Teoria della scelta sociale

e

Teorema fondamentale dell'economia del benessere

Razionalità, coerenza, efficienza e equità

Mariano Giaquinta e Hykel Hosni

Mariano Giaquinta
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7
I-56100 Pisa
giaquinta@sns.it

Hykel Hosni
London School of Economics
Houghton street
London WC2A 2AE
h.hosni@lse.ac.uk

Prefazione

> Le idee degli economisti e dei filosofi politici, sia quando sono giuste sia quando sono sbagliate, sono più potenti di quanto comunemente si creda. Infatti il mondo è regolato da poco d'altro. Gli uomini pratici, che si ritengono esenti da ogni influenza intellettuale, sono solitamente schiavi di qualche economista defunto.
> (J.M. Keynes, *The General Theory of Employment*, Interest and Money, 1935)

> Diffondere la ragione nel mondo è un'impresa che riguarda la morale più che la metafisica ed è il compito, oltre che la speranza, dell'umanità.
> (C. Korsgaard, *Creating the Kingdom of Ends*, 1996)

> L'importante [...] non è una pretesa onnipresenza della razionalità in ciò che ciascuno va pensando. Una pretesa del genere è irrealistica, e del resto non ve n'è bisogno. L'idea che le persone si troverebbero d'accordo su una particolare proposta, se riuscissero a ragionare in modo libero e imparziale, non implica certo che siano già impegnate a farlo e nemmeno che abbiano intenzione di procedere in tal senso. La cosa essenziale è determinare ciò che la ragione esigerebbe [...] senza con questo escludere la possibilità che esistano più posizioni razionali diverse tra loro. Si tratta di un'attività decisamente compatibile con l'eventualità, e persino con la certezza, che in un determinato momento non tutti gli individui siano disposti a impegnarsi in una simile analisi. L'indagine razionale occupa un posto chiave nella comprensione della giustizia anche in un mondo segnato da tanta "irrazionalità". Anzi, in un mondo siffatto può risultare decisiva.
> [...]
> Si richiede un processo interattivo di valutazione critica a imparzialità aperta che contempli un serrato confronto sul contenuto e sulla portata degli ipotetici diritti umani.
> (A. Sen, *L'idea di giustizia*, 2009)

In questo volume[1] ci proponiamo un duplice obiettivo: da una parte, illustrare alcuni aspetti dell'*Economia matematica classica* e, legata ai fondamenti di questa, della *teoria della scelta sociale*, dall'altra, discutere limiti e rilevanza della formalizzazione e dei fondamenti matematici di queste teorie.

La prima viene fatta risalire ai lavori di John Stuart Mill (1806-1873) Stanley Jevons (1835-1882), Carl Menger (1840-1921) e Leon Walras (1834-1910), intorno agli anni 1870. Si sviluppa a cavallo del novecento col lavoro di Francis Y. Edgeworth (1845-1926), di Alfred Marshall (1842-1924) e di Vilfredo Pareto (1840-1923) e della sua scuola; e ancora, con i lavori di Abraham Wald (1902-1950) e la teoria dei giochi di

[1] Esso costituisce un ampliamento delle note di un corso-seminario tenuto dagli autori nell'anno accademico 2013-2014 presso la Scuola Normale Superiore e rivolto a studenti, di filosofia e di matematica, prevalentemente della laurea magistrale e del dottorato.

John von Neumann (1903-1957) e, poi, di John Nash (1928-) e si consolida con l'opera di Paul Samuelson (1915-2009), Kenneth Arrow (1921-), Gérard Debreu (1921-2004) e Lionel McKenzie (1919-2010), trovando una sua veste ormai classica nel volume *Theory of Value* del 1959 di Debreu [43], cioè nella *teoria generale dell'equilibrio* e nel *teorema fondamentale dell'economia del benessere*. La nostra presentazione per buona parte è presa in prestito e seguirà principalmente i testi [53] [118] [7] [157] [101] [119].

In contrapposizione con la teoria classica, basata sulla nozione di *valore lavoro* — sviluppata soprattutto da Adam Smith (1723-1790), David Ricardo (1772-1823) e Karl Marx (1819-1893) con lo scopo principale di capire il processo di accumulazione della ricchezza delle nazioni (e dei privati) — (o, con la teoria pre-classica, basata su quella di *valore oggettivo*), l'economia matematica pone a fondamento dello scambio le preferenze *individuali* degli agenti economici e la loro *ottimizzazione* (soggetta solo a vincoli determinati dai prezzi di mercato[2] e dalle risorse individuali), secondo le norme imposte da una *teoria del valore soggettivo*. Questo ramo dell'Economia si può suddividere, quindi, nell'analisi dei comportamenti individuali, *teoria delle scelte*, nell'analisi del comportamento strategico, *teoria dei giochi*, e nell' analisi delle interazioni di mercato, *equilibrio economico generale*.

Partendo dai comportamenti individuali, considerati come dati e che si assume siano *razionali* in un senso matematicamente preciso, si vogliono dedurre leggi economiche a livello sociale. In questo contesto i prezzi sono determinati dallo scambio e non ci sono meccanismi sociali che si oppongono alla loro totale flessibilità, il motore dell'economia è *l'avidità, l'utilità o l'egocentrismo degli individui*[3].

Come tutte le scienze sociali anche l'economia è fortemente influenzata da presupposti ideologici[4], spesso mediati e resi non completamente espliciti. In particolare, l'economia neoclassica sembra animata da una fiducia, sia *esplicativa* sia *normativa*, nel *capitalismo di mercato* e nel *profitto*, che ingenuamente e con brutalità può essere enunciata come fiducia

- ∘ nell'autosufficienza e nella natura autoregolativa dell'economia di mercato;
- ∘ nell'idea che la massimizzazione dell'utilità (e talvolta del profitto) sia una caratterizzazione adeguata della condotta razionale;
- ∘ nell'idea che l'amore di sé sia sufficiente a determinare un comportamento socialmente produttivo.

[2] Vedremo come una delle questioni centrali in relazione ai prezzi è se essi siano da considerare un dato del mercato o un prodotto del mercato, in ogni caso cercando di evitare un circolo vizioso.

[3] Spinti in questo anche dalle teorie utilitariste di John Stuart Mill e, soprattutto, di Jeremy Bentham (1748-1832).

In realtà, la prevalenza dell'utilità e il senso da attribuirgli è attenuato dalla libertà di scelta individuale che, oltre che o in sostituzione dell'avidità nel senso letterale, potrebbe essere determinata da qualunque altra causa, come anche dall'amore per il prossimo, e, in ogni caso, dalla *razionalità* della scelta. Si impone quindi un'analisi quanto più precisa possibile dell'idea di *razionalità*. In particolare, se essa sia la migliore approssimazione del comportamento degli esseri umani, almeno in economia, e, se non è così, quale sia il suo ruolo.

[4] O almeno in grado nettamente maggiore rispetto alle scienze naturali.

L'idea che la realizzazione dell'interesse personale in un libero mercato garantisca il benessere collettivo è solitamente attribuita ad Adam Smith (1723-1790) e a supporto viene spesso citato un celebre passo da *La ricchezza delle nazioni*, [180] p. 73,

> Non è certo dalla benevolenza del macellaio, del birraio o del fornaio che ci aspettiamo il nostro pranzo, ma dal fatto che essi hanno cura del proprio interesse. Noi non ci rivolgiamo alla loro umanità, ma al loro egoismo e con loro non parliamo mai delle nostre necessità, ma dei loro vantaggi.

Ma, secondo Amartya Sen, queste tesi non solo non gli appartengono ma anzi sono in contrasto con il suo pensiero. Sostiene sempre Amartya Sen che Smith considera i mercati sì di grande utilità ma insiste sulla necessità di integrarli con altre istituzioni; insiste anche sulla necessità di porre alla base di un comportamento razionale motivi che vadano al di là del profitto e del tornaconto personale; e sottolinea la necessità di guardare, oltre che al perseguimento dell'amore di sé, ad altre motivazioni, non solo per la realizzazione di una società più giusta o, almeno, decorosa, ma anche per la realizzazione di una economia di mercato florida[5].

Uno degli aspetti specifici dell'*economia matematica* rispetto all'*economia politica* (che appare a volte più come un'arte di prendere le decisioni economiche) è la metodologia impiegata: una formulazione matematica completa[6]. Questa formalizzazione permette contesti precisamente e univocamente determinati, lo studio della coerenza interna della teoria e, infine, di separare ciò che è vero per logica da ciò che è vero perché è stato supposto. In particolare, la formulazione matematica permette di isolare i presupposti economici che sono necessari per arrivare a delle conclusioni o che rendono inevitabili certe conclusioni.

Strettamente legata allo studio dei fondamenti dell'economia matematica è la *teoria della scelta*. Secondo l'ipotesi dell'*individualismo metodologico* i fenomeni socio-economici possono essere compresi e descritti unicamente attraverso la comprensione del comportamento individuale. Nella tradizione, che qui presentiamo, ciò avviene postulando che un consumatore, elettore, giocatore, ecc., sia adeguatamente rappresentato da una relazione di preferenza sulle alternative socio-economiche di interesse. Questo permette una formalizzazione naturale della razionalità in termini di coerenza logica e massimizzazione.

Illustrare questo processo di matematizzazione dell'economia e della teoria della scelta è in effetti, come detto, uno degli scopi di questo volume. Come risultato di questo processo arriveremo al *teorema fondamentale dell'economia del benessere* considerato dalla destra liberista, ma non solo, come il fulcro matematico, e quindi apparentemente incontestabile, di un argomento che intende analizzare e, sovente, definire il concetto di benessere solciale unicamente come il prodotto dell'interazione di individui, motivati dal raggiungimento dei propri interessi personali, all'interno di un libero mercato. Ci soffermeremo, in particolare, ad illustrare e discutere le ipotesi che sottendono il risultato per analizzarne criticamente l'interpretazione. Questo metterà in

[5] Non sembra, però, che siano stati sviluppati *modelli matematici* coerenti e generali in questa direzione e, come vedremo, si possono sollevare dubbi su una tale possibilità.

[6] È probabile che questo non sia sempre possibile, ma un'analisi dei casi in cui questo non sembrasse possibile sarebbe sicuramente utile e chiarificatrice.

evidenza come la stessa modellizzazione matematica che ha come presupposto centrale la *razionalità dell'agente economico individuale* porti molto chiaramente a mostrare i limiti dell'impostazione liberista.

Ancora qualche considerazione finale. Il ruolo dell'economia matematica e dell'analisi logica dei suoi fondamenti appare quindi essere più quello di rendere precisi i concetti e le ipotesi utilizzati e dedurne le conseguenze che non quello di dettare le decisioni economiche[7] che invece, come vedremo, sembra si debbano inserire in un contesto ideologico e sociale: esso non può sostituirsi semplicemente alla politica o alla filosofia o all'etica. Ma, separare o tentare di separare, per quanto possibile, i due aspetti è (o sarebbe) già un buon lavoro; inoltre, analizzare i reciproci rapporti tra economia ed etica in senso lato sembra, al di là di ogni previsione, utile in entrambe le direzioni.

Da questo punto di vista l'economia matematica è sicuramente una scienza profondamente diversa dalle scienze fisiche e naturali (e non perché più giovane); d'altra parte non sembra essere un puro esercizio accademico come sostenuto anche da alcuni economisti a cui viene attribuita l'origine dell'osservazione eccessivamente critica "i fisici con una legge spiegano mille fenomeni, gli economisti con mille leggi spiegano un fenomeno".

Ci piace concludere con il seguente passo di De Finetti

> Come nella tecnica, nell'ingegneria, concetti più semplificati e formule approssimate hanno correntemente un'applicazione più vasta a problemi pratici, così altrettanto potrà avvenire nell'economia. Ma le teorie speciali e le formule approssimate tratteranno della teoria generale e delle formule esatte la ragione della loro validità, non solo, ma anche dei limiti della loro validità. Nel rinnovamento dell'economia pura, il pensiero matematico ha quindi un vasto compito davanti a sè: proseguire nella via tracciata da Pareto, abbandonando i residui di dogmatismo liberista, contribuendo a chiarire alla coscienza del mondo le radici degli errori di principio che gli precludono ancora la vista verso un migliore domani.
> (B. De Finetti, *Vilfredo Pareto di fronte ai suoi critici odierni. Nuovi Studi di Diritto, Economia e Politica*, 224–244, 1935.)

Desideriamo ringraziare i colleghi Sergio Bernini, Giuseppe da Prato, Paolo Freguglia, Massimo Mugnai e gli studenti Jacopo Amidei, Carlo Behtash, Irene Binini, Gian Maria Dall'Ara, Mirko Diamanti, Costanza Larese, Rossella Marrano, Olaf Merkert, Alessandro Monti, Laura Pinato, Candia Riga, Luca San Mauro, Giulia Signorini e Andrea Strollo che hanno partecipato assiduamente alle lezioni e ai seminari da cui abbiamo tratto lo spunto per queste note. Rivolgiamo un ringraziamento particolare a Jacopo, Carlo, Irene, Mirko, Costanza, Rossella, Alessandro e Laura per aver contribuito attivamente all'attività seminariale. Ringraziamo inoltre per i loro commenti i colleghi Giuseppe Cambiano e Marcello Agostino ed ancora Camilla Colombo e Umberto Grandi.

Pisa, Settembre 2014

[7] Senza escludere che questo sia possibile, utile e ragionevole in specifiche situazioni.

Indice

CAPITOLO 1

Il problema dell'allocazione e il teorema di Arrow

Il primo problema che consideriamo è quello dell'*allocazione ottimale* a possibili consumatori di beni liberamente disponibili, cioè di come suddividere un certo numero di beni tra un certo numero di consumatori in modo da soddisfare o, almeno, da soddisfare in modo *ottimale* le loro esigenze; in altre parole, di come *aggregare* preferenze individuali in preferenze collettive.

1.1. *Beni, consumatori e preferenze individuali*

Alla formulazione precisa del problema dell'allocazione ottimale, che mostra un notevole grado di *astrazione* e quindi di *semplificazione*, premettiamo una breve discussione tesa a identificare il senso che daremo a termini come *beni*, *consumatori* e *preferenze dei consumatori*.

I beni

Consideriamo come dati primitivi i *beni* e gli *agenti economici* e, quindi, come oggetto dell'economia la loro *interazione*. Siamo in presenza di beni e di agenti se i beni vengono scambiati con transazioni a cui partecipano gli agenti: un bene economico è quindi definito dalla sua *possibilità di essere scambiato*[1].

Un oggetto o il lavoro necessario a produrlo è un bene se esistono almeno due agenti disposti a scambiarlo o che lo desiderano[2]. Il lavoro di uno schiavo non era (non è) un bene, lo schiavo era (è ancor oggi) un bene. La differenza tra un bene economico e un non bene dipende dall'istante in cui lo consideriamo. Essa dipende anche dal luogo in cui lo si contestualizza: l'acqua nella foresta amazzonica non è un bene, nel Sahara lo è; l'acqua distillata è un bene anche nella foresta amazzonica[3]. Nel senso in cui li stiamo

1 Già questa scelta non è universalmente accettata; ad esempio l'idea molto più antica che un bene abbia un suo *valore intrinseco* resta nella preferenza per l'oro. Per i marxisti il bene economico si identifica con il *lavoro umano* necessario a produrlo e, al più, acquisisce un *valore di scambio*, per cui l'atto primario dell'economia è la *produzione*.

2 Se un bene è desiderato da un solo agente chiaramente non è rilevante per il nostro problema.

3 Si noti che perché un bene sia oggetto di scambio è necessario che presenti aspetti di *rarità*, l'aria non è un bene; ovviamente lo diventa se viene resa solo parzialmente disponibile.

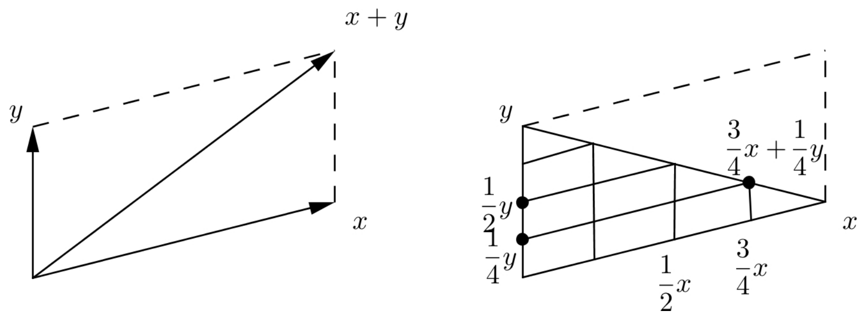

FIGURA 1. Siano x, y due vettori in $\mathbb{R}^l_+$ non sulla stessa retta per l'origine. Ricordiamo che questi si possono identificare con due punti dell'iperpiano l-dimensionale prodotto cartesiano di l copie della retta reale $\mathbb{R}$ (o della semiretta positiva, nel caso in considerazione) o come *frecce* che partono dall'origine ed hanno come altro estremo un punto di $\mathbb{R}^l_+$. Nel piano per x, y, O, individuato dai due vettori che è dato da tutte le combinazioni lineari $\gamma x + \mu y$, con $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$, la somma si fa con la *regola del parallelogramma*; il segmento che unisce x a y si ottiene sommando αx a $(1-\alpha)y$, con $\alpha \in [0,1]$.

considerando quindi *tutti i beni sono localizzati e datati*: il grano oggi a Shangai è un bene diverso del grano ieri a New York o anche a Shangai.

Inoltre, nella società che inizialmente stiamo prendendo in considerazione, tutti i beni e tutti gli agenti sono *dichiarati*, in particolare tutti hanno una *conoscenza completa dei beni disponibili*; non ammettiamo nessuna *aleatorietà*: speculazione e rischio e, in genere, aspetti finanziari e/o monetari sono esclusi in questo modello[4].

Infine, supporremo che i beni siano *misurabili*, nel senso che si può parlare di un po' più, la metà e così via di un bene; cioè, la *misura di un bene* è esprimibile con un numero razionale (e, meglio, con un *numero reale*). La cosa sembrerebbe creare problemi per i beni discreti[5]. In realtà questo non è un vero problema in molte situazioni; ad esempio, per le automobili, visto l'alto numero prodotto e l'ampia varietà, con prezzi diversi, il bene auto può quasi essere considerato un continuo come l'olio o il grano. Qualche problema ci potrebbe essere per beni individuali come una portaerei; ma in questo caso, lo stato non compra una portaerei già costruita, e sono possibili aggiustamenti sulla grandezza e qualità.

Supponiamo ora che ci siano *l beni economici* disponibili e che la *società* sia composta da *m agenti*. Un *paniere di beni* è identificato dalla scelta di una quantità x_k del bene k-esimo, per tutti i $k = 1, \ldots, l$, e si può rappresentare come una *lista* di l numeri reali su cui si opera con somma e prodotto per scalari o come un vettore dello *spazio*

4 Questo rende difficile ad esempio parlare di quantità del 'bene' grano il prossimo anno.

5 Infatti li crea; ad esempio la copresenza di beni 'discreti' e di beni 'continui' richiederebbe degli aggiustamenti.

vettoriale[6] $\mathbb{R}^l$:

$$x = (x_1, \dots, x_l)$$

con componenti x_k numeri reali non negativi. Un paniere è quindi una lista o un vettore di

$$\mathbb{R}^l_+ := \{x \in \mathbb{R}^l \quad | \quad x = (x_1, \dots, x_l), \quad x_k \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, l\}.$$

I panieri di beni si possono sommare, non si possono sottrarre, tranne casi speciali (nel presente contesto non avendo senso una quantità di bene negativa), e si possono moltiplicare solo per scalari positivi. Quando si vorranno considerare più panieri, ad esempio panieri corrispondenti ad agenti diversi, scriveremo x^i per il paniere corrispondente all'agente i e denoteremo le sue componenti con x^i_k, cioè $x^i = (x^i_1, \dots, x^i_l)$, $i = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, l$.

Se aggiungiamo ai panieri di beni il paniere vuoto (vettore nullo), l'insieme dei panieri si presenta geometricamente come un *cono*[7]. Si verifica facilmente che un cono è *convesso*[8] se e solo se tutte le volte che $x, y \in C$ si ha $x + y \in C$. Poiché i panieri si possono sommare dando luogo a panieri, una loro *combinazione convessa* è ancora un paniere, a cui ci riferiremo come ad un *paniere misto*, e, come si sa e vedremo più avanti, questi panieri sono importanti in economia.

Infine, qui facciamo anche l'ipotesi che le risorse totali $\Omega := (x_1^{max}, \dots, x_l^{max})$ siano *limitate* e, in accordo con quanto detto prima, *conosciute*, concludendo che un paniere è rappresentato da un vettore nel parallelepipedo $[0, x_1^{max}] \times \ldots \times [0, x_l^{max}]$, o in un suo sottoinsieme *convesso*.

[6] I vettori di uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ si possono sommare e sottrarre, più precisamente formano un *gruppo* (esistono elemento neutro e opposto), e si possono *rinormalizzare* moltiplicandoli per uno scalare, un numero reale nel nostro caso. Succede poi che ogni spazio vettoriale ha una *base* di vettori, $v_1, v_2, \dots, v_l$ (ma, potrebbero essere infiniti; noi considereremo solo spazi vettoriali di *dimensione finita*), di modo che ogni altro vettore si scriva in modo unico come *combinazione lineare* (finita) a coefficienti reali (gli scalari dello spazio) degli elementi della base, $v = \alpha_1 v_1, + \cdots + \alpha_l v_l$. Il numero l, che è caratteristico dello spazio in considerazione, si chiama *dimensione*: è il numero minimo di vettori dello spazio per cui ogni altro vettore si scriva come combinazione degli stessi l vettori di base. Gli spazi vettoriali sui reali di dimensione finita si possono quindi identificare con un $\mathbb{R}^l$, l'identificazione essendo data, fissata una base, da $v = \alpha_1 v_1, + \cdots + \alpha_l v_l \leftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, e la somma si effettua sommando le componenti e il prodotto per scalari moltiplicando per lo stesso scalare le componenti. Per una introduzione alle più semplici strutture matematiche si può vedere [63].

Qui è come se la base fosse costituita dai beni $v_1, \dots, v_l$ in quantità unitaria e lo spazio fosse lo spazio di tutte le quantità dei beni $v_1, \dots, v_l$. In qualche modo è prevalente l'idea di lista, ma fa comodo e, allo stesso tempo, è importante non rinunciare alla geometria dello spazio euclideo $\mathbb{R}^l$.

[7] Si dice che C è un *cono* (in uno spazio vettoriale) se vale:

$$x \in C \quad \text{allora} \quad \lambda x \in C \quad \forall \lambda \geq 0.$$

[8] Un insieme C di uno spazio vettoriale si dice *convesso* se, tutte le volte che contiene due punti x e y, contiene anche il *segmento* che li unisce; analiticamente:

$$\text{se} \quad x, y \in C \quad \text{allora} \quad \alpha x + (1 - \alpha) y \in C \quad \forall \alpha \in [0, 1],$$

dove $\alpha x + (1 - \alpha) y$, $\alpha \in [0, 1]$, si chiama appunto una *combinazione convessa* di x e y.

Consumatori e preferenze individuali

Gli agenti economici possono essere consumatori o produttori. Consideriamo inizialmente il caso in cui *gli agenti siano tutti (solamente) consumatori*. L'unico problema economico che sussiste è quindi quello di ripartire le risorse totali Ω [9]: Si vuole attribuire a ciascun agente-consumatore un paniere di beni, all'agente $i-$esimo il paniere $x^i = (x^i_1, \dots, x^i_l) \in \mathbb{R}^l_+$, in modo che esso rappresenti possibilmente i suoi desideri e in modo che

$$x^1 + \ldots + x^m = \sum_1^m x^i = \Omega,$$

cioè, senza lasciare niente di non distribuito o, in altre parole, senza sprecare niente. Per far questo, con le risorse disponibili prepariamo un paniere per ciascun agente in modo da utilizzare tutte e sole le risorse e poniamoli in riga; in questo modo otteniamo quella che si chiama una *allocazione realizzabile*. Formalmente un vettore (o lista)

$$X = (x^1, \dots, x^m) = (x^1_1, \dots, x^1_l, \dots, x^m_1, \dots, x^m_l),$$

questa volta di $(\mathbb{R}^l_+)^m$ che scriviamo $\mathbb{R}^{lm}_+$, si chiama una *allocazione*; se poi $\Omega = \sum_1^m x^i$, si dice che X è una *allocazione realizzabile*. Consideriamo poi *tutte* le allocazioni realizzabili.

Il problema diventa allora quello di trovare la *migliore* allocazione realizzabile. Ma, come confrontare le allocazioni? Si può procedere fissando delle *norme dall'esterno* o procedere secondo criteri riconosciuti dagli interessati.

Qui facciamo unaa scelta che possiamo chiamare *democratica*. Richiediamo che ciascun agente, l'agente $i-$esimo, sulla base delle sue esigenze materiali, delle sue preoccupazioni morali, delle pressioni sociali che sente o di qualunque altra sua ragione *individuale* abbia, per ogni coppia di allocazioni possibili X, Y una preferenza; scriveremo

$$X \succ_i Y, \quad Y \succ_i X, \quad X \sim_i Y,$$

rispettivamente, se l'agente i sceglie X, sceglie Y o pensa che per lui X e Y siano equivalenti. Senza regole di alcun tipo però non si va molto lontano: al sistema di preferenze di ciascun agente si richiede normalmente di essere *coerente* o *razionale*, nel senso che, se l'agente i preferisce X a Y e Y a Z allora dovrà preferire X a Z. In altre parole, in presenza di tre allocazioni X, Y, Z, se l'agente i non è indifferente, necessariamente si trova in una delle seguenti situazioni *lineari*

$$\begin{array}{ll} X \succ_i Y \succ_i Z, & X \succ_i Z \succ_i Y \\ Y \succ_i X \succ_i Z, & Y \succ_i Z \succ_i X \\ Z \succ_i X \succ_i Y, & Z \succ_i Y \succ_i X \end{array}$$

9 Successivamente aggiungeremo i produttori. L'ordine che stiamo scegliendo, però, non è indifferente. Ci stiamo ponendo nell'istante intermedio tra produzione (che ha già avuto luogo) e consumo (che è ancora da venire). È questa la posizione che assumono spesso gli uomini politici: dividere i frutti e ripartire i sacrifici.

e esclude, però, due situazioni *cicliche*, che normalmente vengono considerate paradossali[10]

$$X \succ Y \succ Z \succ X, \quad Y \succ X \succ Z \succ Y.$$

Fatta questa scelta, conviene operare con il simbolo $\succcurlyeq_i$: $X \succcurlyeq_i Y$ significa che i preferisce l'allocazione X a Y se sceglie X o se la scelta è per lui indifferente. Ovviamente:

$$X \succcurlyeq_i Y \quad \text{se e solo se} \quad X \succ_i Y \quad \text{o} \quad X \sim_i Y$$

$$X \sim_i Y \quad \text{se e sole se} \quad X \succcurlyeq_i Y \quad \text{e} \quad Y \succcurlyeq_i X$$

e

$$X \sim_i X \quad \forall X \in \mathbb{R}_+^{lm}.$$

Si assume allora che la *relazione di preferenza* dell'agente i sia un *preordine totale* (detto anche un *ordine* o un *ordine completo*). Ricordiamo che un *ordine* o preordine è una *relazione binaria*[11] $\succcurlyeq$, definita in $\mathbb{R}_+^{lm}$, che sia

- *riflessiva*: $X \succcurlyeq X \quad \forall X \in \mathbb{R}_+^{lm}$,
- *antisimmetrica*: se $X \succcurlyeq Y$ e $Y \succcurlyeq X$, allora $X \sim Y$,
- *transitiva*: se $X \succcurlyeq Y$ e $Y \succcurlyeq Z$ allora $X \succcurlyeq Z$;

l'ordine si dice poi *completo* o *totale* se

- *completezza*: l'ordine è definito su tutto, cioè se per ogni coppia (X,Y) vale una delle alternative $X \succcurlyeq Y$ o $Y \succcurlyeq X$ e, più precisamente una e una sola delle alternative $X \succ Y, X \prec Y, X \sim Y$.

Osserviamo infine che il modello permette all'agente i di essere completamente libero nelle sue scelte (modulo la *coerenza*, identificata nella *transitività* della scelta o nell'*assenza di ciclicità*), di poter essere influenzato dalle scelte degli altri, ma non dai *motivi* delle scelte degli altri. In particolare, l'agente i può pensare "sono contento che gli altri abbiano quanto me", ma non che "gli altri siano contenti della scelta quanto me"; sono quindi escluse le regole che la società impone ai suoi membri o le mode: ogni agente ha deciso isolatamente, e quando verranno in contatto più agenti comincerà un complesso processo di negoziazione, che andrà ulteriormente analizzato.

[10] Messe in evidenza da Condorcet [39], che in questo caso parla di *sistema incoerente*, e discusse anche da Borda [27].

Di una persona che affermi di preferire X a Y e Y a Z, ma Z a X normalmente si dice che è un po' confusa o non razionale, anche se l'affermazione potrebbe avere una sua ragionevolezza in un ambiente di cose che si somigliano o che sono difficilmente classificabili in modo 'quantitativo'.

Nella vita comune possiamo trovare non strano che qualcuno alle uova sode preferisca quelle in padella e, a quelle in padella, le uova alla coque ma le uova sode alle uova alla coque o che una persona preferisca andare a cena con B piuttosto che con A, con C piuttosto che con B, ma con A piuttosto che con C.

Osserviamo infine che nessuna situazione ciclica può verificarsi in presenza di due soli beni.

[11] Una *relazione binaria* R su un insieme E è un sottoinsieme di $E \times E$: si dice che x è in relazione con y, xRy, se la coppia ordinata (x,y) appartiene a R. Discuteremo nel Capitolo 4 alcune ragioni per la scelta di questa formalizzazione.

1.2. *Preferenze collettive e teorema di Arrow*

Mettendo ipoteticamente gli agenti davanti ad un insime di alternative abbiamo immaginato o determinato le preferenze individuali o, più formalmente, identificato che cosa intendere per *preferenze* o *ordine individuale*. Il problema è che è difficile soddisfare le preferenze di tutti, in particolare se ciascuno vuole tutto per sé: si tratta allora di trovare il *miglior* compromesso possibile. Appare naturale procedere per la società come per gli individui, cercando una *relazione di preferenza collettiva*, $\succcurlyeq_S$, sull'insieme delle allocazioni realizzabili che indichiamo con $\mathscr{R}$

$$\mathscr{R} = \Big\{ X = (x^1, \ldots, x^m) \in \mathbb{R}_+^{lm} \quad | \quad \sum_{i=1}^{m} x^i = \Omega \quad \text{e} \quad x^i = (x_1^i, \ldots, x_l^i) \Big\}.$$

Preferenze collettive

Cominciamo allora col domandare alla società quale tra due allocazioni realizzabili preferisce. Per far questo dovremo preliminarmente imporre dei vincoli ancora una volta sulla relazione di ordine collettiva; come per l'ordine individuale, sembra *razionale* richiedere:

(A.1) *La relazione deve essere totale*: Date due allocazioni $X, Y \in \mathscr{R}$, la società è sempre capace di scegliere una delle due o dichiararsi indifferente; non è ammesso che essa si *astenga dalla scelta* e non si arrivi a niente.

(A.2) *La relazione deve essere transitiva*: Date tre allocazioni X, Y, Z la società è sempre in grado di metterle in ordine e non devono apparire cicli.

Conveniamo quindi che *la relazione d'ordine collettiva dovrà essere un preordine totale*, esattamente come nel caso delle relazioni d'ordine individuali[12]. Attenzione però: mentre nel caso delle preferenze individuali c'era un'ipotesi da constatare (l'agente i ha fatto la scelta $\succcurlyeq_i$), nel caso collettivo c'è da *costruzire* un ordine. Si tratta cioè di trovare una *regola* o *relazione funzionale* P che determini un preordine totale $\succcurlyeq_S$ su $\mathscr{R}$ a partire dagli m preordini individuali $\succcurlyeq_i$, vogliamo[13] cioè una

(A.3) *Regola per determinare l'ordine collettivo*: La relazione di preferenza collettiva è determinata da una regola funzionale

$$\succcurlyeq_S = P(\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_m).$$

[12] Avendo scelto la razionalità (o coerenza) come unica limitazione per le scelte di preferenza individuali, questo ci appare anche come richiesta naturale (razionale) per le preferenze collettive: gli stessi criteri validi per l'individuo valgono per la società.

Osserviamo che in etica o in politica le cose non stanno esattemente così: fin da Machiavelli abbiamo imparato, almeno nel contesto storico, che le regole etiche del principe o dello Stato non sono e non possono coincidere con quelle dei singoli, *realpolitic* e superiori interessi dello stato, o, brutalmente, il fine giustifica i mezzi non è moralmente accettabile come regola individuale ma è una regola accettata e spesso necessaria quando riferita allo Stato.

[13] Si noti che la richiesta di *funzionalità*, che sicuramente appare come e per molti aspetti è una scelta razionale, porta con sé notevoli vincoli.

Ci sarà ancora una volta da imporre a P delle condizioni di coerenza o razionalità (accettabili):

(A.4) *Assioma dell'unanimità o principio di Pareto*[14]: Se tutti preferiscono X a Y, allora la società preferirà X a Y:

$$X \succcurlyeq_i Y \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad X \succcurlyeq_S Y.$$

(A.5) *Assioma di indipendenza*: Per confrontare X e Y la società ignora ogni altra allocazione, la sola cosa che importa è sapere chi preferisce X e chi Y. Formalmente, se $\succcurlyeq_i$ e $\succsim_i$ sono due famiglie di preordini, $i = 1, \dots, m$, $\succcurlyeq_S := P(\succcurlyeq_1, \dots, \succcurlyeq_m)$ e $\succsim_S := P(\succsim_1, \dots, \succsim_m)$ e X e Y sono due allocazioni realizzabili, allora

$$[X \succcurlyeq_i Y \Leftrightarrow X \succsim_i Y \quad \forall i] \quad \Leftrightarrow \quad [X \succcurlyeq_S Y \Leftrightarrow X \succsim_S Y].$$

L'assioma dell'unanimità sembra indiscutibile, almeno nel contesto economico in cui siamo, ma, come vedremo, può diventarlo nel contesto sociale. L'assioma dell'indipendenza è più delicato ed anche più contestato. Si potrebbe contestare che, per decidere fra X e Y, non sia una perdita di tempo far intervenire Z, ma sicuramente questa possibilità configura un contesto diverso poiché fa intervenire fattori *sociali* al di là della *scelta individuale*.

A questo punto passiamo a discutere alcuni esempi di possibili regole per determinare la scelta collettiva.

Regola maggioritaria. Per decidere la preferenza tra X e Y basta fare votare gli agenti, astensione significando indifferenza. Chi prende più voti vince, se c'è eguaglianza la società si dichiara indifferente. Semplice e seducente! Qualcuno direbbe è la base della nostra vita democratica. Purtroppo, la relazione di preferenza così definita non è transitiva[15].

Ad esempio se una commissione di tre membri (1, 2, 3) esprime le sue preferenze su tre candidati (A, B, C) come

$$A \succ_1 B \succ_1 C$$
$$B \succ_2 C \succ_2 A$$
$$C \succ_3 A \succ_3 B$$

e contiamo i voti, troviamo: a maggioranza di due voti su tre, A vince su B, C su A, B su C. Siamo nella situazione ciclica che abbiamo già discusso e che si vuole evitare. In questo contesto questo si chiama *paradosso di Condorcet*. La regola maggioritaria, non essendo transitiva, non è dunque una buona regola per determinare la scelta collettiva[16].

[14] Perché originatosi nella tradizione paretiana.

[15] Inoltre, in questa situazione la maggioranza potrebbe liberamente spartirsi i beni della minoranza. Il punto è che la *democrazia* non è solo un sistema di voto ma anche di *diritti* o già regolati da leggi o come aspirazione, come ad esempio il diritto al rispetto della minoranza.

[16] Osserviamo che fare delle scelte successive, ad esempio, confrontare A con B e il vincitore con C non migliorerebbe la cosa: le scelte infatti dipenderebbero dall'ordine con cui si fanno. Questo tipo di procedure si prestano quindi a manipolazioni (tipico è il voto strategico, si vota non secondo coscienza ma contro).

Regola maggioritaria con pesi. Si decide a maggioranza, ma assegnando anche un peso[17] che prenda in considerazione l'intensità di preferenza[18]. Questa regola fu introdotta da Borda e discussa negli stessi anni del paradosso di Condorcet; illustriamo la situazione con un esempio specifico. Ciascun membro della commissione dà il suo ordine di preferenza dei candidati (viene quindi rispettata la libertà individuale). Quindi, assegna 1 al primo, 2 al secondo, n all'n-simo (dove, osserviamo, l'assegnazione dei punteggi richiede un intervento esterno della società). Si calcola alla fine il totale dei punti e si classificano i candidati in modo decrescente rispetto al crescere dei punti. Questa volta la condizione è transitiva, siamo quindi in presenza di una regola di scelta (di preferenza) collettiva, ma *non* è soddisfatto l'assioma di indipendenza.

Consideriamo, ad esempio, il caso di cinque candidati, (A, B, C, D, E) e sempre tre commissari, che si esprimono come segue:

$$\begin{gathered} A \succcurlyeq_1 B \succcurlyeq_1 C \succcurlyeq_1 D \succcurlyeq_1 E \\ A \succcurlyeq_2 B \succcurlyeq_2 C \succcurlyeq_2 D \succcurlyeq_2 E \\ C \succcurlyeq_3 D \succcurlyeq_3 E \succcurlyeq_3 A \succcurlyeq_3 B \end{gathered}$$

Questo dà 6 punti al vincitore A, seguito da C con 7 punti. In particolare il candidato B, che è battuto da A in tutte le prove, non ha nessuna possibilità di vincere e può pensare che non valga la pena darsi da fare. Se, però, egli si ritira o sabota la sua partecipazione, la classifica parziale diventa:

$$\begin{gathered} A \succcurlyeq_1 C \succcurlyeq_1 D \succcurlyeq_1 E \succcurlyeq_1 B \\ A \succcurlyeq_2 C \succcurlyeq_2 D \succcurlyeq_2 E \succcurlyeq_2 B \\ C \succcurlyeq_3 D \succcurlyeq_3 E \succcurlyeq_3 A \succcurlyeq_3 B \end{gathered}$$

e la classifica generale dà C come vincitore con 5 punti seguito da A con 6 punti: in questo modo, facendosi battere, B decreta la vittoria di C.

La regola dittatoriale. L'ultimo esempio che consideriamo è quello più lontano dalla democrazia: l'agente i determina unilateralmente la preferenza dell'intera società. La relazione di preferenza collettiva $\succcurlyeq_S$ coincide con $\succcurlyeq_i$:

$$P(\succcurlyeq_1, \ldots, \succcurlyeq_m) = \succcurlyeq_i .$$

Si tratta chiaramente di un preordine totale per cui tutti gli assiomi della preferenza collettiva sono soddisfatti. Certo si può dire che è un caso estremo ma, come il seguente *teorema di Arrow*[19] mostra, è il solo caso possibile!

[17] Osserviamo subito che ciò si configura come una *norma* esterna alla scelta individuale, imposta dalla società o da parte di essa.

[18] Ovviamente persistono le difficoltà sociologiche (come confrontare le scelte), come pure quelle psicologiche individuali, ma soprattutto permangono quelle logiche: pesi diversi portano a risultati diversi.

[19] Si veda [5] [157] [162].

1.1. TEOREMA (*Arrow*). *Le m regole dittatoriali associate agli m agenti sono le sole regole di determinazione di scelte collettive che verificano l'assioma dell'unanimità e l'assioma dell'indipendenza.*

È possibile enunciare questo teorema in molti altri modi.

Introduciamo la seguente condizione per la determinazione delle scelte collettive:

(A.6) *P non è dittatoriale.*

Allora il teorema di Arrow diventa un teorema di impossibilità:

1.2. TEOREMA (*Arrow*). *Le condizioni* (A.1), (A.2), (A.3), (A.4), (A.5), (A.6) *sono incompatibili.*

Se le sei condizioni (A.1) ... (A.6) sono incompatibili e cinque sono verificate è chiaro che l'ultima non lo è. Se (A.1), (A.2), (A.3), (A.4), (A.5) sono verificate, (A.6) non può valere: dal Teorema 1.2 segue il Teorema 1.1. Ma ricaviamo anche:

1.3. TEOREMA (*Arrow*). *Sia P una regola di scelta collettiva non dittatoriale che verifica l'assioma dell'unanimità. Allora P non verifica l'assioma dell'indipendenza.*

In altre parole si possono trovare due allocazioni X e Y realizzabili e due società distinte di m membri, che applicano la stessa regola P e arrivano al seguente 'paradosso': le preferenze individuali sono le stesse, cioè, gli individui $i-$esimi delle due società pongono X e Y nello stesso modo, ma le preferenze collettive sono diverse (per l'una X è davanti, per l'altra dietro); vedremo più avanti un esempio specifico di Arrow. Ripetiamo, sempre che si insista nel volere che non vi siano interventi esterni alle decisione individuali, da parte della società o di coalizioni di membri della società. Vale la pena osservare che la realtà non è però fatta da agenti assolutamente egocentrici, gli agenti tendono ad adattarsi naturalmente alle richieste degli uni agli altri[20].

Il teorema di Arrow

Il preordine di preferenza individuale esprime in modo molto imperfetto, ad esempio, l'intensità delle preferenze individuali. Sarà possibile costruire un mezzo più adeguato per esprimere che X precede o segue Y? Prima di passare a discutere ciò (cosa che faremo a più riprese nel seguito), vogliamo aggiungere alcune considerazioni sul teorema di Arrow e presentare la dimostrazione di A.K. Sen [162] [166] che può esser vista come una variante più semplice e allo stesso tempo illuminante della dimostrazione di Arrow in [5].

[20] In effetti, due società potrebbero avere le stesse preferenze, ma regole *funzionali diverse* che distinguerebbero globalmente le due società. Il fatto è che nel contesto che stiamo analizzando non ammettiamo interventi globali, o comunque esterni agli individui, quali etiche sociali o culture sociali diverse che distinguano le due società.

Ma, sotto queste ipotesi di razionalità così forti e senza che nient'altro possa intervenire non c'è una naturale tendenza alla conformità di opinioni e di preferenze? È come se ogni dittatore catturi uno degli insiemi di preferenze razionali che si possano aggregare da preferenze di individui razionali.

Quanto fatto fino ad ora può essere riformulato in termini di *razionalità nelle decisioni sociali*, e questo era il punto di vista iniziale di Arrow. L'assunto di fondo, catturato dalla relazione funzionale (A.3), è che la razionalità sociale debba *fondamentalmente* dipendere dalla *razionalità individuale.* Si può obiettare che ci sono diverse concezioni del comportamento razionale degli individui, anche se le richieste fatte sembrano proprio minimali. L'assunto che fino ad ora abbiamo seguito è quello dell'*uomo economico* che persegue l'ottimizzazione del proprio interesse[21]. Ma, anche se molto parzialmente, il teorema di Arrow permette che le preferenze individuali possano riflettere *valori* in generale, escludendo comunque interazione nel loro sviluppo[22].

In termini generali il problema di scelta sociale è quello di definire una relazione funzionale, che Arrow chiama la *funzione di benessere sociale* (*social welfare function*), che specifichi l'ordine di tutti gli *stati sociali* (prima *allocazioni*) in dipendenza degli ordini di preferenze individuali[23]. Si richiede quindi che la funzione di benessere sociale soddisfi le seguenti proprietà:

- *dominio universale*: la funzione dia un ordine sociale per ogni possibile combinazione di preferenze individuali;
- *indipendenza dalle alternative irrilevanti*: l'ordine sociale della coppia di stati (X,Y) deve dipendere solo da questa coppia e non da come le altre coppie (che sono appunto irrilevanti) sono state ordinate;
- *nondittatorietà*: nessun individuo può decidere per l'intera società;
- *unanimità o principio di Pareto*: la coalizione di tutti gli individui è decisiva, cioè, se tutti preferiscono X a Y allora la società preferisce X a Y.

Il risultato è allora il *teorema di impossibilità di Arrow*: *in queste condizioni non è possibile trovare una funzione di benessere sociale*.

Appare ovvia la necessità di uscire da questo contesto di impossibilità; certo si possono indebolire le richieste sulle *proprietà interne* della funzione di benessere sociale, ma il teorema di impossibilità è piuttosto *robusto* e, come dice Sen, [166] p. 8, tentare di produrre funzioni di benessere sociale *senza* usare alcun confronto interpersonale delle

21 Nella nostra astrazione razionale abbiamo assunto che gli individui siano del tutto ininfluenzati da questioni, necessariamente di carattere etico-politico-sociali, quali 'quale sia il *bene* dell'individuo' o 'come bisogna vivere' e che, comunque, le risposte ad esse legate si possano facilmente tradurre in scelte di *utilità individuale*, si veda il Capitolo 3. Come dice Sen, [168] p. 8:

> [...] sorprendente è il contrasto tra il carattere consapevolmente 'non etico' dell'economia moderna e l'evoluzione storica di questa disciplina in gran parte quale derivativo dell'etica. È avvenuto che non solo il cosiddetto 'padre dell'economia moderna', Adam Smith, fosse professore di Filosofia Morale all'Università di Glasgow (una città, bisogna ammetterlo, alquanto pragmatica) ma anche che la materia dell'economia sia stata considerata a lungo una specie di branca dell'etica. Il fatto che fino a poco tempo fa a Cambridge l'economia fosse insegnata semplicemente nell'ambito del corso di 'Scienza Morale' non è che un esempio della diagnosi tradizionale sulla natura dell'economia.

22 Come dice Arrow "in questo studio assumiamo che i valori individuali siano presi come dati e non possano essere alterati dalla natura del processo di decisione".Vale la pena osservare che nell'idea di democrazia i valori individuali possono cambiare ed anzi cambiano nel processo di decisione attraverso il confronto.

23 Si assume che ci siano almeno tre stati sociali distinti e almeno due, ma non infiniti, individui.

utilità e *senza* usare alcuna informazione di tipo non utilitarista (via un meccanismo funzionale) non appare essere un'impresa fruttuosa[24].

La rilettura di A. Sen, si veda [162] [166], della dimostrazione del teorema di Arrow mette in evidenza la rilevanza dell'assioma di indipendenza. Essa procede in tre passi: i primi due passi sono due lemmi che Sen chiama rispettivamente *Field-expansion lemma* e *Group-contraction lemma*, il terzo è una semplice applicazione dell'*argomento della discesa finita* di Fermat.

Conviene introdurre la nozione di *coalizione*. Indichiamo con S l'insieme degli m agenti (cosa che abbiamo sottinteso fino ad ora). Un qualunque sottoinsieme C di S si dice una *coalizione*; diciamo che *una coalizione A è decisiva per X contro Y*, o *decisiva per la coppia* (X,Y), dove X,Y sono due stati (allocazioni) realizzabili, se la società sceglie X quando tutti i membri di A scelgono X e tutti gli altri scelgono Y, cioè quando

$$[\forall i \in A \quad X \succcurlyeq_i Y \quad \text{e} \quad \forall j \in S \setminus A \quad Y \succcurlyeq_j X] \Rightarrow X \succcurlyeq_S Y.$$

Diciamo che una *coalizione è decisiva* se, prese comunque due stati (allocazioni) realizzabili X e Y, essa è decisiva per X contro Y.

1.4. LEMMA (*di estensione del campo*). *Se una coalizione C è decisiva per una qualche coppia (X,Y), allora è decisiva.*

DIMOSTRAZIONE. Riportiamo la dimostrazione di [166]. Consideriamo due coppie (X,Y) e (A,B) di stati sociali distinti (se non sono distinti si procede in modo simile). Supponendo che la coalizione C sia decisiva su (X,Y), vogliamo dimostrare che è decisiva anche su (A,B). Mettiamoci nella situazione in cui ogni individuo in C preferisca A a X, X a Y e Y a B, $A \succcurlyeq X \succcurlyeq Y \succcurlyeq B$ per tutti gli individui di C, mentre tutti gli altri preferiscono A a X e Y a B (per tutti gli individui di $S \setminus C$ vale $A \succcurlyeq X$ e $Y \succcurlyeq B$) e sono liberi di ordinare tutte le altre coppie come vogliono. In questa situazione la coalizione C, e quindi tutti, non possono che preferire X a Y; per il principio dell'unanimità A è preferito a X e Y a B. Per la transitività, infine, A è preferito a B. Se ora questo risultato fosse influenzato da preferenze individuali differenti da quelle sulla coppia (A,B), sarebbe stato violato il principio di indipendenza. Conseguentemente, A deve essere preferito a B semplicemente perché tutti in C preferivano A a B, visto che gli altri in $S \setminus C$ potevano avere qualunque preferenza su questa coppia. In conclusione, C è decisiva su (A,B). □

1.5. LEMMA (*di contrazione delle coalizioni*). *Se una coalizione C, costituita da più di un individuo, è decisiva, allora è decisiva anche una sottocoalizione di C costituita da un numero strettamente minore di individui.*

DIMOSTRAZIONE. Sia C una coalizione decisiva; consideriamo una sua partizione C_1 e C_2 (in sottocoalizioni non vuote). Supponiamo che gli individui di C_1 preferiscano X a Y e X a Z, mentre sono liberi di esprimersi sulla coppia (Y,Z). Supponiamo che gli individui in C_2 preferiscano X a Y ma Z a X, restando sempre liberi di scegliere tra X e Z. Fuori da C gli individui sono liberi di fissare le loro preferenze. Se socialmente X

[24] Per una discussione di questi aspetti, su cui ritorneremo, si veda [165] [166] e [159].

fosse preferito a Z, i membri di C_1 sarebbero decisivi su questa coppia (poiché loro preferiscono X a Z mentre gli altri sono liberi di esprimersi su questa coppia), e avremmo finito. Se invece C_1 non è decisiva, allora Z è socialmente classificato meglio o almeno uguale a X. Combiniamo questo con la preferenza sociale di X a Y (conseguenza del fatto che C è decisiva), per la transitività, troviamo che Z è socialmente preferito a Y. Ma i membri di C_2 preferiscono Z a Y, quindi C_2 è decisiva su (Z,Y) e, dal lemma precedente, segue che C_2 è decisiva. □

Per concludere la dimostrazione del teorema di Arrow basta ora applicare l'argomento della discesa finita: la coalizione di tutti gli individui è decisiva, una sua sottocoalizione D_1 stretta è allora decisiva, ma anche una sottocoalizione stretta di D_1 è decisiva. Dopo un numero finito di passi si trova che la coalizione fatta da un solo individuo è decisiva.

La rilettura di Sen mostra chiaramente che il vero problema è il *lemma di estensione del campo*: essere decisivi per *una qualche* coppia implica essere decisivi per *ogni* coppia, indipendentemente dagli stati coinvolti. Vediamo una conseguenza di tipo *sociale* di questo.

1.6. ESEMPIO (*Sen*). Consideriamo le tre divisioni di una torta tra due persone: (99,1), (50, 50) e (1, 99). Assumiamo che ciascuno, da buon *uomo economico* preferisca la porzione più grossa per sé e quindi i due abbiano preferenze opposte. Consideriamo le preferenze sulle coppie (99, 1) e (50, 50). Se si decidesse che (50, 50) è meglio per la società, allora le preferenze della seconda persona avrebbero priorità sulle preferenze della prima persona. Il (o una variante del) lemma di estensione del campo direbbe allora che le preferenze della seconda persona sono prioritarie su tutte le altre coppie, di modo che anche (1, 99) deve essere preferita a (50, 50). Date le ipotesi, non è possibile considerare (50, 50) come la migliore delle tre: noi possiamo dare priorità o alla prima o alla seconda persona. Il punto qui è non che non si scelga (50, 50), ma che *non ci è neanche permesso* considerare questa come una possibile miglior scelta.

Ritornando alla robustezza dei teoremi di impossibilità, ad esempio Sen dimostra [158] che, assumendo che il dominio sia universale, valga il principio di Pareto, rinunciando alla transitività della funzione di benessere sociale e all'assioma di indipendenza, ma aggiungendo quello che lui chiama l'assioma di *liberalismo Paretiano* (ci sono almeno due individui ciascuno dei quali è decisivo per almeno una coppia di alternative), non c'è nessuna funzione di scelta collettiva o di benessere sociale (ripetiamo, anche non transitiva). Sen interpreta il tipo di inconsistenza che si incontra tramite il seguente esempio.

1.7. ESEMPIO (*Sen*). Il contesto: due persone, Mr. 1 e Mr. 2, e un romanzo, *L'amante di Lady Chatterley*. Gli stati sociali sono

- $x :=$ Mr. 1 legge *Lady Chatterley*,
- $y :=$ Mr. 2 legge *Lady Chatterley*,
- $z :=$ nessuno legge *Lady Chatterley*.

Le scelte individuali:

- Mr 1, che è un moralista, preferisce che nessuno legga *Lady Chatterley*, se qualcuno lo deve leggere che sia lui piuttosto che esporre l'ingenuo Mr. 2[25]. Quindi le preferenze di Mr. 1 sono:
$$z \succ x \succ y.$$
- Mr. 2 preferisce che entrambi possano leggere *Lady Chatterley* piuttosto che nessuno, ma trova divertente che sia Mr. 1 a leggerlo piuttosto che lui stesso e pone per ultima la scelta che nessuno possa leggerlo. Il suo ordine di preferenze è quindi
$$x \succ y \succ z.$$

Veniamo alla scelta di preferenza della società tra x e z (legge *Lady Chatterly* Mr. 1 o nessuno). Una persona o una società con valori liberali potrebbe argomentare

- Mr. 1 preferisce non leggerlo, quindi non dovrebbe essere forzato; la società dovrebbe quindi concludere con $z \succ x$.
- Mr. 2 vuole leggerlo, quindi gli deve esser permesso, $y \succ z$.

In termini di valori liberali è quindi meglio che nessuno lo legga piuttosto che Mr. 1 sia forzato a leggerlo e che lo legga Mr. 2 piuttosto che nessuno
$$y \succ z \succ x.$$
Ma, per il principio di Pareto: $x \succ y$.

Ad analoghe situazioni inconsistenti si arriva partendo dalle altre coppie.

La morale è che il principio di Pareto confligge con i valori liberali e che la garanzia per i valori liberali, più che su regole di scelta sociali 'razionali', stia nello formare individui che rispettino ciascuno i valori degli altri.

Quanto abbiamo visto in questo capitolo ci pone già una serie di questioni che appaiono piuttosto rilevanti. Insistendo su un approccio razionale, prevalentemente logico-matematico, pone il problema di come superare l'impasse del teorema di Arrow e, forse, chiede anche un'analisi più precisa degli stessi fondamenti della razionalità[26].

Ancora, pone la questione generale se sia sensato affrontare il problema della predizione (o della modellizazione) del comportamento effettivo in termini di *pura razionalità*. Le persone si comportano effettivamente in modo razionale? D'altro canto, rinunciare alla razionalità non porta per caso ad errori ancor più gravi e/o all'impossibilità di ogni analisi? Comunque un'analisi razionale nella sua astrazione sicuramente porterà, come del resto abbiamo già visto, ad una migliore comprensione della situazione o dei limiti delle ipotesi che si fanno.

Restando nell'ambito puramente economico, una persona può assegnare valore alla promozione di certe cause e al verificarsi di certe cose, anche se l'importanza riconosciuta ai successi in queste materie non si riflette nell'avanzamento del suo benessere personale: si possono avanzare dubbi che il benessere personale sia da considerare e possa essere misurato solo in termini di utilità. Inoltre, l'accettazione morale dei *diritti*

[25] Sen commenta: mi dicono che i moralisti preferiscono censurare piuttosto che essere censurati.
[26] Si vedano in particolare il Capitolo 2, il Capitolo 4, il Capitolo 10 e [159].

può richiedere un sistematico allontanamento dal comportamento mosso dall'interesse personale. Le scelte etiche e, più in generale, culturali non sembrano essere prive di rilievo per il comportamento umano effettivo: il 'bene' non sembra arrestarsi alla valutazione dell'efficienza e della coerenza[27].

[27] Ad esempio, l'utilità di un bene dipende sicuramente dal contesto e da ciò che il bene stesso permette di ottenere in termini di procedure e risultati. Ritorneremo su questo nel seguito ma, per maggiori informazioni, il lettore può vedere [159] [168] [170].

CAPITOLO 2

Un punto di vista logico: aggregazione razionale dei giudizi

Il modello[1] astratto che abbiamo discusso nel capitolo precedente, e in particolare le conseguenze matematiche che ne abbiamo tratto, dipendono dalla scelta, che abbiamo sottoscritto, di considerare le interazioni tra agenti razionali motivate unicamente dal soddisfacimento dei desideri degli agenti. Si tratta però di scelte che nascondono insidie concettuali e metodologiche di cui cercheremo di render conto, almeno in parte.

In particolare, ci soffermeremo sull'identificazione che abbiamo fatto in modo implicito dei concetti di *razionalità economica* e *coerenza*. La precisazione è necessaria dal momento che, almeno a prima vista, la massimizzazione dell'interesse individuale appare concettualmente distante dall'idea di non-contraddizione che sottende la logica classica. Ritorneremo sull'argomento nel Capitolo 4 quando metteremo a confronto la caratterizzazione logica e quella economica di razionalità.

In questo capitolo illustreremo indirettamente la fecondità metodologica di questa identificazione attraverso l'analisi logica dei *paradossi di aggregazione dei giudizi*, di cui il teorema di Arrow risulta un caso specifico. La nostra analisi seguirà da vicino la *teoria logica dell'aggregazione* elaborata, tra gli altri da Franz Dietrich, Christian List e Philippe Mongin[2].

2.1. *Un po' di logica proposizionale elementare*

Siamo interessati ai giudizi in quanto espressioni linguistiche dotate di un significato assertorio. Consideriamo i casi seguenti

(1) La Scuola Normale Superiore è a Pisa
(2) La Scuola Normale Superiore è a Milano
(3) Dov'è la Scuola Normale Superiore?
(4) L'allenatore della Scuola Normale Superiore è vegetariano

[1] La parola "modello" è usata qui come nel resto del volume in modo colloquiale. Se da una parte non crediamo che le astrazioni matematiche in economia siano sempre da prendere come modelli dell'economia reale nel senso dei modelli fisici o delle simulazioni computazionali, dall'altro riteniamo che lo sviluppo di modelli astratti di economia, come quello illustrato ad esempio nel capitolo precedente, dica solitamente qualcosa di rilevante dal punto di vista economico. Nel seguito ritorneremo a più riprese su questo punto.

[2] Si veda ad esempio [46] [106] [107] [107] [108] [122] e la loro bibliografia.

Non è difficile convincerci del fatto che (1) e (2) esprimano giudizi intuitivamente sensati. Altra cosa è considerare (1) *vero* e (2) *falso*. Quel che conta – per ora – è che siano sensati. (3) è un'espressione dotata di un senso chiaro, ma certamente non corrisponde a un giudizio assertorio nel senso di (1) e (2). Il caso (4) è più complicato perché non è immediatamente chiaro se l'espressione abbia un significato assertorio oppure no.

La logica matematica, così come la concepiamo oggi, comincia con la formalizzazione del linguaggio. Lo scopo della formalizzazione è in primo luogo quello di eliminare ambiguità di questo genere sul dominio del discorso. La formulazione classica dei paradossi, per esempio quella di Arrow, è fornita nel linguaggio della teoria degli insiemi elementare e le alternative sociali non sono che liste (profili) di preferenze individuali sullo stesso insieme di alternative. Ogni alternativa è un punto nell'insieme delle alternative, e quindi è logicamente indipendente da ogni altro punto dell'insieme. La formulazione logica dei paradossi dell'aggregazione razionale ci permetterà quindi, in primo luogo, di analizzare *la struttura logica delle alternative sociali*.

2.1.1. *Linguaggio e semantica*

Cominciamo col definire il senso da dare a un linguaggio e la semantica dei connettivi.

Linguaggio

Un *linguaggio* $\mathscr{L}$ è un insieme non vuoto di lettere dette *variabili proposizionali* che indichiamo con lettere minuscole dell'alfabeto p, q, r eccetera. Per i nostri scopi sarà sufficiente considerare un numero *finito* di variabili proposizionali e quindi linguaggi di cardinalità finita. A meno di dichiarazioni esplicite del contrario assumeremo dunque che

$$\mathscr{L} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}.$$

Le variabili proposizionali in $\mathscr{L}$ costituiscono le più semplici entità linguistiche su cui ha senso esprimere un giudizio – chiedersi cioè se siano vere o false.

Una caratteristica che rende la logica particolarmente utile all'analisi delle condizioni di coerenza sull'aggregazione dei giudizi consiste nella ricchezza delle sue proprietà algebriche. Questo ci permette di costruire oggetti di giudizio 'complessi' a partire dalle variabili proposizionali mediante l'opportuna applicazione dei *connettivi proposizionali*

$$\mathscr{C} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\},$$

dove

- $\neg$ denota la negazione (che leggiamo "non")
- $\wedge$ denota la congiunzione (che leggiamo "e")
- $\vee$ denota la disgiunzione (che leggiamo "o")
- $\rightarrow$ denota l'implicazione (che leggiamo "implica").

A partire dal linguaggio (finito) $\mathscr{L}$ è possibile costruire *per induzione* l'insieme *infinito* degli *enunciati di* $\mathscr{L}$. La costruzione si condensa nella seguente definizione.

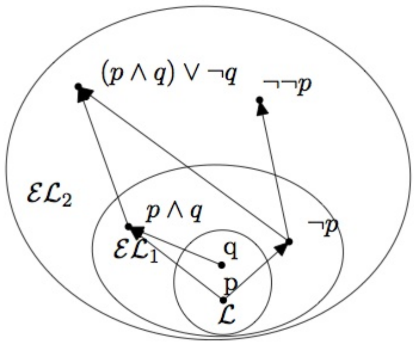

FIGURA 1. Possiamo immaginare l'insieme di enunciati come una catena di insiemi che si estende a partire da $\mathscr{L}$. Abbiamo due modi per passare al livello immediatamente successivo. Possiamo prendere un $p \in \mathscr{E}\mathscr{L}_0$ e applicargli una volta la negazione. Il risultato $\neg p$ apparterrà al 'cerchio' $\mathscr{E}\mathscr{L}_1$. Alternativamente avremmo potuto prendere *due* variabili proposizionali in $\mathscr{L}$, per esempio p, q e mediante un'applicazione di uno qualsiasi dei connettivi binari, avremmo ottenuto un enunciato in $\mathscr{E}\mathscr{L}_1$, diciamo $(p \wedge q)$. E così via ...

2.1. DEFINIZIONE (*Enunciati di* $\mathscr{L}$). Fissato il linguaggio proposizionale $\mathscr{L}$ possiamo definire ricorsivamente l'insieme $\mathscr{E}\mathscr{L}$ degli *enunciati del linguaggio* $\mathscr{L}$ utilizzando i connettivi in $\mathscr{C}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}\mathscr{L}_0 &= \mathscr{L} \\
\mathscr{E}\mathscr{L}_{n+1} &= \mathscr{E}\mathscr{L}_n \cup \{\neg\theta, (\theta * \phi) \mid \theta, \phi \in \mathscr{E}\mathscr{L}_n, * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}\} \\
\mathscr{E}\mathscr{L} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{E}\mathscr{L}_n.
\end{aligned}$$

2.2. ESEMPIO. Supponiamo che $p, q \in \mathscr{L}$ e p stia per "l'imputato ha violato il contratto", mentre q stia per "il contratto è valido". Possiamo rappresentare l'enunciato

"l'imputato ha violato il contratto *e* il contratto *non* è valido"

mediante l'enunciato

$$\theta = (p \wedge \neg q),$$

dove $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}_2$.

Nel seguito useremo lettere greche minuscole θ, ϕ, ψ, ecc. per gli elementi di $\mathscr{E}\mathscr{L}$, mentre useremo le maiuscole Γ, Δ, Ω per i sottoinsiemi di $\mathscr{E}\mathscr{L}$. Quindi $\theta, \phi \in \mathscr{E}\mathscr{L}$ e $\Gamma := \{\theta, \phi\} \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$. Per alleggerire la notazione si adotta usualmente la convenzione di trascurare le parentesi esterne dalla notazione degli enunciati. Invece di scrivere $(\neg p \rightarrow \neg q)$, scriveremo quindi $\neg p \rightarrow \neg q$.

Il significato semantico dei connettivi

Una caratteristica, tipica della logica (non sempre reperibile in modo diretto in altre aree della matematica), è la doppia natura sintattico-semantica con cui è possibile caratterizzare i suoi oggetti. La Definizione 2.1 degli enunciati è un esempio di costruzione (ricorsiva) puramente *sintattica*. Con ciò si intende dire che al fine di rispondere alla domanda

$$\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}?$$

non è necessario avere alcuna "comprensione" dell'interpretazione dei simboli che compaiono in esso[3]. Nel caso della Definizione 2.1, il "significato" di $\wedge$ è limitato al fatto che se θ e ϕ sono enunciati, allora anche $\theta \wedge \phi$ è un enunciato.

Ricordiamo però che il nostro interesse per la formalizzazione logica va oltre asserzioni di questo tipo. In particolare siamo interessati a catturare la logica dei giudizi come un modo per associare le risposte, interpretate come *si* e *no*, a domande ben formate. Assumiamo che le domande ben formate coincidano con l'insieme $\mathscr{E}\mathscr{L}$. Possiamo rendere rigorosa la nozione di giudizio come risposta a una domanda ben formata mediante la seguente definizione:

2.3. DEFINIZIONE. Una *valutazione proposizionale classica* su $\mathscr{L} \neq \emptyset$ è una funzione

$$v : \mathscr{L} \to \{0,1\}.$$

Indichiamo, per brevità, con $\mathbb{V}$ l'insieme di tutte le valutazioni su $\mathscr{L}$.

2.4. ESEMPIO. Dato $\mathscr{L} = \{p,q\}$, si vede che $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, dove

$$\begin{aligned} v_1(p) &= 1;\ v_1(q) = 1 \\ v_2(p) &= 1;\ v_2(q) = 0 \\ v_3(p) &= 0;\ v_3(q) = 1 \\ v_4(p) &= 0;\ v_4(q) = 0 \end{aligned}$$

Osserviamo che se $\mathscr{L}$ è composto da n variabili proposizionali, esistono 2^n valutazioni distinte su $\mathscr{L}$.

L'introduzione della funzione di valutazione proposizionale classica ci permette di fare una digressione utile per comprendere una questione generale sulla modellizzazione logica.

I logici chiamano $v(p) \in \{0,1\}$ il *valore di verità di p*. Un secondo di riflessione è sufficiente a mettere in evidenza come l'espressione sia carica di connotazioni che vanno abbondantemente oltre quello che è catturato formalmente dalla Definizione 2.3. Una volta che abbiamo stabilito che l'aspetto semantico della nostra formalizzazione sia catturato dalle valutazioni proposizionali classiche, possiamo (e per certi aspetti dobbiamo) fare a meno di richiamare le nostre intuizioni – o se le abbiamo, le nostre convinzioni filosofiche – sul concetto di verità. Dire che "p è vero" in questo schema non significa niente più che dire che 1 è valore di $v(p)$.

[3] *Oltre, cioè alla comprensione delle regole che ne determinano il comportamento.* Per alcuni questo *è* il significato dei simboli. La questione è filosoficamente molto ricca, ed esula ampiamente dai nostri scopi presenti.

Ovviamente si può obiettare che questo tipo di atteggiamento sia insoddisfacente dal punto di vista della "logica applicata", ovvero dal punto di vista di chi sia interessato a catturare attraverso il linguaggio e i metodi della logica, qualcosa di pre-esistente. D'altra parte l'essere umano ha ragionato da sempre sulla verità e falsità delle asserzioni millenni prima che Frege, Russell e Hilbert introducessero gli strumenti necessari alla formalizzazione di cui stiamo esplorando gli aspetti elementari. Se ci poniamo da questo punto di vista diventa naturale chiedersi come mai i logici interpretino il codominio di una valutazione proposizionale come valori di verità. E ancora, quali sono i codomini ammissibili affinché le valutazioni proposizionali continuino ad avere un'interpretazione interessante in termini di valori di verità? Come vedremo in seguito, è molto naturale estendere il codominio dei valori di verità oltre l'insieme binario. Ma quali sono le conseguenze dal punto di vista della nostra modellizzazione del concetto di "verità" che informa la nostra costruzione formale?

Queste sono domande che occupano un posto centrale nella metodologia della logica applicata (o filosofia della logica) e che, come vedremo, hanno una pertinenza diretta con la metodologia della formalizzazione in economia. Per esempio, poiché siamo interessati a costruire un modello (logico) per l'aggregazione dei giudizi, possiamo chiederci se il codominio delle funzioni in $\mathbb{V}$ sia appropriato ai nostri scopi. Un modo per farlo è considerare i vincoli che la Definizione 2.3 impone alla nostra "idea" di giudizio, ovvero:

(1) su ogni oggetto ammissibile deve essere espresso un giudizio (v è una funzione totale, definita su tutto)
(2) ogni giudizio è categorico (perché il codominio è l'insieme binario), e in particolare
   (a) non è possibile "sospendere il giudizio"
   (b) non è possibile esprimersi parzialmente su un certo p.

I vincoli (1) e (2) sulle valutazioni in $\mathbb{V}$ rappresentano *un'astrazione* dal problema "reale" di catturare la logica dei giudizi. Se da una parte questo tipo di astrazione è necessaria alla costruzione del modello,[4] dall'altra un'astrazione eccessiva potrebbe portarci a un modello logico di qualcosa di molto lontano dalle nostre intuizioni sul concetto pre-formale di giudizio. L'astrazione ha una virtù importante, anche quando è "eccessiva": possiamo indebolirla quando le conseguenze della formalizzazione ci sembrino del tutto inappropriate.

Il prossimo passo nell'analisi logica dei giudizi consiste nel mettere in relazione le valutazioni proposizionali con l'insieme dei connettivi. In particolare possiamo *definire*

[4] A tal proposito è interessante paragonare l'osservazione di Arrow a commento della sua caratterizzazione della razionalità in [5]

> [T]he present author regards economics as an attempt to discover uniformities in a certain part of reality and not as the drawing of logical consequences from a certain set of assumptions regardless of their relevance to actuality. Simplified theory-building is an absolute necessity for empirical analysis; but it is a means, not an end. ([5], p. 21)

al commento che C.S. Pierce scriveva in una lettera a William James datata 26 febbraio 1909:

> I have long felt that it is a serious defect in existing logic that it takes no heed of the *limit* between two realms. I do not say that the Principle of Excluded Middle is downright *false*; but I *do* say that in every field of thought whatsoever there is an intermediate ground between *positive assertion* and *positive negation* which is just as real as they. Mathematicians always recognize this, and seek for that limit as the presumable lair of powerful concepts; while metaphysicians and oldfashioned logicians – the sheep and goat separators – never recognize this. The recognition does not involve any denial of existing logic but it involves a great addition to it.

le condizioni semantiche espresse dai connettivi in $\mathscr{C}$ mediante le cosiddette *tavole di verità*.

L'idea è quella di considerare *tutte le valutazioni possibili* su $\mathscr{L}$ (colonna di sinistra) e di riportare nelle colonne a destra della doppia riga il *valore di verità* dell'enunciato composto. Fissiamo $\mathscr{L} = \{p, q\}$ e definiamo[5] il significato semantico dei connettivi attraverso la *tavola di verità* riportata nella Tavola 1.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

TAVOLA 1. Definizione dei connettivi in $\mathscr{C}$

Pur avendo definito le valutazioni proposizionali classiche soltanto sull'insieme delle variabili proposizionali, siamo generalmente interessati a conoscere i valori di verità degli enunciati (non atomici). Possiamo però mostrare facilmente[6] come le valutazioni proposizionali si estendano in modo univoco a tutto $\mathscr{E}\mathscr{L}$.

2.5. ESEMPIO. Supponiamo che $\mathscr{L} = \{p, q, r\}$ con

- p: l'imputato ha violato il contratto
- q: il contratto è valido
- r: l'imputato è colpevole

$\theta := ((p \wedge q) \to r) \wedge (r \to (p \wedge q))$ è enunciato adeguato ad esprimere l'idea (intuitivamente molto plausibile) che l'imputato sia colpevole esattamente nel caso in cui abbia violato un contratto valido.

La definizione dei connettivi mediante la Tavola 1 mette chiaramente in luce l'aspetto funzionale della semantica proposizionale. Questo non dipende dalla natura finita della tavola di verità, ma è garantito in generale dalla proprietà secondo cui *il valore di*

5 La giustificazione per la scelta di *questa* tavola è molto complicata. Chi volesse farsi un'idea del perché sia complicata, e trovare anche qualche risposta, può consultare il volume (1400 pagine) di Lloyd Humberstone, *Connectives*, [88]. Ad esempio, le discussioni sul valore di verità da attribuire all'implicazione risalgono, secondo Sesto Empirico (II-III sec. d.C.), alla scuola megarico-stoica e coinvolgono i filosofi del IV secolo a.C. Diodoro Crono e Filone di Megara e Crisippo (280-206 a.C.). Ancora agli inizi del 1900 le discussioni continuavano; ad esempio, Henri Poincaré [140] così commentava:

> Russell arriva a concludere che una qualunque proposizione falsa implica tutte le altre proposizioni, vere o false che siano. Couturat afferma che una tale conclusione può sembrare, a prima vista paradossale. Eppure, basta aver corretto un cattivo compito di matematica per rendersi subito conto che Russell ha perfettamente ragione. Il candidato, spesso, deve penare molto per dedurre la prima equazione, falsa: ma una volta che ha ricavato questa, gli diventa facilissimo accumulare i risultati più stupefacenti, alcuni dei quali possono anche essere esatti.

6 Per induzione su n tale che $\theta_n \in \mathscr{E}\mathscr{L}_n$.

verità di un enunciato è determinato univocamente dal valore di verità dei suoi componenti. L'idea occupa un posto così importante nello studio della logica da meritare di essere elevata a principio.

PRINCIPIO DI COMPOSIZIONALITÀ. Per ogni connettivo $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ esisite una funzione $f_* : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ tale che, per ogni $v \in \mathbb{V}$, $\theta \in \mathscr{E}L_{n+1}$, se $\theta = \phi_1 * \phi_2$ con $\phi_1, \phi_2 \in \mathscr{E}L_n$ allora

$$v(\theta) = f_*(v(\phi_1), v(\phi_2)).$$

Analogamente, per il connettivo unario di negazione

$$v(\theta) = f_\neg(v(\theta)).$$

2.6. ESEMPIO. Se $L = \{p, q\}$ e $\theta = p \wedge q$, il principio di composizionalità richiede l'*esistenza* di una $f : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ tale che

$$v(\theta) = f_\wedge(v(p), v(q)) = \begin{cases} 1, \text{ se } v(p) = v(q) = 1; \\ 0, \text{ altrimenti.} \end{cases} \tag{2.1}$$

La funzione $f_\wedge(v(p), v(q)) = \min\{v(p), v(q)\}$ chiaramente soddisfa la (2.1). Analogamente, le funzioni $\max\{v(p), v(q)\}$, $\max\{(1 - v(p)), v(q)\}$ e $1 - v(p)$ sono adeguate per $f_\vee(\cdot,\cdot), f_\rightarrow(\cdot,\cdot), f_\neg(\cdot)$, rispettivamente.

Osserviamo, ma ci torneremo ampiamente in seguito, come il principio di composizionalità ci permetta di vedere la valutazione di un enunciato composto (per esempio $\theta \wedge \phi$) come *l'aggregazione* del valore di verità dei suoi componenti. Nel caso della congiunzione $f_\wedge(\cdot,\cdot)$ è chiaramente una funzione di aggregazione equivalente al principio di unanimità.

Il principio di composizionalità affonda le proprie radici nell'idea del calcolo logico come *procedura algoritmica*. Il termine deriva da Musa Al-Khwarizmi (790-850 ca.), il matematico persiano che per primo ha avanzato l'idea per cui tutto il ragionamento matematico consista in computazioni. L'idea è stata ripresa ed estesa a tutto il ragionamento (non solo quello matematico, quindi) da Thomas Hobbes e, in modo direttamente rilevante per lo sviluppo della logica contemporanea, da G.W. Leibniz. A tal proposito, celebre è il suo auspicio

> quando sorgeranno controversie fra due filosofi, non sarà più necessaria una discussione, come [non lo è] fra due calcolatori. Sarà sufficiente, infatti, che essi prendano in mano le penne, si siedano di fronte agli abachi e (se così piace, su invito di un amico) si dicano l'un l'altro: *Calculemus*!

È interessante notare come il punto di vista composizionale sia strettamente connesso a una visione *deterministica* e, per certi aspetti, platonica dell'oggetto di ragionamento.

> Possiamo considerare lo stato attuale dell'universo come l'effetto del suo passato e la causa del suo futuro. Un intelletto che ad un determinato istante dovesse conoscere tutte le forze che mettono in moto la natura, e tutte le posizioni di tutti gli oggetti di cui la natura è composta, se questo intelletto fosse inoltre sufficientemente ampio da sottoporre questi dati ad analisi, esso racchiuderebbe in un'unica formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli degli atomi più piccoli; per un tale intelletto nulla sarebbe incerto ed il futuro proprio come il passato sarebbe evidente davanti ai suoi occhi. (Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités*, 1812)

L'interesse nella costruzione di semantiche che non presuppongano le capacità del *Demone* di Laplace implicita nel principio di composizionalità è alla base dello sviluppo di molte logiche non deterministiche. Queste intendono catturare una nozione di "incertezza fondamentale" o "inconoscibilità parziale" dell'oggetto del ragionamento[7]. Di contrasto, assumere il principio di composizionalità significa astrarre da queste forme di incertezza.

Tuttavia, il principio di composizionalità *non* presuppone che la logica sia, come si usa dire, "classica", e in particolare bivalente. Chiamiamo $\mathbb{W}$ l'insieme

$$w : \mathscr{L} \to [0,1].$$

Possiamo definire

$$F_{\wedge}, F_{\vee}, F_{\to} : [0,1]^2 \to [0,1]$$
$$F_{\neg} : [0,1] \to [0,1]$$

in modo che queste soddisfino il requisito di composizionalità ed estendano i rispettivi connettivi proposizionali bivalenti a una nozione graduata di verità che prende valori in tutto il segmento reale unitario.

Le seguenti sono proposte molto studiate in letteratura e la cui importanza deriva dalle proprietà funzionali soddisfatte dai connettivi proposizionali così definiti.

Logica sfumata:

$$F_{\neg}(x) = 1 - x$$
$$F_{\wedge}(x,y) = \min\{x,y\}$$
$$F_{\vee}(x,y) = \max\{x,y\}$$
$$F_{\to}(x,y) = \min\{1, 1-x+y\}$$

Logica del prodotto:

$$F_{\neg}(x) = 1 - x$$
$$F_{\wedge}(x,y) = xy$$
$$F_{\vee}(x,y) = x + y - xy$$
$$F_{\to}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x \leq y) \\ \frac{y}{x} & (y < x) \end{cases}$$

Logica di Łukasiewicz:

$$F_{\neg}(x) = 1 - x$$
$$F_{\wedge}(x,y) = \max\{0, x+y-1\}$$
$$F_{\vee}(x,y) = \min\{1, x+y\}$$
$$F_{\to}(x,y) = \min\{1, 1-x+y\}$$

Rimandiamo i lettori interessati a [71] [76] [38].

2.1.2. *Modelli, soddisfacibilità e conseguenza*

Cominciano introducendo la nozione di *modello* e di *soddisfacibilità*.

2.7. DEFINIZIONE (*Modello*). Siano $\mathbb{V}$ l'insieme delle valutazioni su $\mathscr{L}$ e $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$. Diciamo che $v \in \mathbb{V}$ è un *modello* di Γ, se $v(\gamma) = 1$ per ogni $\gamma \in \Gamma$.

2.8. DEFINIZIONE (*Soddisfacibilità*). Diciamo che $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$ è soddisfacibile se ha un modello.

[7] Per un'esposizione recente si veda [16].

	p	q	Γ	θ	ϕ
$\Rightarrow$	1	1	1	1	1
	1	0	0	0	0
$\Rightarrow$	0	1	1	1	0
	0	0	0	1	0

TAVOLA 2. Tavola di verità ridotta.

Si usa semplificare la notazione scrivendo $v(\Gamma) = 1$ per dire che v è un modello di Γ.

2.9. ESEMPIO. Siano $\mathscr{L} = \{p,q\}$, $\gamma_1 := p \to q$, $\gamma_2 := q$ e $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$. L'insieme di tutte le valutazioni su $\mathscr{L}$ è dunque il seguente:

$$v_1 : v(p) = v(q) = 0$$
$$v_2 : v(p) = v(q) = 1$$
$$v_3 : v(p) = 0; v(q) = 1$$
$$v_4 : v(p) = 1; v(q) = 0$$

Segue dalla Definizione 2.7 che l'insieme dei modelli di Γ è dato da tutte quelle valutazioni che assegnano 1 a γ_1 e γ_2, e cioè v_2 e v_3.

Il concetto di soddisfacibilità cattura un aspetto importante del concetto logico di *coerenza*. Infatti, un insieme di enunciati è insoddisfacibile quando non esiste alcuna valutazione che li renda veri contemporaneamente, cioè, intuitivamente, quando gli enunciati in Γ non "stanno insieme". Torneremo su questo punto nell'analisi dell'aspetto paradossale della votazione a maggioranza nel *dilemma discorsivo*.

2.10. DEFINIZIONE (*Conseguenza logica*). Diciamo che θ *segue logicamente* da Γ e scriviamo

$$\Gamma \models \theta$$

se ogni modello di Γ è un modello di θ. Cioè

$$\Gamma \models \theta \Leftrightarrow \forall v \in \mathbb{V}, \text{ se } v(\Gamma) = 1 \text{ allora } v(\theta) = 1.$$

2.11. ESEMPIO. Siano $\Gamma = \{p \to q, q\}$. Dall'esempio precedente sappiamo che Γ è soddisfatto da

$$v_2 = v(p) = v(q) = 1 \text{ e}$$
$$v_3 = v(p) = 0; v(q) = 1.$$

Poniamo $\theta = p \vee q$ e $\phi = p \wedge q$. Poiché $v_2(\theta) = v_2(\phi) = 1$ abbiamo $\Gamma \models \theta$ e $\Gamma \models \phi$. Nel secondo caso $\Gamma \models \theta$, ma $\Gamma \not\models \phi$ dal momento che $v_3(\Gamma) = 1$ e $v_3(\phi) = 0$

Sotto l'ipotesi della finitezza del linguaggio $\mathscr{L}$, le tavole di verità costituiscono un metodo *effettivo*, cioè algoritmico, per *decidere* se $\Gamma \models \theta$. È sufficiente considerare tutte le valutazioni che soddisfano Γ e controllare se queste soddisfano o meno θ.

2.12. ESEMPIO. Siano, come sopra, $\Gamma = \{p \to q, q\}$, $\theta = p \vee q$ e $\phi = p \wedge q$. Possiamo costruire immediatamente la tavola di verità raffigurata nella Tavola 2.

Segue dalla Definizione 2.10 che le righe (cioè le valutazioni) rilevanti a determinare se θ e ϕ sono conseguenze logiche di Γ sono la prima e la terza (contrassegnate da $\Rightarrow$). Nel primo caso, $v_1(\theta) = v_1(\phi) = 1$, quindi $\Gamma \models \theta$ e $\Gamma \models \phi$. Nel secondo caso $\Gamma \models \theta$ ma $\Gamma \not\models \phi$ dal momento che $v_3(\Gamma) = 1$ ma $v_3(\phi) = 0$.

Passiamo ora a definire due classi di enunciati particolarmente importanti.

2.13. DEFINIZIONE (*Tautologie*). Diciamo che θ *è una tautologia* se $v(\theta) = 1$ per ogni $v \in \mathbb{V}$.

Poiché tutte le valutazioni (su $\mathscr{L}$) sono modelli di una tautologia θ, abbiamo $\emptyset \models \theta$. Di solito si omette di menzionare l'insieme vuoto e si scrive $\models \theta$. Segue quindi che *le tavole di verità ci forniscono anche una procedura per decidere*[8] *se un dato enunciato è o meno una tautologia*.

La nozione di tautologia ha un'ovvia nozione duale.

2.14. DEFINIZIONE (*Contraddizione*). Diciamo che θ *è una contraddizione se* $v(\theta) = 0$ *per ogni* $v \in \mathbb{V}$.

È una conseguenza immediata delle definizioni che θ è una tautologia se e solo se $\neg\theta$ è una contraddizione. Inoltre, si vede che θ è una contraddizione se e solo se $\theta \models \alpha \, \forall \alpha \in \mathscr{EL}$.

2.15. DEFINIZIONE (*Equivalenza logica*). $\theta, \phi \in \mathscr{EL}$ sono *logicamente equivalenti*, scritto $\theta \equiv \phi$, se $\forall v \in \mathbb{V}$,

$$v(\theta) = v(\phi).$$

Segue dalla Definizione 2.15 che le seguenti formulazioni sono tra loro equivalenti.

2.16. PROPOSIZIONE.

$$\begin{aligned}
\theta \equiv \phi &\Longleftrightarrow \forall v \in \mathbb{V}, \quad v(\theta) = v(\phi) \\
&\Longleftrightarrow \forall v \in \mathbb{V}, \quad v(\theta) = 1 \Leftrightarrow v(\phi) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \forall v \in \mathbb{V}, \quad v(\theta) = 0 \Leftrightarrow v(\phi) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \forall v \in \mathbb{V}, \quad v(\theta) = 1 \Rightarrow v(\phi) = 1 \, e \forall v \in \mathbb{V}, v(\phi) = 1 \Rightarrow v(\theta) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \theta \models \phi \quad e \quad \phi \models \theta \\
&\Longleftrightarrow \models \theta \to \phi \quad e \quad \models \phi \to \theta \\
&\Longleftrightarrow \forall v \in \mathbb{V}, \quad v(\theta \to \phi) = 1 \; e \; v(\phi \to \theta) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \forall v \in \mathbb{V}, \quad v((\theta \to \phi) \wedge v(\phi \to \theta)) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \models (\theta \to \phi) \wedge (\phi \to \theta)
\end{aligned}$$

Passiamo ora a considerare tre proprietà di *ordine* che discendono immediatamente dalla definizione di conseguenza logica.

[8] Questo, a rigore, è vero in virtù di un importante teorema che garantisce la decidibilità (ovvero la risolvibilità in linea di principio) del problema.

2.17. PROPOSIZIONE. *Per* $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$, $\theta, \phi, \psi \in \mathscr{E}\mathscr{L}$

$$\text{se } \theta \in \Gamma \text{ allora } \Gamma \models \theta \tag{2.2}$$

$$\text{se } \theta \models \phi \text{ e } \phi \models \theta \text{ allora } \phi \equiv \theta \tag{2.3}$$

$$\text{se } \theta \models \phi \text{ e } \phi \models \psi \text{ allora } \theta \models \psi. \tag{2.4}$$

Queste proprietà ci permettono di definire una *struttura d'ordine* interessante. Denotiamo, per ogni $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}$,

$$[\theta] = \{\phi \in \mathscr{E}\mathscr{L} \mid \phi \equiv \theta\}$$

e denotiamo con $\mathscr{E}\mathscr{L}/\equiv$ l'insieme di tutti i $[\theta]$ così ottenuti – cioè, lo *spazio quoziente* o insieme delle classi di equivalenza – e poniamo

$$[\theta] \leq [\phi] \Leftrightarrow \theta \models \phi. \tag{2.5}$$

La (2.2) ci dice che la relazione $\leq$ è riflessiva, la (2.4) che è transitiva, e la (2.3) che è antisimmetrica. Quindi la $\leq$ in (2.5) è un preordine.

La struttura $\mathscr{T} = \langle \mathscr{E}\mathscr{L}/_{\equiv} \rangle$ è detta *algebra di Tarski-Lindenbaum* ed è una delle algebre di Boole più interessanti dal punto di vista logico-matematico. Un motivo di interesse è dato dal fatto che esiste una corrispondenza biunivoca tra gli *atomi di* $\mathscr{T}$, ovvero gli enunciati della forma

$$\alpha = p_1^{\varepsilon_1} \wedge p_2^{\varepsilon_2} \wedge \ldots \wedge p_n^{\varepsilon_n},$$

(dove $\varepsilon_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n$ e $p_i^0 = \neg p_i$, $p_i^1 = p_i$) e le valutazioni su $\mathscr{L}$ (ovvero, le righe delle tavole di verità).

Gli atomi di $\mathscr{T}$ sono tra loro logicamente indipendenti, nel senso illustrato dall'esempio seguente. Sia $\mathscr{L} = \{p, q\}$. Esistono 4 atomi distinti, cioè

(α_1) $p \wedge q$
(α_2) $\neg p \wedge q$
(α_3) $p \wedge \neg q$
(α_4) $\neg p \wedge \neg q$.

Dalla definizione di $\models$ è immediato osservare che per ogni $i, j \in \{1,2,3,4\}$ vale

$$\alpha_i \not\models \alpha_j.$$

Da questo segue che, in generale, l'ordine dato dalla (2.5) non è totale.

Infine, osserviamo che se rilassiamo l'ipotesi di finitezza del linguaggio $\mathscr{L}$, l'algebra di Tarski-Lindenbaum è priva di atomi[9].

2.1.3. *Agenti come relazioni di conseguenza*

Lo studio delle proprietà *astratte* della relazione di conseguenza $\models$ permette di darne una presentazione molto generale in termini di operatori (tarskiani) di conseguenza.

[9] Un atomo è un elemento $a \neq 0$ dell'algebra tale che per ogni b, se $b \leq a$, allora $b = a$ oppure $b = 0$.

Denotiamo, al solito, con $2^{\mathscr{E}\mathscr{L}}$ l'insieme dei sottoinsiemi di enunciati di $\mathscr{L}$ e definiamo una funzione

$$Cn : 2^{\mathscr{E}\mathscr{L}} \to 2^{\mathscr{E}\mathscr{L}}$$

ponendo

$$Cn(\Gamma) = \{\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L} \mid \Gamma \models \theta\}.$$

Si usa dire che $Cn(\cdot)$ così definito è un *operatore di conseguenza tarskiano* cioè soddisfa

$$\begin{array}{rl}
\text{(RIF)} & \text{se } \theta \in \Gamma \text{ allora } \theta \in Cn(\Gamma); \\
\text{(MON)} & \text{se } \Gamma \subseteq \Lambda,\ \theta \in Cn(\Gamma) \text{ allora } \theta \in Cn(\Lambda); \\
\text{(TRANS)} & \text{se } \theta \in Cn(\Gamma) \text{ e } \phi \in Cn(\Gamma, \theta) \text{ allora } \phi \in Cn(\Gamma).
\end{array}$$

Viceversa, dato un operatore di conseguenza $Cn(\cdot)$ possiamo definire la relazione $\mid\!\sim \subseteq 2^{\mathscr{E}\mathscr{L}} \times \mathscr{E}\mathscr{L}$ mediante

$$\Gamma \mid\!\sim \theta \Leftrightarrow \theta \in Cn(\Gamma).$$

Una $\mid\!\sim$ così definita soddisfa, per $\Gamma, \Gamma' \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$, $\theta, \phi, \psi \in \mathscr{E}\mathscr{L}$:

$$\begin{array}{rl}
\text{(RIF)} & \text{se } \theta \in \Gamma \text{ allora } \Gamma \mid\!\sim \theta \\
\text{(MON)} & \text{se } \Gamma \mid\!\sim \theta \text{ allora } \Gamma, \phi \mid\!\sim \theta \\
\text{(TRANS)} & \text{se } \Gamma \mid\!\sim \phi \text{ e } \Gamma', \phi \mid\!\sim \theta \text{ allora } \Gamma, \Gamma' \mid\!\sim \theta.
\end{array}$$

Insistiamo, segue immediatamente dalla definizione che $\models$ soddisfa (RIF), (MON), (TRANS).

In virtù di queste proprietà segue che la presentazione funzionale e quella relazionale del concetto di conseguenza logica sono scambiabili. Un vantaggio di questa pluralità di interpretazioni è costituito dalla possibilità di *identificare un agente con un operatore di conseguenza* e considerare il suo giudizio come una funzione che ha le premesse Γ come *input* e la conclusione θ come *output*. Questo ci permette di vedere le proprietà di $Cn(\cdot)$ come definitorie del concetto di agente (logico) razionale, proprio come le proprietà d'ordine sono definitorie del concetto di agente (economico) razionale. A tal proposito è interessante notare come la Proposizione 2.17 evidenzi il fatto che le proprietà di ordine che catturano il concetto di agente economicamente razionale nell'ambito della teoria del consumatore siano anche alla base dell'idea di ragionamento razionale catturato dal concetto di conseguenza logica. E come abbiamo visto, le motivazioni per assumere che le proprietà d'ordine siano proprietà salienti di coerenza o razionalità sono apparentemente molto diverse nei due contesti. Sotto l'apparenza, però, si nasconde un'importante analogia. La giustificazione, per esempio, per la richiesta che le preferenze di un agente normativamente razionale siano transitive è data dall'obiettivo di scongiurare preferenze cicliche, cioè di scongiurare la perdita perpetua[10]. Giustificazioni analoghe possono essere addotte per le proprietà di ordine associate a $\models$. La linea giustificativa è ancora di natura "economica" e può essere posta come segue. Non tutti gli enunciati (o insiemi di enunciati) sono soddisfacibili. Se assumiamo che

[10] Torneremo più dettagliatamente sull'argomento nel Capitolo 4.

la soddisfacibilità sia una “virtù”, o un *asset*, allora possiamo vedere facilmente come la relazione di conseguenza logica catturi l'idea di *preservazione della soddisfacibilità*.

Possiamo consolidare ulteriormente queste riflessioni introducendo il concetto di *consistenza*.

2.1.4. *Consistenza*

Introduciamo il concetto di *consistenza* attraverso quello di *derivazione* (o *dimostrazione*) formale. Il desiderio di rendere completamente rigoroso il concetto di dimostrazione matematica ha motivato larga parte dello sviluppo della logica (cosiddetta classica) in relazione ai fondamenti della matematica[11]. Questo ha trovato una prima sistemazione nel 1910-13 con l'opera monumentale *Principia Mathematica* di Russell e Whitehead. Un risultato fondamentale della logica classica – il teorema di completezza – attesta l'equivalenza estensionale tra il concetto di consistenza e quello di soddisfacibilità.

Per gli scopi della nostra analisi logica dei giudizi non è necessario entrare nei dettagli dei sistemi di derivazione formale che verificano il teorema di completezza.

2.18. DEFINIZIONE (*Dimostrazione formale*). Chiamiamo *dimostrazione formale* una sequenza finita (detta di sequenti) della forma

$$\Gamma_1 \mid \theta_1, \Gamma_2 \mid \theta_2, \ldots, \Gamma_k \mid \theta_k$$

in cui $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in \mathscr{EL}$ e $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ sono sottoinsiemi finiti di $\mathscr{EL}$ e per ogni $i = 1, \ldots, k$, $\Gamma_i \mid \theta_i$ è una realizzazione di una regola di inferenza della forma

$$\frac{\Gamma_{j_1} \mid \theta_{j_1} \ldots \Gamma_{j_n} \mid \theta_{j_n}}{\Gamma_i \mid \theta_i}$$

per qualche $j_1, \ldots j_n < i$.

In altre parole, una dimostrazione formale è una successione finita di passi ognuno dei quali è giustificato mediante l'opportuna invocazione di una determinata regola di inferenza. Prima di vedere un esempio, introduciamo un'altra nozione fondamentale della logica.

2.19. DEFINIZIONE. Diciamo che θ *è formalmente dimostrabile a partire da* Γ, scritto $\Gamma \mid\!\sim \theta$, se esiste una dimostrazione formale $\Gamma_1 \mid \theta_1, \Gamma_2 \mid \theta_2, \ldots, \Gamma_k \mid \theta_k$ tale che $\Gamma_k \subseteq \Gamma$ e $\theta_k = \theta$.

Poiché lo sviluppo della *teoria della dimostrazione* eccede ampiamente i nostri scopi[12], ci limiteremo ad illustrare alcuni aspetti centrali del concetto di derivabilità mediante un esempio basato sugli ordini stretti.

2.20. ESEMPIO (*Assiomatizzazione dell'ordine*). Per tutto l'esempio facciamo le seguenti stipulazioni. X è un insieme non vuoto su cui può (ma non necessariamente) essere definito un ordine $<$. Indichiamo gli elementi di X con a, b, c, d eccetera. Siamo

[11] Si veda ad esempio [109].

[12] Per una presentazione dell'argomento si può vedere [186].

interessati ad asserzioni positive (stringhe della forma $a < b$) e negative (stringhe del tipo $a \nless b$). Denotiamo le asserzioni positive con θ, ϕ ecc., e quelle negative con $\neg\theta, \neg\phi$ ecc. Denotiamo con Δ un insieme finito di asserzioni positive o negative su X. Infine usiamo il simbolo $\perp$ per denotare l'assurdo logico.

Il primo gruppo di regole cattura le proprietà desiderabili per un concetto di deduzione che non porti all'assurdo:

$$\frac{\theta \in \Delta}{\Delta \mid \theta}(\text{INC}) \qquad \frac{\Delta \mid a < b \quad \Delta \mid a \nless b}{\Delta \mid \perp}(\perp) \qquad \frac{\Delta, \neg\theta \mid \perp}{\Delta \mid \theta}(\text{RID})$$

Il secondo gruppo di regole assiomatizza l'ordine

$$\frac{\Delta \mid a < a}{\Delta \mid \perp}(\text{IRR}) \qquad \frac{\Delta \mid a < b \quad \Delta \mid b < c}{\Delta \mid a < c}(\text{TRANS})$$

A questo punto possiamo definire una dimostrazione formale (nei preordini stretti) di θ da Δ come segue:

$$\Delta \vdash \theta \Leftrightarrow \exists \Delta_1 \mid \theta_1, \Delta_2 \mid \theta_2, \ldots, \Delta_k \mid \theta_k \tag{2.6}$$

tale che ogni elemento della sequenza di sequenti è un'istanza di una delle regole (INC)-(TRANS) e $\Delta_k \subseteq \Delta$ e $\theta_k = \theta$.

Questo ci permette, ad esempio, di dimostrare formalmente che

$$\{a < b, b < c\} \vdash c \nless a : \tag{2.7}$$

(1)	$a < b$	(INC)
(2)	$b < c$	(INC)
(3)	$c < a$	(assunzione)
(4)	$a < c$	(TRANS 1,3)
(5)	$a < a$	(TRANS 3,4)
(6)	$\perp$	(IRR 5)
(7)	$c \nless a$	(RID 3)

Una bella fatica per dimostrare una cosa ovvia! Ma non è certo per dimostrare *questa particolare proprietà* degli ordini stretti che abbiamo introdotto tutto il macchinario dell'esempio. Piuttosto, l'esempio ci aiuta a mettere a fuoco alcune proprietà importanti del concetto di derivabilità formale. Per discuterli torniamo al caso generale di una relazione di derivazione formale $\mid\!\sim$ di cui non specifichiamo le regole di inferenza.

In primo luogo notiamo come a differenza di $\models$ il concetto di derivabilità formale $\mid\!\sim$ sia intrinsecamente *finitario*. Ciò deriva dalla richiesta che la sequenza di formule che chiamiamo dimostrazione sia finita. In secondo luogo, mentre nella presentazione di $\models$ viene relativamente naturale parlare della "verità" degli enunciati in questione, una derivazione che porti ad asserire $\Gamma \mid\!\sim \theta$ non è vincolata dal fatto che riteniamo veri (o plausibili) gli enunciati in Γ. In questo senso il concetto di derivabilità è completamente *formale*: accettare le premesse di una derivazione corretta ci obbliga ad accettarne le conclusioni, pena l'*inconsistenza*. Ed è proprio alla definizione formale di inconsistenza che ora ci rivolgiamo.

2.21. DEFINIZIONE. $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$ si dice *inconsistente* se vale $\Gamma \mid\!\sim \theta \wedge \neg\theta$ per qualche $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}$ [13]. Diciamo che $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$ è *consistente* se non è inconsistente.

In alternativa possiamo definire Γ inconsistente se sia θ che $\neg\theta$ sono formalmente derivabili da Γ, oppure se $\Gamma \mid\!\sim \alpha$, $\forall\alpha \in \mathscr{E}\mathscr{L}$. Da quest'ultima definizione segue che un insieme inconsistente è privo di contenuto matematico, dal momento che non discrimina nulla. È per questo che Hilbert ha posto la consistenza al centro dell'indagine sui fondamenti della matematica[14].

2.22. DEFINIZIONE. $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$ si dice *consistente massimale* (o *maxiconsistente*) se Γ è consistente e, $\forall\Gamma' \supset \Gamma$, Γ' è inconsistente.

2.23. ESEMPIO. Fissiamo $v \in \mathbb{V}$. Allora

$$\Gamma = \{\theta \mid v(\theta) = 1\}$$

è maxiconsistente.

Come conseguenza della Definizione 2.22 si ha che *se Γ è maxiconsistente, allora vale*

$$\textit{se } \Gamma \mid\!\sim \theta \textit{ allora } \theta \in \Gamma.$$

In presenza di una relazione $\mid\!\sim$ riflessiva[15] questo ha come conseguenza il fatto che se Γ è maxiconsistente, allora

$$\Gamma \mid\!\sim \theta \Leftrightarrow \theta \in \Gamma. \tag{2.8}$$

Un insieme per cui vale la (2.8) si dice una *teoria* o un *insieme deduttivamente chiuso*.

2.24. PROPOSIZIONE. *Se Γ è maxiconstistente, allora*

$$\theta \in \Gamma \textit{ oppure } \neg\theta \in \Gamma$$

per ogni $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}$.

Infatti per la (2.8) è sufficiente dimostrare che se $\Gamma \not\mid\!\sim \theta$, allora $\Gamma \mid\!\sim \neg\theta$. I dettagli ovviamente dipendono dalle regole di inferenza che definiscono $\mid\!\sim$, ma in tutti i sistemi canonici questo è di verifica immediata.

Un insieme di enunciati per cui vale la condizione della Proposizione 2.24 si dice *sintatticamente completo*.

Vale

2.25. LEMMA. *Se Γ è consistente, allora $\exists\Gamma' \supseteq \Gamma$ che è maxiconsistente.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché l'insieme $\mathscr{E}\mathscr{L}$ è numerabile, possiamo ordinare tutti gli enunciati come segue $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n, \ldots, n \in \mathbb{N}$. Definiamo una successione di insiemi $\Gamma_i \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$ tali che

[13] Osserviamo che $\Gamma \models \theta \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg\theta\}$ è inconsistente.

[14] Si veda ad esempio [110].

[15] E tutte le relazioni di derivabilità classiche lo sono.

(1) $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \ldots \subseteq \Gamma_n \subseteq \ldots$
(2) tutti i Γ_n sono consistenti

ponendo:

$$\Gamma_0 = \Gamma \cup \{\neg\theta\}$$

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\theta_{n+1}\} & \text{se questo insieme è consistente,} \\ \Gamma_n \cup \{\neg\theta_{n+1}\} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostra immediatamente per induzione che tutti i Γ_n sono consistenti e che $\Gamma_\infty = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i = \{\phi \mid \phi \in \Gamma_n,$ per qualche $n \in \mathbf{N}\}$ è maxiconsistente. □

Questo lemma fornisce una costruzione centrale per la dimostrazione del *Teorema di completezza* di un particolare concetto di derivazione formale classico $\mid\!\sim^*$ rispetto a $\models$.

2.26. TEOREMA (*Completezza*). $\Gamma \models \theta \Leftrightarrow \Gamma \mid\!\sim^* \theta$.

La dimostrazione canonica di questo risultato procede mettendo in relazione consistenza e soddisfacibilità, cioè dimostrando che, se $\Gamma \cup \neg\theta$ è consistente, allora $\Gamma \cup \neg\theta$ è *soddisfacibile*. La dimostrazione sfrutta la costruzione del Lemma 2.25 per selezionare una tra le tante valutazioni che potrebbero soddisfare un insieme consistente. Per farlo estendiamo ricorsivamente l'insieme $\Gamma \cup \neg\theta$ preservandone la consistenza (come nella costruzione riportata sopra). Ovviamente, a ogni estensione dell'insieme di partenza avremo sempre meno valutazioni che soddisfano l'insieme così costruito, perché stiamo aumentando il numero di vincoli da soddisfare. Al termine di questo processo, ovvero quando nessuna ulteriore estensione sarà possibile a meno di perdere la consistenza, riusciremo a dimostrare che esiste un'*unica* valutazione che soddisfa il nostro insieme opportunamente esteso. In questo senso l'Esempio 2.23 è rappresentativo degli insiemi maxiconsistenti.

La derivazione dell'*esistenza* del modello canonico dalla sola ipotesi di consistenza è un risultato profondo che ha affascinato a lungo logici e filosofi della matematica. David Hilbert, per esempio la metteva così:

> Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di questi assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza.

Per i dettagli della dimostrazione del teorema di completezza (proposizionale e predicativo) rimandiamo, tra i tanti ottimi manuali, a [186]. Quello che qui è importante osservare è che soddisfacibilità (Definizione 2.8) e consistenza (Definizione 2.21) sono, nella logica classica[16], due formulazioni equivalenti del concetto di *razionalità come coerenza*.

[16] Questa equivalenza fa parte della dimostrazione standard del risultato di completezza, ma può anche essere data come suo Corollario osservando che Γ non è soddisfacibile se e solo se $\Gamma \models \theta \wedge \neg\theta$. Per completezza, $\Gamma \mid\!\sim^* \theta \wedge \neg\theta$ cioè Γ è inconsistente.

2.2. *La logica dell'aggregazione*

Lo studio logico dell'aggregazione ha tra i suoi precursori[17] il lavoro di Robert Wilson [196] la cui motivazione consiste nel derivare un risultato di impossibilità alla Arrow per oggetti più generali di quanto non lo siano le preferenze individuali. Ariel Rubinstein e Peter C. Fishburn [149] riprendono il lavoro (largamente ignorato fino a quel punto) di Wilson e ne studiano le proprietà algebriche. La copiosa letteratura recente sull'argomento è pesantemente influenzata dalla formulazione del cosiddetto *dilemma discorsivo* di Philip Pettit [136], illustrato nella Tavola 3.

	p	q	$r \leftrightarrow (p \wedge q)$	r
Giudice 1	1	1	1	1
Giudice 2	1	0	1	0
Giudice 3	0	1	1	0
Maggioranza	*1*	*1*	*1*	*0*

TAVOLA 3. Rappresentazione tabulare del *dilemma discorsivo*. p è interpretato come "l'imputato ha violato il contratto", q come "il contratto è valido" e r come "l'imputato è suscettibile di sanzione". Come di consueto $r \leftrightarrow (p \wedge q)$ è un'abbreviazione di $(r \to (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge q) \to r)$.

Iniziamo osservando come, dal punto di vista della caratterizzazione logica del concetto di *razionalità come coerenza* tutti i giudici si esprimano in modo individualmente razionale. Ciò segue dal fatto che gli insiemi

$$\Gamma_1 = \{p, q, r \leftrightarrow (p \wedge q), r\}$$
$$\Gamma_2 = \{p, \neg q, r \leftrightarrow (p \wedge q), \neg r\}$$
$$\Gamma_3 = \{\neg p, q, r \leftrightarrow (p \wedge q), \neg r\}$$

sono soddisfacibili. I modelli sono, rispettivamente

$$v_1 = v(p) = v(q) = v(r) = 1$$
$$v_2 = v(p) = 1 \text{ e } v(q) = v(r) = 0$$
$$v_3 = v(p) = 0, v(q) = 1 \text{ e } v(r) = 0.$$

Il giudizio espresso dalla "maggioranza" è invece incoerente: non esiste alcuna valutazione $v : \mathscr{L} \to \{0,1\}$ che lo soddisfi. Il problema è considerato paradossale perché quella che sembra la regola di decisione collettiva *ovvia*, cioè quella di maggioranza, aggrega giudizi individualmente coerenti e restituisce un giudizio collettivo incoerente.

[17] Come sempre esistono precursori importanti. Philippe Mongin [123] rintraccia la formulazione logica del paradosso nel lavoro di Condorcet. Secondo Jon Elster anche Poisson, nel 1837, aveva isolato il problema in *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile: précédées des règles générales du calcul des probabilités*.

L'analisi logica del problema ci suggerisce immediatamente di verificare se la conclusione indesiderabile del dilemma discorsivo sia un artefatto del modo in cui abbiamo posto il problema. La Tavola 4 illustra situazioni analoghe molto più semplici. In ognuno dei casi rappresentati nella tabella siamo ancora una volta di fronte a tre giudizi coerenti, che aggregati a maggioranza semplice, danno luogo a un giudizio collettivo incoerente (perché insoddisfacibile). Siamo di fronte al problema *logico* che sottende il paradosso di Condorcet, che abbiamo già incontrato. Proviamo dunque ad analizzarlo con gli strumenti che abbiamo introdotto nella Sezione 2.1 [18].

	p	q	$p \wedge q$
Giudice 1	1	1	1
Giudice 2	1	0	0
Giudice 3	0	1	0
Maggioranza	*1*	*1*	*0*

	p	q	$p \vee q$
Giudice 1	0	0	0
Giudice 2	0	1	1
Giudice 3	1	0	1
Maggioranza	*0*	*0*	*1*

	p	q	$p \to q$
Giudice 1	1	1	1
Giudice 2	0	0	1
Giudice 3	1	0	0
Maggioranza	*1*	*0*	*1*

TAVOLA 4. Aggregazione sui connettivi binari.

Poniamo $\mathscr{L} = \{p, q\}$. Secondo l'interpretazione informale che stiamo dando alla Tavola 4 identifichiamo, nel caso della congiunzione, i giudizi individuali rispettivamente con

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{p, q, p \wedge q\}\\ \Gamma_2 &= \{p, \neg q, \neg(p \wedge q)\}\\ \Gamma_3 &= \{\neg p, q, \neg(p \wedge q)\}\end{aligned}$$

e con Γ il risultato dell'aggregazione a maggioranza dei giudizi individuali, cioè

$$\begin{aligned}\Gamma &= \{\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L} \mid \#(i \text{ t.c. } \theta \in \Gamma_i) \geq 2\}\\ &= \{p, q, \neg(p \wedge q)\}\end{aligned}$$

Il confronto tra i tre casi rappresentati nella Tavola 4 ci fornisce un *feedback* interessante sulla definizione dei connettivi proposizionali. In particolare è interessante osservare come i tre esempi

[18] Si tratta di una delle possibili analisi del problema. Un'altra importante, a cui faremo un breve riferimento in seguito, mette in evidenza come tutti e tre i casi della Tavola 4 ammettano due "soluzioni" tra loro incoerenti. Prendiamo, per esempio, la congiunzione. Potremmo scegliere come regola di aggregazione la maggioranza semplice sulle *premesse* del giudizio ovvero p e q e quindi dedurre da queste il valore di $p \wedge q$. Per un approfondimento del metodo dell'aggregazione delle premesse si veda ad esempio [73].

abbiano gradi di paradossalità distinguibili[19]. Il caso congiuntivo è quello più paradossale perché non abbiamo alcuna intuizione alternativa sulla tavola di verità della congiunzione. Qui, l'aggregazione a maggioranza semplice ci sta conducendo a un giudizio collettivo incoerente. Il caso dell'implicazione è ben più aperto a dubbi. Supponiamo di aver dato le seguenti interpretazioni agli enunciati:

- p sta per "il fumo è dannosissimo per la salute"
- q sta per "chi fuma deve smettere immediatamente"
- $p \to q$ sta per "se il fumo è dannosissimo per la salute, allora chi fuma deve smettere immediatamente"

La maggioranza semplice è incoerente perché viola il *modus ponens*. Leggiamo i profili individuali secondo questa interpretazione. Il Giudice 1 ritiene che se il fumo è dannosissimo per la salute, allora chi fuma debba smettere immediatamente[20], ma non accetta né il fatto che il fumo sia dannosissimo per la salute[21] né il fatto che chi fuma debba smettere immediatamente[22]. Il Giudice 2 differisce, nel suo giudizio sulla questione, dal Giudice 1 perché concorda sul fatto che chi fuma debba smettere immediatamente[23]. Il Giudice 3, infine, ritiene che fumare sia dannosissimo per la salute e al tempo stesso non ritiene che sia necessario smettere immediatamente[24]. Dovendo essere coerente è costretto a sostenere la posizione per cui se è vero che il fumo è dannosissimo alla salute, comunque, non è necessario smettere immediatamente. In modo del tutto intuitivo (e necessariamente soggettivo) è ragionevole ritenere che benché tutti formalmente consistenti, non tutti e tre i Giudici lo siano per buone ragioni. In questo senso le ragioni del Giudice 1 sono palesemente false, mentre quelle del Giudice 3 almeno discutibili. Forse quello che incontra più il buon senso è il Giudice 2. Il paragone con i tre Giudici del problema congiuntivo è tuttavia molto eloquente.

Passiamo ora a sviluppare in modo più sistematico il punto di vista logico sull'aggregazione e cominciamo introducendo un po' di terminologia e di notazione. Un *ordine del giorno* o *agenda* $\mathscr{A}$ è un insieme non vuoto di enunciati della forma

$$\mathscr{A} = \{\theta, \neg\theta \mid \theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}\}.$$

Per esempio, l'agenda del dilemma discorsivo raffigurato nella Tavola 3 è

$$\{p, \neg p, q, \neg q, r \leftrightarrow (p \wedge q), \neg(r \leftrightarrow (p \wedge q)), r, \neg r\}$$

mentre quella dell'esempio congiuntivo nella Tavola 4 è

$$\{p, \neg p, q, \neg q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}.$$

19 Si tratta di un caso in cui all'espressione "paradosso" si attribuisce bene il senso etimologicamente originario di un qualcosa che va al di là dell'opinione comune.

20 Per esempio perché ritiene auspicabile che non ci si comporti in modo dannoso per la salute.

21 Per esempio perché si trova in compagnia dei negazionisti, come lo statistico R. Fisher, che negli anni 60 sostenevano che esistesse un gene che causa sia la predisposizione a fumare che quella ad avere tumori al polmone.

22 Per esempio perché lui non fuma e ritiene che ognuno debba decidere per sé.

23 I motivi potrebbero includere il costo delle sigarette, il cattivo odore del fumo, il fatto che 2 è un irriducibile paternalista, ecc.

24 Per esempio perché è un fumatore che non riesce a smettere.

Vogliamo costruire un modello astratto di aggregazione dei giudizi, quindi non facciamo alcuna ipotesi sulla natura o il contenuto degli elementi dell'agenda se non che questi costituiscano ciò su cui gli individui e la società sono chiamati ad esprimersi. Tutto ciò che segue è indipendente dal fatto che pensiamo gli elementi di $\mathscr{A}$ come allocazioni possibili di beni economici ai membri della società, candidati in una tornata elettorale, o qualsiasi altro oggetto dell'interesse individuale e collettivo.

Un'assunzione comune, ma non del tutto auto evidente, che si fa in letteratura consiste nell'escludere che tautologie e contraddizioni possano essere all'ordine del giorno[25]. Inoltre, nell'interesse di limitare la quantità di dettagli puramente formali della presentazione, stipuliamo che la negazione sia involutiva nel senso classico, e quindi conveniamo che $\neg\neg\theta$ altro non sia che θ.

Gli individui del modello che stiamo costruendo sono chiamati ad esprimersi sugli elementi dell'agenda e lo fanno *scegliendo* quegli enunciati che corrispondono al giudizio che vogliono esprimere. Data un'agenda $\mathscr{A}$ chiamiamo $\Gamma_i \subseteq \mathscr{A}$ l' *insieme dei giudizi individuali* espressi da i. Ad esempio, nel caso congiuntivo della Tavola 4, abbiamo usato $\Gamma_1 = \{p, q, p \wedge q\} \subseteq \{p, \neg p, q, \neg q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$.

Come anticipato dagli esempi, siamo interessati all'*aggregazione* degli insiemi di giudizi individuali. Siamo cioè interessati a definire le possibili funzioni o regole R che, dati i giudizi degli individui, ci restituiscano un giudizio che rappresenti il più fedelmente possibile, il giudizio della collettività. La prima cosa che dobbiamo fare è identificare dominio e codominio opportuni per questa funzione R. Per farlo è utile introdurre il concetto di *valutazione derivata da* Γ_i.

Dato un insieme di giudizi individuali Γ_i definiamo $v_{\Gamma_i} : \mathscr{A} \to \{0, 1, a\}$ ponendo

$$v_{\Gamma_i}(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ se } \theta \in \Gamma_i \\ 0, \text{ se } \neg\theta \in \Gamma_i \\ a, \text{ altrimenti }. \end{cases} \tag{2.9}$$

Se interpretiamo $v_{\Gamma_i}(\theta) = 1$ (oppure 0) come "l'agente i accetta (oppure rifiuta) θ" e $v_{\Gamma_i}(\theta) = a$ come "l'agente i si astiene su θ" otteniamo dalla (2.9) una mappa che, sotto certe condizioni sui Γ_i, ci fornisce una semantica per ragionare sui giudizi individuali. La descrizione di queste condizioni ci offre un modo naturale di identificare le proprietà logiche necessarie e sufficienti a generare i risultati di impossibilità dell'aggregazione. Come vedremo, se operiamo opportune restrizioni sui giudizi individuali (Sezione 2.2.1) e opportune restrizioni sulle regole di aggregazione (sezione Sezione 2.2.2) possiamo isolare le condizioni sull'agenda (Sezione 2.2.3) che ci portano a un teorema canonico di impossibilità logica di aggregazione da cui il teorema di Arrow segue come corollario (Sezione 2.2.4.).

[25] L'assunzione è certamente motivata dall'interesse sui teoremi di impossibilità che anima l'area di ricerca.

2.2.1. *Correttezza formale dei giudizi individuali*

Se non imponiamo restrizioni sui Γ_i otteniamo 3^k profili individuali distinti, dove $k = |\mathscr{A}|$. Molti di questi evidentemente non soddisferanno i più ovvi criteri di *correttezza formale* propri del concetto di "giudizio" che vogliamo caratterizzare[26] né criteri di *adeguatezza materiale* rispetto all'interpretazione intesa di "giudizio collettivo". Cominciamo con i primi.

Abbiamo insistito nella Sezione 2.1.2 sul fatto che i concetti di soddisfacibilità e consistenza fossero due caratterizzazioni equivalenti (sotto certe condizioni) del punto di vista logico sul concetto di agente razionale. Non sorprende dunque che l'analisi logica dei problemi di aggregazione muova dalla richiesta che i giudizi individuali siano coerenti. Richiediamo cioè che

(G.1) *Coerenza.* Per ogni $\Gamma_i \subseteq \mathscr{A}$, valga che Γ_i è soddisfacibile.

È immediato osservare come, nel caso in cui Γ_i sia un insieme di variabili proposizionali, (G.1) equivalga a richiedere che la valutazione indotta da Γ_i, v_{Γ_i}, sia una funzione. Più in generale, sotto certe condizioni formali che omettiamo, ma che sono soddisfatte nella nostra analisi, (G.1) equivale (come conseguenza del teorema di completezza proposizionale classico (Teorema 2.26 sopra)), a richiedere che il sottoinsieme di $\mathscr{A}$ selezionato da Γ_i sia *consistente*, cioè che non si dia il caso che $\Gamma_i \mid\!\sim \theta \wedge \neg\theta$.

Se oltre al fatto che sia una funzione, troviamo desiderabile anche che v_{Γ_i} sia totale o definita su tutto, dobbiamo imporre che

(G.2) *Completezza.* Per $\theta \in \mathscr{A}, \Gamma_i \subseteq \mathscr{A}$ valga $\theta \in \Gamma_i$ oppure $\neg\theta \in \Gamma_i$,

dove in presenza di (G.1) la disgiunzione è chiaramente esclusiva.

Come illustrazione delle condizioni appena introdotte, supponiamo come sopra che $\mathscr{A} = \{p, \neg p, q, \neg q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$. (G.1) esclude tutti i Γ_i che esprimono posizioni contraddittorie su una o più mozioni all'ordine del giorno, come ad esempio $\Gamma_1 = \mathscr{A} = \{p, \neg p, q, \neg q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$. (G.2) invece richiede che l'agente i prenda posizione su *tutti* gli argomenti all'ordine del giorno. Esclude quindi giudizi individuali come $\Gamma_2 = \{p\}$[27].

Le seguenti proposizioni sono conseguenze delle definizioni e delle osservazioni che abbiamo appena fatto.

2.27. PROPOSIZIONE. *Le seguenti affermazioni per $\theta \in \mathscr{A}, \Gamma_i \subseteq \mathscr{A}$ sono equivalenti* .

(1) Γ_i *soddisfa* (G.1) *e* (G.2)
(2) $\theta \in \Gamma_i$ *oppure* $\neg\theta \in \Gamma_i$ *ma non entrambi.*

[26] La situazione non è diversa da quella che si affronta nello "studio di funzione" alle scuole superiori. La prima parte dell'esercizio consiste nell'individuare, *per la particolare funzione da studiare*, il dominio di definizione. Per esempio lo studio di

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

deve iniziare dalla definizione di $dom(f) =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. Questo ci è imposto dalla definizione che accettiamo di frazione.

[27] Si noti che (G.2) *senza* (G.1) *non esclude* Γ_1.

(3) *Γ_i è un insieme maxiconsistente*

2.28. PROPOSIZIONE. *Se un insieme di giudizi individuali Γ_i è maxiconsistente, allora esiste una valutazione proposizionale* classica $v : \mathscr{L} \to \{0,1\}$ *tale che, per ogni $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}$*

$$v_{\Gamma_i}(\theta) = v(\theta), \tag{2.10}$$

dove v_{Γ_i} è definita come sopra.

In altre parole, la restrizione ai Γ_i maxiconsistenti automaticamente ci preclude la possibilità di costruire un modello in cui gli individui possano "sospendere" il proprio giudizio, e a maggior ragione un modello in cui sia "razionale" farlo[28]. L'analisi elementare che abbiamo appena condotto ci dice che *se* fossimo interessati a studiare questa situazione, *allora* dovremmo considerare un dominio più esteso, ovvero quello in cui i profili individuali siano vincolati soltanto da (G.1). In tal caso, come conseguenza immediata della definizione di valutazione indotta da Γ_i catturata dalla (2.9), dovremmo uscire dall'ambito della logica classica e introdurre una semantica polivalente.

Chiudiamo la discussione sulle restrizioni dei giudizi individuali ricordando una proprietà della nozione di conseguenza logica.

2.29. PROPOSIZIONE. *Supponiamo che Γ_i sia un insieme maxiconsistente. Allora Γ_i è* deduttivamente chiuso*, cioè*

$$\Gamma_i \models \theta \Rightarrow \theta \in \Gamma_i.$$

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo che $\Gamma_i \models \theta$, per qualche $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}$ e supponiamo che $\neg\theta \in \Gamma_i$. Per la Proposizione 2.17 questo implica che $\Gamma_i \models \neg\theta$. Ma questo è assurdo dal momento che per ipotesi $\Gamma_i \models \theta$ e Γ_i è consistente, dunque $\neg\theta \notin \Gamma_i$. Dall'ipotesi di completezza concludiamo che $\theta \in \Gamma_i$, e che quindi Γ_i è deduttivamente chiuso. □

Una piccola digressione è utile ad apprezzare il ruolo della chiusura deduttiva nel distinguere il *dilemma discorsivo* che abbiamo richiamato in apertura di sezione, dal suo precursore giuridico, il *paradosso dottrinale* [98]. In quest'ultimo l'enunciato $r \leftrightarrow (p \wedge q)$ non è oggetto di giudizio dal momento che cattura la dottrina legale su cui, ai giudici, non è concesso discutere. Il problema diventa quindi quello rappresentato nella Tavola 5. A differenza del dilemma discorsivo, il paradosso dottrinale ammette *due* modi di applicare la regola di aggregazione a maggioranza. L'aggregazione sulle "premesse" (cioè p e q) oppure quella sulla "conclusione" (cioè r). Nel primo caso la chiusura deduttiva insieme alla dottrina legale porta a concludere $\{r\}$. D'altra parte l'aggregazione a maggioranza sulla conclusione sancisce $\{\neg r\}$ con la conclusione indesiderabile, ma non paradossale, che la scelta tra aggregazione delle premesse e aggregazione della conclusione determina, sugli stessi giudizi individuali, risultati distinti.

[28] Le virtù connesse alla sospensione del giudizio sono ben note. Come Tamburino in *Bambi* ricorda ai più piccoli (e Wittgenstein nel *Tractatus* ai più seriosi) "Quando non sai cosa dire è meglio che non dici nulla" ("Whereof one cannot speak, thereof one must be silent").

	p	q	r
Giudice 1	1	1	1
Giudice 2	1	0	0
Giudice 3	0	1	0
Maggioranza	*1*	*1*	*0*

TAVOLA 5. Rappresentazione tabulare del paradosso dottrinale. Gli enunciati a sinistra della doppia riga sono le *premesse* dell'argomento giuridico e quello alla destra la sua *conclusione*.

Poiché siamo interessati a studiare il caso più semplice possibile, prenderemo in considerazione soltanto (a meno di affermazione esplicita del contrario) insiemi di giudizi universali maxiconsistenti[29].

2.30. DEFINIZIONE. Diciamo che $\Gamma_i \subseteq \mathscr{A}$ è un insieme *ammissibile di giudizi individuali* se è maxiconsistente.

Giova ricordare come l'interpretazione intesa di Γ_i sia quella dell'insieme delle mozioni di $\mathscr{A}$ su cui l'agente i è chiamato ad esprimersi, e come conseguenza della definizione, (i) deve farlo e (ii) può farlo solo positivamente o negativamente. È immediato osservare che in una società di m individui esistono esattamente $m \cdot 2^k$ giudizi completi distinti, dove k è il numero di variabili proposizionali che occorrono negli enunciati che compongono l'agenda. La m-upla $\langle \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m \rangle$ ci dà l'insieme o profilo dei giudizi individuali ammissibili espressi da tutti gli m membri della società. di giudizi individuali ammissibili.

All'interno della restrizione posta dalla maxiconsistenza, ogni profilo individuale è ammissibile. Questa è la versione logica del *principio di universalità del dominio*[30].

Stiamo assumendo che i profili di giudizio individuali siano consistenti. Questo è ancora una volta giustificato, a posteriori – proprio come nell'esempio dello studio di funzione – dal nostro fine, cioè studiare il problema dell'aggregazione *razionale* dei giudizi. Gli esempi che abbiamo usato nella Tavola 3 e nella Tavola 4 di certo non sarebbero *così* interessanti se i singoli giudici fossero ovviamente irrazionali. Ciò che invece rende questo tipo di problema interessante è il fatto che il modo apparentemente più naturale – vince la maggioranza – di aggregare giudizi *individualmente consistenti* porta a un giudizio collettivamente inconsistente. Questo giustifica l'esclusione, dalla nostra analisi, degli insiemi di giudizi individuali inconsistenti. Possiamo tuttavia invertire il ragionamento e concludere che se volessimo studiare meccanismi di aggregazione reali, per esempio i meccanismi elettorali, dovremmo necessariamente ammettere i profili individuali

29 Risultati di impossibilità interessanti sono ottenibili anche assumendo che i giudizi individuali siano consistenti e deduttivamente chiusi, ma non necessariamente completi, [61] [48] [106].

30 Agli occhi della logica questo dominio sembra decisamente "meno universale" del dominio universale di Arrow. Come illustrato dal Lemma 2.25, ogni insieme consistente è contenuto in un insieme maxiconsistente, ma il completamento a un insieme massimale, di sicuro, non avviene in modo del tutto gratuito. A un'analisi più approfondita, tuttavia, scopriremo che è vero il contrario: le condizioni logiche sull'aggregazione sono più generali di quelle proposte da Arrow.

inconsistenti. Nessuno troverebbe accettabile che si possa togliere il diritto di voto ai cittadini che si contraddicono. Quindi un'analisi dei meccanismi elettorali concreti sembra presupporre una relazione di conseguenza sufficientemente espressiva da permetterci di ragionare in modo non banale sulle contraddizioni. Questo ci fornisce l'occasione per una riflessione metodologica importante e generale: *Durante la costruzione del modello emergono considerazioni, spesso frutto di circoli virtuosi, che ci portano a raffinare sempre di più la comprensione degli oggetti che stiamo costruendo.*

2.2.2. *Adeguatezza materiale della scelta collettiva*

Come nel caso delle funzioni di benessere e di scelta sociale, siamo interessati a caratterizzare le regole di aggregazione che rappresentano, nell'*output*, il più fedelmente possibile l'*input* fornito dai singoli individui. Vogliamo cioè individuare le regole di aggregazione adeguate a cogliere l'interpretazione intesa di scelta razionale (democratica, giusta, ecc.) collettiva.

In continuità con la sezione precedente iniziamo con un criterio di correttezza formale, che consiste nell'identificare dominio e codominio della funzione di aggregazione R.

Denotiamo con $G(\mathscr{A})$ l'insieme di tutti i profili di giudizi ammissibili rispetto all'agenda $\mathscr{A}$.

2.31. DEFINIZIONE (*Regola di aggregazione*). Una *regola di aggregazione per i giudizi* è una funzione

$$R : G(\mathscr{A})^m \to G(\mathscr{A})$$

tale che

$$R(\Gamma_1, \dots, \Gamma_m) = \Gamma \subseteq \mathscr{A}.$$

Osserviamo immediatamente che la definizione di R automaticamente esclude regole di aggregazione molto naturali, come ad esempio la regola di aggregazione a maggioranza che abbiamo usato nell'esempio giudiziario:

$$R_{magg} = \{\theta \in \mathscr{A} \mid \#(i \text{ t.c. } \theta \in \Gamma_i) \geq q\}$$

dove

$$q = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, \text{ se } n = |S| \text{ è dispari} \\ \frac{n}{2}, \text{ se } n = |S| \text{ è pari} \end{cases}$$

non può avere $G(\mathscr{A})$ come codominio, dal momento che nulla esclude, nel caso in cui n sia pari, che ci siano risultati di parità per qualche coppia $\theta, \neg\theta \in \mathscr{A}$. Questo porta il giudizio collettivo a violare la coerenza. A un livello di analisi ancora più immediato, la regola di maggioranza dà luogo, nel dilemma discorsivo della Tavola 3, a un giudizio collettivo inconsistente, cioè a un giudizio fuori da $G(\mathscr{A})$.

La scelta del dominio e del codominio delle regole di aggregazione per i giudizi mette dunque in evidenza l'ipotesi di modellazione secondo cui gli individui e la collettività sono soggetti agli stessi criteri di razionalità. Questa identificazione della razionalità individuale con quella collettiva non è, dal punto di vista concettuale e filosofico, per niente ovvia. In primo luogo l'idea che la società possa agire come un unico agente collettivo – lo Stato – è, per quanto e se radicata nella nostra cultura, tutt'altro che naturale.

In secondo luogo, se diamo per scontato che ciò sia plausibile, è naturale aspettarsi che la società sia qualcosa di più della "somma" delle sue parti e che quindi sia possibile imporle criteri più stringenti. Come vedremo più avanti le cose sono molto diverse da come sembrano.

Le restrizioni formali della Definizione 2.31, pur escludendo alcune regole di aggregazione (tra cui quella a maggioranza!) certamente non determinano un unico modo di aggregare i profili di giudizi individuali ammissibili in un profilo collettivo. Tra le molte regole possibili, alcune saranno ovviamente indesiderabili *alla luce dell'interpretazione intesa del concetto di scelta collettiva*. È opportuno osservare come già questo ci dia un suggerimento importante sull'interpretazione dei teoremi di impossibilità della scelta collettiva: si tratta di risultati logico matematici che acquisiscono rilevanza economica o politica *soltanto* alla luce dell'interpretazione che attribuiamo ai parametri del modello in cui li dimostriamo. Quanto più l'interpretazione sarà indubitabile, come nel caso della non-dittatorialità, tanto più il risultato sarà ricco di conseguenze "pratiche"[31]. Tuttavia l'interpretazione delle altre condizioni che stiamo per introdurre è soggetta a numerose riserve. Non potendo rendere conto delle tante posizioni discusse in letteratura, ci daremo lo scopo di procedere per eliminazione delle regole formalmente corrette ma *materialmente* inadeguate a caratterizzare la scelta collettiva come funzione dei giudizi individuali. Eleveremo a "principio di razionalità" (o *assioma*) le restrizioni sufficienti ad escludere una regola di aggregazione che, secondo gli argomenti che forniremo, produca un risultato indesiderabile alla luce della nostra interpretazione intesa. Alla fine di questa serie di esclusioni avremo l'insieme delle regole desiderabili[32].

Come anticipato, la prima situazione che vogliamo escludere è quella per cui il giudizio individuale di uno dei membri della società possa essere imposto a tutti gli altri. Nella letteratura della scelta sociale un individuo del genere è spesso chiamato *dittatore* e la proprietà che ne esclude l'esistenza *non dittatorialità*.

(R.1) *Non dittatorialità.* Non esiste $i \in M$ tale che per ogni profilo $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$,

$$R(\Gamma_1 \ldots, \Gamma_m) = \Gamma_i$$

È inoltre naturale voler escludere le regole di aggregazione che introducano disparità di opinione quando tutti i membri della società si esprimono nello stesso modo, ovvero che la regola di aggregazione debba rispettare l'*unanimità*:

(R.2) *Unanimità.* Per ogni $\theta \in \mathscr{A}$ e per ogni profilo $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$

$$\theta \in \Gamma_i \; i = 1, \ldots, m \Rightarrow \theta \in R(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m).$$

[31] Come vedremo meglio in seguito, i teoremi di impossibilità possono esser letti come – e questa è l'interpretazione che ne ha dato lo stesso Arrow – risultati che ci aiutano a identificare lo spazio logico delle possibilità. Sono della forma: "se vogliamo ottenere certi risultati (nel senso dell'interpretazione) non possiamo fare certe assunzioni".

[32] Come ci ricorda Italo Calvino, *il meglio che possiamo fare è evitare il peggio.*. Purtroppo però, il Teorema di Arrow ci dirà che evitando il peggio non ci rimane nulla.

Accetteremo come non controverso il principio di unanimità, anche se la letteratura non si esprime in modo unanime a tal proposito.[33]

Infine è ragionevole voler escludere tutte le regole che, nell'aggregazione dei giudizi individuali, introducano valutazioni diverse da quelle all'ordine del giorno. Vogliamo cioè che R sia *indipendente dalle alternative irrilevanti*:

(R.3) *Indipendenza.* Per ogni θ nell'agenda $\mathscr{A}$ e per ogni coppia di profili $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$ e $(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$

$$[\theta \in \Gamma_i \Leftrightarrow \theta \in \Delta_i \; i = 1, \ldots, m] \Rightarrow [\theta \in R(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m) \Leftrightarrow \theta \in R(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)].$$

In altre parole, se giudizi espressi nei profili $\vec{\Gamma}$[34] e $\vec{\Delta}$ sono indistinguibili rispetto a θ, allora non vogliamo che $R(\vec{\Gamma})$ e $R(\vec{\Delta})$ siano distinguibili sulla base di θ. Proprio come nel caso delle funzioni di scelta sociale e di benessere collettivo studiate da Arrow (in cui si richiede che l'ordine di preferenza collettivo su ogni coppia di alternative X e Y dipenda dalle preferenze individuali su X e Y e da nient'altro) la richiesta di indipendenza restringe l'attenzione su quelle regole di aggregazione il cui risultato dipende unicamente dall'*input* fornito dai profili individuali. Poiché nella letteratura sulla scelta sociale e sull'economia del benessere la condizione di indipendenza è di gran lunga la proprietà più dibattuta[35], è interessante elaborarne un'analisi puramente logica.

Cominciamo richiamando la distinzione che abbiamo già discusso tra dilemma discorsivo e paradosso dottrinale. In quest'ultimo caso, l'indipendenza impone che l'aggregazione avvenga prendendo in considerazione soltanto i singoli enunciati che compongono l'agenda. Nel caso particolare questo implica l'esclusione della dottrina legale dall'agenda. Ma questo significa che, ai fini dell'analisi formale del problema, p, q e r sono logicamente indipendenti[36].

Tuttavia, se ragioniamo da un punto di vista puramente logico, la proprietà di indipendenza appare estremamente naturale. Questo ci permette di attribuire (almeno una parte) dell'inadeguatezza materiale dell'indipendenza alle caratteristiche formali della relazione di conseguenza che abbiamo introdotto nella Sezione 2.1. Avremo, tra l'altro, l'occasione di fare una precisazione su $\models$ mostrando che non dipende dal linguaggio $\mathscr{L}$ di partenza.

Per afferrare concretamente l'idea, poniamo $\mathscr{L} = \{p, q, r\}$ e $\mathscr{L}' = \{p, q, r, s, t\}$. Supponiamo che $\Gamma = \{p, q\}$ e $\theta = (p \wedge q)$. Segue ovviamente dalla definizione di $\mathscr{E}\mathscr{L}$ che $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}, \Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}', \theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}$ e $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}'$. Ciò che invece non è ovvio dalla definizione di $\models$, è che il seguente caso sia escluso, cioè che θ sia una conseguenza logica di Γ su $\mathscr{L}$ ma non su $\mathscr{L}'$, ovvero che si verifichino simultaneamente

[33] Come punto di ingresso nella letteratura si veda [124]. Un lavoro storicamente importante è [195].

[34] Usiamo la notazione $\vec{\Gamma}$ per denotare il profilo $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$.

[35] Mongin [122] fornisce un punto di partenza per la letteratura logico-matematica sull'argomento. Per una ricognizione degli aspetti legati alla teoria politica si può consultare [113], in particolare il capitolo 6, che tra l'altro fornisce un'analisi dei passi rilevanti in cui Arrow discute il principio. Infine, per una ricostruzione storica ricca di dettagli da Condorcet fino ad Arrow, si veda [120].

[36] E questa è una delle motivazioni che ha portato Philip Pettit [136] a formulare il dilemma discorsivo da cui siamo partiti.

$$\forall v \in \mathbb{V}^{\mathscr{L}}, \text{ se } v(\gamma) = 1 \, \forall \gamma \in \Gamma \text{ allora } v(\theta) = 1 \tag{2.11}$$

$$\exists v' \in \mathbb{V}^{\mathscr{L}'}, \text{ t.c.} \, v'(\gamma) = 1 \, \forall \gamma \in \Gamma \text{ ma } v'(\theta) = 0. \tag{2.12}$$

La Proposizione 2.33 dimostra che questo non può accadere e che quindi la relazione $\models$ è indipendente dal linguaggio che prendiamo in considerazione. Prima però dimostriamo il seguente lemma che, intuitivamente, ci dice che la semantica proposizionale classica soddisfa una forma di *indipendenza dalle variabili proposizionali irrilevanti*:

2.32. LEMMA. *Siano $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ due linguaggi proposizionali con $v \in \mathbb{V}^L$ e $v' \in \mathbb{V}^{L'}$ rispettivamente. Se*

(1) *$\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L} \cap \mathscr{E}\mathscr{L}'$ e*
(2) *$v(p) = v'(p)$ per ogni variabile proposizionale p che occorre in θ*

allora

$$v(\theta) = v'(\theta).$$

DIMOSTRAZIONE. Per induzione sulla lunghezza di θ che denotiamo con $|\theta|$. Se $|\theta| = 1$ allora $\theta = p$ per qualche $p \in \mathscr{L} \cap \mathscr{L}'$ e segue immediatamente da (2) che

$$v(\theta) = v(p) = v'(p) = v'(\theta).$$

Assumiamo (ipotesi induttiva) il risultato per tutti i $\phi \in \mathscr{E}\mathscr{L} \cap \mathscr{E}\mathscr{L}'$ tali che $|\phi| < |\theta|$. Per la definizione dell'insieme degli enunciati[37] segue che θ deve essere uno tra $\neg\phi, (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \to \psi)$ per qualche $\phi, \psi \in \mathscr{E}\mathscr{L}$. Supponiamo che $\theta = (\phi \wedge \psi)$. Chiaramente le variabili proposizionali che compaiono in θ sono esattamente quelle che compaiono in ϕ oppure in ψ e per (2) v e v' concordano su queste variabili. Poiché $|\phi|, |\psi| < |\theta|$ possiamo applicare l'ipotesi induttiva ottenendo

$$v(\theta) = \left.\begin{cases} 1 & \text{se } v(\phi) = v(\psi) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\right\} = \left.\begin{cases} 1 & \text{se } v'(\phi) = v'(\psi) = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\right\} = v'(\theta)$$

Gli altri casi sono simili. □

Il lemma che abbiamo appena dimostrato è ricco di conseguenze. La seguente proposizione mostra, come anticipato, l'indipendenza dal linguaggio di $\models$.

2.33. PROPOSIZIONE. *Siano $\mathscr{L}, \mathscr{L}'$ due linguaggi proposizionali con $v \in \mathbb{V}^L$ e $v' \in \mathbb{V}^{L'}$ rispettivamente. Siano inoltre $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}' \cap \mathscr{E}\mathscr{L}', \theta \in \mathscr{E}\mathscr{L} \cap \mathscr{E}\mathscr{L}'$ e supponiamo che*

$$\forall v \in \mathbb{V}^{\mathscr{L}}, \textit{ se } v(\gamma) = 1 \, \forall \gamma \in \Gamma \textit{ allora } v(\theta) = 1.$$

Allora

$$\forall v' \in \mathbb{V}^{\mathscr{L}'}, \textit{ se } v'(\gamma) = 1 \, \forall \gamma \in \Gamma \textit{ allora } v'(\theta) = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo che $\exists v' \in \mathbb{V}^{\mathscr{L}'}$ tale che $v'(\gamma) = 1 \, \forall \gamma \in \Gamma$ e $v'(\theta) = 0$ e deriviamo una contraddizione. Definiamo una valutazione v su $\mathscr{L}$ ponendo, per $p \in \mathscr{L}$,

$$v(p) = \begin{cases} v'(p) & \text{se } p \in \mathscr{L} \cap \mathscr{L}' \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.13}$$

[37] A rigore si dovrebbe addurre il *teorema di scomposizione univoca* come giustificazione dell'asserzione. Si tratta di un risultato ovvio, ma piuttosto noioso da dimostrare nel dettaglio: la definizione dell'insieme di enunciati ci garantisce che ogni enunciato sia "leggibile" in modo non ambiguo, e quindi che esista un unico modo di scomporlo negli elementi dell'alfabeto (linguaggio + punteggiatura) che lo compongono.

Per costruzione v è una valutazione su $\mathscr{L}$ che coincide con v' su tutte le variabili proposizionali $p \in \mathscr{L} \cap \mathscr{L}'$. Questo soddisfa le ipotesi del Lemma 2.32, che possiamo applicare ottenendo che

$$v(\phi) = v'(\phi) \quad \forall \phi \in \mathscr{E}\mathscr{L} \cap \mathscr{E}\mathscr{L}'.$$

Ma poiché abbiamo assunto che $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}' \cap \mathscr{E}\mathscr{L}'$ questo varrà in particolare per Γ e quindi

$$v(\phi) = v'(\phi) \quad \forall \phi \in \Gamma \text{ e } v(\theta) = v'(\theta).$$

Questo ci porta alla contraddizione desiderata dal momento che $v'(\gamma) = 1 \forall \gamma \in \Gamma$ per ipotesi e quindi $v(\gamma) = 1 \forall \gamma \in \Gamma$ e $v(\theta) = 0$. □

Questa proposizione gioca un ruolo centrale nella dimostrazione, che omettiamo, del seguente risultato.

2.34. TEOREMA (*Interpolazione*). *Siano $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}$ e $\phi \in \mathscr{E}\mathscr{L}'$ tali che $\theta \models \phi$. Allora vale una delle seguenti affermazioni*

(1) *θ non è soddisfacibile,*
(2) *ϕ è una tautologia,*
(3) *$\exists \psi \in \mathscr{E}\mathscr{L} \cap \mathscr{E}\mathscr{L}'$ tale che $\theta \models \psi$ e $\psi \models \phi$.*

Possiamo riassumere la discussione dicendo che, da un punto di vista logico[38] le condizioni di non-dittatorialità, unanimità e indipendenza trovano una giustificazione formale comune nel *principio di composizionalità* che abbiamo già discusso, oltre che nel contributo che apportano individualmente alla costruzione di regole di aggregazione materialmente adeguate.

Chiudiamo[39] la discussione sulle proprietà desiderabili di R osservando come la condizione di indipendenza sia un caso speciale di una condizione che viene spesso imposta alle regole di aggregazione dei giudizi:

(R.4) *Sisitematicità*. Per ogni coppia $\theta, \phi \in \mathscr{A}$ e per ogni coppia di profili $(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m)$ e $(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)$

$$[\theta \in \Gamma_i \Leftrightarrow \phi \in \Delta_i \; i = 1, \ldots, m] \Rightarrow [\theta \in R(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m) \Leftrightarrow \phi \in R(\Delta_1, \ldots, \Delta_m)].$$

In buona sostanza (R.4) aggiunge all'indipendenza la richiesta di fare a meno delle differenze puramente sintattiche tra θ e ϕ[40]. La condizione di sistematicità ci permette di enunciare un primo risultato, si veda [135], di impossibilità logica dell'aggregazione che rende conto del problema sollevato dal dilemma discorsivo.

2.35. TEOREMA. *Sia $\mathscr{A} = \{p, \neg p, q, \neg q, (p \wedge q), \neg(p \wedge q)\}$. Non esiste alcuna regola di aggregazione $R : G(\mathscr{A})^m \to G(\mathscr{A})$ che soddisfi le condizioni di unanimità, sistematicità e non dittatorialità.*

[38] Più precisamente, dal punto di vista della logica proposizionale classica, l'unica che abbiamo preso in considerazione, ma di certo non l'unica che avremmo potuto prendere in considerazione.

[39] Non perché non ve ne siano altre, ma perché la loro analisi va ben oltre i nostri scopi presenti. Chi fosse interessato a un quadro completo può consultare, in ordine di accessibilità, [108] [107] [123] [73] [46] [48].

[40] Si tratta dell'analogo logico della *condizione di neutralità* della scelta sociale introdotta da Kenneth May per la sua caratterizzazione della regola di maggioranza e analizzata in dettaglio da Sen [157].

È opportuno osservare l'importanza della definizione della regola R. Infatti è immediato mostrare che la regola di aggregazione a maggioranza semplice che abbiamo usato per illustrare l'esempio giudiziario nella Tavola 3 soddisfa entrambe le condizioni. Inoltre, come abbiamo osservato, tutti i giudici sono individualmente razionali, nel senso che selezionano un insieme maxiconsistente dall'agenda. Questo garantisce che R_{magg} sia definita su un dominio adeguato. Di conseguenza il teorema ci mostra che la R_{magg} richiede, *su questo tipo di agenda*, condizioni meno restrittive della maxiconsistenza.

Naturalmente questa considerazione ci porta a sviluppare l'analisi delle condizioni sull'agenda.

2.2.3. *Condizioni sull'agenda*

La prospettiva logica sul problema dell'aggregazione mette dunque in luce un terzo livello di restrizioni e esclusioni possibili, oltre a quelle sui giudizi individuali che abbiamo discusso nella Sezione 2.2.1 e quelle sulle regole di aggregazione che abbiamo analizzato nella sezione precedente. In particolare, come suggerito dal Teorema 2.35 possiamo chiederci sotto quali condizioni su $\mathscr{A}$ le condizioni che abbiamo imposto sui Γ_i e su R siano così restrittive da restituirci l'insieme vuoto come unica regola di aggregazione possibile.

Diciamo che un'agenda $\mathscr{A}$ è

(A.0) *Non banale* se esiste una sottoagenda $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ (di almeno tre elementi) *inconsistente minimale*;

(A.1) *Minimamente connessa* se esiste una $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ *inconsistente minimale* e una scelta di $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{B}$ tale che $|\mathscr{C}| = 2$ e $\mathscr{B} \setminus \mathscr{C} \cup \{\neg\theta \mid \theta \in \mathscr{C}\}$ è consistente;

(A.2) *Totalmente connessa* se per $\theta, \phi \in \mathscr{A}$, esistono $\theta_1, \theta_2 \ldots, \theta_k \in \mathscr{A}$ tali che

$$\theta = \theta_1 \models_{\mathscr{B}} \theta_2 \models_{\mathscr{B}} \ldots \models_{\mathscr{B}} \theta_k = \phi,$$

dove per $1 \leq i < j \leq k$, $\theta_i \models_{\mathscr{B}} \theta_j$ se e solo se, per $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$,
(1) $\{\theta_i\} \cup \mathscr{B} \models \theta_j$
(2) $\mathscr{B} \cup \{\theta_i, \neg\theta_j\}$ è consistente[41].

L'agenda $\mathscr{A} = \{p, \neg p, q, \neg q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$ è non banale dal momento che la sottoagenda $\mathscr{B} = \{p, \neg q, p \wedge q\} \subseteq \mathscr{A}$ è inconsistente minimale. Per un esempio di agenda banale, supponiamo di modificare il dilemma congiuntivo illustrato nella Tavola 4 sostituendo all'agenda originaria l'agenda $\mathscr{A}' = \{p, q, p \wedge q \neg p, \neg q, \neg(p \wedge q)\}$. In questo caso l'agenda è banale dal momento che l'unico insieme di giudizi individuali ammissibili coincide con l'agenda stessa. Che l'agenda sia non banale è la condizione minima richiesta affinché l'aggregazione a maggioranza semplice produca *l'effetto di Condorcet*, nell'espressione di [74].

41 Giova ricordare che $\{\neg\theta_j\} \cup \mathscr{B}$ è consistente se e solo se $\mathscr{B} \not\models \theta_j$. La condizione espressa dalla (2) è quindi necessaria per consentire che si diano casi non banali in cui $\theta_i \models_{\mathscr{B}} \theta_j$ e $\theta_i \not\models \theta_j$.

Segue dalle proprietà della conseguenza classica $\models$ che se $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ è minimalmente inconsistente allora $\mathscr{B} \setminus \theta$ è soddisfacibile, per qualche $\theta \in \mathscr{B}$. Dunque $\mathscr{B} \setminus \theta \models \neg\theta$[42].

Intuitivamente, la condizione imposta da (A.1) richiede che la sottoagenda minimalmente inconsistente $\mathscr{B}$ possa essere trasformata in un'agenda *consistente* attraverso la negazione di una coppia di enunciati che le appartengono. Così, l'agenda $\{p, \neg p, q, \neg q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$ soddisfa anche (A.1). D'altra parte, l'agenda $A = \{p, \neg p, q, \neg q, p \leftrightarrow q, \neg(p \leftrightarrow q)\}$ non è minimalmente connessa. Osserviamo che le sottoagende inconsistenti minimali sono tre:

$$\mathscr{A}_1 = \{p, \neg p, p \leftrightarrow q,\}$$
$$\mathscr{A}_2 = \{\neg p, q, p \leftrightarrow q,\}$$
$$\mathscr{A}_3 = \{p, q, \neg(p \leftrightarrow q)\},$$

tuttavia non è possibile trasformare alcuna delle sottoagende in una sottoagenda consistente attraverso la negazione di *due* enunciati in $\mathscr{A}$.

Infine, il contenuto intuitivo di (A.2) è evidente – ogni enunciato in $\mathscr{A}$ è deducibile (eventualmente modulo una scelta di altri elementi di $\mathscr{B}$) da ogni altro. Da un punto di vista logico si tratta chiaramente di una condizione molto restrittiva. Un'agenda che non la soddisfa è $\mathscr{A} = \{p, \neg p, q, \neg q, p \wedge q, \neg(p \wedge q)\}$. Non esiste infatti alcun θ in $\mathscr{A}$ tale che $\neg p \models q$, $\neg q \models p$, $\neg p \models p \wedge q$, $\neg q \models p \wedge q$.

Un'agenda che invece soddisfa (A.2) è la cosiddetta *agenda delle preferenze* che discuteremo dopo aver enunciato il teorema canonico di impossibilità sull'aggregazione dei giudizi, dovuto a Dokow e Holzman [48].

2.36. TEOREMA. (A.1) *e* (A.2) *sono necessarie e sufficienti affinché ogni regola di aggregazione di giudizi* $R : G(\mathscr{A})^m \to G(\mathscr{A})$ *che soddisfi le condizioni di unanimità e di indipendenza sia dittatoriale.*

Riportiamo l'idea della dimostrazione della sufficienza delle condizioni[43]. Supponiamo che $\mathscr{A}$ soddisfi (A.1) e (A.2) e che $R : G(\mathscr{A})^m \to G(\mathscr{A})$ soddisfi Indipendenza e Unanimità. Vogliamo dimostrare che è dittatoriale, cioè che esiste $i \in S$ tale che $\theta \in \Gamma_i \Rightarrow \theta \in R(\vec{\Gamma})$.

Osserviamo preliminarmente che la condizione di indipendenza, unitamente all'ipotesi di maxiconsistenza dei profili individuali, ci permette di estendere in modo naturale la definizione di valutazione indotta della (2.9) al giudizio collettivo ponendo

$$v_{R(\vec{\Gamma})}(\theta) = \begin{cases} 1, \text{ se } \theta \in \Gamma_C \\ 0, \text{ se } \neg\theta \in \Gamma_C \end{cases} \tag{2.14}$$

[42] Poiché ogni insieme consistente è incluso in un uno maxiconsistente, ogni insieme inconsistente contiene un sottoinsieme inconsistente minimale. In particolare osserviamo che se θ e $\neg\phi$ sono elementi distinti di un'agenda $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B} \cup \{\theta\} \models \phi$ per qualche $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ tale che $\{\mathscr{B}, \theta, \neg\phi\}$ è inconsistente e $\theta \not\models \phi$ allora esiste un $\mathscr{B} \neq \emptyset$ tale che $\{\mathscr{B}, \theta, \neg\phi\}$ è insoddisfacibile. Per il teorema di compattezza esiste un $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$ tale che $\{\mathscr{B}', \theta, \neg\phi\}$ è inconsistente minimale.

[43] Per i dettagli si rimanda a [46], [48].

dove Γ_C è quel sottoinsieme di S che determina il giudizio collettivo su θ. Che un tale $C \subset S$ esista è conseguenza del carattere funzionale di R e della condizione appunto di Indipendenza. Chiamiamo $C_\theta \subseteq S$ una *coalizione decisiva per* θ se

$$\theta \in \Gamma_c \Rightarrow \theta \in R(\vec{\Gamma}) \tag{2.15}$$

Il concetto di coalizione decisiva ci permette di riformulare la regola di aggregazione come segue, per ogni profilo ammissibile $\vec{\Gamma}$

$$R(\vec{\Gamma}) = \{\theta \in \mathscr{A} \mid \{i \in S : \theta \in \Gamma_i\} \in C_\theta\}. \tag{2.16}$$

La condizione di Unanimità può quindi essere descritta come la richiesta che S sia una coalizione decisiva per ogni $\theta \in \mathscr{A}$.

Torniamo ora all'idea della dimostrazione del teorema canonico di impossibilità. Vogliamo dimostrare che le ipotesi del teorema sono sufficienti a dare all'insieme delle coalizioni vincenti una struttura tale per cui esiste un individuo i che rende decisive tutte le coalizioni a cui appartiene – il dittatore.

2.37. LEMMA. *Per $\theta, \phi \in \mathscr{A}$, si ha $C_\theta = C_\phi$.*

Il fulcro della dimostrazione, di cui omettiamo i dettagli, consiste nello stabilire (come conseguenza di Unanimità e Indipendenza) che

$$\theta \models_{\mathscr{B}} \phi \Rightarrow C_\theta \subseteq C_\phi. \tag{2.17}$$

La dimostrazione si conclude con un'applicazione diretta di (A.2). Dalla condizione segue infatti che per ogni $\theta, \phi \in \mathscr{A}$ esiste una sequenza $\theta_1, \theta_2 \ldots, \theta_k \in \mathscr{A}$ tale che per $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$ vale $\theta = \theta_1 \models_{\mathscr{B}} \theta_2 \models_{\mathscr{B}} \ldots \models_{\mathscr{B}} \theta_k = \phi$. Dunque applicando la (2.17) abbiamo

$$C_\theta = C_{\theta_1} \subseteq C_{\theta_2} \subseteq \ldots \subseteq C_{\theta_k} = C_\phi.$$

Con argomento analogo si giunge all'inclusione inversa $C_\phi \subseteq C_\theta$, e quindi alla conclusione desiderata.

Dunque per ogni profilo ammissibile $\vec{\Gamma}$, $R(\vec{\Gamma})$ è determinato da un unico insieme di coalizioni decisive per ogni $\theta \in \mathscr{A}$. Denotiamo tale insieme con C^*.

2.38. LEMMA. *Sotto le ipotesi del Teorema 2.36 valgono i seguenti fatti*

(1) $S \in C^*$
(2) *Se* $C \notin C^*$ *allora* $S \setminus C \in C^*$
(3) $C \in C^*$ *e* $C \subseteq C' \Rightarrow C' \in C^*$
(4) $C_1, C_2 \in C^* \Rightarrow C_1 \cap C_2 \in C^*$.

La (1) segue direttamente dalla condizione di Unanimità (e le considerazioni che portano alla (2.16)).

(2) Supponiamo che θ sia tale che $\theta \in \Gamma_C$ e $\neg\theta \in \Gamma_{S \setminus C}$. Se C e $S \setminus C$ fossero entrambe decisive, allora seguirebbe dalla (2.16) che $R(\vec{\Gamma})$ è inconsistente, contro la definizione di R. Dunque se C è decisiva, il suo complemento non può esserlo. Per l'altra direzione supponiamo che $C \notin C^*$. Questo significa che non esiste alcun $\theta \in \mathscr{A}$ per cui C sia decisiva, ovvero tale che $\theta \in \Gamma_c \Rightarrow \theta \in R(\vec{\Gamma})$. Ma questo significa che per ogni $\theta \in \mathscr{A}$ esiste un profilo ammissibile $\vec{\Gamma}$ tale che per $i = 1, \ldots, m$

$$C = \{i \in S \mid \theta \in \Gamma_i\} \text{ e } \theta \notin R(\vec{\Gamma}).$$

Poiché il profilo collettivo deve essere maxiconsistente, $\neg\theta \in R(\vec{\Gamma})$ e poiché i giudizi individuali devono essere maxiconsistenti, $S \setminus C$ dovrà essere decisiva per $\neg\theta$ e quindi $S \setminus C \in C^*$.

(3) e (4) sono stabilite, in modo un po' meno elementare, mostrando come le condizioni (A.1) e (A.2) permettano di costruire i profili ammissibili richiesti per l'espansione (3) e contrazione (4) delle coalizioni decisive.

Da (1) segue che $S \in C^*$ e da (2) che $\emptyset \notin C^*$. Dunque per (4) segue che esiste $i \in S$ tale che $i \in \cap C^* \neq \emptyset$ cioè i appartiene a *tutte* le coalizioni decisive. Poiché per la (2) vale

$$\{i\} \in C^* \text{ oppure } S \setminus \{i\} \notin C^*$$

e dal momento che $i \in \cap C^*$, $\{i\}$ è decisiva. Ma questo significa che per ogni $C \subseteq S$

$$C \in C^* \Leftrightarrow i \in C$$

ovvero i è un dittatore.

Questo conclude l'idea della dimostrazione del teorema canonico di impossibilità per i giudizi, e ci permette di osservare, *en passant* che la dimostrazione dell'esistenza del dittatore sfrutta in modo essenziale il fatto che l'insieme delle coalizioni decisive sia un *ultrafiltro* su S. Poiché stiamo assumendo che la società sia di cardinalità finita, questo porta immediatamente all'esistenza di un ultrafiltro principale – il dittatore.[44]

2.2.4. *Arrow dall'impossibilità logica*

Ciò che rimane da fare, per arrivare a una caratterizzazione logica del teorema di Arrow è mostrare che la cosiddetta *agenda delle preferenze* soddisfa (A.1) e (A.2). Poiché un'analisi rigorosa della traduzione tra il linguaggio della scelta sociale e quello logico sarebbe più ricca di dettagli formali che di idee, ci accontenteremo di descrivere per sommi capi queste ultime[45].

Iniziamo ricordando l'assiomatizzazione dell'ordine stretto che abbiamo introdotto nell'Esempio 2.20. Diciamo che $\mathscr{A}_\succ$ è un' *agenda delle preferenze* se è composta da asserzioni positive (stringhe della forma $a \succ b$) e negative (stringhe del tipo $a \not\succ b$) dove $a, b, c, \ldots$ appartengono a un certo insieme X. Le seguenti convenzioni ci permettono di pensare[46] alle asserzioni sugli ordini come a enunciati di $\mathscr{E}\mathscr{L}$

- $a \prec b \Leftrightarrow \neg(a \succ b) \Leftrightarrow b \prec a$
- $\neg\neg(a \succ b) \Leftrightarrow (a \succ b)$

Stipulate queste convenzioni è naturale pensare all'insieme dei giudizi individuali ammissibili dell'agente i come l'espressione delle sue preferenze consistenti sugli elementi dell'agenda, cioè

$$a \succ b \in \Gamma_i \Leftrightarrow \text{ l'agente giudica } a \text{ preferibile a } b \tag{2.18}$$

[44] Per il caso più generale si veda [84] che fornisce anche un ingresso per la letteratura sul *metodo dell'ultrafiltro* in economia matematica.

[45] Per i dettagli si rimanda a [46], [48].

[46] Senza dilungarci in dettagli formali tediosi.

Assumeremo quindi che i giudizi dell'agente i (espressi dall'insieme Γ_i) sono in corrispondenza biunivoca con le sue preferenze e quindi con le valutazioni sugli enunciati corrispondenti[47]. Per esempio supponiamo che per l'agente i valga $a \succ_i b \succ_i c$. Queste preferenze sono rappresentate in modo non ambiguo dall'insieme di giudizi[48]

$$\Gamma_i = \{a \succ b, b \succ c, a \succ c, b \not\succ a, c \not\succ b, c \not\succ a\}.$$

Data l'agenda delle preferenze $\mathscr{A}_\succ$ si può infine osservare come i giudizi completi di preferenza su $X = \{a,b,c\}$ siano rappresentabili dalle otto stringhe binarie

$$111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000$$

che corrispondono alle risposte possibili alle domande se $i \succ j$ per $i, j \in X$. Quindi 111 codifica il giudizio $\{a \succ b, b \succ c, a \succ c\}$. La restrizione ai giudizi individuali *consistenti* ci obbliga ad escludere le triple che violano la transitività e cioè 110 e 001. Questa rappresentazione è alla base della teoria algebrica dell'aggregazione [196], [149], [48]. In particolare in [46] si dimostra

2.39. LEMMA. *L'agenda delle preferenze*

$$\mathscr{A}_\succ = \{a \succ b, b \succ c, a \succ c, b \succ a, c \succ b, c \succ a\}$$

soddisfa (A.1) *e* (A.2).

Omettiamo la dimostrazione del fatto che l'agenda delle preferenze è totalmente connessa. La verifica di (A.1) è invece immediata osservando come la sottoagenda

$$\mathscr{B}_\succ = \{a \succ b, b \succ c, c \succ a\}$$

sia inconsistente minimale e possa essere resa consistente negando il primo e il terzo enunciato.

Il Teorema 2.36 con il Lemma 2.39 ci danno come corollario immediato la versione logica del teorema di Arrow.

2.40. COROLLARIO (*Il teorema di Arrow per i giudizi*). *Siano S una società di m individui, $\mathscr{A}$ l'agenda delle preferenze e $\vec{\Gamma}$ un profilo di giudizi individuali maxiconsistenti. L'unica $R : G(\mathscr{A})^m \to G(\mathscr{A})$ che soddisfa l'Unanimità e l'Indipendenza è la Dittatura.*

Cosa possiamo concludere dalla formulazione logica del teorema di Arrow?

In primo luogo abbiamo mostrato come l'impossibilità di Arrow non sia (esclusivamente) un fenomeno di natura economica, né di economia politica. Si tratta, come aveva già intuito Condorcet, di un "fenomeno" di natura logica che emerge ogni volta che si presenti un problema di aggregazione di atteggiamenti individuali (come preferenze, giudizi, opinioni, convinzioni) che risponda alle caratteristiche che abbiamo analizzato in dettaglio. Ovviamente la rilevanza del risultato dipende dalla cogenza delle condizioni formali necessarie e sufficienti a dimostrarlo rispetto all'interpretazione intesa

[47] Una formalizzazione completa della relazione tra giudizi, preferenze e relazione di conseguenza classica ci permetterebbe di derivare e non di assumere questa proprietà.

[48] Ovviamente sotto le ipotesi di consistenza e completezza di Γ_i, avremmo potuto omettere di menzionare esplicitamente alcuni elementi.

dell'aggregazione razionale. L'analisi di queste condizioni è uno dei contributi peculiari della formulazione logica del risultato di impossibilità. Distinguendo tre livelli – quello dei giudizi individuali, delle regole di aggregazione e dell'agenda – abbiamo separato le condizioni di correttezza formale (volte a catturare la consistenza dell'aggregazione) da quelle di adeguatezza materiale (volte a eliminare le conseguenze che confliggono con l'interpretazione intesa di scelta collettiva razionale).

In questo senso l'analisi logica dell'impossibilità dell'aggregazione ci permette chiaramente di recuperare l'interpretazione originale che Arrow dà al suo risultato – quella di identificare lo spazio (logico) delle possibilità offerte dalla matematizzazione dell'idea di aggregazione. Sotto l'ipotesi largamente condivisa secondo cui l'analisi dei fenomeni sociali debba essere fondata sui comportamenti degli individui, la formulazione logica del teorema di Arrow assume quindi i connotati di un teorema di possibilità sulla matematizzazione delle scienze sociali. Pur con tutte le cautele del caso, è difficile resistere all'analogia con i teoremi limitativi che hanno segnato la nascita della logica matematica negli anni 30 del novecento. Proprio come i teoremi di Gödel e Turing decretano l'impossibilità di soddisfare, a un tempo, la consistenza e la completezza delle procedure algoritmiche, la generalizzazione del risultato di Arrow ci pone davanti ai limiti teorici dell'analisi logico-matematica dei fenomeni sociali.

CAPITOLO 3

Il paradigma paretiano

In ipotesi molto deboli l'ordine di preferenza può essere rappresentato in termini di *funzioni d'utilità*; questo porta alla formulare un *nuovo* criterio di ottimalità collettiva: l'*efficienza paretiana*.

3.1. *Preferenze e funzione d'utilità*

Nella derivazione del teorema di Arrow abbiamo assunto che i desideri e le motivazioni che guidano l'azione economica degli agenti fossero rappresentati da opportuni ordini di preferenza. Come vedremo in maggiore dettaglio nel Capitolo 4 questo modo di rappresentare l'interesse economico di un individuo è storicamente successivo a quello di considerare il grado di soddisfazione che un individuo associa a un certo bene o a una certa azione economica. Questo viene fatto tramite quella che si chiama funzione d'utilità: *una funzione* $u : \mathbb{R}_+^{lm} \to \mathbb{R}$ *si dice una* funzione d'utilità[1] *che rappresenta il preordine di preferenza* $\succcurlyeq$ *se*

$$u(X) \geqslant u(Y) \quad \Leftrightarrow \quad X \succcurlyeq Y.$$

È naturale chiedersi se ogni ordine di preferenza sia rappresentabile da una funzione d'utilità. In generale la risposta è no. Ad esempio l'ordine lessicografico non è rappresentabile da una funzione d'utilità[2]. La risposta però diventa positiva facendo qualche ipotesi supplementare sull'ordine $\succcurlyeq$, ad esempio, che il preordine sia continuo[3].

[1] Qui alla parola 'utilità' non si deve attribuire nessuna valenza di obiettività né alcuna ragione sociale, come nel caso delle preferenze.

[2] Dato un ordine sui reali, ad esempio quello standard, l'ordine lessicografico è definito sulle coppie di $\mathbb{R}^2$ come $(x_1,x_2) \succsim (y_1,y_2)$ se o $x_1 > y_1$ o $x_1 = y_1$ e $x_2 \geq y_2$. Se fosse rappresentato da una funzione u, per ogni numero reale x_1 si potrebbe scegliere un razionale $r(x_1)$ tale che $u(x_1,2) > r(x_1) > u(x_1,1)$ per via della definizione stessa dell'ordine. Ora, se $x_1 > x_1'$, si ha $r(x_1) > u(x_1,1) > u(x_1',2) > r(x_1')$. Quindi r stabilirebbe una corrispondenza biunivoca tra i razionali e i reali: assurdo.

[3] Relativamente alla rappresentazione di un preordine totale tramite una *funzione d'utilità* si veda [51] [83] [44] [118]. Il concetto moderno di utilità trova la sua sistemazione definitiva con l'assiomatizzazione di von Neumann e Morgenstern [190] (si veda anche [112]), che sviluppano alcune idee che si possono far risalire almeno a Daniel Bernoulli (1748). Nel Capitolo 4 presenteremo un'analisi elementare della rappresentazione delle preferenze mediante funzioni di utilità.

Si dice che il preordine totale $\succcurlyeq$ in $\mathbb{R}^{lm}_+$ è *continuo* se, per tutti gli $X \in \mathbb{R}^{lm}_+$ gli insiemi

$$\{Y \quad | \quad Y \succcurlyeq X\} \quad \text{e} \quad \{Z \quad | \quad X \succcurlyeq Z\}$$

sono *chiusi*, cioè, tutte le volte che approssimiamo[4] un'allocazione Y con allocazioni Y_k, $Y_k \to Y$ quando $k \to \infty$, se $Y_k \succcurlyeq X$, allora Y è preferita a X[5]; e lo stesso per $\{Z\,|\,X \succcurlyeq Z\}$.

Uno dei classici teoremi in economia matematica è allora

3.1. TEOREMA (*Debreu*). *Ogni preordine totale $\succcurlyeq$ continuo in $\mathbb{R}^{lm}_+$ può essere rappresentato da una funzione d'utilità $u : \mathbb{R}^{lm}_+ \to \mathbb{R}$ continua.*

La chiave della dimostrazione sta nell'osservazione che le *superfici di livello* della funzione d'utilità sono le *curve di indifferenza* della relazione d'ordine:

$$u(X) = u(Y) \quad \Leftrightarrow \quad X \sim Y.$$

La dimostrazione è un po' tecnica, ma si semplifica notevolmente se si assume che esista una curva continua $c :]0,\infty[\to \mathbb{R}^{lm}_+$ che incontri ciascuna superficie d'indifferenza in un solo punto. Il risultato è allora che $c(t)$ definisce una rappresentazione del preordine totale, si veda [53].[6]

4 In $\mathbb{R}^{lm}$ è definita la *distanza euclidea*

$$\text{per} \quad X = (x^i_j), Y = (y^i_j) \quad \text{dist}(X,Y) := \sqrt{\sum_{i,j}(x^i_j - y^i_j)^2};$$

la *palla aperta* di centro X e raggio r è l'insieme

$$B_r(X) := \{Y \in \mathbb{R}^{lm} \quad | \quad \text{dist}(Y,X) < r\}.$$

Si dice che $Y_k \to Y$ per $k \to \infty$, se per ogni $r > 0$ esiste un intero $k_r(X)$ (dipendente in linea di principio da X e da r) tale che $\text{dist}(Y_k, X) < r$ per ogni $k \geq k_r(X)$.

5 Si noti che il preordine lessicografico non è continuo: $(1/n, 1) \gtrsim (0,3)$, ma $(1/n,1) \to (0,1)$ e $(0,3) \succ (0,1)$.

6 Prima di proseguire chiedendoci se e cosa guadagnamo passando dalle preferenze alla funzioni d'utilità, vale la pena aggiungere ancora qualche osservazione, almeno per il lettore matematicamente orientato.

Come illustreremo nel Capitolo 4 si vede abbastanza facilmente che un preordine su un insieme *numerabile* $(\mathscr{X}, \succcurlyeq)$ si rappresenta sempre con una funzione d'utilità. Un insieme qualunque $\mathscr{X}$ con un preordine si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme numerabile $\mathscr{Z}$ tale che $\forall X, Y \in \mathscr{X}$ esista $Z \in \mathscr{Z}$ tale che

$$X \succcurlyeq Z \succcurlyeq Y.$$

Si dimostra allora che

TEOREMA. *Sia $\mathscr{X}$ un insieme non vuoto e sia $\succcurlyeq$ un preordine totale su $\mathscr{X}$. Allora $\succcurlyeq$ si rappresenta con una funzione d'utilità se e solo se $\mathscr{X}$ è separabile.*

Se $\mathscr{X}$ è poi uno spazio topologico ordinato, valgono i seguenti due teoremi:

TEOREMA (Debreu). *Sia $\mathscr{X}$ uno spazio topologico a base numerabile e sia $\succcurlyeq$ una relazione di preferenza completa su $\mathscr{X}$. Se l'ordine $\succcurlyeq$ è continuo, allora esso si rappresenta con una funzione d'utilità continua.*

TEOREMA (Eilenberg). *Sia $\mathscr{X}$ uno spazio topologico connesso e separabile e sia $\succcurlyeq$ una relazione di preferenza completa su $\mathscr{X}$. Se $\succcurlyeq$ è continua, allora essa si rappresenta con una funzione d'utilità continua.*

Osserviamo che, se $u : \mathbb{R}^{ml}_{+} \to \mathbb{R}$ è una funzione d'utilità che rappresenta l'ordine di preferenze $\succcurlyeq$ e se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una qualunque funzione strettamente crescente[7], allora $v(X) := f(u(X))$ è ancora una funzione d'utilità che rappresenta la stessa relazione di preferenza $\succcurlyeq$. Ci ritroviamo quindi in linea di principio con infinite funzioni d'utilità, un'enorme difficoltà psicologica nello sceglierne una[8] e nessun criterio teorico o motivazione matematica (almeno per il momento) stringente. Se poi insistiamo sull'indipendenza, il teorema di Arrow continua a dirci che non può esserci alcuna funzione d'utilità collettiva sulle allocazioni che non sia quella che rappresenti l'ordine di uno dei dittatori. Abbiamo complicato le cose per niente?

Non proprio; parlare in termini di funzioni d'utilità è sicuramente più comodo dal punto di vista della matematica e permette di provare il seguente Teorema 3.2 che, come vedremo, avrà una grande importanza nel seguito. Di conseguenza, la rappresentazione numerica delle preferenze ci permetterà di aprire un punto di vista alternativo e, per certi aspetti, molto più fecondo rispetto alla formulazione arroviana del problema di aggregazione. Ricordiamo che $\Omega \in \mathbb{R}^{l}_{+}$ rappresenta le risorse totali dell'economia e $\mathscr{R} \subseteq \mathbb{R}^{lm}_{+}$ l'insieme delle allocazioni realizzabili:

$$\mathscr{R} := \left\{ X = (x^1, \dots, x^m) \quad \middle| \quad \sum_{i=1}^{m} x^i = \Omega \quad \text{e} \quad x^i \in \mathbb{R}^{l}_{+} \right\}.$$

3.2. TEOREMA. *Sia $\succcurlyeq$ un preordine continuo in $\mathbb{R}^{lm}_{+}$. Allora esiste in $\mathscr{R}$ una allocazione che è preferita a tutte le altre[9] di $\mathscr{R}$:*

$$\exists X \in \mathscr{R} : \forall Y \in \mathscr{R} \quad X \succcurlyeq Y.$$

Infatti, un teorema classico dell'analisi, il *teorema di Weierstrass*, ci dice che *una funzione continua in un compatto ha massimo e minimo*[10].

Abbandonando l'indipendenza, cioè l'ipotesi che il mercato (o il benessere sociale) sia determinato dalle sole scelte individuali, trarremo vantaggio dal Teorema 3.2 per formulare *un nuovo criterio* di scelta collettiva. Rimandiamo ciò alla prossima sezione e concludiamo questa sezione mostrando come alcune proprietà importanti dell'ordine di preferenza si riflettano sulle funzioni d'utilità.

[7] Cioè una funzione per cui $f(t) < f(t')$ tutte le volte che $t < t'$.

[8] È sicuramente più difficile esprimere il grado di preferenza che la preferenza.

[9] E un'altra a cui tutte le altre sono preferite.

[10] Si veda [62] [63] [64]. Ricordiamo che un insieme A in $\mathbb{R}$, anche limitato, può non avere minimo, ad esempio $]0,1[$, ma l'insieme di tutti i suoi minoranti, cioè degli m tali che $m \leq a$ per ogni a in A, ha sicuramente massimo (è una conseguenza della, anzi è equivalente alla, *continuità* di $\mathbb{R}$): questo massimo si chiama *estremo inferiore* di A e si denota $\inf A$. Esiste poi sempre una successione $\{a_n\} \subseteq A$ con $a_n \to \inf A$ per $n \to \infty$.
Consideriamo allora $\{X_k\} \subseteq \mathscr{R}$ con $u(X_k) \to \inf\{u(X) \,|\, X \in \mathscr{R}\} =: l$. La successione X_k magari non converge ma, poichè $\mathscr{R}$ è limitato, è possibile estrarre una sua sottosuccessione X_{k_j} convergente (*teorema di Bolzano-Weierstrass*), $X_{k_j} \to X_\infty$ e, essendo $\mathscr{R}$ chiuso, X_∞ sta in $\mathscr{R}$. Per la continuità di u allora $u(X_{k_j}) \to u(X_\infty)$ e quindi $u(X_\infty) = l$.

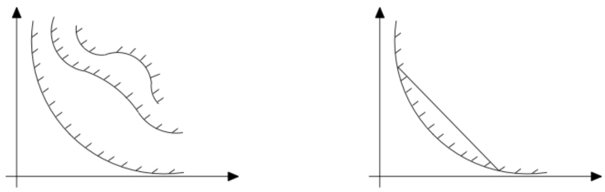

FIGURA 1. (a) Gli insiemi dei sopralivelli di $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$. (b) Il preordine è convesso, anzi strettamente convesso.

Monotonia. Il preordine $\succcurlyeq$ è *monotono* se:

$$\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^{lm}_+ \quad \text{vale} \quad X + Y \succcurlyeq X;$$

la funzione d'utilità u è *monotona* se:

$$\forall\, X, Y \in \mathbb{R}^{lm}_+ \quad \text{vale} \quad u(X+Y) \geq u(X).$$

L'ipotesi di monotonia significa che tutti i beni sono desiderabili per tutti gli agenti. Questo rispecchia la stipulazione che abbiamo fatto in precedenza: per esser tale, un bene deve essere desiderato dagli agenti-consumatori. Viceversa, desiderare un bene è l'atteggiamento fondamentale dell'*homo economicus* di cui ci stiamo occupando. In altre parole, stiamo assumendo che il desiderio dei beni economici esaurisca la motivazione e guidi la scelta degli individui.

È presto visto che: se il preordine $\succcurlyeq$ è monotono, allora tutte le funzioni d'utilità che lo rappresentano sono monotone e, viceversa, se la funzione u è monotona, il preordine a lei associato è monotono.

Convessità e quasi-concavità. Il preordine $\succcurlyeq$ è *convesso* se $\forall X \in \mathbb{R}^{lm}_+$ e ogni $\lambda \in [0,1]$ vale

$$[Y \succcurlyeq X \quad \text{e} \quad Z \succcurlyeq X] \Rightarrow \lambda Y + (1-\lambda) Z \succcurlyeq X;$$

il preordine si dice *strettamente convesso* se $\forall X \in \mathbb{R}^{lm}_+$ e ogni $\lambda \in]0,1[$ vale

$$[Y \succcurlyeq X \quad \text{e} \quad Y \neq X] \Rightarrow \lambda Y + (1-\lambda) X \succ X.$$

Un preordine strettamente convesso è convesso.

Le ipotesi di convessità sono tradizionali in economia. Corrispondono all'idea che il consumatore preferisce, ad esempio nel caso di due beni, ai panieri $(x,0)$ e $(0,y)$ il *paniere misto* $(\lambda x, (1-\lambda) y)$ o, in possesso di $(x,0)$ vuole avere anche un po' del bene y (consumatore-consumista), o anche al principio della *ripartizione dei rischi*. Si fa spesso risalire l'interpretazione economica al *principio di diversificazione* che ha una chiara motivazione nel contesto della gestione del rischio derivante dagli investimenti[11].

[11] Il principio della diversificazione del rischio è alla base della teoria finanziaria contemporanea, si veda ad esempio la *teoria del portafoglio* elaborata indipendentemente da Bruno de Finetti e da Harry Markowitz. Una prima chiara asserzione del principio di diversificazione si trova persino nel *Talmud*.

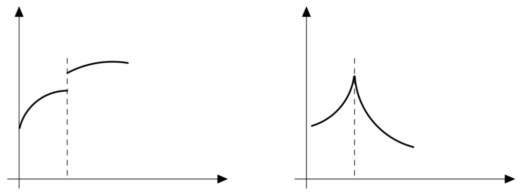

FIGURA 2. Due esempi di funzioni quasi-concave ma non concave.

La convessità è una proprietà geometrica che si vede bene sulle superfici d'indifferenza, essa dice che ciascuna superficie d'indifferenza delimita un dominio convesso, il suo sopralivello. Dire che l'ordine è strettamente convesso equivale a dire che le superfici d'indifferenza non contengono segmenti di rette. Essendo le superfici d'indifferenza esattamente le curve di livello delle funzioni d'utilità, le seguenti definizioni tornano particolarmente utili:

- La funzione u si dice *quasi-concava* se, per ogni $a \in \mathbb{R}$, il sopralivello corrispondente ad a
$$S_a = \{Z \in \mathbb{R}_+^{lm} \quad | \quad u(Z) \geq a\}$$
è convesso.
- La funzione u si dice *strettamente quasi-concava* se i suoi sopralivelli sono strettamente convessi, cioè, se per ogni $X \in \mathbb{R}_+^{lm}$ e ogni $\lambda \in]0,1[$ si ha
$$[u(Y) \geq u(X) \quad \text{e} \quad Y \neq X] \Rightarrow u(\lambda X + (1-\lambda)Y) > u(Y).$$

Se ne deduce facilmente che: se il preordine $\succcurlyeq$ è convesso, tutte le funzioni d'utilità che lo rappresentano sono quasi-concave e, viceversa, se u è quasi-concava, il preordine a lei associato è convesso.

Matematicamente sarebbe molto più semplice lavorare nel contesto delle funzioni concave (o convesse)[12], ma questo non è, purtroppo o per fortuna, sempre possibile[13].

Concavità. Ricordiamo che

- la funzione u si dice *concava* se, per ogni $\lambda \in [0,1]$ e per ogni $X \in \mathbb{R}_+^{lm}$, vale
$$u(\lambda X + (1-\lambda)Y) \geqslant \lambda u(X) + (1-\lambda)u(Y),$$
- si dice *strettamente concava* se per ogni $\lambda \in]0,1[$ e per ogni coppia (X,Y) di punti *distinti*
$$u(\lambda X + (1-\lambda)Y) > \lambda u(X) + (1-\lambda)u(Y).$$

[12] Il lettore matematicamente orientato pensi alla *dualità convessa*; si veda il Capitolo 7, il Capitolo 9 e [65], ma in letteratura si trova anche una *dualità quasiconvessa*.

[13] Si dimostra però che: ogni preordine convesso e monotono può essere 'approssimato' da preordini rappresentabili da una funzione d'utilità concava e non solo quasi-concava.

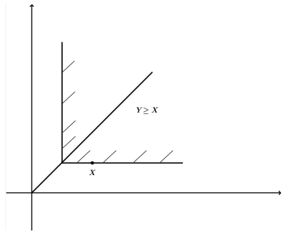

FIGURA 3. Le preferenze di Leontiev.

La funzione u si dice *convessa* (strettamente convessa) se $-u$ è concava (strettamente concava); geometricamente u è convessa se il segmento che congiunge due punti del suo grafico sta sopra il grafico di u, è concava se il segmento sta sotto.

Infine osserviamo che ogni funzione concava è quasi-concava, ma il viceversa è falso, come illustrato dalla Figura 2.

Si dimostra facilmente che:

- Un sottoinsieme C di $\mathbb{R}^n$ è convesso se e solo se, per ogni famiglia finita di coefficienti $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, K$ con $\sum_1^K \alpha_k = 1$, si ha
$$\sum_1^K \alpha_k x_k \in C \quad \text{per} \quad x_k \in C, k = 1, \ldots, K.$$
Si chiama *inviluppo convesso* di un insieme $M \subseteq \mathbb{R}^n$, e si denota $\operatorname{co}(M)$, l'intersezione di tutti i convessi che lo contengono[14].
- Una funzione $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ è quasi-concava se e solo se, per ogni famiglia finita di coefficienti $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, K$ con $\sum_1^K \alpha_k = 1$, si ha
$$u(\sum_1^K \alpha_k x_k) \geqslant a \quad \text{tutte le volte che} \quad u(x_k) \geqslant a, k = 1, \ldots, K.$$
- Una funzione $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ è concava se e solo se, per ogni famiglia finita di coefficienti $\alpha_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, K$ con $\sum_1^K \alpha_k = 1$, si ha
$$u(\sum_1^K \alpha_k x_k) \geqslant \sum_1^K \alpha_k u(x_k).$$

Infine, analiticamente sarebbe conveniente se si potesse assumere che una funzione d'utilità che rappresenta un preordine fosse differenziabile, si veda Capitolo 7. Purtroppo questo non è sempre possibile, un semplice esempio è dato dalle cosiddette

[14] Si dimostra, si veda [65],

TEOREMA(Carathéodory). *Sia $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora*
$$\operatorname{co}(M) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \quad | \quad x = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, x_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\Big\}.$$

preferenze di Leontief definite in $\mathbb{R}^2$ da $(x_1,x_2) \succeq (y_1,y_2)$ se e solo se $\min(x_1,x_2) \geq \min(y_1,y_2)$.

3.2. *I massimi di Pareto*

Ricordiamo che stiamo considerando un'economia costituita da m agenti che, caratterizzati dai loro ordini di preferenze $\succcurlyeq_i$, devono dividersi l beni, presenti in quantità totale Ω. Il teorema di Arrow ci dice che non è possibile costruire, in modo funzionale, un ordine di preferenza collettivo $\succcurlyeq_S$ senza violare l'assioma di unanimità o d'indipendenza o accettare una regola dittatoriale. L'introduzione delle funzioni d'utilità permette di proporre una regola di tutt'altra natura.

Partendo da preordini di preferenza individuali $\succcurlyeq_i$ continui, noi possiamo rappresentarli con funzioni d'utilità continue u_i e considerare la funzione

$$u_S := u_1 + \cdots + u_m$$

che rappresenta il preordine continuo collettivo $\succcurlyeq_S$ dato da

$$X \succcurlyeq_S Y \quad \Leftrightarrow \quad u_S(X) \geq u_S(Y).$$

Ma questa risulta una buona regola per la determinazione della scelta collettiva? È non dittatoriale e soddisfa l'assioma di unanimità. Violerà quindi l'assioma di indipendenza. Abbiamo già incontrato il fenomeno; aggiungiamo un esempio dovuto ad Arrow.

3.3. ESEMPIO (*Arrow*). Siano X e Y due allocazioni tali che $u_i(X) = u_i(Y) + 1$ per tutti gli $i \neq 1$ e $u_1(X) = u_1(Y) - a$. Allora

$$\begin{cases} u_S(X) > u_S(Y) & \text{se} \quad a < m-1 \\ u_S(X) < u_S(Y) & \text{se} \quad a > m-1. \end{cases}$$

In altri termini, se l'agente 1 preferisce di gran lunga Y a X, la società preferirà Y a X, altrimenti preferirà X a Y. Ma in entrambi i casi i preordini sono gli stessi.

È opportuno osservare, e ci ritorneremo nel Capitolo 4, come questo tipo di situazione metta in evidenza il ruolo di un eventuale accordo interpersonale tra gli agenti. In questo esempio, se gli individui riescono ad accordarsi sulla scelta di a, allora riescono a determinare l'esito.

Come già osservato, il problema vero è che non c'è un modo intrinseco o naturale o canonico di scegliere una funzione d'utilità che rappresenti un preordine dato. Per rappresentare il preordine $\succcurlyeq_1$ potremmo scegliere $100\,u_1$, definendo come funzione d'utilità collettiva

$$u'_S = 100u_1 + u_2 + \ldots + u_m$$

che dà più peso all'agente 1 nella scelta collettiva, ottenendo magari un ordine collettivo diverso da $\succcurlyeq_S$. Più in generale, per ogni scelta di coefficienti $a_1, \ldots, a_m$ non negativi e non tutti nulli, possiamo definire

$$u^a_S := a_1u_1 + \ldots + a_mu_m,$$

che rappresenta l'ordine di preferenza collettivo $\succcurlyeq_S^a$

$$X \succcurlyeq_S^a Y \quad \Leftrightarrow \quad u_S^a(X) \geq u_S^a(Y).$$

Ancora, osservando che funzioni d'utilità proporzionali definiscono lo stesso preordine, possiamo sostituire u_S^a con $u_S^a / \sum_1^m a_i$ senza cambiare l'ordine collettivo $\succcurlyeq_S^a$, equivalentemente, sostituire i coefficienti a_i con $\alpha_i := a/\sum_1^m a_i$. In definitiva, possiamo definire le funzioni d'utilità collettive tramite le espressioni

$$u_S^\alpha = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m, \quad \alpha_i \geq 0 \quad \forall i, \quad \sum_1^m \alpha_i = 1 \tag{3.1}$$

e, se poi poniamo $v_i = \alpha_i u_i$, ritorniamo al punto di partenza, come del resto era chiaro fin dall'inizio.

Abbiamo solo trasformato il problema della scelta collettiva ottimale nel problema della scelta degli α_i in (3.1), scelta che comunque, sotto le ipotesi del teorema di Arrow, rimane impossibile.

Ma, non è proprio così, dato che la scrittura delle funzioni d'utilità collettive nella forma della (3.1) permette di applicare il Teorema 3.2 in modo proficuo. Per ogni α, il Teorema 3.2 ci garantisce che la funzione d'utilità u_S^α ha massimo X^α in $\mathscr{R}$. Al variare di $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ le allocazioni di massimo X^α per u_S^α varieranno nell'insieme $\mathscr{R}$ delle allocazioni realizzabili e ne costituiranno un sottoinsieme, diciamo $\mathscr{P}$, $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{R}$. Vedremo ora che le allocazioni di $\mathscr{P}$ hanno proprietà che le isolano come le uniche ammissibili per risolvere il problema della scelta collettiva: l'introduzione delle funzioni d'utilità non ci permetterà di risolvere il problema della scelta collettiva ma, almeno, ci permette di circoscriverlo.

Siano quindi u_i, $i \leq i \leq m$, funzioni d'utilità continue che rappresentano le preferenze individuali $\succcurlyeq_i$. Sia $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ una famiglia qualunque di coefficienti non negativi di somma uno. Si vede facilmente che ogni allocazione realizzabile che massimizza $u_S^\alpha = \sum_i^m \alpha_i u_i$ in $\mathscr{R}$ possiede le proprietà:

(P'): *non esiste $Y \in \mathscr{R}$ che tutti preferiscono a X^α, cioè,*

$$\nexists Y \in \mathscr{R} \quad \text{tale che} \quad Y \succ_i X^\alpha \quad \forall i;$$

(P): *se poi gli α_i sono tutti non nulli, allora*

$$\nexists Y \in \mathscr{R} \quad \text{tale che} \quad Y \succcurlyeq_i X^\alpha \quad \forall i \quad \text{e} \quad Y \succ_j X^\alpha \quad \text{per qualche } j.$$

Infatti, se per $Y \in \mathscr{R}$ si avesse $Y \succ_i X^\alpha$ per ogni i, allora $u_i(Y) > u_i(X^\alpha)$ e, quindi, $\sum \alpha_i u_i(Y) > \sum \alpha_i u_i(X^\alpha)$. Se gli α_i sono tutti non nulli, per ottenere l'ultima diseguaglianza basta poi che la diseguaglianza $u_i(Y) \geq u_i(X^\alpha)$ sia verificata per tutti gli i e che per almeno uno sia stretta.

3.4. DEFINIZIONE. *Diciamo che una allocazione X è un* massimo (ottimo) debole di Pareto *se verifica la proprietà*

$$\nexists Y \in \mathscr{R} \quad \text{tale che} \quad Y \succ_i X \quad \forall i; \tag{P'}$$

diciamo che è un massimo (ottimo) stretto di Pareto *se verifica la proprietà*

$$\nexists Y \in \mathscr{R} \quad \textit{tale che} \quad Y \succcurlyeq_i X \quad \forall i \quad \textit{e} \quad Y \succ_j X \quad \textit{per qualche } j. \tag{P}$$

Un'allocazione X è ottimale nel senso di Pareto – spesso si dice che X è *Pareto efficiente*[15] – se, nel quadro delle risorse disponibili, non è possibile migliorare simultaneamente la situazione di tutti gli agenti economici sia nel senso che si faccia strettamente meglio per tutti (senso debole) sia che si faccia strettamente meglio per uno e almeno quanto prima per gli altri (senso stretto). Ovviamente $(P) \Rightarrow (P')$ o $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}' \subseteq \mathscr{R}$.

In senso strettamente *economico* l'ottimalità di Pareto è un criterio di buona gestione: dire che un'allocazione non è un massimo di Pareto vuol dire che è possibile una migliore allocazione dei beni che permette di migliorare la situazione di tutti (in modo debole o forte)[16]. Ma vale di più.

3.5. PROPOSIZIONE. *Supponiamo che gli ordini di preferenza individuali siano continui. Allora, per ogni allocazione realizzabile $Y \in \mathscr{R}$, esiste un massimo stretto di Pareto $X \in \mathscr{R}$ unanimemente preferito a Y :*

$$X \succcurlyeq_i Y.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'insieme delle allocazioni realizzabili unanimemente preferite a Y, cioè

$$\mathscr{Z}(Y) = \{Z \in \mathscr{R} \quad | \quad u_i(Z) \geq u_i(Y) \quad \forall i\} \tag{3.2}$$

$$= \cap_{i=1}^{m} \{Z \in \mathbb{R}_+^{lm} \quad | \quad u_i(Z) \geq u_i(Y)\} \cap \mathscr{R}, \tag{3.3}$$

che è non vuoto (perché contiene almeno Y), chiuso e limitato, quindi un compatto. L'insieme dei punti di $\mathscr{Z}(Y)$ dove u_1 ha massimo è ancora un compatto non vuoto:

$$\mathscr{X}_1 = \{X \in \mathscr{Z}(Y) \quad | \quad u_1(X) \geq u_1(Z) \quad \forall Z \in \mathscr{Z}(Y)\}.$$

Reiteriamo l'operazione. Denotiamo l'insieme dei punti del compatto $\mathscr{X}_1$ dove la funzione continua u_2 assume massimo in $\mathscr{X}_2$ e proseguiamo fino a m, di modo che per $1 \leq i \leq m-1$

$$\mathscr{X}_{i+1} = \{X \in \mathscr{X}_i \quad | \quad u_i(X) \geq u_i(Z) \quad \forall Z \in \mathscr{X}_i\}.$$

Ora

$$\mathscr{Z}(Y) \supset \mathscr{X}_1 \supset \ldots \mathscr{X}_i \supset \ldots \supset \mathscr{X}_m.$$

Allora $X \in \mathscr{X}_m$ è unanimente preferita a Y; in effetti è un massimo di Pareto cercato. Infatti, se per $T \in \mathscr{R}$ abbiamo $u_i(T) \geq u_i(X)$ per ogni i, allora, intanto, $T \in \mathscr{Z}(Y)$ e, poiché $u_1(T) \geq u_1(X)$ e X massimizza u_1 in $\mathscr{Z}(Y)$, si dovrà avere $u_1(T) = u_1(X)$. Iterando, poiché $u_i(T) \geq u_i(X)$ e X massimizza u_i su $\mathscr{X}_{i-1}$, $u_i(T) = u_i(X)$, si dimostra che $T \sim_i X$ per $1 \leq i \leq m-1$. □

[15] In generale, se ad esempio f, g sono due funzioni da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diciamo che $(\bar{x}, \bar{y})$ è un *massimo debole di Pareto* per la coppia (f, g) se

$$\text{non esiste} \quad (x,y) \quad \text{tale che} \quad f(x,y) > f(\bar{x},\bar{y}) \quad \text{e} \quad g(x,y) > g(\bar{x},\bar{y}),$$

equivalentemente, se

$$\text{per ogni} \quad (x,y) \quad \text{vale} \quad f(x,y) \leq f(\bar{x},\bar{y}) \quad \text{o} \quad g(x,y) \leq g(\bar{x},\bar{y})$$

[16] Osserviamo però che l'*efficienza* non necessariamente si accorda all'*equità*; ritorneremo su questo punto nel Capitolo 4 e nel Capitolo 10. In particolare l'efficienza paretiana è naturalmente sbilanciata a favore dello *status quo* e, di conseguenza, si sposa bene con la retorica dei diritti acquisiti. A tal proposito Sen osserva, [168] p. 44,

> uno stato può essere un ottimo in senso paretiano con alcune persone in estrema miseria e altri che nuotano nel lusso, fintantoché i poveri non possono essere fatti star meglio senza dimunire il lusso dei ricchi.

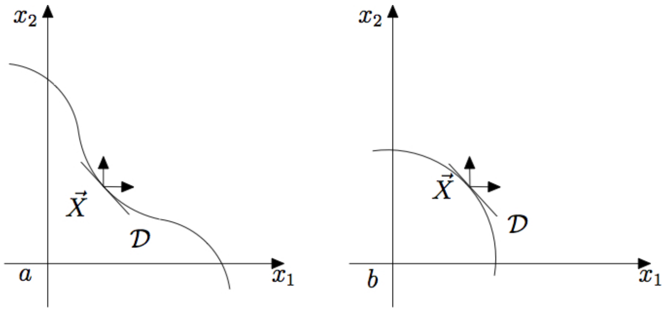

FIGURA 4. Supponiamo $l = 1$, $m = 2$, $u_1(X_1, X_2) = X_1$, $u_2(X_1, X_2) = X_2$. Nella figura a. X è un massimo di Pareto che non massimizza nessuna combinazione lineare delle u_i. Nella figura b. ogni ottimo di Pareto massimizza una combinazione lineare delle u_i, nella figura rappresentata dalla retta $\mathscr{D}$ passante per X.

Vediamo allora che la nozione di ottimalità di Pareto ha anche un significato *politico* e costituisce uno dei modi in cui si articola il rapporto tra problemi di natura matematico-economico e problemi di natura politica. Essa riconduce il problema della scelta ottimale collettiva alla scelta tra i massimi di Pareto. Ma questa scelta non può che essere, a questo punto, che una scelta *politica*: gli elementi economici non ci permettono più di andare avanti senza un intervento esterno che restringa, sulla base della razionalità degli agenti considerati individualmente, la pluralità degli ottimi a un'unica scelta. Per questo è necessario un *arbitrato*.

La Proposizione 3.5 implica, scegliendo Y a caso, l'esistenza di un ottimo di Pareto, almeno se i preordini di preferenza sono continui. Possiamo chiederci se tutti i massimi di Pareto siano ottenibili via la procedura precedente. La risposta è in generale negativa, come mostrato dalla Figura 4, ma è positiva se le funzioni d'utilità u_i sono concave.

3.6. PROPOSIZIONE. *Siano u_i, $1 \leq i \leq m$, delle funzioni d'utilità continue e* concave *che rappresentano i preordini di preferenza $\succcurlyeq_i$. Sia $X \in \mathscr{R}$ un ottimo di Pareto debole. Allora esiste una famiglia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ di coefficienti nonnegativi e di somma uno tali che X massimizza $u_S^\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i$ sull'insieme $\mathscr{R}$ delle allocazioni realizzabili,*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i(X) \geq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i(Y) \quad \forall Y \in \mathscr{R}.$$

Un punto X non è un ottimo di Pareto se esiste Y tale che $u_i(Y) > u_i(X) \forall i$, cioè se, per ogni i, esistono costanti $p_i > 0$ e $q_i \geq 0$ tali che

$$u_i(X) + p_i = u_i(Y) - q_i. \tag{3.4}$$

Viceversa, un punto X è di Pareto se non è possibile realizzare l'uguaglianza precedente. Chiaramente tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^m$ del tipo $u_i(X) + p_i$ stanno nel traslato di $\operatorname{int}(\mathbb{R}^m_+)$ tramite $U(X)$, dove U è definita da

$$U(X) := (u_1(X), \dots, u_m(X));$$

in altre parole i vettori di $\mathbb{R}^m$ le cui componenti compaiono a sinistra della (3.4) sono i vettori nel *convesso*

$$U(X)+\mathrm{int}\,(\mathbb{R}^m_+).^{17}$$

I vettori le cui componenti compaiono a secondo membro della (3.4), cioè i vettori in $U(\mathscr{R})-\mathbb{R}^m_+$, sono quelli per cui $u_i(Y)=\nu_i+q_i$, cioè $u_i(Y)\geq \nu_i$

$$U(\mathscr{R})-\mathbb{R}^m_+=\left\{\nu\in\mathbb{R}^m \quad | \quad \exists X\,:\,u_i(X)\geq \nu_i\forall i\right\};$$

è poi facile verificare, usando la convessità di $\mathscr{R}$ e la *concavità* di ciascuna u_i, che $U(\mathscr{R})-\mathrm{int}\,(\mathbb{R}^m_+)$ è *convesso*. Possiamo allora dire che *X è un massimo di Pareto se e solo se*

$$(U(X)+\mathrm{int}\,(\mathbb{R}^m_+))\cap(U(\mathscr{R})-\mathbb{R}^m_+)=\emptyset. \tag{3.5}$$

Ricordiamo ora che l'insieme dei punti z di $\mathbb{R}^m$ tali che $\sum_{i=1}^m a_iz_i=b$ è quello che si chiama un *iperpiano* in $\mathbb{R}^m$; se $b=0$ si tratta di un sottospazio vettoriale di dimensione $m-1$, altrimenti di un traslato di questo sottospazio. L'iperpiano H di equazione $\sum_{i=1}^m a_iz_i=b$ *separa* lo spazio ambiente $\mathbb{R}^m$ in un semispazio chiuso $\mathscr{F}_-$, dove $\sum_{i=1}^m a_iz_i\leq b$, e in un semispazio chiuso $\mathscr{F}_+$, dove $\sum_{i=1}^m a_iz_i\geq b$, entrambi delimitati da H. Un classico ed intuitivo teorema stabilisce:

3.7. TEOREMA (*Minkowski*). *Siano C_1 e C_2 due convessi non vuoti e disgiunti in $\mathbb{R}^m$,*

$$C_1\neq\emptyset,\quad C_2\neq\emptyset,\quad C_1\cap C_2=\emptyset.$$

Allora C_1 e C_2 sono separati da un iperpiano, cioè esistono coefficienti $a_1,\dots,a_m$, non tutti nulli, e un numero b tali che

$$\sum_{i=1}^m a_ix_i\leq b\leq\sum_{i=1}^m a_iy_i\quad \forall x\in C_1\;\forall y\in C_2.$$

Se inoltre uno dei due convessi è chiuso e l'altro compatto, allora i due convessi sono separati strettamente, cioè esistono coefficienti $a_1,\dots,a_m$, non tutti nulli, e due numeri b_1 e b_2 tali che

$$\sum_{i=1}^m a_ix_i\leq b_1<b_2\leq\sum_{i=1}^m a_iy_i\quad \forall x\in C_1\;\forall y\in C_2.$$

La Proposizione 3.6 è ora una semplice conseguenza della condizione (3.5) e del teorema di Minkowski. Infatti, possiamo trovare coefficienti $a_1,\dots,a_m$ e un numero b tali che

$$\sum_{i=1}^m a_iv_i\leq b\quad \forall v\in U(\mathscr{R})-\mathbb{R}^m_+$$
$$\sum_{i=1}^m a_iw_i\geq b\quad \forall w\in U(\mathscr{R})+\mathrm{int}\,(\mathbb{R}^m_+).$$

L'ultima diseguaglianza diventa, per $w_i=u_i(X)+t_i$, $t_i>0$[18],

$$\sum_{i=1}^m a_it_i\geq b-\sum_{i=1}^m a_iu_i(X)\quad \forall t\in\mathrm{int}\,(\mathbb{R}^m_+)$$

[17] Se $A\subseteq\mathbb{R}^n$, indichiamo con $\mathrm{int}(A)$ la *parte interna* di A, cioè l'insieme degli $x\in A$ per cui esiste una palla di centro x e raggio opportuno tutta contenuta in A. In particolare

$$\mathrm{int}(\mathbb{R}^m_+)=\{x\in\mathbb{R}^m \quad | \quad x_1>0,\dots,x_m>0\}.$$

[18] Altrimenti, se fosse $t_j<0$, scegliendo $t_i=0$ per $i\neq j$ e prendendo $|t_j|$ grande si avrebbe un assurdo.

che, in particolare, ci dice che i coefficienti sono tutti non negativi. Dalla prima si ricava

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i(Y) \leq b \quad \forall Y \in \mathscr{R}.$$

Mettendo assieme e normalizzando gli a_i, cioè dividendo per $\sum a_i$ e scrivendo α_i per $a_i / \sum a_i$, si conclude infine con la tesi della Proposizione 3.6.

CAPITOLO 4

Razionalità, coerenza ed efficienza

Nel Capitolo 1 abbiamo considerato il problema di scegliere la migliore tra le possibili allocazione di l beni a m individui, seguendo l'intuizione secondo cui una buona allocazione dovesse riflettere, per quanto possibile, le preferenze dei singoli individui. Successivamente, motivati dal risultato di impossibilità di Arrow, abbiamo riformulato le preferenze individuali in termini di funzioni d'utilità e le scelte in termini di massimizzazione dell'utilità; di conseguenza, rinunciando parzialmente all'indipendenza, abbiamo introdotto un nuovo criterio di aggregazione in termini di ottimalità delle combinazioni convesse delle funzioni d'utilità individuali. Questo ci ha portato, da una parte, alla nozione di ottimalità o efficienza paretiana e, dall'altra, a far sorgere dall'interno la nozione di sistema di prezzi.

In questo capitolo vogliamo aggiungere, in un contesto astratto e matematicamente elementare, alcune considerazioni sul rapporto tra le preferenze e le scelte, sia di un individuo sia della collettività. Considereremo cioè il cosiddetto *problema astratto della scelta razionale*. Questo ci permetterà un riesame del concetto di razionalità come coerenza. Confronteremo quindi questa nozione con quella logica che abbiamo sviluppato nel Capitolo 2, mettendo in evidenza come la tradizione economica e quella logica, pur avendo sviluppato il concetto di 'razionalità come coerenza' in modo largamente indipendente, trovino un punto di contatto importante nell'identificazione del concetto intuitivo di coerenza di un agente idealizzato con quello matematico di *ordine* su un determinato dominio.

Concluderemo il capitolo con alcune osservazioni sul ruolo del concetto di razionalità nell'analisi economica.

4.1. *Razionalità economica come coerenza interna: la teoria delle preferenze rivelate*

L'analisi di questo capitolo è limitata a uno scenario matematicamente elementare in cui un agente[1] sia ipoteticamente posto davanti a un insieme finito di alternative distinte $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$. Ci interessa analizzare il concetto di *scelta* su X, cioè l'operazione di selezione di un sottoinsieme non vuoto $S(X) \subseteq X$. Per il momento supponiamo che

[1] Come al solito idealizzato e non necessariamente individuale.

all'agente sia richiesto di selezionare *esattamente una* tra le alternative in X. Con questa ipotesi restrittiva ci sono l modi in cui il nostro agente può comportarsi. Siamo in primo luogo interessati a individuare e scartare quei modi di scegliere da X che ci sembrino palesemente *irrazionali*. L'obiettivo, proprio come nell'identificazione delle regole di aggregazione "materialmente adeguate" che abbiamo discusso nella Sezione 2.2.1, è quello di eliminare tutte le scelte inammissibili attraverso la definizione di un criterio di razionalità come *coerenza* del comportamento di scelta.

Illustriamo l'idea con un esempio elementare. Supponiamo che l'agente i si trovi in pizzeria e debba scegliere una tra le uniche due pizze disponibili sul menu $X = \{x_1, x_2\}$. Supponiamo che i abbia scelto x_2, ovvero 'salsiccia e friarielli' e così facendo abbia scartato x_1, cioè 'margherita'. Prima di prendere la comanda il cameriere informa i che, fuori menu, è disponibile anche la pizza x_3: 'salsiccia e rape.' Chiamiamo il menu esteso Y. Chiaramente $X \subseteq Y$. In questo contesto, appare autoevidente richiedere che la sua *coerenza* permetta all'agente i di scegliere x_3 da Y ma gli impedisca di scegliere x_1 da Y. Elevato a principio, questo criterio va sotto il nome di *indipendenza dalle alternative irrilevanti per le funzioni di scelta* (IAI).

Innanzitutto fissiamo un po' di terminologia e diciamo che una *funzione di scelta* su un insieme di alternative $\mathscr{M}$ è una funzione $S : \mathscr{M} \to 2^{\mathscr{M}}$ tale che per ogni $X \subseteq \mathscr{M}$, $\emptyset \neq S(X) \subseteq X$. Ripetiamo, stiamo assumendo che $\mathscr{M}$ sia finito.

La condizione di indipendenza per le funzioni di scelta si può quindi esprimere come segue.

(IAI) *Siano $x, y \in X$ e $X \subseteq Y$. Se $x \in S(X)$ allora $y \notin S(Y)$.*

Imponendo la *monotonia* del comportamento di scelta nell'espansione a sovrainsiemi il principio di indipendenza cattura un principio di *coerenza interna* o di *equilibrio deliberativo interno* della scelta: nel momento in cui l'agente i ha deliberato sulle alternative in X e ha escluso y ha considerato tutte le informazioni rilevanti su y in relazione agli altri membri di X. L'analogia con l'assioma di indipendenza di Arrow è evidente e la terminologia è motivata dal fatto che le alternative presenti in Y ma non in X sono considerate irrilevanti rispetto alle valutazioni dell'agente sugli elementi di X.

È interessante analizzare la *monotonia* catturata dall'assioma di indipendenza da un punto di vista puramente logico. A tale scopo giova rammentare che la relazione $\models$ è monotona nel senso che

$$\text{se } \Gamma \models \theta \text{ allora } \Gamma \cup \phi \models \theta,$$

per *ogni* $\phi \in \mathscr{E}\mathscr{L}$, eventualmente anche $\neg\theta$! Questa è una delle proprietà centrali della logica cosiddetta classica ed evidentemente una delle proprietà che rende materialmente inadeguata la relazione $\models$ rispetto a un numero considerevole di contesti[2].

Supponiamo che $\Gamma \models \theta$, per qualche $\Gamma \subseteq \mathscr{E}\mathscr{L}$ e $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}$. Se identifichiamo (come abbiamo fatto nel Capitolo 2) un agente con una relazione di conseguenza logica, il principio di monotonia sancisce *l'irrilevanza* di qualsiasi informazione aggiuntiva (rispetto a Γ) ai fini dell'atteggiamento del nostro agente nei confronti di θ. Ma questo non è che un modo per dire che, per l'agente $\models$, Γ fornisce informazioni *sufficienti* per l'accettazione di θ. Un agente logico monotono quindi non cambia *mai* idea.

[2] Un ottimo riferimento per chi fosse interessato ad approfondire l'argomento è [114].

L'adeguatezza di questa ostinazione logica chiaramente non può essere valutata in astratto. Non ha cioè senso chiedersi se la monotonia sia un principio universalmente accettabile[3], ma la sua adeguatezza dipende in modo essenziale dal tipo di *contesto* (dall'ambito di ragionamento, se vogliamo) che deve affrontare l'agente/relazione di conseguenza oggetto del nostro discorso o della nostra analisi. Se assumiamo, ad esempio, che l'agente ragioni su problemi caratterizzati da una potenziale incertezza, come l'incompletezza delle informazioni, allora la monotonia diventa, in generale, indesiderabile. G.W. Leibniz, come spesso accade su queste faccende, aveva afferrato la parte essenziale della questione:

> Certamente non è oscura la causa del perché, finora, le sole discipline matematiche siano state coltivate in modo sorprendente e da suscitare invidia, così da garantire non soltanto la certezza ma anche un gran numero di egregie verità. Ciò non lo si può attribuire al solo merito degli ingegni matematici, [...] . *Ciò è dovuto piuttosto alla natura dell'oggetto, secondo il quale si può porre la verità davanti agli occhi [...], in modo da non lasciare alcun dubbio residuo*; per cui viene allo scoperto una specie di successione e, per così dire, un filo del pensiero [*filum cogitandi*] che è capace sia di renderci certi delle scoperte passate sia di mostrarci la strada indubitabile verso quelle future.

La condizione di indipendenza per le funzioni di scelta viene formulata da Sen in [157] come *Proprietà* α

(α) *Se* $x \in X$ *e* $X \subseteq Y$ *allora*

$$x \in S(Y) \Rightarrow x \in S(X).$$

Essa naturalmente induce una struttura di ordine che può essere convenientemente analizzata mediante il concetto di *preferenza rivelata*[4].

4.1. DEFINIZIONE (*Preferenza rivelata*). Sia X un insieme non vuoto con $x, y \in X$ e sia $S(\cdot)$ una funzione di scelta su X. Definiamo la relazione di *preferenza rivelata* $\succ$ in X ponendo

$$x \succ y \Leftrightarrow x = S(\{x, y\}).$$

È immediato notare come $\succ$ così definita sia una relazione totale. La seguente proposizione mostra che è anche transitiva e quindi come IAI sia sufficiente a definire un ordine (stretto) su X.

4.2. PROPOSIZIONE. *Sia S una funzione di scelta che soddisfa IAI. Allora* $\succ$, *costruita come nella Definizione 4.1, è una relazione transitiva.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che $\exists x, y, z \in X$ tali che

$$x = S(\{x, y\}),\ y = S(\{y, z\}),\ z = S(\{x, z\}).$$

Poiché S soddisfa IAI, otteniamo rispettivamente

$$y \notin S(\{x, y, z\}),\ z \notin S(\{x, y, z\}),\ x \notin S(\{x, y, z\}).$$

E questo ci porta alla contraddizione desiderata perchè, per la definizione di funzione di scelta, $S(Y)$ deve essere non vuoto. □

3 Ovvero se sia una "legge logica" per usare un linguaggio meritatamente desueto.

4 La terminologia è dovuta al fatto che le preferenza dell'agente è definita (rivelata) a partire dal suo comportamento di scelta. L'idea, in sintonia con lo spirito neopositivista dell'inizio del novecento, è che il concetto di scelta, a differenza di quello di preferenza, sia osservabile e quindi passibile di analisi scientifica. Questa impostazione risale almeno a [150].

La derivazione di un ordine di preferenza a partire da una funzione di scelta S può essere estesa alle *preferenze deboli*. In questo caso però abbiamo bisogno di una condizione aggiuntiva. Cominciamo con la definizione della preferenza debole.

4.3. DEFINIZIONE (*Preferenza debole rivelata*). Sia X un insieme non vuoto con $x, y \in X$ e sia $S(\cdot)$ una funzione di scelta su X. Definiamo la relazione di *preferenza debole rivelata* $\succsim$ in X ponendo

$$x \succsim y \Leftrightarrow x \in S(\{x, y\}).$$

La relazione $x \succsim_i y$ cattura l'intuizione secondo cui l'agente *i non* considera x peggiore di y (oppure "*i* non preferisce y a x" oppure che "preferisce debolmente x a y"). A differenza di $\succ_i$, la relazione $\succsim_i$ è chiaramente riflessiva.

Data $\succsim_i$, diciamo che i è *indifferente rispetto a x e y* scritto $x \sim_i y$, se e solo se

$$x \succsim_i y \text{ e } y \succsim_i x.$$

Dalla definizione segue immediatamente che $x \sim y$ se e solo se $\{x, y\} = S(\{x, y\})$.

Secondo questa caratterizzazione, l'unico criterio di scelta razionale disponibile a un agente che sia indifferente rispetto a tutte le alternative è la scelta casuale. Qualcuno potrebbe pensare che non ci sia niente di "razionale" nello scegliere a caso. Ma, secondo il modello che stiamo costruendo, non è proprio così. Ricordiamo come l'idea guida della caratterizzazione dei principi di razionalità che stiamo analizzando sia quella riconducibile alla massima calviniana di *evitare il peggio*. Una volta escluse tutte le alternative inammissibili, ciò che rimane è ugualmente ammissibile. Un modo di scegliere che non rispettasse questa simmetria violerebbe il principio di indipendenza (in una delle sue molte possibili formulazioni).

Nel caso della preferenza rivelata debole, il principio di indipendenza garantisce l'*aciclicità* della relazione di preferenza, ma non necessariamente la sua transitività. Supponiamo infatti che $x \in S(\{x, y, z\})$, $S(\{x, y\}) = \{x\}$, $S(\{y, z\}) = \{y\}$, $S(\{x, z\}) = \{x, z\}$. Queste scelte danno luogo a preferenze acicliche che tuttavia non sono transitive poiché valgono $x \succ y$, $y \succ z$ e $z \sim x$.

Affinché la funzione di scelta dia luogo a un ordine di preferenza debole abbiamo bisogno di una condizione di espansione, *Proprietà* β. Come al solito assumiamo che $X \subseteq Y$ siano insiemi non vuoti di alternative e che $x, y \in X$.

(β) *Se* $x \in S(X)$ *e* $y \in S(X)$ *allora*

$$x \in S(Y) \Rightarrow y \in S(Y).$$

Dimostra allora Sen[5]

4.4. PROPOSIZIONE. *Le condizioni (α) e (β) sono necessarie e sufficienti affinché la relazione $\succsim$ costruita come in Definizione 4.3 sia riflessiva, totale e transitiva.*

Nella teoria della scelta razionale o teoria delle preferenze rivelate dunque il concetto intuitivo di scelta coerente è catturato dalla richiesta che la funzione di scelta di

[5] Dimostrazioni elementari, oltre che in [157] si trovano in [125] [100] [147].

un individuo soddisfi le proprietà (α) e (β). Per questo i due principi si trovano spesso espressi come un'unica condizione denominata *Assioma di Houthakker* o *Assioma Debole delle Preferenze Rivelate*[6].

Isolando le condizioni sotto cui una funzione di scelta coerente dà luogo a un ordine di preferenze, la Proposizione 4.2 e Proposizione 4.4 ci permettono di consolidare l'interpretazione economica del concetto di *preferenza individuale* da cui siamo partiti nel Capitolo 1.

È naturale chiedersi, a questo punto, se il criterio di scelta razionale dettato dalle proprietà (α) e (β) sia logicamente equivalente al criterio di 'razionalità come coerenza' imposto dagli assiomi di ordine sulle relazioni di preferenza. Come prevedibile la risposta è affermativa.

Sia $\succ$ un ordine di preferenza stretto (e cioè asimmetrico, totale e transitivo) su un dominio finito X. Diciamo che $x^* \in X$ è *un ottimo rispetto a* $\succ$ se $x^* \succ x, \forall x \in X \setminus \{x^*\}$. Definiamo la *funzione di scelta indotta da* $\succ$, scritto $S_\succ(\cdot)$ ponendo

$$\text{(opt)} \qquad S_\succ(X) = opt_X = \{x^* \in X \mid x^* \succ x, \forall x \in X \setminus \{x^*\}\}.$$

Poiché $\succ$ è asimmetrica, opt_X contiene un unico elemento.[7]

Nel caso delle preferenze deboli $\succsim$, si definisce la funzione di scelta indotta in modo del tutto analogo, sostituendo l'ottimizzazione descritta dalla (opt) con la selezione dei massimi di X:

$$\text{(max)} \qquad S_\succsim(X) = max_X = \{x \in X \mid \nexists y \in X \text{ t.c. } y \succ x\}$$

L'ordine $\succsim$ induce una funzione che seleziona tutti gli elementi *non strettamente dominati* di X. Nel caso in cui l'agente sia indifferente rispetto a tutte le alternative in X, avremmo $S(X) = X = max_X$. Quindi, chiaramente, nel caso delle preferenze deboli si perde l'unicità del risultato[8].

Concludiamo osservando che la richiesta di transitività delle preferenze individuali assume, in questo contesto astratto, una plausibilità immediata. Se infatti ammettessimo preferenze intransitive non otterremmo funzioni di scelta dal momento che max_X e opt_X sarebbero entrambi vuoti.

Riassumendo, siamo partiti dal concetto primitivo di funzione di scelta $S(\cdot)$ che abbiamo usato nella Definizione 4.1 per definire il concetto di preferenza rivelata $\succ$ (e la sua versione debole) e abbiamo mostrato come la proprietà di indipendenza sia sufficiente a garantire che la relazione di preferenza rivelata sia un ordine. Chiudiamo ora

[6] Ci si riferisce comunemente a questo assioma come *Weak Axiom of Revealed Preference,* in inglese, abbreviato in WARP.

[7] Nella teoria della scelta sociale (e delle votazioni) la condizione catturata da (opt) viene detta *Condizione di Condorcet*, mentre l'elemento x^* viene chiamato *vincitore di Condorcet* nell'insieme di candidati X.

[8] Questa è *una* descrizione formale della condizione in cui si è trovato l'Asino di Buridano. L'altra, riguarda l'indecisione dell'Asino, che muore di fame perchè cerca una soluzione ottimale nonostante l'incompletezza delle sue preferenze. Si veda [167].

il diagramma osservando come la funzione di scelta indotta $S_{\succ}(\cdot)$ che abbiamo definito a partire da quest'ordine coincida con la funzione di scelta di partenza, e cioè che $S_{\succ}(\cdot) = S(\cdot)$. Vale infatti[9]

4.5. PROPOSIZIONE. *Si ha*

1. *Se $\succ$ è un ordine allora la $S_{\succ}$ definita dall'equazione (opt) è una funzione di scelta che soddisfa la proprietà (α).*
2. *Se $\succsim$ è un ordine allora la $S_{\succsim}$ definita dall'equazione (max) è una funzione di scelta che soddisfa WARP.*
3. *Se $S(\cdot)$ soddisfa WARP allora esiste una ordine di preferenza $\succsim$ tale che $S(\cdot) = S_{\succsim}(\cdot)$.*

L'equivalenza tra una funzione di scelta coerente e un ordine di preferenze, pur non essendo sorprendente, non è banale. Per vederlo consideriamo una piccola variazione della condizione (opt)

$$\text{(sec)} \qquad S_{\succ_2}(X) = sec_X = \left\{x^2 \in X \mid \exists unico x \in X : x \succ x^2\right\}$$

Si tratta del criterio per cui un agente sceglie sempre il *secondo miglior elemento* di X; questo non soddisfa, in generale, la condizione di indipendenza.

4.2. *Rappresentazione dell'utilità*

Passiamo ora alla seconda formulazione equivalente del concetto intuitivo di preferenze coerenti, quella basata sulle *funzioni d'utilità*. Abbiamo visto come il Teorema 3.2 ci abbia permesso di formulare un paradigma di scelta sociale alternativo rispetto all'aggregazione arroviana e quindi di superare, in qualche modo, l'impossibilità che si ottiene in quel contesto – il paradigma paretiano. Ritorniamo ora su un passaggio metodologicamente importante che abbiamo trattato in modo abbastanza rapido nel capitolo precedente, ovvero sulla rappresentazione delle relazioni di preferenza mediante funzioni d'utilità, e quindi sull'*equivalenza logica del criterio di massimizzazione dell'utilità personale da un lato, e le condizioni di consistenza delle preferenze dall'altro*. A tale scopo considereremo un contesto matematicamente più semplice di quello che dà luogo al teorema di rappresentazione di Debreu, Teorema 3.1 e ci limiteremo quindi al caso numerabile.

Come abbiamo già visto nel caso più generale del teorema di Debreu le proprietà di ordine delle preferenze rivelate sono sufficienti a garantire che sia sempre possibile assegnare alle alternative in X un valore numerico (reale) tale che, per ogni coppia x, y il valore che assegnamo a x sia maggiore (o uguale) a quello assegnato a y esattamente nel caso in cui x sia (debolmente) preferita a y. Ricordiamo che per $x, y \in X$ si dice che

[9] Per la dimostrazione, oltre all'originale [157], si può consultare [101].

$u : X \to \mathbb{R}$ *rappresenta* $\succ$ se vale

$$x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y). \tag{4.1}$$

4.6. TEOREMA. *Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

(1) $\succ$ *è una relazione totale e transitiva*
(2) *esiste* $u : X \to \mathbb{R}$ *che rappresenta* $\succ$.

DIMOSTRAZIONE. Ci limitiamo qui a descrivere l'idea della dimostrazione[10].

$(2) \Rightarrow (1)$. Si tratta del caso elementare. Assumiamo che esista $u : X \to \mathbb{R}$ che rappresenta $\succ$ e dimostriamo che questo garantisce che $\succ$ sia un ordine lineare. Prendiamo ad esempio l'Asimmetria. Per dimostrare che $\succ$ è asimmetrica è sufficiente osservare che la seguente catena di equivalenze è giustificata da (4.1) (e dalle proprietà di ordine dei reali):

$$\begin{aligned} x \succ y &\Leftrightarrow u(x) > u(y) \\ &\Leftrightarrow u(y) \not> u(x) \\ &\Leftrightarrow y \not\succ x. \end{aligned}$$

$(1) \Rightarrow (2)$. Questa direzione è leggermente più complicata perché dalle proprietà di $\succ$ dobbiamo derivare l'esistenza di un'opportuna funzione a valori reali che la rappresenti. Un modo per farlo è per induzione. A meno di modifiche inessenziali, questo argomento ci permette di dimostrare il risultato anche per insiemi numerabili di alternative. Il passo base dell'induzione, $\mid X \mid = 1$ è banale. L'ipotesi induttiva consiste nell'assumere che il risultato sia dato per tutti i $k < n$ e il passo induttivo consiste nel dimostrare il risultato per $n = \mid X \mid$. I dettagli sono un po' noiosi ma l'idea di fondo è molto semplice. Fissato n si tolga da X un'alternativa qualsiasi, diciamo x^-. Come risultato avremo che $X' = X \setminus x^-$ avrà $n-1$ elementi. Per X' vale dunque l'ipotesi induttiva, e questo ci garantisce l'esistenza di una funzione definita su X' che chiamiamo u' che rappresenta $\succ$. A questo punto usiamo u' per dedurre (i casi sono quattro) il valore di $u(x^-)$. □

Vale la pena soffermarci su due aspetti impliciti al teorema di rappresentazione dell'utilità. Il primo è che si tratta di un risultato di esistenza, che ci garantisce cioè che *se* le preferenze sono consistenti *allora* possiamo sempre rappresentarle numericamente. Tuttavia il teorema non ci fornisce nessuna procedura per farlo. A questo si aggiunge l'evidente mancanza di unicità di tale rappresentazione, su cui abbiamo già avuto modo di commentare nel capitolo precedente. La natura puramente ordinale delle relazioni di preferenza ammette infatti che la funzione di utilità u che rappresenta $\succ$ sia unica a meno di trasformazioni crescenti, lasciandoci con una classe di equivalenza di funzioni di utilità estremamente ampia e senza alcun criterio interno alla teoria per selezionarne una.

Nonostante queste evidenti limitazioni teoriche e pratiche, la rappresentazione dell'utilità gioca un ruolo metodologicamente importante nel far convergere le idee di consistenza delle preferenze, razionalità della scelta e massimizzazione dell'utilità in un modello matematico unitario. In particolare, il fatto che si possa sempre assegnare un valore numerico di utilità alle alternative permette di dare un fondamento teorico relativamente robusto alla *massimizzazione dell'utilità come criterio di scelta razionale*. Questa giustificazione fa leva sul fatto che, in virtù dei teoremi di rappresentazione, un

[10] Si vedano per esempio [59] [100].

agente economicamente razionale ed egocentrico (ovvero uno che massimizzi la propria utilità individuale) non è logicamente distinguibile da un agente che esibisca un comportamento di scelta consistente, ovvero che abbia preferenze ben ordinate.

Per apprezzare l'importanza di questa giustificazione è opportuno richiamare esplicitamente la distinzione tra la nozione *cardinale* e quella *ordinale* di utilità. Secondo la concezione cardinale, che affonda le sue radici recenti nel lavoro di Jeremy Bentham, l'utilità esprime, in "unità di utili" il piacere o la felicità associati al possesso di un certo bene x e lo fa secondo una scala assoluta. L'utilità intesa in questo senso cardinale è quindi la misura di una quantità soggettiva ed eminentemente psicologica. Inoltre, in quanto misurabile su scala assoluta, l'utilità individuale è passibile di confronto interpersonale.

Le difficoltà connesse alla misurabilità e alla confrontabilità interpersonale dell'utilità sono i punti centrali su cui Vilfredo Pareto articola la sua critica dell'utilità cardinale.

Per esempio Pareto, nel Capitolo III di [133], mette in evidenza come

> In tutto il ragionamento fatto per giungere [alla teoria dell'ofelmità] vi è un punto debole [. . .]. Abbiamo ammesso che quella cosa chiamata *piacere, valore d'uso, utilità economica, ofelmità*, era una quantità; ma manca la dimostrazione. E quando questa si avesse come si fa poi a misurare tale quantità?

Riflessioni di questo genere sono alla base della cosiddetta *rivoluzione ordinale di Pareto* che ha fornito una cornice teorica e metodologica fondamentale per lo sviluppo della *teoria delle preferenze rivelate*, brevemente richiamata nella Sezione 4.1. Fondando l'analisi formale unicamente sulle funzioni di scelta e quindi sul comportamento (in linea di principio) osservabile degli individui, la teoria delle preferenze rivelate e la nozione ordinale di preferenza che questa sottende si addiceva molto meglio della sua controparte cardinale al gusto neopositivista dell'epoca[11]. Già alla fine degli anni trenta il riferimento alle nozioni cardinali di utilità veniva considerato estraneo all'ambito scientifico. Celebre, a tal proposito, è la posizione espressa nel 1938 da Lionel Robbins[12].

Commentando sulla sua propria reticenza, intorno agli anni trenta, ad impiegare il concetto di utilità Bruno De Finetti scriveva in [42]

> L' idea che il rifiuto della nozione di utilità misurabile da parte di Pareto costituisse un progresso del pensiero scientifico (come l'abbandono del "moto assoluto" e del "tempo assoluto" nelle teorie relativistiche) mi dava l'impressione che ogni riabilitazione di quella nozione fosse un passo indietro.

[11] Una rassegna molto dettagliata in proposito è fornita da [77].

[12] Scrive Robbins

> I still believe that it is helpful to speak as if inter-personal comparisons of utility rest upon scientific foundations – that is, upon observation or introspection. [. . .] I still think, when I make interpersonal comparisons [. . .] that my judgments are more like judgments of value than judgments of verifiable fact. Nevertheless, to those of my friends who think differently, I would urge that, in practice, our difference is not very important. They think that propositions based upon the assumption of equality are essentially part of economic science. I think that the assumption of equality comes from outside, and that its justification is more ethical than scientific. But we all agree that it is fitting that such assumptions should be made and their implications explored with the aid of the economist's technique.

Lo stesso Arrow, infine, osserva che il confronto interpersonale delle utilità individuali è privo di significato economico[13].

In [77] Peter J. Hammond si riferisce a questa come alla più importante delle ipotesi del teorema di impossibilità di Arrow, e nota come sia anche l'unica a non aver ricevuto una formulazione rigorosa. E il fatto che fosse sufficiente, per Arrow, enunciare informalmente l'inconfrontabilità delle utilità è ancora una volta un indice importante del discredito che all'epoca contraddistingueva l'impostazione cardinale all'utilità. E così sarà fino alla critica di Sen [159] all'appropriatezza dell'impostazione ordinale che sottende il risultato di Arrow, nella sua interpretazione economica[14]. Se è intesa come regola di scelta sociale (per esempio nel contesto dei meccanismi elettorali), la "razionalità" della regola di aggregazione consiste nella consistenza del meccanismo di voto. In questa interpretazione, Sen trova adeguato il fondamento ordinale. Tuttavia, nel caso in cui la funzione di aggregazione venga intesa come funzione di benessere sociale, Sen argomenta contro l'adeguatezza del principio di Pareto in quanto questo porta a trascurare informazioni di natura cardinale che permettono il confronto interpersonale delle utilità individuali, necessario all'identificazione del benessere collettivo.

4.3. *Razionalità come coerenza*

Proviamo ora a unire i fili relativi alla formalizzazione della razionalità intesa come coerenza che abbiamo incontrato fino a ora e che sono riassunti nella Figura 1.

La teoria delle preferenze rivelate che abbiamo analizzato in questo capitolo ci fornisce una *giustificazione* per indicizzare la funzione obiettivo della massimizzazione in condizioni di certezza con una funzione di utilità individuale che abbiamo *derivato* dalla consistenza delle preferenze e della scelta. Massimizzazione dell'utilità personale e comportamento di scelta consistente sono quindi, in questo senso, logicamente equivalenti.

Come conseguenza diretta di questa equivalenza segue che una critica all'ipotesi dell'egocentrismo e dell'egoismo degli agenti economici si possa articolare come critica o degli assiomi imposti alla relazione di preferenza, oppure agli assiomi imposti alla funzione di scelta[15].

[13] Con le parole di Arrow, [5] p. 9

> interpersonal comparison of utilities has no meaning and [...] there is no meaning relevant to welfare comparisons in the measurability of individual utility.

[14] Ricordiamo (cfr. Capitolo 1) che si distinguono due interpretazioni della funzione di aggregazione arroviana, quella di *scelta sociale* e quella di *benessere sociale*.

[15] Per una critica a tutto campo si veda, ad esempio [2]

> [...] I shall be arguing against the normative interpretation of the axioms of completeness, transitivity and independence. In doing so, I hope to indicate also that the very notion of a theory of rational choice, based on axioms of preference patterns, which Elster calls a 'thin' theory of rationality, is incoherent and futile.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{coerenza} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{consistenza logica} \arrow[dr] & & \text{preferenze/scelta consistenti} \arrow[dl] \\
 & \text{ordine/massimizzazione} &
\end{tikzcd}$$

FIGURA 1. Dal concetto intuitivo di razionalità come coerenza all'idea di coerenza come ordine, e quindi in virtù del teorema di rappresentazione dell'utilità, come massimizzazione.

Iniziamo quindi considerando separatamente gli assiomi che impongono alle preferenze consistenti la struttura di ordine.

Completezza. La richiesta che la relazione d'ordine $\succ$ sia totale, ovvero che le preferenze di i su un insieme X siano complete, impone indubbiamente un alto livello di astrazione al modello di agente economico razionale. Come nota Amartya Sen, la completezza comporta richieste onerose rispetto alla natura ideale dell'agente, e in particolare alla sua capacità introspettiva[16].

Data l'onerosità delle richieste, non sorprende che l'assioma di completezza sia oggetto di molte critiche. Gli stessi von Neumann e Morgenstern, a tutti gli effetti gli "inventori" della moderna teoria assiomatica dell'utilità osservano che non soltanto è ragionevole, ma in certo senso più realistico, assumere che un individuo non sia capace di dichiarare quale preferisce tra due alternative[17].

Robert Aumann osserva che, non soltanto l'assioma di completezza è discutibile dal punto di vista descrittivo, ma non è desiderabile da un punto di vista normativo[18].

Non sorprende nemmeno quindi il fatto che molti sono stati i tentativi di caratterizzare il concetto di preferenza consistente senza richiedere l'assioma di completezza. In

[16] Scrive Sen in [157] p. 3

> A man with a preference relation that is complete knows his mind in choices over every pair.

[17] In [190,] p. 19 scrivono

> It is conceivable - and may even in a way be more realistic - to allow for cases where the individual is neither able to state which of two alternatives he prefers nor that they are equally desirable.

[18] In [12] scrive:

> of all the axioms of the utility theory, the completeness axiom is perhaps the most questionable. Like others, it is inaccurate as a description of real life; but unlike them we find it hard to accept even from the normative viewpoint.

questo contesto hanno particolare importanza i cosiddetti *quasi-ordini*[19].

Transitività. L'assioma di transitività è meno controverso di quello di completezza e in molti ambiti sperimentali viene riportato che, una volta mostrata a dei soggetti l'intransitività delle loro preferenze, questi tendono a riconoscere immediatamente l'errore e quindi a correggerlo[20].

È opportuno notare come la difesa del valore normativo della transitività abbia successo soltanto a patto di associare alla nozione di preferenza la volontà, da parte dell'agente, di pagare un costo di transazione. Tuttavia, nella definizione di preferenza rivelata non si fa riferimento a costi, ma soltanto alla scelta tra due alternative. Associare un costo alla "soddisfazione della preferenza" significa aggiungere qualcosa alla rappresentazione formale della preferenza con una relazione (d'ordine).

Infine, se assumiamo la transitività della relazione di indifferenza apriamo la porta a fenomeni di tipo soritico[21]. Supponiamo, per esempio che i sia solito bere il caffè amaro. Supponiamo che il barista, per errore, abbia versato esattamente un granello di zucchero nel suo caffè. È ragionevole pensare che i non ritenga necessario che il barista prepari un altro caffè, cioè i è indifferente tra il caffè amaro e il caffè con un granello di zucchero ($c_0 \sim_D c_1$). Prima di bere, cade un altro granello e i continua a essere indifferente, $c_1 \sim_D c_2$. Se assumiamo che $\sim$ sia transitiva, arriverà presto il momento in cui il caffè sarà decisamente dolce, e le preferenze di i, conseguentemente inconsistenti.[22]

[19] Si vedano il Cap 1* di [157] e [125].

[20] Scrive Tversky [185]

> Transitivity, however, is one of the basic and the most compelling principles of rational behaviour. For if one violates transitivity, it is a well-known conclusion that he is acting, in effect, as a "money-pump". Suppose an individual prefers y to x, z to y, and x to z . It is reasonable to assume that he is willing to pay a sum of money to replace x by y. Similarly, he should be willing to pay some amount of money to replace y by z and still a third amount to replace z by x. Thus, he ends up with the alternative he started with but with less money.

L'esempio sancisce condivisibilmente l'irrazionalità di intrattenere preferenze cicliche. Ma, come abbiamo osservato nel Capitolo 1, la transitività di $\succ$ è sufficiente ma non necessaria ad evitare preferenze cicliche.Esiste un'ampia letteratura sulle preferenze acicliche raccolta esaustivamente in [31].

[21] Una delle prime analisi del fenomeno si trova in [4].

[22] Una variante del problema appare nel cosiddetto *paradosso del masochista* introdotto da Quinn [142]:

> Suppose there is a medical device that enables doctors to apply electric current to the body in increments so tiny that the patient cannot feel them. The device has 1001 settings: 0 (off) and 1 . . . 1000. Suppose someone (call him the self-torturer) agrees to have the device, in some conveniently portable form, attached to him in return for the following conditions: The device is initially set at 0. At the start of each week he is allowed a period of free experimentation in which he may try out and compare different settings, after which the dial is returned to its previous position. At any other time, he has only two options – to stay put or to advance the dial one setting. But he may advance only one step each week, and he may never retreat. At each advance he gets \$1O,OOO.
> Since the self-torturer cannot feel any difference in comfort between adjacent settings, he appears to have a clear and repeatable reason to increase the voltage each week. The trouble is that there are noticeable differences in comfort between settings that are sufficiently far apart. Indeed, if he keeps advancing, he can see that he will eventually reach settings that will be so painful that he would then gladly relinquish his fortune and return to 0.

Critiche della razionalità come coerenza interna dell'agente economico. La riduzione del concetto di razionalità (economica) alla coerenza interna catturata dall'assioma di indipendenza dalle alternative irrilevanti per le funzioni di scelta è oggetto di numerose critiche. Ritorniamo all'esempio con cui abbiamo introdotto l'assioma di indipendenza con una piccola modifica. Invece di considerare l'aggiunta della pizza fuori menu "rape e salsiccia", supponiamo che la nuova alternativa sia la pizza "pollo e ananas". In questo caso l'alternativa che estende il menu originario può darci informazioni rilevanti sulla (scarsa, presumibilmente) qualità della pizzeria. Questa informazione aggiuntiva potrebbe fornirci una buona ragione per *rivedere* le nostre preferenze e scegliere la pizza margherita che originariamente avevamo escluso, perché più semplice e quindi meno 'rischiosa'. Questa violazione dell' indipendenza è giustificabile facendo riferimento al *valore epistemico del menu*, secondo l'espressione di Sen [167] p. 753.

Un altro esempio di violazione ragionevole dell'assioma di Indipendenza fa leva sull'uso di norme sociali[23].

L'irrazionalità non è l'attrito. Una conclusione relativamente ovvia di questo capitolo è che nessun aspetto della definizione di razionalità, così come usata nella teoria economica e in particolare in economia matematica, è immune da critiche, anche profonde. Diventa quindi naturale chiedersi perché parliamo di agenti razionali, e quando lo facciamo, cosa intendiamo dal punto di vista teorico e metodologico.

Le domande sono chiaramente interconnesse dal momento che gli agenti *reali*, ovvero quelli che interagiscono nell'economia reale mostrano comportamenti a volte molto lontani dai canoni di razionalità che abbiamo discusso. L'evidenza sperimentale su questo è consolidata e mette in evidenza modi diversi dell'irrazionalità degli agenti economici. In alcuni casi i soggetti sperimentali pur intendendolo, non riescono a massimizzare la propria utilità[24]. In altri casi, gli stessi teorici sono in disaccordo su quale debba essere il criterio normativo di razionalità[25].

[23] Riportiamo l'esempio originale sempre di Sen [165].

> Suppose a person faces a choice at a dinner table between having the last remaining apple in the fruit basket (y) and having nothing instead (x), forgoing the nice-looking apple. She decides to behave decently and picks nothing (x), rather than the one apple (y). If, instead, the basket had contained two apples, and she encountered the choice between having nothing (x), having one nice apple (y) and having another nice one (z), she could reasonably enough choose one (y), without violating any rule of good behaviour.

Un terzo tipo di violazione ragionevole di questo assioma è dovuto a Ariel Rubinstein [147] p. 37:

> Imagine there's a handsome guy called Albert, who is looking for a date to take to a party. Albert knows two girls that are crazy about him, both of whom would love to go to the party. The two girls are called Mary and Laura . Of the two, Albert prefers Mary. Now imagine that Mary has a sister , and this sister is also crazy about Albert. Albert must now choose between the three girls, Mary, Mary's sister and Laura. With this third option, I bet that if Albert is rational, he will be taking Laura to the party.

[24] L'indagine su questo fenomeno ha inizio intorno alla metà degli anni 50 principalmente come critica dell'adeguatezza descrittiva del criterio di massimizzazione dell'utilità prevista [1].

[25] Alcuni ritengono che l'ottimizzazione non sia l'obiettivo da perseguire, per esempio [176] [68]. Altri

Una difesa standard dell'interesse metodologico nello studio dell'agente economico idealmente razionale fa leva sull'analogia tra economia e fisica. Riportiamo alcuni punti di vista illustri sull'argomento. Il primo è da [133] che riportiamo per esteso.

> Sotto quest'aspetto vi sono due grandi classi di scienze: quelle che, come la fisica, la chimica, la meccanica, possono avere ricorso all'esperienza, e quelle che, come la metereologia, l'astronomia, l'economia politica, non possono, o difficilmente possono, avere ricorso all'esperienza, e che si debbono contentare dell'osservazione. Le prime possono separare materialmente i fenomeni che corrispondono a una uniformità o legge che vogliono studiare, le seconde possono solo separarli mentalmente, teoricamente; ma nell'un caso e nell'altro è sempre il fenomeno concreto che decide se una teoria si deve accogliere o no. Una teoria non ha, non può avere, altro criterio di verità se non il suo accordo più o meno perfetto coi fenomeni concreti. Le scienze che possono fare uso soltanto dell'osservazione, separano colla semplice astrazione certi fenomeni da certi altri; le scienze che possono anche fare uso dell'esperienza concretano materialmente tale astrazione; ma per tutte le scienze l'astrazione rimane la condizione preliminare e indispensabile di ogni ricerca.
>
> [...]
>
> La meccanica razionale, quando riduce i corpi a semplici punti materiali; l'economia pura, quando riduce gli uomini reali all' *homo oeconomicus*, fanno uso di astrazioni perfettamente simili e imposte da simili necessità.

Alla parola "simili" Pareto aggiunge una nota che rimanda all'articolo con cui Vito Volterra introduce il suo modello preda-predatore.

> L'uomo reale compie azioni economiche, morali, religiose, estetiche, ecc. Si esprime precisamente la stessa cosa dicendo: 'studio le azioni economiche e faccio astrazione dalle altre'; oppure dicendo: 'studio l'homo oeconomicus, il quale compie solo azioni economiche.' Similmente si esprime la stessa cosa dicendo: 'studio le reazioni dello zolfo e dell'ossigeno concreti, facendo astrazione dai corpi estranei che possono contenere', oppure dicendo: 'studio le reazioni dello zolfo e dell'ossigeno chimicamente puri'.

Considerazioni molto simili sono proposte da von Neumann e Morgenstern in [190] in corrispondenza delle riflessioni sulla teoria dell'utilità a cui oggi ci riferiamo con i loro nomi.

L'uso esteso dell'analogia tra fisica ed economia così usuale durante la prima metà del Novecento[26], può essere letto secondo una duplice interpretazione. Da una parte la

ancora ritengono che l'egocentrismo debba lasciare il posto ad atteggiamenti intrinsecamente pro-sociali, si veda per esempio [36].

[26] Osserviamo a margine che rispetto ad alcuni problemi legati soprattuto alla finanza, l'analogia ha lasciato il posto alla fusione di economia e fisica nella disciplina nota appunto come *econofisica*. Un'agile

possibilità di ricondurre la metodologia economica a quella fisica doveva sicuramente servire come strumento retorico per conferire, indirettamente, scientificità a una disciplina in larga parte rivolta all'analisi di concetti psicologici e non direttamente osservabili[27]. Dall'altra parte, le analogie fisiche suggeriscono implicitamente la futilità di ogni tentativo di rappresentare completamente la realtà nel modello formale. In questo senso Pareto giustifica esplicitamente l'astrazione che porta a concentrare l'attenzione su agenti idealmente razionali come necessaria alla costruzione del modello economico e "imposta da simili necessità" rispetto a quelle della fisica. Tuttavia le osservazioni che abbiamo sviluppato in questo capitolo ci mettono in guardia rispetto ad accettare in modo acritico questa "necessità". È poco ragionevole infatti pensare che le deviazioni dalle norme di razionalità imposte dalla coerenza logica siano paragonabili alla presenza dell'attrito nello studio del moto. La richiesta, per esempio, che gli agenti economici siano in grado di considerare (istantaneamente e infallibilmente) *tutte* le (infinite) conseguenze logiche delle loro conoscenze è, nella maggior parte dei casi, praticamente impossibile da soddisfare[28]. In pratica questo significa che l'ideale normativo fornito dalla nozione di razionalità come coerenza è generalmente irraggiungibile. Considerazioni analoghe possono essere fatte a proposito della capacità introspettiva degli agenti, cioè la loro capacità di comprendere e distinguere le loro proprie preferenze. Ovviamente queste considerazioni sui limiti cognitivi degli agenti reali hanno un carattere generale, o per così dire globale. Non è dunque escluso che localmente le manifestazioni palesi di incoerenza logica siano facilmente riconoscibili come comportamenti irrazionali. Un individuo che asserisca una cosa e il suo esatto contrario nella stessa frase perde immediatamente di credibilità, come un individuo che non riesca a "vedere" le implicazioni immediate delle proprie azioni, come per esempio non fermare

introduzione ai temi e ai metodi di questa area di ricerca è reperibile in [105].

27 In particolare le preferenze e le opinioni, i due concetti eminentemente soggettivi che regolano, secondo la teoria dell'utilità classica, le azioni economiche degli individui razionali. La necessità di questa retorica, come ricordato in precedenza, dipendeva dalla cornice concettuale e ideologica del neopositivismo. In questo senso risulta particolarmente rappresentativa la posizione espressa da Frank P. Ramsey [143] in relazione alla metodologia delle preferenze (e opinioni) rivelate dal comportamento di scelta razionale di un agente ideale:

> Just the same thing is found in physics; men found that a wire connecting plates of zinc and copper standing in acid deflected a magnetic needle in its neighbourhood. Accordingly as the needle was more or less deflected the wire was said to carry a larger or a smaller current. The nature of this "current" could only be conjectured: what were observed and measured were simply its effects. [. . .] I do not want to discuss the metaphysics or epistemology of this process, but merely to remark that if it is allowable in physics it is allowable in psychology also.

28 Per ragioni di spazio non abbiamo potuto sviluppare alcuna considerazione sulla complessità della logica classica. Si tratta, in buona approssimazione, del problema di definire, per esempio, la quantità di tempo necessaria a rispondere alla domanda se un certo enunciato $\theta \in \mathscr{E}\mathscr{L}$ è una tautologia. Nel caso della relazione di conseguenza $\models$ che abbiamo incontrato nel Capitolo 2, sappiamo che la domanda $\models \theta$? ammette sempre risposta. Ma i risultati classici della teoria della *complessità computazionale* ci dicono che in generale non esiste un algoritmo efficiente per rispondere. Ciò sotto l'ipotesi che $P \neq NP$, ipotesi generalmente accettata ma ad oggi non dimostrata e la cui determinazione costituisce uno dei problemi del Millennio su cui il *Clay Institute of Mathematics* ha posto un premio di un milione di dollari.

l'automobile di fronte a un ostacolo. Molto più complicato è ragionare sulla coerenza e incoerenza dei desideri e quindi delle preferenze degli individui. Anche se può risultare frustrante, non sembra evidentemente irrazionale desiderare una giornata produttiva di lavoro e al tempo stesso una giornata di riposo al mare.

Il tentativo di comprendere, in un'unica cornice teorica, lo standard normativo della razionalità come coerenza da un lato, e le regolarità dei comportamenti "irrazionali" dall'altro, ha portato negli ultimi decenni allo sviluppo dell'*economia comportamentale* . Il paradigma più noto in questo campo è quello di *prospect theory* originatosi in [91] e che si concentra sullo studio delle deviazioni sistematiche[29] del comportamento osservato negli agenti reali rispetto ai criteri logici di razionalità che si assumono in economia matematica[30].

Se *prospect theory* accetta la massimizzazione dell'utilità come il criterio normativo adeguato, altre teorie discordano. Alcuni infatti ritengono che l'ottimizzazione non sia l'obiettivo da perseguire nella definizione della razionalità[31]. Altri ancora ritengono che l'egocentrismo non costituisca un'ipotesi metodologica adeguata e che debba lasciare il posto ad atteggiamenti intrinsecamente pro-sociali[32]. Questi suggerimenti sono quindi ortogonali alle considerazioni di Pareto [133] sull'opportunità di distinguere nettamente tra economia e morale:

> Erra del pari chi biasima l'economia politica di non tenere conto della morale; tanto varrebbe accusare una teoria del giuoco degli scacchi di non tenere conto dell'arte culinaria. Chi studia A separatamente da B, cede semplicemente ad un'assoluta necessità dello spirito; umano ma perché studia A non intende menomamente affermarne la preminenza su B.

Ne risulta dunque un quadro molto complicato. Se il nostro scopo è condurre un'analisi matematica dei fenomeni socio-economici siamo costretti a costruire per via di idealizzazioni e astrazioni un modello formale, per forza di cose incompleto e stilizzato, della situazione concreta che ci interessa comprendere. In questo processo risulta particolarmente vantaggioso sottoscrivere le ipotesi di *individualismo metodologico*[33] che permettono, con una parafrasi di [156], la "microfondazione" dei fenomeni collettivi. E in ambito economico-matematico risulta naturale pensare a un agente come al massimizzatore di una funzione obiettivo. Questi passaggi, ognuno dei quali risulta pragmaticamente difendibile, portano a risultati non banali, sia dal punto di vista tecnico – come vedremo nella teoria dell'equilibrio – che da un punto di vista concettuale. Sotto ipotesi molto stringenti, infatti, si ottiene una risposta positiva alla domanda se (una forma di) l'ottimo per la collettività sia raggiungibile unicamente attraverso la

29 L'indagine su questo fenomeno ha inizio intorno alla metà degli anni 50 principalmente come critica dell'adeguatezza descrittiva del criterio di massimizzazione dell'utilità prevista [1].

30 È interessante osservare come in ambito politico, l'evidenza sperimentale sull'"irrazionalità" degli individui è alla base delle proposte di *paternalismo libertario*, come quella molto discussa di [182].

31 Contributi importanti in questo si devono a Herbert Simon [176] e più di recente a Gert Gigerenzer e collaboratori [68].

32 Ritorneremo sull'argomento nel Capitolo conclusivo.

33 A queste ipotesi dedicheremo uno spazio più ampio nel Capitolo 10.

realizzazione degli interessi personali. D'altra parte, in ognuno di questi passaggi facciamo ipotesi metodologiche impegnative, e che sappiamo non corrispondere del tutto (e a volte in larga parte) al caso concreto che ci interessa analizzare.

Per ora basti sollevare la questione, senza tentare di dipanarla, relativa alla tensione tra la necessità di fare ipotesi che in qualche modo snaturano l'oggetto di indagine economica, e dall'altra il tentativo di estendere l'applicabilità dell'analisi formale in economia. Nel Capitolo 6 torneremo sulla questione interrogandoci sui limiti delle soluzioni che ci accingiamo a illustrare e che porteranno al *teorema fondamentale dell'economia del benessere*. Nel farlo vedremo come l'interazione tra agenti razionali ed egocentrici violi spesso criteri intuitivi di efficienza ed equità sociali.

CAPITOLO 5

Il nucleo di un'economia di proprietà privata di solo scambio

Nel Capitolo 3 abbiamo isolato i massimi di Pareto come risultato di un criterio di buona gestione economica (per ogni allocazione Y c'è un massimo di Pareto che è unanimemente preferito a Y) e di un buon criterio di razionalità collettiva (un massimo di Pareto è caratterizzato dal fatto che non è possibile aumentare contemporaneamente l'utilità di tutti gli agenti[1]). In questo capitolo ci chiediamo se sia possibile raffinare le nostre scelte, cioè isolare, tra i massimi di Pareto, delle allocazioni che rispondano meglio alla richiesta di *ottimalità* collettiva. Sappiamo dal teorema di Arrow che questo non è possibile senza l'intervento di ulteriori fattori esterni rispetto alla realizzazione delle preferenze individuali.

Vedremo che l'aggiunta dell'ipotesi della *proprietà privata delle risorse iniziali*[2] assieme alla, in qualche modo conseguente, possibilità di formare delle *coalizioni con potere di blocco*[3] permette, in effetti, di formulare dei nuovi criteri di selezione tra i massimi di Pareto e di identificarne un sottoinsieme che è chiamato il *nucleo* dell'economia di proprietà privata. Di fatto, quindi inseriremo nella nostra analisi elementi di interazione strategica tra gli individui che, per questo motivo, chiameremo spesso *giocatori*. Si compie in questo passaggio l'abbandono dell'ipotesi di indipendenza che ha fatto da sfondo all'impossibilità arroviana. Nel contesto che studieremo in questo capitolo gli agenti saranno membri e fautori di *coalizioni*, ma sempre motivati dall'interesse personale.

L'idea che un agente possa partecipare a una coalizione con tasso non solo 0 o 1 ma in $[0,1]$, *coalizioni nebulose*[4], unito ad un *argomento di scala*, permette poi di far sorgere dal mercato i *prezzi*.

1 Ancora una volta è interessante evidenziare l'analogia con i due aspetti del concetto logico di coerenza, cioè l'adeguatezza formale e quella materiale dell'efficienza paretiana. L'aspetto di buona gestione economica è catturato dall'esistenza di un ottimo di Pareto. L'analogia è con il concetto di coerenza come soddisfacibilità, che abbiamo incontrato nella Sezione 2.1. L'aspetto che invece si riduce all'ottimalità collettiva è lo stesso che abbiamo discusso a proposito dell'adeguatezza materiale delle regole di aggregazione nella Sezione 2.2.2.

2 Questo significa che le risorse non sono inizialmente attribuite in blocco alla collettività, ma ripartite tra i diversi individui.

3 Ogni coalizione, in particolare ciascun agente, non sarà disposta ad avere meno di quello che già ha.

4 *Flou* in francese, *fuzzy* in inglese.

5.1. *Nucleo dell'economia*

Supponiamo, come nel Capitolo 1, che m agenti caratterizzati dalla loro relazione di preferenza $\succcurlyeq_i$, $1 \le i \le m$, debbano dividersi delle risorse in quantità totale $\Omega \in \mathbb{R}^l$. Come conseguenza dei risultati del Capitolo 3 supporremo anche che le preferenze $\succcurlyeq_i$ siano rappresentate da funzioni d'utilità individuali continue[5], u_i.

Aggiungiamo ora a questo schema due ipotesi supplementari che cambieranno radicalmente la situazione.

(H.1) *Egocentrismo delle preferenze.* La funzione d'utilità u_i dell'individuo i dipende solamente dal suo paniere di beni $x^i \in \mathbb{R}^l$.

(H.2) *Proprietà privata.* Le risorse totali Ω sono inizialmente suddivise tra gli individui.

Chiameremo una economia che verifica le ipotesi (H.1) e (H.2) una *economia di proprietà privata*.

Ricordiamo che le funzioni d'utilità $u_i = u_i(x^1, \ldots, x^m)$, dove $x^i = (x^i_1, \ldots, x^i_l)$, dipendevano, nel Capitolo 1, dai panieri di beni di tutti, in particolare, non era escluso che gli individui potessero tener di conto del benessere altrui. Ora i consumatori ignoreranno, volontariamente o no, il paniere degli altri e importerà loro soltato di quello che va a loro – è la modellizzazione dell'*egoismo*. Le funzioni d'utilità u_i dipenderanno solo dal paniere x^i dell'agente i. Scriveremo quindi

$$u_i(x^i) \quad \text{al posto di} \quad u_i(x^1, \ldots, x^m)$$

e

$$x^i \succcurlyeq_i y^i \quad \text{al posto di} \quad (x^1, \ldots, x^m) \succcurlyeq_i (y^1, \ldots, y^m).$$

In questa situazione, il problema dell'allocazione di beni inizialmente collettivi non potrebbe che generare una guerra, poiché ognuno vorrebbe il massimo per sé. L'ipotesi (H.2) della proprietà privata delle risorse, e cioè che la guerra ci sia già stata e sia finita con un qualche compromesso (che esclude, per il momento altre guerre), cambia la situazione trasformando il problema della *suddivisione di beni collettivi* nel *problema degli scambi di beni privati personali*: finita la guerra si può incominciare (sic!) una economia privata di scambio[6].

Sia nel modello arroviano del Capitolo 1 sia in quello paretiano del Capitolo 3 i beni non appartenevano a nessuno e si trattava di ripartirli. Ora si suppone che l'agente i si trovi in possesso del paniere $\omega^i \in \mathbb{R}^l_+$ e che le risorse totali dell'economia si ottengano sommando queste quantità,

$$\Omega = \omega^1 + \ldots + \omega^m.$$

Prima la collettività nel suo insieme disponeva di un *veto* sempre che questo fosse espresso unanimente, ora ciascun individuo ha di che dire. Una qualche ridistribuzione $(x^1, \ldots, x^m)$ potrebbe benissimo costituire un ottimo di Pareto ma, se l'agente i preferisce a questa il suo paniere iniziale, cioè $\omega^i \succ_i x^i$, semplicemente non l'accetterà.

[5] Per questo, ricordiamo, basterà che le preferenze siano continue.

[6] Ovviamente, se l'individuo i inizialmente non possiede niente è fuori dal gioco e può essere eliminato.

Mentre il paradigma arroviano permette che la regola dell'unanimità sia sufficiente, in linea di principio, alla razionalità collettiva e quindi all'esito ottimale per la società[7] l'economia di proprietà privata dovrà tenere in conto necessariamente gli m criteri di *razionalità individuale*:

$$x^i \succcurlyeq_i \omega^i \quad \forall i \in S.$$

E non è tutto. Anche alle *coalizioni*, cioè ai sottogruppi di individui della società, è permesso bloccare delle allocazioni, cioè esprimere una forma di veto. Infatti la coalizione $A \subseteq S$ può *realizzare* qualunque paniere di beni $y^i, i \in A$, purché $\sum_{i\in A} y^i = \sum_{i\in A} \omega^i$; segue allora che ogni ridistribuzione $(x^1,\dots,x^m)$ verrà bloccata dalla coalizione A se per qualche y^i succede che $y^i \succ_i x^i$. L'allocazione $(x^1,\dots,x^m)$ per poter essere *accettabile* alla coalizione A (cioè presa in considerazione da A) dovrà soddisfare il seguente criterio *intermedio di razionalità*:

$$\forall A \subseteq S, \text{ se } \sum_{i\in A} y^i = \sum_{i\in A} \omega^i \text{ allora } \exists\, i \in A \text{ tale che } x^i \succcurlyeq_i y^i.$$

Ci sono $2^m - 1$ condizioni di questo tipo, dalla razionalità collettiva, che porta all'ottimalità debole di Pareto (corrispondente ad $A = S$), alla razionalità individuale corrispondente a $A = \{i\}$.

Si arriva quindi a definire *accettabili* solo le allocazione realizzabili che sfuggono a qualunque veto.

5.1. DEFINIZIONE. In una economia di proprietà privata si dice che una coalizione $A \subseteq S$ *blocca* l'allocazione $(x^1,\dots,x^m)$ se esistono panieri di beni $y^i \in \mathbb{R}^l_+$, $i \in A$, tali che

$$\forall i \in A \quad y^i \succ_i x^i \quad \text{e} \quad \sum_{i\in A} y^i = \sum_{i\in A} \omega^i.$$[8]

Si chiama *nucleo* $\mathcal{N}$ dell'economia l'insieme delle allocazioni accettabili cioè realizzabili e non bloccate da nessuna coalizione.

Osserviamo che, in particolare, le allocazioni del nucleo sono massimi di Pareto.

Prima di continuare è opportuno discutere un po' più dettagliatamente la nozione di *coalizione* e, collegata a questa, la nozione di *gioco cooperativo*[9].

5.2. *Coalizioni e giochi cooperativi*

Una *coalizione* in S è un qualunque sottoinsieme di S. Se S ha m membri ci sono quindi 2^m coalizioni (compreso la coalizione vuota). Chiaramente non tutte le coalizioni possibili si formano, c'è bisogno che gli individui che vi partecipano possano trovarvi

7 Anche se non dobbiamo dimenticare le difficoltà sollevate dal paradosso del paretiano liberale di Sen nell'Esempio 1.7.

8 Ricordiamo che tutti i beni debbono essere distribuiti, questo giustifica l'uguaglianza.

9 Ritorneremo anche più avanti su queste nozioni; comunque, maggiori informazioni sulle nozioni di nucleo, coalizioni e giochi si possono trovare rispettivamente in [85] [174].

un'utilità. In questo senso risultano interessanti famiglie $\mathscr{C}$ di coalizioni, $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(S)$, chiamate *strutture di coalizioni*.

5.2.1. *Strutture equilibrate di coalizioni*

Se vogliamo farne un qualche uso, bisognerà identificare *strutture di coalizioni* rilevanti. A questo, solitamente si arriva dopo un processo di tentativi, di deduzioni di fatti e così via (come del resto per quasi ogni definizione). Noi ci limiteremo a identificare alcuni fatti rilevanti che ci porteranno alla definizione delle cosiddette *strutture equilibrate minimali di coalizioni*.

Osserviamo che le coalizioni che non appartengono a $\mathscr{C}$ sono destinate a non avere alcuna influenza su quello che succederà. Quindi, nel contesto in cui ci stiamo muovendo, sicuramente gli individui non vorranno rinunciare ad una loro presenza. Diremo quindi che una struttura è *naturale* se ogni individuo appartiene a una coalizione,

$$\forall i \in S\, \exists C \in \mathscr{C} \quad \text{tale che} \quad i \in C. \tag{5.1}$$

In casi semplici un individuo non appartiene a più coalizioni, cioè

$$\text{per} \quad C, D \in \mathscr{C} \quad \text{vale} \quad C \cap D = \emptyset. \tag{5.2}$$

Questo unito alla (5.1) restringe le strutture di coalizioni alle *partizioni* di S : S si scrive come unione disgiunta di tutti gli elementi di $\mathscr{C}$.

Ma, spesso succede che un individuo appartenga a più organizzazioni, che a titolo diverso promuovono o difendono i suoi interessi. Se l'individuo i appartiene sia a C sia a D non potrà essere rappresentato pienamente sia da C sia da D. Converrà allora introdurre delle *percentuali di rappresentanza* $\alpha_C^i > 0$ e $\alpha_D^i > 0$ con $\alpha_C^i + \alpha_D^i = 1$: C rappresenta la frazione $\alpha_C^i > 0$ dell'individuo i, D rappresenta la frazione $\alpha_D^i > 0$ di i. Estendendo ciò al caso in cui un individuo possa appartenere a più coalizioni, concludiamo che ad ogni coalizione $C \in \mathscr{C}$ viene associata una famiglia di coefficienti $\{\alpha_C^i\}_{i \in C}$, dove α_C^i è la frazione dell'individuo i rappresentato da C.

Si ritiene ora ragionevole aggiungere la richiesta che *ogni coalizione rappresenti in modo uguale i suoi membri*: se $i, j \in C \in \mathscr{C}$, allora $\alpha_C^i = \alpha_C^j$. Indicheremo con α_C questo valore. Ad ogni coalizione C è dunque associato un valore $\alpha_C > 0$ che è la frazione di ciascuno dei membri che essa rappresenta. D'altro canto l'individuo i ha distribuito la sua rappresentanza tra varie coalizioni, riunendole dovrà ritrovare il tutto. Concludiamo, avendo posto $\mathscr{C}_i := \{C \in \mathscr{C} \,|\, i \in C\}$,

$$\forall\, i \in S \quad \text{vale} \quad \sum_{C \in \mathscr{C}_i} \alpha_C = 1.$$

Osserviamo che questo implica che almeno uno degli α_C è non nullo, cfr. (5.1), e che, se $\mathscr{C}$ è una struttura di coalizioni disgiunte, è equivalente a (5.1).

5.2. DEFINIZIONE. Una *struttura equilibrata di coalizioni* è un sottoinsieme $\mathscr{C}$ dell'insieme delle parti di S, $\mathscr{P}(S)$, tale che ad ogni suo elemento o coalizione $C \in \mathscr{C}$ si possa associare un numero $\alpha_C > 0$ che verifichi

$$\forall\, i \in S \quad \text{vale} \quad \sum_{C \in \mathscr{C}_i} \alpha_C = 1 \quad \text{dove} \quad \mathscr{C}_i := \{C \in \mathscr{C} \,|\, i \in C\}. \tag{5.3}$$

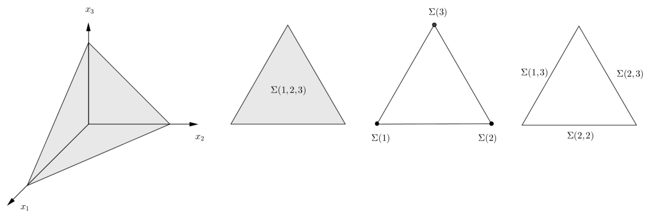

FIGURA 1. Rappresentazione del simplesso di $\mathbb{R}^3$ e dei suoi sottosimplessi.

Ogni struttura disgiunta e naturale è equilibrata, mentre la struttura fatta da un individuo e da tutta la società, ad esempio, non lo è.

Ci chiediamo ora: data una struttura equilibrata $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(S)$, i coefficienti α_C, $C \in \mathscr{C}$, sono determinati in maniera unica? In generale, la risposta è a questa domanda risulta negativa; abbiamo invece una risposta positiva se la struttura $\mathscr{C}$ è *minimale*, cioè $\mathscr{C}$ *non contiene nessuna struttura* $\mathscr{C}'$ *che sia ancora equilibrata*,

$$\text{se} \quad \mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(S), \quad \text{allora} \quad \mathscr{C}' \quad \text{non è equilibrata.}$$

Si dimostrano allora (noi non lo faremo, si veda ad esempio [53]) i seguenti fatti.

5.3. PROPOSIZIONE. *Ogni struttura equilibrata di coalizioni contiene una struttura minimale.*

5.4. PROPOSIZIONE. *Sia* $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(S)$ *una struttura equilibrata minimale. Allora*

(1) *esiste una e una sola famiglia di coefficienti* $\alpha_C > 0$ *che verificano le relazioni in* (5.3),
(2) $\mathscr{C}$ *contiene al più m coalizioni.*

5.2.2. *Simplessi e imputazioni compatibili*

D'ora in poi identificheremo la società S di m individui con $\{1, 2, \ldots, m\}$. Se s è una costante positiva, ad esempio $s = 1$, consideriamo il *simplesso*

$$\Sigma(S) := \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m_+ \quad | \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_m = s\}.^{10}$$

A ogni coalizione $A \subseteq S$ associamo la *faccia* o *sottosimplesso* $\Sigma(A)$ del simplesso $\Sigma(S)$ definita da

$$\Sigma(A) := \Big\{x \in \mathbb{R}^m_+ \quad | \quad x_i = 0 \quad \forall\, i \notin A \quad \text{e} \quad \sum_{i \in A} x_i = s\Big\}.$$

[10] Osserviamo che $\Sigma(S)$ è l'*inviluppo convesso* dei vettori $e^s_1 := (s, 0, \ldots, 0)$, $e^s_2 = (0, s, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e^s_m(0, \ldots, 0, s)$, cioè è costituito da tutti i vettori di $\mathbb{R}^m_+$ del tipo $\sum_{i=1}^m \lambda_i e^s_i$ con $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$; $\Sigma(S)$ è anche la parte di piano passante per uno dei punti e^s_i, ortogonale al vettore $(1, \ldots, 1)$ di $\mathbb{R}^m$ e contenuta nel quadrante positivo.

Supponiamo che m agenti si vogliano dividere una somma s. Ogni vettore $x \in \Sigma(S)$ rappresenta una possibile suddivisione, la i-sima componente di x è quanto tocca all'agente i. I vettori $y \in \Sigma(A)$ rappresentano le suddivisioni in cui tutto va ai membri della coalizione A.

Denotiamo con F_A l'insieme dei vettori che la coalizione A è disposta ad accettare. F_A si chiama il *valore* o l'*imputazione* della coalizione A. Una domanda naturale è allora: assegnate le imputazioni F_A, $A \subseteq S$, sotto quali condizioni le esigenze delle diverse coalizioni C di $\mathscr{C}$ sono *compatibili*, cioè si può effettuare una suddivisione che sia conveniente per tutte le $C \in \mathscr{C}$? Equivalentemente, ci stiamo chiedendo sotto quali condizioni esiste una struttura di coalizione $\mathscr{C}$ per cui $\bigcap_{C \in \mathscr{C}} F_C \neq \emptyset$. Una risposta piuttosto generale è contenuta nel seguente teorema, di natura topologica e piuttosto complesso, provato da Shapley [172].

5.5. TEOREMA (*KKMS*). *A ogni coalizione A associamo un insieme chiuso (eventualmente vuoto) $F_A \subseteq \Sigma(S)$ in modo che*

$$\Sigma(B) \subseteq \bigcup_{A \subseteq B} F_A \quad \forall B \subseteq S. \tag{5.4}$$

Allora esiste una struttura equilibrata $\mathscr{C}$ di coalizioni e un x che appartiene a tutte le $F_C, C \in \mathscr{C}$,

$$\bigcap_{C \in \mathscr{C}} F_C \neq \emptyset.$$

5.2.3. *Alcune conseguenze del teorema KKMS*

Rimandiamo una discussione del teorema KKMS di Shapley alla prossima sottosezione[11]. Al fine di esemplificazione un po' la complessità del teorema e, allo stesso tempo, per usi futuri stabiliamo invece qui due altri teoremi (non difficili da dimostrare come conseguenze del Teorema 5.5) che vanno sotto i nomi di *grande* (generalmente omesso) *e piccolo teorema di Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz* (KKM e piccolo KKM) che a loro volta implicano il celebre *teorema di Brouwer*.

5.6. TEOREMA (*KKM*). *Nel simplesso $\Sigma(S)$, dove $S = \{1, \dots, m\}$, consideriamo m chiusi $F_1, \dots, F_m$ con la proprietà seguente:*

$$\Sigma(A) \subseteq \bigcup_{i \in A} F_i \quad \forall A \subseteq S. \tag{5.5}$$

Allora essi hanno almeno un punto in comune:

$$\bigcap_{i=1}^{m} F_i \neq \emptyset.$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo le imputazioni $F_A = F_i$ se $A = \{i\}$ e $F_A = \emptyset$ altrimenti. Da (5.5) segue che la famiglia di chiusi F_A verifica le ipotesi del teorema di Shapley, quindi esiste una coalizione equilibrata $\mathscr{C}$ per cui $\bigcap_{C \in \mathscr{C}} F_C \neq \emptyset$. Facciamo ora vedere che questa struttura coincide con la struttura di coalizione $\mathscr{D}$ formata dalle coalizioni $\{i\}$, $i \in S$. Ovviamente $F_C \neq \emptyset$ per ogni $C \in \mathscr{C}$, quindi $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$. Essendo $\mathscr{C}$ equilibrata, per

[11] Questa e la prossima sottosezione non sono essenziali per la comprensione dei risultati di questo capitolo.

ogni $i \in S$ esiste $C \in \mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$ tale che $i \in C$; ne segue $C = \{i\}$, cioè $\mathscr{C} = \mathscr{D}$, e la tesi $\bigcap_{C \in \mathscr{D}} F_C \neq \emptyset$ diventa $\bigcap_i F_i \neq \emptyset$. □

Osserviamo esplicitamente che il teorema KKMS è una generalizzazione del teorema KKM al caso in cui le famiglie di chiusi siano indicizzate sullo spazio delle coalizioni, ciè dei sottinsiemi di S invece che su S.

5.7. COROLLARIO. *Se la famiglia di chiusi F_i, $i = 1, \dots, m$ ricopre $\Sigma(S)$,*

$$\Sigma(S) = \bigcup_1^m F_i, \tag{5.6}$$

in modo che F_i contiene l'$i-$esimo vertice e non incontra la faccia opposta,

$$\forall\, i \in S \quad \Sigma(\{i\}) \in F_i \quad e \quad F_i \cap \Sigma(S - \{i\}) = \emptyset, \tag{5.7}$$

allora i chiusi F_i hanno un punto in comune,

$$\bigcap_{i=1}^m F_i \neq \emptyset.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $B \subsetneqq S$ abbiamo $\Sigma(B) = \bigcap_{S-\{i\} \supset B} \Sigma(S - \{i\})$. Dalla seconda in (5.7) segue allora

$$\Sigma(B) \cap F_i = \emptyset \quad \text{se} \quad S - \{i\} \supset B,$$

cioè $S - \{i\} \supset B$ se e solo se $i \notin B$. Dalla (5.6) e dalla prima delle (5.7) segue quindi

$$\Sigma(B) \subseteq \bigcup_{i \in B} F_i$$

e la tesi segue dal grande KKM. □

5.8. TEOREMA (*Piccolo KKM*). *Sia sempre $S = \{1, \dots, m\}$, supponiamo che $\Sigma(S)$ sia ricoperto dall'unione di m chiusi $K_1, \dots, K_m$,*

$$\Sigma(S) = \bigcup_{i=1}^m K_i, \tag{5.8}$$

con la proprietà che

$$\Sigma(S - \{i\}) \subseteq K_i \quad \forall i \in S. \tag{5.9}$$

Allora essi hanno almeno un punto in comune:

$$\bigcap_{i=1}^m K_i \neq \emptyset.$$

DIMOSTRAZIONE. Applichiamo il Teorema 5.5 alla famiglia F_A, $A \subseteq S$, definita da

$$F_A := \bigcap_{S-\{i\} \supset A} K_i,$$

in particolare, $F_S = \emptyset$ e $F_{S-\{i\}} = K_i$. La (5.8) ci dice che

$$\bigcup_{A \subseteq S} F_A \supset \bigcup_{i=1}^m F_{S-\{i\}} = \bigcup_{i=1}^m K_i = \Sigma(S) \tag{5.10}$$

e la (5.9) che

$$\forall B \neq S \quad \bigcap_{S-\{i\}} K_i \supset \bigcap_{S-\{i\}} \Sigma(S - \{i\}).$$

Poiché

$$\bigcap_{S-\{i\}} K_i = F_B \quad \text{e} \quad \bigcap_{S-\{i\}} \Sigma(S-\{i\}) = \Sigma(B),$$

troviamo che $\Sigma(B) \subseteq F_B\ \forall B \neq S$. Ciò unito a (5.10) ci permette di concludere (via teorema KKMS) che esiste una struttura equilibrata $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{P}(S)$ tale che

$$\bigcap_{C\in\mathscr{C}} F_C \neq \emptyset, \tag{5.11}$$

equivalentemente $\bigcap_{C\in\mathscr{C}}\bigcap_{S-\{i\}} K_i \neq \emptyset$. Verifichiamo, infine che tutti i K_i, $1 \leq i \leq m$ figurano in questa intersezione. Supponiamo che non sia così, cioè ci sia qualche $j \in S$ tale che $S-\{j\}$ non contenga alcun $C \in \mathscr{C}$, vale a dire

$$\exists j \in S \quad \text{tale che} \quad j \in C \quad \forall C \in \mathscr{C}. \tag{5.12}$$

Ora la struttura $\mathscr{C}$ è equilibrata, esistono quindi coefficienti positivi α_C con

$$\forall i \quad \sum_{C\in\mathscr{C}_i} \alpha_C = 1, \quad \mathscr{C}_i := \{C \in \mathscr{C} \,|\, \mathscr{C} \ni i\}. \tag{5.13}$$

Prendendo $i = j$ otteniamo $\mathscr{C}_j = \mathscr{C}$, quindi $\sum_{C\in\mathscr{C}} \alpha_C = 1$. Ciò implica che $\sum_{C\in\mathscr{D}} \alpha_C \leq 1$ per ogni $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ con eguaglianza se e solo se $\mathscr{D} = \mathscr{C}$. Le (5.13) implicano quindi $\mathscr{C}_i = \mathscr{C}$ per ogni $i \in S$, vale a dire che $i \in C$ per tutti gli $i \in S$ e per tutti i $C \in \mathscr{C}$. Essendo $F_S = \emptyset$ la (5.11) ci dice che la struttura $\mathscr{C}$ si riduce alla struttura $\{S\}$ in contraddizione con la (5.12). □

Illustriamo i due teoremi KKM nel caso del simplesso $\Sigma(S)$ con $S = \{1,2,3\}$ che si identifica con un triangolo equilatero nel piano, si veda Figura 1. Il piccolo KKM dice allora che, se si ricopre il triangolo con tre chiusi, ciascuno dei quali contiene un lato distinto, allora essi hanno un punto in comune. Questo non è più vero se si richiede ai chiusi di contenere un vertice distinto. KKM (infatti, il corollario) dice che i chiusi hanno ancora una volta un punto in comune se contengono ciascuno un vertice distinto ma si richiede loro di non incontrare il lato opposto al vertice che contengono.

Infine usando (il piccolo) KKM si dimostra il celebre teorema di punto fisso di Brouwer.

Sia

$$\overline{\Pi} := \{p = (p_1, \ldots, p_l) \,|\, p_1 + \ldots + p_l = 1,\ p_k \geq 0 \forall k\}$$

la chiusura di

$$\Pi := \{p = (p_1, \ldots, p_l) \,|\, p_1 + \ldots + p_l = 1,\ p_k > 0 \forall k\}$$

e denotiamo con

$$\Pi_k := \{p \in \overline{\Pi} \,|\, p_k = 0\}$$

la sua faccia k-esima. s

5.9. TEOREMA (*Brouwer*). *Ogni applicazione continua f da un simplesso $\overline{\Pi}$ in sé ha un punto fisso, cioè esiste $p \in \overline{\Pi}$ tale che $f(p) = p$.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$K_k := \{p \in \overline{\Pi} \quad | \quad f_k(p) - p_k \geq 0\}, \quad k = 1, \ldots, l.$$

Essendo f continua gli insiemi K_k sono chiusi; poiché $f_k(p)$ è non negativo e, per $p_k = 0$ abbiamo ovviamente $f_k(p) - p_k \geq 0$, K_k contiene la faccia Π_k. Mostriamo che gli insieme K_k, $k = 1, \ldots, l$ ricoprono $\overline{\Pi}$. Se così non fosse, troveremmo $r \in \overline{\Pi}$ per cui tutti gli $f_k(r) - r_k$ sono negativi e, sommando,

$$\sum_{k=1}^{l} f_k(r) - \sum_{k=1}^{l} r_k < 0;$$

ma, le singole somme valgono 1 poiché $f(r)$ e r stanno nel simplesso, assurdo. Il piccolo KKM applicato alla famiglia K_k ci dice che la famiglia dei K_k ha intersezione non vuota quindi esiste q con $q \in K_k$ per ogni k, in particolare per ogni k abbiamo $f_k(q) - q_k \geq 0$. Se ora uno di questi termini fosse non nullo, avremmo

$$\sum_{k=1}^{l} f_k(q) - \sum_{k=1}^{l} q_k > 0;$$

ma, come prima, questo è assurdo. □

Si noti che l'affermazione nel teorema di Brouwer è falsa se si sostituisce $\overline{\Pi}$ con Π. Ad esempio, $f(x) := (x+1)/2$ manda l'intervallo aperto $]-1,1[$ in sé ma non ha punti fissi in $]-1,1[$.

Vale la pena aggiungere ancora qualche osservazione sul teorema di punto fisso di Brouwer, si veda ad esempio [63].

Sia S^n la sfera n-dimensionale vista come bordo della palla chiusa B di $\mathbb{R}^{n+1}$. Ricordiamo che due mappe continue $f,g : S^n \to S^n$ si dicono *omotope* se esiste una mappa, chiamata *mappa di omotopia*, $H : S^n \times [0,1] \to S^n$ continua tale che $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = g(x)$ per ogni $x \in S^n$.

5.10. TEOREMA. *Le seguenti tre affermazioni sono equivalenti*

(1) (TEOREMA DI BROUWER) *La mappa identica da S^n in S^n non è omotopa ad una mappa costante.*
(2) *Non esiste alcuna mappa continua $F : B \to S^n$, $B = \mathrm{cl}\,(B^{n+1})$, che lascia fisso il bordo, $F(x) = x\ \forall x \in S^n$.*
(3) (TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROUWER) *Ogni applicazione continua $f : B \to B$, $B := \mathrm{cl}\,(B^{n+1})$, ha almeno un punto fisso, i.e., esiste almeno un $x \in B$ tale che $f(x) = x$.*

DIMOSTRAZIONE. (1) $\Rightarrow$ (2). Se $F : B \to S^n$ fosse una funzione continua con $F(x) = x\ \forall x \in S^n$ allora $\varphi(t,x) := F(tx)$, $(t,x) \in [0,1] \times S^n$, sarebbe una omotopia tra $\varphi(1,x) = x$ e $\varphi(0,x) = F(0)$. Assurdo per il teorema di Brouwer.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supponiamo che esista una funzione $F : B \to B$ continua con $F(x) \neq x$ per ogni $x \in B$. Allora l'applicazione $G : B \to S^n$, definita come quella che ad x associa l'unico punto di S^n che sta sulla semiretta da $f(x)$ a x, sarebbe una mappa continua da B in S^n, con $G(x) = x$ per $x \in S^n$. Assurdo per (2).

(3) $\Rightarrow$ (1). Se per assurdo esistesse una omotopia $\varphi : [0,1] \times S^n \to S^n$ tra l'identità e una costante, $\varphi(1,x) = x$, $\varphi(0,x) = p$, allora la funzione $F : B \to S^n$, $B = \mathrm{cl}\,(B^{n+1})$, data da

$$F(x) := \begin{cases} \varphi(|x|, x/|x|) & \text{se } x \neq 0, \\ p & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

sarebbe una estensione continua dell'identità su S^n a tutto B. Ma allora la mappa x avrebbe una estensione $F : B \to S^n$, e quindi $-F(x) : B \to B$ non avrebbe punti fissi essendo $-F(x) = -x$ sul bordo di B e $F(x) \in \partial B$. Assurdo. □

Infine osserviamo che vale

5.11. TEOREMA (*di punto fisso di Brouwer*). *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ convesso compatto. Ogni mappa continua $f : K \to K$ ha un punto fisso.*

DIMOSTRAZIONE. Un teorema, a volte chiamato *teorema di Dugundji*, ci garantisce che ogni mappa continua da un insieme E di uno spazio metrico X (si legga $\mathbb{R}^N$) in $\mathbb{R}^n$ ha una estensione continua da tutto X in $\mathbb{R}^n$ con immagine contenuta nell'inviluppo convesso di $f(E)$. Allora $f : K \to K$ ha una estensione continua $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con immagine in K. Se B è una palla contenente K, allora $F(B) \subseteq B$ e per il teorema di punto fisso di Brouwer F ha un punto fisso, cioè $x \in B$ tale che $F(x) = x$. Poiché d'altra parte $F(x) \in K$ si conclude che $x \in K$ e quindi $f(x) = F(x) = x$. □

Più in generale vale

5.12. TEOREMA. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ omeomerfo*[12] *alla palla unitaria chiusa di $\mathbb{R}^n$ e sia f una mappa continua da E in sé. Allora F ha un punto fisso.*

DIMOSTRAZIONE. La mappa continua $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : B \to B$ ha un punto unito, cioè esiste $x \in B$ tale che $\varphi^{-1}(f(\varphi(x))) = x$. Chiaramente $\varphi(x) \in E$ è un punto fisso per f. □

5.2.4. *Sul teorema KKMS*

Vogliamo ora aggiungere alcuni commenti al teorema di punto fisso di Brouwer, i teoremi KKM e il teorema KKMS[13].

Il teorema di punto fisso di Brouwer, provato da Luizen Brouwer [34] nel 1912 (ma il lavoro porta la data 1910), trova la sua motivazione iniziale nel tentativo di caratterizzare[14] la *topologia di $\mathbb{R}^n$*, assieme ad altri risultati come, ad esempio, il *teorema di Jordan*, il *teorema di invarianza del dominio* e il *teorema di invarianza della dimensione*[15], dimostrati sempre da Brouwer in dimensione qualunque.

Equivalenti formulazioni del teorema erano già state enunciate, in connessione con lo studio delle equazioni differenziali e, in particolare, con l'introduzione dei *metodi topologici* nello studio delle orbite periodiche da Henri Poincaré che in [137] [138], riferendosi a un lavoro di Kronecker[16], enuncia una generalizzazione del *teorema degli zeri* di Benhard Bolzano.

5.13. TEOREMA. *Sia $f : Q := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x_i| \le 1,\, i = 1,\dots,n\} \to \mathbb{R}^n$ una mappa continua, $f = (f_1,\dots,f_n)$, tale che per $i = 1,\dots,n$*

$$f_i(x_1,\dots,x_{i-1},-1,x_{i+1},\dots,x_n) \ge 0 \quad e \quad f_i(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n) \le 0.$$

Allora esiste almeno un punto $x \in Q$ in cui $f(x) = 0$.[17]

mentre, sempre in un contesto simile, Piers Bohl nel 1904 (ma ignorato) [24] prova

5.14. TEOREMA. *Non esiste una mappa continua $f : Q := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x_i| \le 1,\, i = 1,\dots,n\} \to \mathbb{R}^n$ sempre diversa da zero in Q e tale che per $i = 1,\dots,n$ $f_i = x_i$ sul bordo di Q.*

[12] Ricordiamo che una mappa $\varphi : B \to E$ si dice un *omeomorfismo* tra B ed E se è iniettiva, surgettiva, continua con inversa continua. Gli insiemi B ed E si dicono poi *omeomerfi* se esiste un omeomerfismo $\varphi : B \to E$.

[13] La letteratura sulla teoria dei punti fissi, estensioni e generalizzazioni, e sulle applicazioni all'economia e alla teoria dei giochi è sterminata; ci limitiamo qui a menzionare alcuni riferimenti che il lettore, interessato a saperne di più, può consultare: [9] [10] [11] [28] [35] [72] [134] [198].

[14] In particolare nel tentativo di risolvere il quinto problema di Hilbert, se sia possibile caratterizzare i *gruppi di Lie* come *gruppi topologici* che sono anche *varietà topologiche*.

[15] Per comodità del lettore, ricordiamo:

TEOREMA (Jordan). *Sia J^n un'immagine omeomorfa di S^n in $\mathbb{R}^{n+1}$. Allora $\mathbb{R}^{n+1} \setminus J^n$ ha esattemente due componenti connesse, ciascuna delle quali ha J^n come bordo.*

TEOREMA (di invarianza del dominio). *Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $h : U \to \mathbb{R}^n$ un omeomeorfismo di U sull'immagine. Allora $h(U)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$. In particolare, $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ non sono omeomorfi se $n \neq m$.*

[16] Più tardi dimostrerà [139] sostanzialmente l'invarianza del *grado*, che è alla base della dimostrazione del teorema.

[17] Il teorema sarà ridimostrato e dimostrato equivalente al teorema di punto fisso di Brouwer da Carlo Miranda [121], si veda [63].

Ricordiamo che una mappa da un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sul suo bordo $\partial\Omega$ che sia l'identità su $\partial\Omega$ si chiama una *retrazione*. Il teorema dice quindi: *per* $n \geq 1$ *la sfera unitaria* S^{n-1} *non è un retratto della palla unitaria* B^n *di* $\mathbb{R}^n$, e, come abbiamo visto, questo è equivalente al teorema di punto fisso di Brouwer.

Decine di teoremi sono risultati essere equivalenti al teorema di punto fisso di Brouwer; conseguentemente, decine di dimostrazioni equivalenti, ma diverse, sono disponibili. Si tratta comunque sempre di dimostrazioni di natura *omotopica* o *omologica* che, a volte, possono esser guardate come dimostrazioni *elementari*: ad esempio, usando il *teorema di Stokes*,

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega,$$

si dimostra immediatamente che non esiste una retrazione regolare di $B = B^n$ in $\partial B = S^{n-1}$: per assurdo se f fosse una retrazione e ω la forma volume su S^{n-1} allora

$$0 < \int_{\partial B} \omega = \int_{\partial B} f^*(\omega) = \int_B f^*(d\omega) = \int_B f^*(0) = 0.$$

La dimostrazione di Brouwer usa tecniche di approssimazione simpliciali e la nozione di *grado topologico*.

Nel 1928 Emanuel Sperner [181] provò un lemma combinatorico che possiamo enunciare in modo impreciso come 'ogni colorazione di Sperner di una triangolazione di un n-simplesso contiene una cella colorata con l'intero insieme di colori' deducendone il teorema di invarianza del dominio e della dimensione.

Per essere più precisi serve introdurre qualche definizione. Chiamiamo l'n-simplesso Σ fin qui usato l'*n-simplesso standard* e, dati punti $p_0, p_1, \ldots, p_s$ in uno spazio affine normato (si pensi ad un qualunque $\mathbb{R}^n$) *affine indipendenti* (cioè non contenuti in nessun $(s-1)$-piano) chiamiamo l'inviluppo convesso di questi punti

$$\{x = \sum_{i=0}^{s} \lambda_i p_i \,|\, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=0}^{s} \lambda_i = 1\}$$

l'*s-simplesso (chiuso) di vertici* $p_0, p_1, \ldots, p_s$, denotato σ^s o $[p_0, p_1, \ldots, p_s]$. Il k-simplesso generato da $k+1$ punti tra i vertici $p_0, p_1, \ldots, p_s$ si chiama una *k-faccia* di σ^s; l'unione delle facce di dimensione $\leq s-1$ si chiama il *bordo* $\partial\sigma^s$ di σ^s e $\sigma^s \setminus \partial\sigma^s$ l'*s-simplesso aperto*. Le 0-facce di σ^s sono i suoi vertici e le 1-facce $[p_i, p_j]$ i suoi *spigoli*. Il *diametro* di σ^s è la lunghezza del suo spigolo più lungo.

Una *suddivisione (simpliciale)* $\mathscr{S}$ di un n-simplesso Δ^n è una decomposizione di Δ^n in un numero finito di n-simplessi $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ tale che (1) l'intersezione di due qualunque simplessi in $\mathscr{S}$ è o vuota o una faccia comune dei due simplessi, (2) ciascun $(n-1)$-simplesso in $\mathscr{S}$ che non sta in $\partial\Delta^n$. Il più grande dei diametri dei σ_i è il *passo* della suddivisione. Esistono suddivisioni che hanno passo arbitrariamente piccolo, vedi Figura 2. Infine si chiama *portatore* di un vertice $v \in \mathscr{S}$ la faccia $[p_{i_0}, \ldots, p_{i_s}]$ di dimensione più bassa di Δ^n che contiene v.

5.15. DEFINIZIONE. Sia $\mathscr{S}$ una suddivisione di Δ^n. Una etichettatura (colorazione) dei vertici di $\mathscr{S}$ che assegna a ciascun vertice $v \in \mathscr{S}$ una delle lettere $\{p_{i_0}, \ldots, p_{i_s}\}$ dove $[p_{i_0}, \ldots, p_{i_s}]$ è il portatore di v si chiama una *etichettatura di Sperner* di $\mathscr{S}$.
Data una etichettatura di Sperner di $\mathscr{S}$, un n-simplesso $\sigma_i \in \mathscr{S}$ si dice *completo* se i suoi vertici sono etichettati $p_0, \ldots, p_n$.

5.16. LEMMA (*Sperner*). *In ogni etichettatura di Sperner di* $\mathscr{S}$*, il numero dei simplessi completi è dispari. In particolare, c'è sempre almeno un simplesso completo.*

Nel 1929 Knaster, Kuratowski e Mazurkiewicz [96] deducono dal lemma di Sperner il teorema KKM e da questo, come abbiamo visto, il teorema di punto fisso di Brouwer. Infatti, dato $\varepsilon > 0$ si

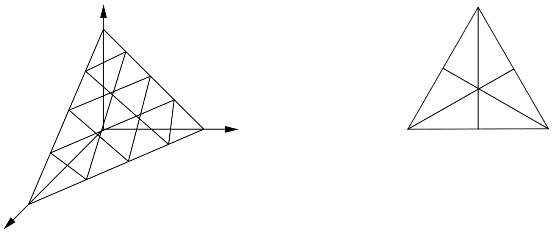

FIGURA 2. Suddivisione simpliciale equilatera e suddivisione baricentrica.

suddivida Σ in sottosimplessi di diametro minore di ε. Ogni vertice v della suddivisione apparterrà a qualche faccia o simplesso generato dalla coalizione $i_0, \dots, i_k$ dove, per l'ipotesi di KKM, ci sarà almeno un indice i per cui $v \in F_i$. Etichettando i vertici in questo modo, otteniamo una etichettatura di Sperner; quindi esiste un sottosimplesso completo con verici $v_i \in F_i$ $i = 1, \dots, m$. Facendo ora tendere il passo a zero, passando a una sottosuccessione, i sottosimplessi completi convergono ad un punto che appartiene all'intersezione degli F_i.

Vale la pena fare qui due osservazioni. Il teorema di punto fisso di Brouwer è chiaramente legato alla soluzione di sistemi di equazioni: F ha un punto fisso se e solo se la mappa Identita $- F$ ha uno zero. In linea di principio non è invece chiaro come garantire l'esistenza di un punto che verifichi una serie di diseguaglianze. Il teorema KKM dà appunto condizioni sufficienti per far questo. D'altro canto si mostra, si veda [197], che il teorema KKM è equivalente al lemma di Sperner e al teorema di punto fisso di Browuer, quindi i tre risultati sono equivalenti.

Ancora, il teorema di punto fisso non dà informazioni su dove il punto fisso sia localizzato e su come approssimarlo. Partendo da metodi combinatorici, vari algoritmi sono stati sviluppati a partire dal lavoro di Herbert Scarf [154].

Un'importante estensione del teorema KKM è il teorema KKMS, Teorema 5.5, provato da Shapley al fine di semplificare la dimostrazione del teorema di Scarf, vedi Teorema 5.23 della prossima sezione. Shapley prova una estensione del lemma di Sperner che usa etichettature su coalizioni bilanciate. Non essendo la dimostrazione di Shapley, come del resto quella di Scarf, semplice si è generata una certa letteratura al riguardo[18] che noi non discuteremo, rimandando alle opere citate in nota e alle monografie generali che abbiamo menzionato all'inizio si questa sezione[19].

[18] Si veda [134]: Kannai [93] prova che il teorema di Scarf è equivalente al teorema di punto fisso di Brouwer. Todd [184] usa il teorema di Kakutani [92] per provare un caso speciale di KKMS sufficiente a provare il teorema di Scarf. Una dimostrazione 'facile' di KKMS basata su un teorema di coincidenza di Ky Fan [103] viene data da Ichiishi [89]. Keiding and Thorlund-Peterson [95] provano il teorema di Scarf usando KKM. Ancora, dimostrazioni di KKMS vengono date da Shapley e Vohra [173], usando alternativamente o il teorema di Kakutani o il teorema di coincidenza di Fan; da Komiya [97], usando il teorema di Kakutani, il teorema di separazione e un teorema di massimo di Berge; da Krasa e Yannelis [99], usando il teorema di Brouwer, di separazione, e di selezione continua. Infine, Herings [82] da una dimostrazione elementare di KKMS, usando solo il teorema di Brouwer ed il calcolo elementare.

[19] Ovviamente, non discutiamo le estensioni del teorema di punto fisso e della teoria del grado a dimensione infinita cui sono legati i nomi di Renato Caccioppoli, Juliusz Pawel Schauder, Jean Leray, ...

5.2.5. *Giochi cooperativi*

Ricordiamo che la società è identificata con $S = \{1, \dots, m\}$, gli elementi di S verranno ora chiamati *giocatori*[20] .

Per ogni sottoinsieme A di S, introduciamo la mappa di 'proiezione' $\pi_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{\operatorname{card}(A)}$ che ad ogni vettore v di $\mathbb{R}^m$ associa il vettore $\pi_A(v)$ di $\mathbb{R}^{\operatorname{card}(A)}$ ottenuto conservando le componenti di v indicizzate da A ed eliminando le altre:

$$\pi_A(v_1, \dots, v_m) = (v_{i_1}, \dots, v_{i_{\operatorname{card}(A)}}) \quad \text{dove} \quad (i_1, \dots, i_{\operatorname{card}}(A)) \in A.$$

I vettori $\pi_A(v)$, che si chiamano *imputazioni*, identificano ciò che è rilevante per la coalizione A o, nella terminologia che abbiamo usato in precedenza, il *valore* di A. Un vettore $v \in \pi_A(\mathbb{R}^m_+)$ è da intendere come l'attribuzione di una utilità v_i a ciascun membro i della coalizione A, indipendentemente da quello che fanno gli altri giocatori: la coalizione A è in grado di garantire l'utilità v_i all'agente-giocatore $i \in A$, ed ovviamente qualunque altra utilità minore di v_i. Le informazioni al riguardo sono *complete* e gli agenti sono *liberi* di riunirsi in coalizioni. Il gioco per l'agente i consiste nel cercare di *massimizzare la sua utilità* al variare della coalizione A a cui potrebbe aderire. Il gioco, introdotto essenzialmente da von Neumann, si veda [190] [112], non consiste, come vedremo, nel cercare delle possibili strategie ma, piuttosto, nell'identificare come *soluzione* un sottoinsieme dei risultati possibili con proprietà speciali.

La situazione è quindi descritta dalla seguente definizione.

5.17. DEFINIZIONE. Si chiama *gioco cooperativo a m giocatori* il dato, per ogni sottoinsieme non vuoto A di S (cioè, per ogni coalizione), di un insieme di imputazioni, cioè di un sottoinsieme $V(A)$ di $\pi_A(\mathbb{R}^m)$[21], il *valore di A*, con la proprietà che

$$V(A) - \pi_A(\mathbb{R}^m_+) \subseteq V(A)^{22}.$$

Il gioco può essere specificato con ulteriori condizioni. È, ad esempio, naturale, da vari punti di vista, richiedere che, se due coalizioni A e B sono disgiunte, allora la coalizione unione può assicurare ai suoi membri l'insieme delle imputazione $(v_i, w_j)_{i \in A,\ j \in B}$ in $V(A) \times V(B)$, semplicemente operando separatamente. Questa proprietà si chiama *superadditività:*

$$\text{se } A \cap B = \emptyset,\, v \in V(A),\, w \in V(B) \text{ allora } (v, w) \in V(A \cup B) \text{ o } V(A) \times V(B) \subseteq V(A \cup B).$$

Spesso si richiede superadditività *stretta*, cioè che l'inclusione $V(A) \times V(B) \subseteq V(A \cup B)$ sia stretta, volendo esprimere il fatto che le possibilità offerte alla coalizione tra A e B aumentano unendo gli sforzi. D'altra parte, leggi anti-trust o l'inefficienza di coalizioni troppo grandi potrebbero ridurre il profitto invece che aumentarlo.

[20] Non necessariamente i giocatori sono persone; possono essere, ad esempio, obiettivi di una produzione o fattori di produzione.

[21] Le coalizioni si interessano solo dei loro membri.

[22] Se la coalizione garantisce qualcosa, allora garantisce anche meno del qualcosa.

Sono stati studiati e classificati molti tipi di giochi cooperativi, che si adattano a specifiche situazioni. Tra questi, particolarmente impotanti sono i giochi *cooperativi a pagamenti trasversali*.

Giochi cooperativi a pagamenti trasversali. Per questi giochi, le utilità sono misurate rispetto ad una unità fissa e ciascun giocatore può trasferire parte del suo guadagno su un altro membro della coalizione. In modo preciso, se la coalizione A può assicurare ai suoi membri l'imputazione $v \in \pi_A(\mathbb{R}^m)$ allora può assicurare ogni altra imputazione u tale che $\sum_{i\in A} u_i = \sum_{i\in A} v_i$, basta ripartire differentemente il guadagno totale. Ne deriva che in questo caso $V(A)$ ha la forma

$$V(A) = \left\{ v \in \pi_A(\mathbb{R}^m) \quad | \quad \sum v_i \leq v(A) \right\},$$

dove $v(A)$ è il guadagno totale massimo che la coalizione A può incassare contro ogni difesa, il *valore della coalizione*. La proprietà di superadditività prende allora una forma più semplice:

$$\text{se} \quad A\cap B = \emptyset \quad \text{allora} \quad v(A\cup B) \geq v(A) + v(B).$$

Ritorniamo al caso generale. Si sa dire poco sull'effettivo svolgimento del gioco (ad esempio, sulla nascita e sulla morte delle coalizioni), un po' più su quelle che si chiamano le *procedure di arbitrato* che, in qualche modo, dispensano i giocatori dal giocare effettivamente la partita. Fortunatamente, noi siamo qui interessati esattamente a queste procedure.

Supponiamo che un *arbitro* proponga una imputazione $v \in \pi_A(\mathbb{R}^m)$, cioè per ogni i un'utilità v_i all'agente i. Perché questa sia accettabile dovrà essere realistica,

$$v \in V(S),$$

cioè l'utilità v_i deve essere almeno pari a quella che l'agente riceverebbe senza far parte della coalizione A. Poiché chiaramente

$$V(\{i\}) =]-\infty, v(\{i\})],$$

dove $v(\{i\})$ è l'utilità massima che l'agente i può garantirsi da solo, perché l'arbitrato sia *accettabile* bisognerà quindi che

$$v_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in S.$$

Ma lo stesso diritto di rifiutare l'arbitrato ce lo hanno anche le coalizioni. Diciamo che una coalizione *blocca* l'arbitrato $v \in \mathbb{R}^m$ se esiste $u \in V(A)$ con $v_i < u_i \forall i \in A$.

5.18. DEFINIZIONE. L'insieme delle imputazioni di $V(S)$ che non sono bloccate da nessuna colazione si chiama il *nucleo* del gioco, in altri termini il nucleo del gioco è l'insieme degli arbitrati accettabili.

Non è difficile dimostrare la seguente

5.19. PROPOSIZIONE. *In un gioco cooperativo a pagamenti trasversali il nucleo è l'insieme delle imputazioni $v \in \mathbb{R}^m$ tali che*

$$\sum_{i=1}^{m} v_i = v(S) \quad e \quad \sum_{i \in A} v_i \geq v(A)\ \forall A \subseteq S.$$[23]

Il nucleo sembra quindi essere un modo soddisfacente di risolvere il problema dell'arbitrato. Ma esistono arbitrati? Cioè, il nucleo è sempre non vuoto? Purtroppo no; anche per semplici giochi cooperativi a pagamento trasversale il nucleo può essere vuoto. Se si vuole che il nucleo non sia vuoto, in qualche modo, le coalizioni intermedie non debbono essere troppo potenti rispetto ad S[24].

5.20. ESEMPIO (*Spartizione a maggioranza*). Sia da dividere una grossa somma (che convenzionalmente identifichiamo con 1) tra tre persone a maggioranza. Chiaramente

$$V(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A = \{1\},\{2\},\{3\}, \\ 1 & \text{se } A = \{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}, \end{cases}$$

e (x_1,x_2,x_3) appartiene al nucleo se

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_1+x_2 \geq 1, x_1+x_3 \geq 1, x_2+x_3 \geq 1.$$

Sommando abbiamo quindi $2(x_1+x_2+x_3) \geq 3$ in contraddizione con il fatto che l'utilità $x_1+x_2+x_3 = 1$. Il nucleo è quindi vuoto. La coalizione di due ha troppo potere.

5.21. ESEMPIO (*Gioco a 3: un venditore e due compratori*). Un venditore $\{1\}$ vende un bene che egli valuta a, mentre i due possibili acquirenti $\{2\}$ e $\{3\}$ lo valutano rispettivamente $b \leq c$. Supponiamo $a < b \leq c$, che è l'unica situazione in cui si ha un gioco a 3 (se uno solo dei compratori valutasse il bene più del venditore, avremmo un gioco a 2 persone; nessun gioco se entrambi i compratori valutano il bene meno del venditore). Le imputazioni sono allora

- $V(\{2\}) = V(\{3\}) = 0$, i giocatori $\{2\}$ e $\{3\}$ non dispongono del bene,
- $V(\{1,2\}) = b$, la coalizione possiede il bene e, se un altro compratore lo vuole, non è disposta a venderlo per meno di b,
- $V(\{1,3\}) = c$,
- $V(\{2,3\}) = 0$,
- $V(\{1,2,3\}) = c$.

Una allocazione (x,y,z) sta nel nucleo se

$$x+z \geq c, \quad x+y \geq b, \quad y+z \geq 0.$$

Da $x+y+z = c$ e $x+z \geq 0$ segue $y = 0$; da $x+y \geq 0$ abbiamo anche $x \geq b$. Possiamo quindi concludere che il nucleo è costituito dai vettori

$$\{(x, 0, c-x) \quad | \quad b \leq x \leq c\}.$$

[23] In qualche modo gli interessi individuali rendono *stabile* il nucleo e *conveniente cooperare*, infatti nessuno è incentivato a uscire dalla propria coalizione.

[24] D'altro canto neanche troppo deboli, rendendo non conveniente coalizzarsi, e lasciandoci con un nucleo troppo grande (almeno se vogliamo perseguire la strategia che ci siamo dati).

Supponiamo il gioco superadditivo e sia $\mathscr{C}$ una struttura naturale e disgiunta di coalizioni che ricopre S, cioè una partizione. Si vede allora facilmente che per tutte le imputazioni $v \in \mathbb{R}^m$ si ha

$$\text{se} \quad \pi_C(v) \in V(C)\ \forall C \in \mathscr{C} \quad \text{allora} \quad v \in V(S).$$

In altri termini, se v è realizzabile per tutte le coalizioni C, per quello che le concerne, allora è realizzabile per tutta la società: è un modo per dire che le coalizioni intermedie non sono troppo potenti. Purtroppo neanche questa condizione garantisce che il nucleo sia non vuoto; lo garantisce però se richiediamo che essa valga per opportune strutture di coalizioni.

5.22. DEFINIZIONE. Un gioco si dice *equilibrato* se, per ogni struttura equilibrata $\mathscr{C}$ e per ogni imputazione $v \in \mathbb{R}^m$, si ha

$$\text{se} \quad \pi_C(v) \in V(C)\ \forall C \in \mathscr{C} \quad \text{allora} \quad v \in V(S).$$

Facendo ora uso del teorema KKMS si dimostra il seguente teorema inizialmente dimostrato da Herbert Scarf [153][25].

5.23. TEOREMA (*Scarf*). *Il nucleo di un gioco cooperativo è non vuoto se*

a. *il gioco è equilibrato e $V(A)$ è chiuso per ogni $A \subseteq S$,*
b. *l'insieme*

$$W(A) := \{v \in V(A) \quad | \quad v_i \geq v(\{i\}) \quad \forall i \in A\}$$

è limitato e non vuoto $\forall A \subseteq S$.

Per completezza concludiamo questa sottosezione riportando la dimostrazione di Shapley del Teorema 5.23, si veda [172] [53].

Il nucleo è l'insieme degli arbitrati accettabili. Indichiamo con $B(A)$ l'insieme delle imputazioni $v \in \mathbb{R}^m$ che sono bloccate dalla coalizione $A \subseteq S$:

$$B(A) = \{v \in \mathbb{R}^m \quad | \quad \exists u \in V(A) : v_i < u_i \quad \forall i\} \tag{5.14}$$

$$= \{v \in \mathbb{R}^m \quad | \quad \pi_A v \in V(A) - \operatorname{int}(\mathbb{R}^m_+)\} \tag{5.15}$$

e osserviamo che $B(A)$ è un cilindro: se $v \in B(A)$, allora $v + w \in B(A)$ purché $w_i = 0 \forall i \in A$. Il nucleo è allora dato da

$$\mathscr{N} = V(S) \cap (\cap_{A \subseteq S} B(A)).$$

Essendo l'insieme $W(A)$ limitato, esiste $c > 0$ tale che

$$\forall A \subseteq S \quad \forall w \in W(A) \quad \forall i \in A \quad w_i - v(\{i\}) \leq c. \tag{5.16}$$

Consideriamo il piano H in $\mathbb{R}^m$ definito da

$$v_1 + \ldots + v_m = \sum_{i=1}^{m} v(\{i\}) - mc$$

[25] Si veda anche Olga Nikolaevna Bondareva [25] [26] per i giochi a pagamenti trasversali, e Louis Joseph Billera [20] [21].

e la famiglia $\mathscr{D}$ delle rette D ortogonali a H. Poiché il vettore $e := (1,\dots,1)$ è ortogonale ad H, ogni $D \in \mathscr{D}$ è individuata da un unico $v \in H$ e si scrive come

$$D = \{v + te \quad | \quad t \in \mathbb{R}\}.$$

5.24. LEMMA. *Per ogni $v \in H$ e ogni $A \subseteq S$ esiste un unico numero $\tau_A(v)$ tale che*

$$D \cap B(A) = \{v + te \quad | \quad t < \tau_A(v)\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Definiamo

$$I_A(v) := \{t \quad | \quad v + te \in B(A)\}$$

e sia $t \in I_A(v)$. Dalla definizione di $B(A)$ esiste $u \in V(A)$ tale che $v_i + t < u_i \forall i \in A$. Segue

$$t \in I_A(v) \quad \text{e} \quad s < t \Rightarrow s \in I_A(v),$$

cioè o $I_A(v)$ è vuoto o tutto $\mathbb{R}$ o un intervallo chiuso o aperto con estremi $-\infty, \tau$.

Proviamo che $I_A(v)$ è un intervallo non vuoto e limitato dall'alto. Infatti, preso $w \in W(A)$ e scelto $t_1 < \min_{i\in A}(w_i - v_i)$, abbiamo $v_i + t_1 < w_i \forall i \in A$, quindi, per la definizione di gioco cooperativo, $v + t_1 e \in V(A)$, in particolare, $t_1 \in I_A(v)$. Scelto poi $t_2 > \max_{i\in A}(c - v_i)$, abbiamo $v_i + t_2 > c \forall i \in A$, cioè $v + te \notin W(A)$; essendo poi possibile scegliere t_2 in modo che $t_2 > \max_{i\in A}(v(\{i\}) - v_i$, deduciamo anche che $t_2 \notin I_A(v)$.

Proviamo che l'intervallo $I_A(v)$ non è chiuso. Se l'estremo superiore di $I_A(v)$ appartenesse ad $I_A(v)$, $I_A(v) =]-\infty, \tau]$, si potrebbe trovare u tale che $v_i + \tau < u_i \forall i$. Potremmo quindi trovare $\sigma > \tau$ con $v_i + \sigma < u_i \forall i$, cioè $v + \sigma e$ apparterrebbe ancora a $I_A(v)$, assurdo. □

5.25. LEMMA. *La funzione $\tau_A : H \to \mathbb{R}$ è continua*

DIMOSTRAZIONE. Siano $v_n, v \in H$ con $v_n \to v$ quando $n \to \infty$. Poniamo $\tau_n := \tau_A(v_n), \tau := \tau_A(v)$. Per definizione di τ_A abbiamo $v + te \in B(A) \forall t < \tau$, quindi

$$v + te - \pi_A(\mathrm{int}(\mathbb{R}^m_+)) \subseteq B(A).$$

Se

$$t_n := \sup\{t | v_n + te \in v + \tau e - \pi_A(\mathrm{int}(\mathbb{R}^m_+))\},$$

vale $t_n \le \tau_n$. D'altra parte

$$t_n := \sup\{t \,|\, te + v_n - v - \tau e \in -\pi_A(\mathrm{int}(\mathbb{R}^m_+))\} \tag{5.17}$$
$$= \sup\{t \,|\, t + v_{ni} - v_i - \tau < 0 \forall i \in A\} \tag{5.18}$$
$$= \inf_{i\in A}\{\tau + v_i - v_{ni}\} \to \tau \quad \text{per} \quad n \to \infty. \tag{5.19}$$

Similmente,

$$\tau_n \le s_n := \{t \,|\, v_n + te \in v + \tau e + \pi_A(\mathrm{int}(\mathbb{R}^m_+))\} \tag{5.20}$$
$$= \max_{i\in A}\{\tau + v_i - v_{ni}\} \to \tau \quad \text{per} \quad n \to \infty. \tag{5.21}$$

In conclusione, $\tau_n \to \tau$ per $n \to \infty$. □

Definiamo ora

$$F_A := \{v \in H \,|\, \tau_A(v) = \max_{C\subseteq S} \tau_C(v)\}.$$

Per il Lemma 5.24 gli F_A ricoprono H e per il Lemma 5.25 sono chiusi, ma non possiamo escludere che alcuni di essi siano vuoti. Se F_S fosse non vuoto, allora esisterebbe $v \in H$ con $\tau_S(v) = \max \tau_A(v)$ e quindi necessariamente $v + \tau_S(v)$ apparterrebbe a $V(S)$, ma non a $B(A)$ per alcun $A \subseteq S$, quindi apparterrebbe al nucleo. Ma F_S potrebbe essere vuoto! Si rimedia facendo ricorso al teorema di Shapley.

Consideriamo il simplesso

$$\Sigma(S) := \{v \in \mathbb{R}^m_+ \,|\, \sum_{i=1}^m v_i = mc\},$$

dove c è il maggiorante per $W(A)$ definito sopra, e il suo simmetrico rispetto all'origine traslato tramite il vettore $(v(\{1\}),\dots,v(\{m\}))$

$$\Sigma'(S) = \{v \in \mathbb{R}^m \,|\, v_i \leq v(\{i\}) \forall i \in S, \sum_{i=1}^{m}(v_i - v(\{i\}) = -mc\}.$$

Se poniamo $F'_A := F_A \cap \Sigma'(A)$, abbiamo

$$\Sigma'(S) \subseteq H \quad \text{e} \quad \cup_{A\subseteq S} F'_A = \Sigma'(S).$$

Mostriamo che vale l'ipotesi del teorema di Shapley

$$\forall C \subseteq S \quad \Sigma'(C) \subseteq \cup_{A\subseteq C} F'_A.$$

Sappiamo che

$$\Sigma'(C) \subseteq \Sigma'(S) \subseteq \cup_{A\subseteq S} F'_A;$$

basterà quindi mostrare che

$$[A \neq S, \quad A \quad \text{non contenuto in} \quad C] \Rightarrow F'_A \cap \Sigma'(C) = \emptyset.$$

Supponiamo che esista $v \in F'_A \cap \Sigma'(C)$. Dire che $v \in \Sigma'(C)$ significa

$$v_i - v(\{i\}) \leq 0 \forall i \in C, \quad v_i - v(\{i\}) = 0 \forall i \notin C, \quad \sum_{i\in C}(v_i - v(\{i\})) = -mc. \tag{5.22}$$

Poiché C ha meno di m elementi, esiste $j \in C$ tale che $v_j - v(\{j\}) < -c$. Consideriamo la coalizione $J = \{j\}$. Per definizione di τ_A

$$\tau_J(v) = v(\{j\}) - v_j > c.$$

D'altra parte, dire che $v \in F'_A$ implica, in base alla definizione di F'_A, che per ogni $i \in S$ si ha

$$\tau_A(v) \geq \tau_I(v) \quad \text{se} \quad I = \{i\}.$$

Da questo deduciamo

$$\tau_A(v) > c \tag{5.23}$$

e

$$v + \tau_A(v)e \notin B(\{i\}), \text{ cioè } v_i + \tau_A(v) \geq v(\{i\}) \forall i \in A. \tag{5.24}$$

Affermiamo che la (5.24) implica che

$$v_i + \tau_A(v) - v(\{i\}) \leq c. \tag{5.25}$$

Rimandando la dimostrazione di (5.25), concludiamo da (5.23) e (5.25) che

$$v_i - v(\{i\}) < 0 \quad \forall i \in A$$

in contraddizione con (5.22) tutte le volte che A non è contenuto in C.

Dimostriamo ora che (5.24) implica (5.25), dimostrando che (5.24) implica $\pi_A(v) + \tau_A(v)\pi_A e \in W(A)$. (5.25) segue allora da (5.16). Per questo, sia $t_n < \tau_A(v)$ una successione convergente a $\tau_A(v)$. Abbiamo $v + t_n e \in B(A)$, dunque

$$\pi_A v + t_n \pi_A e \in V(A) - \pi_A(\text{int}(\mathbb{R}^m_+)) \subseteq V(A).$$

Poiché $V(A)$ è chiuso, passando al limite anche $\pi_A v + \tau_A(v)\pi_a e \in V(A)$. (5.24) implica allora che $\pi_A v + \tau_A(v)\pi_a e \in W(A)$.

In conclusione possiamo applicare il teorema di Shapley e trovare una struttura equilibrata $\mathscr{C}$ e una imputazione $v \in H$ tale che

$$v \in \cap_{C\in\mathscr{C}} F'_C$$

che si esprime come

$$\forall C \in \mathscr{C}\, \forall A \subseteq S \quad \tau := \tau_C(v) \geq \tau_A(v).$$

In particolare, $\pi_C v + \tau\pi_C e$ appartiene a $V(A)$ per tutti i $C \in \mathscr{C}$, ma non appartiene a $B(A)$ qualunque sia $A \subseteq S$ (per la definizione di τ_A) e, essendo $\mathscr{C}$ equilibrata

$$v + \tau e \in V(S) \quad \text{e} \quad v + \tau e \notin \cup_{A \subseteq S} B(A)$$

che equivale a $v + \tau e \in \mathscr{N}$.

5.2.6. *Sul concetto di soluzione di un gioco cooperativo*

Vogliamo infine aggiungere alcune considerazioni sui giochi cooperativi anche se queste non sono strettamente rilevanti per il seguito.

La *teoria dei giochi* è un insieme di metodi analitici pensati per aiutare a comprendere ogni attività descrivibile come un *gioco*, cioè ogni attività competitiva in cui i giocatori si confrontano tra loro seguendo certe regole e, più in generale, a comprendere fenomeni che osserviamo quando 'decisori' interagiscono; domini di riferimento diventano allora, ad esempio, l'economia, la politica e la biologia. Le assunzioni di base sono che i decisori sono *razionali* e tengono conto delle conoscenze o aspettative degli altri decisori, cioè *ragionano in modo strategico*. I modelli prevalenti della teoria appaiono quindi come rappresentazioni con un *elevato grado di astrazione* di situazioni della vita reale, descritti matematicamente. Questo infatti rende possibile, come abbiamo più volte detto e continueremo a dire, una precisa identificazione dei concetti, la verifica della consistenza delle idee e l'indagine sulle implicazioni delle assunzioni[26]. In quanto descrizione dell'interazione strategica un gioco specifica i vincoli con cui ogni giocatore opera e l'interesse di ogni giocatore; questo porta a classificazioni di vari tipi di giochi. Il ruolo prevalente dell'individuo o di gruppi di individui, che in entrambi i casi operano per il loro interesse, porta alla suddivisione dei giochi rispettivamente in *non cooperativi* e *cooperativi*. Ritorneremo brevemente nel Capitolo 9 sui giochi non cooperativi, qui vogliamo aggiungere dei complementi a quanto abbiamo già detto, in questa sezione, sui giochi cooperativi[27].

Come abbiamo visto il concetto di *soluzione* di un gioco cooperativo consiste nell'identificare una classe di risultati – il *nucleo* nel caso del gioco di mercato – che per via di un certo carattere di *stabilità* catturano una naturale aspettativa del gioco[28]. Conseguentemente esistono vari concetti di soluzione. Limitandoci ai giochi con pagamenti laterali vogliamo qui accennare a quattro di queste nozioni di soluzione.

[26] Come abbiamo già visto e continueremo a vedere, questo pone però seri problemi sull'adesione dei modelli alla realtà e sull'effettiva possibilità di fare un uso previsionale o normativo delle conseguenze ottenute, si veda, ad esempio [148].

[27] A parte alcuni contributi di Emile Borel [29] intorno al 1920 (si veda anche [30]), si fa risalire la moderna teoria dei giochi al lavoro di John von Neumann [188] e al ben noto volume di von Neumann e Oskar Morgenstern [190]. Da allora la letteratura sulla teoria dei giochi è diventata enorme, ci limitiamo qui a citare solo alcune monografie [112] [94] [52] [90] [131] [175] [15] [60], [126] [130] [104], una raccolta di saggi [49] e, tra i molti volumi meno tecnici, [102] [148] e, particolarmente, [111].

[28] È un po' come se si avesse un'immagine del gioco e delle sue possibili soluzioni e la formulazione astratta serva soprattutto a verificare se le aspettative sono coerenti o no con l'immagine.

Le imputazioni stabili di von Neumann e Morgenstern

Il primo concetto di soluzione è quello, storicamente onorato, proposto da von Neumann e Morgenstern (e non limitato ai giochi a pagamenti laterali). Si dice che una imputazione v *domina* l'imputazione w rispetto alla coalizione A se

- A è in grado di garantire a se stessa v, cioè
$$\sum_{i\in A} v_i \succcurlyeq v(A),$$
- ogni giocatore i che sta nella coalizione A preferisce v a w, cioè $v_i \succ w_i$ per ogni $i \in A$.

Se poi esiste A tale che v domina w rispetto ad A, diremo semplicemente che l'imputazione v *domina* l'imputazione w. In generale può succedere che

- v domina w e w non domina v,
- w domina v e v non domina w,
- v domina w e w domina v,
- v non domina w e w non domina v;

inoltre, la relazione di dominanza non è necessariamente transitiva. La definizione di von Neumann e Morgenstern di soluzione di un gioco cooperativo è quindi quella di insieme di *imputazioni stabili* in accordo con la seguente definizione: un insieme di imputazioni F si dice *stabile* se

(i) ogni imputazione che non appartiene ad F è dominata da un'imputazione di F,
(ii) ogni imputazione di F non è dominata da un'altra imputazione di F.

Il nucleolo

Vediamo ora una seconda proposta che ha il pregio di associare un'unico vettore come soluzione del gioco. Dati un'imputazione x e una coalizione A si pone
$$e(A,x) := v(A) - \sum_{i\in A} x_i;$$
in altre parole, $e(A,x)$ è la differenza tra quanto la coalizione A può procurarsi e quanto otterrebbe se le venisse proposto x. Data l'imputazione x, ci sono $2^m - 1$ coalizioni che calcolano $e(A,x)$, ordiniamo i risultati $\theta_i(x)$, $i = 1,\dots,n$, $n = 2^m - 1$, in modo decrescente
$$\theta_1(x) \geq \theta_2(x) \geq \dots \geq \theta_n(x)$$
e fomiamo il vettore
$$\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_n(x)).$$
Ora, date due imputazioni x e y diremo che $\theta(x) \prec \theta(y)$ se esiste un indice $i > 1$ tale che
$$\theta_i(x) < \theta_i(y) \quad \text{e} \quad \theta_j(x) = \theta_j(y) \quad \forall\, j < i.$$
Si definisce quindi *nucleolo* l'insieme delle imputazioni minimali rispetto alla relazione $\prec$, cioè l'insieme delle imputazioni x per cui non esiste alcuna imputazione y con $\theta(y) \prec \theta(x)$. In questa situazione si dimostra

5.26. TEOREMA. *Consideriamo un gioco a pagamenti laterali. Allora*

- *il nucleolo è non vuoto e consiste di una sola imputazione,*
- *se il nucleo del gioco non è vuoto, il nucleolo appartiene al nucleo.*

L'indice di Shapley

Una terza definizione di soluzione si può dare in termini di *indice di Shapley* [171].

Osserviamo che la famiglia dei giochi a pagamenti laterali si identifica con l'insieme di tutte le funzioni v definite sui sottoinsiemi della società S che hanno la proprietà

$$v(T \cup C) \geq v(C) + v(T) \quad \forall C, T \subseteq S \quad \text{con} \quad C \cap T = \emptyset.$$

Diremo che una coalizione C è *vincente* nel gioco v se

$$v(T) = v(C \cap T) \quad \forall T \subseteq S.$$

Ad ogni coalizione vincente (sempre che esista) è associata una imputazione vincente $(S_i(v))$ che specifica l'utilità che riceve il giocatore i; in linea di principio $S_i(v)$ dipende anche dalla coalizione vincente che stiamo considerando. Supponiamo ora che

- *Assioma I.* Se C è vincente per v allora $\sum_{i \in C} S_i(v) = v(S)$, cioè l'intera posta viene consegnata alla coalizione vincente.
- *Assioma II.* Ordinando in maniera diversa i giocatori senza cambiare la loro forza, la soluzione cambierà in modo che ognuno avrà la stessa utilità nei due giochi.
- *Assioma III.* Se u e v sono due giochi allora $(S_i(u+v)) = (S_i(u) + S_i(v))$.[29]

5.27. TEOREMA (*dell'indice di Shapley*). *Esiste un'unica mappa $(S_i(\cdot))$ definita su tutti i giochi (avendo fissato la società) che soddisfa i tre assiomi. Inoltre essa è data da*

$$S_i(v) = \sum_{i \in T, T \subseteq S} \frac{(|T|-1)!(m-|T|)!}{m!} \big(v(T) - v(T - \{i\})\big),$$

dove $|T|$ è il numero dei partecipanti alla coalizione T.

La soluzione di Nash al problema della contrattazione

Concludiamo questa sezione discutendo brevemente il *problema della contrattazione* e la nozione di soluzione proposta da John Nash Jr. in [128][30].

Il *problema della contrattazione* per m agenti è caratterizzato da due elementi: (1) l'insieme delle *possibili utilità* $U \subseteq \mathbb{R}^m$, cioè l'insieme delle m-ple di valori di utilità ai quali i giocatori possono pervenire, che si suppone chiuso, convesso e tale che $U - \mathbb{R}^M_+ \subseteq U$, e (2) un valore $u^* \in U$, anzi interno ad U, che rappresenta il valore che i giocatori possono ottenere in caso di mancato accordo[31]. Si assume anche che l'insieme $\{u \in U \,|\, u_i \geq u_i^* \, \forall i = 1, \ldots, m\}$ sia non vuoto.

[29] Osserviamo che l'assioma è naturale se $u = v$, un po' misterioso altrimenti.

[30] Per maggiori informazioni e dettagli il lettore può vedere [118] e, soprattutto, [130], dove sono anche discusse altri tipi di soluzioni, come la *soluzione utilitarista* e la *soluzione di Kakai-Smorodinsky*.

[31] Si osservi che la cooperazione richiede l'accordo di tutti gli agenti, se un agente non partecipa l'unico risultato possibile è u^*. Non si perderebbe quindi in generalità considerando il gioco ridotto a due giocatori anzi, nella situazione generale in cui ci siamo messi, è piuttosto innaturale poiché sarebbe naturale lasciare la possibilità di cooperazione parziale come abbiamo già visto in precedenza.

Per *soluzione* del problema di contrattazione, relativamente alla classe $\mathscr{U}$ di problemi sopra individuati, una regola che ad ogni (U,u^*) come sopra assegni un vettore (unico) $f(U,u^*) \in U$, cioè una applicazione $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^m$.

L'approccio di Nash è quello di imporre condizioni 'ragionevoli' che una soluzione f dovrebbe soddisfare e poi provare che c'è una sola f che soddisfa queste condizioni.

La prima condizione che Nash richiede è che la soluzione sia indipendente o meglio covariante rispetto a cambiamenti di scelta dell'origine (IO) e di scelta di scala (IS) dell'utilità f, cioè

(IO) Per ogni $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ e per ogni $i = 1,\dots,m$ vale
$$f_i(U',u^*+\alpha) = f(U,u^*)+\alpha$$
dove $U' = \{u+\alpha \,|\, u \in U\}$.[32]

(IS) Per ogni $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_m)$, $\beta_i > 0$ vale
$$f_i(U') = \beta_i f_i(U) \quad \forall i$$
dove $U' = \{(\beta_1 u_1,\dots,\beta_m u_m) \,|\, u \in U\}$.

Osserviamo che (IO) e (IS) ci dicono in particolare che, anche se appaiono informazioni cardinali sull'utilità, in realtà non sono coinvolti confronti interpersonali di utilità.

Nash richiede quindi che l'eventuale soluzione verifichi le seguenti condizioni

(PO) *Pareto ottimalità.* $f(U,u^*)$ è un ottimo di Pareto debole, cioè non c'è nessuna $u \in U$ tale che $u_i > f_i(U,u^*)$ per ogni i.

(RI) *Razionalità individuale.* $f_i(U,u^*) \geq u_i^* \,\forall i$.

(S) *Simmetria.* Se le componeti di u^* sono uguali ($u^* = 0$) e U è invariante rispetto alla permutazione degli assi, allora tutte le componenti di $f(U,u^*)$ sono uguali.

(IAI) *Indipendenza dalle alternative irrilevanti.* Se (U,u^*) e (U',u^*) sono in $\mathscr{U}$ e $U' \subseteq U$, allora
$$f(U,u^*) \in U' \quad \Rightarrow \quad f(U,u^*) = f(U',u^*).$$

e dimostra

5.28. Teorema (*Nash*). *C'è una e una sola soluzione $f(U,u^*)$ definita su $\mathscr{U}$ che verifica le condizioni* (IO) (IS) (PO) (RI) (S) (IAI)*; inoltre,*
$$f(U,u^*) = \operatorname{argmax}\{\prod_{i=1}^m (u_i - u_i^*) \,|\, u \in U \cap (u^* + \mathbb{R}^m_+)\}.$$

Concludiamo con un esempio. Supponiamo che due persone, una ricca e una povera, devono spartirsi una somma, diciamo 500 euro. Si può assumere che per la persona ricca l'utilità u di una somma x sia lineare, $u(x) := cx$, $c > 0$ piccolo: per lui avere qualcosa in più non cambia sostanzialmente le cose, al raddoppiare della somma la sua utilità raddoppia. La persona povera ha invece una grande utilità da principio, poi ha un'atteggiamento di indifferenza rispetto a possibili guadagni (a meno che non voglia

[32] Di modo che potremmo normalizzare i problemi a $u^* = 0$.

ora agire da ricco); possiamo quindi assumere con Daniel Bernoulli che la sua utilità, se all'inizio possiede solo 100 euro, si possa esprimere come

$$v := \log \frac{100 - x}{100}.$$

Quindi se il ricco prende x le utilità dei due giocatori sono

$$u = cx, \quad v = \log \frac{600 - x}{100}.$$

Vediamo quindi che le possibili utilità per i due giocatori sono le coppie (u, v) nel convesso del quadrante positivo delimitato dalla curva

$$v = \log \frac{600 - u/c}{100}, \quad 0 \leq u/c \leq 500.$$

Si verifica facilmente che la soluzione di Nash (u_0, v_0) in questo caso assegna la somma x_0 al ricco con $300 < x_0 < 400$ e la somma $500 - x_0$ minore di 200 euro al povero: la soluzione è unica, sicuramente consevativa ma, forse non proprio equa.

5.3. *Ritorno al nucleo dell'economia*

L'analogia tra il concetto di nucleo di un gioco cooperativo e quello di nucleo di una economia di proprietà privata non è puramente formale. Infatti ad ogni economia di proprietà privata si può associare un gioco cooperativo di modo che il nucleo dell'uno corrisponda all'altro.

Per ogni coalizione $A \neq \emptyset$ poniamo

$$\mathscr{R}(A) := \{(y^i)_{i \in A} \quad | y^i \in \mathbb{R}^l_+, \sum_{i \in A} y^i = \sum_{i \in A} \omega^i\}$$

e, scrivendo semplicemente (y^i) per $(y^i)_{i \in A}$,

$$U(A) := \{(u_i(y^i))_{i \in A} \quad | \quad (y^i) \in \mathscr{R}(A)\}^{33}$$

di modo che $U(A)$ è l'insieme delle utilità che la coalizione può assicurare ai suoi membri e $\mathscr{R}(S) = \mathscr{R}$.

5.29. DEFINIZIONE. Si chiama *gioco di mercato* associato all'economia di proprietà privata il gioco cooperativo a m persone dove

$$\forall A \subseteq S \quad V(A) := U(A) - \pi_A(\mathbb{R}^m_+).^{34}$$

[33] Ricordiamo che u_i è la funzione d'utilità dell'agente i.

[34] Osserviamo che, come abbiamo già visto, si ha

$$U(A) - \pi_A(\mathbb{R}^m_+) = \{\xi \in \pi_A(\mathbb{R}^m_+) \quad | \quad \exists (y^i) \in \pi_A(\mathbb{R}^m_+) : u_i(y^i) \geq \xi_i.\}$$

5.30. PROPOSIZIONE. *Se $(x^1,\dots,x^m)$ appartiene al nucleo dell'economia, allora l'imputazione $(u_1(x^1),\dots,u_m(x^m))$ appartiene al nucleo del gioco di mercato. Viceversa, se $(v_1,\dots,v_m)$ appartiene al nucleo del gioco di mercato, possiamo trovare nel nucleo dell'economia una allocazione $(x^1,\dots,x^m)$ tale che $v_i \geq u_i(x^i)$ $\forall i \in S$.*

In particolare, il nucleo dell'economia di proprietà privata è non vuoto se e solo se il nucleo del gioco di mercato è non vuoto.

DIMOSTRAZIONE. Sia $(x^1,\dots,x^m)$ una allocazione nel nucleo dell'economia, $x^i \in \mathbb{R}^l_+$, e supponiamo che l'imputazione $(u_1(x^1),\dots,u_m(x^m))$ sia bloccata da una coalizione A. Esiste allora una $A-$imputazione $v \in V(A)$ tale che $v_i > u_i(x^i)$ per ogni $i \in A$. D'altra parte, per la definizione di $V(A)$ si può trovare una famiglia $(y^i)_{i\in A}$ in $\mathscr{R}(A)$ verificante $u_i(y^i) \geq v_i$ per ogni $i \in A$. Si avrà allora $u_i(y^i) > u_i(x^i)$ e la coalizione A bloccherà l'allocazione $(x^1,\dots,x^m)$, una contraddizione.

Partiamo ora da $(v_1,\dots,v_m)$ nel nucleo del gioco di mercato. Possiamo trovare un'allocazione realizzabile $(x^1,\dots,x^m)$ tale che $u_i(x^i) \geq v_i$ per ogni $i \in S$. Se questa allocazione fosse bloccata da una coalizione A, si potrebbe trovare una famiglia $(y^i)_{i\in A}$ in $\mathscr{R}(A)$ verficante $u_i(y^i) > u_i(x^i)$ per tutti gli $i \in A$, quindi $u_i(y^i) > v_i, \forall i \in A$. La coalizione A dovrebbe quindi bloccare $(v_1,\dots,v_m)$: assurdo. □

Per garantire che il nucleo dell'economia di proprietà privata sia non vuoto ci siamo quindi ricondotti a mostrare che il nucleo del gioco di mercato è equilibrato, cosa piuttosto complessa in generale. Fortunatamente, per il gioco di mercato questa condizione si trasforma in una condizione di convessità piuttosto naturale.

5.31. PROPOSIZIONE. *Se i preordini $\succcurlyeq_i$ degli agenti $i \in S$ sono convessi, allora il gioco di mercato associato all'economia in considerazione è equilibrato.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathscr{C}$ una struttura equilibrata di coalizioni e sia $v = (v_1,\dots,v_m)$ una imputazione verificante $\pi_C v \in V(C)$ per ogni $C \in \mathscr{C}$. Si tratta di mostrare che $v \in V(S)$. L'informazione $\pi_C v \in V(C)$, $\forall C \in \mathscr{C}$, si scrive, come abbiamo già osservato, come: per ogni $C \in \mathscr{C}$ esistono dei panieri di beni y^i_C, $i \in C$ tali che

$$\sum_{i\in C} y^i_C = \sum_{ivC} \omega^i \quad \text{e} \quad u_i(y^i_C) \geq v_i \ \forall i \in C.$$

Poiché la struttura $\mathscr{C}$ è equilibrata, ad ogni $C \in \mathscr{C}$ possiamo associare un coefficiente $\alpha_C > 0$ in modo che

$$\forall i \in S \quad \sum_{C\ni i} \alpha_C = 1,$$

dove $C \ni i$ è l'insieme dei C che contengono i. Consideriamo l'allocazione $(z^1,\dots,z^m)$ in cui ogni z^i è una combinazione convessa degli y^i_C, $C \ni i$

$$\forall i \in \Sigma z^i = \sum_{C\ni i} \alpha_C y^i_C.$$

Essendo $\mathbb{R}^l_+$ convesso e contenente gli y^i anche

$$z^i \in \mathbb{R}^l_+ \ \forall i \in S. \tag{5.26}$$

Essendo i preordini convessi, le funzioni u_i sono quasi-concave; segue allora

$$\forall i \in S \ u_i(z^i) \geq \sum_{C\ni i} \alpha_C u_i(y^i_C) \geq v_i \tag{5.27}$$

visto che $u_i(y^i_C) \geq v_i$. Resta ora da mostrare che z è realizzabile per concludere da (5.26), (5.27) e dalla definizione di $V(S)$ che $v \in V(S)$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S} z^i &= \sum_{i\in S}\sum_{C\ni i} \alpha_C y^i_C = \sum_{C\in\mathscr{C}}\sum_{i\in C} \alpha_C y^i_C = \sum_{C\in\mathscr{C}} \alpha_C \big(\sum_{i\in C} y^i_C\big) = \sum_{C\in\mathscr{C}} \alpha_C \big(\sum_{i\in C} \omega^i\big)\\ &\sum_{C\in\mathscr{C}}\sum_{i\in C} \alpha_C \omega^i = \sum_{i\in S}\sum_{C\ni i} \alpha_C \omega^i = \sum_{i\in S} \omega^i \big(\sum_{C\ni i} \alpha_C\big) = \sum_{i\in S} \omega^i.\end{aligned}$$

□

5.32. TEOREMA. *Consideriamo una economia di proprietà privata dove i preordini* $\succcurlyeq_i$ *degli agenti* $i \in S$ *sono convessi e continui. Allora il suo nucleo è un insieme chiuso, limitato e non vuoto di* $\mathbb{R}^{lm}_+$.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col dimostrare che il gioco di mercato associato verifica le ipotesi del Teorema 5.23 e, conseguentemente, che il nucleo dell'economia è non vuoto. Poiché $\mathscr{R}(A)$ è compatto e U è continua, anche $U(A)$ è compatto. Ne dedurremo ora che $V(A)$ è chiuso e $W(A)$ è limitato.

Sia $\{v_n\}$ una successione di punti di $V(A)$ convergenti a v in $\mathbb{R}^m_+$. Dobbiamo dimostrare che $v \in V(A)$. Possiamo scrivere, per ogni n, $v_n = u_n - w_n$ con $u_n \in U(A)$ e $w_n \in \pi_A(\mathbb{R}^m_+)$. Essendo $U(A)$ compatto, possiamo estrarre una sottosuccessione di $\{u_{n_k}\}$ che converge, diciamo, a u_∞, mentre $\{v_{n_k}\}$ continua a convergere a v. Segue che $\{w_{n_k}\}$ converge a $u_\infty - v$ che appartiene a $\pi_A(\mathbb{R}^m_+)$ poiché è chiuso e contiene tutti i w_{n_k}. In conclusione, $v = u_\infty - w_\infty$ appartiene a $U(A) - \pi_A(\mathbb{R}^m_+)$.

Per definizione

$$W(A) = \{w \in V(A) \quad | \quad w^i \geq u^i(\omega^i)\} \quad \text{e} \quad W(A) \subseteq V(A) = U(A) - \pi_A \mathbb{R}^m_+.$$

Essendo $U(A)$ limitato esistono costanti c_i tali che $v_i \leq c_i$ per tutti i v in $V(A)$ e quindi in $W(A)$. Segue che $u_i(\omega^i) \leq w_i \leq c_i$ per ogni $w \in W(A)$. Quindi $W(A)$ ìlimitato e non vuoto contenete almeno $u_i(\omega^i)$.

Questo dimostra che il nucleo del gioco di mercato, e quindi dell'economia, è non vuoto. Resta da dimostrare che il nucleo dell'economia è limitato e chiuso. Questo è chiaramente limitato in quanto contenuto in $\mathscr{R}(S)$ che è limitato. Per mostrare che è chiuso, consideriamo una successione di allocazioni $\{(x^1_n, \dots, x^m_n)\}$ del nucleo convergenti a $(x^1, \dots, x^m)$ e mostriamo che il limite è nel nucleo. Il limite appartiene a $\mathscr{R}(S)$ che è chiuso. Supponiamo che $(x^1, \dots, x^m)$ sia bloccato da una qualche coalizione $A \subseteq S$, possiamo allora trovare degli $y^i \in \mathbb{R}^l_+$ tali che

$$\sum_{i \in A} y^i = \sum_{i \in A} \omega^i \quad \text{e} \quad u_i(y^i) > u_i(x^i).$$

Di conseguenza, poiché $x^i_n \to x$, per n grande si ha $u_i(y^i) > u_i(x^i_n)$, $\forall i \in A$, cioè le allocazioni $\{(x^1_n, \dots, x^m_n)\}$ sono bloccate, per n grande, dalla coalizione A, contraddicendo il fatto che queste sono nel nucleo. □

La seguente proposizione, di quasi immediata dimostrazione, descrive i rapporti tra gli elementi del nucleo e i massimi di Pareto.

5.33. PROPOSIZIONE. *Si ha*

- *Ogni allocazione del nucleo è un ottimo di Pareto debole.*
- *Ogni allocazione unanimemente preferita ad una allocazione del nucleo appartiene al nucleo.*

Indichiamo con $\mathscr{P}$ i massimi di Pareto stretti e ricordiamo che con $\mathscr{N}$ indichiamo il nucleo dell'economia. Vale infine il seguente risultato.

5.34. PROPOSIZIONE. *Cosideriamo una economia di proprietà privata in cui i preordini di preferenza* $\succcurlyeq_i$ *sono convessi e continui* $\forall i \in S$. *Allora* $\mathscr{N} \cap \mathscr{P}$ *è non vuoto, limitato (ma non necessariamente chiuso) e vale*

$$\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N} \cap \mathscr{P} - \mathbb{R}^{lm}_+.$$

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che $\mathscr{N}$ è non vuoto e se $(x^1, \dots, x^m) \in \mathscr{N}$ possiamo trovare un massimo di Pareto stretto $(y^1, \dots, y^m)$ che è unanimemente preferito:

$$(x^1, \dots, x^m) \in (y^1, \dots, y^m) - \mathbb{R}^{lm}_+.$$

Questa allocazione appartiene ancora al nucleo, cioè $(y^1, \dots, y^m) \in \mathscr{N} \cap \mathscr{P} \neq \emptyset$, vale quindi la tesi $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N} \cap \mathscr{P} - \mathbb{R}^{lm}_+$. □

5.4. *Coalizioni e nuclei nebulosi: i prezzi*

Abbiamo visto che l'attribuzione di risorse indifferenziate Ω alla comunità porta alla nozione di ottimo di Pareto. L'introduzione della proprietà privata delle risorse assieme alla possibilità che hanno le coalizioni di bloccare permette di precisare considerevolmente le possibili scelte ottimali che abbiamo identificate con $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N} \cap \mathscr{P}$. L'ideale sarebbe definire una scelta sociale senza ambiguità, cioè arrivare per eliminazioni successive ad un insieme contenente un solo elemento. Non è così con $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{N} \cap \mathscr{P}$: per quanto questo insieme sia più piccolo di $\mathscr{P}$, non si riduce in generale ad un insieme costituito da un solo elemento. Ma si può fare un po' di più sempre secondo la stessa linea di ragionamento.

5.35. DEFINIZIONE. Conveniamo:

- Si chiama *coalizione nebulosa* ogni famiglia $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ di m coefficienti non negativi (che possiamo supporre anche a somma 1). L'insieme degli $i \in S$ per cui $\alpha_i \neq 0$ si chiama il suo *supporto*.
- Diciamo che la coalizione nebulosa *blocca* l'allocazione $(x^1, \dots, x^m)$ se è possibile trovare dei panieri di beni $y^i \in \mathbb{R}^l_+$, $i \in A$, tali che
$$\sum_{i\in A} \alpha_i y^i = \sum_{i\in A} \alpha_i \omega^i \quad \text{e} \quad y^i \succ_i x^i \quad \forall i \in A.$$
- Si chiama *nucleo nebuloso* e si denota con $\mathscr{W}$ l'insieme delle allocazioni realizzabili che non sono bloccate da nessuna coalizione nebulosa.

Se $\alpha_i = 1, \forall i \in A$ e $\alpha_i = 0, \forall i \in S - A$ la definizione precedente dice che l'allocazione $(x^1, \dots, x^m)$ è bloccata dalla coalizione A. Abbiamo quindi esteso la possibilità di bloccare dalle coalizioni alle coalizioni nebulose. Ovviamente
$$\mathscr{W} \subseteq \mathscr{N} \subseteq \mathbb{R}^{lm}_+,$$
in particolare, ogni allocazione in $\mathscr{W}$ è un ottimo di Pareto e ogni allocazione unanimemente preferita ad una allocazione di $\mathscr{W}$ appartiene a $\mathscr{W}$. Mentre prima c'erano solo 2^m coalizioni con diritto di veto ora ce ne sono infinite, c'è quindi da aspettarsi che $\mathscr{W}$ sia molto più piccolo di $\mathscr{N}$.

Per caratterizzare il nucleo nebuloso, associamo ad ogni allocazione $(x^1, \dots, x^m)$ l'insieme $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{R}^l$ dei punti $\xi \in \mathbb{R}^l$ tali che esiste una coalizione nebulosa a e dei panieri di beni $y^i \in \mathbb{R}^l_+$, $i \in A$ verificanti
$$y^i \succ_i x^i \;\forall i \in A \quad \text{e} \quad \xi = \sum_{i\in A} \alpha_i (y^i - \omega^i).$$

5.36. LEMMA. *Vale*

a. *L'insieme $\mathscr{X}$ contiene l'origine se e solo se l'allocazione $(x^1, \dots, x^m)$ non appartiene a $\mathscr{W}$.*
b. *Se i preordini individuali $\succsim_i$ sono convessi, allora l'insieme $\mathscr{X}$ è convesso.*

DIMOSTRAZIONE. a. Dire infatti $\xi = 0$ significa dire che la coalizione nebulosa a blocca l'allocazione $(x^1, \dots, x^m)$, che non apparterrebbe quindi al nucleo nebuloso.
b. Siano ζ e η due punti di $\mathscr{X}$
$$\zeta = \sum_{i\in A} \gamma_i (u^i - \omega^i) \text{ con } u^i \succ_i x^i$$

$$\eta = \sum_{i \in B} \beta_i (v^i - \omega^i) \text{ con } v^i \succ_i x^i$$

e $\lambda \in [0,1]$. Dobbiamo mostrare che $\xi = \lambda\zeta + (1-\lambda)\eta$ appartiene a $\mathscr{X}$.

Ponendo $A' := A - A \cap B, B' := B - A \cap B$ possiamo scrivere

$$\lambda\zeta + (1-\lambda)\eta = \sum_{A \cap B} [\lambda\gamma_i(u^i - \omega^i) + (1-\lambda)\beta_i(v^i - \omega^i)] + \sum_{A'} \lambda\gamma_i(u^i - \omega^i) + \sum_{B'} (1-\lambda)\beta_i(v^i - \omega^i).$$

Per $i \in A \cap B$ il vettore

$$w^i := \frac{\lambda\gamma_i + (1-\lambda)\beta_i v^i}{\lambda\gamma_i + (\lambda)\beta_i}$$

risulta essere una combinazione convessa di u^i e di v^i e, essendo il preordine convesso, risulta

$$w^i \succ_i x^i.$$

Infatti, se $u^i \succcurlyeq_i v^i$, l'insieme delle w preferite a v^i è convesso, contiene u^i e v^i dunque w^i. Per transitività allora $w^i \succ_i x^i$. Similmente, se $v^i \succcurlyeq u^i$.

Si verifica ora che

$$\lambda\zeta + (1-\lambda)\eta = \sum_{A \cap B} (\lambda\gamma_i + (\lambda)\beta_i)(w^i - \omega^i) + \sum_{A'} \lambda\gamma_i(u^i - \omega^i) + \sum_{B'} (1-\lambda)\beta_i(v^i - \omega^i).$$

Poniamo

$$\alpha_i = \begin{cases} (\lambda\gamma_i + (1-\lambda)\beta_i)(w^i - \omega^i) & \text{per } i \in A \cap B \\ \lambda\gamma_i & \text{per } i \in A' \\ (1-\lambda)\beta_i & \text{per } i \in B' \\ 0 & \text{per } i \notin A \cup B \end{cases} \tag{5.28}$$

e

$$y^i = \begin{cases} w^i & \text{per } i \in A \cap B \\ u^i & \text{per } i \in A' \\ y^i & \text{per } i \in B' \end{cases} \tag{5.29}$$

si verifica allora facilmente che $\xi = \lambda\zeta + (1-\lambda)\eta$ appartiene a $\mathscr{X}$. □

Le allocazioni $(x^1, \dots, x^m)$ del nucleo nebuloso $\mathscr{W}$ sono allora esattamente quelle per cui l'insieme convesso $\mathscr{X}$ non contiene l'origine. Per il Teorema 3.7 di Minkowski l'ultima affermazione equivale a dire che $\mathscr{X}$ (sempre che non sia vuoto) può essere separato dall'origine da un iperpiano da cui segue:

5.37. TEOREMA. *Consideriamo una economia di proprietà privata dove i preordini individuali $\succcurlyeq_i$ sono tutti convessi e una allocazione $(x^1, \dots, x^m)$ che non* satura *o* sazia *alcun consumatore, cioè*

$$\forall i \in S \quad \exists z^i \in \mathbb{R}^l_+ \, : \, z^i \succ x^i.$$

Questa allocazione $(x^1, \dots, x^m)$ appartiene al nucleo nebuloso $\mathscr{W}$ se e solo se si possono trovare coefficienti $(p_1, \dots, p_l)$ non tutti nulli tali che per ogni $i \in S$

$$\textit{se} \quad y \succ_i x^i \quad \textit{allora} \quad \sum_{k=1}^{l} p_k y_k \geq \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k.$$

DIMOSTRAZIONE. La condizione di non saturazione ci dice che $\mathscr{X}$ è non vuoto. Dire che $(x^1,\ldots,x^m) \in \mathscr{X}$ significa che possiamo separare $\mathscr{X}$ dall'origine, cioè possiamo trovare dei coefficienti $(p_1\ldots,p_l)$ non tutti nulli tali che, per ogni coalizione nebulosa a e ogni famiglia $y^i \in \mathbb{R}^l_+$, $i \in A$ verificante $u_i(y^i) > u_i(x^i)\,\forall\, i \in A$, si abbia

$$\sum_{i=k}^{l} p_k \xi_k = \sum_{i=k}^{l}\sum_{i\in A} p_k \alpha_i (y^i_k - \omega^i_k) \geq 0.$$

Se ora consideriamo ad esempio la coalizione nebulosa definita da $\alpha_j = 1$ se $j = i$ e $\alpha_j = 0$ altrimenti, otteniamo per tutti gli $y \in \mathbb{R}^l_+$ tali che $u_i(y) > u_i(x^i)$

$$\sum_{i=k}^{l} p_k \alpha_i (y^i_k - \omega^i_k) \geq 0.$$

Il viceversa si mostra poi moltiplicando rispettivamente le ultime diseguaglianze per gli m numeri positivi α_i. □

Se rafforziamo leggermente le ipotesi, otteniamo come corollario un risultato il cui significato economico appare più chiaramente.

5.38. COROLLARIO. *Consideriamo una economia di proprietà privata nella quale, per ogni $i \in S$, siano soddisfatte le seguenti due condizioni:*

- *i preordini $\succcurlyeq_i$ sono convessi e continui,*
- *$\omega^i \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^l_+)$, cioè $\omega^i_k > 0$, per $1 \leq k \leq l$,*[35]

e sia $(x^1,\ldots,x^m)$ una allocazione realizzabile che localmente non satura o sazia alcun consumatore, cioè verificante:

$\forall\, i \in S\, \exists (z^i)_n \in \mathbb{R}^l_+$ *tale che:* $\forall n \in \mathbb{N}$ $(z^i)_n \succ x^i$ *e* $(z^i)_n \to x^i$ *quando* $n \to \infty$.

Allora l'allocazione $(x^1,\ldots,x^m)$ appartiene al nucleo nebuloso se e solamente se si possono trovare dei coefficienti $(p_1,\ldots,p_l)$ non tutti nulli tali che per ogni i si abbia

$$\sum_{k=1}^{l} p_k x^i_k = \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k \tag{5.30}$$

e

$$\textit{se per} \quad y \in \mathbb{R}^l_+ \quad \textit{vale} \quad \sum_{k=1}^{l} p_k y_k \leq \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k \quad \textit{allora} \quad x^i \succcurlyeq_i y. \tag{5.31}$$

DIMOSTRAZIONE. Il Teorema 5.37 ci garantisce l'esistenza di p_k tali che

$$\sum_{k=1}^{l} p_k (z^i_k)_n \geq \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k;$$

passando al limite abbiamo quindi

$$\sum_{k=1}^{l} p_k x^i_k \geq \sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k \tag{5.32}$$

e sommando queste diseguaglianze in i otteniamo

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p_k x^i_k \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p_k \omega^i_k. \tag{5.33}$$

[35] In altre parole, ciascun agente inizialmente possiede qualcosa di ogni bene.

dove, osserviamo, vale l'uguaglianza se e solo se vale l'uguaglianza nella (5.32). Ora, essendo $(x^1,\dots,x^m)$ realizzabile, per ogni k vale

$$\sum_{i=1}^{m} x_k^i = \sum_{i=1}^{m} \omega_k^i$$

e moltiplicando per p_k e sommando

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} p_k \omega_k^i,$$

per cui la (5.30) è stabilita.

Passando alla (5.31), il Teorema 5.37 ci dà una forma debole della (5.31):

$$y \succ_i x^i \quad \text{implica} \quad \sum_{k=1}^{l} p_k y_k \geq \sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i$$

che si scrive nella forma logicamente equivalente

$$\sum_{k=1}^{l} p_k y_k < \sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i \quad \text{implica} \quad x^i \succcurlyeq_i y.$$

Resta allora da dimostrare che per

$$\sum_{k=1}^{l} p_k y_k = \sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i \tag{5.34}$$

si ha ancora $x^i \succcurlyeq_i y$. Questo segue dal fatto che, se vale la (5.34), esiste una successione $\{y_n\}$ tale che:

$$y_n \to y \quad \text{e} \quad \forall n \quad \text{vale} \quad \sum_{k=1}^{l} p_k y_{nk} < \sum_{k=1}^{l} p_k x_k^i$$

e quindi $x^i \succcurlyeq_i y_n$, come già dimostrato; segue allora $x^i \succcurlyeq_i y$, passando al limite. Resta da dimostrare l'esistenza della successione $\{y_n\}$. Poiché ω^i è interno a $\mathbb{R}^l_+$ per ogni i possiamo trovare $\eta \in \mathbb{R}^l_+$ tale che

$$\sum_{k=1}^{l} p_k \eta_k < \sum_{k=1}^{l} p_k \omega_k^i.$$

Si verifica allora facilmente che

$$y_n := (1-\frac{1}{n})y + \frac{1}{n}\eta$$

è una successione buona. □

Passando dal Teorema 5.37 al Corollario 5.38 abbiamo sostituito l'ipotesi di non-saturazione *globale* con un'ipotesi di non-saturazione *locale*: per quanto piccolo si scelga un intorno di x^i l'agente i potrà trovarvi un paniere di beni z^i che preferisce strettamente a x^i. La condizione locale ovviamente implica quella globale ma, se i preordini possono essere rappresentati da funzioni d'utilità concave, allora la condizione globale implica quella locale.

In questo passaggio si guadagna però una migliore interpretazione economica. I coefficienti $(p_1,\dots,p_l)$ sono i *prezzi* rispettivi degli l beni. L'espressione $\sum_{k=1}^{l} p_k \omega_k^i$ è la somma che può ottenere l'agente i vendendo quello che possiede inizialmente, l'equazione (5.30) esprime che è esattamente questa somma che dovrà pagare per ottenere il paniere di beni x^i. L'equazione (5.31) dice che l'agente i non ha modo di spendere meglio il suo denaro, cioè x^i è la migliore scelta per l'individuo i.

In questo capitolo abbiamo costantemente aumentato la possibilità di cooperare tra gli individui e ora ci troviamo ad aver isolato un insieme di allocazioni realizzabili $\mathscr{W}$ caratterizzato in termini di prezzi. Le seguenti questioni si pongono naturalmente:

(a) Quale interpretazione dare alle coalizioni nebulose?

(b) $\mathscr{W}$ è non vuoto?
(c) $\mathscr{W}$ si riduce a un punto?

Con riferimento ad (a) l'interpretazione più soddisfacente sembra essere la seguente: assieme a S si immagini una società S_n costruita sul modello di S, ma che contiene n volte gli individui di S. Per ciascun i di S essa avrà n agenti del tipo i, cioè dotati di un preordine $\succsim_i$ e di risorse ω^i. Una coalizione qualunque $\mathscr{A}$ di S_n è definita dal dato del tipo d'agenti rappresentati e dal numero di individui di ciascun tipo, cioè da una coalizione A di S e da un intero $a_{ni} \leq n$ per ciascun $i \in A$. Dire che la coalizione $\mathscr{A}$ può garantire il paniere di beni y^i a ciascun membro di tipo i si esprime allora come

$$\sum_{i \in A} \frac{a_{ni}}{n} y^i = \sum_{i \in A} \frac{a_{ni}}{n} \omega^i$$

o, ponendo $a_{ni}/n = \alpha_i$ come: $\sum_{i \in A} \alpha_i y^i = \sum_{i \in A} \alpha_i \omega^i$. Dire che l'attribuzione del paniere x^i a ciascun agente i è bloccato dalla coalizione $\mathscr{A}$ si scrive: $\forall i \in A,\ y^i \succ_i x^i$. L'analogia con la definizione di coalizione nebulosa diventa allora evidente se si divide ogni α_i per $\sum_{i \in A} \alpha_i$ ottenendo ancora $\sum_{i \in A} \alpha_i y^i = \sum_{i \in A} \alpha_i \omega^i$, ma questa volta con $\alpha_i \in [0,1]$. Quando $n \to \infty$ gli a_{ni} possono esser scelti in modo che normalizzati convergano verso gli α_i. Si può quindi dire che le coalizioni nebulose di una economia assomigliano alle coalizioni dell'economia iniziale, ma con un gran numero di individui. Se a questo si aggiunge che il nucleo nebuloso $\mathscr{W}$ è il limite dei nuclei delle economie approssimanti[36], la cosa sembra proprio ragionevole. Tra l'altro, in questo modo si potrebbe dimostrare che il nucleo nebuloso è non vuoto. Risulta invece molto difficile trattare la questione (c).

Nel prossimo capitolo faremo intervenire i prezzi nello studio di $\mathscr{W}$ e vedremo che $\mathscr{W}$ coincide con gli *equilibri di Walras* della cosiddetta *economia competitiva*.

[36] Si veda, ad esempio, [86].

CAPITOLO 6

Economia di proprietà privata di solo scambio: equilibri di Walras

Abbiamo concluso il capitolo precedente con la definizione di un insieme $\mathscr{W}$ di allocazioni realizzabili, ciascuna associata ad un sistema di *prezzi* che appaiono non per un intervento esterno ma per necessità interne a una economia di proprietà privata.

In questo capitolo riprendiamo l'analisi di una economia di proprietà privata di solo scambio considerando la nozione di prezzo come *primitiva*. Oltre alle ipotesi del Capitolo 5 (egocentrismo delle preferenze, proprietà privata delle risorse iniziali) faremo anche qualche ipotesi supplementare (monotonia e regolarità delle preferenze) che elimineremo nel Capitolo 8 quando introdurremo anche la produzione.

6.1. *Domanda individuale*

L'introduzione di un sistema di prezzi $p = (p_1, \ldots, p_l)$ significa semplicemente che gli agenti si sono accordati su una *unità di conto*. Questa permette di valutare la ricchezza di ciascuno, e il trasferimento di un paniere di beni $x \in \mathbb{R}^l_+$ dall'agente i all'agente j avviene tramite il trasferimento di $\sum_{k=1}^{l} p_k x_k$ unità di conto dall'agente j verso l'agente i. In accordo con l'ipotesi di *monotonia delle preferenze*, cioè del fatto che tutti i beni sono desiderati, possiamo anche supporre che $p_k > 0$ per ogni $k = 1, \ldots, l$. Conviene osservare esplicitamente che l'unità di conto non è che una pallida astrazione della moneta. Nella situazione in considerazione, questa non è tesaurizzata e non esistono banche centrali o organismi di credito; essa non trasmette, come nelle situazioni reali, informazioni tra gli agenti o dal passato al futuro; ricordiamo, infatti, che nell'economia che stiamo considerando gli agenti comunicano perfettamente e la conoscenza degli agenti è completa[1].

Nel seguito supporremo, oltre alle ipotesi (H.1) e (H.2) che abbiamo già formulate nel capitolo 5, l'ipotesi (H.3), e quindi:

[1] Dal punto di vista dell'economia neoclassica in cui ci siamo messi il motore dell'economia è lo scambio e noi insisteremo in questo percorso; osserviamo però che per gli economisti, ad esempio keynesiani, non si può comprendere l'economia, almeno delle società liberali e industriali, che tramite la moneta: per questi non ci sarebbe quindi niente da aggiungere a questo punto.

(H.1) *Egocentrismo delle preferenze.* La funzione d'utilità u_i dell'individuo i dipende solamente dal suo paniere di beni $x^i \in \mathbb{R}^l$.

(H.2) *Proprietà privata.* Le risorse totali $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_l)$ sono inizialmente suddivise tra gli individui, ω^i, $\omega^i = (\omega^i_1, \dots, \omega^i_l)$, con $\Omega_k = \sum_{i=1}^m \omega^i_k$.

(H.3) Per ogni $i \in S$ il preordine $\succcurlyeq_i$ è continuo, monotono e strettamente convesso[2].

L'agente i è dunque caratterizzato dalla sua relazione di preferenza $\succcurlyeq_i$, dalle sue risorse iniziali $\omega^i \in \mathbb{R}^l_+$ e dalla sua funzione d'utilità u_i che dipende solo dal paniere di beni x^i assegnati all'agente i ed è monotona e strettamente quasiconcava:

$$y \in x^i + \mathbb{R}^l_+ \Rightarrow y \succcurlyeq_i x^i$$
$$[y \succcurlyeq_i x^i, \quad \text{e} \quad y \neq x^i] \Rightarrow \lambda y + (1-\lambda) x^i \succ_i x^i.$$

In questo quadro, introduciamo un *sistema di prezzi* $p = (p_1, \dots, p_l)$, che per il momento possiamo pensare come vettore di $\mathbb{R}^l_+$; assumiamo che gli agenti subiscano questi prezzi senza poterli in alcun modo modificare e ci chiediamo quali saranno le reazioni degli agenti.

L'agente i calcola nell'unità di conto la sua *ricchezza* come

$$r^i = \sum_{k=1}^l p_k \omega^i_k =: p \cdot \omega^i,$$

dove ω^i_k è la dotazione iniziale del bene k-simo dell'agente i. Il consumatore i può allora permettersi di comprare ogni paniere $y \in \mathbb{R}^l_+$ che costa meno di r^i. Questi costituiscono i panieri compatibili con il suo *budget* e formano l'*insieme di budget* $B(p, r^i)$ dell'agente i che scriviamo semplicemente come $B(r^i)$

$$B(r^i) := \{y \in \mathbb{R}^l_+ \quad | \quad p \cdot y \leq r^i\}.$$

L'agente i cercherà quindi di *massimizzare*[3] la sua funzione di utilità u_i in $B(r^i)$.

Si vede facilmente che

6.1. PROPOSIZIONE. *Supponiamo che il prezzo di ciascun bene sia positivo, $p_k > 0$ per ogni $k = 1, \dots, l$. Allora*

- *L'insieme di budget $B(r)$ è convesso, compatto e non vuoto per ogni $r \geq 0$.*

2 Osserviamo che la monotonia non necessariamente implica $x^i + \tau^i \succ_i x^i$ per $\tau \in \mathrm{int}(\mathbb{R}^l_+)$, ma, tenendo conto della stretta convessità dell'ordine, vale $x^i + \lambda \tau^i \succ_i x^i$ per ogni λ con $0 < \lambda < 1$.

3 Il comportamento razionale dell'agente è identificato con la massimizzazione della sua utilità. Afferma Edgeworth in [50] p. 6 che

> il principio primo della scienza economica è quello per cui ciascun agente è guidato dal proprio interesse

anche se poi lo stesso Edgeworth considera questo principio poco realistico, [50] p. 104,

> l'uomo concreto [...] è il larga misura un egoista spurio, un utilitarista misto.

Egli riteneva che l'ipotesi di uomo economico egoista non fosse fondamentalmente errata con riferimento a quei particolari tipi di attività ai quali è applicabile quello che definiva il 'calcolo economico', come la 'guerra' e la 'contrattazione'. Si veda [159] per una discussione di questo punto.

- *Per ogni $i \in S$ e $r^i \geq 0$ esiste un unico paniere di beni $x^i = x^i(p) \in B(r^i)$ che rende massima la funzione d'utilità u_i in $B(r^i)$, cioè*

$$x^i(p) \succcurlyeq_i y \quad \forall y \in B(r^i)$$

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente $B(r)$ è non vuoto, convesso e chiuso; vale poi per ogni $y \in B(r)$

$$0 \leq y_k \leq r/p_k.$$

Per il teorema di Weierstrass esiste allora $x^i = x^i(p) \in B(r^i)$ che massimizza u_i in $B(r^i)$. Supponiamo che ci sia un altro punto di massimo z^i diverso da x^i. Per la convessità di $B(r^i)$ e la stretta convessità di $\succcurlyeq_i$ abbiamo

$$B(r^i) \ni \frac{1}{2}(x^i + z^i) \succ_i x^i$$

e questo contraddice la massimalità di x^i. □

Osserviamo ancora che l'insieme di *budget* dell'agente i resta *invariato* se moltiplichiamo tutti i prezzi per una costante positiva. Possiamo quindi *normalizzare* i prezzi e introdurre il *dominio dei prezzi*

$$\Pi := \{p \in \mathbb{R}^l \quad | \quad p_1 + \ldots + p_l = 1, \quad p_k > 0 \forall k\}.$$

Introduciamo anche il *simplesso (chiuso)*

$$\bar{\Pi} := \{p \in \mathbb{R}^l \quad | \quad p_1 + \ldots + p_l = 1, \quad p_k \geq 0 \forall k\}$$

e la k-esima faccia del simplesso

$$\Pi_k = \{p \in \bar{\Pi} \quad | \quad p_k = 0\}$$

di modo che

$$\Pi = \bar{\Pi} \setminus \cup_{k=1}^{l} \Pi_K.$$

6.2. DEFINIZIONE. La funzione che ad ogni sistema di prezzo $p \in \Pi$ associa il paniere di beni $x^i(p)$, più precisamente $x^i(p, \omega^i)$, che l'agente i preferisce nel suo insieme di *budget* si chiama la *funzione domanda individuale* dell'agente i e verrà denotata $d^i(\cdot)$, più precisamente $d^i(\cdot, \omega^i)$.

Si usa scriverere anche

$$d^i(p, \omega^i) = \text{arg max}\{u_i(x^i) \,|\, x^i \in \mathbb{R}^l_+ \quad \text{e} \quad p \cdot x^i \leq p \cdot \omega^i\}.$$

6.3. PROPOSIZIONE. *Vale*

(a) *Per $p \in \Pi$ e $i \in S$*

$$p \cdot d^i(p) = p \cdot \omega^i \text{ [4]}$$

(b) *Le funzioni domande individuali $d^i : \Pi \to \mathbb{R}^l_+$ sono tutte continue.*

[4] Per finanziare la sua domanda, cioè l'utilità massima per lui, l'agente i dovrà vendere tutto quello che possiede, non può conservare delle risorse non utilizzate.

DIMOSTRAZIONE. (a) Se fosse $p \cdot d^i(p) < p \cdot \omega^i$, posto $z^i := (d^i_1 + \varepsilon, \dots, d^i_l + \varepsilon)$ e scelto ε sufficientemente piccolo si avrebbe $\sum_{k=i}^{i} p_k z^i_k < \sum_{k=i}^{i} p_k \omega^i_k$, quindi z apparterrebbe all'insieme di budget di i e, per la monotonia, $z^i \succcurlyeq_i d^i(p)$.
(b) Supponiamo che per un qualche i si possa trovare una successione $p_{(n)} \in \Pi$ convergente a $p \in \Pi$ per cui $d^i(p_{(n)})$ non converga a $d^i(p)$ o, equivalentemente, che da $p_{(n)}$ non sia possibile estrarre una sottosuccessione convergente a $d^i(p)$. Dimostreremo che questo è assurdo.

Poiché $d^i(p_{(n)})$ appartiene a $B(r^i_n)$ con $r^i_n = p_{(n)} \cdot \omega^i$ per $k = 1, \dots, l$ vale, Proposizione 6.1,

$$0 \le d^i(p_{(n)}) \le r^i_n / p_{(n)}.$$

Poiché $p_{(n)k}$ converge a $p_k > 0, 0 \le k \le l$, possiamo trovare numeri positivi $M > m > 0$ tali che $m \le p_{(n)k} \le M$. Concludiamo allora che anche la successione $d^i(p_{(n)})$ è limitata:

$$0 \le d^i(p_{(n)}) \le \frac{M}{m} \sum_{i=k}^{l} \omega^i_k.$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass possiamo allora estrarre da $d^i(p_{(n)})$ una sottosuccessione, che continueremo a denotare $d^i(p_{(n)})$, convergente a un qualche z^i. Si vede immediatamente che z^i appartiene all'insieme di *budget* di i. Dimostriamo che in realtà $z^i = d^i(p)$ e questo concluderà la dimostrazione.

Si tratta di confrontare z^i con un y nell'insieme di *budget* di i. Inizialmente supponiamo che valga

$$p \cdot y < p \cdot \omega^i.$$

Essendo la diseguaglianza stretta essa continuerà a valere in un intorno di p e quindi anche per tutti i $p_{(n)}$ a partire da un opportuno indice N, conseguentemente

$$d^i(p_{(n)}) \succcurlyeq_i y \quad \forall n \ge N.$$

Passando al limite, poiché anche la successione estratta $d^i(p_{(n)})$ converge a z^i, concludiamo che $z^i \succcurlyeq_i y$. Abbiamo quindi dimostrato che il paniere z^i è preferito a tutti i panieri che costano strettamente meno di r^i. Supponiamo ora che $p \cdot y = r^i$. Approssimando y con $y_n := (1 - 1/n)y$, poiché $p \cdot y_n < r^i$ (tranne che nel caso $r^i = 0$ in cui tutto è zero), troviamo $z^i \succcurlyeq_i y_n$ e, passando al limite, $z^i \succcurlyeq_i y$, cioè z^i massimizza la funzione di utilità di i nell'insieme di *budget* di i. Per l'unicità concludiamo $z^i = d^i(p)$. □

Studiamo ora il comportamento del consumatore quando uno dei prezzi, diciamo p_1 è nullo o tende a zero. Se $p_1 = 0$, il bene 1 è gratuito; l'agente i, le cui preferenze sono monotone, non sarà mai sazio del bene 1 e non sarà quindi in grado di formulare la sua domanda[5]. Se p_1 non è nullo ma piccolo, la diseguaglianza $p_1 \cdot y_1 \le r^i$ per un *budget* $r^i > 0$ mostra che si può avere sempre più y_1 quanto più p_1 è piccolo. Se più prezzi, diciamo p_1 e p_2 vanno a zero, non necessariamente le richieste di entrambi i beni y_1 e y_2 dovranno divergere, ma sicuramente la somma delle domande divergerà. Più precisamente vale la seguente proposizione.

6.4. PROPOSIZIONE. *Fissato un agente $i \in S$ con ricchezza $r^i > 0$ e un sistema di prezzi in Π_k, cioè con $p_k = 0$ vale:*

(a) *Non esiste in $B(r^i)$ nessun paniere di beni che l'agente i preferisce a tutti gli altri*

$$\forall x \in B(r^i) \quad \exists y \in B(r^i) \quad \textit{tale che} \quad y \succ_i x.$$

5 Qui stiamo assumendo che ci sia *disponibilità illimitata* del bene 1; nel caso di *disponibilità limitata* di ogni bene, in particolare del bene 1, l'agente 1 chiederà il massimo disponibile. Noi considereremo prevalentemente il primo caso.

(b) *Se $p_{(n)}$ è una successione in Π convergente a p e se $\omega^i_k > 0$ per ogni $k = 1,\dots,l$, allora la domanda dell'agente i tenderà all'infinito*

$$[\omega^i \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^l_+) \quad e \quad p_{(n)k} \to 0] \Rightarrow \sum_{k=1}^{l} d^i_k(p_{(n)}) \to +\infty.$$

DIMOSTRAZIONE. (a) Per ogni x basterà aumentare la sua componente k-sima e utilizzare la monotonia e la stretta convessità dell'ordine.
(b) Se infatti la successione $p_{(n)}$ restasse limitata si potrebbe dimostrare passando al limite su una sottosuccessione che per ogni i c'è un paniere che l'agente preferisce a tutti gli altri. □

6.2. *Equilibri di Walras e teorema fondamentale dell'economia del benessere*

Sarà possibile soddisfare tutte le domande individuali? Ovviamente bisogna che siano compatibili con l'offerta di beni anzi, per via della monotonia, bisognerà che per ciascun bene l'offerta coincida con la domanda. Non essendoci produzione nella nostra economia, l'offerta del bene k si riduce alla quantità di bene k inizialmente presente e ripartito tra gli agenti

$$\Omega_k = \omega^1_k + \ldots + \omega^m_k,$$

mentre la domanda, sempre del bene k, si riduce alla somma delle domande individuali

$$d^1_k(p) + \ldots + d^m_k(p).$$

6.5. DEFINIZIONE. Essendo Ω il vettore *offerta aggregata*

$$\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_l)$$

e

$$\sum_i^m d^i(p), \quad \text{dove} \quad d^i(p) = (d^i_1(p), \dots, d^i_l(p))$$

il vettore *domanda aggregata*, la funzione $z(p) : \Pi \to \mathbb{R}^l$ definita da

$$z(p) := \sum_i^m d^i(p) - \Omega$$

si chiama la *funzione eccesso di domanda*[6].

Un sistema di prezzi $p \in \Pi$ che verifichi

$$z(p) = 0$$

si chiama un *sistema di prezzi di equilibrio*. L'allocazione $x(p) = (x^1(p), \dots, x^m(p))$ associata ad un prezzo di equilibrio, cioè $(d^1(p), \dots, d^m(p))$, si chiama l'*allocazione di equilibrio* associata al sistema di prezzi di equilibrio p.

6 Sarebbe più preciso scrivere $z(p, \omega)$.

Diremo anche che

$$e := (\omega^1, \dots, \omega^m; p_1, \dots, p_l; x^1, \dots, x^m)$$

è un *equilibrio di Walras*.

Per quanto abbiamo visto, è immediato verificare che si ha:

6.6. PROPOSIZIONE. *Sia $p \in \Pi$ un sistema di prezzi di equilibrio. Allora un'allocazione $(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{lm}$ è un'allocazione di equilibrio associata a p se e solo se*

(a) *L'allocazione $(x^1, \dots, x^m)$ è realizzabile, cioè $\sum_{k=1}^m x^i = \Omega$.*
(b) *Per ogni $i \in S$ vale $p \cdot x^i = p \cdot \omega^i$.*
(c) *Per ogni $i \in S$ e per ogni $y \in B(p \cdot \omega^i)$ si ha $x^i \succcurlyeq_i y$.*

Notiamo come la caratterizzazione precedente non sia altro che la caratterizzazione delle allocazioni del nucleo nebuloso alla fine del Capitolo 5, per *cui un'allocazione appartiene al nucleo nebuloso $\mathscr{W}$ se e solo se è un'allocazione di equilibrio relativamente ad un sistema di prezzi p e all'attribuzione iniziale Ω ed è realizzabile*.

Vale ancora la seguente proposizione che raccoglie[7] le principali proprietà della funzione eccesso di domanda $z(p)$.

6.7. PROPOSIZIONE. *Nelle ipotesi* (H.1) (H.2) (H.3) *per la funzione eccesso di domanda, che è ben definita in* Π, *valgono i seguenti fatti:*

(a) *$z(\cdot)$ è continua in Π.*
(b) *$z(\cdot)$ è omogenea di grado zero.*
(c) LEGGE DI WALRAS*: $p \cdot z(p) = 0$ in Π.*
(d) *Per ogni p e per ogni k si ha $z_k(p) \geq -\Omega_k$.*
(e) *Se $p_{(n)}$ è una successione che tende a $p = (p_1, \dots, p_r, 0, \dots, 0)$[8], allora, a patto di supporre che gli ω_k^i siano non nulli per tutti gli i e k, le successioni $z_k(p_{(n)})$ restano limitate per $1 \leq k \leq r$ mentre esistono indici $k > r$ tali che $z_k(p_{(n)}) \to +\infty$.*

Il teorema fondamentale della cosiddetta *teoria dell'equilibrio* è il teorema di esistenza dell'equilibrio che qui enunciamo nel caso di beni liberamente disponibili o illimitati[9].

6.8. TEOREMA (*Esistenza dell'equilibrio*). *Consideriamo un'economia di proprietà privata di solo scambio soddisfacente le ipotesi* (H.1) (H.2) (H.3) *e tale che ciascun agente sia provvisto di tutti i beni, $\omega_k^i \neq 0$ per ogni i,k. Allora esiste almeno un sistema di prezzi di equilibrio,*

$$\exists q \in \Pi \quad \textit{tale che} \quad z(q) = 0.$$

[7] Osserviamo solo che la proprietà (e) della Proposizione 6.7 è una conseguenza della Proposizione 6.4 e della legge di Walras.

[8] Pur di riodinare le componenti di p possiamo supporre che gli zeri si accumulino in fondo.

[9] Come vedremo, nella prossima sottosezione, vale un teorema di esistenza anche nell'ipotesi che tutti i beni (o parte) siano limitatamente disponibili.

Il teorema fu enunciato da Leon Walras [193], sulla base del fatto che (per via della legge di Walras e della possibilità di normalizzare i prezzi) il sistema $z(p) = 0$ si riduce ad un sistema di $l-1$ equazioni in $l-1$ incognite; questo, anche se ovviamente conforta, non può costituire una prova di risolubilità essendo il sistema nonlineare. Successivamente la questione fu discussa nel famoso seminario diretto da Karl Menger[10] negli anni 1930 a Vienna. È da questo seminario che ebbero origine i primi contributi moderni di Abraham Wald [191] [192] e di John von Neumann [189]. La teoria fu completamente formalizzato da Kenneth Arrow e Gérard Debreu [6] ed oggi ci si riferisce all'insieme di questi risultati come alla *teoria dell'economia di scambio di Arrow-Debreu.*

Rimandiamo la dimostrazione del teorema di esistenza dell'equilibrio alla prossima sottosezione. Qui continuiamo invece a commentare questo risultato e alcune sue conseguenze.

6.9. TEOREMA (*Primo teorema dell'economia del benessere*). *Un equilibrio di Walras redistribuisce in modo Pareto ottimale l'assegnazione iniziale dei beni. Più precisamente:*

(a) *Ogni allocazione di equilibrio è un ottimo di Pareto stretto, unanimemente preferito all'allocazione iniziale*

$$x^i \succcurlyeq_i \omega^i \quad \forall i \in S.$$

(b) *Ogni allocazione di equilibrio appartiene al nucleo nebuloso dell'economia.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(x^1, \ldots, x^m)$ l'allocazione di equilibrio al prezzo p.
(a) Supponiamo che l'affermazione non sia vera ed esista $(y^1, \ldots, y^m)$ con

$$y^i \succcurlyeq_i x^i \quad \forall i \quad \text{e} \quad \exists j \quad \text{tale che} \quad y^j \succ_j x^j.$$

Allora $p \cdot y^j > p \cdot \omega^j$. Affermiamo che vale pure $p \cdot y^i \geq p \cdot \omega^i$. Se infatti fosse $p \cdot y^i < p \cdot \omega^i$, esisterebbe $t > 1$ tale che $p \cdot ty^i < p \cdot \omega^i$; ma allora $x^i \succcurlyeq_i ty^i$ e, poiché $ty^i \succcurlyeq y^i$, concluderemmo $x^i \succ_i y^i$ in contraddizione con l'ipotesi di partenza.

Infine, da $p \cdot y^i \geq p \cdot \omega^i$, sommando, ricaveremmo $p \cdot (\sum_1^m y^i - \sum_1^m \omega^i) > 0$, che dice che $(y^1, \ldots, y^m)$ non è realizzabile.[11]
(b) Supponiamo, al contrario, che sia bloccata dalla coalizione nebulosa $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ con supporto A: per ogni $i \in A$ esiste y^i con

$$\sum_{i \in A} \alpha_i y^i = \sum_{i \in A} \alpha_i \omega^i \quad \text{e} \quad y^i \succ_i x^i.$$

Allora y^i costa più di x^i, $p \cdot y^i > p \cdot \omega^i$. Moltiplicando per α_i e sommando troviamo

$$p \cdot \sum_{i \in A} \alpha_i y^i > p \cdot \sum_{i \in A} \alpha_i \omega^i$$

che contraddice l'ipotesi.

□

Vale anche una sorta di reciproco del teorema precedente

[10] Figlio dell'economista Carl considerato il fondatore della Scuola Austriaca di Economia.
[11] Osserviamo che la $x^i \succcurlyeq_i \omega^i \quad \forall i \in S$ può essere precisata come

$$x^i = \omega^i \quad \text{o} \quad x^i \succ_i \omega^i.$$

6.10. TEOREMA (*Secondo teorema dell'economia del benessere*). *Sia $x = (x^i, \dots, x^m)$ una ridistribuzione Pareto efficiente dell'allocazione iniziale $(\omega^1, \dots, \omega^m)$ in cui ogni agente possiede parte di ogni bene, $\omega^i_k > 0$ per ogni k, i. Allora, pur di ridistribuire l'assegnazione iniziale dei beni, diciamo $\tilde{\omega}$ con $\sum_{i=1}^m \tilde{\omega}^i = \sum_{i=1}^m \omega^i$, x è l'allocazione di equilibrio di Walras rispetto ad un opportuno sistema di prezzi e alla distribuzione iniziale $\tilde{\omega}$, cioè $x^i \in d^i(p, \tilde{\omega}^i)$ per qualche p e per $\tilde{\omega}$.*

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col provare che, se x è un ottimo di Pareto stretto, allora $x^i = d^i(p, x^i)$ $\forall i = 1, \dots, m$.

Definiamo

$$S^i := \{z \in \mathbb{R}^l_+ \quad | \quad u_i(z) > u_i(x^i)\}, \quad S := S^1 + \dots + S^m.$$

Poiché le u_i sono strettamente crescenti, ogni S^i è non vuoto, quindi S è non vuoto; inoltre S è convesso e aperto (essendo le u_i continue). Infine, poiché x è un ottimo di Pareto stretto abbiamo $\sum_{i=1}^m x^i \notin S$; altrimenti, troveremmo un'allocazione $y = (y^i)$ con $y^i \in S^i$ $\forall i$ e $\sum_i y^i = \sum_i x^i = \sum_i \omega^i$, ma, per costruzione, $u_i(y^i) > u_i(x^i)$ $\forall i$.

Possiamo allora separare S da $\sum_{i=i}^m x^i \not{i}nS$ e trovare $p \in \mathbb{R}^l$ tale che

$$p \cdot s > p \cdot \sum_{i=1}^m x^i \quad \forall s \in S$$

In effetti, tutte le componenti di p sono positive perché, se $p_n \leq 0$, avremo ovviamente $e^n + \sum_{i=i}^m x^i \in S$ (dove e^n è il vettore con tutte le componenti nulle tranne quella di posto n-simo) la diseguglianza precedente ci darebbe un assurdo.

Proviamo infine che $x^i = d^i(p, x^i)$ $\forall i$. Supponiamo che questo non sia vero; esiste allora i e $s^i \in \mathbb{R}^l_+$ tale che

$$p \cdot s^i \leq p \cdot x^i \quad \text{e} \quad u_i(s^i) > u_i(x^i).$$

ed, essendo u_i continua, possiamo assumere che $p \cdot s^i < p \cdot x^i$. Definiamo ora

$$\theta := \frac{1}{m-1}(p \cdot x^i - p \cdot s^i)$$

e, per $j \neq i$,

$$s^j = \operatorname{argmax}\{u_j(z^j) \quad | \quad z^j \in \mathbb{R}^l_+ \quad \text{e} \quad p \cdot z^j \leq p \cdot x^j + \theta\}.$$

Vale $u_j(s^j) > u_j(x^j)$, $p \cdot s^j = p \cdot x^j + \theta$ e $\sum_{j=1}^m s^j \in S$, quindi

$$\sum_{j=1}^m p \cdot s^j > \sum_{j=1}^m x^j,$$

ma

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m p \cdot s^j &= p \cdot s^i + \sum_{j \neq i} p \cdot s^j = p \cdot s^i + \sum_{j \neq i}(p \cdot x^j + \theta) \\ &= p \cdot s^i + \sum_{j \neq i} + (m-1)\theta = \sum_{i=1}^m x^i,\end{aligned}$$

una contraddizione.

Per concludere la dimostrazione basterà porre $\tau^i := x^i - \omega^i$, $\tilde{\omega} := \omega + \tau$ e applicare quanto dimostrato a $\tilde{\omega}$ per concludere $x^i = d^i(p, \omega^i - \tau^i)$ con $\sum_i \tau^i = 0$. □

Ci si riferisce al primo e al secondo teorema dell'economia del benessere come al teorema *fondamentale dell'economia del benessere*.

Osserviamo che le procedure descritte nel Capitolo 5 e in questo sono profondamente diverse: le prime richiedono una conoscenza perfetta da parte degli individui e fanno intervenire tutti i gradi possibili di collaborazione (pur avendo come base l'interesse individuale), nelle seconde l'individuo reagisce al sistema dei prezzi sulla base delle proprie risorse e del proprio interesse personale senza preoccuparsi degli altri, se il prezzo è stato scelto bene – è un prezzo di equilibrio – l'aggregazione delle domande individuali ci dà una allocazione realizzabile. Entrambe, però, portano allo stesso risultato, mettendo in evidenza il ruolo dell'efficienza paretiana: ci può essere sicuramente motivo di meraviglia in questo.

Ma il teorema fondamentale dell'economia del benessere ha anche un importante ruolo ideologico, ancor più considerato che, come vedremo nel prossimo capitolo, questi risultati valgono anche in un mercato con produzione. In essi gli economisti neoclassici vedono spesso la dimostrazione della *mano invisibile* che porta la competizione individuale a realizzare un equilibrio globale coerente in una economia di mercato competitivo, facendo riferimento ad un famoso passo di Smith della *Ricchezza delle Nazioni* [180]:

> Ogni individuo cerca di impiegare il proprio capitale in modo da produrre il valore più grande. Solitamente egli non intende promuovere l'interesse pubblico né conosce quanto egli lo stia promuovendo. Egli è interessato solo alla sua sicurezza e al suo guadagno. In questo egli è guidato da una mano invisibile che promuove un fine che non era nelle sue intenzioni. Perseguendo il suo proprio interesse, egli frequentemente promuove quello della società più efficacemente di quanto non faccia quando egli intende realmente promuoverlo.

Si potrebbe però dire che la meraviglia sia da attribuire più alla nostra astrazione matematica che a come in realtà vanno le cose. Una cosa è dimostrare che esiste un prezzo di equilibrio nel nostro modello, altra cosa è affermare che i prezzi osservati in una economia di scambio sono quelli che equilibrano la domanda e l'offerta. Perché dovremmo credere che il risultato del libero scambio assomiglia ad un equilibrio di Walras? Vediamo infatti che ci sono vari motivi che spingono ad essere prudenti.

(1) Ciascun consumatore deve conoscere i prezzi di ciascun bene, ma sembra non realistico supporre che tutti i consumatori conoscano tutti i prezzi in ogni luogo e al tempo fissato. Inoltre, così facendo si ignora l'aspetto dinamico della scelta: alcuni degli scambi dipendono da previsioni sui prezzi futuri e dalle offerte di mercato.

(2) Ciascun consumatore deve essere in grado di comprare o vendere le quantità che vuole di ogni bene al prezzo corrente, cosa poco realistica. Si potrebbe optare per una economia di beni limitati, ma in questo caso un consumatore potrebbe desiderare di comprare, ad esempio, dell'agnello al prezzo dato, ma non sa se il macellaio ha ancora agnello.

(3) I consumatori possono non agire in modo razionale; in fondo, come diceva Jonathan Swift, gli uomini non sono *animali razionali*, ma solo *animali con capacità razionale*.

(4) L'equilibrio walrasiano non ci fornisce in nessun modo informazioni su *come* il mercato realmente opera. Un meccanismo piuttosto irrealistico è quello del *banditore walrasiano*. Un banditore annuncia un prezzo p; se non è quello di equilibrio, passa ad annunciare un nuovo prezzo q con $q_k < p_k$, nel caso di eccesso di domanda in p_k positivo, e $q_k > p_k$, in caso di eccesso di domanda negativo, fino a raggiungere l'equilibrio. Si tratta di un'idea, come vedremo, importante matematicamente, ma sembra irrealistico che l'equilibrio si raggiunga nello stesso istante in tutti i mercati e per tutti i consumatori. Nell'astrazione è assente il *processo temporale* verso l'equilibrio.

(5) Non viene tenuto conto delle cosiddette *esternalità*, cioè situazioni in cui il consumo di alcuni beni da parte di un consumatore altera l'utilità di un altro consumatore. In questo caso ciascuna funzione d'utilità u_i dipende da tutto il vettore x e non solo da x^i.

Si potrebbe ancora definire un equilibrio walrasiano. Ma si dimostrerebbe allora che i consumatori non necessariamente saranno in grado di convergere verso un equilibrio e, anche se questo accadesse, l'equilibrio non sarebbe in generale Pareto efficiente.

(6) Infine, ci si può chiedere se la teoria dell'equilibrio sia empiricamente verificabile?[12] Più precisamente negli anni 1970 Hugo Sonnenschein pose la questione di decidere se la fondazione individualistica della teoria dell'equilibrio potesse generare restrizioni non banali e empricamente verificabili sull'eccesso di domanda aggregata o sulla domanda di mercato. Contributi di vari autori (tra cui Rolf Ricardo Mantel, Gérard Debreu, Pierre André Chiappori e Ivar Ekeland) hanno risposto negativamente, in questo modo mostrando una certa inabilità da parte della teoria dell'equilibrio di generare predizioni empiricamente falsificabili. Va detto che, pur non essendo l'eccesso di domanda sperimentalmente verificabile (tranne che all'equilibrio dove è 0), a partire dagli anni 2000 si è cercato di individuare quantità dipendenti dalle fluttuazioni dei prezzi che siano sperimentalmente verificabili, si veda [37].

C'è una vasta letteratura che si preoccupa di creare modelli che permettano di superare queste critiche. Noi non entreremo ovviamente in dettagli. Ci permettiamo di mettere in evidenza che, come abbiamo già osservato, l'equilibrio garantisce l'efficienza ma non l'*equità*: si possono creare equilibri in cui coesistano persone "estremamente povere e altri che nuotano nel lusso, finché i poveri non possono esser fatti star meglio senza dimunire il lusso dei ricchi". D'altra parte, il concetto di equità dipende dall'*etica* prevalente nella società e dalla *cultura* della società stessa (compreso le ideologie), quindi il raggiungimento di un *equilibrio equo* non può essere solo il risultato di un comportamento razionale, sempre poi che razionale si identifichi con massimizzazione, ma richiede una mediazione *politica* che arrivi dopo una analisi profonda e la successiva evoluzione che, purtroppo, può anche risultare in una involuzione, della cultura. Quanto visto però suggerisce che la competizione individuale sembra essere quantomeno un aspetto importante e non trascurabile nell'analisi politico-economica.

6.3. *Esistenza dell'equilibrio*

Veniamo ora alla dimostrazione dell'esistenza di almeno un sistema di prezzi d'equilibrio, in funzione anche delle *condizioni al bordo* assegnate alla funzione eccesso di domanda, cioè del comportamento di $z(p)$ quando $p \in \Pi$ converge ad un punto $\bar{p}$ del bordo di Π, $\bar{\Pi} \setminus \Pi$.

Il caso di due soli beni con disponibilità illimitata. Normalizziamo i prezzi come $p = (p_1, 1)$; la legge di Walras si scrive allora come

$$p_1 z_1(p_1, 1) + z_2(p_1, 1) = 0, \tag{6.1}$$

[12] Verifiche sperimentali della teoria economica appaiono non fattibili in linea di principio per tempi lunghi. Infatti, in tempi lunghi possono cambiare le funzioni di utilità rendendo difficile la distinzione tra incoerenza e cambiamenti di gusti.

dove $z = (z_1, z_2)$ è l'eccesso di domanda, e l'esistenza di un sistema di prezzi di equilibrio equivale all'esistenza di p_1 tale che $z_1(p_1, 1) = 0$.

Osserviamo che, quando $p_1 \to 0$, necessariamente $z_1(p_1, 1) \to +\infty$, altrimenti z_1, e di conseguenza anche z_2, resterebbero limitate contrariamente al fatto che almeno una delle z_i deve divergere a $+\infty$. Scrivendo la (6.1) come

$$z_1(1, \frac{1}{p_1}) + \frac{1}{p_1} z_2(1, \frac{1}{p_1})$$

lo stesso argomento ci dice che, per $p_1 \to +\infty$, $z_2(1, \frac{1}{p_1}) = z_2(p_1, 1)$ rimane positiva; e, ancora la (6.1) ci dice che per qualche $\tilde{p}$ grande vale $z_1(\tilde{p}, 1) < 0$. Il *teorema degli zeri*[13] ci assicura allora che esiste p^* con $0 < p^* < \tilde{p}$ per cui $z_1(p^*, 1) = 0$.

Il caso di $z(p)$ definita e continua in $\bar{\Pi}$. La seguente strategia risulta essere buona. Dato un sistema di prezzi $p \in \bar{\Pi}$, non di equilibrio definiamo un nuovo sistema di prezzi p' così determinato:

- alziamo il prezzo di un bene con eccesso di domanda,
- abbassiamo (o manteniamo) il prezzo dei beni con eccesso di domanda negativo,
- manteniamo inalterati i prezzi con zero eccesso di domanda,
- normalizziamo in modo da restare in $\bar{\Pi}$.

Il sistema di equilibrio dovrebbe quindi essere un punto fisso di questa trasformazione[14].

Per implementare la nostra strategia abbiamo bisogno di una funzione $h : \bar{\Pi} \to \bar{\Pi}$ tale che

$$\begin{cases} h_i(p) > 0 & \text{se e solo se } z_i(p) > 0, \\ h_i(p) = 0 & \text{se e solo se } z_i(p) = 0, \\ p_i + h_i(p) \geq 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

È facile verificare che due possibili scelte sono, ad esempio:

$$\begin{aligned} h_i(p) =& \max(-p_i, k_i z_i(p)),\, k_i > 0 \\ h_i(p) =& \max(0, k_i z_i(p)),\, k_i > 0. \end{aligned}$$

Se ora mostriamo che

$$\sum_{k=1}^{l} \big(p_i + h_i(p)\big) > 0, \tag{6.3}$$

risulta ben definita la mappa continua $T : \bar{\Pi} \to \bar{\Pi}$

$$T(p) := \frac{p + h(p)}{\sum_{i=1}^{l} (p_i + h_i(p))}$$

[13] A volte chiamato anche *teorema di Bolzano*. Ricordiamo

6.11. TEOREMA (*degli zeri*). *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste ξ con $a < \xi < b$ tale che $f(\xi) = 0$.*

[14] Ricordiamo, come già osservato: dire che la funzione $f(x)$ ha un punto fisso è equivalente a dire che $x - f(x)$ ha uno zero.

che, conseguentemente, ha un punto fisso (per il teorema di punto fisso di Brouwer).

Dimostriamo allora la (6.3). Supponiamo che $\sum_{i=1}^{l}(p_i + h_i(p))$ non sia positivo, allora per via della terza condizione in (6.2), sarà $\sum_{i=1}^{l}(p_i + h_i(p)) = 0$ per qualche p e, usando la legge di Walras

$$0 = (p + h(p)) \cdot z(p) = p \cdot z(p) + h(p) \cdot z(p) = h(p) \cdot z(p).$$

Ma è facile verificare dalla definizione di $h(p)$ che $h_i(p)z_i(p) \geq 0$ per ogni i, segue $h_i(p)z_i(p) = 0$ per ogni i. D'altra parte $p_i > 0$ per qualche i. Per questo i si ha allora $h_i(p) = -p_i < 0$, quindi $z_i(p) = 0$ che, per la 2 di (6.2), dà $h_i(p) = 0$, una contraddizione.

Sia allora $p^* \in \bar{\Pi}$ un punto fisso di T, cioè

$$h(p^*) = \lambda p^*, \tag{6.4}$$

con $\lambda = \sum_{i=1}^{l}(p_i^* + h_i(p^*)) - 1$. Moltiplicando per $z(p^*)$ e usando la legge di Walras troviamo

$$h(p^*) \cdot z(p^*) = \lambda p^* \cdot z(p^*) = 0$$

e, come prima $h_i(p^*)z_i(p^*) = 0$ per ogni i. Ora $z_i(p^*) > 0$ implicherebbe $h_i(p^*) = 0$ in contraddizione con la 2 di (6.2), quindi $z_i(p^*) \leq 0$ per ogni i.

Dimostriamo infine che $z_i(p^*) \leq 0$ per ogni i implica $z_i(p^*) = 0$ per ogni i. Dall'ipotesi segue ${p^*}_i z_i(p^*) \leq 0$ per ogni i, quindi o $z_i(p^*) = 0$ e abbiamo concluso o $z_i(p^*) < 0$ e, in questo caso $p_i^* = 0$. Dalla (6.4) segue allora $h_i(p^*) = 0$, cioè, per (6.2), $z_i(p^*) = 0$, una contraddizione; in conclusione $z(p^*) = 0$.

In realtà l'ipotesi che abbiamo fatto e cioè che la funzione eccesso di domanda $z(p)$ si possa estendere in modo continuo da Π alla chiusura $\bar{\Pi}$ è troppo forte. In generale da ogni successione $p_{(n)} \in \Pi$ convergente a $\bar{p} \in \bar{\Pi}$ si potrà estrarre una sottosuccessione $p_{(n_k)}$ per cui o $z(p_{(n_k)})$ diverge a $+\infty$ o converge ad un valore finito, ma cosa succede ed il valore dell'eventuale limite finito dipende dalla (sotto)successione in considerazione; e tutto questo succede in (semplici esempi) di economie ragionevoli.

In effetti, la dimostrazione del teorema di esistenza dell'equilibrio di Walras sembra richiede una sostanziale generalizzazione del contesto: il passaggio da funzioni a funzioni a valori nei sottoinsiemi di un insieme, chiamate anche *corrispondenze*, e la generalizzazione del teorema di punto fisso di Brouwer alle corrispondenze.

Il teorema di Kakutani. Una *corrispondenza* o *mappa a valori insiemi* da X in Y è una aplicazione $F : X \to \mathscr{P}(Y)$. Ovviamente ogni funzione $f : X \to Y$ definisce una corrispondenza F ponendo $F(x) := \{f(x)\}$.

Un punto $x \in X$ si dice un *punto fisso* di una corrispondenza F da X in sé se $x \in F(x)$.

Si chiama *grafico* della corrispondenza F l'insieme

$$\text{grafico}(F) := \{(x,y) \in X \times Y \quad | \quad y \in F(x)\}.$$

Si dimostrano facilmente le seguenti proposizioni.

6.12. PROPOSIZIONE. *Siano X e Y sottoinsiemi di due spazi euclidei con Y compatto e sia f una applicazione da X in Y. Sono fatti equivalenti:*

- *f ha grafico chiuso,*
- *f è continua.*

6.13. PROPOSIZIONE. *Siano X e Y sottoinsiemi di due spazi euclidei con Y limitato e sia F una corrispondenza da X in Y con $F(x)$ chiuso per ogni x. Sono fatti equivalenti:*

(a) *F ha grafico chiuso,*

(b) *Per ogni chiuso $C \subseteq Y$ l'insieme $\{x \in X \mid F(x) \cap C \neq \emptyset\}$ è chiuso.*

Possiamo ora dimostrare l'estensione del teorema di Brouwer dovuta a Shizuo Kakutani [92].

6.14. TEOREMA (*di punto fisso di Kakutani*). *Sia F una corrispondenza del simplesso $\bar{\Pi}$ in sé. Supponiamo che F abbia grafico chiuso e che per ogni p gli insiemi $F(p)$ siano convessi, chiusi e non vuoti. Allora F ha un punto fisso:*

$$\exists q \quad \textit{tale che} \quad q \in F(q).$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione consiste nell''approssimare' F con delle applicazioni f_n (cosa possibile perché F ha valori convessi), applicare il teorema di Brouwer e passare al limite per $n \to +\infty$.

Decomponiamo il simplesso $\bar{\Pi}$ in simplessi simili, di lati n volte più piccoli e, quindi, di volume n^{l-1} più piccolo. Serviranno n^{l-1} di questi simplessi per ricoprire $\bar{\Pi}$. Sia Σ uno di questi simplessi e siano $\{p^1, \ldots, p^l\}$ i vertici di modo che ogni punto di Σ si può scrivere come $p = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k p^k$, dove gli α_k sono coefficienti non negativi di somma 1. Se ora, per ogni vertice p^k di Σ si sceglie un punto q^k in $\bar{\Pi}$ possiamo definire una applicazione affine $\phi : \Sigma \to \bar{\Pi}$ come

$$\phi\Big(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k p^k\Big) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k q^k. \tag{6.5}$$

La suddivisione di $\bar{\Pi}$ è quindi determinata dai vertici dei sottosimplessi che formano un reticolo R_n di lato $\sqrt{2}/n$. Per ogni $p \in R_n$ ora scegliamo q in $F(p)$ e procediamo come sopra in ciascuno dei sottosimplessi della decomposizione. Osserviamo che, se due sottosimplessi Σ^1 e Σ^2 sono adiacenti, allora hanno in comune una faccia e i suoi $(l-1)$ vertici $\{p^1, \ldots, p^{l-1}\}$ e la (6.5), con $\alpha_l = 0$, mostra che ϕ^1 e ϕ^2 coincidono lungo questa faccia. Le funzioni ϕ^i, definite su ciscun sottosimplesso Σ^i si incollano in un'unica funzione $f_n : \bar{\Pi} \to \bar{\Pi}$ che ha le seguenti proprietà:

(a) f_n è continua,

(b) $\forall p \in R_n$ vale $f_n(p) \in F(p)$,

(c) su ciascuno dei sottosimplessi di lato $\sqrt{2}/n$ e di vertici $\{p^1, \ldots, p^l\} \subseteq R_n$, si ha

$$f_n\Big(\sum_{k=1}^{l} \alpha_k p^k\Big) = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k f_n(p^k).$$

Ogni mappa f_n possiede, per il teorema di Brouwer, un punto fisso $q_n = f_n(q_n)$ che apparterrà a un qualche sottosimplesso con vertici $\{p_n^1, \ldots, p_n^l\} \subseteq R_n$. Possiamo allora scrivere grazie alle (c) e (b) sopra:

$$q_n = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k^n p_n^k = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k^n f_n(p_n^k) \tag{6.6}$$

$$f_n(p_n^k) \in F(p_n^k) \quad \forall k \tag{6.7}$$

assieme alle

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k^n = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_k^n \geq 0 \quad \forall k \tag{6.8}$$

$$||p_n^k - p_n^j|| = \sqrt{2}/n \quad \text{per} \quad 1 \leq k, j \leq n. \tag{6.9}$$

Poiché le succesioni p_n^k e $f_n(p_n^k)$ stanno in $\bar{\Pi}$ e la successione α_k^n in $[0,1]$, quando n tende all'infinito possiamo estrarre sottosuccessioni, che continuiamo a chiamare nello stesso modo, convergenti

$$p_n^k \to p^k \tag{6.10}$$

$$F_n(p_n^k) \to r^k \tag{6.11}$$

$$\alpha_k^n \to \alpha_k. \tag{6.12}$$

Passando al limite nella (6.9) otteniamo $||p^k - p^j|| = 0$, cioè $p^k = p^j$ per $1 \le j,k \le l$. Denotiamo con q questo punto che non è altro che il comune limite dele successioni $\{p_n^k\}$:

$$p_n^k \to q \quad \text{per} \quad 1 \le k \le l. \tag{6.13}$$

Passando al limite nella (6.8) otteniamo

$$\alpha_k \ge 0 \quad \text{e} \sum_{k=1}^{l} \alpha_k = 1. \tag{6.14}$$

Passando al limite nella (6.6), in virtù delle (6.10), (6.11), (6.12), (6.13) otteniamo

$$\sum_{k=1}^{l} \alpha_k q = \sum_{k=1}^{l} \alpha_k r^k. \tag{6.15}$$

Il primo membro di questa eguaglianza è q per via della (6.14). Per valutare il secondo membro teniamo conto ancora delle convergenze in (6.10), (6.11), (6.13) e teniamo conto della (6.7). Poiché il grafico di F è chiuso e contiene i punti $(p_n^k, f_n(p_n^k))$, contiene anche tutti i punti (q, r^K). Dunque gli r^k appartengono tutti a $F(q)$ e, essendo $F(q)$ convesso, anche il punto $\sum_{k=1}^{l} \alpha_k r^k$ appartiene a $F(q)$. In conclusione, l'equazione (6.15) dà $q \in F(q)$. □

Osserviamo che, come mostra la definizione, da un lato il teorema di Kakutani segue dal teorema di punto fisso di Brouwer; dall'altro chiaramente implica il teorema di Brouwer: si conclude quindi che i teoremi di punto fisso di Brouwer e di Kakutani sono equivalenti.

Il teorema di esistenza dell'equilibrio. Siamo ora in grado di dimostrare il teorema di esistenza dell'equilibrio di Walras, che rienunciamo, mettendo in evidenza che l'ipotesi che tutti gli agenti posseggano inizialmente una quota non nulla di tutti i beni garantisce che siamo nelle condizioni al bordo per $z(p)$ descritte nella Proposizione 6.7.

6.15. TEOREMA (*Esistenza dell'equilibrio*). *Consideriamo un'economia di proprietà privata di solo scambio soddisfacente le ipotesi* (H.1) (H.2) (H.3) *e tale che ciascun agente sia provvisto di tutti i beni,* $\omega_k^i \neq 0$ *per ogni* i,k. *Allora esiste almeno un sistema di prezzi di equilibrio,*

$$\exists q \in \Pi \quad \textit{tale che} \quad z(q) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Ad ogni $p \in \Pi$ associamo l'insieme $I(p)$ degli indici che coincidono con $\max_j z_j(p)$

$$I(p) := \{k \,|\, z_k(p) = \max_j z_j(p)\}$$

(in altre parole isoliamo i beni per i quali l'eccesso di domanda è massimo) e la faccia di $\bar{\Pi}$ corrispondente

$$\bar{\Pi}_{I(p)} := \{q \in \bar{\Pi} \quad | \quad q_k = 0 \quad \forall k \notin I(p)\}$$

(cioè consideriamo il sistema di prezzi per cui tutti gli altri beni sono gratuiti). Vedremo che il sistema di prezzi che è insensibile a questa revisione è appunto un sistema di prezzi di equilibrio.

Per questo, definiamo la corrispondenza F da $\bar{\Pi}$ in sé definita da

$$F(p) = \begin{cases} \bar{\Pi}_{I(p)} & \text{se } p \in \Pi \\ \{q \in \bar{\Pi} \,|\, p \cdot q = 0\} & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{6.16}$$

Ad esempio se $p = (p_1, \dots, p_r, 0 \dots, 0)$, dove le prime componenti sono non nulle, allora $F(p)$ sarà l'insieme degli $q \in \bar{\Pi}$ del tipo $q = (0, \dots, 0, q_{r+1}, \dots, q_l)$.

Osserviamo che

$$p \notin \Pi \quad \Rightarrow \quad p \notin F(p),$$

in particolare gli eventuali punti fissi di F devono appartenere a Π. Mostriamo ancora che $q \in F(q)$ se e solo se q è un sistema di prezzi di equilibrio. Supponiamo $q \in F(q) = \bar{\Pi}_{I(q)}$, allora $z_k(q) = z_j(q)$ per $1 \leq j,k \leq l$. Il vettore $z(q)$ ha dunque tutte le sue componenti uguali a un numero ξ. La legge di Walras si scrive come

$$0 = z(q) \cdot q = \xi \sum_{k=1}^{l} q_i = \xi .$$

L'eccesso di domanda è quindi nullo per tutte le componenti e q è un sistema di equilibrio. Viceversa, sia q un sistema di equilibrio, allora tutti gli $z_k(q)$ sono nulli quindi $I(q)$ coincide con l'insieme di tutti gli indice da 1 a l e $F(q)$ coincide con $\bar{\Pi}$, in particolare $q \in F(q)$.

La dimostrazione del teorema è quindi effettivamente ricondotta a mostrare che la corrispondenza F ha un punto unito e, tenuto conto del teorema di Kakutani, a mostrare che F ha grafico chiuso, visto che ovviamente i suoi valori sono convessi, chiusi e non vuoti. Si tratta di mostrare che, se p_n è una successione in $\bar{\Pi}$ convergente a $p \in \bar{\Pi}$ e $q_n \in F(p_n)$ una sussessione convergente a q in $\bar{\Pi}$, allora $q \in F(p)$.

Supponiamo inizialmente che $p \in \Pi$. Allora tutti i p_n tranne che un numero finito stanno in Π e tranne che per un numero finito di indici $I(p_n) \subseteq I(p)$. Infatti dire che $k \notin I(p)$ significa che si può trovare un indice $j \neq k$ tale che $z_j(p) > z_k(p)$. Essendo z continua, questo implica che tranne che per un numero finito di indici vale $z_j(p_n) > z_k(p_n)$ e, cioè, $k \notin I(p_n)$.[15]

Supponiamo ora che p appartenga al bordo di $\bar{\Pi}$; possiamo sempre ricondurci al caso in cui p abbia la forma $p = (p_1, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0)$ con $p_k \neq 0$ per $k \leq r$. Per $k \leq r$ i p_{nk} saranno non nulli a partire da un certo indice. Consideriamo una prima situazione in cui un'infinità di termini p_n stiano in Π e quindi esista una sottosuccessione p_{n_k} a cui possiamo applicare la Proposizione 6.7: per $k \leq r$ l'eccesso di domanda resta limitato, mentre esiste $k \geq r+1$ per cui l'ecceso di domanda tende all'infinito. Per j abbastanza grande l'eccesso di domanda massimo $z_k(p_{n_j})$ sarà realizzato per dei beni di indice $k \geq r+1$, vale a dire $I(p_{n_j}) \subseteq \{r+1, \ldots, l\}$ dunque $F(p_{n_j})$ sarà contenuto nell'insieme dei punti di $\bar{\Pi}$ le cui prime coordinate sono nulle, vale a dire in $F(p)$. In particolare q_{n_j} appartiene a $F(p)$ a partire da un certo j e quindi varrà lo stesso per il limite q.

Potrebbe darsi però una seconda possibilità (senza che le due possibilità si escludano): ci sono degli indici $k \geq r+1$ (per esempio gli ultimi s) e una infinità di termini p_n tali che $p_{nk} = 0$ per $k \geq l-s+1$ e $p_{nk} \neq 0$ per $r \leq l-s$. Questi formerebbero allora una sottosuccessione p_{n_j} tale che $F(p_{n_j})$ sia l'insieme dei punti di $\bar{\Pi}$ le cui prime $l-s$ componenti siano nulle. Essendo $k \leq l-s$, questo insieme è contenuto in $F(p)$. Cosicché $q_{n_j} \in F(p)$ e, passando al limite $q \in F(p)$. $\square$

[15] Abbiamo qui usato il ben noto *teorema della permanenza del segno*: se una successione di numeri $\{a_n\}$ converge a un numero positivo a, allora definitivamente, cioè a partire da un certo indice, la successione è positiva.

CAPITOLO 7

Economia di proprietà privata di solo scambio: complementi

In questo capitolo vogliamo ridiscutere quanto già fatto, e aggiungere alcune asservazioni, usando il cosiddetto *approccio differenziale*, cioè usando i metodi ed i risultati del calcolo differenziale[1]. Per comodità del lettore illustriamo, nella prima sezione, alcune definizioni e nozioni fondamentali ed alcuni risultati di analisi matematica che verranno poi liberamente usati nel seguito del capitolo.

7.1. *Superfici, condizioni di ottimalità, teorema di Kuhn-Tucker*

Supporremo che il lettore conosca un po' di calcolo differenziale per funzioni di una variabile ed un po' di algebra lineare.

7.1.1. *Funzioni di più variabili*

Cominciamo richiamando alcune semplici ma importanti definizioni.

Derivate direzionali, derivate parziali, differenziale

Siano $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e $x_0 \in A$. Fissato un qualunque vettore non nullo $v \in \mathbb{R}^n$, la mappa $r_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $r_v(t) := x_0 + vt$, è la parametrizzazione della retta passante per x_0 a $t = 0$ percorsa con velocità costante v. Esiste allora $\varepsilon_0 > 0$ tale che $B(x_0, \varepsilon_0) \subset A$ e dunque per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ $r_v(t) \in A$ se $|t| \leq \varepsilon_0/|v|$ e la funzione composta

$$\phi_v(t) := f(x_0 + tv), \qquad t \in r^{-1}(A), \tag{7.1}$$

detta la *restrizione di f alla retta per x_0 di direzione v*, è ben definita almeno sull'intervallo $|t| < \varepsilon_0/|v|$.

[1] Per maggiori informazioni il lettore interessato può consultare, ad esempio, [118] [7] [101] [117] e per gli aspetti più propriamente matematici [64] [65] [145] [146]. Per una discussione del contesto culturale e delle sue interazioni con la matematica dalle origini fino alla fine del diciottesimo secolo il lettore può vedere [66] [67]; in particolare, in [67] sono discussi gli sviluppi del *calcolo differenziale* che sono alla base dei primi approcci matematici all'economia.

Si dice che f ha *derivata direzionale in x_0 nella direzione v* se ϕ_v è derivabile in 0, cioè se esiste finito

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\phi_v(t)-\phi_v(0)}{t}. \tag{7.2}$$

La derivata di ϕ_v in 0, $\phi_v'(0)$, si chiama la *derivata direzionale di f in x_0 nella direzione v* e si indica con uno dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\in\mathbb{R}, \qquad \text{o anche} \qquad D_vf(x_0).$$

Siano ora $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ la base standard (ma non sarebbe necessario) di $\mathbb{R}^n$ e $(x^1,x^2,\dots,x^n)$ il rispettivo sistema di coordinate.

7.1. DEFINIZIONE. La derivata direzionale di f in x_0 nella direzione e_i si chiama anche la *derivata parziale di f rispetto a x^i* e la si indica anche con uno dei simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)=\frac{\partial}{\partial x^i}f(x_0)=D_if(x_0)=f_{x^i}(x_0):=\frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0).$$

La (7.2) definisce la derivata parziale di f rispetto a x^i in $x_0=(x_0^1,\dots,x_0^n)$ come la derivata della funzione di *una variabile*

$$x\to f(x_0^1,\dots,x_0^{i-1},x,x_0^{i+1},\dots,x_0^n)$$

in $x=x_0^i$. Pertanto la derivata parziale rispetto a x^i si ottiene considerando costanti le variabili $(x^1,\dots,x^{i-1},x^{i+1},x^n)$ e derivando f (come funzione di una variabile) rispetto a x^i.

La sola esistenza di tutte le derivate parziali non implica in generale ulteriori proprietà per la funzione; una funzione può avere tutte le derivate direzionali nulle in un punto x_0 e non essere continua in x_0. A distinguere le cose è la possibilità di approssimare localmente f con una funzione lineare.

7.2. DEFINIZIONE. Si dice che f è *differenziabile* in x_0 se esiste una funzione lineare $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, detta *differenziale* o *applicazione lineare tangente* ad f in x_0 tale che

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-L(h)}{|h|}=0. \tag{7.3}$$

Se $A\subset\mathbb{R}^n$ è aperto, si dice che $f:A\to\mathbb{R}$ *è differenziabile in A* se f è differenziabile in ogni punto di A.

Si vede facilmente

7.3. PROPOSIZIONE. *Se f è differenziabile in x_0 con differenziale L, allora*

(1) *f è continua in x_0,*
(2) *f ha tutte le derivate direzionali in x_0 e*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)=L(v) \qquad \forall v\in\mathbb{R}^n. \tag{7.4}$$

In particolare

- *l'applicazione $v\mapsto\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$, $v\in\mathbb{R}^n$, è lineare,*
- *il differenziale, se esiste, è unico.*

Viceversa, si dimostra, *teorema del differenziale totale*, che se le derivate parziali di f esistono in un intorno di x_0 e sono continue in x_0 allora f è differenziabile in x_0.

Segue da (ii) Proposizione 7.3 che per ogni $i = 1, \dots, n$

$$L(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

e la matrice associata all'applicazione lineare L è la matrice $1 \times n$

$$\mathbf{D}f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right),^{2} \tag{7.5}$$

detta *matrice jacobiana di f in x_0*. Si ha quindi

$$L(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) h^i = \mathbf{D}f(x_0)\, h \qquad \text{righe per colonne.}^{3} \tag{7.6}$$

Come conseguenza della Proposizione 7.3 si ha

7.4. PROPOSIZIONE. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione. f è differenziabile in $x_0 \in A$ se e solo se f ha tutte le derivate parziali in x_0 e*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - \mathbf{D}f(x_0)h = o(|h|) \qquad \textit{per } h \to 0.$$

Si chiama *vettore gradiente* di f in x_0 il vettore di $\mathbb{R}^n$ indicato con $\nabla f(x_0)$ o con $\operatorname{grad} f(x_0)$, definito da

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \right).^{4} \tag{7.7}$$

Vale

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x_0) = \mathbf{D}f(x_0)h = \nabla f(x_0) \cdot h = \operatorname{grad} f(x_0) \cdot h \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{7.8}$$

Si vede che, se $\nabla f(x_0) \neq 0$, allora il vettore $\nabla f(x_0) \in \mathbb{R}^n$ punta nel verso di 'massima pendenza'.

Quanto sopra si estende a funzioni $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dove A è aperto.

7.5. DEFINIZIONE. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, aperto e $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f^1, f^2, \dots, f^m)$, $m \geq 1$. f si dice *differenziabile* in $x_0 \in A$ se esiste una applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L = (L^1, L^2, \dots, L^m)$, detta *differenziale di f in x_0* o *applicazione lineare tangente ad f in x_0*, tale che

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)}{|h|} \to 0 \qquad \text{per } h \to 0. \tag{7.9}$$

Se f è differenziabile in ogni punto di A, si dice che f è *differenziabile in A*.

[2] In questa sezione scriveremo **D** f invece di Df, come invece faremo nelle altre sezioni, per enfatizzare il fatto che $\mathbf{D}f$ è una matrice.

[3] Se scriviamo i vetori, in particolare h, come colonne.

[4] Si dovrebbe in realtà scrivere ∇f come vettore colonna, ma non insistiamo su questo punto.

Ovviamente $f = (f^1, f^2, \dots, f^m)$ è differenziabile in x_0 con differenziale dato da $L = (L^1, L^2, \dots, L^m)$ se e solo se per ogni $i = 1, \dots, m$ $f^i(x)$ è differenziabile in x_0 con differenziale L^i. Inoltre si ha

$$L^i(h) = \frac{\partial f^i}{\partial h}(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0) h^j \qquad \forall i = 1, \dots, m. \tag{7.10}$$

Introducendo la matrice $m \times n$, detta *matrice jacobiana di f in x_0*,

$$\mathbf{D}f(x_0) := \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(x_0)\right] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^1}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n}(x_0) \\ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^2}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^2}{\partial x^n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial f^m}{\partial x^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix},$$

si ha

$$L(h) = \begin{pmatrix} L^1(h) \\ L^2(h) \\ \vdots \\ L^m(h) \end{pmatrix} = \mathbf{D}f(x_0)h.$$

In conclusione

7.6. PROPOSIZIONE. *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}^m$ una funzione, $f = (f^1, f^2, \dots, f^m)$. f è differenziabile in $x_0 \in A$ se e solo se*

(1) *le componenti $f^1, f^2, \dots, f^m$ di f hanno tutte le derivate parziali in x_0,*
(2) *detta $\mathbf{D}f(x_0)$ la matrice jacobiana in* (7.5)*, si ha*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - \mathbf{D}f(x_0)h = o(|h|) \qquad \textit{per } h \to 0.$$

Il differenziale di $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in x_0 si indica anche con $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e dunque

$$df(x_0)(h) := \mathbf{D}f(x_0)h \qquad h \in \mathbb{R}^n. \tag{7.11}$$

Spazio tangente e spazio normale al grafico

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenziabile in un punto x_0 interno ad A. Il *grafico* di f è definito come il sottoinsieme di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ dato da

$$G_f := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,|\, y = f(x)\Big\}.$$

Chiamiamo *piano tangente al grafico di f in x_0* il sottoinsieme grafico dell'applicazione

$$\Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,\Big|\, y = f(x_0) + \mathbf{D}f(x_0)(x - x_0)\Big\}$$

e *spazio tangente al grafico di f in* $(x_0, f(x_0))$ il suo traslato nell'origine di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

$$\mathrm{Tan}_{(x_0,f(x_0))}G_f := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,\Big|\, y = \mathbf{D}f(x_0)x\Big\},$$

Ovviamente lo spazio tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è anche il grafico dell'applicazione lineare tangente ad f in x_0

$$x \to \mathbf{D}f(x_0)x.$$

Chiaramente $\mathrm{Tan}_{(x_0,f(x_0))}G_f$ è l'immagine della mappa lineare iniettiva da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ data da $x \to (x, \mathbf{D}f(x_0)x)$, cioè, in termini di matrici, $\mathrm{Tan}_{(x_0,f(x_0))}G_f = \mathrm{Im}\,\mathbf{L}$ dove si è posto

$$\mathbf{L} := \left(\begin{array}{|c|} \hline \mathrm{Id} \\ \hline \mathbf{D}f(x_0) \\ \hline \end{array}\right).$$

Evidentemente le colonne di $\mathbf{L}$ sono linearmente indipendenti; sono quindi una base di $\mathrm{Tan}_{(x_0,f(x_0))}G_f$.

$\mathrm{Tan}_{(x_0,f(x_0))}G_f$ è caratterizzato come l'insieme dei vettori (x,y) di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tali che $\mathbf{D}f(x_0)x - y = 0$. Introducendo la matrice $m \times (n+m)$

$$\mathbf{A} := \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{D}f(x_0) & & -\mathrm{Id} \\ \hline \end{array}\right), \tag{7.12}$$

l'equazione $\mathbf{D}f(x_0)x - y = 0$ si riscrive come

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

e quindi

$$\mathrm{Tan}_{(x_0,f(x_0))}G_f = \ker \mathbf{A}.$$

Usando il prodotto scalare standard, si conclude che

7.7. PROPOSIZIONE. *Le m righe della matrice* (7.12)*, pensati come vettori di $\mathbb{R}^{n+m}$, sono una base dello spazio ortogonale a* $\mathrm{Tan}_{(x_0,f(x_0))}G_f$.

Il teorema di invertibilità locale

Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una applicazione. Se f è lineare, $f(x) = \mathbf{A}x$, $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$, l'invertibilità di f, cioè la risolubilità in x di $\mathbf{A}x = y$ per ogni $y \in \mathbb{R}^n$, è equivalente all'invertibilità della matrice $\mathbf{A}$ e questa alla condizione $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili, il calcolo ci dice che la condizione $f' > 0$ (o $f' < 0$) è sufficiente a garantire la monotonia e quindi la invertibilità di f e la derivabilità della funzione inversa. Inoltre, per funzioni con derivata continua, l'essere $f'(x_0) \neq 0$ in un punto x_0 assicura l'esistenza di un intervallo $I = I(x_0, r)$ su cui $f'(x)$ ha lo stesso

segno di $f'(x_0)$. Segue la stretta monotonia, la continuità, la derivabilità di $(f_{|I})^{-1}$ e la formula
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \forall y \in f(I).$$

Enunciamo ora un risultato di *invertibilità locale* per funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1, cioè con derivate prime continue. La condizione $f'(x_0) \neq 0$ in una variabile viene sostituita dalla condizione $\det \mathbf{D}f(x_0) \neq 0$[5] di non degenerazione della matrice jacobiana: è una similitudine piuttosto naturale se la si interpreta come condizione di non degenerazione dell'applicazione lineare tangente $h \to \mathbf{D}f(x_0)(h)$ o, se si vuole, di non degenerazione dello sviluppo di Taylor al primo ordine di f in x_0,
$$f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + o(|x - x_0|) \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Ricordiamo che $f_{|U}$ denota la restrizione di f ad $U \subset \Omega$.

7.8. DEFINIZIONE. Una funzione $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice *localmente invertibile* se per ogni $x \in \Omega$ esiste un intorno U di x tale che $f_{|U}$ è iniettiva.

Si ha allora

7.9. TEOREMA (*di invertibilità locale*). *Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una applicazione di classe C^1, definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \Omega$. Se* $\det \mathbf{D}f(x_0) \neq 0$*, allora esiste un intorno aperto U di x_0 tale che*

(1) *f ristretta ad U è iniettiva,*
(2) *$V := f(U)$ è aperto, f è aperta e $(f_{|U})^{-1} : V \to U$ è continua,*
(3) *$(f_{|U})^{-1} : V \to U$ è di classe C^1 ed inoltre $\forall y \in V$*

$$\mathbf{D}(f_{|U})^{-1}(y) = \Big[\mathbf{D}f(x)\Big]^{-1} \qquad x := (f_{|U})^{-1}(y). \tag{7.13}$$

Pertanto una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ di classe $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$ (cioè con derivate fino all'ordine k continue) con $\det \mathbf{D}f(x) \neq 0$ $\forall x \in \Omega$ è localmente invertibile, aperta (l'immagine di un aperto è aperta) e con inversa di classe C^k.

7.10. COROLLARIO. *Sia $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ iniettiva e di classe $C^1(\Omega)$. Se* $\det \mathbf{D}f(x) \neq 0$ *$\forall x \in \Omega$, allora $f(\Omega)$ è aperto e l'inversa $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ è di classe C^1 con*
$$\mathbf{D}f^{-1}(y) = [\mathbf{D}f(x)]^{-1},\ x := f^{-1}(y) \qquad \forall y \in f(\Omega).$$

Formula di Taylor al secondo ordine

Se f ha derivate parziali in un aperto A e queste sono continue in A, come abbiamo già detto, si dice che f è di *classe* C^1 in A e si scrive $f \in C^1(A)$.

Se una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, A aperto in $\mathbb{R}^n$, ha le derivate prime in un intorno di $x_0 \in A$ e se le derivate prime ammettono a loro volta derivate parziali in x_0, si dice che *f ha le derivate seconde in x_0*. Se $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ sono le coordinate standard in $\mathbb{R}^n$, la

[5] "det" sta per determinante.

derivata parziale seconda di f fatta prima rispetto a x^j e poi rispetto a x^i si indica con uno dei simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \qquad D_i D_j f(x_0), \qquad \text{oppure} \qquad D_{ij} f(x_0).$$

La matrice $n \times n$ di tutte le derivate seconde di f,

$$\mathbf{H}f(x_0) := [D_i D_j f(x_0)]$$

si chiama *matrice hessiana* di f in x_0. In generale può succedere che

$$D_i D_j f \neq D_j D_i f \qquad \text{per } i \neq j,$$

come ad esempio per la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \arctan \dfrac{x}{y} & se\ y \neq 0, \\ 0 & se\ y = 0. \end{cases}$$

per la quale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1$. Si ha però

7.11. TEOREMA (*Schwarz*). *Sia $f : B(x_0, r) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $r > 0$. Se per $i \neq j$ le derivate parziali miste*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x) \qquad e \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x)$$

esistono in tutto $B(x_0, r)$ e sono continue in x_0, allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}(x_0).$$

Se una funzione f ammette derivate parziali seconde in un aperto A e queste sono continue in A, si dice che f è di *classe* C^2 in A e si scrive $f \in C^2(A)$.

Un semplice corollario del teorema di Schwarz è

7.12. COROLLARIO. *Ogni funzione $f \in C^2(A)$ su un aperto A di $\mathbb{R}^n$ ha le derivate miste uguali, $D_{ij} f(x) = D_{ji} f(x)$ $\forall x \in A$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. In altre parole la matrice $\mathbf{H}f(x)$ è simmetrica $\forall x \in A$.*

Procedendo per induzione su k si definiscono le derivate parziali di ordine k.

7.13. DEFINIZIONE. Se le componenti di una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A aperto, ammettono derivate parziali di ordine k in ogni punto di A e se queste ultime sono funzioni continue in A, si dice che f è di *classe* $C^k(A)$ e si scrive $f \in C^k(A)$ o, ove fosse necessario, $f \in C^k(A, \mathbb{R}^m)$. Se f ammette in A derivate di qualunque ordine, si dice che f è di *classe* C^∞ e si scrive $f \in C^\infty(A)$ (o $f \in C^\infty(A, \mathbb{R}^m)$).

Da quanto detto

$$C^\infty(A) \subset C^k(A) \subset C^{k-1}(A) \subset \cdots \subset C^2(A) \subset C^1(A) \subset C^0(A).$$

Applicando ancora una volta il teorema di Schwarz si ottiene

7.14. COROLLARIO. *Sia A aperto in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni $f \in C^k(A)$ le derivate di f di ordine minore o uguale a k non dipendono dall'ordine con cui vengono eseguite.*

Di conseguenza, per specificare una derivata di ordine k di una funzione di classe C^k, basterà specificare il numero di derivate che si fanno rispetto a ciascuna variabile. Ad esempio, se $f \in C^6(\mathbb{R}^3)$, si parla della derivata sesta di f fatta 3 volte rispetto ad x, due volte rispetto a y e una volta rispetto a z in (x_0, y_0, z_0) e la si indica con

$$\frac{\partial^6 f}{\partial x^3 \partial^2 y \partial z}(x_0, y_0, z_0).$$

Si dimostra

7.15. TEOREMA (*Formula di Taylor al secondo ordine*). *Sia f una funzione di classe $C^2(B(x_0, r))$, $r > 0$. Per ogni $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| < r$, si ha allora*

$$f(x_0+h) - f(x_0) - \nabla f(x_0) \cdot h - \frac{1}{2}\mathbf{H}f(x_0)h \cdot h = o(|h|^2) \qquad \text{per } h \to 0.$$

7.1.2. *Sottovarietà di $\mathbb{R}^n$*

Un passo essenziale nello sviluppo dell'analisi e della geometria è la realizzazione dell'*idea intuitiva* di superficie regolare. Una sfera o un cilindro sono superfici regolari in $\mathbb{R}^3$, un cono no (non vicino al vertice). La nozione su cui questa idea si sviluppa è quella di *diffeomorfismo*, e l'analisi delle proprietà relative fa un uso essenziale del teorema di locale invertibilità.

Diffeomorfismi e superfici parametrizzate

7.16. DEFINIZIONE. Siano $X \subset \mathbb{R}^r$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$. Una mappa $\varphi : X \to \mathbb{R}^n$ si dice un *diffeomorfismo da X su Y* se

(1) φ è una bigezione tra X e Y,
(2) φ ha una estensione di classe C^1 ad un aperto $\Omega \supset X$ di $\mathbb{R}^r$,
(3) φ^{-1} ha una estensione di classe C^1 ad un aperto $\Delta \supset Y$ di $\mathbb{R}^n$.

Ovviamente φ è un diffeomorfismo da X a Y se e solo se φ^{-1} è un diffeomorfismo da Y su X. Si dice che X e Y sono *diffeomorfi* se esiste un diffeomorfismo tra X e Y.

Ogni diffeomorfismo $\varphi : X \to Y$ è una applicazione aperta da X su $\varphi(X)$, i.e., manda aperti di X in aperti di Y, quindi è un omeomorfismo tra X e $\varphi(X)$.

Se $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo da un *aperto* $\Omega \subset \mathbb{R}^r$, l'immagine $Y := \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ si dice una *superficie parametrizzata di dimensione r* di $\mathbb{R}^n$ e la mappa φ una *parametrizzazione regolare* di Y. In questo caso $\varphi \in C^1(\Omega)$ ed esiste una funzione $\psi : W \supset \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}^r$ di classe $C^1(W)$ definita su un aperto $W \supset \varphi(\Omega)$ tale che $\psi(\varphi(x)) = x$ per ogni $x \in \Omega$.

Derivando l'ultima identità, si ottiene

$$\mathbf{D}\psi(\varphi(x))\mathbf{D}\varphi(x) = \mathrm{Id} \qquad \text{per ogni } x \in \Omega;$$

perciò $\mathbf{D}\varphi(x) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva. Si è provato

7.17. PROPOSIZIONE. *Se $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ è un diffeomorfismo* da un aperto Ω *di* $\mathbb{R}^r$ *in $\mathbb{R}^n$, allora $r \leq n$ e, per ogni $x \in \Omega$, $\mathbf{D}\varphi(x)$ è iniettiva. Perciò* $\ker \mathbf{D}\varphi(x) = \{0\}$ *o, equivalentemente, $\mathbf{D}\varphi(x)$ ha rango massimo (= r).*

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ aperto e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo. Per $y_0 \in \varphi(\Omega)$, sia $x_0 \in \Omega$ l'unico punto tale che $\varphi(x_0) = y_0$.

7.18. DEFINIZIONE. Si chiama *spazio tangente* alla r-superficie parametrizzata $\varphi(\Omega)$ in $y_0 \in \varphi(\Omega)$ il sottospazio lineare di $\mathbb{R}^n$ immagine dell'applicazione lineare tangente a φ in x_0,

$$\mathrm{Tan}_{y_0}\varphi(\Omega) := \mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\varphi(x_0)).$$

Il piano tangente a $\varphi(\Omega)$ in y_0 è quindi il traslato di $\mathrm{Tan}_{y_0}\varphi(\Omega)$ dato dall'immagine della applicazione $x \to y_0 + \mathbf{D}\varphi(x_0)(x - x_0)$.

Essendo φ un diffeomorfismo, $\mathbf{D}\varphi(x_0)$ ha rango massimo ($= r$), dunque $\mathrm{Tan}_{y_0}\varphi(\Omega)$ *ha dimensione* r.

Si deve osservare che lo spazio tangente a $\varphi(\Omega)$ in un suo punto, per come è stato definito, dipende a priori dalla immersione φ, e non solo dalla immagine $\varphi(\Omega)$. Potrebbe cioè esistere un'altra immersione $\psi : \Delta \to \mathbb{R}^n$ da un aperto Δ di $\mathbb{R}^s$ con $\psi(\Delta) = \varphi(\Omega)$ tale che si abbia $\psi(u_0) = y_0 = \varphi(x_0)$ e $\mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\psi(x_0)) \neq \mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\varphi(u_0))$. Questo non accade perché dalla Proposizione 7.19 che segue si ha $r = s$ e $\psi = \varphi \circ h$, per un opportuno diffeomorfismo $h : \Delta \to \Omega$. Perciò

$$\mathbf{D}\psi(u_0) = \mathbf{D}\varphi(x_0)\mathbf{D}h(u_0).$$

Essendo h non singolare, si conclude $\mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\psi(u_0)) = \mathrm{Im}\,(\mathbf{D}\varphi(x_0))$. Questo prova tra l'altro che la dimensione di una r-superficie immersa dipende solo dalla superficie e non dalla particolare immersione utilizzata per parametrizzarla.

7.19. PROPOSIZIONE. *Siano Ω aperto in $\mathbb{R}^r$, Δ aperto in $\mathbb{R}^s$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\psi : \Delta \to \mathbb{R}^n$ due diffeomorfismi di classe C^1. Se $\varphi(\Omega) = \psi(\Delta)$ allora esiste un diffeomorfismo $h : \Delta \to \Omega$ di classe C^1 tale che $\psi = \varphi \circ h$. In particolare $r = s$.*

Un caso tipico di diffeomorfismo, e per un certo aspetto l'unico (si veda il Teorema 7.21), è quello dei grafici di funzioni di classe C^1.

7.20. PROPOSIZIONE. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una mappa di classe C^1. Allora la mappa $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ data da $\varphi(x) := (x, f(x))$ è un diffeomorfismo di Ω sul* grafico di f

$$G_f := \Big\{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}^m \,|\, y = f(x)\Big\}.$$

In particolare, con le notazioni della Proposizione 7.20, $\mathrm{Tan}_{(x_0, f(x_0))} G_f = \mathrm{Im}\,\mathbf{A}$ dove $\mathbf{A}$ è la matrice $(n+m) \times n$ data da

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{|c|} \hline \\ \mathrm{Id} \\ \\ \hline \\ \mathbf{D}f(x_0) \\ \hline \end{array}\right)$$

Abbiamo già osservato, cfr. Proposizione 7.17, che, se f è un diffeomorfismo locale, allora $r \leq n$ e $\mathbf{D}f(x)$ ha rango massimo. Il seguente teorema dà una condizione necessaria e sufficiente affinché una mappa sia *localmente* un diffeomorfismo.

7.21. TEOREMA (*di invertibilità locale*). *Sia* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *una funzione di classe* C^1 *definita su un aperto* $\Omega \subset \mathbb{R}^r$, $r < n$. *Se* $\mathbf{D}\varphi(u_0)$ *ha rango massimo allora esiste un intorno* U *di* u_0 *in* $\mathbb{R}^r$ *tale che* $\varphi_{|U}$ *è un diffeomorfismo e* $\varphi(U)$ *è un grafico rispetto ad un* r*-piano coordinato di* $\mathbb{R}^n$.

Sottovarietà

L'immagine di un diffeomorfismo $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω aperto di $\mathbb{R}^k$, $k < n$, realizza solo in parte l'idea intuitiva di "superficie" perché molti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che vorremmo fossere superfici di dimensione k non sono parametrizzabili su un aperto di $\mathbb{R}^k$ mediante un diffeomorfismo. Ad esempio, vorremmo una definizione che comprendesse tra le superfici di dimensione 1 il cerchio $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ che non è omeomorfo al alcun intervallo della retta.

7.22. DEFINIZIONE. Sia $S \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che

(1) S è localmente *un grafico* C^1 *r-dimensionale* se per ogni $x \in S$ esiste un aperto $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\Omega_x \cap S$ è un grafico C^1 rispetto ad un r-piano coordinato,
(2) S è una *r-sottovarietà* C^1 di $\mathbb{R}^n$ se per ogni $x \in S$ esiste un aperto $\Omega_x \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\Omega_x \cap S$ è diffeomorfo ad un aperto $U \subset \mathbb{R}^r$. r è la *dimensione* della sottovarietà S.

Segue immediatamente dalla Proposizione 7.20 e dal Teorema 7.21, cfr. la Proposizione 7.17

7.23. TEOREMA. $S \subset \mathbb{R}^n$ *è una r-sottovarietà* C^1 *se e solo se* S *è localmente un grafico* C^1 *r-dimensionale.*

Ovviamente una r-sottovarietà M ha in ogni punto x uno spazio tangente $\mathrm{Tan}_x M$. Lo si può calcolare scegliendo un'arbitraria parametrizzazione regolare di un intorno di x, $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ e calcolando

$$\mathrm{Tan}_x M = \mathrm{Im}\,\mathbf{D}\varphi(u), \qquad \varphi(u) = x.$$

Superfici immerse

Una generalizzazione differente dell'immagine di un diffeomorfismo è la seguente.

7.24. DEFINIZIONE. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ aperto e sia $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1. Si dice che φ è una *immersione* se φ è iniettiva e per ogni $u \in \Omega$ esiste $\delta > 0$ tale che la restrizione di φ a $B(u,\delta)$ è un diffeomorfismo. L'immagine $\varphi(\Omega)$ di una immersione φ si chiama una *r-superficie immersa*[6] di $\mathbb{R}^n$. Il numero r è la *dimensione* della r-superficie immersa $\varphi(\Omega)$.

Questa volta la generalizzazione della nozione di diffeomorfismo è fatta operando una localizzazione nello spazio dei parametri.

È facile convincersi che esistono 1-superfici immerse che non sono, neppure localmente, il grafico di una mappa C^1 e quindi non sono 1-sottovarietà C^1 del piano. Viceversa, il cerchio $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, che è una 1-sottovarietà C^1 del piano non è una 1-superfice immersa non essendo parametrizzabile con una mappa C^1 definita su un intervallo *aperto*. Tuttavia,

[6] Immersed-submanifold in inglese.

(1) *Se $S \subset \mathbb{R}^n$ è una r-sottovarietà C^1, S è localmente una r-superficie immersa essendo S localmente diffeomorfa ad un* aperto *di* $\mathbb{R}^r$.
(2) Un'immersione $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ pur essendo iniettiva, non sempre è un diffeomorfismo sull'immagine. Di più, non è in generale possibile estendere la mappa inversa $\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \Omega$ di una immersione ad una funzione $h : W \to U$ di classe C^1 definita su un aperto W che contenga $\varphi(\Omega)$. Non è neanche detto che φ^{-1} si possa estendere ad una funzione continua, neanche in intorni arbitrariamente piccoli di punti dell'immagine $\varphi(\Omega)$.
(3) Sia $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una immersione. L'ostruzione a che $\varphi(\Omega)$ sia una sottovaretà è topologica. Infatti, se $\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \Omega$ fosse continua, allora $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$ sarebbe un diffeomorfismo.

Il teorema delle funzioni implicite

Sia data l'equazione lineare implicita in $\mathbb{R}^2$

$$ax + by = 0.$$

Se $b \neq 0$, si può ricavare la variabile y in funzione della x come $y = (-a/b)x$. Equivalentemente possiamo dire che *le soluzioni (x, y) dell'equazione implicita $ax + by = 0$ sono il grafico della funzione di una variabile $y = -(a/b)x$.*

Se si passa a equazioni non lineari, ad esempio $\phi(x, y) = 0$ dove

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 - 1,$$

la situazione è più complicata. Ad esempio l'insieme delle soluzioni di $x^2 + y^2 - 1 = 0$ è il cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$: globalmente non è un grafico, tuttavia a pezzi è il grafico di opportune funzioni o della variabile indipendente x o della variabile indipendente y definite su intervalli.

Un teorema dovuto a Ulisse Dini assicura questo tipo di comportamento per una generica equazione non lineare in n variabili sulla base di una informazione qualitativa sull'equazione. Sia data una equazione non lineare

$$\phi(x) = 0, \qquad x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

con $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 ed una sua soluzione x_0. Se $\mathbf{D}\phi(x_0) \neq 0$, allora le soluzioni dell'equazione $\phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0$ vicino a x_0 sono i punti del grafico di una funzione di classe C^1 di $(n-1)$ variabili definita su un aperto di $\mathbb{R}^{n-1}$. Ne segue che l'insieme delle soluzioni, i.e., la *linea di livello* nulla di ϕ,

$$\Gamma := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \phi(x) = 0 \right\}$$

è, vicino a x_0, una sottovarietà di dimensione $(n-1)$. Inoltre, lo spazio tangente in x_0 a Γ è dato da

$$\mathrm{Tan}_{x_0}\Gamma = \ker \mathbf{D}\phi(x_0) = \nabla\phi(x_0)^\perp.$$

Il teorema del Dini si estende anche a sistemi di equazioni implicite

$$\begin{cases} \phi^1(x^1, \dots, x^n) = 0, \\ \dots \\ \phi^m(x^1, \dots, x^n) = 0 \end{cases} \tag{7.14}$$

ed è noto come *teorema delle funzioni implicite*. Ancora una volta il caso *lineare* è illuminante. Supponiamo di avere una matrice $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ con $m < n$ di rango massimo. Riordinando le variabili, supponiamo che

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{A}} & \boxed{\mathbf{B}} \end{pmatrix}$$

con $\mathbf{A} \in M_{m,n-m}(\mathbb{R})$ e $\mathbf{B} \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ con $\det \mathbf{B} \neq 0$. Indicando con $z = (x, y)$, $x \in \mathbb{R}^{n-m}$, $y \in \mathbb{R}^m$, le coordinate in $\mathbb{R}^n$, il sistema $\mathbf{C}z = 0$ si riscrive come

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{A}} & \boxed{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}y = 0.$$

Essendo $\det \mathbf{B} \neq 0$, si ricavano dall'ultima equazione le m variabili y in funzione delle $n-m$ variabili x,

$$y = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}x.$$

Abbiamo provato che, *se* $\mathbf{C}$ *ha rango massimo* m*, le soluzioni di* $\mathbf{C}z = 0$ *sono il grafico della funzione (in questo caso lineare) delle* $n-m$ *variabili* x *data da* $y = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}x$.

Il teorema delle funzioni implicite estende la precedente affermazione al caso di un sistema di equazioni non lineari.

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m < n$, $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ di classe C^k, $k \geq 1$. Consideriamo il sistema (7.14), o con notazione più compatta

$$\phi(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0. \tag{7.15}$$

Come nel caso lineare dividiamo le variabili in due gruppi $x = (x^1, \dots, x^r) \in \mathbb{R}^r$ e $y = (x^{r+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^m$, $r + m = n$. Indichiamo con

$$\mathbf{D}_x\phi(x,y) \in M_{m,r}(\mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{D}_y\phi(x,y) \in M_{m,m}(\mathbb{R})$$

rispettivamente le matrici $m \times r$ delle prime r colonne e $m \times m$ delle ultime m colonne di $\mathbf{D}\phi$ in (x,y),

$$\mathbf{D}\phi = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{D}_x\phi} & \boxed{\mathbf{D}_y\phi} \end{pmatrix}.$$

7.25. TEOREMA (*delle funzioni implicite*). *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto,* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una applicazione di classe* $C^k(\Omega)$, $k \geq 1$, *e sia* $n > m$. *Se in* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *si ha*

$$\phi(x_0, y_0) = 0, \qquad \det \mathbf{D}_y\phi(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora esistono un intorno aperto W *di* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m$, *un intorno aperto* U *di* x_0 *in* $\mathbb{R}^r$ *e una funzione* $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-m}$ *tali che*

(1) $\phi : W \to \mathbb{R}^m$ *è aperta,*
(2) φ *è di classe* C^1,
(3) *si ha*

$$\begin{cases} (x,y) \in W, \\ \phi(x,y) = 0, \end{cases} \qquad \textit{se e solo se} \qquad \begin{cases} x \in U, \\ y = \varphi(x). \end{cases}$$

7.26. COROLLARIO. *Nelle ipotesi e con le notazioni del Teorema 7.25 si ha*

(1) $\Gamma \cap W$ *è il grafico della funzione* $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n-m}$,

$$\Gamma \cap W = \Big\{(x,y) \in W \,\Big|\, \phi(x,y) = 0\Big\} = \Big\{(x,y) \,\Big|\, x \in U,\ y = \varphi(x)\Big\},$$

(2) $\phi(x, \varphi(x)) = 0\ \forall x \in U$, *e differenziando*

$$\mathbf{D}\varphi(x) = -\Big(\mathbf{D}_x\phi(x,\varphi(x))\Big)^{-1}\mathbf{D}_y\phi(x,\varphi(x)) \qquad \forall x \in U, \tag{7.16}$$

(3) *il pezzo di linea di livello* $\Gamma \cap W$ *è diffeomorfo ad* U, *in particolare* $\Gamma \cap W$ *è una* $(n-m)$*-sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$ *con*

$$\mathrm{Tan}_z\Gamma = \ker \mathbf{D}\phi(z) \qquad \forall z \in \Gamma \cap W \tag{7.17}$$

o, equivalentemente,

$$\mathrm{Tan}_z\Gamma^\perp = \mathrm{Span}\Big\{\nabla\phi^1(z), \dots, \nabla\phi^m(z)\Big\} \qquad \forall z \in \Gamma \cap W. \tag{7.18}$$

7.27. TEOREMA (*delle funzioni implicite, II*). *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aperto,* $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una funzione di classe* C^1 *e*

$$\Gamma = \Big\{x \in \Omega \,\Big|\, \phi(x) = 0\Big\}.$$

Se la matrice jacobiana $\mathbf{D}\phi(x)$ *ha rango* n *in ogni punto* $x \in \Gamma$, *allora* Γ *è una* $(n-m)$*-sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathrm{Tan}_x\Gamma = \ker \mathbf{D}\phi(x)\ \forall x \in \Gamma$.

7.1.3. *Condizioni di ottimalità*

In questa sezione finale illustriamo delle condizioni necessarie e sufficienti perché un punto sia di minimo (massimo) per una funzione.

Punti critici

La seguente semplice osservazione viene spesso chiamata *teorema di Fermat*: se x_0 è un punto interno ad A di minimo relativo per f in A e se f ha derivata direzionale nella direzione v in x_0, allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = 0$. In particolare

7.28. PROPOSIZIONE. *Condizione necessaria affinché un punto* x_0 *interno ad* A *sia un estremo, cioè un punto di minimo o di massimo, per una funzione* $f \in C^1(A)$ *è che*

$$\mathbf{D}f(x_0) = 0 \qquad \textit{equivalentemente} \qquad \nabla f(x_0) = 0. \tag{7.19}$$

I punti $x \in A$ per cui $\nabla f(x) = 0$ si chiamano *punti critici* di f in A.

Mentre tutti i punti estremi *interni* di una funzione differenziabile sono punti critici, non tutti i punti critici sono punti estremi, come del resto in una variabile. Per un esempio in due variabili si consideri la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, per la quale $(0,0)$ è un punto critico che non è né di massimo né di minimo: in questo caso è un *punto di sella*.

Supponiamo ora che $f \in C^2(A)$, A aperto in $\mathbb{R}^n$, e che $x_0 \in A$ sia un punto critico di f. La formula di Taylor centrata in x_0 diventa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2}\mathbf{H}f(x_0)h \cdot h + o(|h|^2) \qquad \text{per } |h| \to 0. \tag{7.20}$$

dove $\mathbf{H}f(x) = [D_{ij}f(x_0)]$ denota la matrice hessiana di f in x_0. Dalla (7.20) segue

7.29. PROPOSIZIONE. *Sia $f \in C^2(A)$, A aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in A$ un punto critico di f. Allora*

(1) $\mathbf{H}f(x_0)\xi \cdot \xi \geq 0\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ *è una condizione necessaria perché x_0 sia un punto di minimo locale,*
(2) $\mathbf{H}f(x_0)\xi \cdot \xi > 0\ \forall \xi \neq 0$ *è una condizione sufficiente perché x_0 sia un punto di minimo locale.*

Ricordiamo che la positività di una forma quadratica, $\phi(h) = \mathbf{A}h \cdot h$ relativa ad una matrice $\mathbf{A} \in M_{n,n}$ *simmetrica*, si trova calcolando la *segnatura* della forma quadratica $(h,k) \to \mathbf{A}h \cdot k$, vale a dire riscrivendo ϕ come una somma di quadrati

$$\mathbf{A}h \cdot h = \sum_{i=1}^{n} m_i w_i^2$$

con un cambiamento lineare di coordinate, $h = \mathbf{R}w$, o, equivalentemente, decomponendo $\mathbf{A}$ come $\mathbf{A} = \mathbf{R}\Lambda\mathbf{R}^T$, con $\mathbf{R} \in M_{n,n}$ e

$$\Lambda = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}$$

diagonale. La *segnatura* di $\mathbf{A}$ è il numero di elementi positivi, negativi e nulli sulla diagonale di Λ che si dimostra essere indipendente dal cambiamento di variabile utilizzato.

Possiamo quindi rienunciare la Proposizione 7.29 come

7.30. PROPOSIZIONE. *Sia $f \in C^2(A)$, A aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in A$ un punto critico di f. Se $\mathbf{H}f(x_0)$ denota la matrice hessiana di f in x_0, allora*

(1) *condizione necessaria perché x_0 sia un punto di minimo locale è che tutti gli autovalori di $\mathbf{H}f(x_0)$ siano non negativi,*
(2) *condizione sufficiente perché x_0 sia un punto di minimo locale è che tutti gli autovalori di $\mathbf{H}f(x_0)$ siano positivi.*

Osserviamo che in $\mathbb{R}^2$ una forma quadratica $\mathbf{A}h \cdot h$ è positiva se e solo se $\operatorname{tr}\mathbf{A} > 0$ e $\det\mathbf{A} > 0$.

Punti critici vincolati

Discutiamo ora alcune condizioni necessarie per i massimi e minimi di funzioni differenziabili in presenza di vincoli sulle variabili indipendenti.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. $x_0 \in S$ si dice di *massimo* (risp. *minimo*) *relativo per f vincolato a S* se esiste un intorno aperto W di x_0 in $\mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ (risp. $f(x_0) \leq f(x)$) per ogni $x \in S \cap W$.

Enunceremo qui alcuni teoremi relativi al caso dei punti di massimo e minimi *vincolati su vincoli "bilaterali lisci"*, cioè, vincoli che siano *sottovarietà*.

7.31. DEFINIZIONE. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1, e Γ una sottovarietà di dimensione r. Un punto $x_0 \in \Gamma$ si dice un *punto critico per f vincolato a Γ* se

$$\nabla f(x_0) \perp \operatorname{Tan}_{x_0}\Gamma. \tag{7.21}$$

In altre parole x_0 è critico per f su Γ se le derivate nelle direzioni tangenziali a Γ in x_0 sono nulle,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \mathbf{D}f(x_0)(v) = \nabla f(x_0)\cdot v = 0 \qquad \forall v \in \mathrm{Tan}_{x_0}\Gamma.$$

7.32. PROPOSIZIONE. *Sia $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una parametrizzazione iniettiva di rango massimo di Γ in un intorno di $x_0 = \varphi(u_0) \in \Gamma$. Allora $x_0 \in \Gamma$ è un punto critico per f vincolato a Γ se e solo se*

$$\mathbf{D}(f\circ\varphi)(u_0) = 0.$$

In particolare, se x_0 è di massimo o minimo relativo per f vincolato a Γ, allora x_0 è un punto critico per f vincolato a Γ.

7.33. TEOREMA (*dei moltiplicatori di Lagrange*). *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^m$ di classe C^1, $m < n$. Siano $\Gamma := \{x \in \Omega \,|\, \phi(x) = 0\}$ e $x_0 \in \Gamma$ tale che $\mathrm{Rank}\,\mathbf{D}\phi(x_0) = m$. Sia poi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Sono fatti equivalenti:*

(1) *x_0 è un punto critico per f vincolato a Γ.*
(2) *Esistono costanti $\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0$ tali che*

$$\mathbf{D}f(x_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \mathbf{D}\phi^i(x_0). \tag{7.22}$$

(3) *Esiste $\lambda^0 \in \mathbb{R}^m$ tale che (x_0, λ^0) è un punto critico libero per la funzione $F : \Omega \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$*

$$F(x,\lambda) := f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \phi^i(x).$$

I numeri $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ si chiamano *moltiplicatori di Lagrange*.

Il teorema di Kuhn-Tucker

Date $f, \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni differenziabili, daremo delle condizioni necessarie e delle condizioni sufficienti per la risolubilità del problema di *massimo*

$$f(x) \to \max \qquad \text{in} \qquad E := \Big\{x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \varphi^j(x) \le 0,\ j = 1, \dots, n\Big\}. \tag{7.23}$$

Se x^0 è un punto di massimo di f in E e se $\varphi^j(x^0) < 0\ \forall j$, allora x^0 è un massimo interno ad E e quindi per il teorema di Fermat, $\mathbf{D}f(x^0) = 0$. Se $\varphi^j(x^0) = 0$ e la matrice jacobiana $\mathbf{D}\varphi(x^0)$ ha rango massimo, allora x^0 è anche un massimo per f vincolato a $\partial E := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \varphi(x) = 0\}$ e ∂E è nell'intorno di x^0 una sottovarietà regolare. Perciò

$$\mathbf{D}f(x^0)(v) = 0 \qquad \forall v \in \mathrm{Tan}_{x^0}\partial E, \quad \text{cioè} \quad \nabla f(x^0) \perp \mathrm{Tan}_{x^0}\partial E.$$

Segue dal teorema dei moltiplicatori di Lagrange che esistono per ogni $j = 1, \dots, n$ numeri λ_j^0 tali che

$$\mathbf{D}f(x^0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^0 \mathbf{D}\varphi^j(x^0).$$

Nel caso generale, può darsi che $\varphi^j(x^0) = 0$ per qualche j e $\varphi^j(x^0) < 0$ per altri. Per $x \in E$, indichiamo con $J(x)$ l'insieme degli indici j tali che $\varphi^j(x) = 0$ e diciamo che il vincolo φ^j è *attivo* in x se $j \in J(x)$.

7.34. DEFINIZIONE. Un vettore $h \in \mathbb{R}^n$ si dice una *direzione ammissibile* per E in $x \in E$ se esiste una successione $\{x^k\} \subset E$ tale che

$$x_k \neq x \ \forall k, \ x_k \to x \text{ per } k \to \infty \qquad \text{e} \qquad \frac{x_k - x}{|x_k - x|} \to \frac{h}{|h|}.$$

Indichiamo con $\Gamma(x)$ l'insieme delle direzioni ammissibili per E in x. Si verifica facilmente che $\Gamma(x)$ è un cono chiuso (non vuoto se E è non vuoto), non necessariamente convesso, che contiene le direzioni h per cui esiste una curva regolare $r(t)$ a valori in E con $r(0) = x$ e $r'(0) = h$. Indichiamo poi con $\widetilde{\Gamma}(x)$ il cono con vertice in 0, questa volta convesso, delle direzioni che "puntano verso l'interno di E"

$$\widetilde{\Gamma}(x) := \Big\{ h \in \mathbb{R}^n \ \Big| \ \nabla\varphi^j(x) \cdot h \leq 0 \ \forall j \in J(x) \Big\}.$$

È facile verificare che $\Gamma(x) \subset \widetilde{\Gamma}(x)$.

7.35. DEFINIZIONE. Si dice che i vincoli sono *qualificati* in $x_0 \in E$ se

$$\Gamma(x_0) = \widetilde{\Gamma}(x_0).$$

Non sempre i vincoli sono qualificati; lasciamo al lettore il compito di verificare la seguente

7.36. PROPOSIZIONE. *Sia $E := \{x \,|\, \varphi^j(x) \leq 0 \ \forall j = 1, \dots, m\}$. Se in $x^0 \in E$ vale una delle condizioni seguenti, allora i vincoli $\{\varphi^j(x)\}$ sono qualificati in x_0:*

(1) *esiste $\overline{h}$ tale che per ogni $j \in J(x_0)$ si ha o $\nabla\varphi^j(x_0) \cdot \overline{h} < 0$ oppure φ^j è affine e $\nabla\varphi^j(x_0) \cdot \overline{h} \leq 0$,*
(2) *esiste $\overline{x}$ tale che $\forall j \in J(x_0)$ o $\varphi^j(\overline{x}) < 0$ e φ^j è convessa oppure $\varphi^j(\overline{x}) \leq 0$ e φ^j è affine,*
(3) *i vettori $\nabla\varphi^j(x_0)$ per $j \in J(x_0)$ sono linearmente indipendenti.*

Possiamo ora eneunciare una condizione necessaria perché x^0 sia una soluzione del problema (7.23).

7.37. TEOREMA (*Kuhn–Tucker*). *Sia x^0 una soluzione di* (7.23). *Se i vincoli sono qualificati in x^0, allora valgono le* condizioni di equilibrio di Kuhn–Tucker*: per ogni $j \in J(x^0)$ esiste $\lambda_j^0 \geq 0$ tale che*

$$\nabla f(x^0) = \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j^0 \nabla\varphi^j(x^0). \tag{7.24}$$

Il Teorema 7.37 è una semplice applicazione del seguente

7.38. LEMMA (*Farkas*). *Siano v e $v_1, v_2, \dots, v_p$ vettori di $\mathbb{R}^n$. Esistono $\lambda_j \geq 0$ tali che*

$$v = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j v_j$$

se e solo se

$$\Big\{ h \in \mathbb{R}^n \ \Big| \ h \cdot v_j \leq 0, \ \forall j = 1, \dots, p \Big\} \subset \Big\{ h \in \mathbb{R}^n \ \Big| \ h \cdot v \leq 0 \Big\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Infatti, sia $\mathbf{A}$ la matrice $\mathbf{A} := [v_1|v_2|\dots|v_n]$. L'equazione $\mathbf{A}\lambda = v$ ha una soluzione $\lambda \geq 0$ se e solo se $\forall h \geq 0$ con $h \cdot v \leq 0$ si ha

$$\mathbf{A}^T h \leq 0,$$

cioè, $h \cdot v_j \leq 0 \; \forall j$ (abbiamo indicato con $\mathbf{A}^T$ la matrice trasposta di $\mathbf{A}$). □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 7.37. Per ogni $h \in \Gamma(x^0)$, sia $r : [0,1] \to E$ una curva con $r(0) = x^0$ e $r'(0) = h$. Poiché 0 è di massimo per $f(r(t))$, deve essere $\frac{d}{dt} f(r(t))_{|_{t=0}} \leq 0$, cioè

$$\mathbf{D}f(x^0) \cdot h \leq 0 \qquad \forall h \in \Gamma(x^0),$$

quindi $\widetilde{\Gamma}(x^0) \subset \left\{h \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, h \cdot v \leq 0\right\}$. Il Lemma 7.38 con $v := \nabla f(x^0)$ e $v_j = \nabla \varphi^j(x^0)$ prova allora la tesi. □

7.39. ESEMPIO. Sia $\mathscr{P}$ il problema di massimizzare x_1 con i vincoli $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $(1-x_1)^3 - x_2 \geq 0$. L'unica soluzione è $x^0 = (1,0)$. Si vede che i vincoli *non* sono qualificati in x^0 e non vale il teorema di Kuhn–Tucker.

Osserviamo che la condizione (7.24) può riscriversi in analogia con il teorema dei moltiplicatori di Lagrange come

$$\begin{cases} \mathbf{D}f(x^0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 \mathbf{D}\varphi^j(x^0), \\ \lambda_j^0 \geq 0 \qquad \forall j = 1,\dots,m, \\ \lambda_j^0 \varphi^j(x^0) = 0 \; \forall j = 1,\dots,m. \end{cases}$$

Infatti la condizione $\lambda_j^0 \varphi^j(x^0) = 0$ implica $\lambda_j^0 = 0$ se il vincolo corrispondente non è attivo.

Si osservi anche che le condizioni di Kuhn–Tucker sono le condizioni di equilibrio per i punti estremi della *lagrangiana*

$$\mathscr{L}(x,\lambda) := f(x) - \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j \varphi^j(x)$$

sull'insieme $K := \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, \varphi^j(x) \leq 0, \lambda \geq 0\}$.

Quando la funzione da massimizzare è concava e i vincoli sono convessi, la lagrangiana $\mathscr{L}(x,\lambda) := f(x) - \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j^0 \varphi^j(x)$ è concava. Non è quindi sorprendente che le condizioni di equilibrio di Kuhn–Tucker siano anche sufficienti. Si ha

7.40. TEOREMA. *Supponiamo che f sia concava e che le funzioni φ_j, $j = 1,\dots,m$ siano convesse. Sia $x^0 \in E$ un punto in cui i vincoli sono qualificati. Allora x^0 è un massimo vincolato per f se e solo se per ogni $j \in J(x^0)$ esiste $\lambda_j^0 \geq 0$ tale che*

$$\mathbf{D}f(x^0) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^0 \mathbf{D}\varphi^j(x^0). \tag{7.25}$$

DIMOSTRAZIONE. Se x^0 è un massimo per f, allora vale la (7.25) per il Teorema 7.37. Viceversa, dalla concavità di f e dalla (7.25) segue per ogni $x \in E$

$$f(x) \leq f(x^0) + \mathbf{D}f(x^0)(x - x^0) = f(x^0) + \sum_{j \in J(x^0)} \lambda_j^0 \mathbf{D}\varphi^j(x^0)(x - x^0).$$

Dalla convessità delle φ^j e dal fatto che $\varphi^j(x^0) = 0$ per $j \in J(x^0)$ segue

$$\varphi^j(x) \geq \mathbf{D}\varphi^j(x^0)(x - x^0), \qquad j \in J(x^0).$$

Essendo $\lambda_j^0 \geq 0$ e $\varphi^j(x) \leq 0$ per $x \in E$, troviamo infine

$$f(x) \leq f(x^0) + \sum_{j\in J(x^0)} \lambda_j^0 \varphi^j(x^0) \leq f(x^0).$$

$\square$

Osserviamo infine che nel caso del problema primale della programmazione lineare in cui si minimizza una funzione lineare in un insieme poliedrale.

$$\begin{cases} c \cdot x \to \min, \\ \mathbf{A}x \leq b,\ x \geq 0, \end{cases}$$

essendo il vincolo qualificato in ogni punto, il problema primale ha minimo $x \geq 0$ se e solo se valgono le condizioni di Kuhn–Tucker, cioè esiste $\lambda \geq 0$ tale che

$$(c - \mathbf{A}^T\lambda)x = 0.$$

Programmazione lineare

Particolarmente interessante ed utile è il caso in cui le funzioni $f, \varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ del paragrafo precedente siano funzioni lineari. Cominciamo con due esempi classici.

7.41. ESEMPIO (*Il problema del trasporto*). Supponiamo che un prodotto (ad esempio petrolio) sia prodotto in un ammontare s_i in luoghi $i = 1,2,\dots,n$ (Arabia, Venezuela, Alaska,...) e sia richiesto sul mercato j, $j = 1,2,\dots,m$ (New York, Tokyo,...) in una quantità d_j. Se c_{ij} è il costo del trasporto da i a j, si vorrà minimizzare il costo del trasporto da i a j rispetto ai vincoli del problema. Se $\{x_{ij}\}$ è la quantità di merce da trasportare da i a j, il modello è allora quello di trovare $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{nm}$ tale che

$$\begin{cases} \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij} \to \min, \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = d_j,\ \forall j, \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq s_i\ \forall i, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Qui l'incognita è un vettore a coordinate reali. Per altre merci, ad esempio automobili, l'incognita potrebbe essere un vettore a coordinate intere.

7.42. ESEMPIO (*Massimo guadagno da risorse disponibili*). Avendo a disposizione quantità $s_1,\dots,s_n$ di prodotto base (risorse) si producono prodotti che si vendono al prezzo $p_1, p_2, \dots, p_n$. Se a_{ij} è la quantità di prodotto i, $i = 1,\dots,n$ per produrre j, $j = 1,\dots,n$, il modello è allora

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n p_jx_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq s_i, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Negli esempi precedenti si vuole minimizzare o massimizzare una funzione *obiettivo* lineare su un insieme *ammissibile* determinato da un numero finito di vincoli di eguaglianza o diseguaglianza lineari: questo è il generico problema della *programmazione lineare*. Cambiando eventualmente segno alla funzione obbiettivo e/o ai vincoli di diseguaglianza, osservando che ogni vincolo di eguaglianza corrisponde a due vincoli di diseguaglianza, e infine sostituendo una variabile x non necessariamente a coordinate non negative con $x = u - v$, $u, v \geq 0$, ci si riconduce quindi sempre al seguente problema

$$f(x) := c \cdot x \to \min \qquad \text{in} \qquad \mathscr{P} := \left\{ x \,\middle|\, \mathbf{A}x \geq b,\ x \geq 0 \right\} \tag{7.26}$$

dove $c, x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{A} \in M_{m,n}$ $b \in \mathbb{R}^m$.

Possono quindi verificarsi le seguenti situazioni:

(1) $\mathscr{P}$ è vuoto,
(2) $\mathscr{P}$ non è vuoto e la funzione obbiettivo f non è limitata inferiormente in $\mathscr{P}$,
(3) $\mathscr{P}$ non è vuoto e f è limitata inferiormente; in questo caso, f ha un punto di minimo, o, come si dice, *il problema* (7.26) *ha una soluzione ottimale* e il minimo (come si vede facilmente) è raggiunto in uno (o più) punti estremi[7] del convesso $\mathscr{P}$.

Il problema diventa allora quello di discriminare le varie situazioni e quello di trovare i punti estremi ottimali. Nelle applicazioni concrete, dove il numero di vincoli è alto, l'efficienza dell'algoritmo di ottimizzazione è un ulteriore problema. Rinunciando all'efficienza, un metodo potrebbe essere il seguente.

Se si introducono nuove variabili $x' := \mathbf{A}x - b \geq 0$ chiamate *variabili di scarto*, si trasformano i vincoli $\mathbf{A}x \geq b$ in

$$\mathbf{A}' \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = b, \qquad \mathbf{A}' := \left(\boxed{\quad \mathbf{A} \quad} \quad \boxed{\ -\mathrm{Id}\ } \right).$$

Scrivendo $z = (x, x')$ e $F(z) := \sum_{i=1}^n c^i x^i + \sum_{i=1}^m 0 \cdot x'_i$, il problema (7.26) si può riscrivere come

$$F(z) \to \min \qquad \text{in} \qquad \mathscr{F} := \left\{ z \,\middle|\, \mathbf{A}'z = b,\ z \geq 0 \right\}. \tag{7.27}$$

È presto visto che $\mathscr{F}$ è non vuoto se $\mathscr{P}$ è non vuoto e F è limitata inferiormente su $\mathscr{F}$ se e solo se f è limitata inferiormente su $\mathscr{P}$. Dunque F raggiunge il minimo in uno dei punti estremi di $\mathscr{F}$ se e solo se f ha minimo in $\mathscr{P}$. Determinati *tutti* i punti estremi di $\mathscr{F}$ si scelgono per confronto diretto i punti estremi che realizzano il minimo di F.

Il problema (7.26) è spesso chiamato il problema *primale* della programmazione lineare. A partire da esso si definisce il *problema duale* della programmazione lineare

$$g(y) := b \cdot y \to \max \qquad \text{in} \qquad \mathscr{P}^* = \left\{ y \,\middle|\, \mathbf{A}^T y \leq c,\ y \geq 0 \right\}. \tag{7.28}$$

Osserviamo che (7.28) è anche un nuovo problema di minimo

$$h(y) := -b \cdot y \to \min \qquad \text{in} \qquad \mathscr{P}^* = \left\{ y \,\middle|\, -\mathbf{A}^T y \geq -c,\ y \geq 0 \right\} \tag{7.29}$$

il cui duale è proprio (7.26). Perciò

7.43. PROPOSIZIONE. *Il problema duale della programmazione lineare* (7.28) *ha soluzione se e solo se* $\mathscr{P}^* \neq \emptyset$ *e* g *è limitata superiormente.*

[7] Ricordiamo che un punto x_0 di un convesso $K \subset \mathbb{R}^n$ se non esistono $x_1, x_2 \in K$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $0 < \lambda < 1$ e $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$.

Il seguente teorema spiega la relazione tra il problema primale e duale della programmazione lineare.

7.44. TEOREMA (*Condizioni di equilibrio di Kuhn–Tucker*). *Si ha*

(1) $g(y) \le f(x)$ *per ogni* $x \in \mathscr{P}$ *e ogni* $y \in \mathscr{P}^*$,
(2) f *ha un minimo* $\overline{x} \in \mathscr{P}$ *se e solo se* g *ha un massimo* $\overline{y} \in \mathscr{P}^*$, *e in questo caso* $f(\overline{x}) = g(\overline{y})$,
(3) *siano* $x \in \mathscr{P}$ *e* $y \in \mathscr{P}^*$. *Sono fatti equivalenti*
    (a) $(c - \mathbf{A}^T\overline{y}) \cdot \overline{x} = 0$,
    (b) $(\mathbf{A}\overline{x} - b) \cdot \overline{y} = 0$,
    (c) $f(x) = g(y)$,
    (d) x *è un minimo per* f *e* $y \in \mathscr{P}^*$ *è un massimo per* g.

Segue

7.45. COROLLARIO (*teorema di dualità*). *Siano* (7.26) *e* (7.28) *i problemi primale e duale della programmazione lineare. Una ed una sola delle quattro alternative seguenti può capitare:*

(1) *Esistono un minimo* $\overline{x} \in \mathscr{P}$ *per* f, *un massimo* $\overline{y} \in \mathscr{P}^*$ *per* g *e* $f(\overline{x}) = g(\overline{y})$. *Questo caso accade se e solo se* $\mathscr{P}$ *e* $\mathscr{P}^*$ *sono entrambi non vuoti.*
(2) $\mathscr{P} \neq \emptyset$ *e* f *non è limitata inferiormente in* $\mathscr{P}$.
(3) $\mathscr{P}^* \neq \emptyset$ *e* g *non è limitata superiormente in* $\mathscr{P}^*$.
(4) $\mathscr{P}$ *e* $\mathscr{P}^*$ *sono entrambi vuoti.*

Rimandiamo per una dimostrazione diretta di questi risultati ad esempio a [65], ritorneremo nel Capitolo 9 sulla questione.

Ritorniamo invece al problema del trasporto esplicitando il suo problema duale. Supponiamo che del greggio sia estratto in un ammontare s_i in luoghi $i = 1, 2, \dots, n$ e che sia richiesto sui mercati j, $j = 1, 2, \dots, m-1$ in quantità d_j. Sia c_{ij} il costo unitario del trasporto da i a j. Il problema del trasporto ottimo consiste nel determinare le quantità di greggio $\{x_{ij}\}$ da trasportare da i a j in modo da minimizzare il costo del trasporto

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{7.30}$$

pur soddisfacendo le richieste del mercato e le possibilità della produzione

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij} \le s_i \ \forall i, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j \ \forall j, \\ x \ge 0. \end{cases} \tag{7.31}$$

Naturalmente una condizione necessaria per la risolubilità è che la produzione di greggio superi le richieste del mercato,

$$\sum_{j=1}^{m-1} d_j = \sum_{\substack{i=1,n \\ j=1,m-1}} x_{ij} \le \sum_{i=1}^{n} s_i.$$

Passando alla notazione matriciale, se si pone

$$\begin{cases} x := (x_{11}, \dots, x_{1m}, x_{21}, \dots, x_{2m}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nm}) \in \mathbb{R}^{nm}, \\ c := (c_{11}, \dots, c_{1m}, c_{21}, \dots, c_{2m}, \dots, c_{n1}, \dots, c_{nm}) \in \mathbb{R}^{nm}, \\ b := (s_1, s_2, \dots, s_n, d_1, \dots, d_m) \end{cases}$$

e si introduce la matrice $\mathbf{A} \in M_{n+m,nm}(\mathbb{R})$

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u \\ \dots \\ e_1 & e_1 & e_1 & \dots & e_1 \\ e_2 & e_2 & e_2 & \dots & e_2 \\ \dots \\ e_m & e_m & e_m & \dots & e_m \end{pmatrix}$$

dove $u := (1,1,\dots,1) \in \mathbb{R}^m$, $0 = (0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^m$ e e_i è l'i-esimo vettore della base standard di $\mathbb{R}^m$, il problema del trasporto ottimo si riscrive quindi come

$$\begin{cases} c \cdot x \to \min, \\ \mathbf{A}x \leq b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Il problema duale è allora

$$\begin{cases} b \cdot y \to \max, \\ \mathbf{A}^T y \leq c, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

vale a dire, tenendo conto della forma di $\mathbf{A}$ e ponendo

$$y := (u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m),$$

il problema di massimo

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n s_i u_i + \sum_{j=1}^m d_j v_j \to \max, \\ u_i + v_j \leq c_{ij} \ \forall i, j, \\ u \geq 0, \ v \geq 0. \end{cases}$$

Se interpretiamo u_i come il pedaggio alla partenza e v_i il pedaggio in arrivo richiesto dallo spedizioniere, il problema duale può essere visto come quello di ottimizzare il guadagno del trasportatore. Le $\overline{u}_i$ e $\overline{v}_i$ che risolvono il problema duale rappresentano quindi i pedaggi massimi se non si vuole essere fuori dal mercato.

7.2. *Teoria del consumatore*

D'ora in poi supporremo che valgano tutte le ipotesi fatte nel capitolo precedente sulle relazioni di preferenza e le funzioni che le rappresentano. In particolare, supporemo che la relazione di preferenza $\succcurlyeq$ sia rappresentata da una funzione d'utilità strettamente monotona, strettamente quasiconcava e, non solo continua, ma anche differenziabile ed anzi di classe C^2 all'interno del dominio di definizione – si tratta ovviamente di una ipotesi piuttosto forte. Supporremo, come si dice, che il mercato sia *competitivo*, cioè che il consumatore prenda i prezzi come dati indipendentemente dalle proprie decisioni, che i prezzi siano *lineari*, cioè il prezzo unitario p_k di ciascun bene k sia fissato indipendentemente dal livello degli scambi individuali, che i prezzi siano *non negativi*, giustificati dalla *libera disponibilità* dei beni e dall'assunzione che la relazione di preferenza sia *localmente non satura*: per ogni X e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste z tale che $z \succ x$

e $||z-x|| < \varepsilon$; infine, supporremo che il mercato sia *completo*, cioè che ciascun bene possa essere scambiato.

Fissato un livello di ricchezza $r \geq 0$, un sistema di prezzi positivo e, conseguentemente, l'insieme di *budget*

$$B(p,r) := \{x \,|\, p \cdot x \leq r\},$$

come abbiamo visto, il *problema di massimizzare l'utilità*

$$\max_{x \in B(p,r)} u(x)$$

ha un'unica soluzione $x(p,r)$, chiamata *funzione domanda individuale* o *funzione domanda di Marshall*, o *di Walras*, che verifica le proprietà

- *Omogeneità.* $x(p,r) = x(\alpha p, \alpha r)$ per ogni sistema di prezzi positivo e per ogni $\alpha > 0$.
- *Continuità.* $x(p,r)$ è una funzione continua in (p,r).
- *Legge di Walras.* $p \cdot x(p,r) = r$.

E ancora, come si verifica facilmente,

- *WARP*[8]. Date due situazioni prezzi-ricchezza (p,r) e (p',r') vale: se $p \cdot x(p',r') \leq r$ e $x(p',r') \neq x(p,r)$, allora $p' \cdot x(p,r) > r'$.[9]

Cercheremo ora di trarre ulteriori informazioni, richiedendo maggiori proprietà di regolarità alla funzione d'utilità.

7.2.1. *Preferenze regolari*

Diremo che la relazione di preferenza $\succcurlyeq$ è *di classe C^r* se gli *insiemi di indifferenza*

$$I_x := \{y \,|\, y \sim x\}$$

sono sottovarietà di classe C^r di $\mathbb{R}^l_+$. Come abbiamo visto nella Sezione precedente, questo succede se $\succcurlyeq$ è rappresentabile con una funzione d'utilità di classe C^r senza punti critici. Ma in generale una relazione di preferenza è solo *localmente* rappresentabile con una funzione d'utilità senza punti critici. L'ostruzione a questo è topologica, infatti in generale gli I_x non sono connessi; ma, si può dimostrare, si veda [117]: *supponiamo che gli insiemi di indifferenza siano connessi, allora $\succcurlyeq$ è di classe C^r se e solo se è rappresentata una funzione d'utilità di classe C^r senza punti critici.*

Sia allora $\succcurlyeq$ una relazione di preferenza convessa e di classe C^2 rappresentata da una funzione d'utilità u di classe C^2 senza punti critici, sia I_x l'insieme di indifferenza per x e sia T_x lo spazio tangente in x a I_x

$$T_x = \{v \in \mathbb{R}^l \,|\, \nabla u(x) v = 0\}.$$

8 Weak axiom of revelead preferences.

9 Si può dimostrare che WARP è equivalente a:

$$(p'-p) \cdot [x(p',r') - x(p,r)] \leq 0$$

con diseguaglianza stretta se $x(p,r) \neq x(p',r')$. Ma non insistiamo su questo punto.

Allora x è un punto di massimo per u ristretta allo spazio affine $x+T_x$, quindi la matrice hessiana D^2u è semidefinita negativa su T_x; si dimostra, in effetti, che $\succcurlyeq$ *è convessa se e solo se, per ogni x, la forma quadratica* D^2u *è semidefinita negativa su* T_x.

Una delle ipotesi che abbiamo fatto fin dall'inizio (in modo da garantirci l'unicità del massimo della funzione utilità nell'insieme di *budget*) è che la relazione di preferenza sia strettamente convessa. Ma, questo non esclude che la forma hessiana si annulli, cioè che x sia un punto critico *degenere* di u su $x+I_x$. La non degenerazione può essere espressa in termini di *curvatura di Gauss* di I_x. Questa si definisce come segue: si consideri la funzione a valori sulla sfera $(l-1)$-dimensionale

$$g(y) := \frac{Du(y)}{|Du(y)|};$$

per ogni x la mappa $\nabla g(x)$ manda T_x in T_x; il determinante di questa mappa lineare è la curvatura di Gauss c_x di I_x visto come bordo degli $\{y \,|\, y \succcurlyeq y\}$ e si calcola

$$c_x = \det\begin{pmatrix} -Dg(x) & g(x) \\ -g(x)^T & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{|du(x)|^{l+1}} \det\begin{pmatrix} -D^2u(x) & Du(x) \\ -[Du(x)]^T & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha allora: x è un punto critico di u in $x+T_x$ se e solo se $c_x = 0$.

Nel seguito richiederemo alla preferenza $\succcurlyeq$ di essere *differenziabilmente strettamente convessa* , intendendo con questo che sia strettamente convessa e che, in ogni punto, degli insiemi di indifferenza valga $c_x \neq 0$. Si dimostra che: $\succcurlyeq$ *è differenziabilmente strettamente convessa se, per ogni x, la forma quadratica* $D^2u(x)$ *è definita negativa su* T_x. o, equivalentemente, *la cosiddetta* matrice bordata hessiana di *u definita da*

$$\begin{pmatrix} D^2u & Du \\ Du^T & 0 \end{pmatrix}$$

abbia determinante non nullo.

In conclusione, oltre alle ipotesi (H.1), (H.2) e (H.3) del capitolo precedente supporremo, nel seguito di questo capitolo,

(H.4) Per ogni $i \in S$ l'ordine $\succcurlyeq_i$ sia rappresentabile da una funzione u_i di utilità strettamente quasiconcava ed, anzi, concava, due volte differenziabile con continuità nella parte interna di $\mathbb{R}^l_+$, verificante $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} > 0, \forall i,k$ e

$$\det\begin{pmatrix} D^2u_i(x) & Du_i(x) \\ Du_i(x)^T & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \forall x.$$

7.2.2. *Le funzioni domanda e costo*

Sia $U : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ una funzione d'utilità per $\succcurlyeq$ di classe C^2 verificante (H.4), e sia $x(p,r)$ il punto di massimo di U nell'insieme di *budget* $B(p,r)$ corrispondente al sistema di prezzi p e al livello di richezza r. Per semplicità assumeremo d'ora in poi che $x(p,r)$ appartenga a $\mathrm{int}(\mathbb{R}^l_+)$, cioè che abbia componenti strettamente positive. Osserviamo anche che per l'ipotesi di non saturazione locale vale (legge di Walras) $p \cdot x(p,r) = r$. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange segue allora che esiste λ tale che la coppia

(x,λ) è soluzione del sistema di equazioni

$$\begin{cases} DU(x)-\lambda p = 0 \\ p\cdot x - r = 0 \end{cases} \tag{7.32}$$

La matrice Jacobiana in $(x(p,r),p)$ è data da

$$\begin{pmatrix} D^2U & -p \\ p^T & 0 \end{pmatrix},$$

e si verifica facilmente che, sulla base di (H.4), è non singolare: il teorema delle funzioni implicite ci dice allora che *la funzione domanda $x(p,r)$ è una funzone di classe C^2*.

Dalla prima equazione in (7.32) ricaviamo anche

$$\frac{1}{p_j}\frac{\partial U}{\partial x_j} = \lambda$$

sempre che $x_j > 0$ e, come di solito, tutti i prezzi siano positivi. Ancora, se il moltiplicatore di Lagrange è non nullo, possiamo scrivere

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_i}}{\frac{\partial U}{\partial x_j}} = \frac{p_i}{p_j},$$

cioè il rapporto delle *utilità marginali* è uguale al rapporto dei prezzi.

La funzione

$$V(p,r) := U(x(p,r))$$

si chiama la *funzione valore* o la *funzione d'utilità indiretta*; non è difficile mostrare che

- $\frac{\partial V}{\partial r} = \lambda$,
- $V(p,r)$ è omogenea di grado zero,
- $\frac{\partial V}{\partial p_k} \le 0$
- V è quasiconvessa in p, i sottolivelli $\{p \mid V(p,r) \le \bar{V}\}$ sono convessi.

Consideriamo ora il problema della *minimizzazione del costo del consumatore*

$$\min_{\{x \mid U(x)\ge u\}} p\cdot x,$$

cioè cerchiamo il minimo che il consumatore deve spendere al prezzo p per raggiungere il livello di utilità u. Si vede che, se $u \ge U(0)$ e, come al solito, i prezzi sono positivi, la soluzione $h(p,u)$ esiste unica (se le preferenze sono strettamente convesse). $h(p,u)$ si chiama la *domanda compensata* o la *funzione domanda di Hicks*.

La funzione

$$e(p,u) = \min\{p\cdot x \mid U(x)\ge u\} = p\cdot h(p,u)$$

si chiama la *funzione costo*. Si ha

- $\frac{\partial e}{\partial p_i} \ge 0$, $\frac{\partial e}{\partial u} > 0$,
- $e(p,u)$ è omogenea di grado uno in p,
- $e(p,u)$ è concava in p.

Inoltre, si dimostrano varie *relazioni di dualità* (che qui non dimostriamo):

- Marshall-Hicks: $x(p,r) = h(p,V(p,r))$, $h(p,u) = x(p,e(p,u))$,
- Utilità-costo: $V(\cdot,r) = e^{-1}(\cdot,r)$, $e(\cdot,u) = V^{-1}(\cdot,u)$,

- $h(p,u) = \nabla_p e(pu)$,
- $x_i(p,r) = -\frac{\frac{\partial V(p,r)}{\partial p_i}}{\frac{\partial V(p,r)}{\partial r}}$,
- Slutsky: $\frac{\partial x_i(p,r)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,r)}{\partial r} x_j(p,r) = \frac{\partial h_i(p,u)}{\partial p_j}$.

Infine la matrice, chiamata *matrice di sostituzione*,

$$\frac{\partial x_i(p,r)}{\partial p_j} + \frac{\partial x_i(p,r)}{\partial r} x_j(p,r)$$

è simmetrica e semidefinita negativa.

A parte dare opportune interpretazioni economiche delle formule stabilite sopra, ci si può chiedere se vale la pena darsi da fare per trovare queste relazioni. Diamo solo una giustificazione in connessione con la seguente domanda: data una funzione $X(p,r)$, quando questa è la domanda di Marshall associata alla massimizzazione di preferenze insaziabili? Ed ancor prima, perché farsi una tale domanda?

Nella pratica, è spesso utile specificare una tale funzione. Si potrebbe allora scegliere una funzione U, trattabile facilmente, come funzione d'utilità e procedere al calcolo di $x(p,r)$ e quindi al confronto con $X(p,r)$. Ma quest risulta un'operazione complessa. È molto più semplice partire da una approssimazione trattabile dei dati sperimentale $X(p,r)$. Ma allora servirebbe una risposta positiva alla domanda posta, se si vuole prendere come base la teoria sviluppata.

Specifichiamo allora una funzione regolare che sia omogenea di grado zero, obbedisce alla legge di Walras con matrice di Slutsky simmetrica e semidefinita negativa. In questa situazione si dimostra che è possibile 'integrarla' e ottenere una funzione indiretta di utilità, tramite cui è possibile costruire una funzione diretta d'utilità. Ma noi ci fermiamo qui.

7.3. *Teoria dell'equilibrio di Walras*

Ritorniamo all'economia di proprietà privata verificante le ipotesi (H.1), (H.2), (H.3), con risorse totali $\Omega \in \mathbb{R}^l_+$ distribuite tra i diversi consumatori con paniere $\omega^i \in \mathbb{R}^l_+$ all'agente i. Abbiamo visto che, se gli ω^i sono interni a $\mathbb{R}^l_+$, esisterà almeno un sistema di prezzi di equilibrio $p \in \Pi$ e, in corrispondenza, un'allocazione $(x^1,\dots,x^m)$ di equilibrio. Ricordiamo che il punto di equilibrio

$$e := (\omega^1,\dots,\omega^l, p_1,\dots,p_l, x^1,\dots,x^m)$$

in $\left(\operatorname{int}(\mathbb{R}^l_+)\right)^m \times \Pi \times (\mathbb{R}^l_+)^m$ è caratterizzato dalle condizioni

(a) L'allocazione $(x^1,\dots,x^m)$ è realizzabile, cioè $\sum_{k=1}^m x^i = \Omega$.
(b) Per ogni $i \in S$ vale $p \cdot x^i = p \cdot \omega^i$.
(c) Per ogni $i \in S$ e per ogni $y \in B(p \cdot \omega^i)$, cioè $p \cdot y \le p \cdot \omega^i$, si ha $x^i \succcurlyeq_i y$.

Abbiamo anche visto che tutte le allocazioni di equilibrio sono ottimi di Pareto.

D'ora in poi supporremo anche che valga l'ipotesi di regolarità (H.4).

Sia $(x^1,\dots,x^m)$ un ottimo di Pareto e, per evitare problemi di bordo, supponiamo che ciascun x^i sia interno a $\mathbb{R}^l_+$, cioè tutti gli x^i_k sono strettamente positivi. Dalla Proposizione 3.6 sappiamo che esiste una famiglia $(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$ di coefficienti positivi di somma uno tale che $(x^1,\dots,x^m)$ massimizza $\sum_{i=0}^m \alpha_i u_i$, dove la funzione d'utilità u_i dipende solo da x^i ed è regolare; in altre parole, $(x^1,\dots,x^m)$ risolve il problema

(P) Tra tutti gli $(y^1,\dots,y^m)$ con $y^i_k \geq 0$ e $y^1_k+\dots,y^m_k = \Omega_k$, $1\leq i\leq m$ e $1\leq k\leq l$, trovare il massimo di $\alpha_1 u_1(y^1)+\dots+\alpha_m u_m(y^m)$,

o equivalentemente, per via della monotonia delle preferenze, il problema

(P') Tra tutti gli $(y^1,\dots,y^m)$ con $y^i_k \geq 0$ e $\Omega_k - y^1_k-\dots-y^m_k \geq 0$, $1\leq i\leq m$ e $1\leq k\leq l$, trovare il massimo di $\alpha_1 u_1(y^1)+\dots+\alpha_m u_m(y^m)$.

La teoria di Kuhn-Tucker ci garantisce che condizione necessaria e sufficiente perché questo accada è che esistano moltiplicatori di Lagrange $\lambda_i \geq 0$ tali che per tutti gli i e k si abbia

$$\frac{\partial}{\partial x^i_k}[\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i(x^i_1,\dots,x^i_l)+\sum_{k=1}^l \lambda_k(\Omega_k-\sum_{i=1}^m x^i_k)] = 0,$$

equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial u_i}{\partial x^i_k}(x^i) = \lambda_k, \tag{7.33}$$

o, in modo più sintetico, denotando con $\partial u_i(x^i)$ il vettore di componenti $\frac{\partial u_i}{\partial x^i_k}(x^i)$ e con λ il vettore $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in\mathbb{R}^l_+$ e osservando che necessariamente ogni $\alpha_i \neq 0$ per la monotonia delle funzioni d'utilità,

$$\partial u_i(x^i) = \frac{\lambda}{\alpha_i}.$$

Questa formula esprime il fatto che i vettori $\partial u_i(x^i)$ sono tutti colineari allo stesso vettore $\lambda\in\mathbb{R}^l_+$; dalla (7.33) e dall'ipotesi (H.4) vediamo anche che le componenti di λ sono tutte positive. Introducendo quindi

$$p := \frac{\lambda}{\sum\lambda_k} \quad \text{e} \quad \gamma_i := \frac{\Sigma_k}{\alpha_i} > 0$$

possiamo scrivere per ogni i

$$\partial u_i(x^i) = \gamma_i p \tag{7.34}$$

con $p\in\Pi$. A sua volta questa equazione esprime il fatto che, per ogni i, x^i è un punto di massimo, con moltiplicatore di Lagrange γ_i, del problema

(P_i) Massimizzare $u_i(y)$ the le $y\in\mathbb{R}^l_+$, $y_k\geq 0$ e $p\cdot y\leq r^i$, dove $r_i := p\cdot x^i$.

Abbiamo quindi provato che il problema (P) di dimensione ml si deconpone in m problemi (P_i) di dimensione l. Una volta conosciuto p i problemi (P_i) sono indipendenti l'uno dall'altro; in particolare, la condizione $\sum y^i = \Omega$ è scomparsa, ma è realizzata per via della buona scelta di p : è quello che si chiama il ruolo *decentralizzatore* dei prezzi in economia. Basta scrivere che gli x^i sono soluzioni di (P_i):

$$[y\in\mathbb{R}^l_+ \text{ e } p\cdot y\leq r^i] \quad\Rightarrow\quad u_i(x^i)\geq u_i(y),$$

ricordarsi dell'equazione

$$p \cdot x^i = r^i \forall i \in S$$

e osservare che l'allocazione $(x^1, \ldots, x^m)$ deve essere realizzabile, essendo un ottimo di Pareto, $\sum_{i=1}^m x^i = \Omega$, per ritrovare le condizioni (c), (b), (a) sopra che caratterizzano l'equilibrio. Osserviamo che queste si applicano a tutte le ripartizioni iniziali $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$ verificanti

$$p \cdot \omega^i = r^i.$$

Abbiamo quindi ridimostrato il secondo teorema fondamentale dell'economia del benessere.

7.46. PROPOSIZIONE. *Sia $(x^1, \ldots, x^m)$ un ottimo di Pareto con $x_k^i > 0$. Allora esiste un unico vettore $p \in \Pi$ proporzionale a tutti i vettori $\partial u_i(x^i)$, $i \in S$,*

$$\forall i \in S \exists \gamma_i > 0 : u_i(x^i) = \gamma_i p.$$

Per qualunque ripartizione $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$, verificante

$$p \cdot \omega^i = p \cdot x^i \forall i \in S,$$

il punto $e := (\omega^1, \ldots, \omega^m, p_1, \ldots, p_l, x^1, \ldots, x^m)$ è un equilibrio.

In conclusione, ogni ottimo di Pareto interno a $(\mathbb{R}^l_+)^m$ è una allocazione di equilibrio con sistema di prezzi associato dato da (7.34), vale a dire

$$p_j = \frac{\frac{\partial u_i}{\partial x_j^i}(x^i)}{\sum_{k=1}^l \frac{\partial u_i}{\partial x_k^i}(x^i)}. \tag{7.35}$$

Sfortunatamente, queste formule non possono servire per il calcolo effettivo dei prezzi di equilibrio, richiedendo la conoscenza dell'allocazione di equilibrio $(x^1, \ldots, x^m)$, mentre quello che in pratica è noto è solo la ripartizione iniziale $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$. Un'eccezione è costituita dal caso $(x^1, \ldots, x^m) = (\omega^1, \ldots, \omega^m)$, *equilibrio senza transazioni*, per cui si ha

7.47. PROPOSIZIONE. *Sia $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^m)$ un ottimo di Pareto con $\omega_k^i > 0$ per ogni i, k. Definiamo il sistema di prezzi $p \in \Pi$ tramite la (7.35). Allora*

$$e := (\omega^1, \ldots, \omega^m, p_1, \ldots, p, \omega^1, \ldots, \omega^m)$$

è un equilibrio, anzi è l'unico equilibrio compatibile con la ripartizione iniziale ω.

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che e è un equilibrio. Supponiamo ce ne sia un'altro $e' = (\omega^1, \ldots, q, x^1, \ldots, x^m)$ compatibile con $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$. Allora l'allocazione $(x^1, \ldots, x^m)$ è unanimemente preferita a $(\omega^1, \ldots, \omega^m)$ e, essendo quest'ultima un ottimo di Pareto, le due coincidono: $\omega^i = x^i$ per tutti gli i. Dalla caratterizzazione degli equilibri vista sopra deduciamo $\partial u_i(\omega^i) = \lambda_i q_i$ dove λ_i é il moltiplicatore di Lagrange associato al vincolo $q \cdot y = q \cdot \omega^i$. Ne segue che p e q sono due vettori proporzionali entrambi appartenenti a Π, essi sono quindi uguali. □

7.3.1. *Economie regolari*

Come abbiamo visto, in termini differenziali, $(x^1,\dots,x^m)$ è un equilibrio (di Walras) se e solo se per qualche $p \in \Pi$ e $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ il seguente sistema di equazioni $(i = 1,\dots,m)$ è soddisfatto

$$\begin{cases} \partial u_i(x^i) - \lambda_i p &= 0 \\ p \cdot (x^i - \omega^i) &= 0 \\ \sum x^i - \sum \omega^i &= 0 \end{cases} \tag{7.36}$$

In questa formulazione la ricerca dell'equilibrio può essere affrontata in vari modi – si possono usare il primo e l'ultimo sottosistema per determinare x e p in funzione di λ e quindi usare il sistema $p(\lambda)\cdot(x_i(\lambda) - \omega^i)$ per determinare λ –, noi abbiamo scelto essenzialmente di esprimere λ e x come funzioni di p e considerare la *funzione eccesso di domanda aggregata*

$$z(p) := \sum_i (x^i(p) - \omega^i)$$

provando l'esistenza di un sistema di prezzi che l'annulla, cioè di equilibrio.

Come più volte messo in evidenza, è importante capire se e quando c'è un unico equilibrio, se gli equilibri sono finiti, o almeno isolati, se gli equilibri possono essere infiniti e così via. Si possono dare esempi di equilibri che costituiscono un continuo, mentre risposte più precise e raffinate si deducono facendo uso di risultati di *topologia differenziale*. Noi rimandiamo, ad esempio, a [117] e aggiungeremo solo alcune osservazioni sulle cosiddette *economie regolari*.

La matrice jacobiana $Dz(p)$ della domanda aggregata è *singolare* in ogni punto di equilibrio per via della legge di Walras, ma, se differenziamo la legge di Walras abbiamo $pDz(p) + z(p) = 0$, vediamo quindi che Dz manda lo spazio tangente T_p in ogni punto per cui $z(p) = 0$ in sé: se Dz come mappa tra gli spazi tangenti in p è non singolare si dice che il punto p è *regolare*. Si dice che una economia è *regolare* se ogni suo prezzo di equilibrio è regolare. Si dimostra[10]: *le economie regolari hanno punti critici isolati*.

Fissate le preferenze, identifichiamo una economia con la distribuzione iniziale ω e indichiamo la corrispondente domanda aggregata con $z_\omega(p)$. Il teorema delle funzioni implicite ci garantisce che se $\bar{p}$ è un equilibrio regolare per l'economia $\bar{\omega}$ allora localmente p può essere scritto come funzione di ω. Questo ci dice immediatamente che *l'insieme delle economie regolari è un insieme aperto in* $(\mathrm{int}(\mathbb{R}^l_+))^m$. Ci dice anche che l'insieme di equilibrio $E := \{(p,\omega)\,|\,z_\omega(p) = 0\}$ è una sottovarietà di classe C^1 e, ovviamente, ω è un'economia regolare se e solo se è un *valore regolare* (immagine di

[10] L'analogia da tenere presente è la seguente. Un punto critico si dice *non degenere* se, in questo punto, la matrice hessiana è non degenere. Un classico teorema dice allora che: i punti critici non degeneri di una funzione regolare sono isolati.

un punto regolare) della mappa di proiezione $\pi : (p,\omega) \in E \mapsto \omega$. Un famoso teorema, *lemma di Sard*[11], ci permette allora di concludere:

7.48. PROPOSIZIONE. *Il complemento delle economie regolari ha misura di Lebesgue nulla*[12]*; in particolare, le economie regolari sono dense tra tutte le economie.*

[11] Si ha, nella versione che qui interessa,

LEMMA DI SARD. *I valori critici di una mappa C^1 tra due sottovarietà C^1 della stessa dimensione ha misura di Lebesgue nulla nell'immagine.*

[12] Ricordiamo che un sottoinsiene di $\mathbb{R}^n$ ha *misura di Lebesgue nulla* se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile ricoprirlo con una famiglia numerabile di palle aperte di misura totale minore di ε.

CAPITOLO 8

Economia di proprietà privata con produzione: equilibrio competitivo

In questo capitolo[1] vedremo come le nozioni di ottimo di Pareto e di equilibrio si estendono ad una economia con produzione purché si lasci il ruolo dominante ai consumatori, cioè si assuma che il motore dell'economia sia lo scambio. Come abbiamo già notato, questo è in contrasto, ad esempio, con l'economia marxista che attribuisce, invece, un ruolo nettamente prevalente alla produzione.

8.1. *Unità di produzione*

D'ora in poi includeremo quindi nella nostra economia delle *unità di produzione*. Queste (artigiani, agricoltori, imprese, ...) producono qualcosa a partire da qualcosa d'altro e si caratterizzano come delle *scatole nere con entrata e uscita*. Questo approccio ha l'indubbio vantaggio di fornire una formalizzazione semplice (basta vedere cosa entra e cosa esce) che permette una descrizione quantificabile. Ma, questa semplicità lascia notevoli dubbi sostanziali: il lavoro viene trattato come ogni altro bene e il capitale è assente – e sappiamo che il lavoro e il capitale sono due componenti importanti del processo produttivo. Nella semplificazione in termini di scatola nera non ci sono investimenti, espansione o recessione che hanno bisogno della moneta per essere descritti (economia keynesiana) ed ancora, dal punto di vista neoclassico, viene ignorato quello che si chiama il rischio di impresa. Insomma si rinuncia a considerare la produzione come un *processo* che invece viene nascosto all'interno della scatola e, per così dire, si fornisce una foto istantanea della situazione commerciale.

Le *unità di produzione* sono quindi caratterizzate dal loro *insieme di produzione* Y_j contenuto in $\mathbb{R}^l$. I vettori $(y_1^j, \ldots, y_l^j)$ rappresentano i possibili modi di funzionare: le coordinate negative sono le entrate, le coordinate positive le uscite, le coordinate nulle gli altri beni.

Illustriamo graficamente alcuni possibili insiemi di produzione nel caso di due soli beni, si veda la Figura 1. In (a) i punti di Y con coordinate $y_1 < 0$ formano un segmento che va dal punto $(y_1, 0)$ al punto (y_1, y_2^{max}), significando che a partire da una stessa quantità $x_1 = -y_1$ di bene 1 si può produrre quantità diverse di bene 2, da zero fino a

[1] In cui seguiamo molto da vicino [53].

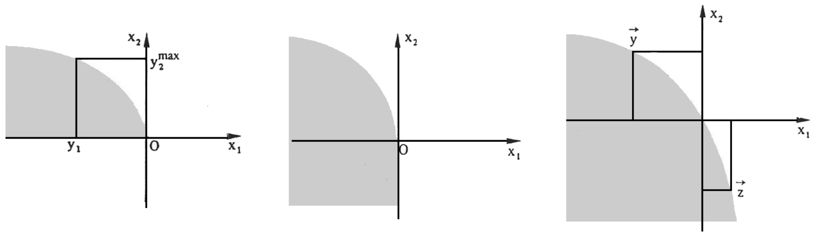

FIGURA 1. Tre tipi di insiemi di produzione.

y_2^{max}. In (b) compaiono punti con coordinate entrambe negative: l'impresa ha la libertà di distruggere quantità di bene senza consumi supplementari o produzioni parassite. In (c) l'impresa ha la possibilità di invertire il processo di produzione: produrre il bene 2 a partire dal bene 1.

Anche se privi di motivazioni economiche, supporemo sempre che gli insiemi di produzione siano chiusi. Ammetteremo che l'impresa possa essere inattiva, cioè che l'origine appartenga all'insieme di produzione, ma l'origine potrà essere l'unico punto comune a Y e al cono positivo $\mathbb{R}_+^l$. Infatti, un punto $y \neq 0$ con coordinate tutte non negative significherebbe produzione dal nulla. Non si escluderà, invece, che si possa produrre 'molto con poco'. Se si desidera escludere questo tipo di comportamento si può richiedere, ad esempio, che l'insieme di produzione sia *convesso*. Questo infatti implica che il rapporto

$$\frac{y_2^{max}}{-y_1} = \frac{\text{quantità prodotta}}{\text{quantità utilizzata}}$$

decresca quando $-y_1$ tende all'infinito. La convessità permette anche di ridurre il processo di produzione ad una scala qualunque (il processo funziona con entrate e uscite ridotte a metà, senza escludere che una entrata ridotta a metà possa assicurare un'uscita ridotta solo di un terzo), di suddividere la produzione e di avere, come già detto, un rendimento massimale decrescente quando le entrate crescono.

Profitto

Sia fissato un sistema di prezzi $(p_1, \ldots, p_l)$, valido per i produttori sia in ingresso che in uscita, e sia $y \in Y$ un vettore di produzione (per semplificare la scrittura supponiamo

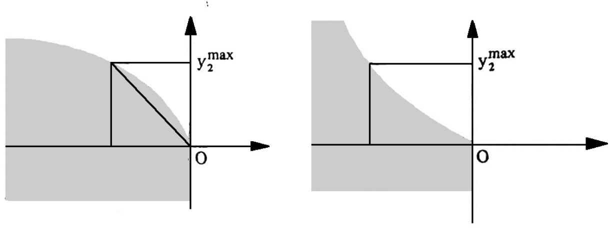

FIGURA 2. Insieme di produzione (a) convesso (b) non convesso.

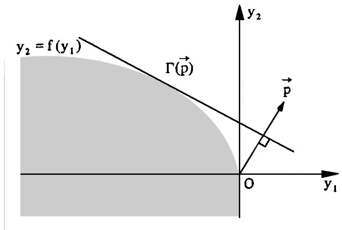

FIGURA 3. Una funzione di produzione per cui $\Gamma(p)$ è costituito da un unico vettore di produzione.

che le prime r coordinate siano positive e le altre negative). Il *costo di produzione* è allora

$$-p_{r+1}y_{r+1} - \ldots - p_l y_l$$

e l'ammontare della produzione

$$p_1 y_1 + \ldots + p_r y_r.$$

Il *profitto* è allora dato da

$$p_1 y_1 + \ldots + p_r y_r + p_{r+1} y_{r+1} + \ldots + p_l y_l =: p \cdot y.$$

Si tratta di una forma lineare sui vettori di produzione, in particolare, se i prezzi raddoppiano e i vettori di produzione restano inalterati, allora il profitto raddoppia. Si noti che il profitto può essere negativo, quindi, in realtà, una perdita.

Nel quadro in cui stiamo operando è naturale cercare i vettori di produzione che assicurano il profitto maggiore. Si tratta ovviamente di una ipotesi (o una scelta) di comportamento e non di una necessità logica[2]. Comunque, in alcune situazioni, massimizzare il profitto è una buona scelta e, in ogni caso, è una scelta semplice.

Offerta del produttore

Dal punto di vista della teoria neoclassica, dato un sistema di prezzi, solo i vettori di produzione $y \in Y$ per i quali $p \cdot y$ è massimo, denotati con $\Gamma(p)$, sono interessanti

$$\Gamma(p) := \{y \in Y \quad | \quad p \cdot y \geq p \cdot z \quad \forall z \in Y\}.$$

La funzione, o meglio la *corrispondenza*, che ad ogni $p \in \mathbb{R}^l$ associa il sottoinsieme $\Gamma(p)$ di Y si chiama la funzione *offerta del produttore*. Ovviamente

$$\Gamma(tp) = \Gamma(p) \quad \forall t > 0.$$

L'ideale sarebbe che l'insieme $\Gamma(p)$ fosse costituito da un solo vettore di produzione, come in Figura 3, ma in generale però si possono presentare due situazioni chiaramente problematiche:

[2] Nella realtà massimizzare il profitto non sempre è la scelta migliore; molti sono i fattori che possono concorrere, di tipo umano, sociale, politico, ed anche strettamente economico; spesso, può addirittura essere difficile definire il profitto di una grande impresa, considerato che una variabile rilevante è il futuro.

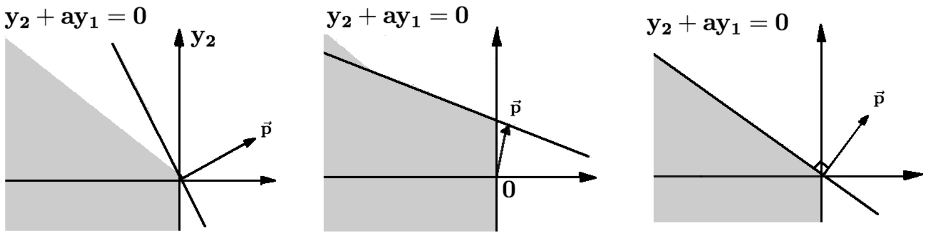

FIGURA 4. Possibili situazione nel caso di una funzione di produzione lineare.

- L'insieme $\Gamma(p)$ è vuoto. Il criterio adottato è troppo stretto, non ci sono vettori di produzione che lo verificano. Ad esempio, per ogni $y \in Y$ c'è un $x \in Y$ tale che $p \cdot x > p \cdot y$.
- L'insieme $\Gamma(p)$ contiene più di un punto. Il modello non rende conto completamente del comportamento del produttore.

La situazione appare chiaramente nel caso di due beni. Se con entrata $y_1 \leq 0$ la produzione a pieno rendimento è descritto dalla *funzione di produzione* $y_2 = f(y_1) \geq 0$ e accordiamo all'impresa la libera disposizione dei beni, abbiamo

$$Y = \{(y_1, y_2) \quad | \quad y_1 \leq 0, \quad y_2 \leq f(y_1)\}.$$

Un caso particolarmente semplice e significativo è quello in cui la funzione di produzione è *lineare*: $f(y_1) = -ay_1$. Vogliamo massimizzare il profitto $p_1y_1 + p_2y_2$ sull'insieme di produzione; chiaramente si tratta di cercare, tra tutte le rette $p_1y_1 + p_2y_2 = c$ che intersecano Y quella per cui c è massimo o, analiticamente,

$$\text{massimizzare} \quad p_1y_1 + p_2y_2 \quad \text{per} \quad y_1 \leq 0 \quad \text{e} \quad y_2 \leq -ay_1.$$

Lasciamo il compito al lettore di verificare, si veda Figura 4, che

$$\Gamma(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p_1/p_2 > a, \\ \emptyset & \text{se } p_1/p_2 < a, \\ \{(y_1, -ay_2 \,|\, y_1 \leq 0\} & \text{se } p_1/p_2 = a. \end{cases}$$

Si dimostra, e la dimostrazione non è difficile, la seguente proposizione.

8.1. PROPOSIZIONE. *Si ha*

- *Supponiamo Y chiuso in $\mathbb{R}^l$ e tale che, se y_n è una successione in Y con $||y_n|| \to +\infty$ e $y_n/||y_n|| \to z$, allora z appartiene a $-\mathbb{R}^l_+$. Allora, per ogni sistema di prezzi strettamente positivi, il profitto realizza il suo massimo in almeno un punto di Y.*
- *Supponiamo Y strettamente convesso. Allora, qualunque sia il sistema di prezzi, il profitto realizzerà il suo massimo in al più un punto di Y.*

Nell'economia che vogliamo discutere supporremo che ci siano p produttori $Y_1, \ldots,$ Y_p; $y^i = (y^i_1, \ldots, y^i_l) \in Y_i$ esprime il fatto che y^i è realizzabile nell'unità di produzione Y_i. Chiameremo *insieme di produzione globale* Y_S la somma degli insiemi di produzione individuale

$$Y_S = Y_1 + \ldots + Y_p = \{y^1 + \ldots + y^p \quad | \quad y^k \in Y_k, k = 1, \ldots, p\}.$$

Supporremo infine che nell'economia globale ci sia *libera disponibilità dei beni*, cioè

$$Y_S \supset -\mathbb{R}^l_+.$$

Ciò significa che l'economia nel suo insieme può distruggere liberamentequalsiasi quantità di beni. Si tratta di un'ipotesi molto forte perché permette di distruggere immediatamente beni non desiderabili (come ad esempio emissioni nocive, rifiuti, ...) e ci riporta alla situazione in cui tutti i beni sono desiderabili; in qualche modo sostituisce l'ipotesi di monotonia delle preferenze che abbiamo fatto discutendo un'economia di puro scambio. In particolare, non c'è ragione di avere prezzi negativi e possiamo assumere, come nei capitoli precedenti, che tutti i prezzi siano non negativi.

8.2. *Gli ottimi di Pareto*

Vogliamo ora ripercorrere il cammino già fatto nel caso dell'economia di solo scambio, aggiungendo la produzione. Inizialmente supporremo quindi che la società sia composta da p unità di produzione che forniscono una capacità aggregata di produzione Y_S e da m consumatori, ciascuno caratterizzato da una funzione d'utilità u_i dipendente solo dal paniere x^i dell'i-simo agente, più precisamente

(J.1) La funzione d'utilità u_i è quasiconcava, continua e dipende solo da x^i.

Non supporremo per il momento che la nostra economia sia di proprietà privata: le risorse iniziali $\Omega \in \mathbb{R}^l_+$ sono, per il momento, attribuite alla società.

Diremo che una allocazione $(x^1, \dots, x^m)$ è *realizzabile* se è possibile produrre il paniere di beni $x^1 + \dots + x^m$ a partire dalle risorse iniziali Ω e delle capacità produttive Y_S, cioè

$$x^1 + \dots + x^m - \Omega \in Y_S.$$

Quello che l'equazione esprime, infatti, è che le risorse iniziali sono state impiegate a produrre e i frutti sono stati ripartiti tra i consumatori. Si osservi che, se non c'è produzione (equivalentemente se sostituiamo Y_S con 0), siamo esattamente nella situazione dei capitoli precedenti. Conseguentemente, l'*insieme delle allocazioni realizzabili* è dato da

$$\mathscr{R} := \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{lm} \quad | \quad \sum_{k=1}^m x^i \in \Omega + Y_S\}.$$

Osserviamo che $\mathscr{R}$ è convesso se Y_S lo è.

Riprendendo la Definizione 3.4 del Capitolo 3 poniamo:

8.2. DEFINIZIONE. Diciamo che una allocazione X è un *massimo (ottimo) debole di Pareto* se verifica la proprietà

(P') $$\nexists (y^1, \dots, y^m) \in \mathscr{R} \quad \text{tale che} \quad u_i(y^i) > u_i(x^i) \quad \forall i;$$

diciamo che è un *massimo (ottimo) stretto di Pareto* se verifica la proprietà

(P) $$\nexists (y^1, \dots, y^m) \in \mathscr{R} : u_i(y^i) \geq u_i(x^i) \quad \forall i \quad \text{e} \quad u_j(y^j) > u_j(x^j) \quad \text{per qualche } j.$$

Esistono ottimi di Pareto? Si vede facilmente che la Proposizione 3.5 e la Proposizione 3.6 del Capitolo 3 restano valide in questo nuovo contesto sempre che il nuovo insieme $\mathscr{R}$ sia compatto. La compattezza di $\mathscr{R}$ è garantita dal seguente assioma

(J.2) L'insieme di produzione globale Y_S è chiuso, convesso e contiene l'origine ma nessun altro punto di $\mathbb{R}^l_+$, $Y_S \cap \mathbb{R}^l_+ = \{0\}$.

Si verifica facilmente che (J.1) implica

(J.2') Y_S è chiuso e, per ogni successione $y_n \in Y_S$ con $||y_n|| \to +\infty$ e $y_n/||y_n|| \to u \in \mathbb{R}^l_+$, si ha $u = 0$.[3]

Vale ora la proposizione seguente, che enunciamo senza dimostrazione.

8.3. PROPOSIZIONE. *Supponiamo che Y_S verifichi l'assioma* (J.2'). *Allora l'insieme $\mathscr{R}$ è compatto in $\mathbb{R}^{lm}$.*[4]

Le stesse dimostrazioni della Proposizione 3.5 e della Proposizione 3.6 permettono ora di provare:

8.4. TEOREMA. *Si ha*

- *Nell'ipotesi* (J.2')*, per ogni allocazione realizzabile $(z^1,\dots,z^m)$ esiste un ottimo di Pareto stretto $(x^1,\dots,x^m) \in \mathscr{R}$ unanimemente preferito a $(z^1,\dots,z^m)$, cioè $u_i(x^i) \geq u_i(z^i)\,\forall\, i$.*
- *Nell'ipotesi* (J.2) *esiste in $\mathscr{R}$ almeno un ottimo di Pareto stretto.*

Come prima denoteremo con $\mathscr{P}$ l'insieme degli ottimi di Pareto stretti e con $\mathscr{P}'$ gli ottimi di Pareto deboli. Come abbiamo visto $\emptyset \neq \mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}'$. Poiché un punto di $\mathscr{R}$ che non appartiene a $\mathscr{P}'$ è il centro di una palla che non interseca $\mathscr{P}'$, vale anche

8.5. PROPOSIZIONE. *Nell'ipotesi* (J.2') *l'insieme $\mathscr{P}'$ è compatto.*

8.2.1. *Imputazioni paretiane*

Mostreremo ora che l'insieme $\mathscr{P}$ assomiglia a un simplesso. Come nel Capitolo 3 definiamo l'applicazione U

$$U(x^1,\dots,x^m) := (u_1(x^1),\dots,u_m(x^m))$$

da $\mathbb{R}^{lm}_+$ in $\mathbb{R}^m$. Supporremo, magari aggiungendo una costante alle funzioni d'utilità, che $u_i(0) = 0$, cosicché

$$U(0,\dots,0) = 0 \in \mathbb{R}^m.$$

L'applicazione U è continua, perché sono continue le u_i; $U(\mathscr{R})$ è compatto, perché $\mathscr{R}$ lo è; infine, $U(\mathscr{P}')$ è compatto, perché $\mathscr{P}'$ lo è.

Ogni vettore di $U(\mathscr{R})$ si chiamerà *imputazione*; si dirà che l'imputazione w *domina* un'imputazione v se si ha $w_i > v_i$ per tutti gli $i = 1,\dots,m$. Una imputazione v si

[3] Nel caso di due beni questo implica in particolare che il rapporto (quantità prodotta)/(quantità utilizzata) non deve andare all'infinito con il livello di attività, cosa vera se, ad esempio, l'insieme di produzone è convesso.

[4] Si noti che, nell'ipotesi (J.2), l'insieme delle allocazioni realizzabili $\mathscr{R}$ è convesso e compatto.

dirà *paretiana* se le sue componenti sono positive e se non è dominata da nessun altra imputazione

$$v_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall w \in U(\mathscr{R}) - \mathbb{R}^m_+ \quad \exists i \quad \text{tale che} \quad w_i \leq v_i.$$

L'insieme delle imputazioni paretiane verrà denotato con $\mathscr{U}$. Per definzione

$$\mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^m_+ \cap \big(U(\mathscr{R}) - \mathbb{R}^m_+\big). \tag{8.1}$$

8.6. PROPOSIZIONE. *Supponiamo che valga* (J.2') *e che i beni siano liberamente disponibili, cioè $Y_S \supset -\mathbb{R}^l_+$. Allora l'insieme delle imputazioni paretiane $\mathscr{U}$ è compatto e contiene $U(\mathscr{P})$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $U(\mathscr{R})$ è compatto, segue da (8.1) che $\mathscr{U}$ è limitato; essendo poi $U(\mathscr{R}) - \mathbb{R}^m_+$ aperto, $\mathscr{U}$ è anche chiuso, quindi compatto.

Sia poi $(x^1, \ldots, x^m)$ un ottimo di Pareto stretto. Chiaramente l'imputazione $u_1(x^1), \ldots, u_m(x^m))$ non è dominata da alcun altra imputazione. Se poi una delle sue componenti, diciamola prima, fosse negativa, basterebbe distruggere il paniere di beni x^i per ottenere l'allocazione realizzabile $(0, x^2, \ldots, x^m)$ che il primo consumatore preferisce a $(x^1, \ldots, x^m)$ mentre gli altri consumatori sono indifferenti, contraddicendo al fatto che $(x^1, \ldots, x^m)$ è un ottimo di Pareto stretto. □

Introduciamo il simplesso

$$\Sigma := \{v \in \mathbb{R}^m \quad | \quad v_i \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_i v_i = 1\}$$

e definiamo l'applicazione

$$\sigma : \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\} \to \Sigma$$

come

$$\sigma(w) := \frac{w}{w_1 + \ldots + w_m}.$$

8.7. PROPOSIZIONE. *Supponiamo che valga* (J.2') *e che l'origine non sia un ottimo di Pareto, cioè $(0, \ldots, 0) \notin \mathscr{P}'$. Allora l'applicazione $\sigma : \mathscr{U} \to \Sigma$ è una bigezione continua assieme alla sua inversa.*

DIMOSTRAZIONE. Costruiamo esplicitamente l'inversa di σ. Per ogni $v \in \Sigma$ consideriamo la semiretta uscente dall'origine per v,

$$D(v) = \{\lambda v \,|\, \lambda \geq 0\}$$

e la 'sua intersezione' con $U(\mathscr{R}) - \mathbb{R}^m_+$:

$$I(v) = \{\lambda \geq 0 \,|\, \lambda v \in U(\mathscr{R}) - \mathbb{R}^m_+\}.$$

$I(v)$ è un intervallo, infatti, se $\alpha \in I(v)$, si ha

$$\alpha v - \mathbb{R}^m_+ \subseteq U(\mathscr{R}) - \mathbb{R}^m_+;$$

in particolare, per $0 < \lambda < \alpha$,

$$\lambda v = \alpha v - (\alpha - \lambda) v \in \alpha v - \mathbb{R}^m_+,$$

dunque $\lambda \in I(v)$. È anche chiaro che $I(v)$ contiene l'origine, quindi ha la forma $[0, \beta[$ o $[0, \beta]$.

$I(v)$ è limitato, $\beta < +\infty$. Se non lo fosse, per ogni intero n, nv apparterrebbe a $U(\mathscr{R}) - \mathbb{R}^m_+$; ci sarebbero allora $w_n \in U(\mathscr{R})$ con $w_{ni} \geq n v_i \forall i$. Poiché v appartiene a Σ, almeno una delle componenti v_i è positiva e w_{ni} divergerebbe a $+\infty$, contraddicendo la compattezza di $U(\mathscr{R})$.

$I(v)$ è chiuso, $\beta \in I(v)$. Sia $\lambda_n \to \beta$. Per ogni $\lambda_n v$ cè $w_n \in U(\mathscr{R})$ tale che $\lambda_n v \in w_n - \mathbb{R}^m_+$. Poiché $U(\mathscr{R})$ è compatto, passando a una sottosuccessione, w_n converge verso un $w \in U(\mathscr{R})$ e, passando al limite, $\beta w \in w - \mathbb{R}^m_+$ cioè $\beta \in I(v)$.

$\beta v \in \mathscr{U}$. Altrimenti esisterebbe $w \in U(\mathscr{R})$ con $w_i > \beta v_i$ per ogni i e potremmo sceglier $\varepsilon > 0$ per cui $w_i \geq \beta(1+\varepsilon)v_i$, equivalentemente $\beta(1+\varepsilon)v_i \in w - \mathbb{R}^m_+$. Quindi $\beta(1+\varepsilon) \in I(v)$ contraddicendo la definizione di β.

Infine, per l'ipotesi che $o \notin \mathscr{U}$, $\beta \neq 0$.

In conclusione $I(v) = [0, \beta(v)]$ con $0 < \beta(v) < +\infty$, qualunque sia $v \in \Sigma$. Poniamo

$$\tau(v) = \beta(v)v \in \mathscr{U}.$$

Si verifica immediatamente che τ è l'inversa di σ. Ora σ è bigettiva e continua e $\mathscr{U}$ e Σ sono compatti, segue τ è continua. Infatti, se F è un chiuso (quindi compatto) in $\mathscr{U}$ vale $\tau^{-1}(F) = \sigma(F)$ e $\sigma(F)$ è chiuso perchè, essendo σ continua, $\sigma(F)$ è compatto quindi chiuso. □

Concludiamo osservando che, se un'imputazione paretiana è l'immagine tramite U di una allocazione realizzabile, allora quest'ultima è un ottimo di Pareto:

$$U(\mathscr{P}') \cap \mathbb{R}^m_+ = \mathscr{U} \cap U(\mathscr{R}),$$

mentre possiamo solo dire che $U(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{U}$.

8.2.2. *Caratterizzazione degli ottimi di Pareto in termini di prezzi*

Dire che l'imputazione v è paretiana significa che le possibilità produttive e le risorse iniziali non permettono di realizzare livelli d'utilità individuali superiori a $v_1, \dots, v_m$, cioè gli insiemi

$$A(v) = \{\sum_{i=1}^m x^i - \Omega \quad | \quad u_i(x^i) > v_i \forall i\}$$

e Y_S hanno un'intersezione vuota. Un punto comune, infatti, permetterebbe di scrivere $\sum_{i=1}^m x^i - \Omega \in Y_S$ con $u_i(x^i) > v_i$ per $i = 1, \dots, m$, e l'imputazione $(u_1(x^1), \dots, u_m(x^m))$ dominerebbe v, che non sarebbe quindi paretiana.

Se ora supponiamo che Y_S sia *convesso* non resta altro che applicare il teorema di separazione di Minkowski, per ottenere la seguente proposizione dove, ricordiamo, $\bar{\Pi}$ è il simplesso $p_1 + \ldots + p_l = 1$ di $\mathbb{R}^l_+$, cioè l'insieme dei prezzi positivi normalizzati.

8.8. PROPOSIZIONE. *Supponiamo che valga* (J.1)*, cioè che le funzioni d'utilità u_i siano quasiconvesse e continue, supponiamo inoltre che le u_i non abbiano massimo, cioè*

$$\forall i \quad \forall x \in \mathbb{R}^l_+ \quad \exists z \in \mathbb{R}^l_+ \quad \text{tale che} \quad u_i(z^i) > u_i(x^i). \tag{8.2}$$

Supponiamo ancora che valga (J.2)*, cioè che l'insieme di produzione globale Y_S sia convesso chiuso e verifichi*

$$Y_S \supset -\mathbb{R}^l_+ \quad e \quad Y_S \cap \mathbb{R}^l_+ = \{0\}. \tag{8.3}$$

Allora, per ogni imputazione paretiana $v \in \mathscr{U}$, esiste un sistema di prezzi $p \in \bar{\Pi}$ tale che qualunque siano l'allocazione $(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^{lm}_+$, anche non realizzabile, e il vettore di produzione $y \in Y_S$ si abbia

$$\text{se} \quad u_i(x^i) > v_i \forall i \quad \text{allora} \quad p \cdot \left(\sum x^i - \Omega - y\right) \geq 0. \tag{8.4}$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché $v \in U(\mathscr{R}) - \mathbb{R}^m_+$, esiste per ogni i un panier x^i tale che $u_i(x^i) \geq v_i$. Per l'ipotesi (8.2), esiste per ogni i un paniere z^i tale che $u_i(z^i) > u_i(x^i)$. Il vettore $\sum z^i - \Omega$ appartiene ad $A(v)$ che è quindi non vuoto. Applicando il teorema di separazione troviamo un vettore non nullo p tale che per ogni $z \in A(v)$ e per ogni $y \in Y_S$ si abbia

$$p \cdot z \geq p \cdot y, \tag{8.5}$$

da cui la (8.4) segue sostituendo z con $\sum x^i - \Omega$.

Resta da dimostrare che che le componenti di p sono positive, basterà poi normalizzare. Poiché $Y_S \supset -\mathbb{R}^l_+$, nel secondo membro della (8.5) y può essere un qualunque vettore con componenti negative: fissato $z \in A(v)$ vale $p \cdot z \geq \sum p_k y_k$, $\forall y_k \leq 0$. Se ora uno dei p_k, ad esempio p_1, fosse strettamente negativo, potremmo scegliere $y_1 := -n$ e $y_k = 0$ per $n \neq 1$ ottenendo

$$p \cdot z \geq n(-p_1) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

che è chiaramente assurdo. □

Osserviamo che l'ipotesi (8.2) è piuttosto naturale. Essa afferma che non è possibile soddisfare completamente l'individuo i al punto che egli non desideri nient'altro: qualunque sia il livello raggiunto egli può voler aggiungere qualcosa che ama o liberarsi di qualcosa che non ama. Questa ipotesi di *insaziabilità* implica in particolare l'ipotesi che abbiamo fatto in precedenza che $0 \notin \mathscr{P}'$. Vale infatti:

8.9. LEMMA. *Nelle ipotesi della* Proposizione 8.8*:*

(a) *Per ogni i, $x \in \mathbb{R}^l_+$, e $\varepsilon > 0$ esiste $\xi \in \mathbb{R}^l_+$ tale che*

$$||\xi - x|| \leq \varepsilon \quad e \quad u_i(\xi^i) > u_i(x^i) \forall i.$$

(b) *Se $\Omega_k > 0$ per $k = 1, \dots, l$, allora l'allocazione nulla non è un ottimo di Pareto.*

DIMOSTRAZIONE. (a) Dalla (8.2) segue che esiste $z \in \mathbb{R}^l_+$ tale che $u_i(z^i) > u_i(x^i)$. Consideriamo la funzione

$$\phi(t) := u_i(x + t(z - x)),\ t \in [0, 1],$$

che è continua, concava e verifica

$$\phi(0) = u_i(x^i) < u_i(z^i) = \phi(1).$$

Segue allora $\phi(t) > \phi(0)$ per $t \in [0, 1]$. Scegliendo $t = \varepsilon/||z - x||$ e $\xi = x + t||z - x||$, si ottiene $||\xi - x|| = \varepsilon$ e $u_i(\xi^i) = \phi(t) > u_i(x)$.

(b) Applicando (a) a $x = 0$, per ogni $\varepsilon > 0$ troviamo una allocazione ξ tale che $||\xi^i|| \leq \varepsilon$ e $u_i(\xi^i) > 0$. Se ε è scelto sufficientemente piccolo $\sum \xi^i - \Omega$ appartiene ancora a $-\mathbb{R}^l_+$ quindi a Y_S. L'allocazione ξ sarà allora realizzabile e unanimemente preferita a 0. □

Il lemma precedente ci permette di indebolire l'ipotesi $u_i(x^i) > v_i$ in (8.4) a $u_i(x^i) \geq v_i$.

Nelle ipotesi della Proposizione 8.8 diciamo che il sistema di prezzi $p \in \bar{\Pi}$ *sostiene* l'imputazione paretiana $v \in \mathscr{U}$ se

$$u_i(x^i) \geq v_i \quad \Rightarrow \quad p \cdot \left(\sum x^i - \Omega - y\right) \geq 0 \tag{8.6}$$

per ogni allocazione (non necessariamente realizzabile) x e ogni vettore di produzione $y \in Y_S$.

Come abbiamo visto, Proposizione 8.8, ogni imputazione paretiana è sostenuta da almeno un sistema di prezzi.

Un caso importante è quello in cui $\sum x^i - \Omega - y = 0$, cioè quello in cui il vettore di produzione scelto è quello che permette di realizzare l'allocazione in questione. La (8.6) diventa allora

$$p \cdot \left(\sum x^i - \Omega - y\right) = 0$$

che esprime eguaglianza tra il profitto dei produttori e la somma totale spesa dai consumatori.

In altre parole, abbiamo che il minimo di $p \cdot \left(\sum x^i - \Omega - y\right)$ per $u_i(x^i) \geq v_i$ e $y \in Y_S$ è zero ed è raggiunto quando y permette di realizzare x. Più precisamente possiamo enunciare:

8.10. COROLLARIO. *Supponiamo che valgano le ipotesi della* Proposizione 8.8*, che il sistema di prezzi $p \in \bar{\Pi}$ sostenga l'imputazione $v \in \mathscr{U}$ e che $(x^1, \ldots, x^m)$ sia un'allocazione realizzabile tale che $u_i(x^i) \geq v_i$ per $i = 1, \ldots, m$. Poniamo $y = \sum x^i - \Omega \in Y_S$. Allora per ogni i*

$$[\xi^i \in \mathbb{R}^l_+ \quad e \quad u_i(\xi^i) \geq v_i] \Rightarrow p \cdot \xi^i \geq p \cdot x^i \tag{8.7}$$

$$\eta \in Y_S \Rightarrow p \cdot \eta \leq p \cdot y. \tag{8.8}$$

DIMOSTRAZIONE. Dire che l'allocazione x è realizzabile significa che $y = \sum x^i - \Omega$ appartiene all'insieme di produzione Y_S. Per quanto visto allora

$$p \cdot \left(\sum \xi^i - \Omega - \eta\right) \geq 0 = p \cdot \left(\sum x^i - \Omega - y\right),$$

qualunque siano $\xi^i \in \mathbb{R}^l_+$ e $\eta \in Y_S$. Questo si scrive anche come

$$\sum_{k=1}^{m} (p \cdot \xi^i - p \cdot x^i) \geq p \cdot \eta - p \cdot y.$$

Scegliendo allora $\xi = x$ otteniamo la (8.8); scegliendo $\xi^j = x^j$ per $j \neq i$ e $\eta = y$ otteniamo la (8.7). □

Come immediato corollario troviamo

8.11. COROLLARIO. *Supponiamo valgano le ipotesi della* Proposizione 8.8*, sia $x \in \mathscr{P}'$ un ottimo di Pareto e sia $y = \sum x^i - \Omega$. Allora esiste un sistema di prezzi $p \in \bar{\Pi}$ tale che per ogni i*

$$[\xi^i \in \mathbb{R}^l_+ \quad e \quad u_i(\xi^i) \geq u_i(x^i)] \Rightarrow p \cdot \xi^i \geq p \cdot x^i \tag{8.9}$$

$$\eta \in Y_S \Rightarrow p \cdot \eta \leq p \cdot y. \tag{8.10}$$

L'interpretazione economica dell'ultimo corollario è piuttosto chiara. Il vettore di produzione y è quello che permette di realizzare l'allocazione x e, per la (8.10), massimizza il profitto globale. La (8.9) esprime il fatto che il paniere x^i è, tra tutti i panieri che procurano al consumatore i una soddisfazione almeno uguale, quello che costa meno.

Supponiamo di volere raggiungere un ottimo di Pareto $(x^1, \ldots, x^m)$. Abbiamo due metodi a disposizione:

(1) Un primo metodo, piuttosto pesante, consiste nel chiedere ai produttori di produrre $y := \sum x^i - \Omega$ e ai consumatori di consumare rispettivamente x^1, …, x^m, spogliando di ogni iniziativa gli agenti.

(2) Il secondo consiste nel fissare un sistema di prezzi che sostiene l'imputazione paretiana $v = (u_1(x^1), \ldots, u_m(x^m))$ e assegnare a ciascun agente livelli di utilità rispettivamente v_1, …, v_m, e lasciare che i produttori massimizzino il loro profitto globale e i consumatori raggiungano questi livelli di utilità al costo più basso.

Ma, massimizzando il profitto possiamo ritrovarci con più vettori di produzione e magari solo uno è quello buono, minimizzando il costo di realizzazione del livello d'utilità ci ritroviamo con più panieri di beni; solo nel caso di unicità abbiamo un criterio non ambiguo. Ma c'è di più. Assegnare un livello di utilità sarebbe un compito arduo anche assumendo di conoscere le preferenze di ciascun agente. Sarebbe più comodo assegnare a ciascuno una somma da spendere. Questa scelta, in effetti, porta ugualmente all'ottimo di Pareto. Infatti vale:

8.12. PROPOSIZIONE. *Supponiamo valgano le ipotesi della* Proposizione 8.8.

- *Sia $p \in \bar{\Pi}$ un sistma di prezzi che sostiene l'imputazione paretiana $v \in \mathscr{U}$ e sia x una allocazione realizzabile tale che $u_i(x^i) \geq v_i$ per $1 \leq i \leq m$. Se $p \cdot x^i \neq 0$, allora*

$$\xi^i \in \mathbb{R}^l_+ \quad e \quad p \cdot \xi^i \leq p \cdot x^i \quad \Rightarrow \quad u_i(\xi^i) \leq v_i \tag{8.11}$$

$$\eta \in Y_S \quad \Rightarrow \quad p \cdot \eta \leq p \cdot \big(\sum x^i - \Omega\big). \tag{8.12}$$

- *Sia $(x^1, \ldots, \xi^m) \in \mathscr{P}'$ un ottimo di Pareto e $p \in \bar{\Pi}$ un sistema di prezzi che sostiene $(u_1(x^1), \ldots, u_(x^m))$. Se $p \cdot x^i \neq 0$, allora*

$$\xi^i \in \mathbb{R}^l_+ \quad e \quad p \cdot \xi^i \leq p \cdot x^i \quad \Rightarrow \quad u_i(\xi^i) \leq u_i(x^i) \tag{8.13}$$

$$\eta \in Y_S \Rightarrow \quad p \cdot \eta \leq p \cdot \big(\sum x^i - \Omega\big). \tag{8.14}$$

DIMOSTRAZIONE. La seconda parte è un'ovvia conseguenza della prima. La formula (8.12) segue dal Corollario 8.10, che ci dà anche

$$\xi^i \in \mathbb{R}^l_+ \quad \text{e} \quad u_i(\xi^i) \geq v_i \Rightarrow p \cdot \xi^i \geq p \cdot x^i \tag{8.15}$$

che, a sua volta (poiché $P \Rightarrow Q$ se e solo se non$Q \Rightarrow$ non$P$), implica

$$p \cdot \xi^i < p \cdot x^i \quad \Rightarrow \quad u_i(\xi^i) < v_i. \tag{8.16}$$

Resta da considerare il caso in cui $p \cdot \xi^i = p \cdot x^i$. Poiché $p, x^i \in \mathbb{R}^l_+$, da $p \cdot x \neq= 0$ segue $p \cdot x^i > 0$. Approssimando ξ^i con ξ^i_n verificanti $p \cdot \xi^i_n < p \cdot x^i$ e applicando la (8.16) si ottiene $u_i(\xi^i_n) < v_i$, da cui, passando al limita, si ottiene $u_i(\xi^i) \leq v_i$. □

Vale la pena osservare che la (8.9) e la (8.13) sono diverse – la prima dice che l'agente i cerca di raggiungere il livello d'utilità $u_i(x^i)$ al costo minore, la seconda che l'agente i spende la somma $p \cdot x^i$ al meglio del suo interesse –, ma, nell'ipotesi piuttosto debole che $p \cdot x^i \neq 0$, portano allo stesso risultato.

Infine insistiamo sul fatto che i risultati precedenti dipendono fortemente dalle ipotesi di convessità su Y_S e sui sopralivelli di u_i.

8.3. *Gli equilibri concorrenziali in una economia di proprietà privata*

Conservando tutte le ipotesi di convessità e seguendo lo schema che abbiamo già discusso nel caso dell'economia di proprietà privata di puro scambio, vogliamo ora discutere l'esistenza di equilibri concorrenziali in una economia di proprietà privata con produzione.

8.3.1. *Gli equilibri concorrenziali*

Come prima cosa bisognerà introdurre la nozione di prorpietà privata non solo delle risorse iniziali ma anche dei mezzi di produzione.

Proprietà privata

Le risorse totali Ω sono inizialmente suddivise tra gli m agenti; il paniere dell'agente i è ω^i, di modo che

$$\Omega = \sum_{i=1}^{m} \omega^i.$$

Ricordiamo ci sono p unità di produzione caratterizzati da un loro insieme di produzione Y_k, $1 \le k \le p$, e l'insieme di produzione globale è dato da

$$Y_S = \sum_{k=1}^{p} Y_k.$$

Dire che una unità di produzione è di *proprietà privata* consiste nello specificare le seguenti due regole *di gestione* e *di ripartizione dei benefici*.

(1a) *Regola di gestione*. Il produttore massimizza il suo profitto: egli risponde a un sistema di prezzi p scegliendo un vettore di produzione y^k che massimizza $p \cdot \eta$ per $\eta \in Y_k$.

(1b) *Regola di ripartizione dei benefici*. Il profitto realizzato $p \cdot y^k$ è distribuito agli m agenti secondo dei coefficienti θ_k^i fissati inizialmente; la parte dell'agente i è

$$\theta_k^i p \cdot y^k$$

e vale

$$\forall i, \quad \theta_k^i \ge 0 \quad \text{e} \quad \theta_k^1 + \ldots + \theta_k^m = 1.$$

Abbiamo già discusso la prima regola all'inizio del capitolo. Vale la pena sottolineare che produttore qui sta per unità di produzione. Si potrebbe parlare di produttore se tutti i θ fossero nulli tranne uno, ma anche in questo caso il produttore sarebbe principalmente un consumatore che non reinveste il suo profitto[5]. Per comprendere la seconda regola può essere utile pensare ai coefficienti θ_k^i come alla quota di azioni dell'agente i nell'impresa k. Il fatto che $\theta_k^i + \ldots + \theta_k^m = 1$ significa che i benefici di ogni impresa k sono completamente distribuiti: tutta la produzione va al consumo, non ci sono investimenti. Infine, osserviamo che l'azione dei produttori richiede la conoscenza del sistema dei prezzi ma non dell'azione degli altri agenti economici.

Prezzi e allocazioni d'equilibrio

Chiaramente, rispetto a prima, per l'agente i cambia solo la sua disponibilità finanziaria: alla somma $p \cdot \omega^i$ proveniente dalla vendita delle sue risorse iniziali al prezzo di mercato bisognerà aggiungere i dividendi delle diverse imprese che egli possiede. Il totale è dunque:

$$p \cdot \omega^i + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i p \cdot y^k,$$

dove y^k è il vettore produzione adottato dall'impresa k.

Nello stesso spirito del Capitolo 6 si perviene alla seguente

[5] Cosa chiaramente non conforme né alla pratica né all'etica del capitalista.

8.13. DEFINIZIONE. Si dice che $p \in \bar{\Pi}$ è un sistema di *prezzi di equilibrio* e che $(x^i, \ldots, x^m)$ è un'*allocazione di equilibrio* se valgono le seguenti condizioni.

(a) L'allocazione $(x^i, \ldots, x^m)$ è realizzabile

$$\sum_{i=1}^{m} x^i - \sum_{i=1}^{m} \omega^i = \sum_{k=1}^{p} y^k, \text{ con} \, y^k \in Y_k \, \forall \, k.$$

(b) Per ciascun consumatore i si ha

$$p \cdot x^i = p \cdot \omega^i + \sum_{k=1}^{p} \theta^i_k \, p \cdot y^k.$$

(c) Per ciascun consumatore i si ha

$$[\xi \in \mathbb{R}^l_+ \quad \text{e} \quad p \cdot \xi \leq p \cdot x^i] \quad \Rightarrow \quad u_i(\xi^i) \leq u_i(x^i).$$

(d) Per ciascun produttore k si ha

$$\eta \in Y_k \quad \Rightarrow \quad p \cdot \eta \leq p \cdot y^k.$$

Le condizioni (b) e (c) esprimono che ciascun consumatore sceglie quello che preferisce tra quello che può permettersi. La domanda totale è allora $\sum_{i=1}^{m} x^i$. La condizione (d) esprime che ciascun produttore massimizza il suo profitto, si potrebbe scrivere $y^k \in \Gamma_k(p)$. L'offerta totale è allora $\sum_{k=1}^{p} y^k + \Omega$. La condizione (a) esprime che, se p è un sistema di prezzi d'equilibrio, *la domanda totale è uguale all'offerta totale* per ciascuno degli l beni.

Il teorema dell'equilibrio

Il problema è ancora una volta mostrare che esistono degli equilibri per l'economia in considerazione. Per questo ovviamente servono delle ipotesi che raccogliamo in assiomi: Richiederemo che l'economia di produzione sia di proprietà privata nel senso illustrato prima e che valgano le seguenti condizioni:

(K.1) Le funzioni d'utilità u_i sono quasiconvesse, continue e dipendono solo da x^i.

(K.2) Per ogni i si ha $\omega^i_k > 0, \forall k$ e $u_i(\omega^i) \geq u_i(0) = 0$.

(K.3) Gli insiemi di produzione Y_k sono convessi, chiusi, contengono il cono $-\mathbb{R}^l_+$ e non incontrano il cono $\mathbb{R}^l_+$; inoltre verificano

$$y^k \in Y_k \quad \forall k \quad \text{e} \quad Y^1 + \ldots + y^m = 0 \quad \Rightarrow \quad y^k = 0 \, \forall \, k.$$

Abbiamo già discusso le ipotesi (K.1) e $\omega^i_k > 0, \forall k$. L'ipotesi $u_i(\omega^i) \geq 0$ è abbastanza naturale: se le risorse iniziali danno all'agente i un livello d'utilità negativo, egli può sempre eliminare dal suo paniere il bene che non desidera e ricondursi al caso $u_i(0) = 0$. L'ipotesi (K.3) è stata già discussa, vedi (J.2), ma nella sua parte finale richiede un po' di più: se il bilancio globale delle imprese è nullo, allora tutti i bilanci delle singole imprese sono nulle. Si vuole evitare che le imprese operino a circuito chiuso (o di moto perpetuo), nel senso che la loro produzione equilibra esattamente il loro consumo; alla parte finale della (K.3) ci si riferisce spesso come alla *irreversibilità* della produzione..

Vale allora

8.14. TEOREMA. *Nelle ipotesi* (K.1)*,* (K.2)*,* (K.3) *esiste almeno un sistema di prezzi di equilibrio e almeno una allocazione di equilibrio associata.*

La conclusione del teorema appare di notevole portata: si annuncia un sistema di prezzi p, ciascun produttore massimizza il suo profitto e distribuisce il dividendo tra gli azionisti, ciascun consumatore compra quello che preferisce tra le cose che può pagarsi[6] e il Teorema 8.14 ci assicura che è possibile scegliere un sistema di prezzi in modo da armonizzare il tutto, cioè che valgano le (a), (b), (c), (d) della Definizione 8.13 che appunto esprimono le condizioni di compatibilità tra le azioni dei produttori e dei consumatori.

Ma è opportuno attenuare gli entusiasmi. Può succedere che (d) porti a più vettori di produzione y^k e (c) a più panieri di beni x^i e i produttori e i consumatori sono liberi di fare scelte diverse: il teorema afferma che è possibile fare queste scelte in modo che le condizioni (a) e (b) siano soddisfatte, ma non dà indicazioni sul modo di procedere. Ciò, ovviamente, sempre che le ipotesi (K.1), (K.2), (K.3) siano soddisfatte e ci sia libera disonibilità dei beni e irreversibilità della produzione. Queste ipotesi sono, in fondo, abbastanza naturali, tranne forse quella di convessità dell'insieme di produzione, che esclude le imprese a *rendimento crescente*.

D'altro canto, nel caso di rendimento crescente non è chiaramente possibile ricondursi alla massimizzazione del pofitto, qualunque sia il prezzo: più si produce più si guadagna, non è agendo sul sistema di prezzi che la produzione possa essere fermata ad una quantità data.

La questione si pone allora in modo diverso. Per un sistema di prezzi dato, il produttore dovrà *valutare* la domanda e produrre quello che potrà smaltire, deducendone il livello di produzione adeguata $\eta_k(p) \in Y_k$. Siamo ovviamente fuori dallo schema in cui abbiamo operato fino ad ora. Si potrebbe però continuare calcolando il profitto $p \cdot \eta_k(p)$ e cercando prezzi $p_k \in \bar{\Pi}$ che lo rendano massimo. Infatti,

$$\text{massimizzare} \quad p \cdot \eta(p) \quad \text{per} \quad p \in \bar{\Pi}$$

è il criterio che guida il *monopolista*, unico produttore. Il caso in cui, invece, più produttori sono in grado di avere un'influenza sui prezzi è quello dell'*oligopolio*. Questa possibilità di influire unita agli obiettivi diversi (prezzi p_k dipendono da k) creano una situazione di *gioco competitivo*, Ed è in termini di teoria dei giochi che il problema viene trattato solitamente. Noi non discuteremo le teorie del monopolio e dell'oligopolio.

Osserviamo che per la validità dei risultati ottenuti fino ad ora è essenziale che il produttore subisca i prezzi e non li influenzi. Si ammette che le cose stiano realmente in questo modo quando ci sono molti produttori di poca rilevanza individuale (la scomparsa di uno non influenza il comportamento globale): è la situazione chiamata di *concorrenza perfetta*.

8.3.2. *Esistenza degli equilibri concorrenziali*

Questa sezione è dedicata alla dimostrazione del teorema dell'equilibri, che abbiamo enunciato alla fine della sezione precedente, Teorema 8.14. L'idea è di applicare il teorema di Kakutani ad una opportuna trasformazione che costruiremo per passi successivi

[6] Si noti come tutti operano in modo individualistico.

'definita' sull'insieme delle triple $[v, p, (X,Y)]$, dove $v \in \mathscr{U}$ è una imputazione paretiana, $p \in \bar{\Pi}$ un sistema di prezzi, $X = (x^1, \dots, x^m) \in \mathscr{R}$ una allocazione realizzabile e $Y = (y^i, \dots, y^p)$ un vettore di produzione legati da $\sum x^i - \Omega = \sum y^k$.

Cominciamo col definire

$$\tilde{\mathscr{R}} := \{(X,Y) \,|\, X = (x^1, \dots, x^m) \in \mathscr{R}, Y = (y^i, \dots, y^p) \,\mathrm{con}\, y^k \in Y_k, \sum x^i - \Omega = \sum y^k\}.$$

8.15. LEMMA. *L'insieme $\tilde{\mathscr{R}}$ è non vuoto, convesso e compatto.*

DIMOSTRAZIONE. Dire che l'allocazione X è realizzabile significa che è possibile trovare vettori di produzione compatibili con lei, quindi $\tilde{\mathscr{R}}$ è non vuoto. Essendo $\mathscr{R}$ convesso e il vincolo in $\tilde{\mathscr{R}}$ lineare, segue poi che è anche convesso.

Proviamo che $\tilde{\mathscr{R}}$ è compatto, equivalentemente che da ogni successione (X_n, Y_n) in $\tilde{\mathscr{R}}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente a un punto $(X,Y) \in \tilde{\mathscr{R}}$. Per questo usiamo un argomento per assurdo che abbiamo più volte usato.

Poiché $\mathscr{R}$ è compatto possiamo estrarre da X_n una sottosuccessione convergente ad un $X \in \mathscr{R}$. Consideriamo la sottosuccessione di Y_n corrispondente e rinominiamo la successione ottenuta ancora come (X_n, Y_n).

Proviamo che la successione $||Y_n||$ è limitata. Supponiamo al contrario che non lo sia, cioè a meno di passare a una nuova sottosuccessione $Y_n \to \infty$. Le succesioni $y^k_n/||Y_n||$ sono ovviamente limitate, possiamo quindi supporre che convergano a un qualche u^k Da

$$\frac{\sum x^i_n - \Omega}{||Y_n||} = \frac{y^1_n}{||Y_n||} + \dots + \frac{y^p_n}{||Y_n||}$$

segue allora, poiché gli insiemi di produzione Y_k sono chiusi e convessi e $y^k_n \in Y_k$, che

$$0 = u^1 + \dots + u^p \quad \text{con} \quad u^k \in Y_k \, \forall k.$$

Per l'ipotesi (K.3) gli u^k sono tutti nulli mentre $||(u^1, \dots, u^m)|| = 1$, assurdo.

Possiamo ora estrarre una sottosuccessione da (X_n, Y_n) convergente a un qualche (X,Y) e passando al limite sul vincolo lineare concludere che $(X,Y) \in \tilde{\mathscr{R}}$. □

Ad ogni imputazione paretiana, $v \in \mathscr{U}$, associamo il sottoinsieme di $\tilde{\mathscr{R}}$

$$\Psi(v) := \{(X,Y) \in \tilde{\mathscr{R}} \,|\, u_i(x^i) \geq v_i\}.$$

e l'insieme

$$\Phi(v) := \{p \in \bar{\Pi} \,|\, \text{il sistema di prezzi}\, p \,\text{sostiene}\, v\}^7$$

Si verifica facilmente

8.16. LEMMA. *Vale*

- *La corrispondenza Ψ da $\mathscr{U}$ in $\tilde{\mathscr{R}}$ ha grafico chiuso e, per ogni $v \in \mathscr{U}$, $\Psi(v)$ è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso di $\tilde{\mathscr{R}}$.*
- *La corrispondenza Φ da $\mathscr{U}$ in $\bar{\Pi}$ ha grafico chiuso e, per ogni $v \in \mathscr{U}$, $\Phi(v)$ è un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso di $\bar{\Pi}$.*

[7] L'affermazione $p \in \Phi(v)$, vedi (8.6), significa

$$u_i(x^i) \geq v_i \quad \text{e} \quad y \in Y_S \quad \Rightarrow \quad p \cdot \big(\sum x^i - \Omega - y\big) \geq 0 \tag{8.17}$$

Il consumatore i ha un *budget in equilibrio* se

$$p\cdot x^i \le p\cdot\omega^i + \sum_{k=1}^{p}\theta_k^i\, p\cdot y^k,$$

mentre ha un *budget in deficit* se

$$p\cdot x^i > p\cdot\omega^i + \sum_{k=1}^{p}\theta_k^i\, p\cdot y^k,$$

Nel seguito vogliamo penalizzare i consumatori che vivono al di sopra delle loro possibilità assegnando loro una utilità nulla. Per questo introduciamo

$$I(p,X,Y) := \{i\,|\,p\cdot\big(x^i-\omega^i-\sum_{k=1}^{i}\theta_k^i y^k\big)>0\}$$
$$\Lambda(p,X,Y) := \{v\in\mathscr{U}\,|\,v_i=0 \quad\text{per}\quad i\in I(p,X,Y)\}.$$

8.17. LEMMA. *La corrispondenza Λ da $\bar\Pi$ in $\tilde{\mathscr{R}}$ ha valori non vuoti e grafico chiuso.*

DIMOSTRAZIONE. Non è possibile avere tutti i consumatori simultaneamente in deficit. In questo caso, infatti,

$$p\cdot\sum_{i=1}^{m}x^i > p\cdot\sum_{i=1}^{m}\omega^i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\theta_k^i\,p\cdot y^k > p\cdot\Omega + p\cdot\sum_{k=1}^{p}y^k,$$

in contraddizione con l'uguaglianza nella definizione di $\tilde{\mathscr{R}}$: $\sum_{i=1}^m x^i = \Omega+\sum_{k=1} py^k$. L'insieme $I(p,X,Y)$ non è quindi mai uguale a $S:=\{1,2,\dots,m\}$. In accordo con la Proposizione 8.7 e le sue notazioni, se $\Sigma(S\setminus I)$ designa la faccia del simplesso Σ

$$\Sigma(S\setminus I) := \{w\,|\,w_i=0\,\forall\, i\in I\},$$

poiché $I(p,X,Y)\neq S$ siamo sicuri che $\Sigma(S\setminus I)$ è non vuoto e poiché l'applicazione σ mette in bigezione $\Sigma(S\setminus I)$ e $\Lambda(p,X,Y)$, anche quest'ultimo risulta non vuoto e chiuso.

Lasciamo al lettore il compito di completare la dimostrazione. □

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema dell'equilibrio.

Consideriamo la corrispondenza $\mathscr{G}$ da $\mathscr{U}\times\bar\Pi\times\tilde{\mathscr{R}}$ in sé

$$\mathscr{G}(v,p,(X,Y)) := \Lambda(p,X,Y)\times\Phi(v)\times\Psi(v)$$

o, in altri termini, $(w,q,(Z,T))$ appartiene a $\mathscr{G}(v,p,(X,Y))$ se si ha simultaneamente

$$w\in\Lambda(p,X,Y),\quad q\in\Phi(v),\quad (Z,T)\in\Psi(v).$$

Per applicare il teorema di Kakutani ci manca l'ipotesi di convessità ($\mathscr{U}$ non è convesso). Rimediamo a ciò tramite l'omomorfismo σ tra $\mathscr{U}$ e il simplesso Σ, con inverso τ, Proposizione 8.7. Sostituiamo quindi $\mathscr{U}$ con Σ e consideriamo la corrispondenza $\mathscr{G}'$ da $\Sigma\times\bar\Pi\times\tilde{\mathscr{R}}$ in sé

$$\mathscr{G}'\big(v',p,(X,Y)\big) = \sigma\big(\Lambda(p,X,Y)\big)\times\Phi\big(\tau(v')\big)\times\Psi\big(\tau(v')\big).$$

La corrispondenza $\mathscr{G}'$ verifica tutte le ipotesi del teorema di Kakutani, comprese le ipotesi di convessità. Infatti l'insieme $\Sigma\times\bar\Pi\times\tilde{\mathscr{R}}$ è convesso perché Σ, $\bar\Pi$, $\tilde{\mathscr{R}}$ lo sono, $\Phi\big(\tau(v')\big)$ e $\Psi\big(\tau(v')\big)$ sono convessi per il Lemma 8.16 e $\sigma\big(\Lambda(p,X,Y)\big)$ è una faccia del simplesso Σ quindi camvesso anche lui. Gli insiemi $\mathscr{G}'\big(v',p,(X,Y)\big)$ sono quindi sempre convessi.

$\mathscr{G}'$ ha quindi un punto fisso $\big(v',p,(X,Y)\big)$ e, posto $\tau(v')=v\in\mathscr{U}$, $\big(v,p,(X,Y)\big)$ è un punto fisso di $\mathscr{G}$, cioè

$$v\in\big(\Lambda(p,X,Y)\big),\quad p\in\Phi(v),\quad (X,Y)\in\Psi(v).$$

Verifichiamo ora che p è un sistema di prezzi d'equilibrio e X un'allocazione d'equilibrio, cioè che le condizioni (a), (b), (c), (d) della Definizione 8.13 sono verificate.

Da $(X,Y) \in \tilde{\mathscr{R}}$ segue $X \in \mathscr{R}$ e quindi (a).

La relazione $(X,Y) \in \Psi(v)$ esprime il fatto che $u_i(x^i) \geq v_i$ per tutti gli i. Poiché v è un'imputazione paretiana, l'allocazione $(x^1,\ldots,x^m)$ è un ottimo di Pareto. La relazione $p \in \Phi(v)$ esprime il fatto che il sistema p sostiene l'imputazione paretiana v. Per la diseguaglianza $u_i(x^i) \geq v_i$ il sistema p sostiene anche l'imputazione paretiana $(u_1(x^1),\ldots,u_m(x^m))$. Esplicitando il fatto che p sostiene l'allocazione X, vedi (8.6), per un qualunque vettore di produzione globale $\eta = \eta^1 + \ldots + \eta^p$ con $\eta^k \in Y_k$, si ottiene

$$p \cdot \sum x^i - \Omega - \sum \eta^k \geq 0$$

che, se teniamo conto della $(X,Y) \in \tilde{\mathscr{R}}$ cioè di $\sum x^i - \Omega = \sum y^k$, diventa

$$\sum_{k=1}^{p} \left(p \cdot y^k - p \cdot \eta^k\right) \geq 0, \quad \forall \eta^k \in Y_k.$$

Scegliamo η^1 qualunque in Y_1 e applichiamo la diseguaglianza precedente con $\eta^2 = y^2$, $\ldots$, $\eta^p = y^p$; se ne deduce

$$p\dot{y}^1 \geq p \cdot \eta^1 \quad \forall \eta^1 \in Y_1.$$

Similmente si mostra che la diseguaglianza vale per tutti i k e non solo per 1, quindi la (d) è soddisfatta: i produttori massimizzao il loro profitto.

Per verificare (b) e (c), supponiamo che uno dei consumatori, ad esempio il primo, presenti un *budget* deficitario

$$p \cdot x^1 > p \cdot \omega^1 + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^1 \, p \cdot y^k. \tag{8.18}$$

Dalla definizione di I,Λ, poiché $v \in \Lambda(p,X,Y)$ segue che $v_1 = 0$. Per ipotesi $u_i(\omega^i)$ è positivo, applicando quindi (8.6) all'allocazione $(\omega^1,x^2,\ldots,x^m)$ e al vettore di produzione globale $y = \sum y^k$ e tenendo conto della $\sum x^i - \Omega = \sum y^k$, otteniamo

$$p \cdot (\omega^1 - x^1) \geq 0 \tag{8.19}$$

Osserviamo ora che $p \cdot y^k$ è non negativo per ogni k (per vederlo basta scrivere $p \cdot y^k \geq p \cdot \eta^k$ con $\eta^k = 0 \in Y_k$) ricaviamo dalla (8.19)

$$p \cdot x^1 \leq p \cdot \omega^1 + \sum_{k=1}^{p} p \cdot y^k$$

in contraddizione con (8.18). Concludiamo quindi che tutti i consumatori hanno un bilancio in equilibrio

$$p \cdot x^i \leq p \cdot \omega^i + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i \, p \cdot y^k \quad \forall i.$$

o

$$p \cdot (x^i - \omega^i - \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i y^k) \leq 0 \quad \forall i. \tag{8.20}$$

Sommando in i si trova

$$0 \geq \sum_{i=1}^{m} \left(p \cdot (x^i - \omega^i - \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i y^k)\right)$$
$$p \cdot \big(\sum_{i=1}^{m} x^i - \Omega - \sum_{k=1}^{p} y^k\big) = 0$$

perché $(X,Y) \in \tilde{\mathscr{R}}$. Concludiamo che i primi membri delle diseguaglianze in (8.20) sono nulli

$$p \cdot x^i = p \cdot \omega^i * + \sum_{k=1}^{p} \theta_k^i \, p \cdot y^k. \tag{8.21}$$

Questo dimostra (b).

Poiché $p \cdot \omega^i > 0$, essendo gli $\omega_k^i > 0$, e, come abbiamo visto, $p \cdot y^k \geq 0$ la (8.21) mostra anche che

$$p \cdot x^i > 0 \quad \forall i.$$

La Proposizione 8.12, (8.13), ci da allora esattamente la condizione (c).

Questo conclude la dimostrazione.

8.4. *Analisi marginale*

In questa sezione abbandoniamo le ipotesi di convessità relative alle relazioni di preferenza e agli insiemi di produzione. Conseguentemente, non possiamo più affermare che gli ottimi di Pareto siano sostenuti da un sistema di prezzi né che esistano punti di equilibri concorrenziali. Cercheremo quindi delle *regole di gestione* semplici necessari a realizzare un ottimo di Pareto dato. Per questo faremo uso di metodi infinitesimali o *marginali*.

Assumeremo che le preferenze siano rappresentate da funzioni d'utilità continue (non necessariamente quasi convesse) che, per semplicità, supporremo strettamente monotone. Ciò ci permette di restringerci alla situazione in cui i prezzi sono positivi e tutti i beni sono desiderati:

$$z \in x + \mathbb{R}_+^{lm} \quad \text{e} \quad z \neq x \quad \Rightarrow \quad z^i \succ_i x^i \quad \text{per} \quad 1 \leq i \leq m.$$

L'insieme di produzione globale Y_S non sarà supposto convesso ma *regolare*, si veda Capitolo 7, nel senso che il suo bordo è una sottovarietà differenziabile di codimensione 1 di $\mathbb{R}_+^l$, cioè esiste (localmente) $\varphi_S : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ differenziabile con continuità tale che:

$$y \in Y_S \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_S(y_1, \ldots, y_l) \leq 0$$

e

$$\nabla \varphi_S \neq 0 \quad \text{per tutti gli} \quad y \quad \text{tali che} \quad \varphi_S(y) = 0.$$[8]

In questa situazione il bordo di Y_S, ∂Y_S, è una ipersuperficie $\mathscr{S}$ che in ogni punto y ha vettore normale dato da $\nabla \varphi_S(y)$, di conseguenza i vettori tangenti u a $\mathscr{S}$ (che originano in y) sono caratterizzati da $u \cdot \nabla \varphi_S(y) = 0$ e, in particolare, $z \in \mathbb{R}^l$ appartiene al piano tangente a $\mathscr{S}$ se e solo se

$$(z - y) \cdot \nabla \varphi_S(y) = 0.$$

Sia dunque, con le notazioni che abbiamo usato fino ad ora, $(x^1, \ldots, x^m)$ un ottimo di Pareto (debole o forte), $\sum_{i=1}^m x^i \in \mathbb{R}_+^l$ il consumo globale corrispondente e y il vettore produzione, $y = \sum x^i - \Omega \in Y_S$.

[8] Ricordiamo che ∇ è l'operatore $\nabla = (\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_l})$.

8.18. PROPOSIZIONE. *Sia $(x^1,\dots,x^m)$ un ottimo di Pareto e sia $y=\sum x^i-\Omega$ il vettore di produzione associato. Allora*

(1) *y appartiene al bordo $\mathscr{S}$ dell'insieme di produzione Y_S,*
(2) *vale*

$$\nabla\varphi_S(y)\in\mathbb{R}^l_+. \tag{8.22}$$

DIMOSTRAZIONE. (1) Infatti se $\varphi_S(y)<0$, esisterebbe u con tutte le componenti strettamente positive tale che $y+u\in Y_S$, quindi

$$\sum_{i=1}^m(x^i+\frac{u}{m})=y+u+\Omega\in Y_S+\Omega \quad \text{e} \quad x^i+\frac{u}{m}\succ_i x^i\ 1\le i\le m,$$

contro l'ipotesi che x sia un ottimo di Pareto.
(2) Quanto appena visto ci dice che, se u ha tutte le componenti strettamente positive, allora $y+u\in Y_S$ (a meno che x non sia un ottimo di Pareto) si scrive anche come

$$(y+\mathrm{int}(\mathbb{R}^l_+))\cap Y_S=\emptyset.$$

In mancanza di convessità non possiamo separare i due insiemi, ma vale lo stesso che l'iperpiano H tangente a $\mathscr{S}$ per y non incontra il cono aperto $y+\mathrm{int}(\mathbb{R}^l_+)$, quindi (8.22). Infatti, se esistesse $v\in H$ con tutte le componenti strettamente positive, ci sarebbe un cammino differenziabile $\eta(y)$ in $\mathscr{S}$ di cui v sarebbe la tangente nel ponto iniziale:

$$\eta(t)\in\mathscr{S}\ \forall t\in[0,1[,\quad \eta(0)=y,\quad \frac{d\eta}{dt}(0)=v.$$

Quindi $\eta_k(t)>\eta_k(0)=y^k$ per tutti i t sufficientemente piccoli. Per questi t gli $\eta(t)$ apparterrebbero a $(y+\mathrm{int}(\mathbb{R}^l_+))\cap Y_S$, assurdo. □

A parole, i vettori di produzione y associati a un ottimo di Pareto necessariamente debbono appartenere a $\mathscr{S}$ e nel punto y la normale a $\mathscr{S}$ deve essere diretta nella direzione del cono positivo di $\mathbb{R}^l$. In particolare, possiamo definire il *sistema di prezzi* $p\in\bar{\Pi}$

$$p_k:=\frac{\frac{\partial\varphi_S}{\partial y^k}(y)}{\sum_{k=1}^l\frac{\partial\varphi_S}{\partial y^k}(y)} \tag{8.23}$$

che diciamo *derivato*[9] dall'ottimo di Pareto x e dal vettore di produzione y.

Dato ora un vettore di produzioone globale $y\in Y_S$, ci domandiamo sotto quali condizioni un vettore infinitamente vicino $y+dy$ continua ad appartenere a Y_S? In altre parole, quali sono i piccoli cambiamenti $(dy_1,\dots,dy_l)$ che si possono apportare al bilancio di produzione $(y_1,\dots,y_l)$ restando tra le produzioni possibili? Nessun problema se y è interno a Y_S ma, se $y\in\mathscr{S}$, ci sono problemi se dy, diretto non in modo opportuno, fa uscire da Y_S. Nel senso infinitesimale o marginale valgono le

$$d\varphi_S(y)=\nabla\varphi_S(y)\cdot dy \tag{8.24}$$

$$\varphi_S(y+dy)=\varphi_S(y)+d\varphi_S(y). \tag{8.25}$$

[9] Osserviamo che, nel caso di insieme di produzione convesso e regolare, le nozioni di sistema di prezzi derivato da o sostenuto da coincidono. Osserviamo pure che un insieme può essere convesso ma non regolare e non convesso ma regolare.

Quindi, se per y con $\varphi_S(y) = 0$, vogliamo che $y + dy \in Y_,S$ cioè $\varphi_S(y+dy) \le 0$, allora l'accrescimento marginale di φ_S dovrà essere non positivo:

$$d\varphi_S(y) = \nabla\varphi_S(y)\cdot dy \le 0 \tag{8.26}$$

e si avrà uguaglianza se si vuole che $y+dy \in \mathscr{S}$:

$$d\varphi_S(y) = \nabla\varphi_S(y)\cdot dy = 0 \tag{8.27}$$

Geometricamente: $\nabla\varphi_S(y)$ è la normale esterna al bordo di Y_S. Dire che $\nabla\varphi_S(y)\cdot dy$ è nullo significa che $y+dy$ appartiene all'iperpiano tangente H a $\mathscr{S}$, dire che è negativo significa che $y+dy$ sta dalla stessa parte di Y_S rispetto ad H.

Se p è il sistema di prezzi derivato dall'ottimo di Pareto x e dal vettore di produzione associato y, dividendo le (8.26) (8.27) per $\sum_{k=1}^{l} \frac{\partial\varphi_S}{\partial y_k}(y)$ otteniamo

$$y+dy \in Y_S \quad \Rightarrow \quad p\cdot dy \le 0 \tag{8.28}$$

$$y+dy \in \mathscr{S} \quad \Rightarrow \quad p\cdot dy = 0. \tag{8.29}$$

Economicamente: Quando il bilancio di produzione passa da y a $y+dy$, il profitto passa da $p\cdot y$ a $p\cdot(y+dy)$; quindi $p\cdot dy$ rappresenta il *profitto marginale*. La (8.28) ci dice che il profitto marginale è sempre non positivo, ma è possibile annullarlo mantenendo il nuovo livello di produzione sulla superficie $\mathscr{S}$, (8.29). Possiamo quindi enunciare:

8.19. PROPOSIZIONE. *Sia $(x^1,\dots,x^m)$ un ottimo di Pareto, $y = \sum x^i - \Omega$ il vettore produzione associato e z un vettore di produzione infinitamente vicino a y. Il profitto marginale*

$$p\cdot(z-y)$$

è negativo per $z \in Y_S$ e nullo per $z \in \mathscr{S}$.

Ma quello che cerchiamo è un sistema di prezzi e una reazione individuale degli agenti che porti a realizzare l'ottimo di Pareto di partenza. Torniamo allora alla situazione solita. Le risorse iniziali Ω sono ripartite tra gli m consumatori, le possibilità di produzione Y_S tra p imprese

$$\Omega = \omega^1 + \ldots + \omega^m, \quad Y_S = Y_1 + \ldots + Y_p.$$

Supponiamo che le funzioni d'utilità sono monotone e differenziabili con continuità. Gli insiemi di produzione Y_k sono definiti dalle funzioni φ_k, differenziabili con continuità:

$$y \in Y_k \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_k(y) \le 0.$$

Infine, supponiamo che ∇u_i e $\nabla\varphi_k$ siano non nulli.

In accordo con quanto visto, assumiamo come sistema di prezzi $p \in \bar{\Pi}$ il sistema di prezzi derivato dall'ottimo di Pareto e dal vettore di produzione globale, la funzione φ_S è associata all'insieme Y_S e supponiamo $\nabla\varphi_S$ non nullo. In questa situazione abbiamo visto che l'economia incorre in un profitto negativo o nullo. Lo stesso succede individualmente per i produttori.

8.20. PROPOSIZIONE. *Sia $(x^1,\dots,x^m)$ un ottimo di Pareto e siano $y^1, \dots, y^p$ vettori di produzione verificanti*

$$y = \sum y^k = \sum x^i - \Omega. \tag{8.30}$$

Per ogni k e per ogni vettore di produzione $z^k \in Y_k$ infinitamente vicino a y^k vale

$$p \cdot (z^k - y^k) \leq 0. \tag{8.31}$$

DIMOSTRAZIONE. Se scambiamo y^k con z^k e lasciamo gli altri termini invariati, la somma y aumenta di $z^k - y^k$. Se z^k appartiene a Y_k, il vettore $y + (z^k - y^k)$ appartiene a Y_S. La Proposizione 8.19 ci dà allora la relazione cercata purché z^k sia infinitamente vicina a y^k. □

Confrontando la (8.31) con la relazione

$$\nabla\varphi_k(y^k) \cdot (z^k - y^k) \leq 0$$

ricaviamo che i vettori $\nabla\varphi_k(y^k)$ sono tutti colineari con p e quindi fra di loro, in altre parole gli iperpiani H_k tangenti a ∂Y_k in y^k sono tutti paralleli tra di loro. *Per realizzare l'ottimo cercato ciascun produttore dovrà annullare il suo profitto marginale.* E i consumatori?

8.21. PROPOSIZIONE. *Sia $(x^1, \ldots, x^m)$ un ottimo di Pareto e sia $p \in \bar{\Pi}$ il sistema di prezzi derivato. Per ogni i e ogni paniere di beni z^i infinitamente vicino a x^i e preferito a quest'ultimo si ha*

$$p \cdot (z^i - x^i) \geq 0. \tag{8.32}$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $i = 1$ e sia $z^1 \succ_1 x^1$. L'allocazione $(z^1, x^2, \ldots, x^m)$ è preferita a $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$). Poiché quest'ultima è un ottimo di Pareto la prima non è reaizzabile

$$\begin{aligned} y &= x^1 + x^2 + \ldots + x^m + \Omega \in Y_S \\ z &= z^1 + x^2 + \ldots + x^m + \Omega \notin Y_S. \end{aligned}$$

Allora $\varphi_S(y) = 0$ e $\varphi_S(z) > 0$. Poiché $z - y = z^1 - x^1$ è infinitamente piccolo abbiamo

$$d\varphi_S = \nabla\varphi_S(y) \cdot (z - y) > 0$$

che non è altro che la tesi se si tiene conto della definizione di p, (8.23) □

Che z^i sia preferito a x^i significa che $u_i(z^i) > u_(x^i)$ o, se sono infinitamente vicini,

$$\nabla u_i(x^i) \cdot (z^i - x^i) < 0.$$

Come prima, deduciamo che i vettori $\nabla u_i(x^i)$ sono tutti colineari con p e quindi fra di loro, in altre parole gli iperpiani H_k tangenti alle superfici di livello di u_i in x^i sono tutti paralleli tra di loro. Conseguentemente, la Proposizione 8.21 si esprime in una delle tre forme seguenti:

$$\begin{aligned} z^i \succ_i x^i \quad &\Rightarrow \quad p \cdot z^i > p \cdot x^i \\ x^i \succcurlyeq_i z^i \quad &\Rightarrow \quad p \cdot z^i \leq p \cdot x^i \\ x^i \sim_i z^i \quad &\Rightarrow \quad p \cdot z^i = p \cdot x^i. \end{aligned}$$

La prima dice che il consumatore i, che paga $p \cdot x^i$ per ottenere x^i, non può migliorare marginalmente il suo consumo senza pagare di più. La seconda dice che un paniere di beni infinitamente vicino a x^i considerato inferiore gli costa meno. Le tre condizioni ci dicono quindi che *i consumatori annulleranno i loro costi marginali*, $p \cdot (z^i - x^i)$.

Nel caso in cui le relazioni di preferenza siano convesse annullare il costo marginale è la stessa cosa che massimizzare la funzione d'utilità, ritroviamo quindi

8.22. PROPOSIZIONE. *Supponiamo che le funzioni d'utilità siano quasi convesse e siano* $x \in \operatorname{int}(\mathbb{R}^{lm}_+)$ *e* $p \in \bar{\Pi}$ *vettori dati. Se* $\nabla u_i(x^i) \neq 0$, *le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(a) $p \cdot (x^i - z^i) \geq 0$ *per ogni* z^i *vicino a* x^i *e verificante* $x^i \succcurlyeq_i z^i$.
(b) $u_i(z^i) \leq u_i(x^i)$ *per* $z^i \in \mathbb{R}^l_+$ *verificante* $p \cdot z^i < p \cdot x^i$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $z^i \neq x^i$ e verificante l'ipotesi in (b) $p \cdot z^i < p \cdot x^i$. Consideriamo la funzione $\phi(t) := u_i(tx^i + (1-t)z^i))$, si ha $\phi'(1) = \nabla u_i(x^i) \cdot (x^i - z^i)$. Per la condizione in (a) allora $\nabla u_i(x^i) = \lambda p$ con $\lambda > 0$, essendo $\nabla u_i(x^i) \neq 0$. Segue $\phi'(1) > 0$ e, per ε abbastanza piccolo $\phi(t) > \phi(1)$ per $t \in [1, 1+\varepsilon]$, cioè $y_t := tx^i + (1-t)z^i \succ_i x^i$. Questo dimostra la tesi in (b). Infatti, se si avesse $u_i(z^i) > u_i(x^i)$ l'insieme dei beni strettamente preferiti a x^i conterrebbe z^i e y_t $t \in [1, 1+\varepsilon]$ e, essendo questo convesso, tutto il segmento $[z^i, y_t]$, in particolare x^i, per cui $x^i \succ_i x^i$ assurdo.

Supponiamo ora x^i e y^i siano infinitamente vicini come in (a). Se $z^i \preccurlyeq_i x^i$, cioè $u_i(z^i \leq u_i(x^i)$, si ha $\nabla u_i(x^i) \cdot (x^i - z^i) \geq 0$. Da (b) si ha $p \cdot (x^i - z^i) > 0$, segue allora $\nabla u_i(x^i) = \lambda p$ con $\lambda > 0$, da cui segue il risultato la tesi di (a). $\square$

Abbiamo quindi trovato quello che cercavamo: Per realizzare l'ottimo di Pareto $(x^1, \dots, x^m)$ si calcola il sistema di prezzi $(p_1, \dots, p_l)$ che ne deriva e si assegna a ciascun consumatore i la somma $w_i := p \cdot x^i$. I consumatori reagiscono individualmente, scegliendo quello che loro preferiscono tra le cose che possono permettersi (se le relazioni di preferenza sono convesse) o annullando il loro costo marginale (se le relazioni di preferenza non sono convesse), e gli imprenditori, sempre individualmente, massimizzano il loro profitto globale (se i loro insiemi di produzione sono convessi) o annullano il loro profitto marginale (se i loro insiemi di produzione non sono convessi).

La Proposizione 8.20 e la Proposizione 8.21 sono, però, da intendere come regole di scelta compatibili con la realizzazione dell'ottimo, ma portano al risultato solo quando non sono ambigue, cioè designano per il consumatore i un solo paniere di beni e per il produttore k un solo vettore di produzione, altrimenti il consumatore e il produttore verrebbero lasciati con un ulteriore problema di scelta. Questo succede ad esempio in mancanza di convessità.

Ma c'è di più. Mentre, nel caso convesso, l'annullamento del profitto marginale, equivalente alla massimizzazione del profitto totale, appare come accettabile, nel caso generale presenta situazioni paradossali.

Nel caso di rendimento crescente[10] la teoria sviluppata mette gli imprenditori di fronte a un dilemma: accettare di lavorare nella direzione di un ottimo sociale e registrare un pesante deficit di gestione o realizzare un beneficio, sapendo che una migliore utilizzazione delle risorse e dell'apparato produttivo sarebbe possibile: c'è quindi un conflitto tra l'imperativo della gestione individuale delle imprese e la gestione globale dell'economia.

Annullare il profitto marginale e correre verso un deficit non può che apparire come una regola innaturale di gestione delle imprese. Se si vuole questo, le alternative possibili sembrano solo l'imposizione dello stato o che lo stato se ne assuma i costi;

[10] I settori produttivi a rendimento crescente sono per natura quelli dove alcuni grandi imprese si dividono il mercato.

altrimenti non resta altro che la ricerca di una teoria economica diversa o almeno un arricchimento della teoria. Ma noi concludiamo qui la nostra analisi.

CAPITOLO 9

Giochi non cooperativi

Come abbiamo già detto nella Sezione 5.2.6[1], la teoria dei giochi è un insieme di metodi analitici pensati per aiutare a comprendere ogni attività competitiva in cui i giocatori si confrontano tra loro seguendo certe regole; tipico è un gioco a due in cui o vince l'uno o l'altro. Senza voler essere lontanamente esaustivi – come visto, la letteratura sull'argomento è enorme – ci limitiamo qui a presentare alcuni elementi introduttivi a completamento dell'approccio competitivo all'economia e alle scelte sociali.

9.1. *Giochi in forma normale e in forma estesa*

Si distinguono due modelli o tipi di gioco di base: quelli *strategici* o, nella terminologia di von Neumann e Morgenstern, in *forma normale* e i giochi in *forma estesa*.

Nei *giochi stategici* per ciascuno degli n giocatori è dato un insiems Σ_i di strategie possibili σ_i che specificano il comportamento del giocatore i in ciscuna situazione intermedia e, infine, una funzione $G_i(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$, $G_i : \prod_{i=i}^n \to \mathbb{R}$, che rappresenta il guadagno del giocatore i se il primo giocatore usa la strategia σ_1, il secondo la strategia σ_2, ..., e l'n-simo giocatore la strategia σ_n. È esclusa ogni forma di comunicazione o collaborazione tra i giocatori, ciascuno sceglie la sua strategia senza conoscere la strategia degli altri e quello che si vorrebbe determinare è una n-pla di strategie $(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_n)$ di *equilibrio*. Nella formulazione di Nash, ([127] [129] ma l'idea può esser fatta risalire almeno a Antoine Augustin Cournot [40], queste saranno caratterizzate dal fatto che ciascun giocatore ha giocato al meglio in accordo con il proprio criterio e considerando come dati le strategie degli altri. Più precisamente

9.1. DEFINIZIONE (*Nash*). Una n-pla di strategie $(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_n)$ si dice in equilibrio se

$$G_i(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_{i-1},\sigma_i,\bar\sigma_{i+1},\dots,\bar\sigma_n) \le G_i(\bar\sigma_1,\dots,\bar\sigma_{i-1},\bar\sigma_i,\bar\sigma_{i+1},\dots,\bar\sigma_n)$$

per ogni $i = 1,\dots,n$ e per ogni $\sigma_i \in \Sigma_i$.

Non sempre esistono strategie di equilibrio e prima di arrivare al *teorema di equilibrio di Nash*, che specifica giochi per per cui esiste sicuramente un equilibrio, studieremo vari tipi di giochi.

[1] A cui rimandiamo per una selezione di riferimenti bibliografici.

Un *gioco in forma estesa* è un gioco in cui si specifica la struttura sequenziale dei problemi di decisione incontrati dai giocatori ad ogni passo; supporremo anche che il gioco sia *finito*, cioè termina dopo un numero finito di mosse, e che l'informazione sia completa, cioè ogni giocatore è informato su cosa sia accaduto nelle mosse precedenti. All'inizio del gioco ciascun giocatore prenderà in considerazione tutte le situazioni in cui può venirsi a trovare, un insieme finito $\mathscr{S}_i$. Per siascun $S \in \mathscr{S}_i$, egli sceglierà un successore tra quelli a lui permessi. La collezione dei $\sigma_i(S), S \in \mathscr{S}_i$, costituisce la strategia del giocatore i. A questo punto la partita ha uno svolgimento naturale e si conclude con una situazione finale $S_F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Se il guadagno associato alla n-pla $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ è il guadagno associato a $S_F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, vediamo che ogni gioco a informazione completa si può mettere in forma normale. In generale, giochi in forma estesa a informazione completa diversi possono avere la stessa forma normale, ma vale il seguente teorema, a volte chiamato *teorema di Zermelo*,

9.2. TEOREMA. *Ogni gioco finito a informazione completa ammette un equilibrio.*

Non daremo la dimostrazione di questo teorema per cui rimandiamo alla letteratura citata, accenniamo solamente all'idea. Due osservazioni sono rilevanti: (1) il numero di mosse di un qualunque cammino che dalla situazione iniziale porta ad una situazione finale è finito, come si dice il gioco ha lunghezza finita (per lunghezza si intende in numero massimo di mosse necessarie a finire la partita), (2) se si considera una situaziano intermedia e quello che segue, ignorando tutto il resto, si è ancora in presenza di un gioco a informazione completa. Ora evidentemente ogni gioco di lunghezza 1 ha soluzione che chiaramente è un equilibrio. Se il gioco ha lunghezza 2, il giocatore di turno che parte dal nodo iniziale si trova a dover scegliere tra cammini che portano o a una situazione finale o a un gioco di lunghezza 1. Poiché il risultato di un gioco di lunghezza 1 è noto, il giocatore che si trova a decidere inizialmente conosce il risultato di tutte le sue scelte e può scegliere il ramo che lo porta al risultato per lui più conveniente; gli altri giocatori non hanno obiezioni da fare e il loro potere decisionale è al più quello di sceglier un sottogioco che non altererà il risultato finale. Siamo di nuovo in presenza di un equilibrio di Nash. Per dimostrare il teorema basterà quindi implementare una dimostrazione formale per induzione, ma la cosa non è completamente banale.

Si noti che il tipo di dimostrazione che ne risulta è costruttivo, quindi produce un algoritmo che possiamo applicare; una tipico caso in cui è applicabile è il gioco degli scacchi con i limiti che derivano dal mettere in memoria *tutte* le strategie, che sono un po' tante.

9.2. *Alcuni giochi elementari*

Passiamo ora in rassegna alcuni giochi elementari e, allo stesso tempo, importanti e celebri. Contestualmente descriviamo anche il modo in cui questi siano il risultato della rappresentazione matematica astratta di situazioni reali o plausibili. Per facilitare l'esposizione consideriamo soltanto giochi finiti molto semplici, cioè con due giocatori e due strategie. Come vedremo nel Capitolo 10 la semplicità matematica di questi esempi non impedisce loro di occupare un posto centrale nella riflessione sull'uso della matematica in economia[2].

Dilemma del prigioniero. Cominciamo dal gioco strategico forse più conosciuto dai non specialisti, il *Dilemma del prigioniero*. La forma di gioco è ispirata a uno scenario di conflitto esacerbato sviluppato nel 1950 da Merrill Flood and Melvin Dresher, due ricercatori della RAND corporation[3]. Due malviventi (i e j) vengono catturati e interrogati separatamente. A entrambi viene offerto di denunciare (D) l'altro in cambio della clemenza nel caso in cui il socio scelga invece di coprire (C), o di una pena irrisoria nel caso in cui anche il socio scelga di denunciare[4]. La rappresentazione in forma strategica del gioco è data nella figura Figura 1

		j	
		C	D
i	C	3,3	0,4
	D	4,0	1*,1*

FIGURA 1. Una rappresentazione in forma normale del Dilemma del Prigioniero. (D,D) è l'unico equilibrio di Nash.

Illustriamo ora in modo informale come si applica al Dilemma del prigioniero l'idea centrale del concetto di soluzione per i giochi non cooperativi: la risposta ottimale alla migliore strategia dell'avversario. Possiamo immediatamente identificare le risposte ottimali nella forma strategica del Dilemma del prigioniero scomponendo in due matrici individuali la sua forma normale. Nella prima, descritta nella Figura 2, indichiamo i payoff di tutte le strategie a disposizione di i e nella seconda (Figura 3) i payoff delle strategie a disposizione di j. Indichiamo con un asterisco le rispettive risposte ottimali.

È immediato osservare come D sia una risposta ottimale di i alle strategie di j dal momento che D è la risposta ottimale di i sia a C che a D.

2 È certamente questa possibilità di trattare matematicamente situazioni realistiche che ha resto il linguaggio dei giochi uno degli strumenti analitici più diffusi nelle scienze sociali. A titolo di esempio rappresentativo si veda [155].

3 Ricordiamo come la RAND corporation ospitasse la *think tank* statunitense deputata all'elaborazione strategica durante la Guerra Fredda. Tra le tante figure di rilievo che a vario titolo vi hanno contribuito ricordiamo John von Neumann e Lloyd Shapley.

4 Riportiamo la versione originale.

> Alice and Bob are gangsters in the Chicago of the 1920s. The District Attorney knows that they are guilty of a major crime, but is unable to convict either unless one of them confesses. He orders their arrest, and separately offers each the following deal: If you fail to confess but your accomplice confesses, then you will be convicted and sentenced to the maximum term in jail. If you both confess, then you will both be convicted, but the maximum sentence will not be imposed. If neither confesses, you will both be framed on a tax evasion charge for which a conviction is certain.

Oltre che per la fomulazione originale, i lettori interessati possono consultare [141], ricco di dettagli storici e culturali sul rapporto tra teoria dei giochi e guerra fredda.

		j: C	j: D
i	C	3,	0,
	D	4*,	1*,

FIGURA 2. Risposte ottimali di i

Ma lo stesso vale per j, D è la sua risposta ottimale alle strategie ottimali di i. Poiché D è la risposta ottimale *per entrambi i giocatori*, è del tutto naturale pensare che la coppia (D,D) costituisca una soluzione strategicamente razionale del gioco. Il concetto di equilibrio di Nash si basa essenzialmente su questa idea: una volta fatta la scelta della propria strategia, nessun giocatore potrà aspettarsi di trarre beneficio dalla *deviazione unilaterale* dalla strategia scelta. Osserviamo che in casi semplici come questo, l'eliminazione delle risposte non ottimali (o *dominate*) fornisce una procedura effettiva per l'identificazione degli equilibri, se esistono.

Il gioco dell'euro. Come vedremo tra breve tutti i giochi ammettono un equilibrio, a patto che ci accontentiamo di averlo nelle *strategie miste*. Anteponiamo, mediante il gioco dell'Euro, la discussione informale del concetto alla definizione rigorosa. Nel gioco dell'Euro i e j scelgono se giocare testa (T) oppure croce (C). Se compiono la stessa scelta, i riceve 1 Euro da j, mentre se compiono scelte diverse, è j a ricevere 1 Euro da i. Il gioco rappresentato nella Figura 4 cattura questa situazione adeguatamente.

Il gioco presenta due differenze importanti rispetto al Dilemma del prigioniero. La più evidente, osservando la struttura di payoff, è che si tratta di un gioco a *somma nulla* e quindi di una situazione in cui non è possibile che entrambi i giocatori siano *vincenti*: i guadagna esattamente ciò che perde j, e viceversa. I giochi di questo tipo sono quindi adatti a rappresentare scenari di competizione pura. La seconda osservazione che scaturisce dall'ispezione dei payoff è che nessuna coppia di strategie soddisfa le condizioni di equilibrio. Prendiamo il punto di vista di i. Se j sceglie T, la migliore risposta di i è T. Ma se i sceglie T, T *non* è la migliore risposta di j. Ragionando in questo si vede immediatamente come nessuna coppia di strategie sia in equilibrio. D'altra parte, con l'introduzione del concetto di strategie miste, troviamo che il gioco ammette un'unico equilibrio dato dal fatto che entrambi i giocatori giocano T e C con probabilità $1/2$.

Il gioco della caccia al cervo. Se esistono giochi che non hanno equilibri nelle strategie pure, esistono anche giochi che hanno più di un equilibrio (nelle strategie pure), i giochi

		j: C	j: D
i	C	,3	,4*
	D	,0	,1*

FIGURA 3. Risposte ottimali di j

$$\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{j} \\
 & & \text{T} & \text{C} \\
\cline{3-4}
\multirow{2}{*}{i} & \text{T} & 1,-1 & -1,1 \\
\cline{3-4}
 & \text{C} & -1,1 & 1,-1 \\
\cline{3-4}
\end{array}$$

FIGURA 4. Il gioco dell'Euro non ammette equilibri di Nash nelle strategie pure

di *coordinamento*. Ancora una volta prendiamo uno scenario realistico come base della formulazione matematica del gioco, e ne prendiamo uno particolarmente importante nello sviluppo della filosofia politica, quello descritto nel *Discorso sull'ineguaglianza* da Jean-Jacques Rousseau . Un gruppo di cacciatori ha la possibilità di cacciare collettivamente un cervo (la preda più ambita) oppure individualmente una lepre (la preda meno ambita). Nessuno, da solo, riesce a cacciare un cervo, mentre tutti i cacciatori sono sufficientemente versati per poter catturare una lepre in autonomia. In questo contesto, osserva Rousseau, il passaggio casuale di una lepre crea un incentivo per i cacciatori a distogliere l'attenzione dall'obiettivo comune. Possiamo rappresentare la versione a due giocatori che denominiamo i e j della *Caccia al cervo* mediante la forma normale descritta nella Figura 5, dove C e L sono le strategie che corrispondono rispettivamente a "cacciare il cervo" e "cacciare una lepre".

$$\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{j} \\
 & & \text{C} & \text{L} \\
\cline{3-4}
\multirow{2}{*}{i} & \text{C} & 2^*,2^* & 0,1 \\
\cline{3-4}
 & \text{L} & 1,0 & 1^*,1^* \\
\cline{3-4}
\end{array}$$

FIGURA 5. Una rappresentazione in forma strategica del gioco della Caccia al cervo. Il payoff legato al cervo è 2 e quello alla lepre 1. (Si assume che la decisione di cacciare equivalga all'effettiva cattura della preda).

Si vede immediatamente che (C,C) e (L,L) sono entrambi equilibri di Nash. Si pone dunque in modo naturale il problema di *selezionare* uno dei due equilibri. Nonostante la sua semplicità, si tratta di uno dei problemi più dibattuti nella teoria dei giochi degli ultimi decenni, e coinvolge aspetti metodologici, formali e sperimentali[5].

[5] Thomas Schelling, uno dei primi teorici dei giochi a formulare esplicitamente il problema, ha espresso profondo scetticismo riguardo la possibilità di darne una soluzione formale.

> One cannot, without empirical evidence, deduce what understandings can be perceived in a non-zero sum game of maneuver any more than one can prove, by purely formal deduction, that a particular joke is bound to be funny [155], p. 164

Questo tipo di osservazione ha stimolato molto lavoro sperimentale sulle condizioni che favoriscono la selezione di equilibri efficienti. Per una bibliografia recente si veda [45]. Un'altra reazione all'*impasse* generata dalla molteplicità degli equilibri è quella di interpretarla come un segnale dell'inadeguatezza

Gioco dell'ultimatum. Il gioco forse più discusso il letteratura è un esempio di gioco in forma estesa con informazioni perfette e va sotto il nome di gioco dell'Ultimatum [75]. Chiamiamo i giocatori Proponente e Ricevente. Al Proponente vengono affidati 100 Euro che deve ripartire tra sè e il Ricevente. Se il Ricevente accetta la somma, la divisione scelta da Proponente avviene effettivamente. Altrimenti nessuno ottiene nulla[6]. Come deve comportarsi il Proponente per aderire ai canoni di razionalità che abbiamo assunto fino ad ora? Iniziamo osservando che la razionalità della scelta del Proponente dipende dall'ipotesi di conoscenza condivisa della razionalità dei giocatori, e in particolare dal fatto che il Proponente sa che il Ricevente massimizza la propria utilità personale. Sotto questa ipotesi risulta evidente che qualsiasi somma non nulla debba essere accettata dal Ricevente. Quindi una soluzione razionale per il Proponente è la ripartizione in cui tiene per sè 99 dei 100 Euro. Come discuteremo nel Capitolo 10 questa soluzione è incompatibile con alcune intuizioni elementari del concetto di giustizia.

9.3. *Giochi a somma nulla*

D'ora in poi considereremo giochi a due persone a somma nulla, la situazione competitiva più semplice da immaginare: il guadagno dell'uno è la perdita dell'altro. I riferimenti naturale sono von Neumann [188] e von Neumann e Morgenstern [190] oltre alla letteratura già citata.

Consideriamo allora un gioco con due giocatori P e Q, con insiemi di strategie rispettivamente A e B e funzioni d'utilità $U_P(x,y)$ e $U_Q(x,y)$ che rappresentano per ogni scelta della strategia $x \in A$ da parte di P e $y \in B$ da parte di Q il guadagno per P e per Q risultante dalle scelte x e y. Supponiamo ancora che il gioco sia *a somma nulla*, cioè che il valore comune $K(x,y) := U_P(x,y) = -U_Q(x,y)$ sia allo stesso tempo il guadagno per P e la perdita (meno il guadagno) per Q risultante dalla scelta delle strategie x e y.

dell'equilibrio di Nash come concetto di soluzione. In questo panorama il concetto di *equilibrio correlato* di Robert Aumann ha svolto un ruolo particolarmente importante negli ultimi decenni. Nell'articolo che ha iniziato questo filone di ricerca Aumann scrive

> why should any player assume that the other players will play their components [of a Nash Equilibrium] and indeed why should they? [...] In a two-person game, for example, Player 1 would play his component only if he believes that Player 2 will play his; this in turn would be justified only by 2's belief that 1 will play his component; and so on. [14]

[6] Ariel Rubinstein [148] nota come il gioco catturi un'ampia serie di interazioni economiche reali:

> In every visit to the supermarket, you are actually participating in an ultimatum game. You want a carton of milk. The supermarket places an ultimatum before you – either buy it at the set price or don't buy it. There is no point in arguing with the cashier at the supermarket about the price of milk. (p.108)

Ciascun giocatore fa quanto di meglio gli è possibile contro le strategie dell'altro giocatore e, così facendo, si aspetta, indipendentemente dalle stratege dell'altro, un guadagno (d'ora in poi "payoff" nel linguaggio internazionale) dato da

$$\begin{aligned}\mathrm{Payoff}(P) &:= \inf_{y\in B}\sup_{x\in A} U_P(x,y) = \inf_{y\in B}\sup_{x\in A} K(x,y),\\ \mathrm{Payoff}(Q) &:= \inf_{x\in A}\sup_{y\in B} U_Q(x,y) = \inf_{x\in A}\sup_{y\in B} -K(x,y) = -\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} K(x,y).\end{aligned}$$

Sebbene il gioco sia a somma zero i payoffs dei due giocatori non sono correlati ed abbiamo in linea di principio solo

$$\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} K(x,y) \le \inf_{y\in B}\sup_{x\in A} K(x,y), \tag{9.1}$$

cioè,

$$\mathrm{Payoff}(P) + \mathrm{Payoff}(Q) \ge 0.$$

Charamente, se la diseguaglianza precedente è stretta non c'è nessuna scelta di strategie che permette ai due giocatori di ottenere i loro payoff.

La prossima proposizione dà una condizione per l'esistenza di una coppia di *strategie ottimali*, cioé di strategie che permettono a ciascun giocatore di ottenere il proprio payoff.

9.3. PROPOSIZIONE. *Siano A e B insiemi arbitrari e $K : A\times B \to \mathbb{R}$ una funzione. Si definiscano $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ rispettivamente come*

$$f(x) := \inf_{y\in B} K(x,y), \qquad g(y) := \sup_{x\in A} K(x,y).$$

Allora esiste $(\bar{x},\bar{y}) \in A\times B$ tale che

$$K(x,\bar{y}) \le K(\bar{x},\bar{y}) \le K(\bar{x},y) \qquad \forall x,y \in A\times B \tag{9.2}$$

se e solo se f raggiunge il suo massimo in A, g raggiunge il suo minimo in B e $\sup_{x\in A} f(x) = \inf_{y\in B} g(y)$. In questo caso,

$$\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} K(x,y) = K(\bar{x},\bar{y}) = \inf_{y\in B}\sup_{x\in A} K(x,y).$$

DIMOSTRAZIONE. Se $(\bar{x},\bar{y})$ soddisfa (9.2), allora

$$\begin{aligned}K(\bar{x},\bar{y}) &= \inf_{y\in B} K(\bar{x},y) = f(\bar{x}) \le \sup_{x\in A} f(x),\\ K(\bar{x},\bar{y}) &= \sup_{x\in A} K(x,\bar{y}) = g(\bar{y}) \ge \inf_{y\in B} g(y),\end{aligned}$$

quindi $\sup_{x\in A} f(x) = \inf_{y\in B} g(y)$ se teniamo conto di (9.1). Lasciamo il resto della dimostrazione al lettore. □

Un punto $(\bar{x},\bar{y})$ con la proprietà (9.2) è un *punto di sella* per K. Di conseguenza , nel contesto dei giochi a somma zero, un punto di sella di K fornisce una coppia di strategie ottimali ed è presto visto che un punto di sella è anche un equilibrio di Nash. Il valore di K su una coppia di strategie ottimali si chiama il *valore del gioco*. Rimandiamo la risposta, *teorema di min-max*, alla questione dell'esistenza di un punto di sella e discutiamo brevemente il caso di giochi a somma nulla finiti.

9.3.1. *Strategie miste ottimali*

Particolarmente interessante è il caso di giochi finiti a somma nulla. Supponiamo che le strategie dei due giocatori P e Q siano in numero finito rispettivamente $\Sigma_P := \{E_i,\dots,E_m\}$ e $\Sigma_Q := \{F_1,\dots,F_n\}$. Possiamo allora rappresentare il gioco con una matrice a m righe e n colonne con entrate

$$a_{ij} = U(E_i,F_j)$$

dove $U(E_i,F_j)$ è la funzione utilità risultante dalla scelta di E_i da parte di P e di F_j da parte di Q. Il gioco consiste allora per P nello scegliere una riga i e per Q nello scegliere una colonna j.

Se P sceglie la riga i si assicura, nella situazione più sfavorevole, un guadagno di almeno $\min_j a_{ij}$. La strategia max-min $\bar{i}$ massimizza questo guadagno minimo e gli assicura

$$\max_i \min_j a_{ij} =: \alpha.$$

Similmente per il giocatore Q. Adottando la strategia min-max $\bar{j}$ minimizza la sua perdita massima, perdendo meno che

$$\min_j \max_i a_{ij} =: \beta.$$

In generale

$$\alpha \le a_{\bar{i}\bar{j}} \le \beta$$

Se $\alpha = \beta$, le due strategie sono in equilibrio, nessuno dei due giocatori ha interesse a cambiare strategia; P guadagnerà esattamente quello che aveva previsto e Q perderà esattamente quello che aveva previsto.
Se $\alpha < \beta$ ai giocatori non sembra restare altro che giocare d'astuzia. O forse no?

L'idea risale a Emile Borel [29] [30] e consiste nell'inglobare il gioco in un gioco che lo estende. Assumiamo che P scelga E_i con probabilità x_i and Q scelga F_j con probabilità y_j (magari su basi sperimentali, ad esempio come risultato della ripetizione del gioco). Definiamo

$$A := \{x \in \mathbb{R}^m \,\Big|\, 0 \le x_i \le 1,\ \sum_{i=1}^m x_i = 1\},$$
$$B := \{y \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, 0 \le y_j \le 1,\ \sum_{j=1}^n y_j = 1\};$$

allora i payoff dei due giocatori sono dati da

$$U_P(x,y) = -U_Q(x,y) = K(x,y) := \sum_{i,j} U(E_i,E_j)x_i y_j. \tag{9.3}$$

Poiché $K(x,y)$ è un polinomio omogeneo di grado 2, il teorema di min-max della prossima sezione si applica e ci dà

9.4. TEOREMA (*von Neumann*). *In un gioco finito a somma nulla esistono strategie* miste *ottimali* $(\bar{x},\bar{y})$. *Queste sono punti di sella della funzione payoff attesa in* (9.3)*, e per loro vale*

$$\max_{x\in A}\min_{y\in B} K(x,y) = K(\bar{x},\bar{y}) = \min_{y\in B}\max_{x\in A} K(x,y).$$

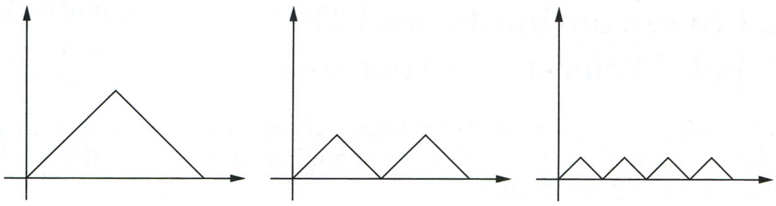

FIGURA 6. La successione di curve di Henri Lebesgue: tutte di lunghezza $\sqrt{2}$ convergono ad una curva di lunghezza 1.

L'agente P, seguendo la distribuzioni di probabilità $\bar{x}$, si assicurerà una aspettativa di guadagno, uguale al valore del gioco a strategia mista, superiore ad α, mentre Q, giocando la sua strategia mista $\bar{y}$ si assicurerà una speranza di perdita inferiore a β.

9.3.2. *Teorema di mini-massimo*

Veniamo ora all'enunciato e alla dimostrazione del teorema di min-max. A ciò premettiamo alcuni semplici fatti. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice *quasiconvessa* se i suoi insieme di sottolivello sono convessi, si dice *quasiconcava* se $-f$ è quasiconvessa.

Ricordiamo ancora che una funzione f si dice continua in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se, comunque presa una successione $\{x_k\}$ tale che $x_k \to x_0$ e per cui $f(x_k)$ converge (quando $k \to \infty$) si ha $f(x_k) \to f(x_0)$ (sempre per $k \to \infty$.)

Si dice invece che f è *semicontinua inferiormente* (rispettivamente *semicontinua superiormente*) se, comunque presa una successione $\{x_k\}$ tale che $x_k \to x_0$ e per cui $f(x_k)$ converge (quando $k \to \infty$) si ha che il limite di $f(x_k)$ è minore o uguale (rispettivamente, maggiore o uguale) a $f(x_0)$ (sempre per $k \to \infty$.)

Molte sono le motivazioni per introdurre le funzioni semicontinue, particolarmente in spazi metrici o in dimensione infinita:

- Si vede, con la stessa dimostrazione, che il teorema di Weierstrass di esistenza del minimo di una funzione continua su un compatto vale anche per le funzioni semicontinue inferiormente, in questo caso prende anche il nome di *teorema di Fréchet-Weierstrass*.
- L'estremo superiore (la funzione maggiorante più piccola) di una famiglia di funzioni continue è una funzione semicontinua inferiormente.
- Molte funzioni (più precisamente, funzioni di funzioni) importanti non sono continue, ma sono semicontinue: un classico esempio di Henri Lebesgue, si veda Figura 6, mostra che la funzione lunghezza di una curva non è continua per la convergenza uniforme, mentre è semicontinua inferiormente.

9.5. TEOREMA (*di minimax*). *Siano $A \subset \mathbb{R}^m$ e $B \subset \mathbb{R}^n$ due insieme compatti e convessi e sia $K : A \times B \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

(1) *$x \to K(x,y)$ è quasiconvessa e semicontinua inferiormente $\forall y \in B$,*
(2) *$y \to K(x,y)$ è quasiconcava e semicontinua superiormente $\forall x \in A$.*

Allora K ha un punto di sella in $A \times B$.

DIMOSTRAZIONE. Tenendo conto della Proposizione 9.3 basterà provare che i numeri

$$a := \min_{x \in A} \max_{y \in B} K(x,y) \qquad \text{and} \qquad b := \max_{y \in B} \min_{x \in A} K(x,y)$$

esistono e sono uguali. Si fissi $y \in B$, la funzione $x \to K(x,y)$ ha massimo in qualche $z(y) \in A$ poiché A è compatto, e $K(z(y),y) = \min_{x \in A} K(x,y)$. Poniamo

$$h(y) := -K(z(y),y), \qquad y \in B.$$

Mostreremo ora che h è quasiconvessa e inferiormente semicontinua, di conseguenza, esisterà

$$b := -\min_{y \in B} \Big(-\min_{x \in A} K(x,y) \Big) = \max_{y \in B} \min_{y \in A} K(x,y).$$

In modo simile si prova che esiste a.

Mostriamo che h è quasiconvessa e semicontinua inferiormente, cioè, per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$H := \Big\{ y \in B \,\Big|\, h(y) \le t \Big\}$$

è convesso e chiuso. Mostriamo che H è convesso. Per ogni $w \in B$ consideriamo

$$G(w) := \Big\{ y \in B \,\Big|\, -K(z(w),y) \le t \Big\}.$$

Per (ii), $G(w)$ è convesso e chiuso; inoltre, $H \subset G(w)$ $\forall w$, poiché $K(z(y),y) \le K((z(w),y)$ $\forall w, y \in B$. In particolare, per $x, y \in H$ e $\lambda \in]0,1[$ abbiamo $u \in G(w)$ $\forall w \in B$ se $u := (1-\lambda)y + \lambda x$, quindi $u \in G(u)$, cioè, $u \in H$. Ciò dimostra che H è convesso. Proviamo ora che H è chiuso. Sia $\{y_n\} \subset H$, $y_n \to y$ in B, allora $y \in G(w)$ $\forall w \in B$, in particolare, $y \in G(y)$, cioè, $y \in H$ che mostra che H è chiuso.

Proviamo ora che $a = b$. Poiché $b \le a$ resta ovviamente da mostrare solo che $a \le b$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e cosideriamo la funzione $T : A \times B \to \mathscr{P}(A \times B)$ data da

$$T(x,y) := \Big\{ (u,v) \in A \times B \,\Big|\, K(u,y) < b + \varepsilon,\ K(x,v) > a - \varepsilon \Big\}.$$

Vale $T(x,y) \ne \emptyset$ poiché $\min_{u \in A} K(u,y) \le b$ e $\max_{v \in B} K(x,v) \ge a$; inoltre, $T(x,y)$ è convessa. Poiché

$$\begin{aligned} T^{-1}(\{(u,v)\}) :&= \Big\{ (x,y) \in A \times B \,\Big|\, (u,v) \in T(x,y) \Big\} \\ &= \Big\{ (x,y) \in A \times B \,\Big|\, K(u,y) < b + \varepsilon,\ K(x,v) > a - \varepsilon \Big\} \\ &= \Big\{ x \in A \,\Big|\, K(x,v) > a - \varepsilon \Big\} \times \Big\{ y \in B \,\Big|\, K(u,y) < b - \varepsilon \Big\}, \end{aligned}$$

$T^{-1}(\{(u,v)\})$ è anche aperto. Il teorema di Kakutani, che per comodità del lettore rienunciamo nella forma Teorema 9.6, ci dice che esiste un punto fisso per T, cioè, che esiste $(\bar{x},\bar{y}) \in A \times B$ tale che $(\bar{x},\bar{y}) \in T(\bar{x},\bar{y})$, cioè, $a - \varepsilon < k(\bar{x},\bar{y}) < b + \varepsilon$. Poichè ε è arbitrario, concludiamo che $a \le b$. □

È subito visto che il Teorema 6.14 di Kakutani si può rienunciare nella seguente forma

9.6. TEOREMA (*Kakutani*). *Sia K un insieme non vuoto, compatto e convesso e sia $F : K \to \mathscr{P}(K)$ una funzione tale che*

(1) *$F(x)$ è non vuoto e convesso per ogni $x \in K$,*
(2) *$F^{-1}(y)$ è aperto in K per ogni $y \in \mathscr{P}(K)$.*

Allora F ha almeno un punto fisso, cioè, esiste $\bar{x}$ tale che $\bar{x} \in F(\bar{x})$.

9.7. *Punti di sella e programmazione lineare*. Il Teorema 9.4, pur assicurando l'esistenza di strategie miste ottimali, non è costruttivo. Vogliamo ora far vedere che, nel caso di giochi finiti, è possibile ricondurre la ricerca delle strategie ottimali miste a un problema di programmazione lineare per cui esistono algoritmi di soluzione. Osserviamo intanto che A e B sono insiemi compatti e convessi e che i vettori della base standard $e_1, e_2, \dots, e_m$ di $\mathbb{R}^m$ e $e_1, e_2, \dots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$ sono i *punti estremi* di A e B. Essendo le funzioni $x \to K(x,y)$ e $y \to K(x,y)$ lineari, esse raggiungono i loro massimi e minimi sui punti estremi, quindi

$$f(x) := \min_{y\in B} K(x,y) = \min_{1\le j\le n} K(x,e_i),$$
$$g(y) := \max_{x\in A} K(x,y) = \max_{1\le i\le m} K(e_i,y).$$

Si noti che $f(x)$ e $g(y)$ sono funzioni affini. Poniamo $\mathbf{U} := (U_{ij})$, $U_{ij} := U(E_i,E_j)$; allora massimizzare f in A è equivalente a massimizzare la funzione scalare z vincolata a $z \le K(z,e_i)$ $\forall i$ e $x \in A$, cioè, a risolvere

$$\begin{cases} F(x,z) := z \to \max, \\ z\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \le \mathbf{U}x, \\ \sum_{i=1}^m x_i = 1, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

In modo simile, massimizzare g in B è equivalente a risolvere

$$\begin{cases} G(y,w) := w \to \min, \\ w \ge \mathbf{U}^T y \le 0, \\ \sum_{i=1}^n y_i = 1, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

9.3.3. *Dualità convessa*

Siano $f, \varphi^1, \dots, \varphi^m : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funzioni convesse definite su un insieme convesso Ω. Supponiamo per semplicità che f e $\varphi := (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m)$ siano anche differenziabili. Poniamo

$$\mathscr{F} := \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\Big|\, \varphi^j(x) \le 0,\ \forall j = 1,\dots,m \Big\}.$$

Il problema primale dell'*ottimizzazione convessa*[7], si veda anche il Capitolo 7, è il seguente problema di minimo

(9.4) *Supponendo $\mathscr{F} \neq \emptyset$, minimizzare f in $\mathscr{F}$.*

La *lagrangiana* associata $\mathscr{L} : \Omega \times \mathbb{R}^m_+$ a (9.4), definita da

$$\mathscr{L}(x,\lambda) := f(x) + \lambda \cdot \varphi(x), \qquad x \in \Omega,\ \lambda \ge 0, \tag{9.5}$$

è convessa in x per ogni fissato λ e lineare in λ per ogni fissato x. Le condizioni di Kuhn–Tucker

$$\begin{cases} \mathbf{D}f(x^0) + \lambda^0 \cdot \mathbf{D}\varphi(x_0) = 0, \\ \lambda^0 \ge 0,\ x_0 \in \mathscr{F}, \\ \lambda^0 \cdot \varphi(x_0) = 0, \end{cases} \tag{9.6}$$

[7] Tra i molti testi sull'ottimizzazione convessa ci limitiamo a menzionare menzioniamo [54] [94] [146].

come abbiamo visto nel Capitolo 7, sono allora sufficienti a caratterizzare i punti di minimo di f su $\mathscr{F}$.

Vediamo ora che le condizioni di equilibrio di Kuhn–Tucker (9.6) sono fortemente correlate ai punti di sella della lagrangiana associata $\mathscr{L}(x,\lambda)$.

9.8. TEOREMA. *Consideriamo il problema primale* (9.4)*. Allora* (x_0,λ^0) *soddisfa le* (9.6) *se e solo se* (x_0,λ^0) *è un punto di sella per* $\mathscr{L}(x,\lambda)$ *in* $\Omega\times\mathbb{R}^m_+$*, cioè,*

$$\mathscr{L}(x_0,\lambda)\le\mathscr{L}(x_0,\lambda^0)\le cL(x,\lambda^0)$$

per ogni $x\in\mathscr{F}$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}^m$*,* $\lambda\ge 0$*. In particolare, se le condizioni di equilibrio di Kuhn–Tucker sono soddisfatte in* $(x_0,\lambda^0)\in\mathscr{F}\times\mathbb{R}^m_+$*, allora* x_0 *è un punto di minimo per* f *in* $\mathscr{F}$*.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla convessitá di $x\mapsto\mathscr{L}(x,\lambda^0)$ e da (9.6) deduciamo

$$\mathscr{L}(x,\lambda^0)\ge\mathscr{L}(x_0,\lambda_0)+\sum_{i=1}^n\Big(\nabla f(x_0)+\lambda^0\cdot\mathbf{D}\varphi(x_0)\Big)^i(x-x_0)^i=\mathscr{L}(x_0,\lambda^0)=f(x_0)$$

per ogni $x\in\Omega$. In particolare,

$$f(x)\ge f(x)+\lambda^0\cdot\varphi(x^0)=\mathscr{L}(x,\lambda^0)\ge f(x_0),$$
$$\mathscr{L}(x_0,\lambda^0)\ge f(x_0)+\lambda\cdot\varphi(x_0)=\mathscr{L}(x,\lambda^0).$$

Viceversa, supponiamo che (x_0,λ^0) sia un punto di sella per $\mathscr{L}(x,\lambda)$ on $\Omega\times\mathbb{R}^m_+$, cioè,

$$f(x_0)+\lambda\cdot\varphi(x_0)\le f(x_0)+\lambda^0\cdot\varphi(x_0)\le f(x)+\lambda^0\cdot\varphi(x)$$

per ogni $x\in\Omega$ and $\lambda\ge 0$. Dalla prima diseguaglianza deduciamo

$$\lambda\cdot\varphi(x_0)\ge\lambda^0\varphi(x_0) \tag{9.7}$$

per ogni $\lambda\ge 0$. Ciò implica che $\varphi(x_0)\le 0$ e, a sua volta, che $\lambda_0\cdot\varphi(x_0)\le 0$. Usando ancora (9.7) con $\lambda=0$, otteniamo la diseguaglianza opposta, concludendo che $\lambda_0\cdot\varphi(x_0)=0$. Infine, dalla prima diseguaglianza e il teorem di Fermat concludiamo

$$\nabla f(x_0)+\lambda^0\cdot\nabla\varphi(x_0)=0.$$

□

Introduciamo il *problema duale* dell'ottimizzazione convessa. Per $\lambda\in\mathbb{R}^m_+$, poniamo

$$g(\lambda):=\inf_{x\in\mathscr{F}}\mathscr{L}(x,\lambda),$$

dove $\mathscr{L}(x,\lambda)$ è la lagrangiana in (9.5).

Poiché $g(\lambda)$ è l'inf di una famiglia di funzioni affini, $-g$ è convessa e finita su

$$\mathscr{G}:=\{\lambda\in\mathbb{R}^m\,|\,\lambda\ge 0, g(\lambda)>-\infty\}.$$

Il problema duale della programmazione convessa è allora

$$\textit{Assunto } \mathscr{G}\ne\emptyset\textit{, massimizzare } g(\lambda) \textit{ in } \mathscr{G} \tag{9.8}$$

o, equivalentemente,

$$\textit{Assunto } \mathscr{G}\ne\emptyset\textit{, massimizzare } g(\lambda) \textit{ in } \{\lambda\in\mathbb{R}^m\,|\,\lambda\ge 0\}. \tag{9.9}$$

9.9. TEOREMA. *Se* $(x_0,\lambda^0)\in\mathscr{F}\times\mathbb{R}^m$ *soddisfa le condizioni di equilibrio di Kuhn–Tucker* (9.6)*, allora* x_0 *minimizza il problema primale,* λ_0 *massimizza il problema duale e* $f(x_0)=g(\lambda^0)=\mathscr{L}(x_0,\lambda^0)$.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione, $g(\lambda) = \sup_{x\in\mathscr{F}} \mathscr{L}(x,\lambda)$, e, ovviamente, $f(x) := \inf_{\lambda\geq 0} \mathscr{L}(x,\lambda)$. Quindi $g(y) \leq f(x)$ per tutti gli $x \in \mathscr{F}$ e i $\lambda \geq 0$, cosicché

$$\sup_{\lambda\geq 0} g(\lambda) \leq \inf_{x\in\mathscr{F}} f(x).$$

Poiché (x_0, λ^0) è un punto di sella per $\mathscr{L}$ in $\Omega\times\mathbb{R}_+$, la Proposizione 9.3 dà il risultato. □

9.4. *Equilibri di Nash*

Concludiamo questo capitolo enunciando e dimostrando il *teorema di equilibrio di Nash* per giochi non necessariamente a somma zero (si veda Nash [127] [129], oltre ovviamente la letteratura già citata) e, per semplicità, a due giocatori. In questo caso la nozione di equilibrio di Nash diventa

9.10. DEFINIZIONE. Siano A e B due insiemi e siano f e g due mappe da $A\times B$ in $\mathbb{R}$. La coppia di punti $(x_0, y_0) \in A\times B$ si dice un *punto* o un *equilibrio di Nash* per f e g se per tutti gli $(x,y) \in A\times B$ vale

$$f(x_0,y_0) \geq f(x,y_0), \qquad g(x_0,y_0) \geq g(x_0,y).$$

Ripetiamo, in un gioco a somma zero, cioè, $U_P(x,y) = -U_Q(x,y) =: K(x,y)$, ovviamente (x_0,y_0) è un punto di Nash se e solo se (x_0,y_0) è un punto di sella per K.

9.11. TEOREMA (*Nash*). *Siano A e B due insiemi non vuoti, convessi e compatti e siano $f,g : A\times B \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che $x \to f(x,y)$ è concava per ogni $y\in B$ e $y \to g(x,y)$ è concava per ogni $x\in A$. Allora esiste un punto di equilibrio di Nash per f e g.*

DIMOSTRAZIONE. Introduciamo la funzione $F : (A\times B)\times(A\times B) \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(p,q) = f(p_1,q_2) + g(q_1,p_2), \qquad \forall p = (p_1,p_2),\ q = (q_1,q_2) \in A\times B.$$

Chiaramente, F è continua e concava in p per ogni fissato q. Affermiamo che esiste $q_0 \in A\times B$ tale che

$$\max_{p\in A\times B} F(p,q_0) = F(p_0,q_0). \tag{9.10}$$

Prima di dimostrare l'affermazione, completiamo la dimostrazione del teorema sulla base della (9.10). Se poniamo $(x_0,y_0) := q_0$, abbiamo

$$f(x,y_0) + g(x_0,y) \leq f(x_0,y_0) + g(x_0,y_0) \qquad \forall (x,y) \in A\times B.$$

Scegliendo $x = x_0$, deduciamo $g(x_0,y) \leq g(x_0,y_0)$ $\forall y\in B$, mentre scegliendo $y = y_0$, troviamo $f(x,y_0) \leq f(x_0,y_0)$ $\forall x \in A$, quindi (x_0,y_0) è un punto di Nash.

Proviamo (9.10). Poiché la diseguaglianza $\geq$ è ovvia, per tutti gli $q_0 \in A\times B$, dobbiamo solo provare la diseguaglianza opposta. Per assurdo supponiamo che $\forall q \in A\times B$ esista $p\in A\times B$ tale che $F(p,q) > F(q,q)$ e poniamo

$$G_q := \Big\{ q \in A\times B \,\Big|\, F(p,q) > F(q,q) \Big\}, \qquad p \in A\times B.$$

La famiglia $\{G_p\}_{p\in A\times B}$ è un ricoprimento aperto di $A\times B$; conseguentemente esistono un numero finito di punti $p_1, p_2, \dots, p_k \in A\times B$ tali che $A\times B \subset \cup_{i=1}^k G_{p_i}$. Scriviamo

$$\varphi_i(q) := \max\Big(F(p_i,q) - F(q,q), 0\Big), \qquad q\in A\times B,\ i = 1,\dots,k.$$

Le funzioni $\{\varphi_i\}$ sono continue, non negative e, per ogni q, almeno una di loro non si annulla in q; possiamo allora definire

$$\psi_i(q) := \frac{\varphi_i(q)}{\sum_{j=1}^k \varphi_j(q)}$$

e la nuova mappa $\psi : A \times B \to A \times B$ come

$$\psi(q) := \sum_{i=1}^k \psi_i(q) p_i.$$

La mappa ψ manda l'insieme convesso e compatto $A \times B$ in sé, quindi ha un punto fisso $q' \in A \times B$, $q' = \sum_i \psi(q') p_i$. Essendo F concava,

$$F(q', q') = F\Big(\sum_i \psi_i(q') p_i, q'\Big) \geq \sum_{i=1}^k \psi_i(q') F(q_i, q').$$

D'altra parte, $F(p_i, q') > F(q', q')$ se $\psi_i(q') > 0$, quindi

$$F(q', q') \geq \sum_{i=1}^k \psi(q') F(q_i, q') > \sum_{i=1}^k \psi(q') F(q', q') = F(q', q'),$$

una contraddizione. □

Come ci si può aspettare molte sono le varianti (ad esempio si può sostituire la concavità con la quasiconcavità) e le generalizzazioni (il teorerema ha una formulazione in dimensione infinita) e molte sono le dimostrazioni disponibili (si ricordi che molte sono le formulazioni equivalenti del teorema di punto fisso di Brouwer), ma noi ci fermiamo qui.

CAPITOLO 10

Alcune considerazioni conclusive

Impiegata con spirito critico e congiuntamente alla riflessione sugli aspetti e problemi effettivi della realtà che intende inquadrare, la matematica è [. . .] strumento costruttivo, perché indocile e distruttivo: le contraddizioni incongruenze fratture asimmetrie che potrebbero sfuggire a chi immaginasse una spiegazione mentalmente o cercasse solo di esporla a parole, vengono messe in evidenza nella luce più cruda a chi ha presente quella struttura matematica [. . .]
(Bruno De Finetti, *Un matematico e l'economia*, Franco Angeli, 1969)

Penso che il tentativo di dare una spiegazione di carattere ontologico all'oggettività della matematica miri a fornire ragioni che non sono parte della matematica a favore della verità degli enunciati matematici; analogamente, il tentativo di dare una spiegazione di carattere ontologico all'oggettività dell'etica sarebbe un tentativo di fornire ragioni che non sono parte dell'etica a favore della verità degli enunciati etici. Considero entrambi i tentativi profondamente fuorvianti.
(Hilary Putnam, *Etica senza ontologia*, Bruno Mondadori, 2005)

Il rimedio a un cattivo ragionamento sta in un ragionamento migliore, e il compito dell'analisi razionale è proprio quello di guidare il passaggio dal primo al secondo. È senz'altro possibile che in alcune loro affermazioni gli "autori illuministi" non abbiano tenuto abbastanza conto della necessità di approfondire e procedere con prudenza. Ma difficilmente si può mettere per questo sotto accusa la prospettiva illuminista nel suo complesso, e ancora meno contestare il ruolo della ragione rispetto ai comportamenti giusti e alla buona politica sociale.
(Amartya K. Sen, *L'idea di giustizia*, Oscar Mondadori, 2010)

Il *teorema fondamentale dell'economia del benessere* è spesso considerato[1] il fulcro matematico – e quindi apparentemente incontestabile – di un argomento che, in buona sostanza, pone la "decentralizzazione" e la competizione nel libero mercato a fondamento del benessere sociale. Lo scopo che ci siamo prefissati è stato discutere questo argomento con un duplice obiettivo. Da una parte descrivere le idee e i metodi, alcuni nel loro dettaglio matematico, che conducono al teorema. Dall'altra mettere in evidenza e analizzare da un punto di vista logico e concettuale le ipotesi che portano al risultato e quindi a vagliarne l'interpretazione. Per farlo siamo partiti dalla seguente domanda centrale:

Qual è il modo migliore per allocare le risorse economiche
tra gli agenti razionali che costituiscono una società?

[1] Principalmente dalla destra liberista, ma non solo.

Le soluzioni o meglio le *proposte di soluzione* che abbiamo descritto e commentato nei capitoli precedenti sono il risultato di riformulazioni specifiche del problema in cui abbiamo reso matematicamente preciso cosa intendere per “migliore”, “risorse economiche”, “società” e “agenti razionali”. Le scelte che abbiamo seguito in questo senso hanno trasformato un problema reale dai contorni molto sfumati in diversi problemi astratti, ma trattabili con rigore logico e strumenti matematici. Si pensi, per concretezza, all’analisi del nucleo dei giochi cooperativi che, una volta stipulate le ipotesi di modellizzazione centrali, procede con metodi e tecniche (topologiche) che ben poco hanno a che vedere con l’interpretazione economica concreta che ne ha motivato lo sviluppo. Non si tratta a nostro avviso di un caso isolato, ma di un esempio rappresentativo dell’impostazione matematica dei problemi economico-sociali. In questo senso troviamo condivisibile il punto di vista espresso Bruno De Finetti in [42], p. 205, che a proposito del ruolo della matematica in economia osserva che questo è il campo

> dove maggiore appare il margine di arbitrarietà o almeno di elasticità nel tradurre in impostazione matematica una congerie mal dominabile di fatti e concetti e problemi in cui è anzitutto difficile discernere ciò che è più o meno contingente, accidentale, condizionato a circostanze variabili e transeunte, da ciò che in certo senso è significativo, invariante, essenziale.

Per questo, osserva De Finetti, proprio nel campo della teoria economica e più in generale delle scienze sociali, la matematica diventa “strumento costruttivo, perché indocile e distruttivo”.

È naturale riflettere, a questo punto, sulla rilevanza delle soluzioni che abbiamo derivato nelle economie astratte dei capitoli precedenti rispetto al problema concreto di partenza[2]. La conclusione è animata da scetticismo e propositività. Da un lato la nostra analisi mostra chiaramente i limiti dell’argomento che vede la promozione del libero mercato e della competizione tra i membri della società come il “corollario pratico” del teorema fondamentale. Tutt’altro. Pur essendo necessaria, l’impostazione formale non sembra poter essere sufficiente alla comprensione teorica né alla conseguente realizzazione pratica del benessere sociale. Sembra invece ragionevole richiedere che all’economia matematica si affianchi un’analisi concettuale (e sperimentale) dei fenomeni sociali basata sulla discussione, sul costante argomentare con tolleranza, tra i membri della società, che tenga conto delle diverse culture e della molteplicità delle possibili risposte, finalizzata alla migliore comprensione delle cose e ad una migliore formazione o educazione della società stessa, operazione che sarebbe possibile almeno come processo che aspiri alla libertà, si veda [170]. Qui si colloca la parte propositiva della nostra analisi, che tuttavia non ci proponiamo di sviluppare in questa sede.

Concludiamo invece articolando lo scetticismo nei confronti di una soluzione puramente formale al problema del benessere sociale. Trovando ingiustificato l’argomento secondo cui è la pura competizione nel libero mercato a garantire il modo migliore di raggiungere il benessere sociale, appare ingiustificata la promozione indiscriminata di

[2] Nel farlo ci confronteremo con questioni molto sfuggenti sul ruolo della matematica in economia e nelle scienze sociali. Lasceremo tuttavia questa discussione a un livello implicito confidando nel fatto che i lettori interessati avranno già assimilato la nostra posizione in merito durante lo sviluppo degli aspetti più propriamente matematici dei capitoli precedenti.

questo tipo di interazione tra gli agenti[3]. Riconsideriamo quindi le ipotesi centrali che ci hanno condotto al teorema fondamentale partendo, come naturale, dall'individualismo metodologico.

10.1. *Individualismo metodologico: razionalità ed egocentrismo*

Il concetto di *individualismo metodologico* trova la sua sistemazione teorica intorno agli anni venti del novecento con Max Weber . Grossolanamente può essere descritto come l'ipotesi secondo cui la spiegazione dei fenomeni socio-economici scaturisce unicamente dalla comprensione dell'azione individuale, a cui quindi può essere ridotta gran parte della scienza sociale[4]. La versione dell'ipotesi di individualismo in uso in ambito economico è informata prevalentemente dalla teoria della scelta razionale che, come abbiamo visto, fa da sfondo alla costruzione di tutti i modelli di economia astratta che abbiamo discusso in precedenza. A differenza quindi di altre impostazioni, tra cui spicca quella di von Mises che ritiene l'azione umana come il dato della teoria economica[5], in economia matematica l'individualismo metodologico è declinato assumendo che la scelta (cioè l'azione economica) degli individui sia conforme agli standard normativi di *razionalità* e le loro preferenze (e disposizioni all'azione) siano *egocentriche*. Razionalità ed egocentrismo, come ci accingiamo ad osservare, sono ipotesi che forzano le richieste di stabilità ed efficienza delle soluzioni al problema centrale, ma non sono sufficienti a forzarne l'equità[6]. Al contrario, stabilità ed efficienza sono spesso in

[3] In altre parole, non appare fondato il punto di vista per cui l'immersione di ogni interazione economica in un contesto di libero mercato produca, per forza bruta matematica, effetti economicamente vantaggiosi per la società o una sua parte significativa.

[4] Una formulazione particolarmente influente dell'ipotesi è dovuta a J. Watkins [194]:

> According to methodological individualism, the ultimate constituents of the social world are individual people who act more or less appropriately in the light of their dispositions and understanding of their situation. Every complex social situation or event is the result of a particular configuration of individuals, their dispositions, situations, beliefs and physical resources and environment [...] but we shall not have arrived at rock-bottom explanations of such large-scale phenomena until we have deduced an account of them from statements about [...] individuals.

[5] A tal proposito von Mises scrive [187], p. 19,

> Human action is necessarily always rational. The term 'rational action' is therefore pleonastic and must be rejected as such. When applied to the ultimate ends of action, the terms rational and irrational are inappropriate and meaningless. The ultimate end of action is always the satisfaction of some desires of the acting man.

[6] In un certo senso, come osserva Ken Binmore [23], p. 183, l'ideologia della destra liberista aspira esattamente a sostituire il concetto di equità sociale con quello dell'equilibrio efficiente.

> One often hears from the intellectual right that fairness is out of date because the market is now available as a more successful means of getting society to an efficient outcome. As when the laws of supply and demand finally overthrew the medieval concept of a fair price, hasn't the time come to admit that our intuition about a just society have been superseded by a new paradigm?

antagonismo con i concetti di equità e giustizia – ragionevolmente due tra gli elementi costitutivi della "migliore" allocazione dei beni economici nella società.

Razionalità

Abbiamo parlato di agenti e li abbiamo pensati come agenti economici, ma anche logici. Abbiamo equivalentemente parlato di individui, giocatori e consumatori. In alcuni casi abbiamo ragionato sulle coalizioni mentre in nessun caso abbiamo escluso l'interpretazione collettiva degli agenti come istituzioni. In tutte queste declinazioni abbiamo sempre ipotizzato che gli agenti fossero *razionali e idealizzati*. L'idealizzazione riguarda principalmente le capacità di ragionamento. Gli agenti reali, al contrario di quelli ideali, hanno una capacità di attenzione, osservazione e introspezione limitate, commettono errori di calcolo e di ragionamento. L'economia matematica tuttavia tende a porsi come obiettivo quello di descrivere come *dovrebbero* comportarsi gli agenti per agire in modo economicamente razionale, piuttosto che descrivere gli effettivi comportamenti degli individui. In questo senso l'irrazionalità degli individui, intesa come violazione delle norme che definiscono il concetto di coerenza, viene considerata, al pari dell'attrito, un'astrazione inessenziale del modello. Nel Capitolo 4 abbiamo espresso un certo numero di riserve su questo punto di vista[7].

Abbiamo descritto in qualche dettaglio due diverse formalizzazioni del concetto di razionalità, quella economica e quella logica. La prima muove dall'ipotesi che, fissato un dominio di alternative X, un agente sia caratterizzato dalla sua relazione di preferenza (equivalentemente dalla sua funzione di scelta, o ancora equivalentemente, dalla sua funzione di utilità) su X. Le condizioni di ordine sulle preferenze individuali, abbiamo visto a più riprese, svolgono il ruolo di un'assiomatizzazione del concetto di razionalità come massimizzazione dell'utilità individuale. In altre parole la massimizzazione dell'utilità nel contesto normativo e astratto in cui ci siamo posti cattura la *coerenza logica* degli agenti, come abbiamo messo in evidenza nel dettaglio propriamente logico-matematico nel Capitolo 2.

È dunque il punto di vista normativo sul comportamento degli agenti economici che li spinge, logicamente, a massimizzare la propria funzione di utilità. Questo,

[7] La letteratura che cerca di rendere economicamente rilevante una concezione meno restrittiva della razionalità individuale è sterminata. Oltre ai riferimenti discussi nel Capitolo 2 i lettori interessati possono consultare [169] come punto di partenza. Si tratta di una raccolta di saggi in cui Amartya Sen cerca di promuovere un punto di vista più sostanziale che formale del concetto di razionalità:

> Rationality is interpreted here, broadly, as the discipline of subjecting one's choices – of actions as well as of objectives, values and priorities – to reasoned scrutiny. Rather than defining rationality in terms of some formulaic conditions that have been proposed in the literature (such as satisfying some prespecified axioms of "internal consistency of choice" or being in conformity with "intelligent pursuit of self-interest", or being some variant of maximizing behavior), rationality is seen here in much more general terms as the need to subject one's choices to the demands of reason. [169], p. 4.

Sono evidenti le difficoltà di catturare con precisione sufficiente a un'analisi rigorosa quali siano le "esigenze della ragione". Questo, per inciso, è uno dei motivi per cui l'idea di razionalità come coerenza (o massimizzazione) è così centrale nello sviluppo dell'economia matematica.

senza l'imposizione di ulteriori condizioni[8], e in particolare di un qualche confronto interpersonale tra le utilità, porta a una versione puramente egocentrica dell'ipotesi di individualismo metodologico di cui il paradigma paretiano è l'espressione più esacerbata.

Egocentrismo

La derivazione dell'impossibilità dell'aggregazione razionale delle preferenze (delle scelte) e dei giudizi individuali che abbiamo discusso nel Capitolo 1 e nel Capitolo 2 presuppongono, per così dire, una forma di egocentrismo debole, per così dire. Il paradigma arroviano infatti non esclude che gli individui possano ordinare le alternative sociali tenendo in considerazione il benessere altrui[9].

Tuttavia, oltre alla richiesta che gli agenti individuali siano razionali nel senso appena ricordato, il principio di Indipendenza[10] esclude che nell'aggregazione delle preferenze e dei giudizi individuali rispetto a due alternative, possano essere presi in considerazioni fattori esterni alle preferenze degli individui su quelle alternative. Se da una parte il principio di Indipendenza può essere giustificato su base puramente logica[11], dall'altra il principio di Indipendenza è chiaramente il primo obiettivo della critica che vede il paradigma arroviano inadeguato alla determinazione della soluzione "migliore" al problema dell'allocazione. Ma non è l'unico. Come abbiamo avuto modo di illustrare richiamando il paradosso del paretiano liberale di Sen nel Capitolo 1, nemmeno il principio di unanimità, apparentemente il meno controverso, può essere considerato universalmente desiderabile.

Tra le molte possibili, abbiamo preso la strada *paretiana* per uscire dall'*impasse* del teorema di Arrow. Questo passaggio si è compiuto facendo cadere l'eventualità contemplata da Arrow che gli individui possano ordinare gli stati sociali tenendo in considerazione il benessere altrui. Questa ipotesi, che abbiamo chiamato appunto di *egocentrismo*, porta a una riformulazione del problema centrale in cui tutti gli agenti sono ora razionali nel senso di massimizzare la propria utilità escludendo che questa possa prendere in considerazione l'utilità altrui[12]. Si tratta del passaggio che porta alla competizione pura.

[8] Su cui ha molto insistito Amartya Sen.

[9] Arrow esprime così l'idea

> It is assumed that each individual in the community has a definite ordering of all conceivable social states, in terms of their desirability to him. It is not assumed here that an individual's attitude toward different social states is determined exclusively by the commodity bundels which accrue to his lot under each. [5], p. 17.

[10] A.5 nel Capitolo 1 e IAI nel Capitolo 2.

[11] Ricordiamo che l'argomento che abbiamo sviluppato in dettaglio nella Sezione 2.2.2, mostra come il principio di Indipendenza si collochi allo stesso livello del principio di composizionalità della logica classica.

[12] Richiamiamo, senza poter entrare nel dettaglio, la tripartizione proposta da Amartya Sen [160] dell'interesse individuale.

> *Self-centered welfare*: A person's welfare depends only on his or her own consumption, which rules

10.2. Desiderata *per una soluzione: Stabilità, efficienza ed equità*

La cornice concettuale dell'individualismo pone importanti restrizioni sullo spazio delle soluzioni accettabili per il problema centrale e in particolare la loro stabilità ed efficienza. In questa sezione le discuteremo in confronto a un terzo *desideratum*, quello di *equità*. In parte la nostra analisi segue le riflessioni di Ken Binmore sul rapporto tra teoria economica e teoria della giustizia [23] [13].

Stabilità ed efficienza

L'analisi del teorema di Arrow ci ha portato a indebolire l'ipotesi di indipendenza, che nel contesto paretiano abbiamo sostituito, mediante la cardinalizzazione della funzione di utilità, con deboli considerazioni interpersonali. Questo ci ha permesso di identificare la "migliore" allocazione dei beni economici con un'allocazione *ottima* nel senso di Pareto. Questa soluzione sposta dunque il peso sull'altro cardine dell'individualismo, ovvero sulla razionalità come massimizzazione dell'utilità personale. L'ottimo paretiano costituisce quindi una soluzione formale in cui le preferenze degli individui raggiungono una soddisfazione sufficiente a garantire la seguente forma di stabilità sociale: in un ottimo non è possibile migliorare la posizione di nessuno senza peggiorare quella di qualcuno. Questa caratteristica dell'ottimo paretiano porta con sé anche un importante aspetto di *efficienza*. Non essendo migliorabile, nel senso specifico, l'ottimo garantisce che tutte le risorse siano (state) distribuite senza spreco. Questo ha due connotazioni. Da un lato, costituisce un criterio di buona gestione economica, e quindi, in un senso molto preciso, di coerenza della soluzione[14]. Dall'altro, in un ottimo, ogni preferenza individuale che può essere assecondata (senza cioè diminuire la soddisfazione di qualcun altro) viene di fatto assecondata.

Essenzialmente la stessa idea di stabilità dell'ottimo paretiano si estende dagli individui alle coalizioni, o più precisamente alle strutture equilibrate di coalizioni che abbiamo studiato nel Capitolo 6. Ricordiamo infatti come queste richiedano che la coalizione

out sympathy or antipathy toward others, as well as the effects of processes and relational concerns on one's own welfare.

Self-welfare goal: A person's only goal is to maximize his or her own welfare, which rules out incorporating within one's own objectives other considerations (such as the welfare of others), *except to the extent that it influences the person's own welfare*.

Self-goal choice: A person's choices must be based on the pursuit of his or her own goals, which rules out being restrained by the recognition of other people's goals, *except to the extent that these goals shape the person's own goals*.

L'ipotesi di egocentrismo da cui abbiamo sviluppato il paradigma paretiano coincide con l'ipotesi di *self-centered welfare*.

[13] Mentre noi trattiamo in questo volume soltanto il caso statico, ovvero in assenza di tempo e di interazioni ripetute, Binmore si concentra sull'aspetto dinamico e in particolare evolutivo, dell'etica applicata alla teoria economica. Torneremo brevemente sul tema nella sezione finale.

[14] Ricordiamo che sussiste un rapporto logico molto stretto tra il concetto di coerenza e quello di *soddisfacibilità*, catturato dal Lemma di esistenza del modello, si veda il Capitolo 2.

C debba garantire a ognuno dei propri membri almeno quanto questi si potrebbero assicurare senza partecipare a C. Infine, con l'introduzione della proprietà privata e dello scambio, il teorema fondamentale dell'economia del benessere indica l'equilibrio di Walras come soluzione, la cui stabilità dipende dall'uguaglianza tra domanda e offerta. Qui, come abbiamo notato, si fa spesso riferimento all'immagine suggestiva della *mano invisibile* per marcare l'efficienza della soluzione basata sul mercato perfettamente competitivo.

La necessità della stabilità come condizione di coerenza di ogni possibile soluzione all'interazione sociale motivata da interessi personali è ancora più evidente nella teoria dei giochi *non* cooperativi di cui abbiamo ripercorso alcuni risultati fondamentali nel Capitolo 9. Qui, a differenza dell'equilibrio in un'economia puramente competitiva in cui le azioni individuali sono ottimali rispetto, per esempio ai prezzi, la razionalità delle azioni individuali è definita subordinatamente alla razionalità delle azioni degli altri giocatori. Giova ricordare che un gioco si dice cooperativo quando i giocatori sono nella posizione di poter firmare un accordo vincolante sulle strategie di gioco[15] e non cooperativo altrimenti. Poiché nella pratica economica, assicurativa e giuridica nessun contratto può dirsi completo o completamente vincolante[16] la teoria dei giochi non cooperativi muove da ipotesi di modellazione relativamente più realistiche e più affini ad una visione liberista. L'assenza di accordi vincolanti pone l'accento sul fatto che, sotto opportune ipotesi strutturali[17], la razionalità dei giocatori li obbliga a selezionare la strategia che massimizza il loro payoff individuale. Il concetto di equilibrio di Nash cattura precisamente la stabilità che scaturisce dall'assenza di incentivi alla deviazione unilaterale rispetto a una data n-upla di strategie in equilibrio[18].

Dunque la stabilità della soluzione – dal paradigma paretiano, a quello dell'equilibrio generale passando per l'equilibrio di Nash – è un *desideratum* che viene indirettamente imposto dall'ipotesi di individualismo metodologico. Poiché la scelta di ogni individuo è unicamente guidata dalla massimizzazione della propria funzione di utilità, ogni soluzione dovrà essere sufficientemente stabile da neutralizzare le spinte

[15] Non abbiamo insistito sugli aspetti contrattuali nel Capitolo 6, ma abbiamo assunto che l'appartenenza a ogni coalizione C fosse completamente regolata in questo senso. Si tratta, anche in questo caso, di un'astrazione (e quindi una semplificazione dalla realtà) di certo non banale.

[16] Si veda, per esempio, [183].

[17] Ovvero che la struttura del gioco – inclusi i payoff individuali – e la razionalità dei giocatori sia conoscenza condivisa (*common knowledge*), cioè tutti sanno che tutti sanno [. . .] che tutti sanno che tutti sono razionali e che conoscono la struttura del gioco.

[18] Osserva Kenneth Arrow sul teorema del minimax

> the only reason why we regard this solution as truly rational is that, if both players follow it, neither one will have any incentive to change his strategy even if he founds out the opponent's. [5], p. 20.

Robert Aumann [13] colloca l'idea al centro del pensiero economico:

> The Nash equilibrium is the embodiment of the idea that economic agents are rational; that they simultaneously act to maximize their utility. If there is any idea that can be considered *the* driving force of economic theory, that is it. Thus in a sense, Nash equilibrium embodies the most important and fundamental idea of economics, that people act in accordance with their incentives.

centrifughe, per così dire, dell'interesse individuale. Abbiamo osservato come nel caso dell'ottimo paretiano e dell'equilibrio perfettamente competitivo sia possibile attribuire una forma di efficienza, oltre che di stabilità, alle soluzioni. Tuttavia la molteplicità degli equilibri può violare alcuni criteri molto intuitivi di efficienza[19].

Per vederlo richiamiamo il gioco *Caccia al cervo* introdotto in precedenza. La Caccia al cervo ha un interesse particolare che deriva dalla sua interpretazione *politica*. Si tratta infatti di una forma di gioco in cui è facile ravvisare gli elementi fondamentali del concetto di *cooperazione* sociale. Riportiamo per maggior agio del lettore la struttura di payoff che definisce il gioco.

		j	
		C	L
i	C	$2^*, 2^*$	$0, 1$
	L	$1, 0$	$1^*, 1^*$

FIGURA 1. Una rappresentazione in forma strategica del gioco della Caccia al cervo. Il payoff legato al cervo è 2 e quello alla lepre 1. (Si assume che la decisione di cacciare equivalga all'effettiva cattura della preda).

Pur essendo (C,C) e (L,L) entrambi equilibri di Nash, (L,L) è chiaramente *inefficiente*[20]. È evidente che se i e j giocassero o potessero accordarsi su (C,C), otterrebbero entrambi un esito migliore. Poiché stiamo assumendo che tale accordo non sia possibile per la definizione di gioco non cooperativo abbiamo il problema di isolare criteri teorici soddisfacenti che portino alla selezione dell'equilibrio efficiente. Osservando i payoff della Figura 1 risulta evidente che le strategie (C,L) e (L,C) siano quelle a maggior rischio per i e j rispettivamente. Impegnandosi nella caccia del cervo i rischia di non prendere nulla *se* j non coopera e si accontenta della lepre. Per mettere in evidenza questo aspetto si usa chiamare (C,C) l'equilibrio "payoff-dominant" mentre (L,L) quello "risk-dominant". In questa lettura, due giocatori che scelgono di giocare (L,L) attuano una strategia di diffidenza, e quindi di non cooperazione[21].

Se l'equilibrio di Nash può non garantire l'efficienza della soluzione nei giochi di coordinamento come nella Caccia al cervo, esistono situazioni in cui garantisce una "soluzione" inefficiente. *La Tragedia dei beni comuni* è forse il caso più studiato. Si tratta di un problema portato all'attenzione generale dal biologo Garrett Hardin nel 1968[22]

[19] Per quanto la teoria economica sia in larga parte motivata dall'identificazione delle *regolarità* e quindi nella prevedibilità dei fenomeni sociali di cui si interessa, la stabilità della soluzione, di per sé, non è sufficiente.

[20] O meglio, *noi* in quanto osservatori esterni riusciamo a confrontare le coppie di payoff sulla diagonale. Non è così per i giocatori che possono soltanto "vedere" cosa succede loro riga per riga (per il giocatore j) o colonna per colonna (i).

[21] Non è un caso che la Caccia al cervo sia una delle forme di gioco più studiate al confine tra teoria dei giochi (evolutiva) e etica politica. Si veda, ad esempio, [177].

[22] Riportiamo, per intero, il sommario dell'articolo [78]:

nel trattare il problema della sovrappopolazione. Consideriamo un pascolo aperto a tutti. Ogni pastore, secondo le ipotesi dell'individualismo metodologico, cercherà di farvi pascolare il maggior numero di animali possibile. In una situazione socio-politica instabile, per esempio una punteggiata da guerre, epidemie, saccheggi, ecc., la massimizzazione attuata da ogni pastore può essere sostenibile. Cessa tuttavia di esserlo nel momento in cui la stabilità socio-politica garantisce pace e prosperità ai pastori, e quindi alle greggi. In questo caso la razionalità individuale dei pastori genera l'inevitabile esaurimento del pascolo. L'aspetto *tragico* di questo è che l'esito chiaramente inefficiente per la società è una *conseguenza logica* della razionalità individuale[23]. Dal punto di vista propriamente logico quindi la Tragedia risiede nel fatto che l'aggregato di comportamenti individualmente coerenti dà luogo a uno stato sociale logicamente incoerente, nel senso che abbiamo precisato nel Capitolo 2 di non essere realizzabile. Si tratta di un chiaro argomento a sfavore della tesi liberista: le ipotesi di individualismo, in una situazione di interazione come quella descritta in modo astratto dalla Tragedia, non soltanto non portano all'emergere spontaneo della cooperazione sociale, ma portano al suo esatto contrario.

Pur essendo spesso presentato in modo analogo e cioè come paradosso della "irrazionalità razionale", il *dilemma del prigioniero* non ammette il tipo di interpretazione che abbiamo appena dato alla Tragedia dei beni comuni. Riportiamo, per comodità, la rappresentazione in forma strategica del gioco nella Figura 2

		j	
		C	D
i	C	$3,3$	$0,4$
	D	$4,0$	$1^*,1^*$

FIGURA 2. Una rappresentazione in forma normale del Dilemma del Prigioniero. (D,D) è l'unico equilibrio di Nash.

Il motivo per cui il Dilemma del prigioniero ha alimentato più di mezzo secolo di discussione è il seguente. Osservando la Figura 2 notiamo immediatamente che giocando (C,C) *entrambi* i giocatori otterrebbero un esito migliore di quello garantito dall'equilibrio di Nash. Messa in altre parole, *se fossero entrambi irrazionali* (ma in un modo molto specifico) i giocatori otterrebbero un esito strettamente migliore *per entrambi* rispetto a quello che gli viene garantito dall'unica coppia di strategie in equilibrio. Questo, in buona sostanza è ciò che si intende dicendo che il Dilemma del prigioniero costituisce un paradosso dell'irrazionalità razionale. La formula è certamente evocativa, ma a differenza della Tragedia dei beni comuni si basa su un errore di interpretazione.

The population problem has no technical solution; it requires a fundamental extension in morality.

[23] Osserviamo come la Tragedia dei beni comuni catturi uno degli aspetti più ricorrenti del comportamento individuale nei confronti del patrimonio collettivo, e in primo luogo del patrimonio ambientale.

Identificando il concetto di equilibrio di Nash come concetto di soluzione, definiamo la scelta razionale di un individuo come la scelta della *sua* componente di un equilibrio di Nash. Poiché la definizione di equilibrio è costruita sul confronto di ogni strategia di i con ogni strategia a disposizione di tutti gli altri giocatori, segue che i può confrontare paragonare soltanto le righe della Figura 2. Analogamente j può paragonare soltanto le colonne. Nessuno dei due può quindi confrontare gli esiti sulla diagonale della matrice, cosa che invece noi, che guardiamo il problema dall'esterno, possiamo fare agevolmente. Quindi se è evidente che (C,C) dia un esito migliore di (D,D) , è altrettanto vero che la natura non cooperativa del gioco rivela un'inadeguatezza evidente di (C,C) come soluzione razionale: sarebbe ragionevole *soltanto se* entrambi i giocatori avessero la certezza che l'altro giochi in quel modo. Ma se i sapesse che j ha scelto C, allora, questa stessa informazione renderebbe immediatamente razionale, da parte di i scegliere D. La matrice di utilità che descrive il Dilemma del prigioniero è costruita esattamente per rendere (C,C) una scelta strategicamente irrazionale. Continuando con questo ragionamento osserviamo come il Dilemma del prigioniero sia un gioco che ammette esiti Pareto efficienti che non sono in equilibrio[24]. In assenza di elementi esterni alla struttura del gioco, per esempio di contratti vincolanti esercitabili sulle scelte dei giocatori, è strategicamente irrazionale scegliere fuori dall'equilibrio. L'inferiorità, in termini di utilità, di (D,D), rispetto a (C,C) non può quindi essere letta come "irrazionalità razionale", ma come il prezzo della mancanza di considerazioni esterne rispetto alla massimizzazione dell'utilità personale degli individui coinvolti nell'interazione strategica.

Riportiamo, a margine, una variazione del Dilemma del prigioniero discussa da Amartya Sen [160] nel contesto delle *norme sociali*. Il *gioco della Promessa* ha come obiettivo quello di mostrare come un esito socialmente efficiente possa scaturire da un'opportuna modifica alla struttura di payoff del Dilemma del prigioniero. L'idea è di incentivare l'impegno reciproco attraverso l'attribuzione di un *bonus* al comportamento cooperativo[25]. La trasformazione dei payoff dà luogo a un *nuovo* gioco, descritto nella Figura 3. Aggiungendo valore alla cooperazione (mediante la modifica opportuna della struttura di payoff) il Dilemma del prigioniero viene trasformato in un gioco di coordinamento simile alla Caccia al cervo. Il problema diventa quindi quello di selezionare tra i due equilibri quello Pareto-efficiente. Per farlo, osserva Sen, è necessario prendere in considerazione un contesto culturale in cui sia possibile riconoscere norme sociali capaci di stabilire una fiducia reciproca tra i giocatori[26].

24 Questo ci aiuta a distinguere immediatamente il Dilemma del prigioniero dalla Caccia al cervo, in cui uno degli equilibri ha l'ulteriore proprietà di essere efficiente. Soltanto quest'ultimo gioco, *e non* il Dilemma del prigioniero, ci fornisce un modello adeguato per l'analisi formale delle condizioni di emergenza e sostentamento della cooperazione, come nel caso paradigmatico del contratto sociale.

25 Osserviamo che la cooperazione nel Dilemma del prigioniero corrisponde all'omertà. Si pone così chiaramente il problema della scelta dei valori di riferimento. Ma già a questo livello informale risulta chiaro come questa non possa essere effettuata all'interno della teoria dei giochi, né, in generale, di una teoria formale.

26 Con le parole di Sen [161]

		j	
		c	d
i	c	3*, 3*	0, 2
	d	2, 0	1*, 1*

FIGURA 3. Il gioco della Promessa

Equità

Esistono dunque soluzioni stabili che non sono efficienti mentre alcune soluzioni efficienti possono non essere stabili, come la cooperazione nel Dilemma del prigioniero. In un senso più indiretto ma non meno rilevante manca di stabilità una soluzione che assegni *tutti* i beni a un unico individuo, poiché in pratica, un'allocazione del genere darebbe ragionevolmente luogo a una rivoluzione. Si tratterebbe infatti dell'analogo di ciò che nel contesto arroviano abbiamo chiamato *dittatura* e che in quella sede ci è sembrato naturale escludere immediatamente dalle possibili soluzioni del nostro problema di partenza. Tuttavia ricordiamo come l'esclusione della dittatura abbia richiesto l'imposizione di una restrizione esplicita (assioma A.6) sulle regole di aggregazione. Possiamo ora osservare che l'imposizione della restrizione è resa necessaria dal fatto che stabilità ed efficienza non escludono l'iniquità, di cui la soluzione dittatoriale è l'esempio per eccellenza.

Ancora una volta l'idea generale può essere messa a fuoco richiamando un gioco molto semplice che abbiamo introdotto in precedenza, il gioco dell'ultimatum [75], in cui il Proponente deve spartire una somma di denaro e il Ricevente deve decidere se accettare oppure no, nel qual caso nessuno prende niente.

Un aspetto molto interessante del gioco dell'ultimatum è costituito dai dati sperimentali a cui ha condotto negli ultimi due decenni. Con variazioni che dipendono dal contesto socio-culturale, una proporzione che va da circa un quarto a quasi il 60% dei soggetti sperimentali che giocano come Proponente, offre la divisione equa della somma iniziale[27]. Una parte sostanziale dei giocatori sceglie dunque di comportarsi in modo

> while there is no certainty that the game will equilibriate at the more favorable of the two equilibrium points [...], this can easily happen if the players have confidence in each other (in a way it cannot under the true Prisoners' Dilemma game).

[27] Questi sono i risultati di esperimenti sul campo che gli autori di [81] hanno condotto in dodici paesi di cinque continenti e appartenenti a vari gruppi socio-economici. Riportiamo la spiegazione offerta dagli autori della deviazione che osservano rispetto all'ipotesi di razionalità standard:

> We suspect that a proximate reason for these behaviors is that situations cue emotional responses which induce the behaviors we have measured. For example, many ultimatum-game respondents from advanced societies, when facing a low offer, experience an emotional impulse to hurt the proposer for being unfair, just as the subject might in a real life-bargaining situation. Similarly, the New Guinea responders who rejected hyper-fair offers in the ultimatum game may have experienced the same anxiety that emerges when somebody gives them an unsolicited gift in everyday life.

conforme alle intuizioni elementari di equità (o almeno più conformi di quanto non lo sia la soluzione normativamente razionale fornita dalla teoria classica dei giochi).

Si tratta di risultati molto interessanti, specialmente se presi insieme ai dati che dimostrano le violazioni sistematiche dei soggetti sperimentali rispetto allo standard di massimizzazione[28]. Se da una parte gli individui reali sono "irrazionali", dall'altro tendono a conformarsi a standard di equità relativamente elevati. A tal proposito Ernest Fehr e Klaus Schmidt hanno teorizzato un modello basato sull'avversione all'iniquità degli individui che si è rivelato particolarmente influente [58].

Osserviamo infine come il comportamento degli individui negli esperimenti sul gioco dell'ultimatum siano legati molto strettamente a fattori culturali specifici. Poiché il gioco mette in evidenza non soltanto il modo in cui i giocatori ritengono razionale giocare ma anche ciò che ritengono *giusto* o moralmente accettabile da parte degli altri, la variabilità interculturale dei dati sperimentali sul gioco suggerisce chiaramente la futilità della ricerca di una soluzione completa e formale e quindi *universale* al problema concreto che abbiamo preso in considerazione in questo volume.

Rimane però l'importanza – e in un senso che abbiamo cercato di rendere evidente la *necessità* – dell'analisi matematica del problema. Come abbiamo visto questa trova nelle ipotesi di individualismo un linguaggio particolarmente adeguato. Si pensi alla struttura del paradigma paretiano in cui ogni individuo è rappresentato dalla propria funzione di utilità e cioé dalla funzione obiettivo di cui la razionalità come coerenza richiede la massimizzazione. Da qui diventa poi naturale, da un punto di vista logico-matematico, interrogarsi sulle condizioni sotto cui le massimizzazioni individuali possano essere aggregate, e quali siano le caratteristiche di un'eventuale soluzione. Innegabilmente la possibilità di raggiungere il benessere collettivo come "esternalità positiva" della ricerca del benessere individuale costituirebbe una soluzione particolarmente elegante al problema centrale. E come abbiamo visto l'esistenza della risposta che fa da sfondo al teorema fondamentale dell'economia del benessere non è banale, sia dal punto di vista matematico che da quello concettuale. Si tratta quindi di un punto di partenza importante per la comprensione della "congerie mal dominabile di fatti e concetti e problemi", che nelle parole di De Finetti caratterizza l'economia. Tuttavia i molteplici argomenti che abbiamo ricordato e sviluppato in questo volume mostrano che il solo risultato formale non sostiene favorevolmente il confronto con alcune intuizioni elementari su quale debba essere la "migliore" ripartizione dei beni economici nella società.

Dunque, se la soluzione offerta dalla teoria generale dell'equilibrio competitivo non è soddisfacente, dobbiamo fare meglio. In questo senso l'osservazione dei dati sperimentali è molto preziosa in quanto fornisce gli spunti per una diagnosi dei limiti del modello standard dell'economia del benessere. Da questi dati emerge una dipendenza importante del comportamento *economico* degli individui da elementi culturali e morali.

L'interpretazione dei risultati comunque non è priva di controversie [22].

28 Menzioniamo a tal proposito il sostanziale *corpus* di dati sperimentali che sottende la già citata *prospect theory* di Kahneman e Tverski.

Non possiamo considerare "irrazionale" un Proponente che decida di spartire equamente una somma di denaro a cui altrimenti non avrebbe avuto accesso, come non possiamo trascurare il ragionamento ovvero le *ragioni* che formano la base delle preferenze degli individui[29]. Al tempo stesso il teorema di Arrow, nelle sue molte variazioni ci impedisce di pensare che senza scambio, e in particolare senza discorso pubblico, sia possibile raggiungere una soluzione soddisfacente per tutti. Come osserva Donald Davidson [41] la razionalità è un tratto sociale, che si esercita soltanto attraverso la comunicazione[30].

10.3. *Dinamica, tempo e incertezza*

Concludiamo con alcune riflessioni su argomenti che non abbiamo trattato, ma che hanno una rilevanza diretta rispetto al problema di cui ci siamo occupati. Un'ipotesi che abbiamo sottoscritto inizialmente e che abbiamo sempre mantenuto è quella della staticità del modello economico di riferimento. Dal paradigma arroviano a quello paretiano, dall'equilibrio competitivo fino a quello dei giochi non cooperativi, abbiamo assunto che l'interazione tra agenti avvenisse una sola volta e in modo puramente sincronico.

L'aggiunta del tempo al modello di interazione socio-economica tra gli agenti permette un arricchimento notevole nel potere espressivo del modello stesso. In particolare diventa possibile prendere in considerazione la *ripetizione* delle interazioni e l'*incertezza* dei loro esiti – due concetti fondamentali sia nell'ambito economico che in quello etico-politico. Non potendo affrontare qui questi argomenti, ci limitiamo a segnalare come la dinamica dell'interazione sociale apra in modo abbastanza naturale a rivisitazioni importanti dell'individualismo metodologico. Le restrizioni normative sulla razionalità in presenza di incertezza danno luogo alla teoria dell'utilità attesa attraverso i teoremi di rappresentazione di von Neumann-Morgenstern [190], Hernstein-Milnor [83] e Savage [152][31]. Il linguaggio della teoria dell'utilità attesa permette la formulazione di un risultato notevole all'intersezione tra teoria etica ed economica, il cosiddetto *teorema utilitaristico* di John Harsanyi [79]. Supponiamo che gli individui siano razionali nel senso della massimizzazione dell'utilità attesa, e che esista una rappresentazione delle preferenze collettive in termini di massimizzazione dell'utilità

[29] Questa è la direzione della proposta di estensione del paradigma delle preferenze rivelate proposto, tra gli altri, da Franz Dietrich e Christian List [47]. Si veda anche [55] per un discorso di ampio respiro filosofico sull'argomento.

[30] Nelle sue parole:

> Rationality is a social trait. Only communicators have it.

Alcune conseguenze di questa posizione per la caratterizzazione formale del concetto di razionalità sono elaborate in [87].

[31] Negli ultimi decenni l'economia matematica si è orientata all'estensione della rappresentazione probabilistica dell'incertezza, e alla conseguente generalizzazione del concetto di razionalità come massimizzazione dell'utilità attesa. I lettori interessati possono consultare [69] e [70].

attesa[32]. Harsanyi dimostra che se le preferenze collettive soddisfano l'assioma di unanimità, allora è possibile rappresentare l'utilità attesa collettiva come la somma delle utilità attese individuali. Il teorema costituisce uno dei punti di partenza per la discussione del rapporto tra etica ed economia poiché mette in rapporto la riflessione sulle norme di comportamento degli agenti razionali in situazioni di rischio e quelle relative all'equità. Questo rapporto non è sorprendente alla luce del fatto che l'idea di aleatorietà è intimamente connessa a quella di giustizia. Si pensi, per concretezza, al lancio della moneta come sinonimo di imparzialità.

Molte considerazioni di natura etica diventano immediatamente rilevanti nel caso dei giochi ripetuti. La *reciprocità* nel comportamento dei giocatori è stata a lungo oggetto di interesse nello studio delle condizioni che incentivano la cooperazione nel Dilemma del prigioniero ripetuto[33]. La reciprocità emerge quindi come condizione che media tra stabilità, efficienza ed equità della soluzione dalla dinamica dell'interazione economica. Questa riflessione costituisce il punto di partenza per la connessione feconda tra teoria economica e teoria evolutiva. Tra i tanti contributi segnaliamo, oltre al già citato [23], il volume [177] in cui Brian Skyrms applica le idee e metodi della teoria evolutiva dei giochi allo studio dell'emergere e del perdurare del contratto sociale.

[32] Cioè estendiamo all'incertezza il paradigma paretiano e facciamo ipotesi analoghe a quelle di Arrow sulla razionalità individuale e quella collettiva.

[33] Risultano particolarmente interessanti le considerazioni sulla strategia detta *tit for tat*. In buona sostanza la strategia, proposta da Anatol Rapoport per una competizione computerizzata volta a individuare la migliore strategia per il Dilemma ripetuto, consiste nel cooperare al primo turno e successivamente rispondere alla cooperazione con la cooperazione, e alla defezione con la defezione. Tra tutte quelle considerate, *tit for tat* è la strategia più semplice da descrivere e implementare, e nonostante ciò la migliore a indurre la cooperazione nel dilemma ripetuto. Si veda [17] per i dettagli della competizione che ha dato origine a questo filone di ricerca e [32], [3], [36], [57] per alcuni tra i tanti sviluppi notevoli.

Bibliografia

[1] ALLAIS, M. Le comportment de l'homme rationnel devant le risque: critiques des postulates et axiomes de l'école americaine. *Econometrica 21* (1953), 503–546.

[2] ANAND, P. Are the preference axioms really rational? *Theory and Decision 23* (1987), 189–214.

[3] ANDREONI, J. E SAMUELSON, L. Building rational cooperation. *Journal of Economic Theory 127* (2006), 117–154.

[4] ARMSTRONG, W.E. A note on the theory of consumer's behaviour. *Oxford Economic Papers 2* (1950), 119–122.

[5] ARROW, K.J. *Social choice and individual values*. Wiley, New York, 1951. Seconda edizione 1963.

[6] ARROW, K.J. E DEBREU, G. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica 22* (1954), 265–290.

[7] ARROW, K.J. E HAN, F.H. *General Competitive Analysis*. North-Holland, New York, 1971. Sesta edizione 1991.

[8] ARROW, K.J. E INTRILLIGATOR, M., Ed. *Handbook of Mathematical Economics*. North Holland, 1986.

[9] AUBIN, J.P. *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*. North-Holland, 1982.

[10] AUBIN, J.P. *L'analyse non linéaire et ses motivations économique*. Masson, 1984.

[11] AUBIN, J.P. E EKELAND, I. *Applied Nonlinear AnalysisMathematical Methods of Game and Economic Theory*. Wyley, 1984.

[12] AUMANN, R.J. Utility Theory without the Completeness Axiom. *Econometrica 30* (1962), 445.

[13] AUMANN, R.J. What is game theory trying to accomplish? In *Frontiers of Economics* (1985), Arrow, K.J. e Honkapohja, S., Ed.

[14] AUMANN, R.J. Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality. *Econometrica 55* (1987), 1–18.

[15] AUMANN, R.J. *Lectures on Game Theory*. Westview Press, 1989.

[16] AVRON, A. E ZAMANSKY, A. Non-Deterministic Semantics for Logical Systems. In *Handbook of Philosophical Logic* (2011), Gabbay, D.M. e Guenthner, F., Ed.

[17] AXELROD, R. *The Evolution of Cooperation*. Basic Books, 1984.

[18] BAUMOL, W.J. E GOLDFIELD, S.M., Ed. *Precursors in Mathematical Economics: An Anthology*. London School of Economics and Political Sciences, 1968.

[19] BENTHAM, J. *An Introduction to the Principles of Morals and Legislation*. Payne, London, 1789.

[20] BILLERA, L.J. Some theorems on the core of an n-person game without side payments. *SIAM J. Appl. Math. 18* (1970), 567–579.

[21] BILLERA, L.J. Some recent results in n-person game theory. *Mathematical Programming 1* (1971), 58–67.

[22] BINMORE, K. Economic man - or straw man? *Behavioral and Brain Sciences 28* (2005), 817–878.

[23] BINMORE, K. *Natural Justice*. Oxford University Press, 2005.

[24] BOHL, P. Über die Bewegung eines mechanischen systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage. *J. Reine Angew. Math. 127* (1904), 179–276.

[25] BONDAREVA, O.N. Theory of the core in the n-person game. *Vestnik L.G.U 13* (1962), 141–142. In russo.

[26] BONDAREVA, O.N. Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative gamestheory of the core in the n-person games. *Problemy Kibernetiki 10* (1963), 119–139. In russo.

[27] BORDA, J.C. Mémoire sur les élections au scutin. *Mém. Acad. Sci. Paris* (1781).

[28] BORDER, KIM C. *Fixed poit theorems with applications to economics and game theory*. Cambridge University Press, 1985.

[29] BOREL, E. La théorie des jeux et les équations intégrales a noyeau symmetrique. *Comptes Rendus de l'Acad. Sci. 173* (1921), 1304–1308.

[30] BOREL, E. *Traité du calcul des probabilités et des applications*. Gauthier-Villars, 1938.

[31] BOSSERT, W. E SUZUMURA, K. *Consistency, choice, and rationality*. Harvard University Press, 2010.

[32] BOWLES, S. E GINTIS, H. The origins of human coopetation. In *Genetic and cultural evolution of cooperation* (2003), , Ed., pp. 1–17.

[33] BROUWER, L.E.J. Über ein eindeutige, stetige Transformationen von Fläche in sich. *Math. Ann. 69* (1910), 176–180.

[34] BROUWER, L.E.J. Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann. 71* (1912), 97–115.

[35] BROWDER, F.E. Fixed point theory and nonlinear problems. *Bull. Amer. Math. Soc. 9* (1983), 1–39.

[36] CAMERER, C. E FEHR, E. When does economic man dominate social behavior. *Science 311* (2006), 47–52.

[37] CHIAPPORI, P.A., EKELAND, I., KÜBLER, F. E POLEMARCHAKIS, H.M. . Testable implications of general equilibrium theory: a differentiable approach. *Journal of Mathematical Economics 40* (2004), 105–119.

[38] CIGNOLI, R., D'OTTAVIANO, I.M.L. E MUNDICI, D. *Algebraic Foundations of Many-Valued Reasoning*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[39] CONDORCET, M. DE. *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. L'Imprimerie Royale, Paris, 1785.

[40] COURNOT, A.A. *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. Hachette, Paris, 1838.

[41] DAVIDSON, D. *Subjective, Intersubjective, Objective*. Oxford University Press, 2001.

[42] DE FINETTI, B. *Un matematico e l'economia*. Franco Angeli, Milano, 1969.

[43] DEBREU, G. *Theory of Value*. Wiley, New York, 1959.

[44] DEBREU, G. *Mathematical Methods in Social Sciences*. Stanford University Press, 1960.

[45] DEVETAG, G., HOSNI, H. E SILLARI, G. You Better play 7: Mutual versus Common Knowledge of Advice in a Weak-link Experiment. *Synthese 190* (2013), 1351–1381.

[46] DIETRICH, F E LIST, C. Arrow's theorem in judgement aggregation. *Socila choice and Welfare 29* (2007), 19–33.

[47] DIETRICH, F. E LIST, C. Where do preferences come from? *Int. Journal Game Theory* (2012).

[48] DOKOW, E. E HOLZMAN, R. Aggregation of binary evaluation. *Journal of Economic Theory 145* (2010), 495–511.

[49] EATWELL, J., MILGATE, M. E NEWMANN, P., Ed. *The New Palgrave*. Norton, New York, 1989.

[50] EDGEWORTH, F.Y. *Mathematical Psychics: An Essay on the Applications of Mathematics to the Moral Sciences*. Kegan, London, 1881.

[51] EILENBERG, S. Ordered Topological Spaces. *Amer. J. Math. 63* (1941), 39–45.

[52] EKELAND, I. *La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique*. Presse Universitaire de France, 1974.

[53] EKELAND, I. *Elements d'économie mathématique*. Hermann, Paris, 1979.

[54] EKELAND, I E TEMAM, R. *Analyse Convexe et Prpblèmes Variationnels*. Dunod, Paris, 1974.

[55] ELSTER, J. *Reason and Rationality*. Princeton University Press, 2009.

[56] ELSTER, J E ROEMER, J., Ed. *Interpersonal comparisons of well-being*. Cambridge University Press, 1991.

[57] FEHR, E. On the Economics and Biology of Trust. *J. Eurpean Economic Association 7* (2009), 235–266.

[58] FEHR, E. E SCHMIDT, K.M. A Theory of Fairness, Competition, and Cooperation. *Quarterly Journal of Economics 114* (1999), 817–868.

[59] FISHBURN, P.C. *Utility Theory for Decision Making*. John Wiley and Sons, New York, 1970.

[60] FUDENBERG, D. E TIROLE, J. *Game Theory*. The MIT Press, 1991.

[61] GÄRDENFORS, P. On Arrow-type theorem for voting with logical consequences. *Economics and Philosophy 22* (2006), 181–190.

[62] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Funzioni di una variabile*. Pitagora Editrice, Bologna,, 1998. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston, 2003.

[63] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Strutture lineari e metriche, continuità*. Pitagora Editrice, Bologna,, 2000. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston, 2007.

[64] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Funzioni di più variabili*. Pitagora Editrice, Bologna, 2005. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston 2009.

[65] GIAQUINTA, M. E MODICA, G. *Analisi Matematica. Funzioni di più variabili: ulteriori sviluppi*. Pitagora Editrice, Bologna, 2005. Revisione e traduzione inglese Birkhäuser, Boston, 2012.

[66] GIAQUINTA, M. *La forma delle cose. Idee e metodi di matematica. I. Da Talete a Galileo e un po' oltre*. Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 2010.

[67] GIAQUINTA, M. *La forma delle cose. Idee e metodi di matematica. I. Da Leibniz e Newton a Eulero e Lagrange e un po' oltre*. Edizioni di Storia e Letteratura, Roma, 2014.

[68] GIGERENZER, G. *Rationality for Mortals: How People Cope with Uncertainty*. Oxford University Press, 2008.

[69] GILBOA, I. *Decision Theory under Uncertainty*. Cambridge University Press, 2009.

[70] GILBOA, I. E MARINACCI, M. Ambiguity and the Bayesian Paradigm. In *Advances in Economics and Econometrics: Theory and Applications, Tenth World Congress of the Economic Society* (2013), Acemoglu, D., Arellano, M. e Denkel, E., Ed., Cambridge University Press.

[71] GOTTWALD, S. *A Treatise on Many-Valued Logics*. Oxford University Press, 2001.

[72] GRANAS, A. E DUGUNDJI, J. *Fixed Poit Thery*. Springer, New York, 2003.

[73] GROSSI, D. E PIGOZZI, G. Introduction to Judgement Aggregation, 2012. Lecture notes.

[74] GUILBAUD, G.Y. Theory of the General Interest and the Logical Problem of Aggregation. *Journal Électronique d'Histoire des Probabilités 5* (2008), 501–551.

[75] GÜTH, W., SCHMITTBERGER, R. E SCHWARZE, B. An experimental analysis of ultimatum bargaining. *Journal of Economic Behavior and Organization 3* (1982), 367–388.

[76] HÁJEK, P. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer Academic Publishers, 1998.

[77] HAMMOND, P.J. Interpersonal comparisons of utility: Why and how they are and should be made. In *Interpersonal comparisons of well-being* (1991), Elster, J e Roemer, J., Ed., Cambridge University Press.

[78] HARDIN, G. The Tragedy of the Commons. *Science 162* (1968), 1243–1248.

[79] HARSANYI, J.C. Cardinal Welfare, Individualistic Ethics, and Interpersonal Comparisons of Utility. *Journal of Political Economy 63* (1955), 309.

[80] HELLER, W.P., STARR, R.M. E STARRETT, D.A., Ed. *Social choice and public decision-making. Vol. 1. Essays in honor of Kenneth J. Arrow*. Cambridge University Press, 1986.

[81] HENRICH, J., BOYD, R., BOWLES, S., CAMERER, C., FEHR, E., GINTIS, H. E MCELREATH, R. In search of Homo economicus: Behavioral experiments in 15 small-scale societies. *The American Economic Review 91* (2001), 73–78.

[82] HERINGS, P.J.P. An extremely simple proof of the KKMS theorem. *Econ. Theory 10* (1997), 361–367.

[83] HERSTEIN, I.N. E MILNOR, J. An Axiomatic Approach to Measurable Utility. *Econometrica 21* (1953), 291–297.

[84] HERZBERG, F. E ECKERT, D. Impossibility results for infinite-electorate abstract aggregation rules, 2012. Working paper of the Institute of Mathematical Economics, Bielefeld Universität, 427.

[85] HILDEBRAND, W. Core of Economy. In *Handbook of Mathematical Economics, Vol. 2* (1982), Arrow, K.J. e Intriligator, M.D., Ed., North-Holland, Amsterdam, pp. 831–877.

[86] HILDENBRAND, W. E KIRMAN, J. *Introduction to equilibrium analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[87] HOSNI, H. Interpretation, Coordination and Conformity. In *Games: Unifying Logic, Language, and Philosophy* (2009), Pietarinen, A.V., Majer, O. e Tulenheimo, Ed., Springer, pp. 37–55.

[88] HUMBERSTONE, L. *Connectives*. MIT Press, 2011.

[89] ICHIISHI, T. On the Knaster Kuratowski Marzurkiexicz Shapley theorem. *J. Math. Anal. Appl. 81* (1981), 297–299.

[90] JONES, A. *Game Theory*. Wiley, New York, 1980.

[91] KAHNEMAN, D. E TVERSKY, A. Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica 47* (1979), 263–291.

[92] KAKUTANI, S. A generalization of Brouwer fixed point theorem. *Duke Math. J. 8* (1941), 457–459.

[93] KANNAI, Y. On closed coverings of simplexes. *SIAM J. Appl. Math. 19* (1970), 459–461.

[94] KARLIN, S. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*. Addison-Wesley Co., 1959. In due volumi.

[95] KEIDING, H E THORLUND-PETERSON, L. The core of a cooperative game without side-payments. Mimeo Notes, 1985.

[96] KNASTER, B., KURATOWSKI, K. E MARZURKIEWICZ, S. Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe. *Fund. Math. 14* (1929), 132–137.

[97] KOMIYA, H. A simple proof of KKMS theorem. *Econ. Theory 4* (1994), 463–466.

[98] KORNHAUSER, L.A. E SAGER, L.G. Unpacking the court. *Yale Law Journal 96* (1986), 82–117.

[99] KRASA, S E YANNELIS, N.C. An elementary proof of the Knaster Kuratowski Marzurkiexicz Shapley theorem. *Econ. Theory 4* (1994), 467–471.

[100] KREPS, D.M. *Note on the Theory of Choice*. Underground Classics in Economics, 1988.

[101] KREPS, D.M. *A Course in microeconomics theory*. Princeton University Press, 1990.

[102] KREPS, D.M. *Game Theory and Economic Modelling*. Oxford Univ. Press, 1990.

[103] KY FAN. Extensions of two fixed point theorems of F:E: Browder. *Math. Z. 112* (1969), 234–240.

[104] LI CALZI, M. *Teoria dei Giochi*. Etas Libri, 1995.

[105] LILLO, F., MICCICHÈ, S. E MANTEGNA, R. Econofisica: il contributo dei fisici allo studio dei sistemi economici. *Il nuovo Saggiatore 21* (2005), 68–81.

[106] LIST, C. Collective Wisdom: Lessons from the Theory of Judgement Aggregation, 2008. Colloquium on Collective Wisdom, Collège de France, 2008.

[107] LIST, C. The theory of judgement aggregation: an introductory review. *Synthese 187* (2012), 19–33.

[108] LIST, C. Social Choice Theory, 2013. Stanford Encyclopedia of Philosophy.

[109] LOLLI, G. *Filosofia della matematica. L'eredità del Novecento*. Il Mulino, Bologna, 2002.

[110] LOLLI, G. *La guerra dei trent'anni (1900-1930)*. ETS, Pisa, 2011.

[111] LUCCHETTI, R. *Di duelli, scacchi e dilemmi*. Bruno Mondadori, 2008.

[112] LUCE, R.D. E RAIFFA, H. *Games and decisions*. Wiley, New York, 1957. Edizione Dover 1985.

[113] MACKIE. *Democracy Defended*. Cambridge University Press, 2003.

[114] MAKINSON, D., Ed. *Bridges from Classical to Non-monotonic Logic*. College Publications, London, 2005.

[115] MARSHALL, A. *Principles of Economics*. London, 1890.

[116] MARX, K. *Capital: A Critique of Political Economy*. London, 1887. Publicato in tedesco in prima edizione, 1867.

[117] MAS-COLELL, A. *The Theory of General Economic Equilibrium. A Differentiable Approach*. Econometric Society Monographs, 1985.

[118] MAS-COLELL, A., WHINSTON, M.D. E GREEN, J.R. *Microeconomic Theory*. Oxford University Press, 1995.

[119] MCKENZIE, L. *Classical General Equilibirium Theory*. MIT, 2002.

[120] MCLEAN, I. Independence of irrelevant alternatives before Arrow. *Mathematical Social Sciences 95* (1995).

[121] MIRANDA, C. Un'osservazione sul teorema di Brouwer. *Boll. Un. Mat. Ital. 3* (1941), 5–7.

[122] MONGIN, P. Factoring out the impossibility of logical aggregation. *Journal of Economic Theory 141* (2008), 100–113.

[123] MONGIN, P. The doctrinal paradox, the discursive dilemma, and logical aggregation theory. *Theory and Decision 73* (2012), 315–355.

[124] MONGIN, P. Spurious unanimity and the Pareto principle. *Economics and Philosophy* (2014).

[125] MOULIN, H. Choice functions over a finite set: A summary. *Social Choice and Welfare 2* (1985), 147–160.

[126] MYERSON, R.B. *Game Theory: Analysis of Conflicts*. Harvard Univ. Press, 1991.

[127] NASH, J.F. JR. Equilibrium Points in N-Person Games. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA 38* (1950), 48–49.

[128] NASH, J.F. JR. The Bargain Problem. *Econometrica 18* (1950), 155–162.

[129] NASH, J.F. JR. Non-Cooperative Games. *Ann. of Math. 54* (1951), 286–295.

[130] OSBORNE, M.J E RUBINSTEIN, A. *A Course in Game Theory*. The MIT Press, 1994.

[131] OWEN, G. *Game Theory*. Academic Press, 1982.

[132] PARETO, V. *Cours d'Économie Politique Professé a l'Université de Lausanne*. Rouge, 1896-1897. In due volumi.

[133] PARETO, V. *Manuale di economia politica con una introduzione alla scienza sociale*. Società editrice libraria, Milano, 1906.

[134] PARK, S. Ninety Years of the Brouwer Fixed Point Theorem. *Vietnam Journal of Mathematics 27* (1999), 187–222.

[135] PAULY, M. E HEES, M. Logical Constraints on Judgements Aggregation Theory. *Journal of Philosophical Logic 35* (2006), 569–585.

[136] PETTIT, P. Deliberative democracy and the discursive dilemma. *Philosophical Isuues 11* (2001), 268–299.

[137] POINCARÉ, H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. *C.R. Acad. Sci. Paris 97* (1883), 251–252. *Oeuvres*, VII, 251-252.

[138] POINCARÉ, H. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. *Bull. Astronomique 1* (1884), 65–74. *Oeuvres*, VII, 253-261.

[139] POINCARÉ, H. Sur les courbes definies par équations différentielles, IV. *J. Mat. Pures Appl. 2* (1886), 251–252. *Oeuvres*, I, 167-223.

[140] POINCARÉ, H. Les mathématiques et la logique. *Revue de métaphysique e de morale XII* (1905), 815–835.

[141] POUNDSTONE, W. *Prisoners's Dilemma*. Anchor Books, 1992.

[142] QUINN, W.S. The puzzle of the self-torturer. *Philosophical Studies (Minneapolis) 59* (1990), 79.

[143] RAMSEY, F.P. Truth and probability (1926). In *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays* (1931), Braithwaite, R.B., Ed., Kegan, Paul and Co, London, pp. 156–198.

[144] RICARDO, D. *On the Principles of Political Economy and Taxation*. Murray, London, 1816.

[145] ROBERTS, A.W. E VARBERG, D.E. *Convex Functions*. Academic Press, 1973.

[146] ROCKAFELLAR, R.T. *Convex Analysis*. Princeton Un. Press, 1970.

[147] RUBINSTEIN, A. *Lecture Notes in Microeconomic Theory*. Princeton University Press, 2006.

[148] RUBINSTEIN, A. *Economic Fables*. Open Book Publisher, 2009.

[149] RUBINSTEIN, A. E FISHBURN, P.C. Algebraic Aggregation Theory. *Journal of Economic Theory 38* (1986), 63–77.

[150] SAMUELSON, P.A. A note on the pure theory of consumer's behaviour. *Econometrica 5(17)* (1938), 61–71.

[151] SAMUELSON, P.A. *Foundation of Economic Analysis*. Harvard University Press, 1947. Traduzione italiana, *Fondamenti di analisi economica*, Il Saggiatore 1973.

[152] SAVAGE, L.J. *The Foundations of Statistics*. Dover, 1972. Seconda edizione.

[153] SCARF, H.E. The core of an n person game. *Econometrica 35* (1967), 50–69.

[154] SCARF, H.E. The approximation of fixed points of continuous mappings. *SIAM J. Appl. Math. 15* (1967), 1328–1343.

[155] SCHELLING, T.C. *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 1960.

[156] SCHELLING, T.C. *Micromotives and macrobehavior*. Norton, New York, 1978.

[157] SEN, A.K. *Collective choice and social welfare*. Holden-Day, San Francisco, 1970. North-Holland, Amsterdam 1979.

[158] SEN, A.K. The impossibility of a Paretian liberal. *J. Political Economy 78* (1970), 152–157.

[159] SEN, A.K. *Choice, Welfare and Measurement*. Blackwells, 1982. Edizione italiana *Scelta, benessere, equità*, Il Mulino, 1986.

[160] SEN, A.K. Goals, Commitment, and Identity. *Journal of Law, Economics and Organization 1* (1985), 341–355.

[161] SEN, A.K. Rationality and uncertainty. *Theory and Decision 18* (1985), 109–127.

[162] SEN, A.K. Information and invariance in normative choice. In *Social choice and public decision-making. Vol. 1. Essays in honor of Kenneth J. Arrow*, Heller, W.P., Starr, R.M. and Starrett, D.A., Ed. Cambridge University Press, 1986, pp. 29–55.

[163] SEN, A.K. Social choice theory. In *Handbook of Mathematical Economics* (1986), Arrow, K.J. e Intrilligator, M., Ed., North Holland.

[164] SEN, A.K. Social choice. In *The New Palgrave* (1988), Eatwell, J., Milgate, M. e Newmann, P., Ed., Macmillan.

[165] SEN, A.K. Internal consistency of choice. *Econometrica 61* (1993), 495–521.
[166] SEN, A.K. Rationality and social choice. *American Economic Review 85* (1995), 1–24.
[167] SEN, A.K. Maximization and the Act of Choice. *Econometrica 65* (1997), 745–779.
[168] SEN, A.K. *Etica ed economia*. Editori Laterza, 2002.
[169] SEN, A.K. *Rationality and Freedom*. Belkap Press of Harvard University Press, 2002.
[170] SEN, A.K. *The Idea of Justice*. Penguins Books, 2009. Traduzione italiana, *L'idea di giustizia*, Mondadori 2010.
[171] SHAPLEY, L.S. A Value for *n*-Person Games. In *Contributions to the Theory of Games* (1953), Kuhn, H.W. e Tucker, A.W., Ed., Princeton University Press.
[172] SHAPLEY, L.S. On balanced games without side payments. In *Mathematical Programming* (1973), Hu, T.C. e Robinson, S.M., Ed., Academic Press, New York. The Rand Corporation P-4910 and correction P-4910/1.
[173] SHAPLEY, L.S. E VOHRA, R. On Kakutani fixed point theorem, the KKMS theorem and the core of a balanced game. *Econ. Theory 1* (1991), 108–116.
[174] SHUBIK, M. Core of Economy. In *Handbook of Mathematical Economics, Vol. 2* (1982), Arrow, K.J. e Intriligator, M.D., Ed., North-Holland, Amsterdam, pp. 285–330.
[175] SHUBIK, M. *Game Theory in the Social Scienes: Concepts and Solutions*. MIT Press, 1982.
[176] SIMON, H.A. A behavioral model of rational choice. *The Quarterly Journal of Economics 69* (1955), 99–118.
[177] SKYRMS, B. *The Stug Hunt and the Evolution of Social Structure*. Cambridge University Press, 2004.
[178] SMITH, A. *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*. W. Strahan and T. Cadell, London, 1776. Oxford University Press, 1976.
[179] SMITH, A. *The theory of moral sentiments*. T. Cadell, London, 1790. Oxford University Press, 1975.
[180] SMITH, A. *La ricchezza delle nazioni*. Newton Compton, 1995. Anche Utet, 2006.
[181] SPERNER, E. Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionalzahl der Gebietes. *Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 6* (1928), 265–272.
[182] THALER, R.H. Libertarian paternalism. *The American Economic Review 185* (2003).
[183] TIROLE, J. Incomplete contracts: where do we stand? *Econometrica 67* (1999), 741–781.
[184] TODD, M. Lecture notes. Cornell University, 1978.
[185] TVERSKY, A. Intransitivity of preferences. *Psychological Review 76* (1969), 31–48.
[186] VAN DALEN. *Logic and Structure*. Springer, 1980.
[187] VON MISES, L. *Human action: A treatise on economics*. Yale University Press, 1949.
[188] VON NEUMANN, J. Theorie der Gessellschaftsspiele. *Math. Ann. 100* (1928), 295–320.
[189] VON NEUMANN, J. Über ein ökonomisches Gleichungsystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquium 8* (1937), 73–83. Translation: *A Model of General Economic Equiibrium*. In Review of Economic Studies, 13 (1945-1946).
[190] VON NEUMANN, J. E MORGENSTERN, O. *Theory of games and economical behavior*. Princeton University Press, 1944. Seconda edizione 1947.
[191] WALD, A. Über die eindeutige positive Losbarkeit der neuen Produktionsgleichungen. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquium 6* (1935), 12–18. Translation: *On the Unique Non-Negative Solvability of the New Production Equations*. In Precursors in Mathematical Economics, edited by Baumol and Goldfield, London School of Economics and Political Sciences, 1968.
[192] WALD, A. Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Wellehre. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquium 7* (1936), 1–6. Translation: *On the Production Equations of Economic Value Theory*. In *Precursors in Mathematical Economics*, edited by Baumol and Goldfield, London School of Economics and Political Sciences, 1968.
[193] WALRAS, L. *Eléments d'économie politique pure*. Corbaz, Lausanne, 1874.
[194] WATKINS, J.W.N. Historical explanation in the social sciences. *British Journal for the Philosophy of Science 8* (1957), 104–117.
[195] WILSON, R. Social choice theory without the Pareto principle. *Journal of Economic Theory 34* (1972), 478–486.
[196] WILSON, R. On the theory of aggregation. *Journal of Economic Theory 99* (1975), 89–99.
[197] YOSELOFF, M. Topological proofs of some combinatorial theorems. *J. Comb. Th. 17* (1974), 95–111.

[198] ZEIDLER, E. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications*. Springer, New York, 1986-1990. In 5 volumi.

Indice dei nomi

Indice analitico