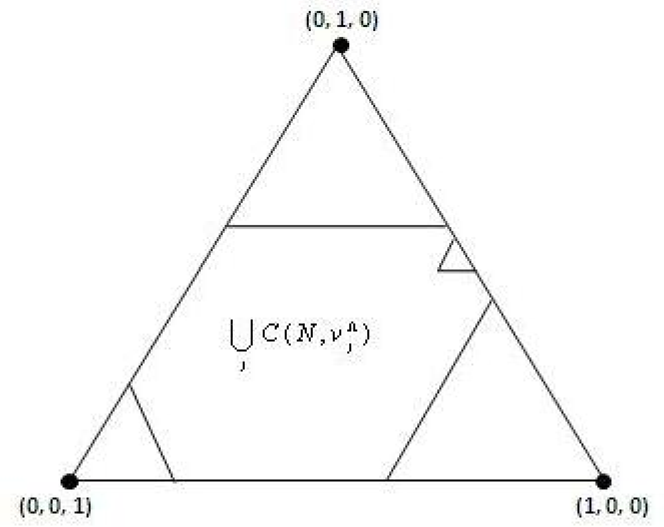


Figure 4: $\bigcup_j C(N, v_j^{\Lambda})$

6 CONCLUSIONES

Este trabajo trata sobre juegos cooperativos con múltiples escenarios. Para esta clase de juegos, se proponen y analizan diferentes conceptos de solución tipo núcleo, que dependen de cómo se comparen las cantidades obtenidas por las coaliciones y la valoración de cada coalición. Concretamente, las nociones introducidas se apoyan en las relaciones entre los conjuntos de repartos estables propuestos y los núcleos de los juegos obtenidos considerando para cada coalición una ponderación de las valoraciones en cada escenario.

La importancia de este análisis estriba en que abre la posibilidad de tratar situaciones en las que se dispone de información parcial sobre las probabilidades de ocurrencia de los escenarios en contextos en que no es posible, o no es conveniente, la modelización mediante técnicas estándar de utilidad esperada. Se identifican así conjuntos de repartos más acordes con la situación que se quiere representar. Por otra parte, la posibilidad de describir los conjuntos de información a partir de sus puntos extremos permite establecer resultados para el cálculo efectivo de estos conjuntos de repartos estables con información parcial.

Este tipo de técnicas son aplicables a interesantes problemas reales ya que no siempre disponemos de toda la información sobre la probabilidad de ocurrencia de los escenarios.

En Sección 3 se menciona el problema del reparto del coste total de recogida de residuos urbanos en Sevilla, entre distintas zonas de esta ciudad.

Dentro de un proyecto de excelencia de la Junta de Andalucía y en colaboración con la empresa municipal LIPASAM, encargada del servicio de recogida de residuos urbanos en la ciudad de Sevilla, se ha obtenido mediante un metaheurístico tipo GRASP el diseño de las rutas óptimas de recogida, considerando como objetivo minimizar la distancia total recorrida. Se han realizado varias ejecuciones obteniéndose distintas rutas con ligeras variaciones en la distancia total recorrida. Por tanto, a la hora de repartir el coste total, podemos tener en cuenta todas estas diferentes rutas que aconsejan las distintas ejecuciones del algoritmo. Como la decisión sobre cual será la ruta que finalmente se adoptará para realizar el servicio de recogida se va a tomar teniendo en cuenta otras variables como impacto social, velocidad media del trayecto, número de camiones, etc., y muy probablemente tras diversas negociaciones con las secciones sindicales y los responsables políticos del ayuntamiento, para diseñar a priori el reparto de costes es aplicable este modelo con múltiples escenarios. Más aún, el modelo permite la incorporación de información parcial sobre la probabilidad de elección de una ruta u otra.

7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOSSERT, W. and PETERS, H. (2001). "Minimax regret and efficient bargaining under uncertainty". Games and Economic Behavior 34 (1), pp. 1–10.

CARABALLO, M.A., MÁRMOL, A.M., MONROY, L. y BUITRAGO, E.M. (2013). "Cournot competition under uncertainty. Conservative and optimistic equilibria". En revisión.

DERKS, J. and KUIPERS, J. (1997) "On the core of ruting games". International Journal of Game Theory 26: 193–205.

FERNÁNDEZ, F.R., HINOJOSA, M.A. y PUERTO, J. (2002). “Core Solutions in Vector-Valued Games”. Journal of Optimization Theory and Applications, 112, pp. 331–360.

HINOJOSA, M.A., MÁRMOL, A.M. y THOMAS, L.C. (2005). “Core, least core and nucleolus for multiple scenario cooperative games”. European Journal of Operational Research, 164, pp. 225–238.

MÁRMOL, A.M. y PONSATÍ, C. (2008). ”Bargaining over multiple issues with maximin and leximin preferences”. Social Choice and Welfare 30 (2), pp. 211–223.

MÁRMOL, A.M., PUERTO, J. y FERNÁNDEZ, F.R. (2002). “Sequential incorporation of imprecise information in multiple criteria decision processes”. European Journal of Operational Research, 137, pp. 123–133.

POTTERS, J.A.M., CURIEL, I.J. and TIJS, S.H. (1992) “Traveling salesman games.” Mathematical Programming 53: 199–211.