LA MATEMATICA DA SCIENZA DELLE GRANDEZZE A TEORIA DELLE FORME

L'*Ausdehnungslehre* di H. Graßmann

Tesi di dottorato di Paola Cantù

Dottorato di Ricerca in Filosofia (Filosofia della Scienza)
XIV ciclo - A.A. 2001/2002

Università degli Studi di Genova

Indice

III Appendice 347

Prefazione

Filosofia della matematica o storia delle idee?

Che cos'è la filosofia della matematica? Studio dei fondamenti della matematica, discussione ontologica sulla natura dei suoi oggetti, riflessione metodologica sul significato dell'assiomatizzazione e sulla nozione di teoria deduttiva e di dimostrazione, studio metamatematico delle proprietà delle teorie matematiche (coerenza, completezza, categoricità, ...)? La filosofia della matematica è tutto questo, come testimoniano i numerosi e fecondi studi dedicati a questi temi, ma è anche altro: interrogazione sulla maniera in cui i matematici (e più in generale gli scienziati e i filosofi) *concettualizzano* la propria disciplina, riflettono su di essa allo scopo di darne una definizione teorica o di determinarne i rapporti con le altre scienze o di spiegarne le peculiarità. Per portare alla luce le riflessioni dei matematici sulla propria disciplina occorre indagare le connessioni tra i contenuti delle teorie, le convinzioni epistemologiche e le considerazioni filosofiche di ciascun autore; solo inserendo i risultati di queste indagini in una cornice storica unitaria è tuttavia possibile studiare l'origine e lo sviluppo delle idee matematiche. Ed è proprio questo, secondo noi, l'obiettivo di un modo di riflettere filosoficamente sulla scienza che, predominante fino alla fine dell'Ottocento e all'inizio del Novecento (si pensi – tra gli altri – ai lavori di Mach, Duhem, Enriques), è andato scemando nel XX secolo, sia a causa della crescente specializzazione delle scienze, sia a causa del preponderante interesse per la questione dei fondamenti della matematica (ridotta talvolta a semplice contrapposizione tra logicismo, intuizionismo e formalismo). Se una ragione dell'abbandono dell'indagine sulle idee matematiche, sul loro formarsi e sul loro significato matematico e filosofico, può essere rintracciata nel legittimo timore di affrontare un ambito sconfinato, riteniamo tuttavia possibile compiere un piccolo passo di una tale ricerca, pensabile solo come somma di studi individuali parziali.

Tema della ricerca

L'oggetto di questa indagine, che concerne in generale le riflessioni filosofiche condotte da matematici e da filosofi sulla natura della matematica, è stato circoscritto allo studio di un particolare momento della storia della matematica in cui avviene la transizione dalla concezione della matematica come scienza delle grandezze alla concezione della matematica come teoria delle forme. La nostra ricerca si concentra sull'opera di Hermann Graßmann, che ha costituito — come cercheremo di mostrare in questo studio — una tappa fondamentale di questo passaggio.[1] Poiché riteniamo che un'indagine filosofica sulla matematica come scienza debba tenere conto sia dei contenuti delle ricerche matematiche sia della concettualizzazione che ne è stata fatta, un'indagine filosofica su Hermann Graßmann comporta sia un'analisi puntuale delle sue ricerche matematiche (e dunque un confronto con le teorie dell'epoca per rilevare l'originalità delle sue soluzioni e dei suoi metodi) sia un'analisi delle riflessioni di Graßmann sulla natura della matematica, del suo metodo, dei suoi oggetti d'indagine (e dunque un confronto con le riflessioni di altri matematici e filosofi ottocenteschi). La nostra indagine filosofica peccherebbe infatti di ingenuità se studiasse le teorie matematiche come oggetti astratti, senza nello stesso tempo analizzarle anche come prodotti di un uomo e di un'epoca. I risultati di un'indagine di questo tipo appartengono probabilmente ad un ambito diverso da quello che spesso si attribuisce alla filosofia della matematica: essi sconfinano nella *storia delle idee matematiche* e, più in generale, nella storia del pensiero scientifico. Ma è proprio in questo ambito che, secondo noi, il filosofo della matematica può collaborare con lo storico per spiegare il significato delle teorie matematiche, dei loro concetti e dei loro metodi all'interno di ciascuna epoca.

In particolare studieremo la storia dell'idea di forma, che soppianta l'idea di grandezza nella definizione della matematica data da Graßmann. Ad una considerazione superficiale la definizione di Graßmann potrebbe sembrare un preludio alle successive definizioni novecentesche della matematica come teoria delle strutture, a causa del prevalere della componente formale e astratta su quella concreta e misurabile propria del concetto geometrico di grandezza. Rileggendo la storia della matematica a partire dal presente e insistendo sul-

[1] Nella ricerca si farà riferimento anche a Robert Graßmann, fratello di Hermann, e a Justus Graßmann, padre dei due autori citati. Poiché l'attenzione è concentrata principalmente sull'opera di Hermann Graßmann, ove non diversamente specificato con il cognome 'Graßmann' si intenderà sempre Hermann, mentre faremo riferimento al fratello Robert o al padre Justus o aggiungendo l'iniziale o indicando per esteso il nome di battesimo. In questo lavoro si è scelto di scrivere il cognome di Graßmann come egli stesso lo scriveva (si veda ad esempio la firma autografa riprodotta nella edizione delle opere complete) e cioè 'Graßmann' anziché 'Grassmann'.

la ricerca dei precursori della concezione attuale della matematica, si corre il rischio di travisare il significato di alcune idee e teorie matematiche del passato, ma soprattutto si rischia di non comprenderne il significato e la portata epistemologica, l'intreccio con le convinzioni filosofiche dell'autore e con il contesto culturale in cui la teoria è sorta. In particolare, se ci si ferma all'apparente somiglianza tra la *Teoria generale delle forme* di Graßmann e gli studi successivi sulle strutture algebriche astratte, si perde il significato del concetto di forma come parte di un tutto, come tutto composto di parti, come ciò che può essere connesso e separato, come estensione, come prodotto del pensiero, come oggetto caratterizzato da una regolarità generativa — significati che noi cercheremo invece di ricostruire e di confrontare con il significato tradizionalmente attribuito al termine grandezza.

Il sapere matematico

Per comprendere cosa fosse e come fosse intesa la matematica nell'Ottocento occorre muoversi in due direzioni: 1) individuare le ricerche matematiche in corso in quegli anni, 2) indagare il modo in cui i pensatori dell'epoca (matematici, filosofi e scienziati) intendevano il sapere matematico in genere, ossia stabilire il tipo di *concettualizzazione* cui la matematica era soggetta in quanto una tra le tante forme di conoscenza umana. Poiché nella prima direzione sono già stati condotti numerosi e ben documentati studi, faremo ampiamente uso dei risultati di tali ricerche per quanto riguarda lo sviluppo generale della matematica e rivolgeremo la nostra attenzione soprattutto alla seconda direzione di ricerca.

Mentre sono molto numerosi gli studi sulla storia della matematica e sulla filosofia della matematica intesa come indagine sui fondamenti o come logica matematica o come riflessione ontologica sulla natura degli oggetti e del metodo della matematica, assai carenti sono le ricerche sulla storia delle idee matematiche e in primo luogo sulla storia dell'idea stessa di matematica. Nella bibliografia a noi nota sono molto rari (e spesso poco approfonditi) i testi dedicati all'analisi delle concezioni della matematica sviluppate dai filosofi mentre mancano del tutto testi dedicati allo studio dei diversi modi in cui i matematici stessi hanno definito la loro disciplina. Il capitolo introduttivo è dedicato pertanto alla ricerca dei modi in cui la matematica è stata definita e concettualizzata nell'opera di matematici, filosofi, scienziati.

Non è certo possibile condurre una tale ricerca in maniera esaustiva, facendo riferimento a tutti gli autori rilevanti nella costruzione di questo scenario: svilupperemo pertanto la ricerca soltanto in alcune direzioni, che certo non sono le uniche possibili, come non saranno gli unici autori rilevanti quelli di cui faremo parola. Poiché è necessario adottare un punto di vista, seppure limitato, dal quale far partire una ricerca di questo genere, abbiamo scelto di analizzare alcune definizioni che contribuiscono alla determinazione del rapporto tra la matematica e gli altri saperi. Dopo un breve cenno alla classificazione baconiana delle scienze e alla concezione della matematica di Hume e di Leibniz, faremo riferimento ad alcune definizioni di matematica presentate tra Settecento e Ottocento con l'intento di stabilire il posto della matematica nel quadro più generale delle conoscenze scientifiche: analizzeremo le definizioni di matematica presenti nelle enciclopedie settecentesche (la *Cyclopaedia* di Chambers e l'*Encyclopédie* di Diderot e d'Alembert) e in alcuni studi ottocenteschi sulla classificazione delle scienze (in particolare Ampère, Comte, Spencer e Wundt, sconfinando nel Novecento con la considerazione del progetto enciclopedico neopositivista).

Questo 'detour' storico preliminare ha un doppio esito: da un lato traccia un contesto all'interno del quale valutare l'originalità di contenuto e di metodo della classificazione delle scienze presentata da Graßmann nell'Introduzione alla sua opera principale — l'*Ausdehnungslehre* o Teoria dell'estensione[2] — e della sua deduzione del concetto di matematica all'interno di questo quadro generale del sapere umano; dall'altro suggerisce una riflessione filosofica sul ruolo dei criteri classificatori delle scienze come strumenti per definire il concetto di matematica. Soprattutto la storia delle diverse definizioni di matematica mostra la relatività di ogni pretesa di caratterizzare in modo esauriente o di circoscrivere in modo definitivo l'ambito della matematica come scienza e pone anche in dubbio la preminenza delle riflessioni sulla natura ontologica (reale, ideale o quant'altro) degli enti matematici ai fini di una comprensione piena del concetto stesso di matematica.

La matematica come scienza delle grandezze

Pur nella varietà dei modi di rapportare il sapere matematico agli altri saperi e nei diversi criteri classificatori adottati, emerge un tratto comune nella concettualizzazione della matematica: essa è perlopiù definita come scienza delle grandezze o è posta in relazione con il concetto di grandezza. Si potrebbe dire che nonostante tutte le differenze tra i vari autori, le rispettive filosofie e le concezioni epistemologiche, la matematica sia in qualche modo considerata 'tradizionalmente' come *Scienza delle grandezze.* E in effetti a questa definizione si riferiscono Graßmann ed altri autori prima e dopo di lui come ad un portato della tradizione da contestare e da modificare.

[2]Il titolo completo recita *Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert.* [Scienza della grandezza estensiva o Teoria dell'estensione, una nuova disciplina matematica presentata e chiarita mediante applicazioni].

Difficile è però scoprire chi per primo abbia definito la matematica in questo modo e se davvero tutti gli autori che si riferiscono alla matematica come ad un sapere che ha a che fare con le grandezze intendano davvero la stessa cosa. Poiché mancano monografie sul concetto di grandezza e sul suo rapporto con il concetto di numero nella definizione della matematica come scienza, abbiamo ritenuto essenziale prendere le mosse, per mostrare come la matematica si trasformi da 'scienza delle grandezze' a 'teoria delle forme', da un'indagine del significato matematico di grandezza.

Questa parte della ricerca, condotta attraverso il commento di testi di vari autori (in particolare Aristotele, Euclide, Proclo, Viète, Stevin, Wallis, Newton, Descartes, Leibniz, Wolff, d'Alembert, Euler, Gauss, Bolzano, Hölder) svolge diverse funzioni nell'economia dell'opera: abbozza alcuni momenti salienti della storia matematica del concetto di grandezza da Euclide a Gauss, suggerendo le coordinate storiche e teoriche per comprendere la definizione di matematica come scienza delle grandezze all'inizio dell'Ottocento; delinea il rapporto tra il concetto di numero e il concetto di grandezza nello sviluppo dell'algebra in età moderna, fornendo i presupposti per comprendere l'esigenza di un concetto più generale (la forma o forma di pensiero) che si applichi sia a numeri sia a grandezze e individuando le ragioni per le quali Graßmann sviluppa la teoria delle grandezze estensive senza assumere coordinate numeriche arbitrarie. Infine, questa parte della ricerca mostra in che modo il concetto di grandezza estensiva sia venuto progressivamente differenziandosi da un concetto più generale di grandezza e come esso si sia evoluto da un lato nella direzione di una teoria della misurazione dall'altro nella ricerca della determinazione delle proprietà delle operazioni tra grandezze e tra grandezze e numeri, ricerca che trova un'importante esemplificazione proprio nella nuova disciplina creata da Graßmann: l'*Ausdehnungslehre*.

H. Graßmann: la matematica come teoria delle forme

Se una riflessione filosofica sulla natura della scienza matematica non può prescindere da una comprensione dell'oggetto e del metodo di tale scienza, uno studio della storia dell'idea matematica e filosofica di forma nell'Ottocento è una condizione necessaria per comprendere la metamorfosi novecentesca della matematica e la sua trasformazione in scienza di relazioni e strutture. Resta da chiarire perché, tra i numerosi autori che nell'Ottocento hanno contribuito a modificare la definizione della matematica da 'scienza delle grandezze' a 'teoria delle forme', si sia scelto di concentrare l'attenzione proprio sui lavori di H. Graßmann.[3]

[3]Hermann Graßmann, filosofo, teologo, matematico e filologo vissuto a Stettin nell'Ottocento, è il creatore di un calcolo vettoriale e di una teoria dell'estensione che studia le

Una ragione consiste nel fatto che la definizione che Graßmann propone della matematica come *Teoria delle forme* è intrinsecamente legata alla determinazione di un luogo del sapere matematico e alla nascita di una nuova disciplina matematica. La riflessione di Graßmann conduce ad un *diverso criterio definitorio* e ad un *diverso concetto di oggetto matematico*. Gli oggetti matematici non sono intesi né come idee né come proprietà astratte dalle cose né tantomeno come oggetti concreti dell'esperienza reale: il concetto di oggetto matematico è definito non in forza della sua peculiare natura ontologica quanto in rapporto all'attività che lo produce. Gli oggetti matematici sono essenzialmente *forme di pensiero*, cioè cose divenute per mezzo del pensiero: lungi dall'essere oggetti creati dal nulla gli oggetti matematici sono generati mediante una legge, una regolarità generativa applicata ad un elemento iniziale. Quattro principali leggi generative, modellate sulle opposizioni fondamentali tra continuo e discreto, uguale e disuguale, determinano le caratteristiche intrinseche di ciascun gruppo di oggetti matematici: i numeri, le combinazioni, le grandezze intensive ed estensive. Le leggi generative assumono così la funzione di criterio definitorio della matematica come scienza e determinano nel contempo una nuova classificazione delle sue parti: Aritmetica, Analisi combinatoria, Teoria delle funzioni, Teoria dell'estensione. La matematica, mentre riceve una nuova definizione, vede ampliarsi e modificarsi il proprio oggetto: il concetto di grandezza geometrica è generalizzato in un più ampio concetto di grandezza estensiva che abbandona la limitazione tridimensionale; i concetti di numero e di grandezza geometrica sono ricomposti nell'unità di un concetto più ampio che riesce a rendere conto della natura adimensionale e discreta dei primi di contro a quella dimensionale e continua delle seconde; le proprietà delle operazioni algebriche e geometriche (commutatività, associatività, distributività) sono considerate come caratteri definitori dell'addizione e della moltiplicazione.

La riflessione di Graßmann sulla matematica non è estrinseca alla ricerca matematica stessa: essa è piuttosto guidata da motivazioni e problemi scientifici; il concetto generale di *grandezza estesa* (o grandezza estensiva) che Graßmann propone nell'*Ausdehnungslehre* nasce infatti dall'esigenza di costruire geometricamente le soluzioni di diversi problemi risolubili con strumenti analitici e permette di rappresentare grandezze con più di tre dimensioni e di attribuire un significato alle formule algebriche contenenti numeri ipercomplessi. La nuova teoria è d'altra parte connessa anche alla soluzione di sistemi di equazioni lineari e a numerose applicazioni alla meccanica e alla cristallografia. Ciò che colpisce nell'opera di Graßmann, soprattutto nel confronto con il concetto di grandezza proprio della definizione 'tradizionale', è

---

grandezze in spazi a un numero qualsiasi di dimensioni.

l'estrema generalità e la maggiore astrattezza del concetto di 'grandezza estesa': esso non solo trova applicazione in numerose discipline, dalla geometria alla fisica, ma è sviluppato in maniera coerente senza ricorrere all'introduzione di coordinate analitiche, cioè senza presupporre il concetto aritmetico di numero.

L'interesse di un'analisi del concetto di forma in Graßmann è filosofico e matematico insieme: permette di cogliere l'origine di nuovi concetti fondamentali della matematica (la definizione ricorsiva di addizione numerica, i concetti di somma e prodotto di vettori non collineari, i concetti di base, dimensione, dipendenza e indipendenza lineare) e nello stesso tempo si presenta come un'indagine filosofica sulle analogie e sulle differenze tra i concetti di numero e di grandezza, sui rapporti tra i diversi ambiti disciplinari della matematica (specialmente aritmetica e teoria dell'estensione), sulla possibilità di una nuova fondazione vettoriale della geometria. Un'ulteriore ragione per scegliere l'opera di Graßmann come ambito principale di una ricerca sui concetti matematici di forma e di grandezza è costituita proprio dall'intreccio continuo tra aritmetica, algebra, geometria e filosofia che essa offre.

In conclusione, le ricerche 'filosofico-matematiche' di Graßmann rivelano un'analisi approfondita dei concetti di grandezza geometrica, grandezza in generale, numero, forma, grandezza estensiva e offrono dunque una possibilità diretta di confronto tra i concetti in gioco nel passaggio della matematica da scienza delle grandezza a teoria delle forme. Contemporaneamente l'analisi dei lavori di Graßmann mostra una preoccupazione filosofica rivolta non tanto alla discussione della natura ontologica degli oggetti matematici quanto alla giustificazione delle ragioni per introdurre nuovi concetti e alla discussione del problema della genesi degli oggetti stessi, cioè un interesse per i temi centrali di questa ricerca.

Piano dell'opera

Nel capitolo introduttivo si pone a tema il concetto stesso di matematica, che è analizzato per mezzo di una breve ricognizione storica del rapporto tra il sapere matematico e le altre scienze. Con l'eccezione di Leibniz, che accomuna la matematica alla logica perché entrambe contengono proposizioni certe e necessarie, la matematica è in generale associata alla fisica: le enciclopedie settecentesche riprendono infatti la tripartizione baconiana delle scienze in base alle diverse facoltà conoscitive (memoria, immaginazione, ragione) e includono esplicitamente la matematica accanto alla fisica tra le conoscenze razionali. Le classificazioni ottocentesche delle scienze, modellate sulle tassonomie naturalistiche, classificano invece la matematica in base agli oggetti di cui si occupa (siano essi enti, proprietà, caratteri comuni a più cose, punti di vista). La classificazione di Ampère, forse la più apprezzata dagli scienziati ottocenteschi, suddivide la matematica in sottodiscipline per mezzo dei concetti di grandezza in generale e di estensione, che a loro volta comprendono quelli di numero e di forma. La classificazione di Comte pone in primo piano il ruolo strumentale della matematica nello studio dei fenomeni perché concepisce la matematica come scienza della misura delle grandezze e dunque come base di tutte le scienze teoriche astratte. Spencer, come già Leibniz e Hume, associa la matematica alla logica in quanto entrambe studiano non gli oggetti ma le relazioni tra oggetti. Wundt presenta a fine Ottocento una distinzione tra scienze reali e scienze formali (cui appartiene la matematica in quanto scienza delle grandezze e dell'ordine) che presenta interessanti analogie con la concezione sostenuta da Graßmann cinquant'anni prima. I filosofi neopositivisti (Carnap in particolare) rifiutano tale distinzione se essa implica una distinzione ontologica tra oggetti ideali ed oggetti reali, ma la assumono se essa denota una separazione tra i tipi di proposizioni propri dei due gruppi di scienze (come avviene tra l'altro in Graßmann e in Wundt).

Dalla ricognizione delle definizioni di matematica nelle classificazioni del sapere è possibile estrarre alcuni criteri classificatori generali: i fini della conoscenza (in base ai quali Aristotele distingue le scienze in teoretiche, pratiche, poietiche e che sono alla base della distinzione della matematica in pura ed applicata), le facoltà conoscitive (criterio spesso estrinseco allo sviluppo reale delle scienze e che caratterizza la matematica come un'attività essenzialmente razionale), gli oggetti (che possono essere una classe di enti, ma anche un insieme di note, proprietà, punti di vista), la natura delle proposizioni (necessità, possibilità, a priori, a posteriori), la forma assiomatica (criterio quest'ultimo applicabile però soltanto alle scienze dimostrative assiomatizzabili). Questi criteri classificatori, cui si dovrebbe aggiungere almeno il criterio metodologico, non sono mai usati isolatamente ma spesso danno origine ad una classificazione adeguata delle scienze solo se usati in maniera congiunta, o per determinare le singole scienze all'interno di raggruppamenti più generali o per determinare le sottodiscipline di ciascuna scienza. Anche se usati congiuntamente allo scopo di fornire una definizione di matematica, essi non possono che fornire una definizione parziale e provvisoria: solo il criterio degli oggetti, combinato al criterio assiomatico, lungi dal fornire alcuna indicazione sulla natura ontologica degli oggetti matematici, può però 'riempire' la definizione di matematica con un riferimento concreto ai concetti che in essa compaiono.

La prima parte della ricerca è dedicata allo studio della definizione di matematica per mezzo dell'analisi di un concetto assunto 'tradizionalmente' come oggetto della matematica ma in realtà soggetto a variazioni di significato in diversi momenti storici e in diverse teorie matematiche: il concetto di grandezza. Il capitolo 2 indaga dapprima il concetto aristotelico di grandezza geometrica e la sua differenza rispetto al concetto più generale di quantità, che comprende anche il numero, il tempo, il discorso. In Aristotele non vi è una definizione generale di matematica ma si fa sempre riferimento a due discipline distinte: aritmetica e geometria; alcuni passi degli *Analitici Secondi* esprimono tuttavia l'esigenza di trovare un genere sommo (che comprenda numeri e grandezze) rispetto al quale predicare universalmente le proposizioni della teoria della proporzioni di Eudosso, un genere cioè che possa costituire l'oggetto di una scienza matematica generale. Un tale genere non si trova però né in Aristotele (anche se non sarebbe implausibile identificarlo con il concetto di quantità) né in Euclide: le nozioni comuni e le proposizioni del V libro degli *Elementi*, che esprimono le proprietà dell'uguaglianza e delle proporzioni, valgono sia per i numeri sia per le grandezze eppure non si introduce un nuovo concetto per denotare un genere più alto.

Gli umanisti del Cinquecento, interpretando un passo del *Commento agli Elementi* di Proclo che vede nella scienza generale una matematica universale che tratta delle grandezze o quantità, introducono una definizione esplicita di matematica come scienza delle quantità: il concetto di quantità è più generale di quello geometrico di grandezza e corrisponde ad un'idea di *grandezza in generale* intesa come «ciò che può essere posto uguale o disuguale». Questa definizione di matematica resta pressoché invariata nei secoli successivi e per questo nel Settecento appare già come una definizione 'tradizionale', anche se non risale affatto alla matematica antica: tuttavia il concetto di grandezza di cui si parla varia continuamente significato da un autore all'altro, da un'epoca alla successiva. Con lo sviluppo dell'algebra (in particolare con la logistica speciosa di Viète) la quantità o grandezza in generale è concepita ad esempio come un nuovo concetto simbolico le cui proprietà sono mutuate dalle proprietà delle operazioni aritmetiche sui numeri: i concetti di grandezza e quantità si trovano così al centro dei complessi rapporti tra aritmetica, geometria, algebra. Queste ultime non sono affatto fuse in un'unica scienza delle quantità, perché numeri e grandezze geometriche hanno proprietà diverse: oltre alla continuità (differenza che viene tolta con la definizione newtoniana di numero come rapporto tra grandezze), vi è l'omogeneità dei numeri di contro alla dimensionalità delle grandezze.

Se la matematica, complici gli sviluppi dell'algebra, viene sempre più spesso definita come scienza delle grandezze o quantità, ciò non significa che la definizione faccia leva su una categoria ontologica di oggetti: le grandezze in generale. Piuttosto, poiché le grandezze in generale sono definite all'interno della teoria delle proposizioni e delle equazioni, che stabilisce rapporti e relazioni tra le cose, la definizione di matematica rimanda essenzialmente all'idea di relazione e di operazione, come testimonia la definizione cartesiana di grandezza come «ciò che riceve il più e il meno», come ciò che può essere confrontato, misurato e ordinato. Questa definizione di grandezza racchiude in sé i caratteri attribuiti da Aristotele rispettivamente alla qualità e alla quantità e dunque si allarga oltre il concetto di quantità degli algebristi cinquecenteschi, comprendendo anche il concetto di qualità. In questa direzione si muovono le ricerche di Leibniz, la cui *mathesis universalis* non è più soltanto studio della relazione di uguaglianza e dell'operazione di somma (entrambe individuate come caratteristiche della quantità) ma è anche studio di altri tipi di relazioni, tra cui in particolare quella di similitudine, propria delle qualità: la matematica universale è scienza generale delle relazioni.

Nel capitolo 3 prosegue l'indagine sul concetto di matematica come scienza delle grandezze attraverso il commento di alcuni testi, riportati anche in appendice, di Wolff, d'Alembert, Euler e Gauss. Se i termini 'grandezza' e 'quantità', distinti da Aristotele come specie e genere, finiscono con il diventare sinonimi in seguito allo sviluppo dell'algebra, Wolff introduce ufficialmente questa sinonimia nella lingua tedesca traducendo il termine latino 'quantitas' con l'espressione 'Größe', che etimologicamente significa invece grandezza. D'Alembert, attento alla storia dei concetti matematici, distingue chiaramente un senso specifico di grandezza proprio della geometria da un senso generale proprio dell'algebra: solo in quest'ultimo senso il termine 'quantità' può essere considerato sinonimo di 'grandezza'. La definizione di origine cartesiana delle grandezze come «ciò che è suscettibile di aumento e di definizione» si ritrova in Euler, che ne rivela il significato matematico: ciò che caratterizza una grandezza è essenzialmente il fatto di poter essere ottenuta ed espressa come somma di grandezze date. Su questa stessa caratteristica delle grandezze ritorna Gauss per caratterizzare le grandezze estensive, cioè le grandezze determinate da un certo tipo di rapporto tra le parti e il tutto, rapporto che è espresso matematicamente per mezzo di un'operazione di addizione. Il concetto di grandezza estensiva, che a fine capitolo è delineato anche in riferimento alla teoria della misurazione di Hölder, costituisce una sorta di filo rosso che unisce la prima parte della ricerca (i capitoli 2 e 3) e la seconda parte (i capitoli 4-6), dedicata ad un'analisi filosofica dell'*Ausdehnungslehre* di Hermann Graßmann.

Un altro elemento di continuità è il rapporto con la definizione 'tradizionale' di matematica come scienza delle grandezze: Graßmann non è infatti il primo a criticare tale definizione e a suggerirne una alternativa. Uno dei primi autori a porre in questione la definizione 'tradizionale' di matematica è Bolzano, il quale osserva che in molte parti della matematica, ad esempio nell'analisi combinatoria, non compaiono né il concetto di grandezza né quello di numero. Bolzano propone una nuova definizione di matematica come «scienza che tratta delle leggi generali (forme) alle quali si conformano le cose nella loro esistenza» e definisce la matematica per opposizione alla filosofia: la matematica si occupa soltanto delle condizioni di possibilità delle cose e non della loro esistenza, mentre la metafisica cerca di dimostrare a priori la realtà di certi oggetti. Successivamente Bolzano ritorna però a privilegiare la definizione 'tradizionale', ritenuta accettabile a condizione che essa sia considerata come una convenzione pratica più che come una caratterizzazione univoca ed esaustiva delle teorie matematiche.

La seconda parte della ricerca pone a tema sia le teorie matematiche di Graßmann e in particolare la teoria delle grandezze estensive (esposta in dettaglio nel capitolo 5) sia il suo concetto di matematica come teoria delle forme (capitolo 4) sia infine il complesso intreccio tra filosofia, geometria ed algebra che si trova nella sua opera (capitolo 6).

Il capitolo 4 commenta in dettaglio l'Introduzione alla prima edizione dell*Ausdehnungslehre* (1844), dedicate rispettivamente alla determinazione del concetto di matematica pura e delle sue sottodiscipline nel quadro più generale del sapere e alla presentazione del metodo espositivo adottato nell'opera. Graßmann, differenziandosi in ciò nettamente dalle classificazioni naturalistiche di Ampère o di Comte, non deriva la definizione di matematica dall'osservazione dei suoi oggetti di studio ma la deduce dal concetto generale di scienza. Questa deduzione presenta analogie con il procedimento diairetico platonico, ma interseca gli opposti e non è completata da un movimento di risalita dal molteplice all'unità del punto di partenza: come in Schleiermacher e a differenza che in Hegel, nell'opposizione è tenuta ferma la differenza degli opposti, la cui unità è possibile solo nell'individualità di un soggetto pensante. La prima opposizione, quella tra reale e formale, distingue le scienze in due gruppi non in base ad un diverso ambito ontologico di oggetti, ma in base ad un diverso rapporto tra il soggetto pensante e l'essere pensato: se l'essere è considerato come indipendente dal pensiero, la scienza è reale, se l'essere è considerato come posto dal pensiero stesso, la scienza è formale. La differenza tra scienze formali e reali involge sia un diverso criterio di verità (nel primo caso occorre una corrispondenza tra due atti di pensiero mentre nel secondo una corrispondenza tra un pensiero e un essere) sia una diversa natura delle proposizioni: le scienze formali contengono definizioni, mentre solo le scienze reali possono partire da assiomi.

La matematica è, come la Dialettica, una scienza formale: le sue caratteristiche sono determinate proprio per opposizione rispetto a quelle della dialettica. Mentre questa procede dal generale al particolare, la matematica al contrario procede sempre dal particolare al generale: tuttavia l'esposizione dell'opera si fonda — come per Graßmann ogni esposizione scientificamente rigorosa — sulla combinazione dei due diversi procedimenti in modo da fornire ad ogni passo al lettore, attraverso un 'presentimento' della successiva verità da cercare, una visione d'insieme. La matematica è per Graßmann una scienza formale (fondata su definizioni e regolata dal principio di non contraddizione) che ha per oggetto la forma, cioè ≪un essere particolare divenuto per mezzo del pensiero≫. In tale contesto si discute la natura concettuale delle forme e la loro essenza genetica, mostrando che il concetto di forma contiene sia l'idea di un particolare sia l'idea della legge con cui esso è divenuto (in modo discreto o continuo, per mezzo dell'uguale o del diverso). La matematica definita come *Teoria delle forme* è considerata una scienza delle relazioni perché rivolge l'attenzione non tanto al tipo di cose che vengono generate ma alla relazione o legge di generazione. Solo all'interno di ciascuna disciplina le forme possono però essere determinate completamente dai rispettivi modi di generazione.

La matematica è divisa per mezzo di due coppie di concetti contrapposti (continuo e discreto, uguale e differente) in quattro discipline fondamentali: l'*Aritmetica* (forme discrete e uguali), l'*Analisi combinatoria* (forme discrete e differenti), la *Teoria delle funzioni* (forme continue e uguali), la *Teoria dell'estensione* (forme continue e differenti). *Continuo* e *discreto*, *uguale* e *differente* sono i modi di generazioni che caratterizzano e distinguono le forme. La sezione dedicata alla *Teoria generale delle forme*, disciplina matematica preliminare a tutte le altre, conferma questa ipotesi di lettura, rivelando la modernità dell'approccio di Graßmann, che studia il tipo di proprietà che caratterizzano le operazioni (associatività, commutatività, distributività, univocità dell'operazione inversa, elemento neutro).

Il capitolo 5 è dedicato ad un commento analitico dei primi capitoli dell'*Ausdehnungslehre*, sia nella versione del 1844 sia in quella del 1862, e ad un confronto con la moderna assiomatizzazione del concetto di spazio vettoriale e con le definizioni usuali di prodotto scalare e vettoriale. Si mostra che la grandezza, e in particolare la grandezza estensiva, non è più oggetto della matematica in generale, ma di una sua sottodisciplina: la Teoria dell'estensione, che comprende, oltre ad una determinazione precisa del concetto di grandezza, anche l'introduzione (per mezzo di un'interpretazione reale delle proprietà formali delle operazioni espresse nella Teoria generale delle forme) di operazioni di somma, prodotto e prodotto per uno scalare. Dall'analisi del testo emerge l'origine di alcuni concetti fondamentali della teoria moderna degli spazi vettoriali e della multialgebra: spazio vettoriale, sistema di generatori di uno spazio, dimensione di uno spazio, indipendenza e combinazione lineare di vettori, diverse nozioni di prodotto. In particolare il confronto tra le due differenti versioni dell'*Ausdehnungslehre* permette di cogliere come l'edizione del 1844, benché più filosofica e di più difficile comprensione, rispecchi meglio l'intento di Graßmann di costruire e fondare una teoria dell'estensione indipendente da coordinate numeriche e in cui le definizioni non appaiano come assunzioni arbitrarie ma siano fondate nel concetto stesso di estensione che si intende descrivere. Le proprietà del prodotto di due vettori, che genera una superficie orientata e non un vettore come nel calcolo moderno, sono giustificate e chiarite nel 1844 non in funzione di una maggiore semplicità di calcolo ma per rendere conto della generazione dell'estensione.

Il capitolo 6 approfondisce il rapporto dell'opera di Graßmann con la filosofia, la geometria e l'algebra in relazione al concetto di grandezza estensiva. Come suggeriscono alcuni studi recenti, Graßmann desume il concetto di prodotto geometrico dal padre Justus, fortemente influenzato dalla temperie culturale della *Naturphilosophie*: si indaga dunque il rapporto tra la determinazione delle proprietà del prodotto e la concezione dinamica della natura. Particolare attenzione è riservata all'analisi di un testo giovanile di Schelling (*Allgemeine Deduktion*) nel quale si spiega la generazione della materia mediante un processo di moltiplicazione di forze che agiscono nello spazio e che ha la sua origine nei *Metaphysische Anfangsgründe* di Kant.

Riprendendo i temi già sviluppati nei capitoli 2 e 3, si indaga il rapporto tra grandezza estensiva e grandezza geometrica all'interno della complessa relazione tra algebra e geometria: la Teoria dell'estensione può essere applicata alla geometria se ci si limita alla considerazione di sistemi di dimensione minore o uguale a tre. In particolare per mezzo del concetto di grandezza estensiva è possibile fornire una nuova fondazione della geometria: ponendo come primitivo il concetto di vettore anziché i concetti di punto, retta, piano, si costruisce la geometria separando fin dall'inizio e con estrema coerenza la geometria affine dalla geometria metrica. Questo diverso modo di fondare la geometria si richiama all'idea leibniziana di costruire una geometria di posizione, una geometria in cui sia possibile calcolare direttamente con le grandezze geometriche, senza tradurre i dati geometrici in equazioni algebriche.

Il capitolo 6 si chiude con un panorama storico sull'origine e sullo sviluppo del concetto di vettore: si riconosce che le teorie di Graßmann non hanno avuto una forte influenza sulla nascita del concetto moderno di prodotto vettoriale ad opera di Gibbs e Heaviside — entrambi influenzati dalla tradizione dei quaternioni e da Maxwell — ma si osserva che l'importanza e il significato teorico dell'*Ausdehnungslehre* di Graßmann si rivelano piuttosto nella definizione dei concetti di base, dimensione, spazio vettoriale, dipendenza e indipendenza lineare, nell'influenza esercitata su Peano e su Bourbaki, influenza che ha condotto rispettivamente alla prima formulazione assiomatica della teoria degli spazi vettoriali e alle ricerche sulle multialgebre. È dunque nella storia dell'algebra lineare, e in particolare nella storia dei concetti di base e di dimensione, piuttosto che nella storia della fisica che si deve ricercare il contributo teorico più prezioso della *Teoria dell'estensione* di Graßmann.

In appendice sono riportati in traduzione italiana alcuni brani tratti dal *Mathematisches Lexicon* di Ch. Wolff, alcune voci dell'*Encyclopédie* scritte da J.-B. d'Alembert, il primo capitolo della *Anleitung zur Algebra* di L. Euler, il testo postumo *Zur Metaphysik der Mathematik* di F. Gauss, la Prefazione, i primi 10 paragrafi e l'Appendice ai *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* e la prima sezione del testo incompiuto e postumo *Einleitung zur Grössenlehre* di B. Bolzano. Di H. Graßmann abbiamo tradotto in appendice l'Introduzione e i primi due capitoli della *Ausdehnungslehre* del 1844; in traduzione non integrale sono stati riportati i primi due paragrafi del primo capitolo della *Ausdehnungslehre* del 1862. L'apparato di testi si conclude con alcuni passi dell'Introduzione e con la parte iniziale del Capitolo IX dell'opera di G. Peano *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann.*

Nota editoriale. Tutti i passi citati nel corpo del testo sono stati riportati in traduzione italiana (ove non è citata un'edizione italiana in bibliografia e ove non sia indicato diversamente si deve intendere che la traduzione è dell'autore); nelle note, invece, i brani sono stati citati, in assenza di una traduzione italiana adeguata, in lingua originale. L'esigenza di uniformità di lettura ci sembrava meglio soddisfatta dalla traduzione in italiano dei numerosi passi citati nel testo (in particolare nei capitoli dedicati a Graßmann). Abbiamo adottato una strategia diversa nelle note perché i brani ivi citati servono prevalentemente a confermare o a rafforzare tesi esposte nel testo, e a questo scopo il testo originale si presta meglio ed è meno sospetto di una traduzione *ad hoc* dell'autore.

Capitolo 1

Introduzione. Il sapere matematico

1.1 La matematica nelle classificazioni del sapere

Per comprendere cos'è la matematica non è sufficiente descrivere le ricerche matematiche e l'attività dei matematici di professione (anche se questo è indubitabilmente il punto di partenza) ma è anche opportuno ricercare come la matematica è definita, che tipo di scienza è e quale posto si riserva ad essa tra le conoscenze umane. Diversi sono gli aspetti che permettono di indagare il concetto e la definizione di matematica: 1) il metodo, 2) gli oggetti, 3) la relazione tra conoscente e oggetti, 4) la relazione tra conoscente e teoria, 5) lo statuto epistemologico e la tipologia delle proposizioni matematiche, 6) le applicazioni della matematica, 7) il rapporto tra le sue sottodiscipline, 8) il rapporto con altre scienze e conoscenze. Questo capitolo indaga il concetto di matematica come sapere tra Settecento e Ottocento, analizzando il rapporto tra la matematica e le altre scienze nelle classificazioni delle conoscenze umane. L'analisi del rapporto tra la matematica e le altre forme di sapere fornisce indizi preziosi sul tipo di conoscenza e sul tipo di applicazioni attribuite alla matematica e sulla natura dei suoi oggetti, sul suo metodo e sul rapporto con la filosofia e con le scienze umane in generale.

Dopo un brevissimo riferimento all'idea enciclopedica del sapere di derivazione lulliana e ai suoi sviluppi nei progetti di Bacone, presenteremo la distinzione leibniziana (e poi humeana) tra verità di ragione e verità di fatto e analizzeremo le classificazioni delle scienze e delle arti nelle due maggiori enciclopedie settecentesche: la *Cyclopaedia* di Chambers e l'*Encyclopédie* di Diderot e d'Alembert. Presenteremo quindi le classificazioni delle scienze di

Ampère, Comte, Spencer, Wundt e concluderemo con un rapido cenno al progetto neopositivista di una scienza unificata.

Da questo panorama, certamente non esaustivo della problematica relativa alla classificazione delle scienze ma sufficiente forse ad indicare alcune problematiche rilevanti, emergono indicazioni interessanti sul concetto di matematica: l'attenzione è rivolta prevalentemente al rapporto con le altre scienze e con le applicazioni. La definizione stessa di matematica è valutata in relazione ai criteri di classificazione e al ruolo che la matematica svolge nel sistema delle scienze.

1.1.1 Le enciclopedie settecentesche

L'ideale enciclopedico del sapere

Il Settecento è il secolo della *Cyclopaedia* di Chambers e dell'*Encyclopédie* di Diderot e d'Alembert. Per comprendere lo sviluppo dei progetti enciclopedici del sapere nel Settecento non si può prescindere da un breve riferimento all'*Arbor scientiae* di Lullo, che ha avuto grande influenza nel Rinascimento e ancora nell'età moderna. Nella raffigurazione ad albero della classificazione delle arti adottata da Lullo vi è sia l'intento di una comunicazione più diretta e facile (più «popolare») dell'arte, sia un riferimento all'unità del sapere, che riflette l'unità del cosmo. Ciò che ci interessa della classificazione delle scienze lulliana non è tanto il criterio classificatorio secondo i principi assoluti e relativi o il ruolo della matematica nell'albero, quanto l'ideale lulliano di un rispecchiamento della classificazione degli elementi della realtà nell'*arbor scientiae*, la ricerca di uno strumento comune alle scienze in grado di garantire una conoscenza vera e la convinzione che sia necessario possedere una chiave, un linguaggio in grado di rendere leggibile l'alfabeto in cui è scritto il mondo.[1]

Questi infatti sono tratti caratteristici dell'età moderna che influenzano la concezione enciclopedica del sapere, l'idea di una scienza universale che sia fonte di tutte le conoscenze, la concezione della matematica come strumento di indagine dell'universo «scritto in lingua matematica».[2] Anche nell'enciclopedismo di Lullo e nella diffusione delle sue idee dal Rinascimento fino agli albori dell'età moderna è da ricercare l'origine della posizione privilegiata accordata alla matematica da Descartes, che attribuisce ad essa il ruolo fondamentale di scienza universale in grado di garantire assoluta certezza e verità.

[1] Rossi (1960), pp. 51 ss. e 142 ss.

[2] «e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.» Cfr. Galilei (1623) cit. in Geymonat (1970), p. 166.

Nell'età moderna vi è d'altra parte anche chi, come Bacone, non accorda un grande rilievo alla matematica nell'impresa scientifica: ciononostante facciamo un breve cenno proprio alla sua classificazione delle scienze, perché costituisce un riferimento costante dei successivi tentativi enciclopedici, sia in positivo, come nel caso dell'*Encyclopédie*, sia in negativo, come avviene nelle classificazioni ottocentesche.

Bacone classifica le scienze in base alle tre facoltà memoria, immaginazione e ragione: scienza della memoria è la *storia* (a sua volta suddivisa in storia naturale e storia civile), scienza dell'immaginazione è la *poesia* (divisa in narrativa, drammatica e parabolica), scienza della ragione è la *filosofia* (tab. 1.1).[3] La filosofia prima o scienza degli assiomi è il tronco comune da

<table>
<tr><th colspan="9">FACOLTÀ</th></tr>
<tr><td colspan="2">Memoria</td><td colspan="3">Immaginazione</td><td colspan="4">Ragione</td></tr>
<tr><td colspan="2">Storia</td><td colspan="3">Poesia</td><td rowspan="2">Teologia sacra</td><td colspan="3">Filosofia</td></tr>
<tr><td>Storia naturale</td><td>Storia civile</td><td>Narrativa</td><td>Drammatica</td><td>Parabolica</td><td>Scienza di Dio</td><td>Scienza della natura</td><td>Scienza dell'uomo</td></tr>
</table>

Tabella 1.1: *Bacone*: classificazione del sapere

cui si diramano la scienza di Dio o *teologia*, la scienza della natura e la scienza dell'uomo. La scienza della natura si divide in speculativa e pratica: la parte speculativa comprende la *fisica speciale* o scienza delle cause efficienti e materiali e la *metafisica* o scienza delle cause formali e finali; la parte pratica comprende la meccanica e la magia naturale; infine alla filosofia della natura appartiene anche la matematica, che è sia speculativa sia pratica. La scienza dell'uomo si suddivide in scienza dell'uomo propriamente detta e in scienza civile: alla scienza dell'uomo appartengono le scienze che studiano il corpo (medicina, cosmetica, atletica, scienza dei piaceri e dei sensi) e le scienze che studiano l'anima, tra cui la logica e la morale (tab. 1.2).

L'idea lulliana di una chiave di accesso alla realtà, di un linguaggio in grado di fornire conoscenza vera sul mondo, meno viva in Bacone, ritrova tutta la sua forza in Leibniz, dove è associata, come in Lullo, ad un ideale enciclopedico del sapere. Leibniz progetta fin dagli anni giovanili la realizzazione di un'enciclopedia con il duplice scopo di fornire un quadro generale

[3] Alla divisione delle scienze, già introdotta nell'opera *The Advancement of Learning* del 1605, ampliata e rielaborata per l'edizione latina del 1623 dal titolo *De dignitate et augmentis scientiarum*, Bacone aveva riservato la prima parte (mai scritta) dell'*Instauratio Magna*, di cui il *Novum Organum* costituisce la seconda. Cfr. Bacon (1605) e Bacon (1620), p. 61.

<table>
<tr><td colspan="8">Filosofia prima o scienza degli assiomi</td></tr>
<tr><td>Scienza di Dio</td><td colspan="4">Scienza della natura</td><td colspan="3">Scienza dell'uomo</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Teologia naturale
(anime e spiriti)</td><td colspan="4">Matematica</td><td colspan="2">Scienza dell'uomo</td><td>Scienza civile</td></tr>
<tr><td colspan="2">Speculativa</td><td colspan="2">Pratica</td><td>Corpo</td><td>Anima</td><td rowspan="2">Stato, Affari ...</td></tr>
<tr><td>Fisica particolare</td><td>Metafisica</td><td>Meccanica</td><td>Magia naturale</td><td>Medicina, cosmetica, ...</td><td>Logica, Morale, ...</td></tr>
</table>

Tabella 1.2: *Bacone*: la Filosofia

delle conoscenze e di permettere l'ampliamento del sapere: già tra il 1669 e il 1671 egli considera possibili emendamenti all'enciclopedia di Alsted.[4]

Nella *Dissertatio de arte combinatoria* è già presente l'idea della caratteristica universale, cioè dell'analisi dei pensieri umani con un alfabeto di nozioni primitive, e l'idea di un calcolo logico di tali pensieri per mezzo di una manipolazione dei segni.[5] Il progetto di un'enciclopedia del sapere umano si associa ai progetti di una caratteristica in vari scritti e frammenti sia contemporanei alla *Dissertatio*, sia successivi. Mentre nei primi Leibniz presenta progetti vastissimi, negli scritti più tardi distingue due parti dell'enciclopedia: una parte metodologica, che avrebbe dovuto contenere i *Principi della scienza generale* (Initia Scientiae Generalis), e cioè *ars demonstrandi* e *ars inveniendi*, e una parte contenutistica con alcuni esempi (Specimina Scientiae Generalis). Tali esempi variano significativamente di natura, numero e ordine da uno scritto all'altro, acquisendo via via un carattere più marcatamente razionalista: Couturat fa notare che nella classificazione del '79 rispetto a quella datata all'anno precedente vengono ridimensionate la teologia e la morale (ed è sparito il diritto) a tutto vantaggio delle scienze

[4] H. Alsted (1588-1638), seguace di Lullo e di Ramo, autore del *Systema mnemonicum*. Per mezzo della logica, che è arte della memoria, Alsted costruì un sistema enciclopedico del sapere nella convizione che solo una classificazione sistematica delle scienze e dei loro principi avrebbe permesso una riforma dell'educazione e dell'insegnamento. Attraverso la determinazione dei termini generalissimi e dei principi delle singole scienze Alsted ricercava dei principi universali comuni, a testimonianza dell'unità del sapere, tronco comune dal quale si diramano le singole scienze e tecniche. Sui riferimenti di Leibniz ad Alsted cfr. Leibniz (1923), VI, 2, pp. 395-397. Si veda anche Rossi (1960), p. 247 ss.

[5] Si veda il paragrafo 2.3.2 a pag. 106, in cui torneremo a parlare della *Dissertatio* per introdurre le osservazioni di Leibniz sull'analisi combinatoria.

matematiche e fisiche.[6]

Nella memoria latina *Consilium de Encyclopaedia nova conscribenda methodo inventoria* Leibniz divide l'Enciclopedia in una parte teorica, in cui fornisce una classificazione delle scienze astratte e concrete (di quelle scienze che si servono di sola ragione o di ragione ed esperienza insieme),[7] e in una parte pratica, che avrebbe dovuto contenere le applicazioni scientifiche utili alla vita e alla felicità dell'uomo.[8] La creazione di un'enciclopedia in grado di raccogliere tutte le verità è una condizione preliminare per la creazione della caratteristica o lingua universale: la caratteristica consiste infatti nell'assegnazione di un simbolo a ciascun concetto primitivo e dunque richiede che si individuino preliminarmente tutte le verità e che si analizzino tutti i concetti per trovare i primitivi, associare ad essi i simboli e calcolare.

In Leibniz si fa menzione anche di una *scienza generale*, ma non sempre è chiaro di cosa si tratti: talvolta sembra una condizione preliminare alla combinatoria e dovrebbe fornire analisi e sintesi dei concetti; altrove pare una parte introduttiva all'enciclopedia; altrove infine pare una disciplina distinta sia dall'enciclopedia sia dalla costruzione di una lingua universale.[9] Se già in Descartes c'è l'idea di una matematica universale fondata sull'applicazione dell'algebra (cfr. il 2.3.1), in Leibniz tale idea è associata alla logica e all'*ars inveniendi*. L'algebra non è solo quella comune, la scienza delle formule significanti la quantità, ma è anche scienza delle qualità (quest'ultima è chiamata *speciosa generale*, mentre la scienza delle quantità è chiamata *algebra speciosa*): l'algebra comune deve cioè essere subordinata all'ambito più generale della combinatoria e della caratteristica.[10]

[6]Si vedano rispettivamente *Consilium de Encyclopaedia nova conscribenda methodo inventoria*, 15-25 giugno 1679 in Leibniz (1875), V.7 e in Leibniz (1903), p. 30 ss. e *Analysis Linguarum*, 11 settembre 1678, in Leibniz (1875), VII.C.9-10. Cfr. Couturat (1901), p. 129.

[7]Cfr. Leibniz (1903), p. 35.

[8]Cfr. Leibniz (1903), p. 40. Le scienze sono classificate nel seguente ordine: 1) *Grammatica* o ars intelligendi, 2) *Logica*, 3) *Mnemonica*, 4) *Topica* o ars inveniendi, 5) *Ars formularia*, 6) *Logistica* o scienza delle grandezze secondo il genere, i rapporti e le proporzioni che si trovano nel quinto libro di Euclide e gran parte dell'algebra, 7) *Aritmetica* o scienza dell'espressione distinta delle grandezze per mezzo del numero, 8) *Geometria* o scienza del sito e della figura, 9) *Meccanica* o scienza della potenza e del movimento, 10) *Poiografia* o scienza delle qualità sensibili, 11) *Omeografia* o scienza dei soggetti suddivisi in specie simili, 12) *Cosmografia* (Astronomia, Geografia fisica, Meteorologia), 13) *Idografia* o scienza dei corpi organici (specie animali e vegetali), 14) *Scienza morale* (Psicologia), 15) *Geopolitica* o scienza dei rapporti dell'uomo con la terra (Geografia politica e Storia), 16) *Teologia naturale* o scienza delle sostanze incorporee.

[9]Cfr. Mugnai (2001), p. 250 e Couturat (1901), pp. 176-282. Vedi anche l'introduzione di Barone a Leibniz (1968), p. lxvi. Ritorneremo su questo tema nel capitolo 2.

[10]Cfr. Leibniz (1968), pp. lx-lxi.

Nelle enciclopedie settecentesche viene meno l'idea di una chiave simbolica universale di accesso alla realtà, ma l'ideale dell'unità del sapere resta vivo soprattutto in funzione pedagogica: nel positivismo di Comte ricomparirà invece con forza l'esigenza di una scienza unitaria (le discipline scientifiche saranno ordinate in una serie gerarchica) che riemergerà in altre forme nel neopositivismo novecentesco.

Verità di ragione e verità di fatto

Più ancora della descrizione dei vari progetti enciclopedici leibniziani che non hanno tuttavia avuto realizzazione e quindi diffusione, è importante una distinzione leibniziana che ha influenzato radicalmente la concezione della scienza e della matematica: la distinzione tra «verità di ragione» e «verità di fatto» o — con le parole di Hume — tra «relazioni di idee» e «questioni di fatto». Questa distinzione, che non è stata subito recepita e accettata come criterio classificatorio delle scienze (infatti le classificazioni enciclopediche settecentesche la ignorano e si richiamano piuttosto al criterio baconiano), influenza tuttavia in modo profondo il pensiero successivo, tra Ottocento e Novecento; essa ha inoltre grande importanza perché implica un diverso raggruppamento delle scienze nel sistema del sapere: la matematica non è accorpata alla fisica come scienza razionale, bensì accostata alla logica come scienza necessaria e certa.

Leibniz La distinzione leibniziana tra verità di fatto e verità di ragione è presente in diversi testi: faremo riferimento nel seguito principalmente alla *Monadologia* e ai *Nuovi Saggi*, perché entrambi questi lavori erano pubblicati e noti nell'epoca in cui Graßmann scrisse la *Teoria dell'estensione*, ma terremo presenti anche altri testi, ove questo sia utile alla comprensione del pensiero di Leibniz.[11]

La distinzione tra due diversi tipi di proposizioni era già presente nella

[11]La *Monadologia* fu redatta da Leibniz in francese intorno al 1714 come breve compendio della propria filosofia con il titolo *Principes de la Philosophie*: fu pubblicata in traduzione tedesca nel 1720 con il titolo *Lehrsätze über die Monadologie* e in traduzione latina nel 1721 sugli *Acta Eruditorum* con il titolo *Principia Philosophiae*. Dopo molte edizioni latine nel Settecento, in seguito al ritrovamento del manoscritto originale ad Hannover, la *Monadologia* fu pubblicata in edizione francese nel 1840 da J.E. Erdmann in *G.G.Leibnitii opera philosophica omnia*. I *Nuovi Saggi*, composti tra il 1704 e il 1705 e non pubblicati da Leibniz a causa della sopraggiunta morte di Locke, al quale erano rivolti sotto forma di commento e critica al *Saggio sull'intelletto umano* (*An Essay Concerning Human Understanding*, 1690), furono editi per la prima volta nel 1765 da H. Raspe nella raccolta *Oeuvres philosophiques Latines et Françoises*. Cfr. Leibniz (1765).

Dissertatio de arte combinatoria,[12] in cui Leibniz distingue i teoremi, che appartengono alla verità eterna, dalle proposizioni singolari storiche e dalle proposizioni universali (osservazioni), la cui verità è invece fondata non nell'essenza ma nell'esistenza. Tale distinzione è poi ripresa in quasi tutti i saggi di Leibniz: una sua consueta presentazione viene dalla *Monadologia*, ma la denominazione «verità di ragione» e «verità di fatto» presente nel manoscritto francese (ritrovato e edito soltanto nel 1840), è assente nelle traduzioni tedesca e latina pubblicate rispettivamente nel 1720 e nel 1721.[13] La terminologia è usata esplicitamente nei *Nuovi Saggi*:

> Le verità primitive che si conoscono per intuizione sono di due tipi, come quelle derivative. Esse sono nel numero delle verità di ragione o in quello delle verità di fatto. Le verità di ragione sono necessarie e quelle di fatto sono contingenti. Le verità primitive di ragione sono quelle che io chiamo col nome generale di identiche, poiché sembra che non facciano che ripetere la medesima cosa senza insegnarci nulla.[14]

Le verità di ragione sono proposizioni necessarie, in cui la relazione soggetto-predicato è esplicita, e sono fondate sul principio di non contraddizione; le verità di fatto sono proposizioni contingenti, in cui la relazione soggetto-predicato è nascosta, e sono fondate sul principio di ragion sufficiente. Leibniz distingue le proposizioni in cui il predicato è contenuto espressamente nel soggetto da quelle in cui il predicato è contenuto solo virtualmente nel soggetto:[15] in questo secondo caso occorre intendere perfettamente il concetto del soggetto per poter comprendere che il predicato è contenuto in esso, occorre analizzare il concetto del soggetto risolvendolo in idee più semplici. In alcuni casi questo è possibile, mentre in altri l'analisi non giunge mai a termine: nelle verità di ragione l'analisi conduce ad una proposizione identica, come avviene nelle dimostrazioni matematiche, mentre nelle verità di fatto l'analisi procede all'infinito, senza termine.[16]

[12] Cfr. il § 2.3.2, p. 106.

[13] «Ci sono pure due specie di verità, quelle razionali e quelle fattuali: a) le verità razionali sono necessarie e il loro opposto è impossibile; le verità fattuali sono contingenti e il loro opposto è possibile. Quando una verità è necessaria, se ne può trovare la ragione mediante l'analisi, risolvendola in idee e verità più semplici fino a giungere alle verità originarie.» Cfr. Leibniz (1997), p. 72.

[14] Cfr. Leibniz (1703), p. 350.

[15] Cfr. Leibniz (1999), p. 73.

[16] «È essenziale distinguere fra le verità necessarie e eterne e le verità fattuali o contingenti: esse differiscono fra loro pressappoco come i numeri razionali differiscono da quelli irrazionali. Infatti, le verità necessarie si possono risolvere in verità identiche come le quantità commensurabili si risolvono in una comune misura: mentre nelle verità contingenti, come nei numeri irrazionali, la risoluzione procede all'infinito, senza trovare mai termine.

Esempi di verità di ragione sono le proposizioni identiche (categoriche, ma anche disgiuntive, copulative, ipotetiche): «A è A», «Ciò che è, è», «Il rettangolo equilatero è un rettangolo equilatero», «Il rettangolo equilatero è un rettangolo», «Non-A è non-A», «Se non-A è BC, ne consegue che non-A è B», «Se una figura che non ha alcun angolo ottuso può essere un triangolo regolare, una figura che non ha alcun angolo ottuso può essere regolare», ecc. Altri esempi di verità di ragione provengono dalle proposizioni identiche negative, che derivano dal principio di contraddizione, il quale afferma sia che una proposizione non può essere vera e falsa nello stesso tempo (principio di non contraddizione), sia che non è possibile che una proposizione non sia né vera né falsa (principio del terzo escluso): «Ciò che è A non potrebbe essere non-A», «AB non potrebbe essere non-A», «un rettangolo equilatero non potrebbe essere non-rettangolo», «È vero che ogni uomo è animale, dunque è falso che si trovi qualche uomo che non sia animale», ecc.[17] Queste verità identiche paiono non servire a nulla, proprio perché sembrano ripetere la stessa cosa senza insegnare niente: tuttavia esse hanno un ruolo fondamentale nella scienza, sia nella derivazione delle conseguenze logiche nel sillogismo sia nella derivazione dei teoremi in geometria (ove ad esempio si faccia uso della dimostrazione per assurdo, che presuppone il principio di contraddizione).

Sia dagli esempi di verità di ragione che Leibniz fa nei *Nuovi saggi*, sia dall'utilità che egli rivendica alle proposizioni identiche (affermative e negative) è chiaro che le proposizioni logiche e matematiche sono verità di ragione. Dunque la distinzione tra verità di ragione e verità di fatto implica una suddivisione della conoscenza in necessaria e contingente, che separa la logica e la matematica dalla fisica e dalle altre scienze della natura. I ragionamenti logici e matematici sono fondati sul principio di contraddizione, «in virtù del quale giudichiamo falso ciò che implica contraddizione e vero ciò che è opposto o contraddittorio al falso.» Per giudicare le verità di fatto, invece, ricorriamo al principio di ragion sufficiente, «in virtù del quale consideriamo che qualsiasi fatto non potrebbe essere vero o esistente e qualsiasi enunciato non potrebbe essere veridico, se non ci fosse una ragion sufficiente del perché il fatto o l'enunciato è così e non altrimenti — per quanto le ragioni sufficienti ci risultino per lo più ignote.»[18] Nelle verità di fatto la relazione tra soggetto e predicato è infatti nascosta e non può essere esplicitata per mezzo di

Perciò la certezza e la ragione perfetta delle verità contingenti è nota soltanto a Dio, il quale abbraccia l'infinito in un solo sguardo. Conosciuto questo segreto, è eliminata la difficoltà della necessità assoluta di tutte le cose, e si vede la differenza tra il necessario e l'infallibile.» Cfr. Leibniz, *Specimen inventorum de admirandis naturae Generalis arcanis* in Leibniz (1875), II, p. 309, tr. it. in Leibniz (2000), I, p. 248.

[17]Cfr. Leibniz (1703), pp. 350-1.

[18]Cfr. Leibniz (1997), p. 73.

un'analisi dei concetti: l'analisi non avrebbe mai fine a causa «dell'immensa varietà delle cose naturali e della divisione dei corpi all'infinito».[19] Le verità di fatto quindi non possono (almeno non dal punto di vista umano) essere dimostrate a priori per mezzo di un'analisi dei concetti così come avviene per le verità di ragione: possiamo produrne ragioni solo induttivamente, a partire dall'esperienza.

La distinzione tra verità di ragione e verità di fatto determina dunque tre differenze fondamentali tra le conoscenze logico-matematiche e le conoscenze fisico-naturali: le prime contengono proposizioni necessarie e le seconde proposizioni contingenti; nelle prime il rapporto tra il soggetto e il predicato è esplicito (sono cioè analitiche nel senso di Kant), mentre nelle seconde è implicito; le prime dimostrano a priori tutte le verità ad eccezione delle verità primitive (intuitive ed evidenti), le seconde si servono di un metodo induttivo anziché deduttivo. Leibniz introduce uno scarto tra matematica e logica da un lato e conoscenza della natura dall'altro, scarto che avrà una grande influenza sia su Graßmann sia, grazie alla ripresa neopositivistica, su tutto il Novecento.

Nei *Nuovi saggi* Leibniz menziona anche, oltre alle verità di ragione e alle verità di fatto, anche proposizioni miste, vale a dire «proposizioni che sono ricavate da premesse, alcune delle quali derivano dai fatti e dalle osservazioni, mentre altre sono proposizioni necessarie; e tali sono una quantità di conclusioni geografiche e astronomiche sul globo terrestre e sui corsi degli astri, che nascono dalla combinazione delle osservazioni dei viaggiatori e degli astronomi con i teoremi di geometria e di aritmetica».[20] Quest'ultima affermazione è molto interessante perché ridimensiona la distinzione netta tra matematica e logica da un lato e tutte le altre scienze dall'altro. Le conoscenze che sono in grado di applicare l'aritmetica e la geometria alle osservazioni sono conoscenze *miste*: esse sono cioè conclusioni di ragionamenti che partono da premesse che sono in parte verità di ragione e in parte verità di fatto. Poiché, secondo la teoria sillogistica aristotelica, che qui Leibniz assume, la conclusione segue la più debole delle premesse,[21] allora le proposizioni miste hanno la stessa certezza e generalità delle osservazioni, vale a dire una generalità

[19] Cfr. Leibniz (1997), p. 75.

[20] Cfr. Leibniz (1703), p.435.

[21] Si tratta della regola nota ai medioevali come «Sectetur partem conclusio deteriorem», secondo la quale in ciascun sillogismo la conclusione ha lo stesso carattere della più debole delle premesse. Alessandro di Afrodisia nel commento al primo libro degli *Analitici primi* attribuisce questa regola generale a Teofrasto, che l'avrebbe applicata nel caso del sillogismo modale: da una premessa necessaria e da una premessa contingente segue una conclusione contingente. Cfr. Kneale e Kneale (1962), pp. 123-4.

derivata mediante induzione da una moltitudine di fatti simili.[22]

Mentre le verità di fatto vertono sull'esistenza, le verità di ragione riguardano piuttosto la dipendenza reciproca delle idee e dunque la loro verità è indipendente dall'esperienza. Leibniz commenta questa proprietà delle verità di ragione, osservando che esse sono verità condizionali, le quali affermano che, «nel caso che il soggetto esista, lo si troverà in un certo qual modo». Dunque la verità «Ogni figura che ha tre lati avrà anche tre angoli» significa che, supposto che vi sia una figura con tre lati, allora tale figura avrà tre angoli. Le verità necessarie — prosegue Leibniz — contengono la ragione determinante e il principio regolativo delle esistenze stesse e, essendo anteriori alle esistenze degli esseri contingenti, sono fondate in un'esistenza necessaria: Dio.[23] Questa caratterizzazione delle verità necessarie è importante ai nostri fini anche perché contribuisce a chiarire l'origine della definizione che Bolzano dà della matematica nel 1810[24] come teoria delle forme: le verità logiche e matematiche sono considerate da Leibniz, in questo passo e in altri luoghi dedicati alla *mathesis universalis*, come condizioni di possibilità delle cose, determinazioni che ne regolano l'esistenza, in quanto stabiliscono come le cose dovrebbero essere se esistessero. Ritorneremo a lungo su questa concezione leibniziana delle verità necessarie e sul significato della *mathesis* generale nei prossimi capitoli. Per ora ci limitiamo a mostrare il contributo alla classificazione delle scienze: da un lato Leibniz ha espresso l'esigenza di un sistema enciclopedico del sapere, esigenza che sarà soddisfatta dalle enciclopedie settecentesche; dall'altro ha introdotto una distinzione tra verità di ragione e verità di fatto che permette una nuova classificazione delle scienze (logico-matematiche e naturali) e soprattutto fornisce un nuovo criterio classificatorio, fondato sulla natura delle verità o proposizioni scientifiche e sul metodo per ottenere tali verità. Logica e matematica contengono proposizioni necessarie e analitiche, mentre le scienze naturali contengono proposizioni contingenti e sintetiche; le prime ottengono per dimostrazione le proprie verità, le seconde possono ottenere verità generali solo per induzione dai casi particolari. Leibniz dunque libera le scienze naturali dal vincolo deduttivo, salvo poi suggerire con l'introduzione di proposizioni miste una categoria di scienze naturali più rigorose, ovvero le scienze che costituiscono applicazioni della matematica alle osservazioni.

Hume Hume presenta la sua nota distinzione tra «relazioni tra idee» e «questioni di fatto» già nel *Treatise on Human Nature*, ma la riformula più

[22] Cfr. Leibniz (1703), pp. 435-7.
[23] Cfr. Leibniz (1703), pp. 436-7.
[24] Cfr. il § 3.2.3, p. 138.

precisamente nell'*Enquiry Concerning Human Understanding*, alla quale facciamo qui riferimento.[25] Dopo aver introdotto i tre tipi di connessione che hanno luogo tra idee — somiglianza, continuità e causa-effetto[26] — Hume osserva che tutti gli oggetti della natura umana possono essere divisi in due tipi: relazioni di idee e questioni di fatto. Del primo tipo sono algebra, geometria e aritmetica: se anche non fosse mai esistito un triangolo o un cerchio in natura, le proposizioni dimostrate da Euclide manterrebbero la loro certezza ed evidenza.[27] È interessante osservare che nel *Treatise* Hume aveva riservato un posto a parte alla geometria, che non era considerata una scienza infallibile e perfetta quanto l'algebra e l'aritmetica. Infatti — osserva Hume — i primi principi della geometria sono ancora tratti dall'apparenza generale degli oggetti e l'apparenza non può mai garantire alcuna sicurezza. Algebra e aritmetica sono perciò le uniche scienze in cui si possa portare avanti una catena di ragionamento fino a qualunque grado di complessità mantenendo una perfetta esattezza e certezza. Noi infatti — continua Hume — possediamo uno standard preciso con cui giudicare uguaglianza e proporzione dei numeri, mentre manca un tale standard per l'eguaglianza dell'estensione e dunque la geometria non può essere considerata una scienza perfetta e infallibile.[28] Le questioni di fatto, invece, non sono scoperte in modo analogo né hanno una pari evidenza: il contrario di una questione di fatto è sempre possibile. La conoscenza certa, ovvero la scienza, è fondata sulla relazione di somiglianza, mentre ogni ragionamento relativo a questioni di fatto è fondato sulla relazione di causa ed effetto, che non può essere conosciuta con semplici operazioni del pensiero ma soltanto per esperienza.

Hume introduce dunque una separazione netta tra matematica e conoscenza empirica: la differenza tra queste conoscenze non è una differenza di grado (le une sono più, le altre meno certe), ma una differenza di struttura: la conoscenza matematica si fonda sul principio di non contraddizione (sulla somiglianza tra idee), la conoscenza empirica si fonda sulla relazione di causa ed effetto. Questa distinzione di Hume, sostanzialmente analoga a quella di Leibniz dal punto di vista della distinzione tra conoscenze matematiche e conoscenze empiriche, ha però un ulteriore scopo: l'esclusione di una terza forma di conoscenza necessaria, e cioè la metafisica.

Hume elimina la fondazione teologica delle verità necessarie: mentre Leibniz individua il loro fondamento in Dio, Hume insiste sul fatto che le verità necessarie si fondano esclusivamente sulla relazione tra idee. Questa impo-

[25] Cfr. Hume (1740), I.3 e Hume (1748), IV.1.

[26] Cfr. Hume (1748), III.

[27] «Propositions of this kind are discoverable by the mere operation of thought, without dependence on what is anywhere existent in the universe.» Cfr. Hume (1748), IV, 1.

[28] Cfr. Hume (1740), I.3.1.

stazione antimetafisica poggia sul riferimento all'attività della coscienza: la somiglianza o dissomiglianza tra idee può essere scoperta con un'operazione del pensiero indipendentemente da cosa esista nell'universo. Il riferimento all'operazione del pensiero ribalta il riferimento leibniziano a Dio (garante delle verità di ragione) spostandolo sull'uomo e sui principi del suo pensiero che regolano le connessioni tra idee.

Tenendo presente questa differenza tra Leibniz e Hume è possibile scorgere una diversa valenza, come vedremo più dettagliatamente nei prossimi capitoli, delle definizioni di matematica come teoria delle forme. In Bolzano, ad esempio, come sarà poi in Husserl, le forme sono le leggi regolative delle cose, le condizioni della loro esistenza, dunque si riferiscono fondamentalmente ad un ambito ontologico. La matematica, cioè, ha il compito di descrivere le relazioni che dovrebbero esservi tra gli enti, se questi sussistessero. In Graßmann, invece, le forme sono oggetti di pensiero prodotti dall'uomo, le cui relazioni reciproche possono essere stabilite considerando le relazioni reciproche dei pensieri che le hanno prodotte: la matematica è un prodotto dell'uomo e come tale essa mette in luce attività e leggi del pensiero umano piuttosto che caratteristiche degli enti.

Cyclopaedia

Rispetto ai progetti leibniziani di un'enciclopedia del sapere, nelle realizzazioni settecentesche viene meno l'idea di una chiave simbolica universale di accesso alla realtà, ma l'ideale dell'unità del sapere resta vivo, soprattutto in funzione pedagogica. Nel 1728 Ephraim Chambers pubblica a Londra la *Cyclopaedia or General Dictionary of Arts and Sciences, containing the definition of the terms, and account of the things signified thereby* . . . .[29] L'opera costituisce una novità rispetto ai precedenti dizionari enciclopedici perché associa due metodi di ordinamento del materiale tradizionalmente ritenuti incompatibili: il metodo alfabetico e il metodo sistematico. Ciascuna arte o scienza è considerata sia isolatamente sia in relazione alle altre per mezzo di un preciso sistema di riferimenti. Chambers fornisce due schemi classificatori parzialmente distinti: il primo, essenzialmente baconiano, il secondo di stampo aristotelico.

La conoscenza della natura è suddivisa in base al fatto che essa appare 1) ai nostri sensi, 2) alla nostra immaginazione, 3) alla nostra ragione. Se appare ai nostri sensi spontaneamente si ha la storia naturale, mentre se appare

[29]La *Cyclopaedia* di Chambers non è però la prima enciclopedia inglese: la prima opera enciclopedica in lingua inglese è stata pubblicata nel 1704 ad opera di John Harris: *Lexicon Technicum or a Universal English Dictionary of the Arts and Sciences*. Cfr. Olivieri Tonelli (1974), p. 367, nota 5 e p. 346.

La conoscenza della natura appare			
ai nostri sensi		*alla nostra immaginazione*	*alla nostra ragione*
spontaneamente	assistita dall'arte		
Storia naturale	Anatomia, Chimica, Medicina, Agricoltura, ...	Grammatica, Retorica, Poesia, ...	Fisica, Metafisica, Logica, Matematica

Tabella 1.3: *Chambers*: classificazione preliminare

assistita dall'arte si hanno l'anatomia, la chimica, la medicina, l'agricoltura, ecc. La conoscenza che appare alla nostra immaginazione è costituita da grammatica, retorica, poesia.... Infine alla conoscenza che appare alla nostra ragione appartengono la fisica, la metafisica, la logica e la matematica. Rispetto alla classificazione di Bacone, la facoltà umana della memoria è sostituita da quella dei sensi, il che permette di associare la conoscenza storica ad arti quali la medicina e l'agricoltura. Chambers inoltre assegna esplicitamente un posto alla matematica tra le conoscenze razionali, escludendo invece la teologia e l'etica. Baconiano è il criterio classificatorio, ma la natura delle scienze considerate testimonia una ben maggiore attenzione allo sviluppo effettivo delle scienze e delle arti. Se di Bacone verrà spesso criticata nell'Ottocento la scelta di un criterio estrinseco alla scienza e ai suoi oggetti, lo stesso rimprovero può essere mosso a Chambers, ma soltanto in parte. Chambers adotta (così come faranno d'altra parte anche gli Enciclopedisti seguendo il suo esempio) uno schema baconiano, ma poi nelle singole voci dell'enciclopedia si occupa di molte pratiche scientifiche particolari.

Sempre nella *Cyclopaedia* Chambers propone però una seconda tavola classificatoria, che riprende il tema, implicito già nella prima, della distinzione tra scienza e arte, ma con una differenza evidente (che Chambers non commenta): il criterio baconiano è subordinato ad un criterio più generale che contrappone conoscenze scientifiche e arti o tecniche. Resta un fattore comune: ciò che in questa classificazione è indicato come sensibile, razionale, artificiale può essere posto in rapporto con ciò che nella prima tavola era indicato rispettivamente come conoscenza derivante dai sensi, dalla ragione e dalla immaginazione. Pur non intendendo discutere in questa sede l'interpretazione della classificazione di Chambers,[30] troviamo interessante la distinzione tra scienze e arti che compare in questa seconda classificazione. La logica, in quanto disciplina legata all'invenzione interna, è un'arte e non

[30]Si veda in proposito Olivieri Tonelli (1974).

propriamente una scienza; la matematica è suddivisa in una parte scientifica e in una parte tecnica, che prende il nome di matematica mista (tab. 1.4).

CONOSCENZA				
naturale e scientifica		***artificiale e tecnica***		
sensibile	*razionale*	*interna*	*esterna reale*	*esterna simbolica*
consistente nella percezione di fenomeni o oggetti esterni	consistente nella percezione dei caratteri intrinseci degli oggetti sensibili	impiegata nella scoperta di accordi e disaccordi	impiegata nella scoperta e applicazione di proprietà e relazioni	impiegata a concettualizzare e ad applicare termini, tropi, ...
Fisiologia o Storia Naturale	Fisica, Metafisica, Matematica Pura, Religione	Logica	Chimica, Matematica mista	Grammatica, Retorica, Poetica, Araldica

Tabella 1.4: *Chambers*: classificazione generale delle scienze

La matematica pura è conoscenza razionale che consiste nella percezione dei caratteri intrinseci degli oggetti sensibili, e in particolare delle quantità. In base a ciò che è soggetto di quantità, la matematica pura si divide in aritmetica (analisi e algebra), geometria (trigonometria, studio delle coniche e geometria sferica), statica. La matematica mista è conoscenza artificiale e tecnica (consistente nell'applicazione delle osservazioni naturali a particolari scopi): essa è esterna e reale e ha il compito di scoprire e applicare le quantità dei corpi. In base ai soggetti di quantità la matematica mista si suddivide in 1) ottica, catottica, diottrica (prospettiva e disegno); 2) fonica (musica); 3) idrostatica, idraulica, pneumatica; 4) meccanica (architettura, scultura, manifattura); 5) pirotecnica (arte militare, fortificazione); 6) astronomia (cronologia e cronometria); 7) geografia e idrografia (navigazione e commercio).

Scienza e arte, e in particolare matematica pura e mista, sono entrambe, in un certo senso, conoscenze scientifiche: la prima però è finalizzata a null'altro che alla conoscenza e dunque è generale e dottrinale, mentre la seconda è rivolta allo studio dei casi e dei dati contigenti e dunque è applicata. Scrive Chambers: «in una scienza la mente guarda direttamente indietro e avanti alle premesse e alle conclusioni; in un'arte, guardiamo lateralmente alle circostanze concomitanti». La scienza è un sistema di deduzioni compiute dalla ragione, senza l'intervento di alcun elemento estrinseco ad essa;

l'arte al contrario si fonda essenzialmente sui dati ed è in un certo senso parte della scienza, una parte considerata non in se stessa (come scienza) ma in riferimento alle circostanze che la determinano.[31]

Si noti che anche nel pensiero greco la differenza tra scienza e arte è fluttuante. Manca in Platone una distinzione rigida tra i termini ἐπιστήμη e τέχνη, che sono usati in modo scambievole, anche se l'esercizio pratico è distinto dall'attività teorica di una scienza.[32] I due termini iniziano a differenziarsi con Aristotele: nella gerarchia delle conoscenze, infatti, le arti sono subordinate alla conoscenza pura o disinteressata. Mentre in Platone la distinzione tra matematica applicata (del commercio) e matematica filosofica è assiologica, in Aristotele e nei suoi discepoli la distinzione è anche genetica: dalla matematica sensibile l'uomo sarebbe passato alla matematica come conoscenza disinteressata e così la matematica sarebbe passata dalla potenza all'atto raggiungendo la sua forma più compiuta.[33] Neppure in Aristotele tuttavia, la distinzione tra arte e scienza è netta: nella *Metafisica* l'arte è contrapposta all'esperienza e ritenuta, come la scienza, conoscenza dell'universale.[34] Nell'*Etica Nicomachea* invece si ha effettivamente un restringimento del concetto di arte, che viene così a distinguersi nettamente dalla scienza. Mentre la scienza ha per dominio il necessario, l'arte ha per dominio il possibile e soltanto per quanto riguarda la produzione e non l'azione.[35]

Encyclopédie

La *Cyclopaedia* di Chambers fu tradotta in italiano a Napoli (1747-54), a Venezia (1748-49, 1749-65) e a Genova (1770-75). L'edizione più nota è però quella francese, apparsa nel 1751 a Parigi con il titolo *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers* a cura di J-B.

[31] Cfr. Chambers (1728), p. ix, cit. in Olivieri Tonelli (1974), p. 368.

[32] Sul rapporto tra scienze e arti in Platone e in Aristotele si vedano Isnardi Parente (1966) e Cambiano (1971).

[33] ≪Di conseguenza, solo quando tutte le arti di tal genere si furono sviluppate, vennero alla luce quelle scienze che non hanno attinenza né col piacere né con i bisogni, e ciò si riscontrò in primo luogo in quei paesi dove gli uomini godevano gli agi della libertà; per questo motivo le arti matematiche fiorirono dapprima in Egitto, giacché colà veniva concessa un'agiata libertà alla casta dei sacerdoti.≫ *Metafisica*, I.1.981b20 in Aristotele (2002), p. 6. Cfr. Isnardi Parente (1966), pp. 266-268.

[34] ≪l'esperienza è conoscenza del particolare, mentre l'arte è conoscenza dell'universale; [...] Gli empirici, infatti, sanno il che, ma non il perché; quegli altri invece [coloro che posseggono l'arte] sanno discernere il perché e la causa.≫ *Metafisica*, I.1.981.a1525, in Aristotele (2002), pp. 4-5.

[35] Arte è nell'*Etica Nicomachea* (VI, 3-4) l'abito, accompagnato da ragione, di produrre qualcosa: non è un'arte l'analitica ma sono arti la retorica, la poetica, la medicina.

d'Alembert e D. Diderot. In verità l'enciclopedia francese, inizialmente progettata come traduzione della *Cyclopaedia*, assunse una natura autonoma e dimensioni molto più vaste rispetto all'originale inglese. Dell'opera di Chambers furono tradotte molte voci e fu senz'altro mantenuta l'idea più originale: la combinazione tra enciclopedia e dizionario; su questi due concetti-chiave dell'opera, elemento di novità rispetto agli altri dizionari dell'epoca, insiste infatti d'Alembert nel Discorso preliminare.[36] La classificazione delle conoscenze, invece, è mutata: il criterio baconiano è ripristinato e la classificazione di Chambers abbandonata. D'altra parte, né l'autore della *Cyclopaedia* né gli autori dell'*Encyclopédie* ritenevano definitiva la propria classificazione. Chambers critica la conservazione della obsoleta classificazione aristotelica, ritenendo che un rinnovamento della disposizione del sapere in discipline avrebbe potuto abbattere alcune barriere imposte dalle classificazioni alla ricerca;[37] tuttavia egli è pienamente convinto dell'artificialità e della relatività di ogni costruzione che pretenda di rappresentare il complesso del sapere umano, che è invece costituito da idee individuali. Anche Diderot e d'Alembert sottolineano l'arbitrarietà e l'insufficienza di ciascuna classificazione delle scienze,[38] ma non per ciò ne affermano l'inutilità: al contrario individuano nel maggior numero di collegamenti e di rapporti tra le scienze un criterio in base al quale giudicare la maggiore o minore efficacia e utilità di una classificazione.[39]

Il sistema delle conoscenze è diviso, secondo il criterio baconiano, in base alle facoltà conoscitive dell'uomo: memoria, ragione, immaginazione. L'ordine, però, è diverso: alla memoria segue la ragione e non l'immaginazione, perché — si legge nel *Discours preliminaire* — è stato seguito l'ordine metafisico delle operazioni dello spirito piuttosto che l'ordine storico: l'ordine metafisico è infatti più adatto a esprimere un ordine sia gnoseologico sia en-

[36]≪L'ouvrage dont nous donnons aujourd'hui le premier volume, a deux objets: comme *Encyclopédie*, il doit exposer, autant, qu'il est possible, l'ordre & l'enchainement des connoissances humaines: comme *Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts & des Métiers*, il doit contenir sur chaque Science & sur chaque Art, soit libéral, soit méchanique, les principes généraux qui en sont la base, & les details les plus essentiels qui en font le corps & la substance.≫ Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), I, p. i.

[37]Cfr. Chambers (1728), p. ix, cit. in Olivieri Tonelli (1974), p. 356.

[38]≪[...] nous avons pourtant cru y devoir faire quelques changemens, dont nous rendrons compte; mais nous sommes trop convaincus de l'arbitraire qui regnera toujours dans une pareille division, pour croire que notre système soit l'unique ou le meilleur; il nous suffira que notre travail ne soit pas entierement desapprouvé par les bons esprits.≫ Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), I, pp. xv-xvi.

[39]≪Quoi qu'il en soit, celui de tous les arbres encyclopédiques qui offriroit le plus grand nombre de liaisons & des rapports entre les Sciences, mériteroit sans doute d'être préféré.≫ Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), I, p. xv.

MEMORIA						
Storia						
Dio		Uomo		Natura		
Sacra		Civile		Naturale		
Sacra	Ecclesiastica	Civile	Letteraria	Uniformità	Errori	Usi

RAGIONE					
Filosofia					
Dio		Uomo		Natura	
Scienza di Dio		Scienza dell'Uomo		Scienza della Natura	
Ontologia	Pneumatologia	Logica	Morale	Fisica	Matematica

IMMAGINAZIONE		
Poesia		
Sacra e Profana		
Narrativa	Drammatica	Parabolica

Tabella 1.5: *Encyclopédie*: classificazione generale

ciclopedico.[40] La conoscenza fondata sulla memoria è la storia: sacra, civile, naturale. La storia naturale comprende lo studio delle uniformità della natura (ad esempio la storia celeste, la storia degli animali, delle piante, ecc.), lo studio degli 'scarti di natura' (i prodigi e gli animali mostruosi), lo studio degli usi di natura, ovvero delle arti, dei mestieri e delle manifatture (dall'oreficeria all'intaglio delle pietre preziose, alla lavorazione della lana, della seta, delle pelli, dei metalli, ...). La conoscenza fondata sull'immaginazione è la poesia, sacra e profana, che comprende la narrativa, il teatro e le allegorie, ma anche la musica e le altre arti (pittura, scultura, architettura, ...). La conoscenza ottenuta per mezzo della ragione è la filosofia, che comprende tre parti 1) scienza di Dio, 2) scienza dell'uomo e 3) scienza della natura. Alla scienza di Dio appartengono ontologia e pneumatologia; alla scienza del-

[40]Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), I, p. xvi. Diderot e d'Alembert scelgono un criterio classificatorio finalizzato a fornire, secondo lo scopo dell'enciclopedia stessa, uno sguardo d'insieme sul sapere, mentre criticano la smania classificatoria di chi, come i naturalisti, passa la vita a classificare i prodotti naturali in genere e specie, mentre farebbe meglio a dedicare il proprio tempo allo studio di quei prodotti stessi: quei naturalisti sono come un architetto che, dovendo costruire un edificio immenso, passa il tempo a tracciarne il progetto anziché iniziare la costruzione.

l'uomo appartengono morale e logica, alla scienza della natura appartengono fisica e matematica.

Qual è il posto occupato dalla matematica in questa classificazione delle scienze? Innanzitutto d'Alembert usa preferibilmente il termine matematiche, per indicare fin dall'inizio la varietà e la molteplicità delle sue parti. Come in Chambers la matematica pura è distinta dalla matematica mista (o applicata), ma quest'ultima è conoscenza di ragione al pari della matematica pura e non più conoscenza tecnica.[41] Compare inoltre una terza disciplina che appartiene alla matematica: la *fisica matematica*, che già dal nome testimonia il numero enorme di sviluppi che la matematica ha avuto nel Settecento grazie all'applicazione alla soluzione di determinati problemi fisici. La matematica appartiene infatti alla stessa classe delle scienze fisiche, cioè alla scienza della natura, a sua volta parte della filosofia. D'Alembert parla addirittura, a proposito del Settecento, di una transizione dall'età seicentesca della matematica a un'età della meccanica:[42] la matematica è utile solo in quanto subordinata alla fisica e in effetti nella definizione di scienze fisico-matematiche, d'Alembert afferma che esse sono una parte della fisica stessa e comprendono l'osservazione, l'esperienza del calcolo matematico e l'applicazione di tale calcolo ai fenomeni naturali.[43]

MATEMATICHE								
Pure		Miste						Fisico-matematiche
Aritmetica	Geometria	Meccanica	Astronomia geometrica	Ottica	Acustica	Pneumatica	Arte del congetturare (Analisi del caso)	

Tabella 1.6: *Encyclopédie*: le matematiche

La matematica (tab. 1.6) si divide dunque in tre parti: pura, mista e fisico-matematica. Alla matematica pura appartengono l'aritmetica, a sua volta suddivisa in teoria dei numeri e algebra (elementare e infinitesimale), e

[41] D'altra parte in Chambers le arti o tecniche sono considerate come parti della scienza: la differenza essenziale tra le due classificazioni risiede nel fatto che la matematica mista è conoscenza di ragione per gli enciclopedisti francesi mentre non lo è per Chambers, perché non è composta esclusivamente da ragionamenti deduttivi.

[42] Si veda anche Kline (1972), p. 718.

[43] Si veda la Voce "Fisico-matematiche, scienze" in Diderot e d'Alembert (1751). Cfr. anche la terza Appendice.

la geometria; della matematica mista fanno parte meccanica, astronomia geometrica, ottica, acustica, pneumatica e arte di congetturare o analisi del caso (cioè la teoria della probabilità); le scienze fisico-matematiche costituiscono un *trait d'union* tra matematica e fisica.[44]

1.1.2 Le classificazioni ottocentesche delle scienze

Mentre nelle enciclopedie settecentesche l'attenzione era rivolta a tutte le forme di conoscenza umana in funzione dello scopo essenzialmente didattico e divulgativo dell'opera (non dimentichiamo però che nella riorganizzazione della classificazione del sapere sia Chambers sia gli enciclopedisti vedevano la possibilità di promuovere lo sviluppo della scienza stessa, indicando nuove connessioni e rapporti tra le sue parti), nell'Ottocento vi sono sia tentativi di classificare le conoscenze scientifiche sia tentativi enciclopedici di stampo esclusivamente filosofico non rivolti alla coordinazione delle scienze e alla determinazione delle relazioni reciproche. Esempi paradigmatici dei due modi di classificare le conoscenze sono Comte e Hegel: analizzeremo la concezione di Comte ma non quella di Hegel, perché questa non è rivolta primariamente alla descrizione e concettualizzazione delle scienze.[45] Le classificazioni delle scienze non sono parti di progetti enciclopedici più ampi ma costituiscono un genere a sé, stimolato e alimentato dal contemporaneo sviluppo delle tassonomie ad opera dei naturalisti: come nella osservazione e nella classificazione delle piante e degli animali si deve procedere dapprima alla catalogazione

[44]Caratterizzeremo con maggiori dettagli la concezione della matematica di d'Alembert nel prossimo capitolo, commentando alcune voci dell'*Encyclopédie* per comprendere cosa intendessero gli enciclopedisti con la definizione "scienza delle quantità", ove per quantità, sinonimo di grandezza, si intende tutto ciò che può essere aumentato o diminuito. Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), I, p. xlix.

[45]Ricordiamo tuttavia brevemente le tre discipline fondamentali nella *Enciclopedia delle scienze* di Hegel perché, pur con un significato radicalmente diverso, la distinzione tra natura e spirito ricorrerà anche all'interno della scienza positiva a fine Ottocento. D'altra parte un approfondimento di alcuni passi di Hegel sarebbe interessante per l'analisi dei concetti di quantità e di qualità in matematica: l'*Enciclopedia* è infatti ricca di osservazioni sui concetti e sui procedimenti delle scienze. Hegel considera tre discipline fondamentali — la logica, la filosofia della natura e la filosofia dello spirito — che hanno tutte uno stesso oggetto: l'Idea. La logica considera l'Idea in sé e per sé, prima che si sviluppi nel mondo; la filosofia della natura considera l'Idea nel suo esser altro, cioè nel suo esteriorizzarsi nel mondo della natura; la filosofia dello spirito ha per oggetto l'Idea che torna in se stessa, cioè l'Idea che prende coscienza di sé come principio (§18). La distinzione delle scienze avviene in base non all'oggetto, che è lo stesso per tutte, ma alla determinazione in cui si manifesta l'Idea: come essente in sé e per sé, come alterità, come essente per sé e diveniente in sé e per sé. La partizione delle scienze non va intesa come una suddivisione in specie, poiché le tre determinazioni dell'Idea sono momenti che fluiscono e dunque ogni scienza è sia conoscenza del proprio contenuto sia conoscenza del passaggio al contenuto superiore.

degli oggetti e poi al raggruppamento di essi secondo uno o più caratteri comuni.

Come Cuvier individua un carattere fondamentale dei corpi organici — la riproduzione — e li classifica secondo i caratteri dell'apparato riproduttivo, così Comte individua un carattere comune a tutte le scienze teoriche astratte — la ricerca di leggi generali tra i fenomeni — e le classifica in base al tipo di fenomeni spiegati. In entrambi i casi il criterio è però artificiale, perché riflette una presa di posizione teorica preliminare. Diverso è il modo di procedere di Ampère, che prende a riferimento de Jussieu, autore di una classificazione naturale delle piante e degli animali. Ampère critica le classificazioni basate su un unico carattere degli oggetti e propone una classificazione 'dal basso' che raggruppi le scienze in base al maggior numero di caratteri comuni.

Criterio dominante in base al quale classificare gli oggetti diventa nell'Ottocento l'ambito degli oggetti studiati da una scienza, sia che con ciò si intenda un ambito di fenomeni, un insieme di qualità e quantità dei corpi, un gruppo di caratteri comuni a determinati oggetti o ancora un insieme di punti di vista (concetti) sotto cui sono considerati gli oggetti. Le quattro classificazioni che abbiamo scelto di analizzare (Ampère, Comte, Spencer e Wundt) permettono di indagare il diverso ruolo che la matematica ha assunto all'interno del sistema delle scienze, confrontandolo con il ruolo che essa ha assunto all'inizio del Novecento nell'ideale unitario del sapere dei neopositivisti. Se per lo più la scelta degli autori era obbligata — le classificazioni di Ampère, Spencer e Comte sono il riferimento comune degli scienziati e dei filosofi dell'epoca (Ampère ha anche introdotto una terminologia che, in parte, è tuttora in vigore) — nel caso di Wundt la scelta è espressamente funzionale all'analisi dell'opera di Graßmann. Benché infatti il testo di Wundt sia successivo e non possa servire a comprendere l'origine della classificazione presentata nell'introduzione alla *Teoria dell'estensione* di Graßmann, è interessante confrontare le due classificazioni, poiché entrambi gli autori definiscono la matematica come scienza delle forme e distinguono una teoria generale delle forme dallo studio matematico delle forme.

La classificazione 'naturale' di Ampère

Nell'opera *Essais sur la philosophie des sciences* Ampère si chiede perché l'uomo sia portato naturalmente a classificare, disponendole in un ordine determinato, le proprie conoscenze su un qualche oggetto: per possedere meglio quelle stesse conoscenze, per reperirle più facilmente e per comunicarle. Una classificazione del sapere permette però anche di aumentare la somma delle conoscenze e di scoprire nuovi rapporti, obbligando a considerare gli oggetti sotto aspetti differenti. Mosso da queste ragioni Ampère presenta una nuova classificazione delle scienze, che egli definisce 'naturale' in contrapposizione alla classificazione baconiana ripresa dagli enciclopedisti.[46] Mentre quest'ultima fonda la divisione delle conoscenze umane sulla distinzione tra le facoltà conoscitive dell'uomo (memoria, ragione e immaginazione), la classificazione di Ampère raggruppa le conoscenze in base alla natura degli oggetti che essi studiano o in base al punto di vista a partire dal quale li studiano: essa si presenta come 'naturale' sia perchè non assume un criterio estrinseco come base della classificazione ma cerca piuttosto di rendere conto delle analogie reali tra le scienze, sia perchè ricalca le classificazioni di storia naturale, che procedono dal basso (descrizione e catalogazione dei dati osservativi) verso l'alto (raggruppamento delle specie in generi e famiglie).[47] Ampère distingue le conoscenze scientifiche in due gruppi che corrispondono ai regni vegetale e animale, quindi fa corrispondere scienze del primo, secondo e terzo ordine alle categorie tassonomiche di Cuvier: rispettivamente classi, ordini e famiglie.[48]

CLASSIFICAZIONE STORIA NATURALE	CLASSIFICAZIONE SCIENZE
regni (vegetale e animale)	regni (noologiche e cosmologiche)
sottoregni	sottoregni
tipi	tipi
sottotipi	sottotipi
classi	scienze del primo ordine
ordini	scienze del secondo ordine
famiglie	scienze del terzo ordine

Tabella 1.7: *Ampère*: un criterio classificatorio 'naturale'

Per classificare le scienze il filosofo deve considerare le verità come il naturalista considera le diverse specie di vegetali e animali (ciascuna scienza è infatti considerata come un insieme di verità). Come il naturalista prende le mosse dalle specie e le riunisce in generi e poi in famiglie, in ordini, in tipi e infine in regni in base all'analogia tra i caratteri delle specie, così il filosofo deve raggruppare le verità tra loro più intime nelle scienze dell'ordine più basso

[46]Cfr. Ampère (1834), pp. 1-2.

[47]Cfr. Ampère (1834), pp. 4-7.

[48]Ampère fa riferimento al *Tableau du règne animal* di Cuvier. Cuvier ha presentato classificazioni degli animali sia in *Tableau élémentaire de l'histoire naturelle des animaux* (1798) sia in *Leçons d'anatomie comparée* (1800-1805). Cfr. La Vergata (1988a), pp. 349 ss.

e poi riunire questi ordini in scienze di ordine immediatamente superiore e così via fino ad arrivare a due grandi gruppi di verità: le scienze cosmologiche e le scienze noologiche (tab. 1.7). Questa classificazione è naturale perchè tiene conto dei caratteri comuni alle conoscenze e non si fonda su un criterio artificiale, che comporta lo studio di un unico carattere delle cose. La critica di Ampère alla classificazione degli enciclopedisti (che adotta un criterio classificatorio estrinseco agli oggetti delle scienze, ovvero la tripartizione della facoltà conoscitiva umana) trasporta sul piano della classificazione delle scienze la contrapposizione tra arbitrarietà o naturalità delle tassonomie nella storia naturale. Mentre Cuvier assunse un unico carattere come criterio classificatorio (l'apparato riproduttivo), de Jussieu e altri sostenitori di una tassonomia naturale tenevano conto di tutti i caratteri (primari, secondari, terziari) suddividendo vegetali e animali in classi in base ad analogie fondate sul maggior numero di caratteri comuni e prendendo le mosse dal particolare (le specie) per arrivare al generale (i regni).[49]

I due principali mezzi per caratterizzare una scienza distinguendola dalle altre sono la natura degli oggetti che essa studia e il particolare punto di vista in base al quale essa li studia. Questo secondo mezzo è particolarmente importante nel caso delle conoscenze umane perché le scienze sono fatte dall'uomo e per l'uomo e una classificazione naturale delle scienze deve avere anche una funzione pedagogica, introducendo dapprima le scienze che riposano su un numero più piccolo di idee e di principi, in modo che chi le studia abbia bisogno a ciascuno stadio soltanto delle conoscenze precedentemente acquisite.[50]

La classificazione delle scienze inizia dunque con la matematica, la quale si compone del più piccolo numero di idee derivanti tutte dalle nozioni di grandezza, estensione, movimento e forza: per studiare la matematica non occorrono conoscenze mutuate da altre scienze.[51] Alla matematica deve seguire lo studio delle proprietà dei corpi inorganici, e dunque la fisica, quindi lo studio degli esseri viventi, cioè la scienza naturale. Tra gli esseri viventi uno studio particolare è rivolto all'uomo, del quale si occupano la filosofia, la morale e la politica. Poiché gli uomini si trasmettono pensieri, sentimenti,

[49] Le idee di Bernard de Jussieu si trovano in due memorie curate da Antoine-Laurent de Jussieu (1773,1774) e nell'introduzione ai *Genera plantarum secundum ordines naturales disposita* (1789). Cfr. La Vergata (1988b), pp. 787 ss.

[50] Cfr. Ampère (1834), pp. 12-14. L'interesse di Ampère per la funzione pedagogica della classificazione delle scienze è testimoniato dal progetto che egli aveva inizialmente formulato di un trattato di *Matesiologia*, che contenesse non soltanto la classificazione e i vari rapporti fra le scienze, ma anche una esposizione dei contenuti e indicazioni didattiche Cfr. Ampère (1834), p. 22. Cfr. anche il saggio introduttivo di M. Bertolini alla sezione "La classificazione delle scienze" in Ampère (1969), p. 467.

[51] Cfr. Ampère (1834), p. 15.

passioni per mezzo di strumenti, seguiranno le scienze che si occupano di tali mezzi e dunque le lingue, le letterature e le arti liberali. Infine, poiché gli uomini si organizzano in società, lo studio di esse e delle istituzioni umane costituirà l'ultimo anello della catena: le scienze sociali.

Per quanto riguarda la matematica, Ampère prende le mosse dalle scienze del terzo ordine (si è detto che una classificazione naturale deve partire dal basso) che studiano le proprietà relative alla misura delle grandezze in generale: l'*Aritmografia*, che comprende l'aritmetica e quella parte dell'algebra che ha a che fare con valori determinati e noti;[52] l'*Analisi matematica*, che comprende invece lo studio di equazioni, ovvero la ricerca di valori determinati ma non noti (le incognite); la *Teoria delle funzioni* (così chiamata da Lagrange), che comprende il calcolo integrale e il calcolo differenziale e che studia il valore limite di grandezze reciprocamente dipendenti; la *Teoria della probabilità*, che ricerca le cause più o meno probabili degli eventi. Tutte queste scienze sono riunite in una scienza del primo ordine — l'*Aritmologia* — a sua volta divisa in due scienze del secondo ordine in base alla conoscenza più semplice o più approfondita che esse forniscono dello stesso oggetto: l'*Aritmologia elementare*, più semplice, e la *Megetologia*, più approfondita.[53]

L'aritmologia, come ogni scienza del primo ordine, è caratterizzata da un oggetto unitario, che può essere studiato secondo differenti punti di vista (corrispondenti ciascuno ad una scienza del terzo ordine) e in modo più semplice o più approfondito (di qui il raggruppamento in scienze del secondo ordine). Ampère inserisce in un'osservazione a margine la definizione precisa di questi punti di vista: autoptica, criptoristica, troponomica, criptologia. *Autoptica* è lo studio di ciò che è oggetto di intuizione immediata o che si percepisce con una semplice ispezione dell'oggetto: nell'aritmografia cogliamo a colpo d'occhio le trasformazioni tra le espressioni simboliche. *Criptoristica* è la ricerca e la determinazione di ciò che è nascosto, come ad esempio il valore delle incognite in analisi matematica. *Troponomica* è il confronto degli oggetti in base ai cambiamenti di luogo e di tempo cui sono soggetti e la deduzione di leggi per tali cambiamenti: la teoria delle funzioni è proprio caratterizzata dai cambiamenti successivi di varietà che variano simultaneamente e dalle leggi dei rispettivi accrescimenti. La *Criptologia* infine è lo studio di ciò che vi è di più nascosto, ovvero delle cause ignote degli effetti

[52] Ampère osserva che una suddivisione dei rami della matematica che tenga conto dei caratteri essenziali degli oggetti deve riunire aritmetica e algebra: la differenza dei segni con i quali sono rappresentate le grandezze nell'una e nell'altra è infatti un carattere puramente artificiale, mentre un carattere essenziale e comune a entrambe è la natura delle operazioni. Cfr. Ampère (1834), p. 19. Si veda la tabella 1.9, in cui aritmetica e algebra sono riunite sotto il nome di aritmografia.

[53] Cfr. Ampère (1834), pp. 34-41.

Regno	*Sottoregno*	*Tipo*	*Sottotipo*
Scienze cosmologiche	Cosmologiche propriamente dette	Matematiche	Matematiche propriamente dette
			Fisico-matematiche
		Fisiche	Fisiche propriamente dette
			Geologiche
	Fisiologiche	Naturali	Fitologiche
			Zoologiche propriamente dette
		Mediche	Fisico-mediche
			Mediche propriamente dette
Scienze noologiche	Noologiche propriamente dette	Filosofiche	Filosofiche propriamente dette
			Morali
		Nootecniche	Nootecniche propriamente dette
			Didagmatiche
	Sociali	Etnologiche	Etnologiche propriamente dette
			Storiche
		Politiche	Fisico-sociali
			Etnegetiche

Tabella 1.8: *Ampère*: classificazione generale delle conoscenze umane

SCIENZE MATEMATICHE PROPRIAMENTE DETTE							
Aritmologia *(grandezze in generale)*				***Geometria*** *(estensione)*			
Aritmologia elementare		*Megetologia*		*Geometria elementare*		*Teoria delle forme*	
Aritmografia (aritmetica e algebra)	Analisi matematica	Teoria delle funzioni	Teoria delle probabilità	Geometria sintetica	Geometria analitica	Teoria delle linee e delle superfici	Geometria molecolare: cristallografia
Autoptica	Criptoristica	Troponomica	Criptologia	Autoptica	Criptoristica	Troponomica	Criptologia

Tabella 1.9: *Ampère*: scienze matematiche propriamente dette

noti: la teoria della probabilità ricerca ad esempio le cause probabili degli eventi osservabili. Autoptica e troponomica hanno in comune l'osservazione e l'intuizione dell'oggetto, mentre criptoristica e criptologica, come esprime l'etimologia stessa dei termini, hanno in comune la ricerca di qualcosa di non noto nell'oggetto.[54]

Le successive scienze del terzo ordine che Ampère prende in considerazione sono quelle relative alla misura e alle proprietà non più delle grandezze in generale, ma di una grandezza particolare: l'estensione. La *Geometria sintetica* è la conoscenza delle proprietà più semplici ed evidenti delle figure, conoscenza ottenuta assumendo delle verità semplici come primitive e derivando da esse le verità più complesse: si tratta della geometria degli antichi. La *Geometria analitica* è lo studio di ciò che non è noto nella figura per mezzo dell'applicazione dell'analisi matematica: anziché adottare il consueto nome di applicazione dell'algebra alla geometria, Ampère la chiama piuttosto geometria analitica, per indicare meglio il suo fine e la natura del procedimento che impiega.[55] La *Teoria delle linee e delle superfici* è lo studio delle linee

[54] Cfr. Ampère (1834), pp. 41-44.

[55] Il termine geometria analitica pare che sia stato usato per la prima volta nell'opera *Geometria analytica sive specimina artis analyticae*, pubblicato da Samuel Horsley nel primo volume di *Isaaci Newtoni opera quae exstant omnia. Commentariis illustrabat Samuel Horsley* (1779). Nel *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* di S.F. Lacroix del 1797 si legge di un modo di considerare la geometria che potrebbe essere chiamato analitico e che consisterebbe nel dedurre le proprietà dell'estensione dal minor numero di principi e con metodi esclusivamente analitici. Il termine è entrato nell'uso proprio anche grazie ad Ampère; tuttavia non c'è consenso generale sulla sua adeguatezza, se si tiene conto della critica bourbakista al suo impiego per denotare la geometria delle coordinate cartesiane: «It is absolutely intolerable to use analytical geometry for linear algebra with coordinates, still called analytical geometry in the elementary books. Analytical geometry in this sense never existed. There are only people who do linear algebra badly, by taking coordinates and this they call analytical geometry. Out with them! Everyone knows that analytical geometry is the theory of analytical spaces, one of the deepest and most difficult theories

ottenute per variazione continua di un punto e delle superfici come variazioni continue di una linea: essa applica la teoria delle funzioni alle variazioni simultanee delle linee o degli angoli, determinando leggi comuni a tutte le curve. La *Geometria molecolare* infine è lo studio dei cristalli e in particolare la determinazione delle forme primitive dalle quali si sono prodotte le forme secondarie osservabili: la cristallografia è secondo Ampère una scienza puramente matematica, perché studia le combinazioni di figure in modo da produrre nuove figure.[56]

Geometria sintetica, Geometria analitica, Teoria delle linee e delle superfici, Geometria molecolare sono raggruppate in un'unica scienza del primo ordine: la *Geometria*, a sua volta distinta in due scienze del secondo ordine: *Geometria elementare* e *Teoria delle forme*. Il nome di quest'ultima scienza è particolarmente importante ai nostri fini, perché può aiutare a comprendere l'uso che Hermann Graßmann fa del termine forma in relazione allo studio delle proprietà astratte dell'estensione e delle proprietà geometriche dei cristalli: ritorneremo su questo punto nel capitolo 4. Intanto ricordiamo che, come si era già visto nel caso dell'aritmologia, così anche nel caso della geometria, le scienze del terzo ordine che sono state raggruppate sotto di essa possono essere considerate scienze aventi uno stesso oggetto (le proprietà delle grandezze estese) ma considerato sotto punti di vista diversi. La Geometria sintetica nasce dallo studio delle proprietà dell'estensione sotto un punto di vista autottico: essa è infatti fondata sulle proprietà che si possono vedere immediatamente nelle figure. Da un punto di vista criptoristico nasce la Geometria analitica, che ha lo scopo di determinare delle porzioni non note di estensione. La Teoria delle linee e delle superfici esprime invece un punto di vista troponomico, perché studia gli spostamenti continui del punto che descrive la linea e della linea che genera una superficie, ricavando leggi generali sulle quantità di tali linee e superfici. Un punto di vista criptologico incarna infine la Geometria molecolare, che studia le ragioni per le quali una stessa sostanza è soggetta a differenti forme cristalline e la dipendenza

of all mathematics.≫ Cfr. Dieudonné (1970), p. 140.

[56]Cfr. Ampère (1834), pp. 46-8. Per sostenere che la cristallografia ha una natura puramente geometrica e deve essere quindi inclusa nella geometria piuttosto che associata alla mineralogia, alla quale può al limite essere applicata, Ampère rimanda all'opera 'di quel grande fisico' che l'ha creata. Si tratta presumibilmente di René-Just Haüy, autore nel 1801 di un *Traité de mineralogie*, il cui primo volume era interamente dedicato alla cristallografia. Avendo introdotto una relazione matematica più rigorosa tra forme secondarie e forme primarie, Haüy era infatti considerato tra i fondatori della cristallografia positiva, ovvero dello studio delle forme dei cristalli da un punto di vista matematico rigoroso e puramente quantitativo. L'opera principale di Haüy sulla cristallografia fu pubblicata però oltre venti anni più tardi: *Traité de cristallographie*, Paris, 1822. Cfr. anche Abbri (1998), pp. 736 ss., Scholz (1996) e specialmente Scholz (1994), p. 220 ss.

reciproca di queste ultime.[57]

<table>
<tr><th colspan="8">SCIENZE FISICO-MATEMATICHE</th></tr>
<tr><td colspan="4">Meccanica (movimento)</td><td colspan="4">Uranologia (forze)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Meccanica elementare</td><td colspan="2">Meccanica trascendentale</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Cinematica</td><td>Statica</td><td>Dinamica</td><td>Meccanica molecolare</td><td>Uranografia (descrizione delle varie costellazioni)</td><td>Eliostatica (studio sistema planetario solare)</td><td>Astronomia</td><td>Meccanica celeste (studio cause dei moti celesti)</td></tr>
</table>

Tabella 1.10: *Ampère*: Fisico-Matematica

Non ci dilunghiamo qui sulle successive scienze del terzo ordine prese in considerazione da Ampère, cioè le scienze che studiano le proprietà del movimento in generale e le proprietà delle forze (dei movimenti effettivi), raggruppate rispettivamente nelle due scienze del primo ordine: Meccanica e Uranologia (tab. 1.10). Queste scienze fanno parte di un sottotipo della matematica, ovvero le *Scienze fisico-matematiche*, mentre le scienze di cui si è parlato finora sono raggruppate nel sottotipo *Scienze matematiche propriamente dette* (tab. 1.9).

La classificazione di Ampère rivela nel complesso una grande attenzione alla matematica e alla fisica, che sono strettamente associate, mentre è completamente estromessa dal novero delle scienze la religione o la teologia (che occupava un posto di rilievo nelle enciclopedie settecentesche). Un altro forte elemento di novità è la suddivisione interna alla matematica che è estremamente complessa e include nuove discipline, quali la teoria delle funzioni, la teoria della probabilità, la teoria delle linee e delle superfici, la cristallografia, raggruppate in due nuovi rami: la megetologia e la teoria delle forme. Per quanto riguarda la fisica, la classificazione di Ampère ha descritto una suddivisione in atto delle scienze, provocando però anche una istituzionalizzazione di tali divisioni, come testimonia la longevità della suddivisione della meccanica in cinematica, statica e dinamica.[58]

[57] Cfr. Ampère (1834), pp. 49-50.

[58] Tali discipline appartengono per Ampère alle scienze fisico-matematiche piuttosto che alle scienze fisiche; alla fisica appartiene invece la fisica matematica, comprendente stereonomia e atomologia.

La classificazione di Comte

Se la classificazione di Ampère, scienziato, ha lasciato profonde tracce nella suddivisione didattica delle scienze, la classificazione di August Comte ha costituito un termine di confronto ineludibile per tutte le discussioni filosofiche sulla natura della conoscenza scientifica. Nel suo *Cours de philosophie positive* del 1830[59] Comte usa il termine ‘filosofia’ nel senso ampio di sistema generale delle concezioni umane: filosofia positiva è invece quella maniera speciale di filosofare che consiste nel considerare le teorie come aventi per oggetto la coordinazione dei fatti osservati; la filosofia positiva è il terzo stadio della filosofia generale, che è inizialmente teologica e in seguito metafisica. Ciascun ramo della nostra conoscenza passa infatti attraverso tre stadi teorici differenti: teologico, metafisico e positivo o scientifico.[60]

La filosofia positiva, considerando i risultati delle nostre facoltà intellettuali, ci fornisce il solo vero mezzo razionale per mettere in evidenza le leggi logiche dello spirito umano. Essa permette inoltre una rifondazione generale del nostro sistema d’educazione e contribuisce ai progressi particolari delle diverse scienze positive, indicando possibili combinazioni tra scienze considerate separate. Infine la filosofia positiva può essere considerata come la sola base solida della riorganizzazione sociale.[61]

Comte individua la causa dell’inadeguatezza delle precedenti classificazioni delle conoscenze nella incompiuta transizione di tutte le scienze allo stadio positivo: soltanto quando tale transizione è compiuta e le scienze costituiscono un insieme omogeneo di conoscenze, è possibile fornirne una classificazione razionale. Sulla scorta degli esempi forniti dalle tassonomie delle piante e degli animali, occorre applicare il metodo positivo al problema stesso della classificazione, che deve essere condotta tramite osservazione degli oggetti delle scienze e non in base a considerazioni aprioristiche.[62]

CONOSCENZE		
Teoriche		Pratiche
Astratte e generali	Concrete e particolari	

Tabella 1.11: *Comte*: La suddivisione delle conoscenze

[59] Comte aveva iniziato il corso di filosofia positiva all’École Polytechnique già nel 1826 e lo aveva ripreso nel 1829. Si noti la contemporaneità con la classificazione di Ampère, che è stata iniziata nel 1829 durante un corso di fisica al Collège de France.

[60] Cfr. Comte (1830), I, p. xiv.

[61] È questo uno degli obiettivi principali di Comte, fondatore della sociologia. Cfr. Comte (1830), I, lezione 1.

[62] Cfr. Comte (1830) I, pp. 49-50.

Nel suo *Cours de philosophie positive* Comte considera soltanto le scienze teoriche, ignorando le applicazioni pratiche di esse, e all'interno delle scienze teoriche considera soltanto le scienze astratte e generali, che hanno il compito di scoprire le leggi delle diverse classi di fenomeni, ignorando le scienze concrete, particolari e descrittive, che si limitano ad applicare le leggi alla storia effettiva degli esseri esistenti (tab. 1.11).[63] Suddividendo i fenomeni in due gruppi, a seconda che si occupino di corpi bruti o di corpi organizzati, Comte divide la filosofia positiva in due rami: lo studio dei corpi inorganici, che comprende lo studio dei fenomeni celesti (astronomia) e dei fenomeni terrestri (fisica e chimica), e lo studio dei corpi organici, che comprende fisiologia e sociologia(tab. 1.12).[64]

SCIENZE TEORICHE ASTRATTE				
Corpi bruti (inorganici)			Corpi organizzati (organici)	
Celesti	Terrestri			
Astronomia	Fisica	Chimica	Filosofia	Sociologia

Tabella 1.12: *Comte*: La classificazione delle scienze teoriche astratte

Quale posto occupa la matematica in questa classificazione? Comte considera la matematica non una parte della filosofia naturale, ma piuttosto la base fondamentale di tale filosofia, poiché essa fornisce lo strumento per la ricerca delle leggi dei fenomeni naturali. La matematica si divide in astratta e concreta: la prima è il calcolo, la seconda è composta da geometria e meccanica razionale.[65] Secondo la definizione tradizionale la matematica è scienza delle grandezze o scienza della misura delle grandezze: benché grossolana, questa definizione contiene secondo Comte un'idea giusta. La matematica è la scienza che misura una grandezza o direttamente o per mezzo di altre grandezze che sono misurabili direttamente: «la matematica determina le grandezze le une per mezzo delle altre secondo le relazioni che sussistono fra di esse».[66] Lo studio matematico di un fenomeno equivale a considerare come tra loro collegate tutte le quantità che un qualunque fenomeno presenta allo scopo di dedurne le une dalle altre. Poiché tutti i fenomeni sono suscettibili di una trattazione di questo tipo, la matematica si estende a tutti i fenomeni ed ha «universalità logica rigorosa», come indica il nome stesso, che

[63] Cfr. Comte (1830), p. 62.

[64] Si osservi che Comte distingue la chimica dalla fisica, mentre per Ampère essa è ancora soltanto un ramo della fisica, e più precisamente della fisica generale elementare.

[65] Comte (1830), pp. 92-3.

[66] Cfr. Comte (1830), p. 106. Si veda anche la definizione di matematica data da Gauss nello scritto *Sulla metafisica della matematica* riportato in appendice.

significa conoscenza. Se il termine matematica era appropriato nell'antichità perché i greci non avevano nessuna altra scienza, i moderni avrebbero conservato il termine per indicare che la matematica è la scienza 'par excellence': giacché ogni scienza è una coordinazione di fatti, la matematica è la scienza per eccellenza in quanto coordina le quantità riscontrabili in qualunque fenomeno.

La matematica si divide in concreta e astratta: quest'ultima stabilisce dei metodi generali per dedurre le quantità le une dalle altre ogni qualvolta si conoscano le reciproche relazioni (equazioni) ed è la base razionale del sistema perché tratta delle idee più universali, astratte e semplici. Ogni problema può infatti essere ridotto alla determinazione di quantità e dunque ad una semplice questione numerica o di calcolo. Comte rifiuta la caratterizzazione della matematica come scienza delle quantità, poiché egli ritiene che la matematica si occupi anche di qualità; tuttavia egli assume che le qualità possano essere sempre (almeno in linea di principio) ridotte a quantità: la geometria analitica sarebbe un esempio di studio quantitativo di qualità.[67] Questo procedimento introdotto da Descartes per la geometria è stato successivamente esteso ai fenomeni meccanici e a quelli termologici: ciò induce Comte a ritenere che in linea di principio la matematica sia applicabile a tutti i fenomeni: è solo la complessità di alcuni di essi ad impedire che si trovino le equazioni delle leggi che li regolano.

Comte sembra teorizzare compiutamente l'idea, tipica della scienza moderna, che la matematica sia il linguaggio in cui è scritto il mondo. L'universalità logica rigorosa della matematica, spesso nominata, sembra però ridursi soltanto all'aspetto quantitativo e calcolistico della matematica: la matematica è misurazione di grandezze per mezzo di altre grandezze. Ben più complessa e interessante era d'altra parte la concezione leibniziana della speciosa generale, anch'essa studio di qualità e di quantità, ma senza riduzione delle prime alle seconde.[68]

Herbert Spencer

Già nel 1854 Spencer aveva mosso a Comte una critica, ritenendo che la sua classificazione non rappresenti né una dipendenza logica né una dipendenza storica delle scienze: queste ultime semplicemente non possono essere disposte in ordine seriale.[69] Dieci anni dopo, in un saggio dedicato alla classificazione delle scienze, Spencer fa propria l'esigenza di quei naturalisti

[67]Cfr. Comte (1830), p. 123.
[68]Torneremo ampiamente su questi temi nei prossimi capitoli.
[69]Cfr. *Genesis of Science*, 1854.

che ricercavano una classificazione 'naturale' in base al maggior numero di caratteri comuni degli oggetti.

> Una classificazione veritiera rinchiude in ciascuna classe gli oggetti che hanno tra loro più caratteri comuni di quanti ciascuno di tali oggetti non ne abbia con tutti gli oggetti esclusi da tale classe.[70]

Seguendo questo criterio, Spencer ritiene che la classificazione più naturale sia la seguente: da una parte le scienze che hanno per oggetto i rapporti astratti sotto i quali i fenomeni si presentano a noi, dall'altra le scienze che hanno per oggetto i fenomeni stessi. Da un lato, cioè, le scienze delle relazioni, dall'altro le scienze degli oggetti.

Alle scienze delle relazioni o scienze astratte appartengono la logica e la matematica, che studiano i rapporti di coesistenza e di successione in forma generale e particolare: lo spazio è un'idea astratta che abbraccia tutti i rapporti di coesistenza; il tempo è un'idea astratta che abbraccia tutti i rapporti di successione (si ricordi che spazio e tempo sono per Spencer forme del pensiero e non delle cose). Spazio e tempo, oggetti della logica e della matematica, sono forme vuote sotto le quali ci appaiono le cose, sono *a priori* in senso kantiano. Spencer tuttavia ammette forme *a priori* per l'individuo ma non per la specie umana: ciò che risulta condizione *a priori* per un individuo può essere frutto dell'esperienza accumulata dalla specie umana e poi trasmessa in eredità all'individuo.[71]

Tutte le altre scienze, che non si occupano dei rapporti di successione e di coesistenza ma si occupano delle cose stesse, appartengono ad un'unica classe, che può essere a sua volta ulteriormente suddivisa in base all'aspetto, al fine e al metodo di ciascuna scienza. Alcune studiano ciascun oggetto separatemente, astraendo dagli altri oggetti con i quali esso interagisce: tali scienze sono concrete in quanto studiano una realtà oggettiva, ma nello stesso tempo sono anche astratte perché «si rapportano a dei modi di esistenza considerati separatamente gli uni rispetto agli altri». Altre scienze invece studiano il fenomeno nel suo complesso: queste scienze sono a tutti gli effetti concrete, perché rappresentano i fatti nel loro stato di combinazione, ovvero nello stesso rapporto in cui essi esistono in natura.[72]

---

[70]Cfr. Spencer (1893), p. 2 (il riferimento è alla traduzione francese della terza edizione inglese dell'opera).

[71]Una concezione evoluzionistica dell'*a priori* con dei tratti simili si può riscontrare ad esempio nella concezione che Poincaré ha della tridimensionalità dello spazio rappresentativo: essa è anche un fatto di esperienza esterna, ossia non dipende solo dalla struttura dei nostri organi sensoriali ma anche dall'ambiente in cui siamo collocati e al quale gli organi si adattano nel loro sviluppo. Per questa interpretazione evoluzionistica di Poincaré si vedano Giedymin (1982), p. 11 e anche Magnani (1991b), p. 186.

[72]Cfr. Spencer (1893), pp. 5-6.

Da queste distinzioni preliminari deriva una tripartizione generale delle scienze:

1. le scienze *astratte*, che studiano le forme sotto cui ci appaiono i fenomeni: logica e matematica;

2. le scienze *astratte e concrete*, che studiano i fenomeni stessi considerati come elementi singoli: meccanica, fisica, chimica, ecc.;

3. le scienze *concrete*, che studiano i fenomeni stessi considerati nel loro insieme: astronomia, geologia, biologia, psicologia, sociologia, ecc.

Rispetto alla classificazione di Comte, Spencer ritiene non che ciascuna scienza abbia una parte astratta ed una parte concreta ma che le singole scienze siano o concrete o astratte o un misto fra queste due cose. Infatti le tre classi sono ordinate secondo un diverso grado non di generalità, ma di astrazione. Occorre a questo proposito tenere presente la differenza tra astratto e generale: una verità generale riassume un certo numero di verità particolari, come ad esempio la proposizione che i vertebrati hanno un doppio sistema nervoso; una verità astratta invece non riassume delle verità particolari, ma formula una verità che è implicata da un certo numero di fenomeni ma che tuttavia non è realizzata attualmente in nessuno di essi, come ad esempio la verità che ogni angolo iscritto in un cerchio è retto.[73] In altre parole, una verità generale è ottenuta per astrazione da casi particolari ed è tale da valere in ogni caso particolare, mentre una verità astratta propriamente non vale in nessun caso particolare.

Una conseguenza molto importante del fatto che le tre classi di scienze (astratte, astratto-concrete e concrete) non possono essere distinte in base al grado di generalità è che tutte le classi sono egualmente generali nel senso che tutte si occupano di classi di fatti differenti ma coestensivi. La più piccola particella di materia — spiega Spencer — fornisce a ciascun gruppo di scienze la propria materia: verità astratte che sono le relazioni di spazio e di tempo, verità astratto-concrete che sono i modi di azione particolare in cui la forza si manifesta in tale particella, verità concrete che sono le leggi dell'azione combinata di questi differenti modi di forza.[74] Ciascuna classe, poi, può essere ulteriormente suddivisa in base al grado di generalità delle verità, ma le tre classi sono distinte solo in base al grado di astrazione. Una differenza di generalità si ha piuttosto secondo Spencer tra le scienze e la filosofia: quest'ultima è definita come la conoscenza nel suo più alto grado di generalità.[75]

[73] Cfr. Spencer (1893), p. 10.
[74] Cfr. Spencer (1893), p. 11.
[75] Si veda Spencer, *First Principles*, § 37.

Le scienze astratte comprendono verità universali e verità non universali a seconda che esse ricerchino ciò che è comune a tutte le relazioni in generale o ciò che è comune a ciascun ordine di relazioni in particolare. Una legge universale di relazione è ad esempio la formula che esprime che ci sono delle uniformità nelle connessioni tra le cose. Le verità non universali invece riguardano rapporti qualitativi o quantitativi nel tempo e nello spazio. La *logica* studia le relazioni di coincidenza o prossimità nel tempo e nello spazio senza tener conto della natura o della quantità dei termini tra cui sussiste il rapporto: è lo studio delle leggi di relazioni che sono sempre necessarie. La *matematica* studia i rapporti tra termini di cui è specificata la quantità ma non la natura (la qualità): la matematica ha infatti lo scopo di stabilire le leggi della quantità considerata indipendentemente dalla realtà (tab. 1.13).[76]

<table>
<tr><th colspan="8">SCIENZE ASTRATTE</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Legge universale di relazione</td><td colspan="7">Relazioni particolari</td></tr>
<tr><td rowspan="5">non quantitative (LOGICA)</td><td colspan="6">quantitative (MATEMATICA)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">negativamente (Geometria di posizione)</td><td colspan="5">positivamente</td></tr>
<tr><td rowspan="3">unità separate (Calcolo indefinito)</td><td colspan="4">unità uguali</td></tr>
<tr><td colspan="2">estensive</td><td colspan="2">né estensive né intensive (Calcolo definito)</td></tr>
<tr><td>nello spazio (Geometria)</td><td>nel tempo (Cinematica, Geometria di movimento)</td><td>numeri (Aritmetica)</td><td>relazioni o relazioni di relazioni (Algebra, Calcolo delle operazioni)</td></tr>
</table>

Tabella 1.13: *Spencer*: le scienze astratte

La quantità può essere misurata negativamente, come nella geometria di posizione (ad esempio nella proposizione che tre linee date si incontrano in un punto è implicata la negazione di ogni quantità di spazio tra le intersezioni) oppure positivamente. In questo secondo caso le grandezze possono essere composte di unità separate ma non uguali, come nel calcolo indefinito (ad esempio il calcolo statistico) oppure essere composte di unità uguali.[77] Se le

[76]Cfr. Spencer (1893), pp. 15-6.

[77]Il calcolo indefinito determina numeri di esistenze astratte ma non di quantità astratte, perché tali numeri non rappresentano esattamente le cose prese nella loro totalità. ≪I cal-

unità sono considerate uguali, la quantità può essere misurata per mezzo di estensioni giustapposte, per mezzo di durate successive, ovvero per mezzo di una enumerazione diretta o indiretta delle unità componenti: se le unità sono considerate uguali in rapporto all'estensione si hanno la *geometria* (relazioni di coesistenza nello spazio) e la *cinematica* e la *geometria di movimento* (relazioni di durata nel tempo); se le unità sono considerate uguali ma l'uguaglianza non è né estensiva, né intensiva si ha il *calcolo definito*, che determina sia numeri sia quantità astratte. Quest'ultimo comprende l'*aritmetica* (quando i numeri sono specificati completamente), l'*algebra* (quando i numeri sono specificati solo per mezzo delle relazioni reciproche) e il *calcolo delle operazioni* (quando i numeri sono specificati solo per mezzo delle relazioni tra le relazioni reciproche).

Non ci soffermiamo ulteriormente sulle distinzioni interne alle scienze astratto-concrete e alle scienze concrete, perché ciò che ci interessa maggiormente sono il rapporto della matematica con le altre scienze (il che è già illustrato dalla sua appartenenza alla classe delle scienze astratte) e le divisioni interne alla matematica. La classificazione di Spencer è importante per varie ragioni: innanzitutto distingue esplicitamente lo studio degli oggetti dallo studio delle relazioni tra oggetti e considera logica e matematica scienze che trattano solo delle relazioni tra oggetti. In secondo luogo accorpa matematica e logica in un'unica classe, come Leibniz, Hume, Graßmann. Inoltre Spencer parla esplicitamente di forme sotto cui ci appaiono i fenomeni. Spencer parla anche di forme vuote o prive di contenuto (prendendo le mosse dalle idee di spazio e di tempo come rapporti di coesistenza e di successione). Se a questo proposito è difficile cogliere un rapporto con la concezione di Graßmann, per il quale la forma non è un *a priori* quanto piuttosto — come vedremo nel capitolo 4 — un prodotto del pensiero, è invece interessante confrontare i due autori a proposito della suddivisione della matematica in sottodiscipline. Tale suddivisione avviene infatti in base alle unità che compongono le grandezze di cui si studiano le relazioni. Spencer distingue unità separate dalla coscienza ma non uguali e unità uguali secondo l'estensione spaziale, la durata temporale, e uguali in altro modo. Vedremo nel paragrafo 4.3.3 che anche Graßmann tiene conto di relazioni di uguaglianza e differenza, oltre che di continuità e discretezza, per suddividere la matematica in sottodiscipline.

coli relativi alla popolazione, ai crimini, alle malattie giungono a risultati numericamente esatti ma che non sono esatti in rapporto alla totalità degli esseri o dei fatti rappresentati da quei numeri.» Cfr. Spencer (1893), p. 19. I numeri esprimono relazioni che sussistono tra le cose ma non enumerano le cose.

Wundt: scienze reali e scienze formali

Nella sua principale opera filosofica — il *System der Philosophie*, pubblicato nel 1899 — Wilhelm Wundt presenta un criterio di divisione e classificazione delle singole scienze, considerate come fondamento della filosofia: quest'ultima deve prendere le mosse dai principi non empirici assunti in via ipotetica dalle singole scienze per provare logicamente che le scienze costituiscono un tutto non contraddittorio. La filosofia non è però il fondamento delle scienze, bensì si basa essa stessa sul loro contenuto e sul loro metodo. La filosofia di Wundt è infatti una 'filosofia scientifica' che rivendica una funzione regolatrice nei confronti delle scienze: ovunque appaia una contraddizione sta alla filosofia comprenderla e possibilmente superarla.[78] Perché la filosofia scientifica possa proseguire e completare il lavoro delle singole scienze occorre che queste forniscano i problemi che la filosofia deve affrontare: per comprendere quali siano questi problemi, occorre innanzitutto definire e classificare le singole scienze.

Una classificazione e una definizione esaustiva delle singole scienze sono possibili, secondo Wundt (che riprende un motivo comtiano), solo dopo l'affrancamento delle scienze dalla filosofia, che è avvenuto già nell'antichità per la matematica, la meccanica e l'astronomia, poi per la fisica, la chimica, la storia, la politica, infine per la psicologia.[79] Una classificazione — prosegue Wundt — può indicare una carenza, ma in generale deve limitarsi a ordinare le scienze esistenti, non a crearne di nuove. A tal fine deve anche evitare di adottare criteri estrinseci alle scienze stesse, quali le facoltà conoscitive baconiane o i fini aristotelici o ancora i procedimenti e i metodi. Wundt critica il criterio aristotelico del fine della conoscenza, perché ritiene che le scienze applicate non siano altro che ramificazioni delle scienze teoretiche; d'altra parte respinge anche l'idea di Comte di distinguere scienze astratte e generali da scienze concrete e particolari, affermando che una scienza deve essere sempre sia descrittiva sia esplicativa. Criterio classificatorio devono essere gli oggetti di studio delle scienze, ma non in sé e per sé bensì come differenti concetti ai quali gli oggetti danno luogo se considerati secondo diversi punti di vista: uno stesso oggetto può così essere oggetto di più scienze ma ciascuna di esse lo considera secondo un diverso punto di vista.[80] Le singole scienze devono dunque essere distinte e classificate non in base ai loro oggetti, ma in base ai punti di vista logici (i concetti) sotto cui tali oggetti

[78] Wundt (1899), pp. 9-10.

[79] Cfr. Wundt (1899), p. 11.

[80] Si è visto che già Aristotele riteneva che matematica e fisica avessero entrambe lo stesso ambito di oggetti, ma un diverso modo di considerarli: *qua* matematici o *qua* fisici (si veda il paragrafo 2.1.1 a pagina 61.)

sono considerati. Ad esempio lo spazio è oggetto sia della geometria sia della teoria della conoscenza sia della psicologia, ma ciascuna scienza si occupa di un aspetto diverso del concetto di spazio.[81]

Secondo il punto di vista logico in base al quale l'oggetto delle scienze è considerato, Wundt introduce una prima classificazione tra scienze formali [formale Wissenschaften] e scienze reali [reale Wissenschaften]. Per proprietà formale si intende una proprietà che si riferisce solo all'ordinamento [Ordnung] e non al contenuto [Inhalt] di una molteplicità [Mannigfaltigkeit], o equivalentemente (secondo il suo significato originario) una proprietà che fa riferimento alla funzione intellettuale di afferrare un oggetto piuttosto che al suo contenuto sensibile. Poiché la funzione intellettuale con cui si afferma una cosa consiste in un'attività ordinatrice, i due modi di caratterizzare una proprietà formale sono ritenuti equivalenti.

Scienza formale è la matematica, mentre scienze reali sono le scienze naturali e le scienze dello spirito. La matematica è una scienza formale in quanto si riferisce solo all'ordine di una molteplicità e non al suo contenuto; per questa stessa ragione le sue costruzioni concettuali possono andare ben oltre gli ordinamenti di cose reali che ci sono dati nell'esperienza: compito della matematica è la ricerca di tutti gli ordini e i concetti d'ordine pensabili.[82]

<table>
<tr><th colspan="10">Scienze formali o Discipline matematiche</th></tr>
<tr><td colspan="4">Scienza generale delle forme</td><td colspan="6">Scienza speciale delle forme</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dottr. grandezze (quantità)</td><td colspan="2">Dottr. molteplicità (qualità: ordine)</td><td colspan="2">Dottr. movimento</td><td colspan="2">Dottr. spazio</td><td colspan="2">Dottr. numeri</td></tr>
<tr><td>Algebra</td><td>Teoria delle funzioni</td><td>Genesi molteplicità</td><td>Relazioni tra molteplicità</td><td>cinematica analitica</td><td>cinematica sintetica</td><td>geometria analitica</td><td>geometria sintetica</td><td>aritmetica</td><td>teoria dei numeri</td></tr>
</table>

Tabella 1.14: *Wundt*: la matematica

Le discipline matematiche si dividono in generali e speciali (tab. 1.14). Le prime si occupano delle proprietà formali che si trovano in tutti gli oggetti d'esperienza e in tutte le costruzioni concettuali che ne derivano. Tali proprietà generalissime sono due; una è quantitativa: la grandezza, l'altra è qualitativa: l'ordine di una molteplicità. Poiché la matematica in generale è studio di queste due proprietà, essa si divide in *Teoria delle grandezze* [Grössenlehre] e *Teoria delle molteplicità* [Mannigfaltigkeitstheorie]. La Teoria delle grandezze si suddivide a sua volta in *Algebra* e *Teoria delle funzioni*,

[81]Cfr. Wundt (1899), pp. 11-2.
[82]Cfr. Wundt (1899), pp. 13-4.

a seconda che si occupi delle operazioni da eseguire sulle grandezze o delle relazioni di dipendenza tra grandezze date. Analogamente è suddivisa in due parti la Teoria delle molteplicità: una parte studia la genesi della molteplicità dai suoi elementi; l'altra parte studia le relazioni reciproche tra molteplicità diverse.[83] Tre sono invece gli oggetti della matematica speciale: i concetti di numero, di spazio e di movimento; essi danno origine ad una tripartizione della matematica speciale in Teoria dei numeri, Teoria dello spazio e Teoria del movimento. La *Teoria dei numeri* sta in stretto rapporto con la Teoria delle grandezze, sia perché il numero è lo strumento per la misurazione delle grandezze, sia perché dal concetto di numero deriva il concetto generale di grandezza, e si divide anch'essa in due parti a seconda che si occupi delle operazioni sui numeri (*Aritmetica*) o delle relazioni tra numeri (*Teoria dei numeri*). La *Teoria dello spazio* e la *Teoria del movimento* sono in stretto rapporto con la teoria delle molteplicità e come questa si dividono in due parti: la *Geometria sintetica* che si occupa dell'origine delle figure spaziali a partire dagli elementi che le compongono e la *Geometria analitica* che si occupa delle proprietà delle figure spaziali composte; la *Cinematica sintetica* che si occupa dell'origine dei movimenti complessi dai movimenti semplici e la *Cinematica analitica* che si occupa dei movimenti con l'aiuto del concetto generale di grandezza.

Le scienze reali, a differenza di quelle formali, indagano le proprietà e le relazioni degli oggetti di esperienza sia in relazione alla forma sia in relazione al contenuto; si dividono in due gruppi: le scienze naturali e le scienze dello spirito. La differenza tra questi due gruppi non risiede in una differenza degli oggetti di cui si occupano, poiché mondo spirituale e mondo corporeo sono in realtà un unico e indivisibile mondo di cui facciamo esperienza.[84] Come in matematica si può fare astrazione dal contenuto empirico reale degli oggetti ma non si fa astrazione dalla ricerca empirica delle proprietà formali di essi, così le scienze della natura possono astrarre dall'aspetto spirituale delle cose; le scienze dello spirito invece non possono mai essere del tutto separate dall'aspetto naturale delle cose e pertanto è soltanto in esse che si realizza la piena realtà del mondo dell'esperienza. Non ci soffermiamo qui sulle ulteriori suddivisioni che Wundt introduce all'interno delle scienze naturali e spirituali, ma ci limitiamo a fare alcune considerazioni sul ruolo

[83]Spesso — precisa Wundt — queste ricerche sono condotte in forma geometrica, ma questo è solo un rivestimento utile all'intuibilità del concetto generale di molteplicità, le cui proprietà possono differire da quelle dello spazio reale. Con parole analoghe Graßmann giustifica gli esempi e le applicazioni geometriche introdotte nella *Teoria dell'estensione*. Si veda il paragrafo 4.3.3 a pag. 206.

[84]Wundt adotta la distinzione, introdotta da Ampère, tra scienze della natura e scienze dello spirito ma ribadisce l'unità indivisibile del loro oggetto.

della matematica all'interno della classificazione generale in scienze formali e reali e sui criteri di suddivisione interna.

La matematica è scienza delle forme delle cose, ovvero una scienza che prescinde dal contenuto empirico degli oggetti che studia. Propriamente questo significa che la matematica studia proprietà comuni a qualsivoglia oggetto, quali l'avere una quantità (una grandezza) e l'avere una qualità (un ordine).[85] Un aspetto molto interessante nell'esposizione delle suddivisioni interne alla matematica è il rapporto tra grandezza e numero: da un lato il numero è ciò che misura la grandezza, dall'altro porta alla costruzione del concetto generale di grandezza.[86] Analizzeremo le singole discipline matematiche individuate da Wundt quando ci occuperemo della suddivisione della matematica in Graßmann e confronteremo anche i rispettivi concetti di forma. Per ora ci limitiamo a segnalare un elemento di novità nella definizione che Wundt dà della matematica: essa è infatti esplicitamente studio della quantità e della qualità, mentre in Spencer vi era ancora una distinzione tra la logica — studio di qualità — e la matematica — studio di quantità. Inoltre per Wundt la matematica non è più definita primariamente come scienza delle grandezze, ma esplicitamente come studio di operazioni e di relazioni (tra grandezze, tra molteplicità e loro elementi, tra numeri, tra figure spaziali, tra movimenti). Il concetto fondamentale nella definizione della matematica è una proprietà qualitativa: l'ordine.

Il progetto neopositivista

Analizzando le classificazioni di Ampère e di Comte abbiamo osservato due diversi approcci alla classificazione delle scienze; benché entrambi gli autori abbiano preso ad esempio le tassonomie dei naturalisti, i risultati a cui essi sono giunti divergono radicalmente: Ampère separa scienze dello spirito e scienze della natura, Comte scienze astratte e scienze concrete.

Ampère, raggruppando le scienze che presentano un maggior numero di caratteri comuni e procedendo dal basso verso l'alto, ha costruito una classificazione che suddivide le conoscenze umane in due classi nettamente distinte

[85] A questo proposito è interessante osservare che Wundt non identifica semplicemente quantità e grandezza o qualità e ordine: la grandezza è *una* proprietà quantitativa; l'ordine è *una* proprietà qualitativa.

[86] Negli anni in cui Wundt scrive il *System der Philosophie* appaiono i primi lavori sulla teoria generale delle grandezze di du Bois-Reymond, Bettazzi, Veronese, Stolz. Alla luce di questi testi si potrebbe interpretare l'affermazione di Wundt nel modo seguente: il concetto generale di grandezza è primitivo rispetto al concetto di numero, che è introdotto a partire dal concetto di unità, astrazione del pensiero da un oggetto singolare. Tuttavia il concetto di numero interviene a sua volta nella definizione rigorosa della teoria delle grandezze, come vedremo nel paragrafo 3.3.2.

in base a due diversi ambiti di oggetti: da una parte il regno delle scienze cosmologiche, dall'altro il regno delle scienze noologiche. Questa distinzione ha avuto molta fortuna ed è stata ripresa, pur con variazioni della terminologia, soprattutto nell'Ottocento tedesco: du Bois-Reymond distingue le scienze naturali dalle scienze culturali; Dilthey distingue le scienze naturali, che hanno per obiettivo la conoscenza causale di un oggetto che rimane esterno al conoscente, dalle scienze dello spirito, che mirano alla comprensione di un oggetto (l'uomo); Windelband distingue le scienze nomotetiche, rivolte alla scoperta di leggi universali della natura, dalle scienze idiografiche, rivolte allo studio di eventi storici particolari; Rickert, infine, distingue tra scienze della natura aventi carattere generalizzante e avalutativo e scienze dello spirito aventi carattere individualizzante e valutativo.[87] Pur nella differenza terminologica, queste distinzioni separano le conoscenze in base alla diversa natura degli oggetti d'indagine oppure al diverso metodo applicato nella ricerca: scoperta di leggi generali del mondo esterno da un lato, indagine e comprensione di eventi particolari legati alla storia umana dall'altro. Risultato di queste riflessioni (sviluppate poi dallo storicismo e dalla filosofia dei valori) è una netta separazione se non addirittura una forte contrapposizione tra i due gruppi di conoscenze: della natura e dello spirito.

Anche Comte divide le scienze teoriche in due gruppi: le scienze astratte e generali e le scienze concrete e particolari; queste ultime sono un'applicazione agli esseri esistenti effettivamente delle leggi generali scoperte dalle prime. Dunque la storia non appartiene, secondo questo schema, alle scienze astratte; tuttavia nelle scienze astratte sono incluse filosofia e sociologia. Comte difende inoltre una concezione unitaria del sapere, poiché ritiene che ogni scienza sia lo studio delle relazioni generali tra i fenomeni: anzi, poiché tali relazioni possono essere espresse quantitativamente, la matematica, che è la scienza delle relazioni tra quantità, può essere applicata allo studio di tutti i fenomeni, costituendo in un certo senso la base e insieme l'elemento comune alle diverse discipline. Risultato di questa impostazione è una tensione alla costruzione di una gerarchia delle scienze, che ha la matematica alla base e la sociologia al gradino più alto. All'impostazione di Comte si sono richiamati, con l'obiettivo di contrastare la divisione delle conoscenze in scienze della natura e scienze dello spirito — soprattutto se tale divisione è fondata su una presunta separazione dei rispettivi ambiti d'indagine — i neopositivisti o empiristi logici del circolo di Vienna. Benché le riflessioni di Carnap e di Neurath sul tema dell'unità della scienza si siano sviluppate in

[87] Cfr. E. du Bois-Reymond, *Kulturgeschichte und Naturwissenschaften*, 1878; W. Dilthey, *Einleitung in die Wissenschaften*, 1883; W. Windelband, *Geschichte und Naturwissenschaften*, 1894; Rickert, *Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung*, 1896-1902.

un periodo successivo a quello di cui qui ci stiamo occupando, facciamo un breve riferimento a questi autori non solo per capire gli sviluppi delle classificazioni ottocentesche, ma anche per valutare una singolare combinazione tra vari elementi emersi nella nostra ricognizione tra Settecento e Ottocento: 1) ideale enciclopedico del sapere, 2) fiducia nella possibilità di determinare un linguaggio in grado di esprimere tutte le conoscenze umane, 3) fede nella radicale unità del sapere e 4) distinzione tra conoscenze logico-matematiche e conoscenze scientifiche.

Fin dalle prime discussioni all'interno del circolo di Vienna la questione dell'unità della scienza è centrale; così scrive Carnap nella propria autobiografia intellettuale:

> Nella nostra discussione, principalmente sotto l'influenza di Neurath, il principio dell'unità della scienza divenne uno dei punti più importanti della nostra concezione filosofica generale: esso dice che le differenti branche della scienza empirica sono separate solo per la ragione pratica della divisione del lavoro, ma sono fondamentalmente parti di una comprensiva scienza unificata.[88]

L'obiettivo polemico dei neopositivisti era proprio la suddivisione della conoscenza in *Naturwissenschaften* e *Geisteswissenschaften*, ovvero scienze della natura e scienze dello spirito, che, come abbiamo visto, ha preso le mosse da Ampère e si è poi radicata profondamente nell'ambiente tedesco.

In "Die physikalische Sprache als Universalssprache der Wissenschaft" Carnap critica inoltre quella che egli chiama la tradizionale suddivisione delle scienze in formali e reali: formali sarebbero la logica e la matematica, reali le scienze naturali, le scienze dello spirito e la psicologia. Innanzitutto la dichiarazione di Carnap testimonia che all'inizio del Novecento il posto della matematica non è più accanto alla fisica ma accanto alla logica: la suddivisione di cui abbiamo ricercato le origini nella distinzione tra verità di ragione e verità di fatto di Leibniz e Hume e che è stata sviluppata ulteriormente da Graßmann (cfr. 4.3.3), da Spencer e da Wundt, si è rivelata vincente. Tra le diverse ragioni di questo avvicinamento della matematica alla logica, di primaria importanza sono la matematizzazione della logica ad opera degli algebristi inglesi, secondo cui la logica diviene propriamente una parte della matematica, e il logicismo di Frege e di Russell, secondo i quali al contrario i concetti matematici possono essere definiti in base ai soli concetti logici e i teoremi matematici possono essere derivati da un numero determinato di principi logici. Se la matematica ha la stessa natura della conoscenza logica e le verità logiche sono intese in senso wittgensteiniano come tautologie, non

[88]Cfr. Schilpp (1963), I, p. 52.

stupisce che le sue verità siano considerate analitiche, necessariamente vere, valide in ogni caso possibile, prive di contenuto fattuale, incapaci di dire alcunché su come è fatto il mondo.[89]

Carnap critica la distinzione tra reale e formale se essa è intesa nel senso di una distinzione tra un ambito di oggetti reali, esistenti nel mondo fuori di noi, che costituirebbero la materia di studio delle scienze reali, e un ambito di oggetti ideali contrapposti agli oggetti reali che costituirebbe materia di studio per le scienze formali. Tuttavia, se intesa in un altro senso, la distinzione non è per Carnap del tutto vuota: benché tutte le proposizioni appartengano ad un'unica scienza (si noti l'enfasi sull'unità della scienza), vi sono però due attività scientifiche relative rispettivamente al contenuto [Inhalt] delle proposizioni e alla forma [Form] delle proposizioni (cioè alle relazioni logiche tra determinati concetti). La logica e la matematica non sono cioè delle scienze con un proprio dominio oggettuale (i cosiddetti oggetti formali o ideali contrapposti agli oggetti reali),[90] ma sono composte di tautologie, ovvero di proposizioni vere soltanto in base alla forma. La distinzione tra scienze reali e scienze formali si può cioè mantenere a condizione che non si pretenda di attribuire un contenuto oggettuale alle proposizioni delle cosiddette scienze formali: tali proposizioni sono tautologiche, ovvero non esprimono alcuno stato di cose. Benché siano tautologie, le proposizioni logiche e matematiche non sono perciò prive di significato scientifico: esse servono infatti alla trasformazione delle proposizioni (permettono ad esempio di esplicitare o di spiegare la conoscenza contenuta nelle premesse).[91] Sotto questo punto di vista la concezione degli empiristi logici è ancora più radicale di quella dello stesso Wittgenstein, che pur avendo introdotto la concezione delle verità logiche come tautologie che non dicono niente sul mondo, non considerava tautologie i teoremi della matematica.

In opposizione alle scienze formali, le scienze reali sarebbero invece quelle le cui proposizioni esprimono stati di cose: ma le proposizioni di queste scienze (per Carnap scienze naturali, scienze dello spirito e psicologia) e gli stati di cose che esse esprimono appartengono a categorie radicalmente diverse e

[89]Cfr. Carnap (1931), p. 432. Generalmente, però, chi considera analitiche le verità matematiche non include le verità geometriche, almeno non quelle che appartengono alla geometria fisica, cioè alla geometria che studia le proprietà dello spazio reale. Questa è in particolare la posizione dello stesso Carnap, il quale afferma di intendere il termine 'matematica' in modo da ≪includere la teoria dei numeri di vari tipi e le loro funzioni, e inoltre campi astratti come l'algebra astratta, la teoria astratta dei gruppi, e simili, ma in modo da escludere la geometria.≫ Cfr. Schilpp (1963), p. 50.

[90]Sarà interessante confrontare questa concezione con la definizione che Graßmann dà delle scienze reali, come conoscenze che hanno per oggetto le forme poste dal pensiero (cfr. 4.3.3).

[91]Cfr. Carnap (1931), p. 433.

separate? Ha senso dire che queste scienze hanno oggetti distinti? Carnap si oppone a questa concezione sostenendo invece che la scienza è un'unità: tutte le sue proposizioni sono espriminili in un'unica lingua, tutti gli stati di cose sono di un unico tipo, riconoscibili secondo un dato metodo. All'interno del circolo di Vienna Neurath difendeva l'unità della scienza per mezzo di una concezione monistica: ogni cosa che accade è parte della natura, cioè del mondo fisico. Carnap accoglie questa istanza precisando che l'unità della scienza è garantita da un unico linguaggio in grado di comprendere ogni conoscenza e costruibile su una base fisicalista.[92]

Adottando una strategia linguistica, secondo la quale quando si parla di stati di cose e di oggetti, occorrerebbe invece parlare di senso delle proposizioni e di riferimento dei termini, Carnap intende dimostrare che è unitario non l'oggetto delle diverse scienze, ma ciò che i termini e le proposizioni di cui si servono significano. I concetti di tutte le scienze sarebbero infatti *riducibili* a (in un primo tempo Carnap riteneva che fossero addirittura *definibili* in base a) i concetti di quello che egli chiama linguaggio cosale [Dingsprache]: è questo il senso della cosiddetta tesi fisicalista degli empiristi logici. La lingua della scienza può infatti essere pensata come suddivisa in strati: al primo livello vi è il linguaggio cosale, la lingua cioè degli oggetti fisici e dei processi osservativi; al secondo livello vi è il linguaggio della scienza fisica, che già contiene concetti ulteriori, come quelli di massa e di corrente elettrica; al terzo livello vi è la lingua della biologia, che contiene concetti non solo per i corpi inorganici ma anche per i corpi organici; quindi vi è la lingua della psicologia, che contiene concetti specifici come percepire, ricordare, pensare, ...; infine vi è la lingua della sociologia, che contiene ulteriori concetti come economia, stato, arte, ecc.[93] La tesi riduzionista dei neopositivisti, finalizzata a garantire l'unità della scienza, sostiene che ciascuno strato linguistico debba poter essere ridotto in maniera opportuna allo strato linguistico di base ovvero al linguaggio cosale o fisicalistico; se l'interpretazione fisicalistica è rifiutata, l'enunciato è privo di senso.[94] L'idea di una scienza unificata non riveste per i neopositivisti un'importanza soltanto teorica, ma si concretizza nel tentativo di creare un'*Enciclopedia Internazionale delle scienze*.[95] Nel suo intervento al *Congresso Internazionale di Filosofia scientifica* tenutosi a Parigi nel 1835 Neurath precisa che il progetto neopositivista concerne un'en-

[92]Cfr. Schilpp (1963), p. 52.

[93]Cfr. Carnap (1937), IV, p. 52.

[94]La tesi riduzionistica e la distinzione tra verità analitiche e verità sintetiche sono i «due dogmi dell'empirismo» al centro di numerose critiche nei decenni successivi: qui abbiamo fatto riferimento ad essi non per valutarne la forza filosofica ma per mostrare che essi sono finalizzati, almeno nelle intenzioni di Carnap, a garantire l'unità della scienza.

[95]Cfr. Neurath (1936), p. 58.

ciclopedia e non un sistema delle scienze: l'esigenza di un'enciclopedia nasce dalla volontà di mostrare concretamente l'unità della scienza, unificandone il linguaggio e presentandola come un insieme ramificato (evidenziando cioè da un lato l'aspetto unitario, dall'altro le differenze e i rapporti interni). Anziché come una semplice sintesi retrospettiva, l'Enciclopedia (prosecuzione dell'opera di Comte e di Spencer, che avevano fornito un quadro d'insieme delle scienze nettamente empirista) si propone di evidenziare eventuali lacune del sistema scientifico e nuove direzioni di sviluppo della scienza stessa.[96]

1.2 Per una definizione di matematica

1.2.1 Criteri classificatori

Attraverso un'analisi delle classificazioni delle scienze in una costellazione di autori attivi tra il Settecento e l'Ottocento abbiamo inteso porre le premesse per un fecondo confronto con la concezione che Graßmann ha della matematica. Si è delineato un panorama vario, nel quale la scienza occupa ruoli diversi, ha ambiti d'indagine, metodi e principi differenti. Prima di analizzare la definizione più frequente di matematica emersa in questa breve ricognizione e cioè la definizione come scienza della grandezze, costruiamo un breve prospetto sistematico dei criteri classificatori che abbiamo riscontrato, ponendoli anche in relazione con il ruolo che in base ad essi viene assegnato alla matematica nel sistema del sapere.

È possibile individuare schematicamente alcuni criteri in base ai quali sono state classificate le scienze negli autori cui si è fatto finora riferimento: tali criteri non sono esclusivi ma possono essere compresenti all'interno di una stessa classificazione, a volte con funzioni diverse.[97] Le scienze possono essere suddivise in base a 1) i fini della conoscenza, 2) le facoltà conoscitive, 3) gli oggetti o i punti di vista sugli oggetti o i caratteri degli oggetti, 4) i principi e le proposizioni.

I fini della conoscenza

Aristotele per primo ha suddiviso le conoscenze in base al criterio del fine: la sua classificazione ha avuto un'enorme influenza sulle tassonomie successive, non tanto forse per il criterio adottato (l'età moderna si apre infatti con la sostituzione della distinzione in base ai fini con una distinzione in base

[96]Cfr. Neurath (1936), p. 59.

[97]Non si tratta di un elenco esaustivo di tutti i possibili criteri classificatori, tuttavia ci pare un buon punto di partenza per una schematizzazione chiarificatrice dei diversi modi di classificare le conoscenze.

alle facoltà conoscitive umane), quanto per la separazione tra scienza e sue applicazioni.[98] Questa distinzione tra scienza e applicazioni è un tratto che ricorre nella maggior parte delle classificazioni ma non è fondata soltanto sul fine della conoscenza: talvolta è collegata alla divisione delle facoltà conoscitive. Per esempio in Chambers la scienza è conoscenza fondata sulla ragione mentre le arti sono conoscenze rivolte alle applicazioni, ma è anche vero che la scienza è generale e dottrinale perché è finalizzata solo alla conoscenza mentre l'arte è rivolta allo studio dei casi singoli.

Il criterio dei fini è un criterio classificatorio parziale: come già in Aristotele così anche nelle applicazioni successive (ad esempio nel positivismo di Comte per distinguere le scienze teoriche rivolte alla scoperta delle leggi generali dei fenomeni dalle scienze concrete rivolte all'applicazione di tali leggi alla storia effettiva degli esseri viventi) serve a creare una bipartizione o tripartizione generale delle conoscenze separando le scienze pure, fini a se stesse, teoriche (spesso considerate le scienze vere e proprie) dalle altre conoscenze. Il criterio dei fini, proprio perché parziale, è generalmente associato ad un altro criterio che permette una suddivisione più sottile: in Aristotele, ad esempio, è associato al genere dell'oggetto proprio di ogni singola scienza.

Il criterio dei fini deve la sua fortuna alla distinzione, che esso permette, tra scienze e arti, tra scienze teoriche e scienze applicate, tra scienze astratte e scienze concrete. Tuttavia non si tratta dell'unico criterio atto a istituire questa distinzione: Spencer ad esempio suddivide le scienze in astratte, astratto-concrete e concrete in base al criterio degli oggetti delle scienze (relazioni tra fenomeni o fenomeni particolari). Nell'*Encyclopédie* la distinzione tra scienze e arti avviene in base alle diverse facoltà conoscitive coinvolte: le arti e i mestieri sono parte della storia naturale, che è fondata sulla memoria, mentre le scienze sono fondate sulla ragione. In Platone, infine, arti e mestieri sono distinti dalle scienze per un diverso grado di conoscenza: sono opinione (δόξα) e non conoscenza discorsiva (διάνοια). Il criterio dei fini può d'altra parte indurre distinzioni di altro tipo, come quella tra scienze della natura e scienze dello spirito. Benché anche in questo caso il criterio dei fini sia perlopiù intrinsecamente legato al criterio degli oggetti, per molti autori è il fine della conoscenza a determinare la radicale separazione tra le due classi di scienze. Dilthey ad esempio chiama naturali le scienze cha hanno per fine la conoscenza causale di un oggetto e scienze dello spirito quelle che hanno per fine la comprensione di un oggetto. Rickert fonda la stessa distinzione tra scienze dello spirito e scienze della natura tenendo conto del fine valutativo

[98]Quest'idea era già presente del resto in Platone, almeno per quanto riguarda la matematica, perché quest'ultima era considerata una scienza più o meno elevata a seconda che essa fosse applicata al commercio o allo studio delle relazioni tra idee.

o avalutativo della conoscenza.[99]

Nelle classificazioni ottenute per applicazione del criterio dei fini, alla matematica non è di per sé attribuito un ruolo privilegiato rispetto alle altre scienze: la matematica è generalmente raggruppata nelle scienze teoriche o nelle scienze della natura: può accadere però che la matematica pura appartenga ad un gruppo e la matematica applicata all'altro. Non può dunque essere soltanto il fine a caratterizzare intrinsecamente ciò che è proprio della conoscenza matematica.

Le facoltà conoscitive

Bacone introduce all'inizio del Seicento la distinzione tra memoria, immaginazione e ragione che costituirà la base delle classificazioni enciclopediche successive. Questo criterio delle facoltà conoscitive umane, come già il criterio dei fini, è un criterio parziale, ovvero genera soltanto una generale partizione delle scienze in tre grandi gruppi e deve poi essere affiancato da altri criteri per poter determinare una classificazione delle singole discipline. Tuttavia rispetto al criterio dei fini, esso attribuisce alle scienze che individua delle caratteristiche molto determinate: il carattere delle facoltà si riverbera infatti sulle scienze che su di esse sono fondate. Fondare la storia sulla memoria significa caratterizzare quest'ultima essenzialmente come enumerazione di fatti, poiché la memoria è enumerazione di percezioni; fondare la poesia sull'immaginazione significa attribuire ad essa il compito di imitare e contraffare le percezioni, proprio come fa l'immaginazione; la filosofia, in quanto fondata sulla ragione, è caratterizzata come un'attività di esame e di confronto tra percezioni. Da un certo punto di vista la caratterizzazione delle diverse conoscenze mediante distinte facoltà comporta una generica indicazione di metodo: la storia descrive ed enumera, la poesia imita e crea, la filosofia esamina e confronta.

Il criterio delle facoltà conoscitive è ambiguo: sono le caratteristiche delle scienze, così come si sono sviluppate storicamente, a permettere di suddividere le conoscenze in tre gruppi facenti riferimento ciascuno ad una facoltà diversa o sono invece le facoltà a determinare le proprietà delle scienze? In altre parole, il criterio delle facoltà è intrinseco o estrinseco alle scienze stesse? E se si tratta di un criterio estrinseco, con quale diritto una classificazione può stabilire quali caratteristiche e quali metodi sono propri di ciascuna scienza? La classificazione baconiana è essenzialmente una classificazione filosofica,

[99]Si potrebbe sostenere che in questo caso il fine è anche un metodo: in effetti crediamo che le distinzioni tra i criteri classificatori che qui presentiamo siano soltanto schematizzazioni che irrigidiscono sfumature concettuali fluide. Quando affermiamo che un criterio è parziale, stiamo semplicemente sostenendo che occorre insieme ad uno o più altri criteri.

finalizzata a catalogare le conoscenze che ci dovrebbero essere piuttosto che a descrivere le conoscenze già acquisite e a descriverne le proprietà, come testimonia il fatto che Bacone definisca alcune conoscenze come 'mancanti': egli ritiene infatti che una classificazione debba anche servire a indicare quali scienze sono inadeguatamente o insufficientemente sviluppate. La classificazione baconiana impone alla scienza delle categorie filosofiche ad essa estrinseche; d'altra parte essa agisce solo ad un livello molto generale, cioè caratterizza soltanto la tripartizione più ampia delle scienze in storia, filosofia, poesia, mentre ricorre ad un criterio degli oggetti per le distinzioni ulteriori, come ad esempio nel caso della distinzione tra scienza della natura, scienza di Dio e scienza dell'uomo all'interno della filosofia. Sono proprio le suddivisioni ulteriori, condotte con l'ausilio di altri criteri e con l'osservazione e descrizione delle scienze effettivamente sviluppatesi a diminuire il carattere estrinseco nella classificazione degli enciclopedisti, che pure ricalca quella baconiana. Il criterio delle facoltà è dunque nel complesso un criterio aperto, proprio perché parziale; può imporre caratteristiche estrinseche alle scienze, ma permette anche di rilevarne alcune importanti differenze.

Il ruolo della matematica in queste classificazioni non è determinato a priori: esso può essere quello di scienza particolare raggruppata insieme alla fisica nella filosofia della natura (come avviene nell'*Encyclopédie*) oppure può essere quello di una scienza che, pur facendo parte della filosofia della natura, non è nella stessa classe della fisica ma è insieme speculativa come la fisica e la metafisica e pratica come la meccanica e la magia naturale (così avviene in Bacone). L'unica caratteristica attribuita specificamente alla matematica in quanto scienza fondata sulla ragione è la proprietà di esaminare e confrontare le cose.

Gli oggetti

Nella ricognizione di classificazioni scientifiche che abbiamo delineato non abbiamo incontrato casi di applicazione di un criterio classificatorio fondato esclusivamente su una categoria ontologica di oggetti, su un genere di enti al quale ciascuna scienza si applicherebbe: più scienze possono infatti avere lo stesso oggetto (ad esempio matematica e fisica in Aristotele si occupano entrambe delle sostanze mobili, ma ne studiano proprietà diverse). Se dunque si vuole attribuire un dominio distinto di oggetti a ciascuna scienza (e questa è una condizione necessaria per poterle caratterizzare le une rispetto alle altre in base agli oggetti), tale dominio deve essere inteso non come un ambito di cose, ma come un ambito di determinazioni (qualità, quantità, relazioni) di oggetti. Più che di criterio degli oggetti (che richiama questioni ontologico-metafisiche sulla natura degli oggetti delle scienze e sulla concezione epistemologica degli scienziati: nominalismo, realismo, concettualismo, strumentalismo, ecc.), sarebbe opportuno parlare allora di criterio delle proprietà degli oggetti, lasciando indeterminato se queste proprietà siano caratteri astratti dagli oggetti, siano oggetti esse stesse, siano concetti, siano puri nomi, siano relazioni ...

Aristotele, Leibniz, Ampère ribadiscono che l'oggetto di studio della matematica e delle altre scienze non sono i corpi in quanto oggetti esistenti, ma sono certe caratteristiche, affezioni, caratteri dei corpi. Tuttavia essi distinguono tra le varie scienze anche in base a delle categorie generalissime di oggetti: Aristotele distingue la metafisica, che si occupa delle sostanze in quanto tali, dalla fisica e dalla matematica, che studiano le sostanze dotate di movimento; Ampère separa le scienze cosmologiche propriamente dette, che studiano il mondo inorganico, dalle scienze cosmologiche fisiologiche, che studiano il mondo organico, e inoltre le scienze noologiche propriamente dette, che studiano gli strumenti umani di comunicazione, e le scienze noologiche sociali, che studiano le società umane; Comte distingue le scienze che si occupano dei corpi inorganici (astronomia, fisica, chimica) dalle scienze che si occupano dei corpi organici (fisiologia e sociologia). Con l'espressione 'criterio degli oggetti' occorre dunque comprendere ogni riferimento ad oggetti utilizzato a fini classificatori.

Il criterio degli oggetti, a differenza di quello delle facoltà e di quello dei fini, non è un criterio parziale, poiché permette di distinguere le singole scienze (matematica, fisica, biologia, ...) e di suddividerle in sottodiscipline. D'altra parte tale criterio appare anche intrinseco alle scienze, perché sembrerebbe sufficiente vedere di cosa parlano le proposizioni scientifiche per capire quali oggetti studiano le scienze in cui sono contenute. Sembrerebbe dunque possibile servirsi del criterio degli oggetti per distinguere tra loro le scienze caratterizzando anche ciascuna di esse, cioè sembrerebbe possibile ottenere una definizione di ciascuna scienza in base agli oggetti di cui si occupa. Nello stesso tempo il criterio degli oggetti appare il meno indicato per ottenere una classificazione del sapere che pretenda di avere una validità generale o assoluta. Ogni classificazione in base agli oggetti, poiché prende le mosse dall'analisi delle proposizioni delle singole scienze, non può che essere intrinsecamente dipendente dallo sviluppo di ciascuna disciplina. In altre parole, il criterio degli oggetti si presta molto meglio ad una catalogazione provvisoria e storicamente relativa delle conoscenze che non ad una definizione e caratterizzazione filosofica generale di esse. Questo è vero se il criterio degli oggetti è assunto in senso rigoroso come nel caso di Ampère e se è utilizzato per suddivisioni non soltanto molto generali, come quelle di cui si è detto sopra tra scienze noologiche e scienze naturali, ma anche pre suddivisioni più specifiche.

Anche il criterio degli oggetti dunque, pur potendo caratterizzare in maniera sufficientemente precisa le singole scienze, deve appoggiarsi ad altri criteri se vuole avere una portata un po' più generale (e non perdere validità non appena una scienza progredisce sviluppando un nuovo campo di ricerca). D'altra parte se si ritiene che una classificazione abbia lo scopo di descrivere e catalogare le scienze così come si sono sviluppate fino ad un certo momento storico, il criterio degli oggetti è probabilmente il metodo più adeguato. Non è detto però che una tale classificazione abbia alcun valore nella promozione dello sviluppo delle scienze stesse; è anzi più probabile che l'unico valore di una tale classificazione sia quello di fornire uno sguardo d'insieme al profano o allo storico della scienza o al filosofo (risultato comunque tutt'altro che disprezzabile). La consapevolezza della relatività e dell'insufficienza di ogni classificazione era del resto ben nota agli enciclopedisti, che si limitavano ad attribuire ad essa un'efficacia meramente pedagogica e a ritenere preferibile una classificazione con il maggior numero possibile di distinzioni interne.

A causa della relatività del criterio degli oggetti, adatto a descrivere una disciplina in un dato momento storico del suo sviluppo, e a causa delle interferenze con concezioni filosofiche generali che ne guidano l'applicazione, il criterio degli oggetti non permette di stabilire univocamente il ruolo della matematica all'interno del sistema del sapere. A testimonianza di questo fatto è sufficiente confrontare le classificazioni coeve di Ampère e di Comte, i cui risultati divergono: la matematica è una scienza come la fisica in un caso e una scienza su cui tutte le altre si basano nell'altro; in un caso la chimica è parte della fisica, nell'altro è una scienza distinta. Sia Comte sia Ampère dichiarano l'intenzione di imitare le tassonomie dei naturalisti; entrambi prendono le mosse dai caratteri delle scienze esistenti e dai loro oggetti per costruire le classificazioni. Vi è però una differenza essenziale nell'approccio di questi due autori, come abbiamo accennato nel paragrafo 1.1.2. Comte classifica le scienze in base agli oggetti, ma nello stesso tempo assume una concezione filosofica generale della conoscenza secondo la quale scienza è ricerca delle leggi generali dei fenomeni con strumenti quantitativi: la matematica, essendo studio quantitativo di relazioni tra le cose, è la scienza su cui tutte le altre si fondano. Questo fatto è però conseguenza di una concezione filosofica generale più che non del criterio degli oggetti. D'altra parte, a ben guardare, neppure Ampère applica esclusivamente il criterio degli oggetti, o almeno lo applica considerando che vi sia una corrispondenza tra gli oggetti di ciascuna sottodisciplina e i punti di vista secondo i quali li studiamo: così all'Aritmografia, che riunisce aritmetica e algebra perché i caratteri dei rispettivi oggetti (le operazioni) sono gli stessi, corrisponde il punto di vista autoptico, all'Analisi matematica corrisponde il punto di vista criptoristico, ecc.

Proposizioni e assiomi

La natura delle proposizioni Un altro criterio classificatorio concerne la natura delle proposizioni scientifiche, il loro grado di certezza e la loro universalità. Già Platone aveva distinto le arti e i mestieri dalle scienze in base al grado di conoscenza, ma quest'ultimo era soltanto un riflesso del grado d'essere degli oggetti conosciuti: opinione (congettura e credenza) erano le arti e i mestieri poiché avevano a che fare con cose sensibili e con le loro immagini; conoscenza discorsiva o scienza erano aritmetica, geometria, musica e astronomia; all'ultimo grado vi era la dialettica o scienza del filosofo.[100] Anche Aristotele aveva distinto le scienze, oltre che in base al criterio dei fini, anche in base alla possibilità o necessità del loro oggetto: le scienze teoretiche hanno per oggetto il necessario, mentre le scienze pratiche e quelle poietiche hanno per oggetto il possibile.[101]

Il primo ad adottare un criterio per classificare le scienze teoretiche fondato sulla natura necessaria o contingente delle proposizioni è stato Leibniz, il quale ha separato le conoscenze contenenti soltanto verità di ragione, come la matematica e la logica, dalle altre scienze contenenti invece osservazioni empiriche e notizie storiche, ovvero verità di fatto. Le prime contengono soltanto verità necessarie, le seconde soltanto verità contingenti.[102] Simile è la distinzione humeana tra relazioni di idee e questioni di fatto: le prime sono indipendenti dall'esperienza, mentre le seconde sono conoscenze fondate sull'esperienza sensibile. Nella formulazione kantiana *a priori* sono le proposizioni universali e necessarie, *a posteriori* le proposizioni contingenti e non universali. Le conoscenze matematiche e fisiche hanno per Kant uno statuto peculiare rispetto a tutte le altre forme di conoscenza proprio in virtù della natura delle proposizioni che le compongono: le proposizioni matematiche e fisiche sono giudizi sintetici a priori, ovvero proposizioni universali, necessarie ed estensive della conoscenza. Alla natura delle proposizioni scientifiche ricorrono anche i neopositivisti nella distinzione della matematica e della logica dalle altre discipline scientifiche; mentre le proposizioni matematiche e logiche sono tautologie, ovvero proposizioni vere in ogni mondo possibile e per ogni interpretazione possibile, le proposizioni delle altre scienze hanno un contenuto determinato: sono infatti proposizioni su stati di cose.

L'adozione di un criterio classificatorio fondato sulla natura delle proposizioni è legato alla concezione 'proposizionale' della conoscenza. Scienza è un insieme di conoscenze espresse nella forma di giudizi o di proposizioni vere.

[100] Cfr. *Repubblica*, VI, 509d-511e in Platone (1991), pp. 1235-7.

[101] Cfr. *Etica Nicomachea*, VI, 3-4.

[102] In verità Leibniz distingue anche un terzo gruppo di scienze che contengono verità miste. Si veda il paragrafo 1.1.1.

Questo elemento è piuttosto importante, perché fonda una nuova separazione netta tra la matematica da un lato (spesso collegata alla logica) e tutte le altre scienze dall'altro. La matematica, scissa dalle sue applicazioni fisiche che divengono progressivamente parte della fisica stessa, non è più imparentata alle scienze che studiano il mondo inorganico, ma è una conoscenza necessaria al pari della logica. Questo criterio classificatorio è in grado di distinguere la matematica rispetto a tutte le altre scienze ma in alcune interpretazioni ne diminuisce la portata conoscitiva: così i neopositivisti pongono sullo stesso piano matematica e logica ritenendole entrambe incapaci di dire qualcosa sul mondo. La diminuzione della portata conoscitiva non è però una conseguenza del criterio, che è invece compatibile con la concezione leibniziana, che affida una funzione conoscitiva fondamentale alla matematica.

Il criterio assiomatico La classificazione delle scienze in base alle proposizioni che occorrono in esse non riguarda soltanto la natura delle proposizioni (la loro certezza o universalità) ma può riguardare anche il contenuto di un gruppo di proposizioni scientifiche. Così ad esempio l'idea più precisa di cosa fosse la geometria classica e anche la migliore caratterizzazione rispetto all'aritmetica è data dall'assiomatizzazione euclidea, ovvero da un insieme di nozioni comuni, di definizioni e di postulati. La concezione assiomatica moderna consente una classificazione precisa delle teorie in base agli assiomi che assumono: ha senso però sostenere che ciascuna teoria è una scienza distinta o non è piuttosto necessario individuare un gruppo di assiomi minimali in modo che qualunque teoria che soddisfi almeno quel gruppo di assiomi sia la scienza caratterizzata da essi? Una questione di questo genere è stata dibattuta a fine Ottocento a proposito della geometria: possiamo chiamare geometria una qualunque teoria matematica dello spazio astratto o soltanto quelle teorie formali che ammettono un certo gruppo minimale di assiomi sulla natura dello spazio?[103]Anche se le teorie scientifiche sono determinate in modo preciso per mezzo delle proposizioni (in particolare degli assiomi) che le compongono, non abbiamo nemmeno in questo caso un criterio univoco per determinare cosa caratterizza una certa scienza e cosa no.

Il criterio assiomatico, come quello degli oggetti, è intrinsecamente relativo, perché modella la classificazione delle scienze sulle teorie che sono state costruite e il continuo sviluppo di nuove teorie esige continui aggiustamenti della classificazione. Sembrerebbe dunque che la classificazione costruita in

[103]Cfr. in proposito la questione sollevata da G. Veronese su alcune teorie geometriche sviluppate da Hilbert e da Poincaré e la discussione di Russell su un gruppo minimale di assiomi in grado di esprimere una qualche forma di esternalismo. Cfr. Veronese (1891), spec. p. xiii e p. 599, Russell (1897) e Hilbert (1899).

base al sistema assiomatico possa soltanto riassumere la situazione attuale delle scienze senza essere di alcuna utilità per le scienze stesse, come si è visto anche per il criterio degli oggetti. Invece il criterio assiomatico, obbligando a ricercare ragioni per includere o escludere una certa teoria da una determinata scienza, può suggerire relazioni tra campi diversi, mostrare strade inesplorate: i *Fondamenti della geometria* di Hilbert sono in fondo l'esito di un tentativo di definire la specificità della geometria euclidea dello spazio. D'altra parte il criterio assiomatico e il criterio degli oggetti possono anche essere visti come due facce della stessa medaglia: se consideriamo i modelli anziché gli oggetti, potremmo dire che le scienze classificate in base al criterio assiomatico sono gruppi di teorie che hanno dei modelli con dei tratti comuni.

Il criterio assiomatico si fonda sulla concezione della scienza come conoscenza dimostrativa assiomatizzabile: non avrebbe senso catalogare le scienze in base agli assiomi se non si ritenesse possibile fornire una presentazione assiomatica di ogni scienza. Dunque il vero limite ad una classificazione dell'insieme delle conoscenze umane in base al criterio assiomatico risiede nel fatto che non tutte le conoscenze scientifiche sono allo stato attuale assiomatizzabili. E soprattutto il criterio assiomatico presuppone che ogni scienza debba essere dimostrativa, mentre molte scienze adottano procedimenti induttivi, descrittivi, sperimentali non esprimibili in forma deduttiva.

Il criterio assiomatico è dunque un criterio limitato, non perché abbia bisogno di essere affiancato da un altro criterio per distinguere le scienze ma perché è in grado di distinguerne solo alcune e perché sembra imporre una separazione netta tra le scienze matematizzabili e tutte le altre scienze. Se la prima asserzione è sostanzialmente vera, perché non tutti gli scienziati accetterebbero di considerare scienza solo ciò che può essere esposto deduttivamente, la seconda non lo è del tutto. Da un lato si possono costruire teorie che formalizzano porzioni di scienze non deduttive, dall'altro la matematica stessa è riavvicinata alle altre scienze e separata dalla logica: fallito il programma logicista di fondazione della matematica non sembra possibile considerare logici tutti gli assiomi necessari ad esprimere l'aritmetica o l'analisi e dunque al pari delle altre scienze la matematica risulta composta di assiomi logici e di assiomi specifici.

1.2.2 Definizioni provvisorie e 'locali'

Molto (troppo) spesso si discute sulla natura degli oggetti matematici, sul presunto platonismo, realismo, idealismo, costruttivismo dei matematici senza fare contemporaneamente riferimento al significato di questi termini non per la filosofia di vita del matematico in questione ma per lo sviluppo delle teorie matematiche di cui egli si occupa.

L'attenzione maniacale al tipo di esistenza degli oggetti matematici che secondo noi caratterizza molte discussioni di filosofia della matematica è legata anche alla preponderanza della dimensione linguistica e all'attenzione privilegiata alla natura delle proposizioni linguistiche (possibilità, necessità, verità in tutti i mondi possibili, conoscenza a priori o a posteriori, ecc.) Contrariamente a quanto si potrebbe pensare non è il criterio degli oggetti cui si è fatto sopra riferimento a suscitare le questioni di ontologia della matematica in cui siamo involti quanto l'attenzione al tipo di verità e validità delle proposizioni.

Il criterio degli oggetti, pur con tutta la sua limitatezza e la sua indeterminatezza (abbiamo visto sopra infatti, che esso non fornisce nessuna indicazione sul tipo di oggetti: potrebbe trattarsi di enti, di concetti, di note, ...) ha secondo noi un pregio fondamentale rispetto al criterio della natura delle proposizioni (che si ricordi abbiamo tenuto distinto dal criterio assiomatico) sia in una prospettiva storica sia in una prospettiva filosofica. Esso infatti permette di mettere a fuoco un dato momento storico colto nella sua provvisorietà e permette di enucleare le proprietà di primo livello degli oggetti matematici, cioè di far emergere i tratti per mezzo dei quali li individuiamo, studiamo, categorizziamo.

Il criterio assiomatico può essere anche usato come una sorta di *pendant* al criterio degli oggetti: infatti se si considerano i modelli delle teorie proposte in forma assiomatica è di nuovo possibile considerare quali tratti di eventuali oggetti sono stati scelti come rilevanti nella concettualizzazione della teoria. Il criterio degli oggetti e il criterio assiomatico, proprio perché sono due criteri intrinseci sono anche provvisori e limitati: esattamente per questa ragione crediamo che siano anche i più adatti alla nostra ricerca, che mira a cogliere un momento storico puntuale ma che nello stesso tempo indaga le note concettuali associate al termine grandezza in diverse teorie e in diverse epoche storiche.

Spesso nel significato di un concetto entrano in gioco stratificazioni più o meno consapevoli, mutamenti di significato determinati dallo sviluppo di nuove teorie, dal cambiamento della temperie culturale, dal sorgere di nuovi problemi applicativi che richiedono soluzione matematica. Così crediamo che per comprendere la natura degli oggetti matematici sia prima di tutto necessario comprendere quali sono gli oggetti matematici, cioè quali sono i tratti, i caratteri studiati dalle teorie matematiche.

Per fare questo non è sufficiente elencare tutte le teorie matematiche e trovare un oggetto per ciascuna, così come — e crediamo di averlo mostrato — non è sufficiente assumere una definizione generalmente ammessa per trarre da essa tutte le informazioni necessarie sui presunti oggetti della matematica. Ben più essenziale è ricercare storicamente e filosoficamente l'origine dei concetti di cui la matematica, come ogni altra attività umana, si serve, per comprenderne la natura all'interno del loro sviluppo storico e teorico. Ben più difficile, infatti, è comprendere la natura di un concetto, la sua relazione con gli altri concetti, l'uso che ne viene fatto in ciascuna teoria e in ciascuna epoca storica, ciò che il concetto implica e ciò che esclude, i suoi presupposti e le sue conseguenze.

In questa storia è facile cogliere somiglianze troppo vistose, che a ben vedere nascondono differenze più sottili; d'altra parte questo è il rischio insito in ogni storia filosofica, che accanto al resoconto dei fatti particolari cerchi di suggerire uno sguardo d'insieme: consapevoli della unilateralità e della provvisorietà di un tale sguardo, speriamo almeno che esso suggerisca nuove vie per comprendere che cosa è in gioco in certe teorie matematiche e soprattutto suggerisca quanto la riflessione sul modo di concettualizzare la realtà, riflessione che oggi si ritiene carattere specifico della filosofia, non possa in alcun modo prescindere dal modo in cui la matematica concettualizza la realtà: a tale scopo, come per comprendere come un soggetto concettualizzi l'ambiente in cui vive è importante conoscere l'uomo e l'autopercezione che egli ha di sè, così per comprendere in che modo la matematica concettualizza la realtà è importante conoscere la matematica e il modo in cui essa genera e riflette sui propri concetti.

La natura delle cose, le proprietà che attribuiamo al concetto di esse sono immerse in una rete di condizionamenti, di ragioni matematiche e storiche. Molto spesso si assumono come date (assiomaticamente appunto) le proprietà degli enti e poi ci si interroga sul tipo di esistenza che possono avere tali proprietà ma in questo modo il problema è capovolto. Al contrario perché certe proprietà siano attribuite a certi concetti dipende dal tipo di problemi che si vogliono risolvere e dal tipo di approccio che si assume. In altre parole è perché si ha un certo atteggiamento nei confronti di una classe di problemi o di enti che si enucleano certe proprietà di esse e si costruisce una teoria su tale base. Non è dunque in maniera puramente astratta, a partire dalla forma assiomatica della teoria che bisogna porsi il problema dell'esistenza degli enti di cui parla. Ma a partire dagli enti di cui intendeva parlare, affrontare il problema per ciascun caso specifico di enti.

Mostreremo in seguito che l'approccio di Graßmann è molto interessante a questo proposito: l'intergioco tra reale e formale che avviene nella sua teoria delle grandezze estensive mostra che l'interpretazione reale di una teoria non deve essere necessariamente un'applicazione della stessa (ad esempio la geometria) ma nello stesso tempo fa vedere che solo un'interpretazione reale dà un qualche contenuto ad una determinazione puramente formale delle possibili proprietà di una relazione.

Quando si riduce la filosofia della matematica ad una discussione sul tipo di essere che caratterizza gli enti matematici e si considerano le opposte tendenze idealistiche, empiristiche, costruttiviste o concettualiste, ecc. si dimentica che una scienza può essere definita e classificata per mezzo di criteri diversi e spesso solo per mezzo di una combinazione di criteri diversi, come crediamo di avere mostrato sopra con alcuni esempi storici. Lo studio del concetto di matematica come attività conoscitiva è spesso affrontato rivolgendo l'attenzione ad una soltanto delle sue componenti: ad esempio la sociologia della scienza tende a considerare soltanto i fini dell'impresa conoscitiva e a definire matematica ciò che viene svolto da una certa categorie di persone mosse da certi obiettivi comuni, mentre il kantismo o l'intuizionismo nella versione brouweriana circoscrivono l'ambito della matematica soprattutto per mezzo del ruolo che in essa svolge una facoltà conoscitiva: l'intuizione. Così il formalismo in certe sue forme privilegia la presentazione o il metodo della conoscenza come garanzia di matematicità e cioè la forma assiomatica, mentre le filosofie realiste, empiriste, costruttiviste accentuano il problema della natura degli oggetti o delle proposizioni che ne parlano.

Solo una considerazione complessiva di questi aspetti (ed altri che qui non sono stati nominati) può presentarsi come una filosofia della matematica avvertita, che tenga conto cioè dei molteplici elementi che la compongono. L'irrigidimento della discussione filosofica in una sola delle direzioni citate ha come conseguenza l'allontanamento dall'oggetto di cui si discute, che è comunque inevitabilmente in continuo cambiamento e proprio per questo non richiede, secondo noi, una risposta generale e definitiva, ma risposte locali e provvisorie. Proprio la generalità delle definizioni presentate in questo capitolo e l'impressione che esse rimangano in ultima analisi vuote senza un'adeguata comprensione dei concetti che in esse compaiono, ci spinge a credere che ogni filosofia della matematica dovrebbe abbandonare il progetto di stabilire la natura degli enti matematici in generale, ma riservarsi il compito più ristretto ma non per questo meno affascinante di indagare la natura di porzioni di teorie matematiche, storicamente situate e concettualmente determinate.

Vista l'impossibilità di dare una definizione di matematica che valga una volta per tutta e vista l'impossibilità di attribuire un significato generale a qualunque definizione, cercheremo in questa ricerca di presentare due diversi modi di definire la matematica: l'uno, tradizionale, resta invariato nei termini ma, come speriamo di mostrare nella prima parte della ricerca, non nella sostanza, poiché viene dilatato e contratto in vari autori e in vari momenti storici; l'altro, radicalmente nuovo e sostenuto in aperta contrapposizione al primo, è presentato nella seconda parte della tesi attraverso l'opera di un singolo autore, che abbiamo scelto proprio perché fonda ‘filosoficamente’ la novità del suo approccio matematico.

Parte I

La matematica come *Scienza delle grandezze*

Tra Settecento e Ottocento, come mostreremo analizzando alcuni scritti di Leibniz, Euler, d'Alembert, Bolzano, Gauss, è frequente la definizione di matematica come scienza delle grandezze o quantità, ove i due termini sono perlopiù considerati sinonimi, poiché per grandezze si intendono le grandezze in generale e non soltanto le grandezze continue. Tale definizione è spesso presentata come 'tradizionale' ma nell'opera matematica più rappresentativa della tradizione greca — gli *Elementi* di Euclide — non si dà alcuna esplicita definizione di matematica. Scopo del presente capitolo è l'indagine dell'origine di tale definizione o perlomeno del momento della sua diffusione per comprendere che cosa si debba intendere per definizione 'tradizionale' e per mostrare gli slittamenti di significato cui il termine grandezza è sottoposto nella tradizione stessa cui ci si richiama. Il termine 'grandezza' assume infatti un significato diverso in Euclide rispetto ad Aristotele e viene recepito in altro modo ancora nel Cinquecento in seguito alla traduzione latina degli *Elementi* di Euclide e del *Commentario al I libro degli Elementi* di Proclo e nel Seicento in concomitanza con lo sviluppo del concetto algebrico di quantità numerica.

Perché allora nel tempo la definizione di matematica, che secondo Aristotele, se si vuole trovare nella sua opera una definizione comune di aritmetica e geometria — definizione che a parer nostro non c'è, anche se non manca una concezione unitaria di esse — sarebbe stata 'scienza delle quantità', diventa in seguito 'scienza delle grandezze'? Cambia il concetto di matematica o cambia il significato del termine grandezza che viene progressivamente a coincidere con il significato del termine quantità? E che cosa si deve intendere con tale definizione? E, infine, si può davvero parlare di un'unica definizione tradizionale di matematica o tale etichetta non racchiude piuttosto tante definizioni quanti sono i significati che i diversi autori attribuiscono al termine grandezza?

Tra le tante tappe delle variazioni di significato dei termini quantità e grandezza che hanno condotto alla sostanziale identificazione tra i due concetti, ci soffermeremo in questa prima parte sull'analisi di alcuni momenti:

– l'origine della ricerca di un genere comune per gli oggetti di cui si tratta nell'aritmetica e nella geometria;
– la concezione aristotelica dei concetti di grandezza, qualità e quantità;
– la teoria euclidea delle proporzioni e l'uso del termine 'grandezza' in questo contesto;
– la ricezione cinquecentesca degli *Elementi* di Euclide e del *Commento al I libro* di Proclo Diadoco;
– gli sviluppi dell'algebra e la formulazione del concetto di quantità numerica tra fine Cinquecento e inizio Settecento;
– l'introduzione ad opera di Ch. Wolff di un'unico termine tedesco (*Größe*

= *grandezza*) in corrispondenza dei vocaboli latini *quantitas* e *magnitudo*, corrispondenti ai greci τὸ ποσόν e μέγεθος;
– le definizioni di matematica proposte da Leibniz, d'Alembert, Euler e Gauss;
– la distinzione tra grandezze intensive ed estensive;
– la riformulazione della teoria delle grandezze estensive all'interno della teoria della misurazione.

Capitolo 2

Il concetto di grandezza

2.1 Grandezza e quantità

2.1.1 Aristotele e la matematica come scienza

Se già in Platone la scienza è una connessione fra opinioni legate da un ragionamento causale,[1] Aristotele rafforza la natura dimostrativa della scienza: essa 1) è conoscenza pura (perseguita per se stessa in modo indipendente dalle applicazioni), 2) è conoscenza dell'universale piuttosto che del particolare, 3) è conoscenza della causa.[2]

Le scienze sono classificate in tre gruppi: le scienze *teoretiche* ovvero le scienze che ricercano il sapere per sé medesimo, le scienze *pratiche* cioè le scienze che ricercano il sapere come mezzo per raggiungere la perfezione morale (etica, politica) e le scienze *poietiche* ovvero le scienze che ricercano il sapere in vista del fare, del produrre determinati oggetti (poetica, retorica).[3] Alle scienze che hanno per fine la conoscenza stessa, ovvero alle scienze pure, appartengono la fisica, la matematica e la metafisica, che sono distinte in base al 'genere di essere' di cui si occupano: la fisica si occupa degli enti in quanto partecipi del movimento (moto e quiete), la metafisica si occupa degli enti in quanto enti, la matematica si occupa degli enti in quanto separati dal movimento: le entità matematiche non sono né puramente sensibili né puramente intellegibili, ma sussistono potenzialmente nelle cose sensibili dalle quali sono separate per astrazione.[4] Si noti che Aristotele non distingue la fisica dalla matematica in base ad un diverso tipo di oggetto delle due scienze,

[1] Cfr. *Menone*, 98a, in Platone (1991), p. 964.

[2] *Metafisica*, I.1.980a21-981a30 in Aristotele (2002), pp. 3-5.

[3] *Metafisica*, VI.1.1025b-1026a in Aristotele (2002) pp. 173-5.

[4] Cfr. anche *Fisica*, B.2.193b22 e ss. in Aristotele (1995).

bensì in base ad una diversa considerazione dello stesso oggetto, i corpi: in un caso sono considerati *qua* fisici, nell'altro *qua* matematici.

Negli *Analitici Secondi* Aristotele chiama sapere il sillogismo scientifico, ovvero quel sillogismo che ha ≪premesse vere, prime, immediate, più note della conclusione, anteriori ad essa, e che siano causa di essa≫[5]: la scienza è cioè conoscenza dimostrativa. In quanto tale ogni scienza parte dagli assiomi (le premesse) per giungere ad una conclusione che esprime l'appartenenza di una determinazione ad un certo genere: poiché la dimostrazione è sillogistica e deve essere costituita da predicazioni essenziali, essa si svolge all'interno di uno stesso genere.[6] Ciascuna scienza ha principi propri (che possono essere comuni a più generi, come gli assiomi, o propri ad un singolo genere, come le ipotesi), perché anche se i principi possono essere comuni per analogia a più generi, essi assumono un significato diverso in rapporto a ciascuno.[7] Ciò che ci interessa nella concezione aristotelica non è tanto la partizione del sapere in base al genere, quanto la struttura attribuita all'insieme delle scienze in virtù del fatto che i principi di ciascuna possono vertere su un solo genere: ciascuna scienza è particolare perché non può vertere su una molteplicità di generi ed è autonoma perché i suoi principi non possono essere dimostrati a partire dai principi di un'altra scienza.[8] Così ad esempio le scienze matematiche sono in realtà due conoscenze distinte: aritmetica e geometria;[9] le

[5] *Analitici Secondi*, I.2.71b ss. in Aristotele (1984), pp. 261-2.

[6] *Analitici Secondi*, I.7.75a ss. in Aristotele (1984), pp. 278-9.

[7] ≪Tali assiomi [ad es. il principio di non contraddizione], poi, non sempre vengono assunti in forma universale; ad essi si dà piuttosto l'estensione ritenuta sufficiente, e invero basta riferirli al genere. Quando parlo di riferimento al genere, intendo dire il genere nell'ambito del quale si indirizzano le dimostrazioni, come del resto ho già fatto osservare in precedenza. Tutte le scienze comunicano poi tra di esse in virtù delle proposizioni comuni (comuni d'altronde chiamo le proposizioni di cui ci si serve, in quanto da esse si fa discendere la dimostrazione, mentre comuni non sono già gli oggetti riguardo ai quali si conduce la prova, né d'altra parte i riferimenti dimostrati).≫ *Secondi Analitici*, I.11.77a20-35, in Aristotele (1984), p. 285. Per la natura dei principi di ciascuna scienza cfr. *Ivi*, I.10.76a ss., p. 282 ss.

[8] ≪Se ha da esservi dimostrazione, non è necessario che vi siano le idee, o che sussista un oggetto unico, al di là della molteplicità, ma deve dirsi necessariamente secondo verità che una sola determinazione si riferisce a molti oggetti. In effetti, se così non fosse, non si presenterebbe la determinazione universale, e se d'altro canto la determinazione universale non sussistesse, non vi sarebbe il medio, e di conseguenza neppure la dimostrazione. Occorre quindi che una sola e medesima determinazione venga riferita in modo non ambiguo a parecchi oggetti.≫ *Secondi Analitici*, I.11.77a5-10, in Aristotele (1984), pp. 284-5.

[9] ≪Da un lato, gli assiomi onde prende lo spunto la dimostrazione possono essere gli stessi in tutti i casi; d'altro lato, quando le scienze sono differenti per il genere, come avviene all'aritmetica e alla geometria, non è possibile adottare per esempio la dimostrazione aritmetica alle determinazioni delle grandezze spaziali, a meno che tali grandezze non siano numeri.≫ *Secondi Analitici*, I.7.75b1-10, in Aristotele (1984), p. 278.

scienze matematiche sono cioè scienze particolari. Tuttavia Aristotele menziona anche una scienza universale matematica comune a tutti i rami e a tutti i generi della matematica stessa.[10] Ci sono infatti proposizioni dimostrate dai matematici che si estendono oltre gli oggetti delle singole scienze matematiche: geometria, astronomia, ottica, armonia.[11] Secondo Thomas Heath, Aristotele fa qui riferimento alla teoria delle proporzioni di Eudosso, e in particolare al teorema che afferma la trasformabilità di una proporzione alternando i termini. Tale teorema, dimostrato dapprima separatamente per diverse specie di cose (numeri, linee, solidi, tempi) nel IV secolo era dimostrato universalmente: Aristotele spiega questo risultato affermando che la proprietà di trasformabilità non inerisce ai soggetti in quanto numeri, linee, ecc. ma in quanto aventi un particolare carattere che si suppone essi abbiano tutti.[12] Aristotele non dà un nome a questo carattere comune a tutti gli oggetti menzionati, ma si potrebbe individuare nella *quantità* l'aspetto comune a numeri, grandezze, tempi;[13] Euclide però negli *Elementi* usa un diverso termine quando espone la teoria generale delle proporzioni di Eudosso: il termine grandezza (μέγεθος). Ritorneremo ampiamente sulla natura di questo carattere comune all'inizio del capitolo 2, ove, analizzando le possibili definizioni di matematica e la natura dei suoi oggetti, prenderemo le mosse dal concetto aristotelico di quantità e da quello euclideo di grandezza matematica.[14]

[10]≪Noi potremmo chiederci, in realtà, se la filosofia prima sia universale o se essa si occupi di un genere determinato e di una determinata natura (giacché nemmeno le scienze matematiche seguono tutte un medesimo criterio di indagine, ma la geometria e l'astronomia si occupano di entità che hanno una determinata natura, mentre la matematica generale studia tutte queste entità insieme) [...]≫ *Metafisica*, VI.1.1026a23-7, in Aristotele (2002), p. 176. Si veda anche il passo seguente: ≪Infatti, nell'ambito delle scienze matematiche, ciascuna di queste si occupa di un solo genere determinato, mentre la matematica generale si occupa di tutti i generi in modo comune.≫ *Metafisica*, K.7.1064b8-9 in Aristotele (2002), p. 324.

[11]≪Inoltre, certi assiomi di carattere universale sono formulati dai matematici indipendentemente da queste sostanze. Ci sarà, allora, anche un'altra sostanza intermedia separata dalle idee e dagli enti intermedi, e questa sostanza non sarà né numero né punto né grandezza né tempo. Ma, poiché ciò è impossibile, è ovviamente impossibile anche l'esistenza di enti matematici separati dagli oggetti sensibili.≫ *Metafisica*, XIII.2.1077a9-10 in Aristotele (2002), p. 377.

[12]Cfr. *Analitici Secondi*, I.5.74a17-25 in Aristotele (1984), p. 273. Si veda anche Heath (1949), pp. 43-44, 223.

[13]Questa è anche l'interpretazione che ne dà Heath (1949), pp. 43-44.

[14]Si veda in particolare il paragrafo 2.1.2 a pagina 64.

2.1.2 Il genere comune alle dimostrazioni matematiche

Diversi sono i termini con cui viene indicata la matematica nel pensiero greco e diverse sono le proprietà attribuite agli enti matematici. Proclo nel *Commento al I libro degli Elementi di Euclide* tramanda due diverse classificazioni della matematica, risalenti l'una ai pitagorici, l'altra a Gemino di Rodi (I sec. a. C.) autore di una *Dottrina o Teoria della matematica* che non ci è pervenuta. I pitagorici dividono la matematica in due gruppi: l'aritmetica e la musica riguardano il 'quanto', la geometria e la sferica (o astronomia) riguardano il 'quanto grande'; delle prime due l'aritmetica si distingue dalla musica perché ha la sua consistenza in se stessa mentre la musica è costituita in relazione ad un altro; delle ultime, la geometria considera il 'quanto grande' come immobile, l'astronomia come mobile su se stesso.[15] Gemino suddivide invece la matematica in due parti a seconda che essa si occupi di cose intellegibili (νοητά) o di cose sensibili (αἰσθητά); nel primo caso si ha quella che oggi chiameremmo matematica pura, composta di aritmetica e geometria, nel secondo quella che oggi chiameremmo matematica applicata, composta di sei discipline: meccanica, astronomia, ottica, geodesia, canonica e logistica.[16]

Manca nel pensiero greco una esplicita definizione unitaria di matematica, anche se vi sono vari modi di intendere le scienze matematiche sotto un punto di vista comune. Il termine μάθημα nell'accezione di Pitagora aveva un significato unitario perché la matematica era la conoscenza del reale: poiché i principi delle cose erano numeri, la scienza dei numeri coincideva con la filosofia stessa. Platone si riferisce per lo più alla matematica nominando le discipline che ne fanno parte ma ha una concezione unitaria degli oggetti della matematica, i quali occupano una posizione intermedia tra le cose sensibili e le idee.

Nel *Filebo*, nel *Politico* e nella *Repubblica* Platone fa riferimento a due scienze del numero e della misura.[17] Qui l'arte del numerare e del far di conto (l'aritmetica) è considerata una scienza «di carattere universale e della quale fanno uso sia le arti che le discipline matematiche e le scienze, e che quindi ciascuno dovrebbe apprendere fin dall'inizio.»[18] Più oltre in questo stesso passo Platone parla ancora della scienza del calcolo e dell'aritmetica, che trattano del numero, e della geometria, che «segue la prima da vicino», cioè deve essere scelta e stabilita come seconda materia di studio per i giovani

[15] Cfr. Proclo (1533), p. 51.

[16] Cfr. Proclo (1533), pp. 52-3. La canonica è la teoria del canone musicale, mentre la logistica è l'arte del calcolo.

[17] Si veda il paragrafo 1.1.1 a pagina 15.

[18] *Repubblica*, VII.521c in Platone (1991), pp. 1244-5.

dopo la scienza del calcolo.[19] In Platone si trovano dunque una scienza della misura e una scienza del calcolo e il termine ‘matematica’ indica l’insieme delle due discipline piuttosto che un’unica scienza con un proprio oggetto.[20]

---

[19] *Repubblica*, VII.525d-527d in Platone (1991), pp. 1248-9.

[20] In verità Platone distingue due scienze della misura e due scienze del numero: l’una applicata e l’altra filosofica. La matematica può avere un’applicazione più alta e non quantitativa, che l’avvicina al metodo dialettico, se individua somiglianze e differenze tra Idee. La matematica è da un lato scienza del numero e della misura; dall’altro essa è una scienza più alta, che, misurando tutte le cose prodotte da un’arte, deve saper congiungere le cose che presentano comunanze e separare le cose che presentano diversità, ove queste comunanze e diversità siano fondate sulle comunanze e diversità tra Idee. La matematica, cioè, conduce alla dialettica se ordina le cose rispecchiando la trama di rapporti e la gerarchia che sussistono tra le Idee. ≪È chiaro che potremo distinguere l’arte del misurare, come è stato detto, in due parti nel modo seguente: ponendo in una parte di essa tutte le arti che misurano il numero, la lunghezza, l’altezza, la larghezza e la velocità rispetto ai loro contrari, e in una seconda parte tutte le arti che misurano in rapporto al giusto mezzo, al conveniente, all’opportuno, al doveroso, e a tutto quello che rifugge dagli estremi e tende al mezzo. [...] l’arte del misurare riguarda tutte le cose che vengono all’essere, questo è, appunto, ciò che ora è stato detto. Della misura, infatti, in qualche modo partecipano tutte quante le cose che sono prodotte da un’arte. Ma per il fatto che costoro non sono abituati a indagare facendo distinzioni secondo le Idee, congiungono insieme immediatamente queste cose, che pur sono tanto differenti, ritenendole pressoché uguali, e, per contro, fanno il contrario di questo — non dividendo, secondo parti, cose che sono diverse —, quando si dovrebbe, non appena si sia avvertita la comunanza di molte cose fra loro, non distaccarsene, prima che siano viste in essa tutte le differenze, almeno tutte quelle che si fondano sulle Idee; e d’altra parte, quando si siano notate diversità di molti tipi in molte cose, non dovrebbe essere possibile sentirsi sconcertati, e desistere, prima di aver stretto tutte quante le cose affini all’interno di un’unica uguaglianza e di averle rinchiuse nell’essenza di un determinato genere.≫ Cfr. *Politico*, 284d-285c in Platone (1991), pp. 343-4. La dialettica, infatti, è una sorta di metodo matematico universale, è quantitativa e qualitativa: da un lato paragona numeri e grandezze, dall’altro paragona l’eccesso e il difetto alla giusta misura (e questa seconda metretica è in Platone certamente riferita a valori estetici e morali). Cfr. Robin (1968), p. 67. Un’ulteriore conferma di questa distinzione fra due attività della misura, una più pratica e una più alta o filosofica si trova nel *Filebo*, dove Platone fornisce una vera e propria classificazione del sapere: dopo aver distinto le conoscenze che hanno per fine l’educazione da quelle che hanno per fine la produzione, egli distingue le conoscenze in base alla maggiore o minore precisione: da una parte la musica, la medicina, l’agricoltura, la nautica e la strategia, dall’altra la tecnica delle costruzioni e l’aritmetica. Queste ultime però possono essere a loro volta divise in due: aritmetica dei più e aritmetica dei filosofi; arte del misurare secondo la tecnica delle costruzioni e quella del commercio e geometria filosofica. Ci sono dunque due scienze del numero e due scienze della misura, una più pura e l’altra meno pura. Solo la dialettica è più vera ed è superiore ad ogni altra scienza: essa è infatti ≪la scienza dell’ente e di ciò che per natura è realmente ed è sempre identico a se stesso≫. Cfr. *Filebo*, 55c-59d in Platone (1991), pp. 466-9. Per Platone dunque la matematica svolge una funzione propedeutica alla filosofia sia come momento formativo sia come studio preliminare dei rapporti tra le idee. Matematica e dialettica sono due saperi che vertono sostanzialmente sugli stessi oggetti: le Idee.

Tuttavia Platone ha una concezione unitaria degli oggetti della matematica, almeno in quanto attribuisce ad essi una natura intermedia tra il mondo intellegibile e il mondo sensibile. Per Platone — stando alla testimonianza di Aristotele — le entità matematiche differiscono dalle cose sensibili perché sono eterne ed immobili e differiscono dalle idee perché non sono uniche, individuali e singolari: vi è infatti una pluralità di enti matematici che si somigliano.[21]

In Aristotele aritmetica e geometria sono considerate due scienze particolari e autonome, che hanno pertanto anche generi differenti (rispettivamente i numeri e le grandezze) e principi differenti. Non sembrerebbe necessaria alcuna riunificazione degli oggetti delle due scienze sotto un unico genere se non fosse per alcune proposizioni generali che i matematici formulano sia per le grandezze sia per i numeri, come ad esempio la trasformabilità di una proposizione alternando i termini.[22] Queste proposizioni generali per essere premesse dei sillogismi dimostrativi devono contenere — secondo quanto afferma Aristotele negli *Analitici Secondi* — determinazioni necessarie dell'oggetto di cui parlano, determinazioni per sé, determinazioni immanenti all'essenza dell'oggetto. Tali determinazioni per sé sono universali se predicabili di ogni oggetto indicato dal termine.

Per provare che la determinazione di un oggetto è universale, occorre però provare che essa si predica del suo *oggetto primo*, cioè dell'oggetto anteriore ad ogni altro oggetto cui appartiene tale determinazione. Solo in questo caso, infatti, si dimostra che la determinazione appartiene *per sé* all'oggetto. Consideriamo un esempio: per provare che la determinazione 'avere la somma degli angoli uguale a due retti' si predica universalmente di qualcosa, non lo si può dimostrare né per una figura qualsiasi (infatti la determinazione non si predica di un quadrato) né per una figura come il triangolo isoscele, ma bisogna dimostrarlo per il suo oggetto primo, cioè per il triangolo, che è anteriore al triangolo isoscele.[23]

Spesso — prosegue Aristotele — crediamo di aver dimostrato il riferimento di una determinazione ad un oggetto come universale e primo mentre così

[21]Cfr. *Metafisica*, I.6.987b14-18, in Aristotele (2002), p. 27.

[22]Cfr. il passo degli *Analitici secondi* citato nella nota 25 a pagina 67.

[23]≪'Universale', infine, chiamo la determinazione che appartiene ad ogni oggetto indicato da un termine, che appartiene al suo oggetto per sé, e che vi appartiene in quanto esso stesso è. [...] L'appartenenza della determinazione universale ad un oggetto viene poi stabilita, quando sia provato il riferimento di essa ad un qualsiasi oggetto, cui capiti di venir indicato da un certo termine, e inoltre quando sia provato il riferimento della determinazione al suo oggetto primo. [...] D'altra parte, un triangolo isoscele scelto a caso ha bensì la somma degli angoli eguale a due retti, na non è l'oggetto primo di tale determinazione, poiché il triangolo è anteriore al triangolo isoscele.≫ *Analitici Secondi*, I.4.73b-74a in Aristotele (1984), pp. 271-2.

non è.[24] Aristotele elenca tre casi e per ciascuno fornisce un esempio: (1) talvolta non c'è una nozione più elevata da assumere, (2) talvolta è possibile assumere una nozione più elevata nella dimostrazione ma manca un nome per essa, (3) talvolta infine la dimostrazione viene condotta rispetto ad una nozione particolare. La dimostrazione è condotta rispetto ad una nozione particolare quando ad esempio si dimostra che rette perpendicolari ad una stessa retta non si incontrano; la stessa determinazione vale infatti anche per altri tipi di rette (non necessariamente perpendicolari) a condizione che gli angoli formati nell'intersezione con la retta data siano uguali. Se invece tutti i triangoli fossero isosceli e non vi fosse una nozione più generale di triangolo da assumere, dimostrando che un triangolo isoscele ha due angoli retti, crederemmo di aver dato una dimostrazione dell'appartenenza universale della determinazione all'oggetto, mentre così non sarebbe. Infine, ed è questo l'esempio che ci interessa maggiormente, Aristotele afferma che la dimostrazione della convertibilità dei termini di una proporzione era stata dimostrata inizialmente in modo separato per diversi oggetti (numeri, lunghezze, solidi, intervalli di tempo) e non in modo universale perché mancava un nome per una nozione più elevata rispetto a tali oggetti.[25]

Questa affermazione lascia intendere che Aristotele fosse convinto dell'esistenza di un tale genere, benché non avesse un nome con cui designarlo. Aristotele assume cioè che vi sia una nozione più elevata sotto alla quale cadono i vari oggetti menzionati (lunghezze, solidi, numeri, intervalli di tempo), ma non attribuisce un nome a tale concetto. Si tratta di qualcosa che tutti quegli oggetti hanno in comune, si tratta dell'oggetto di cui parla la teoria delle proporzioni di Eudosso. Abbiamo già anticipato nel capitolo 1 che un

[24] ≪Orbene, noi cadiamo in questo errore, quando al di là dell'oggetto singolo non risulti possibile assumere alcuna nozione più elevata; oppure quando ciò sia bensì possibile, ma tale nozione non abbia nome, come avviene se gli oggetti di cui si tratta sono differenti per la specie; oppure, infine, quando ciò rispetto alla cui totalità viene condotta la prova si presenti come una nozione particolare: in effetti, la dimostrazione si applicherà agli oggetti indicati dalla nozione particolare, e varrà per ciascuno di tali oggetti, ma questo riferimento non sarà tuttavia provato come primo e universale.≫ *Analitici Secondi*, I.5.74a in Aristotele (1984), pp. 271-2.

[25] ≪E che i termini di una proporzione siano convertibili, lo si era già provato un tempo separatamente, considerando le proporzioni tra numeri, linee, tra solidi e intervalli di tempo, pur essendo certo possibile condurre la prova riguardo a tutti questi casi con una sola dimostrazione; tuttavia, per il fatto che tutti questi oggetti — numeri, lunghezze, solidi, intervalli di tempo — costituiscono un'unità priva di nome, e differiscono gli uni dagli altri quanto alla specie, essi vennero considerati separatamente. Ora invece la cosa viene provata universalmente: in effetti, ciò che si suppone appartenere universalmente all'oggetto non appartiene più separatamente a degli oggetti, in quanto linee o in quanto numeri, ma appartiene ormai all'oggetto in quanto un determinato qualcosa.≫ *Analitici Secondi*, I.5.74a in Aristotele (1984), p. 273.

carattere comune a tutti questi oggetti è — secondo quanto Aristotele afferma nella *Metafisica* — il fatto che essi sono quantità. Da ciò si potrebbe dunque estrapolare una definizione di matematica come scienza delle quantità.

L'esigenza espressa da Aristotele di un genere più alto come oggetto delle proposizioni che nella teoria di Eudosso erano valide per oggetti di entrambe le scienze (aritmetica e geometria) implica la possibilità di trovare un nuovo oggetto primo di cui predicare le determinazioni della teoria delle proporzioni. Proprio questo sembra richiedere Aristotele quando afferma che occorre sempre dimostrare l'appartenenza universale di una determinazione ad un oggetto: non basta dimostrare che un triangolo isoscele ha la somma degli angoli uguali a due retti, occorre ricercare una dimostrazione rispetto all'oggetto primo: il triangolo in generale. Non è infatti a causa dell'essere isoscele che un triangolo ha la somma degli angoli uguali a due retti, bensì in quanto è un triangolo. La storia della definizione di che cos'è matematica è in parte la storia della ricerca di un genere più alto sotto cui far cadere gli oggetti delle dimostrazioni matematiche.

La trasformabilità delle proporzioni alternando i termini (che in questo passo Aristotele attribuisce ad oggetti che hanno in comune il fatto di essere quantità) è la stessa proprietà che Euclide presenta nella Definizione XII del Libro V degli *Elementi*: ≪Si ha rapporto permutato quando si prenda in considerazione l'antecedente rispetto all'antecedente ed il conseguente rispetto al conseguente.≫[26] Negli *Elementi* questa proprietà dei termini di una proporzione è inserita in una presentazione dei rapporti tra grandezze. Se la teoria delle proporzioni è introdotta in Euclide come teoria dei rapporti tra grandezze, possono queste ultime costituire la nozione più elevata rimasta senza nome negli *Analitici secondi*?

2.1.3 Quantità e grandezze in Aristotele

Prima di vedere cosa intendeva Euclide per grandezza (μέγεθος), consideriamo un passo della *Metafisica* dal quale è stata derivata l'idea che la matematica fosse per Aristotele scienza della quantità: la matematica astrae da tutte le qualità sensibili e studia solo quantità e continuità.[27] Ma che cosa intende

[26]Cfr. Euclide (1970), p. 305.

[27]≪Come il matematico compie i suoi studi su cose che risultano da astrazione (egli, infatti, esegue la propria indagine dopo aver eliminato tutto ciò che è sensibile — ad esempio, il peso e la leggerezza, la durezza e il suo contrario, e, ancora, il caldo e il freddo e le altre coppie di contrari sensibili — e lascia solo la quantità e ciò che è continuo o ad una o a due o a tre dimensioni, e indaga sulle affezioni di queste cose, in quanto esse hanno quantità e continuità, e non le studia affatto secondo un qualche altro profilo [...], allo stesso modo sta la faccenda anche a proposito dell'essere.≫ *Metafisica*, XI.3.1061a28,

Aristotele per quantità (τὸ ποσόν)? Nelle *Categorie* Aristotele distingue le quantità in discrete e continue, in quantità che consistono di parti dotate reciprocamente di una posizione e quantità che consistono di parti che non sono dotate reciprocamente di una posizione. Quantità discrete sono numero e discorso; continue sono linea, superficie, tempo e spazio.[28] Quantità che consistono di parti dotate reciprocamente di una posizione sono la linea, il piano, il solido, lo spazio; quantità che consistono di parti che non sono dotate reciprocamente di una posizione sono il numero, il tempo e il discorso.[29] Non sono quantità né l'azione né il movimento né il bianco. Ciò non significa che questi oggetti non possano essere studiati secondo la quantità: al contrario, per spiegare la quantità di un'azione si ricorrerà al tempo, per spiegare la quantità del bianco si ricorrerà ad una superficie. Bianco, azione, movimento sono in questo senso quantità non *per sé*, ma *per accidente*.[30] Dai passi sopra citati delle *Categorie* emergerebbe quindi la seguente classificazione delle quantità:

QUANTITÀ	*discrete*	*continue*
posizione		spazio (linea, superficie, solido)
no posizione	numero, discorso	tempo

Nel seguito del passo Aristotele precisa un'altra caratteristica della quantità: una quantità non è suscettibile di un grado maggiore o minore. Inoltre il carattere più di ogni altro proprio di una quantità è il dirsi eguale e diseguale; al contrario tutti i rimanenti oggetti che non sono quantità «non possono assolutamente dirsi né uguali né disuguali; ad esempio, la disposizione non si dice assolutamente né eguale né diseguale, ma si dirà piuttosto simile, e così il bianco non può dirsi assolutamente né uguale né diseguale, ma si dirà piuttosto simile».[31] Si noti che anche in Euclide si danno due diverse relazioni: l'essere lo stesso, che viene predicato di rapporti tra grandezze, e l'essere uguale che viene predicato di aree e di altre specie di grandezze e che è introdotto per le cose in generale nelle nozioni comuni del I libro: le cose di cui si parla nel primo libro e le grandezze del V libro hanno lo stesso carattere che Aristotele attribuisce alle quantità: l'essere uguali o disuguali.

Nella *Metafisica* Aristotele definisce le quantità come ciò che è divisibile in parti immanenti ciascuna delle quali è per propria natura un alcunché di

in Aristotele (2002), p. 313.

[28] *Categorie*, 6.4b in Aristotele (1984), p. 15.

[29] *Categorie*, 6.5a in Aristotele (1984), p. 17.

[30] *Categorie*, 6.5 in Aristotele (1984), pp. 17-8.

[31] *Categorie*, 6.6a in Aristotele (1984), p. 20.

uno e determinato. Quindi distingue le quantità in due gruppi, a seconda che esse siano numerabili o misurabili: moltitudine o pluralità (πλῆθος) è una quantità che è divisibile potenzialmente in parti non continue, grandezza (μέγεθος) una quantità che è divisibile in parti continue. Grandezze sono lunghezza, larghezza, profondità: se queste sono limitate si hanno rispettivamente la linea, la superficie, il solido. Analogamente il numero è una moltitudine limitata di unità.[32]

Nelle *Categorie* Aristotele introduce la qualità come ≪la categoria in virtù della quale gli individui si dicono possedere una certa qualità≫:[33] qualità (τὸ ποιόν) sono gli abiti e le disposizioni, le capacità o incapacità naturali, le affezioni e le loro conseguenze, le determinazioni geometriche (forma e figura).[34] Non sono invece qualità il denso e il liscio e i loro contrari perché essi hanno piuttosto a che fare con una certa disposizione delle parti delle cose, che è caratteristica della quantità. Alle qualità appartiene la contrarietà e l'esser suscettibili di una misura maggiore o minore. Non tutte le qualità, però, sono suscettibili di una misura maggiore o minore: un oggetto non può essere ad esempio più triangolo o più cerchio di un altro.[35] La caratteristica che compete unicamente alla qualità è la somiglianza e dissomiglianza: come solo le quantità possono dirsi uguali o disuguali, così solo le qualità possono dirsi simili o dissimili.[36]

Nella *Metafisica* la qualità è definita in senso primario come differenza della sostanza: ad esempio la qualità del cerchio è quella di essere senza angoli. In un secondo significato, riconducibile al primo, la qualità è una

[32] *Metafisica*, V.13.1020a7-14 in Aristotele (2002), p. 149. Stein osserva che in questo passo moltitudine, lunghezza, larghezza, profondità appaiono come generi di cui il numero, la linea, la superficie e il solido sono rispettivamente specie e si serve di questa analogia per sostenere che Aristotele intenderebbe per numero un insieme finito di elementi. Cfr. Stein (1990), p. 165.

[33] *Categorie*, 8.8b in Aristotele (1984), p. 27.

[34] ≪Il quarto genere di qualità è costituito dalla figura e dalla forma appartenente ad ogni oggetto, oltre a ciò, dalla dirittura e dalla curvatura, e da qualsiasi altra determinazione consimile. È difatti in virtù di queste varie nozioni che un oggetto si dice possedere una qualità: in realtà, un oggetto si dice possedere una certa qualità per il fatto che è triangolare o quadrangolare, come pure, che è retto o curvo. D'altronde è in virtù della forma che ogni oggetto si dice possedere una qualità.≫ Cfr. *Categorie*, 8.10a in Aristotele (1984), p. 31.

[35] *Categorie*, 8.11a in Aristotele (1984), p. 33.

[36] ≪Se tra i caratteri enunciati nessuno è proprio della qualità, in compenso il parlare di somiglianza e dissomiglianza riguarda unicamente la qualità. Un oggetto è infatti simile ad un secondo oggetto per nessun'altra ragione, se non quella per cui possiede una qualità. Il carattere proprio della qualità consisterà dunque nel fatto che in virtù di essa si può parlare di somiglianza e dissomiglianza.≫ Cfr. *Categorie*, 8.11a in Aristotele (1984), pp. 33-4.

caratteristica degli oggetti immobili della matematica: «In questa accezione [ossia come differenza della sostanza] si usa, dunque, il termine 'qualità', ma in un altro senso questo termine viene attribuito agli enti immobili, ossia agli enti matematici, in quanto i numeri sono, in un certo modo, qualità, come, ad esempio, i numeri composti, cioè quei numeri che sono geometricamente rappresentabili non mediante una linea, ma mediante una superficie o un solido (vale a dire i numeri quadrati e cubici), e, insomma, tutto ciò che permane nella sostanza a prescindere dalla quantità [...]».[37]

Che cosa si può concludere da questa ricognizione delle definizioni aristoteliche di qualità e quantità? L'aritmetica è scienza della quantità poiché è scienza del numero; d'altra parte anche i numeri hanno determinate qualità: può dunque essere l'aritmetica in quanto studio dei numeri soltanto scienza delle quantità? Lo studio dei rapporti tra lunghezze di segmenti, aree di superfici, volumi di solidi (la geometria metrica) è ancora scienza della quantità, poiché lunghezze, aree, volumi sono quantità; ma si può dire che è scienza della quantità anche lo studio delle forme e delle figure? Queste ultime infatti sono qualità e non quantità. Assumendo le definizioni aristoteliche di numero, grandezza, qualità e quantità, potremmo concludere che la definizione più coerente con quanto si è detto fin qui di una scienza comprensiva dell'aritmetica e della geometria metrica dovrebbe essere «scienza di quelle due particolari quantità che sono il numero e le grandezze». Tuttavia questa definizione si rivelerebbe insufficiente a comprendere la parte dell'aritmetica che studia le qualità dei numeri (si pensi all'aritmetica pitagorica, che distingue numeri triangolari, quadrati, ecc.) e quella parte della geometria che studia la similitudine delle figure.

Riassumendo, la possibilità nella teoria delle proporzioni di Eudosso di dimostrare alcune proposizioni universali, valide cioè per i numeri ma anche per le grandezze, solleva il problema di trovare un genere comune per numeri e grandezze e di dare ad esso un nome. Aristotele osserva che numeri e grandezze hanno in comune il fatto di essere entrambe quantità: poiché però quantità non sono solo grandezze e numeri, non si può chiamare 'quantità' un genere che comprende numeri e grandezze soltanto.

2.1.4 Le grandezze in Euclide

Veniamo ora ai concetti di grandezza, numero e rapporto che troviamo negli *Elementi* di Euclide, e in particolare nella teoria delle proporzioni di Eudosso. Euclide non introduce una definizione di grandezza ma la assume implicitamente nella trattazione della teoria delle proporzioni, che è espo-

[37]Cfr. *Metafisica*, V.14.1020b1-10 in Aristotele (2002), pp. 150-1.

sta nel libro V per grandezze in generale cioè sia commensurabili (come ad esempio i numeri) sia incommensurabili (come alcune grandezze geometriche). La teoria delle proporzioni è esposta nuovamente solo per i numeri nel libro VII, mentre le applicazioni alla geometria sono presentate nel libro VI. Condizioni necessarie per la definizione di proporzione e la comprensione del concetto di grandezza introdotto da Euclide sono i concetti di uguaglianza e di disuguaglianza espressi nelle nozioni comuni e le condizioni espresse nella terza e quarta definizione del libro V, cioè l'omogeneità tra grandezze e la proprietà espressa dal principio di Archimede.

Le Nozioni comuni tramandate nei testi euclidei sono otto, ma tre di queste sono ritenute da Heiberg interpolate (IV-VI): anche alcune altre potrebbero essere state inserite successivamente come generalizzazioni di particolari inferenze che si trovano in Euclide.[38]

> I. Cose che sono uguali ad una stessa cosa sono uguali anche fra loro.
> II. E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.
> III. E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.
> IV. E se cose uguali sono addizionate a cose diseguali, le totalità sono diseguali.
> V. E doppi di una stessa cosa sono uguali fra loro.
> VI. E metà di una stessa cosa sono uguali fra loro.
> VII. E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.[39]
> VIII. Ed il tutto è maggiore della parte.[40]

Le nozioni comuni esprimono le proprietà dell'uguaglianza e la sua compatibilità con le operazioni di somma, differenza, prodotto e quoziente. Se si accetta, con Enriques, che l'ultima nozione comune contenga un abbozzo delle proprietà dell'ordine, si ha anche la compatibilità dell'uguaglianza con l'ordine. L'uguaglianza è intesa da Euclide come uguaglianza rispetto alla grandezza (lunghezza, area, volume), vale a dire come ciò che oggi chiamiamo equivalenza.

In forma simbolica le nozioni euclidee potrebbero essere espresse nel modo seguente (ove a, b, c, d sono cose, $\equiv$ e $>$ sono rispettivamente il segno

[38] Heath ritiene probabile che ciò sia avvenuto per le nozioni VII e VIII. Cfr. Heath (1921), I. p. 376.

[39] Heath fa riferimento alla teoria aristotelica secondo la quale le nozioni comuni dovrebbero essere principi comuni a più scienze (cfr. pag. 62) per dimostrare che questa nozione comune non è originale ma interpolata successivamente nel testo: essa sarebbe infatti geometrica anziché comune a più generi. Cfr. Heath (1921), I. p. 376.

[40] Cfr. *Elementi*, libro I, Nozioni comuni, in Euclide (1970), pp. 73-5.

per l'equivalenza (uguaglianza rispetto alla grandezze) e il segno per la relazione 'essere maggiore di', $\doteq$ esprime la coincidenza e $\sqsupset$ indica la relazione 'contenere come parte'):[41]

I.i.	$a \equiv c \ \wedge \ b \equiv c \ \ \rightarrow \ \ a \equiv b$
I.ii.	$a \equiv b \ \ \rightarrow \ \ b \equiv a$
II.	$a \equiv b \ \ \rightarrow \ \ a + c \equiv b + c$
III.	$a \equiv b \ \ \rightarrow \ \ a - c \equiv b - c$
IV.	$a \equiv b \ \wedge \ c > d \ \ \rightarrow \ \ a + c > b + d$
V.	$a \equiv b \ \ \rightarrow \ \ 2a \equiv 2b$
VI.	$a \equiv b \ \ \rightarrow \ \ \frac{a}{2} \equiv \frac{b}{2}$
VII.	$a \doteq b \ \ \rightarrow \ \ a \equiv b$
VIII.	$a \sqsupset b \ \ \rightarrow \ \ a > b$

Abbiamo tradotto in notazione simbolica le nozioni comuni (benché ovviamente i concetti euclidei non possano essere perfettamente tradotti dai corrispettivi concetti moderni) per confrontare (cfr. il paragrafo 3.3.2 a pagina 146) la concezione euclidea delle grandezze con la logistica speciosa di Viète e con la teoria delle grandezze proposta a fine Ottocento da Hölder, che analizzeremo anche in rapporto a più recenti esposizioni della teoria della misurazione.[42] Riteniamo infatti che un tale confronto possa essere estremamente utile per comprendere in che modo è stata interpretata e intesa la teoria delle grandezze in diversi momenti storici e dunque anche il significato della definizione di matematica come scienza delle grandezze. Occorre però completare dapprima il quadro della teoria euclidea introducendo la teoria delle proporzioni derivata da Eudosso che si trova nel libro V degli *Elementi*. Ci limitiamo qui a presentare le prime cinque definizioni del libro, che svolgono un ruolo fondamentale nella determinazione di ciò che Euclide intende per grandezza. Se infatti nei libri I-IV le definizioni riguardano punti, linee rette, superfici, angoli, figure, ecc. — in una parola enti geometrici — nelle definizioni del libro V si parla piuttosto di *grandezze in generale*.

> I. Una grandezza è parte di una grandezza, la minore di quella maggiore, quando essa misuri la maggiore.
> II. La grandezza maggiore è multipla di quella minore, quando sia misurata dalla minore.
> III. Rapporto fra due grandezze omogenee è un certo modo di

[41]La proprietà simmetrica dell'uguaglianza sarebbe implicata dalla formulazione plurale della prima nozione comune. Per rendere conto di questo fatto abbiamo sdoppiato la prima nozione comune in due parti. Cfr. Euclide (1970), p. 58.

[42]Cfr. Hölder (1901) e Suppes e Zinnes (1963).

> comportarsi rispetto alla quantità.
> IV. Si dice che hanno fra loro rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente.
> V. Si dice che [quattro] grandezze sono nello stesso rapporto, una prima rispetto ad una seconda ed una terza rispetto a una quarta, quando risulti che equimultipli della prima e della terza [presi] secondo un multiplo qualsiasi, ed equimultipli della seconda e della quarta [presi pure] secondo un multiplo qualsiasi, sono gli uni degli altri, cioè ciascuno dei due primi del suo corrispondente fra i secondi, o tutti e due maggiori, o tutti e due uguali, o tutti e due minori, se considerati appunto nell'ordine rispettivo (= quando cioè, presi equimultipli qualunque della prima grandezza e della terza ed equimultipli qualunque della seconda e della quarta, secondo che il multiplo della prima sia maggiore, uguale o minore del multiplo della seconda, l'equimultiplo della terza è corrispondentemente maggiore, uguale o minore dell'equimultiplo della quarta).[43]

Cosa sono le grandezze di cui si parla in queste definizioni? Si tratta di nuovi oggetti distinti sia dalle figure geometriche (cui sono dedicati i libri I-IV) sia dai numeri (cui sono dedicati i libri VII-IX) o si tratta piuttosto, come sostiene David Reed in *Figures of Thought* di un nuovo contesto all'interno del quale si considerano oggetti definiti precedentemente? Reed segnala una differenza di contesto tra i primi quattro libri degli *Elementi* e il V libro sostenendo che mentre nei primi quattro libri è il concetto non definito di parte a costituire il contesto entro cui gli altri concetti sono definiti, nel V libro è invece il concetto non definito di grandezza a costituire il contesto entro cui definire il concetto di uguaglianza di rapporto.[44]

La prima definizione euclidea afferma che una grandezza è parte di una grandezza, la minore di quella maggiore, quando essa misuri la maggiore.[45] La seconda definisce il concetto di multiplo, che si distingue da quello di parte per il modo passivo anziché attivo del verbo 'misurare': la grandezza maggiore è multipla di quella minore quando sia misurata dalla minore.[46]

[43]Cfr. *Elementi*, libro V, Definizioni, in Euclide (1970), pp. 298-9.

[44]Cfr. Reed (1995), p. 54.

[45]Da qui l'idea che perché una grandezza a possa essere *misura* di una grandezza b debba esistere un multiplo di a che sia *uguale* a b. In senso stretto, cioè, la misura di una grandezza deve essere un sottomultiplo di quella grandezza.

[46]Già Aristotele nella *Metafisica* aveva distinto due diversi significati del concetto di parte, paragonabili al concetto di parte dei primi quattro libri di Euclide e al concetto di parte definito nel V libro. Un segmento è parte in un senso generale di un altro segmento se per parte si intende ciò in cui il tutto è scisso (sia che ciò avvenga per divisione sia

Reed considera la misura come una relazione costitutiva allo stesso modo dell'uguaglianza, soltanto più generale: infatti nel caso dell'uguaglianza il numero delle parti è stabilito (es. $a = 3b$ oppure $a = b + c$) mentre nel caso della misura posso dire che a è misurato da c un certo numero di volte senza precisare quale (cioè nella relazione tra il multiplo e la parte non è fissato il numero di volte in cui la parte è contenuta nel multiplo). Inoltre l'uguaglianza è bidirezionale mentre la relazione di misura no: una grandezza misura l'altra e l'altra è misurata dalla prima. Le prime due definizioni determinerebbero dunque la grandezza per mezzo del rapporto parte-multiplo, cioè del rapporto tra un tutto e le sue parti. Nella terza e nella quarta definizione, invece, le grandezze sarebbero invece considerate come relate direttamente e esclusivamente le une alle altre, senza tener conto di parti e multipli, che sono tuttavia ciò in forza di cui esse sono grandezze (le cose infatti sono grandezze in quanto considerate nel contesto del misurare e dell'essere misurate).[47]

La terza proposizione, più che costituire una definizione di rapporto, serve ad esprimere una condizione perché due grandezze abbiano un rapporto: l'omogeneità. Due grandezze sono omogenee se sono lo stesso tipo di misura: ad esempio se sono entrambe lunghezze, aree, volumi. In senso più generale potremmo intendere questa proposizione come una condizione generalissima di confrontabilità delle grandezze: di due grandezze omogenee ha senso porsi la domanda se l'una sia maggiore, uguale o minore rispetto all'altra. In senso lato, dunque, potremmo intendere l'omogeneità come un principio di tricotomia: date due grandezze omogenee l'una sarà maggiore, minore o uguale all'altra.

La quarta definizione esprime un'ulteriore condizione perché si possa avere un rapporto: le grandezze devono essere tali che un multiplo della minore possa superare la maggiore. Questa condizione precisa ulteriormente la nozione di confrontabilità tra grandezze: essa infatti richiede non solo che sia possibile stabilire se una grandezza è maggiore, uguale o minore dell'altra, ma fornisce anche un criterio di confronto escludendo l'eventualità che una grandezza sia indeterminatamente maggiore o minore dell'altra, cioè escludendo che le grandezze siano una infinita rispetto all'altra. Il principio esposto nella definizione IV — cui Otto Stolz attribuì nel 1882 il nome di Archimede dopo aver scoperto che il principio era formulato in modo esplicito nelle opere del matematico siracusano[48] — è infatti strettamente collegato alla possi-

che ciò avvenga per sottrazione); un segmento è parte in un senso specifico di un altro segmento se è un suo sottomultiplo, cioè se lo misura. Cfr. *Metafisica*, V.1023b12, in Aristotele (2002), p. 164. Il passo è citato più avanti nel § 2.3.2 a pagina 109.

[47]Cfr. Reed (1995), p. 57.

[48]Si veda l'articolo di Otto Stolz, "Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes", in *Berichte des Naturwissenschaftlich-Medizinischen Vereines in*

bilità di misurare le grandezze e alla concezione che i Greci avevano della continuità. Misurare due grandezze significa confrontarle rispetto ad una grandezza comune, cioè ad una grandezza omogenea assunta come unità di misura: la definizione quarta fornisce un criterio per misurare le grandezze commensurabili. Date infatti due grandezze commensurabili che soddisfano le condizioni di omogeneità e di archimedicità, avremo che l'una può sempre essere assunta a misura dell'altra o che una terza grandezza può essere assunta a misura di entrambe.

A dire il vero, secondo Euclide c è una *misura* di a soltanto se c'è un multiplo di c che è *uguale* ad a. Tuttavia la quinta definizione, che esprime la condizione alla quale due coppie di grandezze si dicono stare nello stesso rapporto, permette di estendere in un certo senso la misurazione anche alle cosiddette grandezze incommensurabili, cioè alle grandezze che non hanno una misura (un sottomultiplo) comune. La quinta definizione afferma infatti che quattro grandezze a, b, c, d stanno a due a due nello stesso rapporto $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ quando in qualunque modo si prendano due equimultipli ma e mc delle prime e in qualunque modo si prendano due equimultipli delle seconde nb e nd, deve valere la seguente concordanza di segni: se $ma \gtreqless nb$ allora $mc \gtreqless nd$. Se le grandezze sono commensurabili, se hanno cioè una misura comune, si avrà l'uguaglianza tra i multipli; nel caso le grandezze siano incommensurabili si avrà invece la disuguaglianza tra i multipli.[49]

Se si intende dunque il misurare non solo come un determinare la misura di una grandezza a rispetto all'unità c, cioè come un mostrare che essa è uguale a n volte l'unità, ma anche come confronto con altre grandezze secondo la teoria delle proporzioni, si ha che una grandezza c può servire a misurare a anche se nc è strettamente minore di a e $(n+1)c$ è strettamente maggiore di a: $nc < a < (n+1)c$. Se il misurare è inteso come un confronto tra grandezze, che possono essere uguali ma anche maggiori o sempre minori di un multiplo dell'unità di misura, il principio di Archimede, che infatti è anche detto assioma della misura, fornisce un criterio per misurare sia grandezze commensurabili sia grandezze incommensurabili.

Date tre grandezze omogenee a, b, c che soddisfano al principio di Archimede e supposto che $c < a < b$, avremo che $\exists n \mid (n-1)a < b \leq na$, cioè avremo un modo di misurare b rispetto ad a, e avremo che $\exists m \mid (m-1)c < a \leq mc$, cioè un modo di misurare a rispetto a c. D'altra parte, poiché anche

Innsbruck, 12, 1882, pp. 74-89 e rivisto in *Mathematische Annalen*, 22, 1883, pp. 504-519.

[49]Si noti che la definizione richiede che si verifichi la corrispondenza tra i segni per qualunque multiplo, cioè per ogni numero intero m, n: sono dunque necessarie infinite verifiche per garantire che due coppie di grandezze siano nello stesso rapporto, mentre è sufficiente un solo controesempio per dimostrare il contrario.

$c < b$, avremo che $\exists k \mid (k-1)c < b \leq kc$, cioè avremo un modo di misurare b rispetto a c.

Il principio di Archimede, garantendo la misurabilità delle lunghezze, garantisce un qualche tipo di continuità della retta: assumendo il principio di Archimede è infatti possibile dimostrare la densità della retta, che esprime il concetto di continuità proprio dell'antichità greca.

Siano $a, b \in \mathbb{Q}$, sia $a < b$ e $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $na > b$. Per dimostrare che l'insieme $\mathbb{Q}$ è denso, devo costruire un numero razionale $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{Z}$ tale che $a < \frac{p}{q} < b$. Scelgo $m > \frac{1}{b-a}$ con $m \in \mathbb{N}$. Moltiplicando per $b-a$ ottengo $(b-a)m > 1$ da cui $mb - ma > 1$ e poi $ma < mb - 1$. Per il principio di Archimede posso scegliere il più piccolo $n \in \mathbb{Z}$ tale che $n < mb \leq n+1$ da cui $n - 1 < mb - 1 \leq n < mb$. Dalla precedente $ma < mb - 1$ e da $n - 1 < mb - 1 \leq n < mb$ ottengo $ma < n < mb$. Dividendo per m ottengo infine $a < \frac{n}{m} < b$. Q.E.D.

Infine, se considerato nella cosiddetta enunciazione del sottomultiplo, il principio di Archimede afferma immediatamente anche un'altra cosa: l'impossibilità di grandezze infinitesime.

Dire infatti che date due grandezze omogenee a e b, con $a < b$, $\exists n \mid na > b$ significa che $\exists n \mid a > \frac{1}{n}\, b$, vale a dire che esiste un qualche sottomultiplo della grandezza maggiore di cui la minore è più grande.

Proprio per questa ragione Euclide esclude dalla propria trattazione geometrica gli angoli curvilinei o di contingenza: dimostra infatti nella proposizione III.16 che non esiste alcun sottomultiplo di un angolo rettilineo che sia minore dell'angolo di contingenza, o in altre parole, che gli angoli di contingenza sono infinitesimi rispetto agli angoli rettilinei e dunque non possono avere un rapporto con essi.[50] Questo esempio chiarisce molto bene la differenza tra la definizione III, che richiede soltanto una generica possibilità di confronto (è possibile stabilire che un angolo di contingenza è minore di un angolo rettilineo) e la definizione IV, che indica un criterio di confrontabilità e di misura delle grandezze.

Le definizioni I-V del quinto libro potrebbero essere espresse in simboli — per come sono state interpretate sopra — nel modo seguente (ove a, b, c, d siano grandezze in generale, $\mathbb{N}$ sia l'insieme dei numeri naturali, $>$ e $<$ indichino rispettivamente le relazioni di maggiore e minore, $\sim$ indichi l'omogeneità, $\equiv$ sia la relazione 'essere lo stesso', $\prec$ e $\succ$ siano rispettivamente segni per le relazioni 'essere parte di' o 'essere sottomultiplo di' e 'essere multiplo di'):

[50] III. Proposizione 16. «In un cerchio, una retta che sia tracciata perpendicolare al diametro partendo da un estremo di questo, cadrà esternamente al cerchio, nessun'altra retta potrà interporsi nello spazio fra la retta e la circonferenza, e l'angolo del semicerchio è maggiore, e quello che rimane [fra la retta e la circonferenza] minore, di ogni ancolo acuto rettilineo.». Cfr. Euclide (1970), p. 228.

$$\begin{array}{ll}
\text{I. } b \prec a & =_{def} \quad b < a \ \wedge \ \exists n \in \mathbb{N} \mid nb = a \\
\text{II. } a \succ b & =_{def} \quad a > b \ \wedge \ \exists n \in \mathbb{N} \mid a = nb \\
\text{III. } a \sim b & =_{def} \quad a \gtreqqless b \\
\text{IV. } \frac{a}{b} & =_{def} \quad a \sim b \ \wedge \begin{cases} a > b & \rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \mid nb > a \\ a < b & \rightarrow \ \exists m \in \mathbb{N} \mid ma > b \end{cases} \\
\text{V. } \frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} & =_{def} \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \ \begin{cases} na > mb \ \rightarrow \ nc > md \\ na = mb \ \rightarrow \ nc = md \\ na < mb \ \rightarrow \ nc < md \end{cases}
\end{array}$$

Abbiamo visto finora come le nozioni comuni caratterizzino il concetto di uguaglianza e con che significato occorra il termine grandezza nel libro V, ove le condizioni perché una grandezza abbia un rapporto rimandano al concetto di eguaglianza esposto nelle precedenti nozioni comuni. Resta ora da verificare se per grandezze Euclide intenda soltanto lunghezze, aree, volumi o se egli intenda anche i numeri. Abbiamo già richiamato la suggestiva tesi di Reed secondo cui le grandezze non dovrebbero essere considerate come tipi di oggetti bensì come un contesto all'interno del quale considerare oggetti già definiti. Secondo questa interpretazione quando Euclide parla di grandezze starebbe parlando in un modo diverso degli stessi oggetti dei primi quattro libri, cioè di lunghezze, aree, volumi, considerandone i rapporti sia nel caso commensurabile sia nel caso incommensurabile.

Nel libro VII Euclide ripresenta una teoria delle proporzioni, questa volta basata sul numero: significa questo che i numeri sono oggetti distinti dalle grandezze? Seguendo ancora l'interpretazione di Reed si può osservare che nel V libro il concetto di grandezza è un contesto in cui si pongono in relazione le cose per mezzo del concetto di equimultiplo: una grandezza è lo stesso multiplo di una seconda che una terza di una quarta. Non c'è però un metodo per specificare ulteriormente la relazione di multiplo: una grandezza è lo stesso multiplo di un'altra ma non si sa quale multiplo dell'altra sia e proprio per questo la teoria è applicabile sia a grandezze commensurabili sia a grandezze incommensurabili. Nel libro VII invece Euclide determina quante volte una grandezza misura un'altra grandezza e pertanto considera soltanto il caso commensurabile.

Secondo Reed, come la grandezza così il numero non è un oggetto specifico ma un modo di considerare cose precedentemente definite: unità è qualcosa che è considerata come una cosa singola.[51] La Definizione I afferma infatti che «unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto (λέγεται) uno» e la Definizione

[51]Reed difende la propria interpretazione contestualista dei numeri, ritenendo che neppure espressioni usate da Euclide come 'trovare un certo numero con certe proprietà' implichino che i numeri siano degli oggetti. Nei libri VII-IX Euclide parla di trovare un

II afferma che «numero è una pluralità (πλῆϑος) composta da unità». I numeri sono così definiti a partire dalle unità senza riferimento alla relazione con altri numeri, come avviene invece per le grandezze che sono definite mediante il riferimento ad altre grandezze. Questo significa che mentre i numeri possono essere caratterizzati intrinsecamente mediante le unità che li compongono, le grandezze possono essere caratterizzate soltanto nella loro relazione reciproca.

Nonostante questa differenza tra numeri e grandezze, i numeri possono essere visti come grandezze perché soddisfano alla condizione di omogeneità e al principio di Archimede. Nel libro VII non c'è bisogno di postulare l'omogeneità dei numeri né si parla di tipi di numeri, poiché i numeri sono tutti relativi all'unità e le unità sono basate sull'esistenza delle cose, che è la stessa per tutte. D'altra parte i numeri (ricordiamo che in Euclide si tratta di numeri interi) soddisfano anche al principio di Archimede, quindi tutti i numeri hanno un rapporto. Nella definizione XX del libro VII Euclide precisa quando due coppie di numeri hanno lo stesso rapporto: «[Quattro] numeri sono in proporzione quando, a seconda che il primo sia multiplo, sottomultiplo, o una frazione qualunque del secondo numero, corrispondentemente il terzo sia lo stesso multiplo, o lo stesso sottomultiplo, o la stessa frazione del quarto».[52]

Benché i numeri possano essere considerati come grandezze perché godono di tutte le proprietà richieste dalle definizioni del libro V, tuttavia Euclide distingue accuratamente la trattazione dei numeri da quella delle grandezze e nella Definizione X del libro XI degli *Elementi* (che si occupa di geometria solida e segue sia alla trattazione della teoria delle proporzioni sia alla teoria dei numeri) sembra contrapporre numeri e grandezze: «Figure solide uguali e simili sono quelle che siano comprese da piani [=facce] simili, uguali per numero e per grandezza».[53] Numero è qui espresso dal termine greco πλῆθοσ (come nella definizione di numero); grandezza sta in questo caso per area e serve a indicare l'equivalenza tra le facce di un solido. La contrapposizione presente in questo passo degli *Elementi* potrebbe essere intesa come una contrapposizione tra il significato specifico (presente anche in Aristotele) di grandezza come lunghezza, area o volume (e dunque come misura di linee, superfici o solidi) e il significato di numero.

numero: questa espressione non toglierebbe nulla al fatto che i numeri sono modi di guardare a cose già definite; poiché i numeri sono composti di unità e possono essere analizzati nei termini delle loro parti (anziché in relazione ad altri numeri) e poiché non ci sono tipi diversi di numeri, sarebbe possibile parlare di 'trovare' un numero che soddisfi a certi requisiti. Cfr. Reed (1995), p. 68.

[52]Cfr. Euclide (1970), p. 430.

[53]Cfr. Euclide (1970), p. 862.

Entrambi questi significati sarebbero però da distinguere rispetto ad un diverso concetto più generale per il quale Euclide, come già Aristotele, è sprovvisto di un nome specifico: tale concetto è caratterizzato dalle proprietà espresse nelle nozioni comuni del I libro e nelle definizioni del V libro. La lettura che gli umanisti fanno del testo di Euclide sulla scorta del commento di Proclo è, come vedremo, proprio una lettura di questo genere: essi da un lato assumono il concetto di grandezza del V libro in un senso più generale rispetto al significato specifico di grandezza come lunghezza, area o volume, dall'altro individuano in tale concetto di 'grandezza in generale' quel genere sommo di cui parlava Aristotele negli *Analitici Secondi*.

Se nella *Metafisica* numeri e grandezze sono accomunate dal fatto di essere quantità, tuttavia la quantità di cui parla Aristotele non è la grandezza di Euclide. È vero che una caratteristica saliente della grandezza in generale è il poter essere posta uguale o disuguale ad altre grandezze (carattere che contraddistingue la quantità nelle *Categorie*), ma di quantità in Euclide non si parla quasi mai e ove lo si fa si ricorre al termine πηλικοτής e non all'aristotelico τὸ ποσόν. Le uniche due occorrenze del termine πηλικοτής si hanno tra l'altro proprio in riferimento al concetto di rapporto: nella definizione III del V libro il rapporto tra grandezze omogenee è presentato come un certo modo di comportarsi rispetto alla quantità e nella definizione 5* del libro 6 (ed. Heiberg, non tradotta nell'edizione di Heath) si parla di quantità di rapporti che danno un altro rapporto.[54] Se dunque si vuole ricercare in Euclide un termine per indicare il concetto di grandezza in generale tale termine non può essere certo πηλικοτής quanto piuttosto μέγεθος, che occorre frequentemente proprio nel libro V, spesso nel X (ove compare anche negli enunciati di definizioni e proposizioni), quattro volte nel libro XI (soltanto una volta in un enunciato e cioè nella Definizione 10) e due volte rispettivamente nei libri VI e XII (soltanto nelle dimostrazioni).

2.1.5 La ricezione della matematica euclidea nel Cinquecento

Rispetto all'aritmetica, alla geometria e alla teoria delle proporzioni contenute negli *Elementi* di Euclide, molti furono gli sviluppi delle scienze matematiche nel Medioevo e nel Rinascimento, e poi ancora nell'età moderna. Non tutti questi sviluppi erano però coerenti con la concettualizzazione della matematica come scienza del numero e come scienza delle grandezze. Men-

[54] «Λόγος εκ λόγων συνκέισθαι λέγεται, ὅταν αἵ τῶν λόγων πηλικοτητὲς εφ΄ἁυτὰς πολλαπλασιασθέισαι ποιώσι τινά», cioè «Un rapporto si dice composto di altri rapporti, quando le quantità di tali rapporti moltiplicate fra loro ne danno un altro».

tre infatti il numero e le grandezze (lunghezze, aree e volumi di corpi) erano secondo gli antichi[55] caratteri astratti dagli oggetti, nella matematica del Cinquecento, Seicento e Settecento fanno capolino nuovi oggetti, quali i numeri irrazionali, negativi e complessi, le nozioni di funzione, derivata, integrale: questi nuovi oggetti sono in effetti concetti creati dai matematici piuttosto che astrazioni dall'esperienza e ciononostante essi trovano un'utile applicazione al mondo fisico. Si impone dunque in generale un radicale ripensamento del concetto di oggetto della matematica e, qualora la matematica sia definita in base al suo oggetto di studio, una revisione della tradizionale definizione di matematica.

Se l'aritmetica è considerata, come già da Platone, scienza del numero ma anche scienza del calcolo, allora molti sviluppi algebrici sono compatibili con questa concezione dell'aritmetica.[56] Non poche difficoltà erano suscitate nel '500 dall'uso dei numeri negativi, che Cardano chiama numeri 'falsi', o dall'uso dei numeri immaginari, introdotti da Bombelli per la risoluzione generale delle equazioni cubiche alla fine del Cinquecento.[57] Questi ultimi, in particolare, hanno caratteristiche radicalmente diverse rispetto ai numeri consueti, perché non sono ordinati linearmente,[58] e quindi non sono facilmente interpretabili in termini di grandezze geometriche.[59]

Per comprendere in che modo cambia l'oggetto della matematica, occorre prendere le mosse dalla ricezione cinquecentesca degli *Elementi* di Euclide e del *Commento al I libro* di Proclo Diadoco: è infatti da una particolare interpretazione della teoria delle proporzioni unita all'idea di scienza generale cui già aveva fatto cenno Aristotele negli *Analitici Secondi* che si può comprendere in che modo le grandezze del V libro degli *Elementi* divengono quantità e con ciò stesso oggetto della matematica universale.

Gli *Elementi* di Euclide furono pubblicati dapprima in traduzione latina dall'arabo nel 1482 in una versione attribuita a Campano da Novara (XIII sec.), probabilmente elaborata sulla base della traduzione in latino di Adelardo di Bath (XII sec.), quindi Simon Grynaeus curò l'*editio princeps* in greco nel 1533, alla quale aggiunse il testo greco del *Commento al I libro* di

[55]Cfr. il paragrafo 2.1.1 a pagina 61.

[56]Non ci occupiamo in questa sede dei contributi all'algebra apportati dai medioevali, anche se la questione è di grandissimo interesse, perché dallo studio dei manoscritti degli abacisti medioevali emergerebbero elementi di forte novità e originalità. Cfr. Bottazzini (1998), p. 64.

[57]Cfr. G. Cardano, *Ars magna* [Artis magnae, sive de regulis algebricis liber unus], 1545 e R. Bombelli, *Opera su l'algebra*, 1572.

[58]Una *relazione d'ordine* $R \subseteq A \times A$, vale a dire una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva, è *totale o lineare*, quando è connessa, cioè quando tutti gli elementi dell'insieme A sono confrontabili rispetto alla relazione R: $\forall x \forall y (xRy \vee yRx)$.

[59]Cfr. Bottazzini (1998), pp. 71,76.

Proclo. Nel frattempo erano apparse due edizioni latine ad opera di Bartolomeo Zamberti nel 1505 e di Luca Pacioli nel 1509 che si richiamavano rispettivamente alla tradizione greca di Teone di Alessandria (commentatore di Euclide vissuto nel IV secolo) e alla tradizione latina di Campano. Un'edizione comparata delle due traduzioni latine fu pubblicata da Jacques Lefèvre d'Etaples a Parigi nel 1516.[60]

Le edizioni latine degli *Elementi* non corrispondevano alla versione degli *Elementi* che noi conosciamo (basata sull'edizione Heiberg), ma comprendevano perlopiù soltanto la parte enunciativa (definizioni, assiomi, postulati, proposizioni), mentre dimostrazioni e commenti erano spesso integrati dagli editori.[61] Proprio per questa ragione le prime edizioni latine del testo euclideo sono particolarmente adatte ad indagare il modo in cui gli umanisti hanno compreso e interpretato il testo di Euclide: particolare interesse ai nostri fini rivestono le considerazioni sui concetti di grandezza e quantità e sull'esistenza di una natura comune alle varie discipline matematiche in grado di costituire l'oggetto di una scienza generale.

Nelle edizioni degli *Elementi* condotte sulla tradizione latina di Campano il termine greco μέγεθος è tradotto con il vocabolo latino 'quantitas': in una nota Campano pone in relazione il concetto di quantità con la proprietà indicata da Aristotele dell'essere uguale o disuguale e assegna ad esso un significato più generale rispetto a quello di grandezza come lunghezza, area o volume.[62] Campano scrive infatti che la proporzione (proportio) è reperibile primariamente nella quantità e solo attraverso di essa in tutte le altre cose e che non vi può essere una proporzione fra certe cose senza che vi sia una proporzione simile tra delle quantità, come avrebbe detto giustamente Euclide, che definì la proporzione (proportio) ≪per mezzo del comportamento reciproco di due quantità dello stesso genere≫.[63] La scelta terminologica di

[60]Cfr. Crapulli (1969), pp. 14-5. Nel seguito faremo spesso riferimento al libro di Crapulli sulla *Mathesis universalis*, il cui primo capitolo è interamente dedicato alla ricezione nel Cinquecento degli *Elementi* di Euclide e all'interpretazione del *Commento* di Proclo ai fini della considerazione dell'esistenza e dell'oggetto di una scienza matematica comune. Benché l'interesse di Crapulli sia prevalentemente legato alla problematica di una *mathesis universalis*, la sua analisi dei testi degli umanisti è estremamente utile per comprendere l'occorrenza e il significato dei termini 'quantitas' e 'magnitudo' e per scoprire l'origine della definizione della matematica come scienza delle quantità.

[61]Le prime edizioni latine comprendevano inoltre soltanto alcuni dei XII libri degli *Elementi*; fino all'edizione di Commandino (1572) lo stesso Euclide era confuso con il filosofo Euclide di Megara, contemporaneo di Platone.

[62]Cfr. Crapulli (1969), p. 16.

[63]≪Quantitas autem proprium est secundum ipsam aequale vel inaequale dici ut vult Aristoteles in Praedicamentis: unde liquet proportionem primo in quantitate reperiri, et per ipsam in omnibus aliis: nec esse in aliquibus rebus proportionem, cui similis non sit in aliquibus quantitatibus: propter quod bene dixit Euclides, proportionem simpliciter esse

Campano è condivisa da Tartaglia nell'edizione in volgare del 1543 e da John Scheubel nell'edizione latina del 1550, che però fornisce una giustificazione di tale scelta. Scheubel dichiara infatti di aver preferito il termine 'quantitas' al termine 'magnitudo' perché il secondo include solo la quantità continua (linee, superfici, corpi), mentre le definizioni e le proposizioni del libro V possono essere mostrate sia per i numeri sia per le linee. Il termine 'quantitas' è cioè scelto da Scheubel esplicitamente perché è più generale e comprende non solo le quantità continue ma anche i *numeri*.[64]

L'esigenza di giustificare la scelta di tradurre il greco μέγεθος con il latino 'quantitas' è legata anche al fatto che nella edizione latina di Zamberti ispirata alla tradizione di Teone si usa invece il corrispondente termine latino 'magnitudo'. Questo uso si conserva anche nella traduzione di Commandino del 1572, ove però si ritiene che la teoria delle proporzioni abbia propriamente un oggetto più generale della 'magnitudo', e cioè la 'quantitas'. Commandino osserva in particolare che gli assiomi del I libro «sono comuni quasi a tutte le scienze matematiche» e che «il V libro è comune alla geometria, all'aritmetica, alla musica e a ogni disciplina matematica».[65] Poiché l'oggetto delle nozioni comuni e delle proposizioni del V libro, che sono comuni a tutte le discipline matematiche, è la quantità, la matematica in generale è scienza delle quantità, ove quest'ultima può essere sia continua sia discreta, cioè può comprendere sia grandezze sia numeri.

---

in quantitate, cum eam diffinivit per habitudinem duarum quantitatum eiusdem generis adinvicem.» *EUCLIDIS MEGARENSIS mathematici clarissimi Elementorum geometricorum libri XV. Cum expositione Theonis in priores XIII a Bartholomaeo Veneto latinitate donata, Campani in omnes, et Hypsiclis Alexandrini in duos postremos* ... Basileae per Ioannem Hervagium 1546, p. 103, cit. in Crapulli (1969), p. 16.

[64] «Licet hac voce [μέγεθος] continua tantum quantitas, sub qua nimirum lineae, superficies et corpora comprehensa sunt, intelligatur, unde sic quidem magnitudinis significationem habet: tamen quia omnia, quae in hoc libro, tam per definitiones quam etiam ⟨per⟩ propositiones, ab authore nobis prescribuntur, per numeros aeque ut per lineas ostendi possunt: non magnitudinis, sed quantitatis voce, sub qua, tanquam vocabulo generali, numeri etiam comprehenduntur, in versione usi sumus, id quod lector aequo animo ferat, praesertim cum in hoc authori nihil detrahatur, cumque etiam singula numeris declaraverimus.» *EUCLIDIS MEGARENSIS* ... *sex libri priores de geometricis principiis, graeci et latini, una cum demonstrationibus propositionum* ..., Basileae per Joannem Hervagium [1550], pp. 225-6, cit. in Crapulli (1969), pp. 17-8.

[65] «Axiomata fere omnia mathematicis scientiis communia sunt: neque solum in magnitudinibus, set et in numeris, et motibus, et temporibus vera esse deprehenduntur, aequale enim et inaequale, totum et pars, maius et minus, quantitatibus continuis, et discretis communia sunt. [...] In quinto libro propositum est de analogiis tractare; hic enim liber communis est geometriae, arithmeticae, musicae, et omni simpliciter mathematicae disciplinae» *EUCLIDIS Elementorum libri XV. Una cum scholiis antiquis. A Federico Commandino Urbinate. Nuper in latinum conversi, commentariisque quibusdam illustrati.* Pisauri [apud Camillum Francischinum] 1572, f.56v., cit. in Crapulli (1969), pp. 18-9.

L'idea che nella teoria delle proporzioni si possa scorgere una scienza matematica generale che si occupa sia delle grandezze sia dei numeri è connessa alla lettura del *Commento al I libro degli Elementi* di Proclo. Tuttavia, mentre in Proclo la trattazione generale è la filosofia prima o scienza dell'essere in quanto essere, in Commandino si ha l'esplicita considerazione della matematica come scienza delle quantità: egli scrive infatti che «tutte le matematiche trattano di quantità».[66] D'altra parte, come si può vedere analizzando il primo Libro del *Commento* di Proclo, non solo le nozioni comuni e le definizioni e proposizioni della teoria delle proporzioni ma molti altri elementi sono individuati da Proclo come tratti comuni a tutte le discipline matematiche.

Il *Commento al libro I degli Elementi di Euclide* di Proclo Diadoco (V sec.) fu pubblicato per la prima volta nell'edizione greca di Grynaeus nel 1533 e in traduzione latina nel 1560 a cura di Francesco Barozzi, che attinse anche ad altri manoscritti emendando il testo greco.[67] Il *Commento* è diviso in quattro libri: il primo, il solo di cui ci occuperemo, è un prologo generale sulla natura della matematica, il secondo è un'introduzione alla geometria, alla sua storia e agli *Elementi* di Euclide e contiene anche un commento alle definizioni; il terzo e il quarto libro comprendono il commento ai postulati, agli assiomi e alle proposizioni.

Il primo libro del *Commento* di Proclo si apre con la teoria platonica della natura intermedia degli enti matematici, cui pertiene la διάνοια o conoscenza discorsiva, e con la ripresa dell'idea pitagorica secondo cui gli enti matematici sarebbero il prodotto dei due principi del limite e dell'illimitato. Come è possibile individuare due principi che sovrintendono alle matematiche, così Proclo cerca i teoremi comuni alle discipline matematiche e li individua proprio nelle proposizioni della teoria delle proporzioni, vale a dire nei «teoremi relativi all'eguale e al diseguale in senso generale e comune, non in quanto questi si trovano nelle figure o nei numeri o nei movimenti, ma in quanto l'uno e l'altro di essi hanno per se stessi una qualche natura loro comune e offrono di sè una conoscenza più semplice.»[68] Il termine 'teorema' non si riferisce qui soltanto alle proposizioni ma include — come osserva Crapulli — anche i principi da cui tali proposizioni sono dimostrate: definizioni, po-

[66]«Mathematicae omnes circa quantitatum versantur, atque illius praesidio quidquid moliuntur efficiunt.» F. Commandino, Prolegomena, in *EUCLIDIS Elementorum libri XV*, cit. Cfr. Crapulli (1969), p. 18.

[67]*PROCLI DIADOCHI Lycii philosophi platonici ac mathematici probatissimi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarium ad universam mathematicam disciplinam principium eruditionis tradentium libri IIII. A Francisco Barocio patricio veneto summa opera, cura, ac diligentia desiderabantur aucti: primum iam romanae linguae venustate donati, et nunc recens editi.* ...Patavii excudebat Gratiosus Perchacinus 1560, cit. in Crapulli (1969), p. 21.

[68]Cfr. Proclo (1533), p. 30.

stulati e assiomi.[69] Proclo non precisa quale sia la *natura comune* a figure, numeri, movimenti: benché si possa individuare un passo del Commento nel quale numero e grandezza sono unificati nella quantità,[70] vi sono due ragioni che impediscono di ritenere che per Proclo la matematica in generale fosse scienza della quantità.

In primo luogo ciò che è comune alle discipline matematiche non sono solo le proposizioni circa l'uguale e il disuguale ma anche le considerazioni sulla bellezza e sull'ordine, i metodi dell'analisi (la via che parte dalle cose conosciute per arrivare alle cose che si ricercano) e della sintesi (il passaggio dalle cose cercate alle cose conosciute), la similitudine dei rapporti tra cose, infine le potenze di cui parla Platone nella *Repubblica*.[71] In secondo luogo la scienza che studia le proprietà comuni a numeri, grandezze, movimenti non indaga le cose che sono comuni a tutte le quantità, ma considera l'essenza e l'esistenza unica e sola di tutte le cose esistenti: è la scienza dell'essere in quanto essere, la filosofia prima.[72] Se dunque in Proclo c'è una scienza generale, questa non è la *mathesis universalis* degli Umanisti, che tiene conto solo delle proposizioni intorno all'uguale e al disuguale (cioè della teoria delle proporzioni) ed è scienza di un genere più ristretto: la quantità.

Riassumendo, potremmo dire che nel Cinquecento diverse sono le interpretazioni della teoria delle proporzioni di Euclide e del commento di Proclo

[69]Cfr. Crapulli (1969), pp. 28-9.

[70]≪Axiomata quaedam sunt propria arithmeticae, alia vero propria geometriae, nonnulla denique ambabus communia [...] quae eidem sunt aequalia: illa inter se sunt aequalia, ceteraque huius generis sunt ambabus scientiis communia. Utraque vero hisce utitur: quatenus res subiecta postulat. utpote geometria quidem in magnitudinibus, ar arithmetica in numeri. Simili modo postulata quaedam sunt scientiarum propria, quaedam vero communia [...] quantitatem in infinitum augere, commune est ambabus postulatum. propterea quod hoc et numerus et magnitudo pati possunt≫, cit. in Crapulli (1969), p. 25.

[71]≪E certamente anche la bellezza e l'ordine sono comuni a tutte le matematiche, come anche la via che parte dalle cose conosciute verso quelle cercate, e il passaggio da queste a quelle, i quali procedimenti si chiamano analisi e sintesi. La similitudine poi e la dissimilitudine dei rapporti non mancano a nessuna delle specie matematiche; ché le figure noi le diciamo alcune simili, altre dissimili, e allo stesso modo i numeri, gli uni simili gli altri dissimili. E tutte le cose che si riferiscono alle potenze sono attinenti a tutte egualmente le matematiche, siano esse quadrati o radici.≫ Cfr. Proclo (1533), p. 30. Proclo fa riferimento al passo della *Repubblica* in cui Platone introduce il numero nuziale per mezzo di una serie di potenze e numeri radicali, cioè in senso generale per mezzo di una progressione dimensionale che dalla linea porta alla superficie e al cubo (e dal numero porta alla potenza quadratica e a quella cubica). Cfr. *Repubblica*, VIII 546b, in Platone (1991), p. 1264.

[72]≪Questa scienza infatti non ritiene che sia suo compito indagare le cose riguardanti i numeri in particolare, né quelle che sono comuni a tutte le quantità, ma considera l'essenza e l'esistenza unica e sola di tutte le cose esistenti; per questo è la più comprensiva di tutte le scienze e tutte ricevono i principi da essa.≫ Cfr. Proclo (1533), p. 32.

alle nozioni comuni. Si afferma tuttavia l'idea che la prima riguardi numeri e grandezze e dunque quantità continue e discrete, e che la scienza generale di cui parla Proclo in riferimento alla teoria delle proporzioni sia una matematica universale o generale che tratta delle quantità. In forza di questa interpretazione degli *Elementi* sulla base congiunta del *Commento* di Proclo e del passo degli *Analitici Secondi* di Aristotele citato nel paragrafo 2.1.2 ha origine una definizione di matematica come scienza delle quantità, che si trova — come mostra Crapulli — nel citato Piccolomini e poi in Catena, in van Roomen, in Alsted, ma che è contestata da altri autori, quali Zabarella e Biancani, che hanno una concezione più complessa (e più fedele al testo aristotelico) della quantità.[73] La definizione di matematica come scienza delle quantità è frutto di diversi elementi:

- la convinzione che vi sia una scienza matematica generale comprendente aritmetica e geometria ma avente un proprio oggetto (qui svolge un ruolo di primo piano la lettura del Commento di Proclo fatta dagli umanisti);

- l'identificazione delle proposizioni della teoria delle proporzioni con i teoremi comuni ad aritmetica e geometria e dunque caratteristici di questa scienza generale (qui giocano un ruolo fondamentale il citato passo degli *Analitici Secondi* di Aristotele e l'interpretazione del primo e del quinto libro degli *Elementi*);

- l'identificazione dell'oggetto della nuova scienza con la grandezza in senso generale o con la quantità (qui è determinante la traduzione latina del μέγεθος euclideo con 'quantitas' anziché con 'magnitudo').

Vedremo ora come gli sviluppi dell'algebra e la nascita del concetto di quantità numerica abbiano rafforzato la tendenza a considerare la matematica nel suo complesso come scienza delle quantità o scienza delle grandezze in generale e quale significato abbia via via assunto il termine quantità soprattutto alla luce dei nuovi rapporti che si instaurano tra geometria ed aritmetica, tra grandezze continue e numeri (Viète e Stevin). Contemporaneamente vedremo come la lettura del Commento di Proclo si presti ad attribuire alla *matematica generale* la stessa forza conoscitiva della filosofia prima divenendo algebra universale (Descartes, Wallis).

[73] Cfr. Crapulli (1969), p. 146 ss.

2.2 L'algebra

Abbiamo visto che gli umanisti definiscono la matematica nel suo complesso come scienza delle grandezze in generale o delle quantità. Tale definizione resta pressoché invariata nei secoli successivi, assumendo la connotazione di 'definizione tradizionale': essa però non è tradizionale se con tale termine si vuole significare che la sua origine risale alla matematica antica. La definizione diviene tradizionale in seguito, quando all'interno delle diverse interpretazioni cinquecentesche degli *Elementi* diviene predominante quella che identifica la scienza generale di Proclo con la la teoria delle proporzioni, che ha a proprio oggetto qualcosa di più generale dei numeri e delle grandezze geometriche continue, vale a dire le grandezze in generale o quantità, le cui proprietà sono espresse dalle nozioni comuni e dalle definizioni del V libro e consistono fondamentalmente nel poter essere poste uguali o disuguali.

Nonostante la definizione rimanga la stessa il concetto di 'grandezza generale' di cui si parla continua a variare significato, talvolta solo impercettibilmente, talvolta in maniera significativa nelle varie epoche e nei vari autori. Ad esempio, tra Cinquecento e Seicento per grandezze non si intende più un genere superiore sotto al quale ricadono numeri e grandezze geometriche, come avveniva in Aristotele (anche se di fatto mancava un nome per tale genere), ma si intende un nuovo concetto simbolico le cui proprietà sono mutuate dalle proprietà delle operazioni aritmetiche sui numeri. Viète, Stevin, Wallis, Descartes rivolgono l'attenzione al rapporto tra aritmetica e geometria all'interno della matematica generale: come associare numeri a tutte le grandezze geometriche risolvendo il problema dell'incommensurabilità? come definire operazioni e relazioni in modo generale così da poterle applicare sia ai numeri sia alle grandezze continue? come interpretare la funzione attribuita da Proclo alla scienza generale di 'conoscenza dell'essere in quanto essere'?

2.2.1 L'analitica speciosa di Viète

La ricerca di un'unificazione di aritmetica e geometria in un'unica scienza generale è perseguita rivolgendo l'attenzione non tanto alla ricerca di una categoria di oggetti, alla ricerca cioè di quel genere sommo di cui parlava Aristotele, quanto alla individuazione di un metodo generale con cui rendere accessibili gli oggetti aritmetici e geometrici. È interessante a questo proposito analizzare brevemente il percorso secondo il quale François Viète (1540-1603) arriva alla costruzione di un'analitica generale o 'speciosa', vale a dire di un'algebra pura e generale applicabile sia alle grandezze geometriche sia ai numeri, senza con ciò riunire grandezze e numeri in un'unico genere ontologico.

Nell'opera *In artem analyticen Isagoge*, pubblicata nel 1591, Viète presenta le caratteristiche essenziali della sua algebra simbolica, alle quali perviene attraverso un'analisi dell'aritmetica di Diofanto.[74] Viète assume il concetto di analisi di Pappo (III sec.), che ha carattere geometrico, e lo pone in relazione con la procedura adottata da Diofanto nell'*Arithmetica*.[75] Il metodo dell'analisi di Pappo è esposto all'inizio del settimo libro della sua *Synagoge* o *Collezione matematica*, che riporta le teorie presentate nel libro *Tesoro dell'analisi*, che non ci è pervenuto. Pappo distingue propriamente un'analisi *teorica zetetica* (concernente il cercare in quanto tale) e un'analisi *problematica*, in cui ≪si ammette che una proposizione sia nota; poi mediante conseguenze che ne scaturiscono e che sono ammesse come vere, si arriva a qualche cosa di concesso≫.[76]

L'analisi (*ars analytica*) — scrive Viète — è un metodo di ricerca della verità in matematica scoperto per la prima volta da Platone e che deve il proprio nome a Teone di Alessandria: l'*analisi* è un processo che ha inizio con l'assunzione di ciò che si cerca come concesso per arrivare tramite *consequentia* ad una verità, mentre la *sintesi* al contrario è l'assunzione di ciò che è concesso per arrivare tramite *consequentia* a ciò che si cerca.[77] Mentre l'analisi degli antichi era duplice (zetetica e poristica), Viète stabilisce una terza forma di analisi, che chiama esegetica o retica: l'analisi *zetetica* è la procedura con cui si trova l'equazione o la proporzione della grandezza cercata ad altre grandezze che sono date; l'analisi *poretica* è la procedura con cui si esamina la verità del teorema per mezzo dell'equazione; l'analisi *retica* o *esegetica* è la procedura con cui per mezzo dell'equazione o proporzione si esibisce la grandezza cercata.[78] L'arte analitica con le sue tre funzioni è definita da

[74] Cfr. Viète (1591).

[75] Cfr. Klein (1934), p. 155 ss. Il libro *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* di Jacob Klein è interamente dedicato al confronto tra il concetto di numero dell'età classica e il nuovo concetto di numero che si sviluppa nell'età moderna ad opera di Viète, Stevin, Descartes, Wallis.

[76] Pappo, *Synagoge*, cap. VII, cit. in E. De Angelis, *Il metodo geometrico nella filosofia del Seicento*, Ist. Fil. Univ. Pisa, Le Monnier, Firenze, 1964, p.122. Cfr. anche Freguglia (1989), p. 50, nota 3 e Freguglia (1988), cap. 4.

[77] ≪Est veritatis inquirendae via quaedam in Mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, a Theone nominata Analysis, & ab eodem definita, Adsumptio quaesiti tanquam concessi per consequentia ad verum concessum. Ut contra Synthesis, Adsumptio concessi per consequentia ad quaesiti finem & comprehensionem.≫ Cfr. *Isagoge*, in Viète (1591), p. 1.

[78] ≪[...] consentaneum est, ut sit Zetetice qua invenitur aequalitas proportiove magnitudinis, de qua quaeritur, cum iis quae data sunt. Poristice, qua de aequalitate vel proportione ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegetice, qua ex ordinata aequa-

Viète nel suo complesso come «Doctrina bene inveniendi in Mathematicis», come dottrina volta alla soluzione di qualunque problema, come testimonia la conclusione dell'*Isagoge*, che afferma che il compito dell'*ars analytica* è «nullum non problema solvere».[79] L'analisi teorica e quella problematica di Pappo possono essere rispettivamente assimilate all'analisi zetetica e a quella poretica di cui parla Viète.

L'analisi permette di trovare ed esibire grandezze, ove il termine grandezza è espresso dal latino 'magnitudo': qual è il significato di 'magnitudo' in Viète? Egli svincola la nozione di analisi, analoga a quella di Pappo per quanto riguarda la zetetica e la poretica, dall'applicazione meramente geometrica che Pappo stesso ne faceva, ritenendo al contrario che l'*Arithmetica* di Diofanto testimoni la presenza nella matematica antica di una procedura (connessa alla teoria eudossiana delle proporzioni) non limitata né ai numeri né alle grandezze. Per mostrare però in che modo l'analisi possa essere altrettanto aritmetica che geometrica, occorre indagare in che modo il termine 'grandezza' assuma in Viète un significato più generale rispetto a quello di grandezza geometrica (lunghezza, area, volume). Ciò è possibile grazie all'introduzione di un nuovo concetto simbolico di numero, che Viète designa con il nome di *specie*, e che è strettamente connesso all'εἶδος diofanteo. L'analitica zetetica ha infatti un procedimento proprio, che applica la logica non ai numeri ma alle specie per mezzo della logistica speciosa: proprio grazie al ricorso alle specie, vale a dire a concetti numerici indeterminati o simbolici, la logistica di Viète aspira ad avere una maggiore efficacia nel confronto delle grandezze.[80]

Il concetto di *specie* avrebbe origine, secondo l'interessante analisi di Jacob Klein, da una reinterpretazione della procedura diofantea in cui si possono distinguere tre momenti principali, due dei quali rivestono un'importanza fondamentale ai fini della nostra ricerca: (1) il confronto tra il ruolo dell'analisi in geometria e il ruolo attribuito ad essa nell'aritmetica diofantea; (2) l'uso di εἶδος in Diofanto.[81]

In *aritmetica* l'analisi procede da assunzioni generali che permettono di formulare l'equazione o la proporzione, quindi prosegue con la trasformazione dell'equazione in forma canonica e si conclude con la determinazione di nu-

litate vel proportione ipsa de qua quaeritur exhibetur magnitudo.» Cfr. *Isagoge*, in Viète (1591), p. 1.

[79]Cfr. *Isagoge*, in Viète (1591), p. 1 e p. 12.

[80]«Forma autem Zetesin ineundi ex arte propria est, non jam in numeris suam Logicam exercente, quae fuit oscitantia veterum Analystarum: sed per Logisticen sub specie noviter inducendam, feliciorem multo & potiorem numerosa ad comparandum inter se magnitudines, [...]» Cfr. *Isagoge*, in Viète (1591), p. 1.

[81]Cfr. Klein (1934), p. 161 ss.

meri specifici che soddisfano l'equazione. In *geometria* vi sono due momenti distinti: l'analisi corrisponde alla ricerca delle assunzioni generali, mentre la sintesi corrisponde alla costruzione della figura e alla dimostrazione degli assunti generali per mezzo dei risultati particolari ottenuti con la costruzione. Viète confronta i due procedimenti aritmetico e geometrico osservando che l'ultimo passo dell'analisi aritmetica corrisponde al primo passo della sintesi geometrica, cioè alla costruzione di una figura particolare per cui siano valide le assunzioni generali.

Il parallelismo che egli scorge così tra il procedimento dell'aritmetica e quello della geometria lo induce a ritenere *sintetico* il momento aritmetico della determinazione delle soluzioni delle equazioni e a considerare come *analitico* (in particolare come momento finale dell'analisi aritmetica) il momento in cui l'equazione si trova in forma canonica e contiene simboli in parte determinati dalle condizioni implicite nell'equazione e in parte indeterminati in quanto non sono numeri specifici. Benché l'uso di lettere ricorra già in Diofanto, ove egli analizza problemi di carattere generale con soluzioni di carattere generale che lasciano l'oggetto indeterminato, tali lettere (denotanti numeri indeterminati che soddisfano particolari condizioni) sono tuttavia soltanto un momento preliminare alla soluzione di qualche altro problema; Diofanto, infatti, ricerca sempre dei numeri completamente determinati e in questo non si discosta dai libri aritmetici di Euclide.[82] In Viète invece le lettere che esprimono numeri indeterminati compaiono come momento finale di un procedimento di analisi aritmetica e corrispondono ad un equivalente stadio dell'analisi geometrica. L'ultimo stadio dell'analisi aritmetica (retica) è il calcolo della grandezza aritmetica (che viene così espressa nel linguaggio), così come l'ultimo momento dell'analisi geometrica (esegetica) è la costruzione della grandezza geometrica in questione, che così viene esibita alla vista.[83] I simboli che compaiono in questa fase dell'analisi devono perciò essere numeri anche se non sono numeri di alcunché. Il numero, che per i Greci era *Anzahl*, aggregato di cose (numero di cose dello stesso genere), diviene così *Zahl* ossia un concetto simbolico che sta per certi numeri determinati. Questo concetto simbolico di numero, espresso da un segno letterale, è sviluppato da Viète attraverso una rielaborazione del concetto diofanteo di εἶδος.

Per Diofanto εἶδος è un proprietà comune a più numeri che fa sì che essi appartengano ad una stessa classe. Così ad esempio tutte le centinaia hanno lo stesso εἶδος (almeno sotto il rispetto per cui sono centinaia; sotto altri rispetti possono anche appartenere a εἴδη differenti) che può essere espresso da un simbolo k. Un esempio è fornito dai numeri reciproci, caratterizzati

[82]Cfr. Klein (1934), pp. 134-5.
[83]Cfr. Klein (1934), p. 167.

dal fatto che, se moltiplicati per l'omonima parte frazionaria dell'unità danno 1 ($x\frac{1}{x} = 1$). Questo significa che un numero può essere in parte determinato dalla sua εἶδος anche se è indeterminato. Ciò che del numero si può esprimere per mezzo degli εἴδη sono proprietà che ne esprimono certe relazioni reciproche. Viète adotta il concetto diofanteo di εἶδος, espresso dal termine *specie*, estendendo il calcolo fatto sui numeri alle specie: è questa la *logistica speciosa*, un calcolo fatto in termini di specie.[84]

Viète estende il concetto diofanteo di εἶδος perché le *specie* o *forme delle cose*[85] rappresentano grandezze generali, sia numeri sia grandezze geometriche, e mantengono un legame con entrambe attraverso le proprietà delle equazioni e delle proporzioni. Viète ritiene infatti che ogni equazione sia soluzione di una proporzione e che corrispondentemente ogni proporzione sia la costruzione di un'equazione.[86]

> L'arte analitica assume come dimostrati i più noti simboli delle equazioni e delle proporzioni che si trovano negli *Elementi*, quali:
> 1. Il tutto [la somma] è uguale alle sue parti.
> 2. Cose uguali alla stessa cosa sono uguali tra loro.
> 3. Se cose uguali sono aggiunte a cose uguali, le somme (*tota*) sono uguali.
> 4. Se cose uguali sono sottratte a cose uguali, i resti (*residua*) sono uguali.
> 5. Se cose uguali sono moltiplicate a cose uguali, i prodotti (*facta*) sono uguali.
> 6. Se cose uguali sono divise per cose uguali, i quozienti (*orta*) sono uguali.
> 7. Le cose che sono proporzionali direttamente sono proporzionali inversamente e in modo alternato.
> 8. Se proporzionali simili sono sommati a proporzionali simili, le somme (*tota*) sono proporzionali.
> 9. Se proporzionali simili sono sottratti a proporzionali simili, i resti (*residua*) sono proporzionali.
> 10. Se proporzionali sono moltiplicati per proporzionali, i prodotti (*facta*) sono proporzionali. [...]
> 11. Se proporzionali sono divisi per proporzionali, i quozienti (*orta*) sono proporzionali. [...]

[84]≪Logistice numerosa est quae per numeros, Speciosa quae per species seu rerum formas exhibetur, ut pote per Alphabetica elementa.≫ Cfr. *Isagoge*, cap. 4, in Viète (1591), p. 4.

[85]Si noti che le specie sono anche chiamate *forme* delle cose: vedremo che l'uso del termine 'forma' assumerà un ruolo essenziale in Graßmann.

[86]≪Itaque Proportio potest dici constitutio aequalitatis; Aequalitas, resolutio proportionis.≫ *Isagoge*, cap. 2, in Viète (1591), p. 2.

> 12. Né l'equazione né il rapporto sono modificati da un comune moltiplicatore o divisore.
> 13. Il prodotto per singoli segmenti è uguale al prodotto per la somma (*tota*).
> 14. Prodotti o quozienti ottenuti per una successione di grandezze (*continue sub magnitudinibus*) sono uguali qualunque sia l'ordine in cui è fatta la moltiplicazione o divisione. [...]
> 15. Se vi sono tre o quattro grandezze e il risultato della moltiplicazione degli estremi è uguale alla moltiplicazione del medio per se stesso o al prodotto dei medi, allora tali grandezze sono proporzionali.
> E viceversa:
> 16. Se vi sono tre o quattro grandezze e la prima sta alla seconda come la seconda o una terza sta ad un'altra, allora il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi.
> Così una proporzione può essere detta composizione (*constitutio*) di un'equazione e un'equazione risoluzione (*resolutio*) di una proporzione.

Per confrontare i symbola di Viète con le proposizioni di Euclide, traduciamo i *symbola* in notazione moderna:[87]

1. $a = b + c$
2i. $a = c \wedge b = c \quad \rightarrow \quad a = b$
2ii. $a = b \quad \rightarrow \quad b = a$
3. $a = b \quad \rightarrow \quad a + c = b + c$
4. $a = b \quad \rightarrow \quad a - c = b - c$
5. $a = b \quad \rightarrow \quad ac = bc$
6. $a = b \quad \rightarrow \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$
7. $a : b = c : d \quad \rightarrow \quad b : a = d : c \ \wedge \ a : c = b : d$
8. $a : b = c : d \quad \rightarrow \quad a + c : b + d = a : b$
9. $a : b = c : d \quad \rightarrow \quad a - c : b - d = a : b$
10. $a : b = c : d \ \wedge \ e : f = g : h \quad \rightarrow \quad ae : bf = cg : dh$
11. $a : b = c : d \ \wedge \ e : f = g : h \quad \rightarrow \quad \frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$
12i. $ma : mb = a : b$
12ii. $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = a : b$
13. $ab + ac = a(b + c)$
14. $ab = ba \ \wedge \ \frac{(\frac{a}{b})}{c} = \frac{(\frac{a}{c})}{b}$

[87]Come in Euclide, la proprietà simmetrica dell'uguaglianza sarebbe implicata dalla formulazione plurale della prima nozione comune: pertanto abbiamo sdoppiato il *symbolum* 2 in due parti. Nei *symbola* 6 e 12ii se consideriamo lo 0 come un numero o come la grandezza nulla dovremmo aggiungere rispettivamente le condizioni $c \neq 0$ e $m \neq 0$. Si veda Klein (1934), che contiene in appendice una traduzione inglese dell'*Isagoge* con anche una traduzione simbolica di molte proposizioni.

15i. $ab = cd \quad \rightarrow \quad a : c = d : b$
15ii. $ab = c^2 \quad \rightarrow \quad a : c = c : b$
16i. $a : b = c : d \quad \rightarrow \quad ad = bc$
16ii. $a : b = b : c \quad \rightarrow \quad ac = b^2$

La logistica speciosa (l'algebra) è dunque contemporaneamente teoria delle equazioni e teoria delle proporzioni: i suoi principi, che Viète chiama ≪Symbola aequalitatum & proportionum≫ sono tratti dalle nozioni comuni del I libro, dalle definizioni e dai teoremi del V libro, dai libri geometrici II e VI e dai libri aritmetici VII e VIII.[88] A questo proposito riportiamo nella tabella 2.1 l'interessante corrispondenza istituita da Jacob Klein tra i *symbola* dell'*Isagoge* e le definizioni e proposizioni degli *Elementi*. Si noti che il *symbolum* 1 appare nell'edizione di Euclide curata da Clavius come nozione comune (nella tabella abbreviata in NC) XIX; il *symbolum* 11 è il converso del *symbolum* 10.[89]

Isagoge	*Elementi*	*Isagoge*	prefig. negli *Elementi*
2	I. NC I	5	I.NC V
3	I. NC II	6	I.NC VI
4	I. NC III	8	V.12
7	V. Def.13,12, Prop.16	9	V.19
10	VI.23, VIII.5	12	VII,17
13	II.1	14	VII,16
15-16	VI.16, 17, VII,19		

Tabella 2.1: Corrispondenza tra *Elementi* e *Isagoge*

Le specie di Viète sono oggetti di una disciplina matematica generale che non è identificabile né con l'aritmetica né con la geometria; tuttavia tale disciplina è collegata alla logistica numerosa e pertanto le fondamentali regole sono, oltre alle proposizioni della teoria delle proporzioni, le regole usuali del calcolo aritmetico: addizione, sottrazione, moltiplicazione. Le specie di Viète non sono né ontologicamente separate e indipendenti come nella concezione platonico-pitagorica né ottenute per astrazione come in Aristotele: la nozione di specie è simbolica e fornisce un concetto generale di numero (numero algebrico) nel quale possono essere compresi i numeri razionali e irrazionali. Questo concetto di numero è anche capace di superare la distinzione tra la continuità delle grandezze geometriche e la natura discreta dei numeri (divisibili in unità discrete) poiché è applicabile sia a grandezze sia a numeri.[90]

[88] Cfr. Klein (1934), p. 160.
[89] Cfr. Klein (1934), p. 263, nota 226.
[90] Cfr. Klein (1934), p. 178.

Che la logistica di Viète debba valere non solo per i numeri ma anche per le grandezze geometriche è d'altra parte testimoniato dall'enunciazione, nel terzo capitolo dell'*Isagoge*, di una lunga serie di condizioni di omogeneità per le specie. Se per specie Viète intendesse soltanto numeri, allora non sarebbe necessario introdurre il requisito della omogeneità, perché i numeri sono tutti tra loro omogenei.

2.2.2 Scienza delle quantità: numeri e grandezze

La logistica speciosa di Viète assume un'importanza particolare dal nostro punto di vista perché mostra molto bene tanto il progressivo ampliarsi del concetto di 'magnitudo', che nella logistica è usato per esprimere un concetto generale sotto al quale cadono sia le specie sia le grandezze geometriche, quanto il progressivo coincidere con il concetto di 'quantitas'. Se infatti Viète non usa il termine quantità per indicare l'oggetto dell'*ars analytica*, che tratta piuttosto delle *magnitudines* in generale, van Schooten nel suo commento all'*Isagoge* del 1646 non esita a interpretare le grandezze di Viète come *quantità* e a caratterizzare la matematica in generale attraverso l'oggetto della teoria delle equazioni e delle proporzioni, cioè come *scienza delle quantità*.[91] La *mathesis universa* di cui parla van Schooten, influenzato dalla concezione cartesiana di cui parleremo tra poco, è scienza delle relazioni e delle proporzioni che si trovano nei diversi oggetti, cioè scienza delle quantità.[92]

L'interpretazione del concetto di 'magnitudo' di Viète come 'quantitas' rischia però di confondere la posizione di Viète con altre concezioni che mirano a considerare unitario l'oggetto della scienza generale. L'arte analitica di cui parla Viète è una procedura applicabile sia alle grandezze geometriche sia ai numeri, ma ciò non comporta in alcun modo che il concetto di numero

[91]≪[...] quandoquidem id omne, quod sub contemplationem Matheseos cadit, quantitatis nomine semper gaudet, illudque demum per aequalitatem aut proportionem elucescit.≫ F. van Schooten, *Notae in Isagogen*, in Viète (1591), p. 545.

[92]≪[...] unde demum concludit speciosam istam Analysin, triplicem Zetetices, Poristices, & Exegetices formam indutam, speciosum quoque solummodo sibi vendicare Problema OMNE IN QUO DE QUANTITATUM AEQUALITATE VEL PROPORTIONE INQUIRITUR, PROBLEMA UTCUNQUE SOLVERE. In quo si tollas vocem 'utcunque', quam nescio qua ratione motus apposuerit, non video quid universalius Problema exiquiras: cum universa Mathesis non nisi doctrina quantitatis sit dicenda: adeo ut omne id, quicquid ibidem solvendum proponitur (ut supra dictum fuit) non nisi in quantitaum aequalitate vel proportione aliqua explicanda, consistat. Quod etiam summi ingenii Vir Renatus des Cartes, in dissertatione de methodo recte regendae rationis, scribit se circa Mathematicas Scientias in genere animadvertisse, nimirum, etiamsi ille circa diversa objecta versentur, in hoc tamen convenire omnes, quod nihil aliud esaminent quam relationes sive proportiones quasdam, quae in iis reperiuntur.≫ F. van Schooten, *Notae in Isagogen*, in Viète (1591), pp. 545-6.

si fonda con il concetto di grandezza geometrica. Se le procedure algebriche sono comuni, diversa è l'applicazione nel caso dell'aritmetica e della geometria, soprattutto per quanto riguarda il momento finale dell'analisi: il calcolo si applica ai numeri se si deve calcolare la grandezza aritmetica, si applica alle lunghezze, alle aree e ai volumi se si deve esibire la grandezza geometrica e le diverse modalità di applicazione riflettono la diversità degli oggetti ai quali si applica.[93]

La creazione dell'algebra e il concetto simbolico di numero non sono dunque di per sé sufficienti a garantire la fusione tra aritmetica, geometria e algebra. La logistica speciosa di Viète da un lato approfondisce il parallelismo tra aritmetica e geometria, dall'altro mantiene però una netta separazione tra le due discipline. Permangono alcuni fattori che ostacolano la fusione tra aritmetica, geometria e algebra e soprattutto l'applicazione di numeri alla geometria: ad esempio l'inadeguatezza dei numeri per esprimere le grandezze geometriche (infatti per le cosiddette grandezze irrazionali occorrerebbero numeri che non sono esprimibili come rapporto rispetto all'unità), così come l'interpretazione dimensionale delle operazioni in geometria (mentre è adimensionale in aritmetica). Per applicare i numeri alla geometria è necessario nel '500 o rinunciare ad una rappresentazione esatta accontentandosi di una rappresentazione approssimata o estendere il sistema dei numeri razionali con dei nuovi numeri, che però costituiscono entità non definite. Invece di introdurre i numeri in geometria, gli algebristi, tra cui Viète, ridefiniscono le operazioni algebriche in modo che esse si applichino alle grandezze geometriche. Pertanto resta vitale il problema delle costruzioni geometriche e il confronto con le equazioni algebriche stimola l'ampliamento di nuovi metodi di costruzione (oltre a quelli con riga e compasso) e l'analisi della loro legittimità, così come favorisce il sorgere di nuove classificazioni dei problemi geometrici in base ai corrispondenti gruppi di equazioni da risolvere.[94]

L'*Arithmétique* di Stevin

Simon Stevin (1548-1620) pubblica nel 1585 l'*Arithmétique*, in cui argomenta due tesi significative per istituire una perfetta corrispondenza tra numeri e grandezze geometriche: l'unità è un numero; il numero non è una quantità

[93] ≪Ordinate Aequatione magnitudinis de qua quaeritur, ῥετικὴ ἢ ἐξηγητική, quae reliqua pars Analytices censenda est, atque potissimum ad artis ordinationem pertinere, (cum reliquae duae exemplorum sint potius quan praeceptorum, ut Logicis jure concedendum est) suum exercet officium; tam circa numeros, si de magnitudine numero explicanda quaestio est, quam circa longitudines, superficies, corporave, si magnitudinem re ipsa exhiberi oporteat.≫ *Isagoge*, cap. VII, in Viète (1591), p. 10. Cfr. Klein (1934), p. 167.

[94] Cfr. Bos (2001).

discontinua. Stevin critica il concetto greco di numero come aggregato numerato e definisce il numero come ciò per mezzo di cui si spiega la quantità di ciascuna cosa: in base a tale definizione critica l'idea che l'unità non sia un numero ma soltanto il principio del numero.[95] Ecco il suo argomento: la parte è della stessa materia del tutto; l'unità è parte di una moltitudine di unità, quindi l'unità è della stessa materia di una moltitudine di unità; ma la materia di una moltitudine di unità è numero, dunque la materia dell'unità è numero. E chi nega quest'argomento fa come chi nega che un pezzo di pane sia pane.[96]

Stevin, appoggiandosi sulla notazione simbolica e sulle cifre arabe, mostra che principio del numero non è l'unità ma lo zero (ad esempio aggiungendo 0 a 6 otteniamo un nuovo numero 60!). L'estensione continua di una linea è paragonata ad un arbitrario allineamento di nuove cifre che può essere continuato senza fine producendo sempre nuovi numeri. Questa posizione conduce Stevin ad affermare esplicitamente che il numero non è affatto una quantità discontinua.[97] L'antica concezione dei numeri come enti discreti è basata sull'indivisibilità dell'unità. Stevin sostiene al contrario che l'unità è divisibile appellandosi a Diofanto che in alcuni dei suoi problemi avrebbe richiesto proprio la divisione dell'unità.[98] Le parti dell'unità sarebbero a loro volta numeri, proprio come le parti della linea sono a loro volta linee, e precisamente numeri frazionari che decrescono all'infinito. In questo modo ha luogo una corrispondenza perfetta tra grandezze geometriche e numeri:

> Come vi è dunque una generale comunanza tra grandezza e numero rispetto alle altre cose, così anche in questo, e cioè a una grandezza continua corrisponde il numero continuo che ad essa si attribuisce e se poi la grandezza riceve una qualche discontinuità per mezzo di qualche divisione, simile discontinuità riceve il suo numero. E per esprimerci con un esempio il numero è nella grandezza qualche cosa di simile all'umidità nell'acqua, perché come questa si estende dappertutto e in ciascuna parte dell'acqua, così il numero destinato a qualche grandezza si estende dappertutto e in ciascuna parte della grandezza. Analogamente come a un'acqua continua corrisponde una umidità con-

[95] Cfr. *L'Arithmétique*, libro I, Def. 1, in Stevin (1585), pp. 495-7.

[96] ≪La partie est de mesme matiere qu'est son entier, Unité est partie de multitude d'unitez, Ergo l'unité est de mesme matiere qu'est la multitude d'unitez; Mais la matiere de multitude d'unitez est nombre, Doncques la matiere d'unité est nombre. Et qui le nie, faict comme celui qui nie qu'une piece de pain soit du pain.≫ Cfr. *L'Arithmétique*, libro I, Def. 1, in Stevin (1585), pp. 496-7. Il presupposto di questa argomentazione è secondo Klein (1934) la coincidenza tra numero come oggetto (*intentio prima*) e il numero come concetto (*intentio secunda*), vale a dire la concezione simbolica del numero.

[97] Cfr. *L'Arithmétique*, libro I, Def. 1, in Stevin (1585), p. 501 ss.

[98] Cfr. *L'Arithmétique*, libro I, Def. 1, in Stevin (1585), pp. 498-9. I problemi di Diofanto cui Stevin fa riferimento sono IV, 33; V, 12, 13, 14, 15.

> tinua, così a una grandezza continua corrisponde un numero continuo. Analogamente come l'umidità continua dell'acqua nel suo complesso è soggetta alla stessa divisione e separazione cui è soggetta l'acqua, così il numero continuo è soggetto alla stessa divisione e separazione cui è soggetta la grandezza, in modo che quelle due quantità non si possono distinguere in base al fatto di essere continue o discontinue.[99]

Wallis e la *Mathesis universalis*

Anche John Wallis (1616-1703) nella *Mathesis universalis* argomenta che l'uno è senz'altro un numero: infatti esso risponde alla domanda ≪quanti?≫.[100] Al limite — osserva — si può distinguere l'unità dall'uno, intendendo l'unità come denominazione o denominatore del numero (ad es. 1 è il denominatore di 3: $\frac{3}{1}$)). Il principio del numero è, come in Stevin, lo zero, contrariamente a quanto sostenevano gli antichi, per i quali l'analogo del punto geometrico era l'unità aritmetica. Mentre per gli antichi l'unità, principio del numero, era qualcosa di indivisibile, essa è per i moderni continua e divisibile. Mentre per gli antichi, di conseguenza, numeri erano solo gli interi, per i moderni diviene possibile, grazie alla divisibilità dell'unità, parlare anche di numeri frazionari (*numeri fracti*) e di numeri irrazionali (*numeri surdi*). L'algebra universale è per Wallis aritmetica e non geometria: i simboli hanno un carattere più marcatamente numerico rispetto alle specie di Viète, sono veri e propri numeri. Cade così il requisito della omogeneità, perché i numeri, in quanto tutti costituiti di unità, sono quantità omogenee. Dunque, poiché le grandezze algebriche sono essenzialmente numeri, esse sono anche necessariamente omogenee e perciò universali. In quanto simboli sono contemporaneamente grandezze generali e numeri appartenenti ad un unico genere privo di dimensione (non occorre dunque più come in Viète suddividere le grandezze secondo il rango per ottenere classi di grandezze omogenee).[101]

---

[99]≪Comme doncques la generale communauté de grandeur & nombre aux autres, ainsi en cestui ci; à sçauoir à vne continue grandeur, correspond le continue nombre qu'on lui attribue, & telle discontinuité que puis apres recoit la grandeur par quelque diuision, semblable discontintuitè reçoit aussi son nombre. Et à fin d'en parler par exemple, le nombre est quelque chose telle en grandeur, comme l'humidité en l'eau, car comme cette ci s'estend par tout & en chaque partie de l'eau; Ainsi le nombre destinè à quelque grandeur s'estend par tout & en chaque partie de sa grandeur: Item comme à vne continue eau correspond vne continue humidité, ainsi à vne continue grandeur correspond vn continue nombre: Item comme la continue humidité de l'entiere eau, souffre la mesme diuision & disioinction que son eau, Ainsi le continue nombre souffre la mesme diuision & disioinction que sa grandeur; De sorte que ses deux quantitez ne se peuuent distinguer par continue & discontinue, [...]≫ Cfr. *L'Arithmétique*, libro I, Def. 1, in Stevin (1585), p. 502.

[100]Cfr. Wallis (1657), cap. IV.

[101]Cfr. Klein (1934), p. 211 ss.

Per Wallis il confronto tra grandezze omogenee può avvenire in due modi: per differenza (la differenza è un'altra grandezza omogenea a quelle date) o per quoziente (il quoziente è un numero senza dimensione). D'altra parte si può trovare un rapporto (anche se non propriamente un quoziente) anche tra due grandezze non omogenee e anche in questo caso il rapporto è un numero senza dimensione. Ne consegue che tutti i rapporti fra grandezze, omogenee e non omogenee, possono essere confrontati tra loro, perché tutti sono numeri senza dimensione e quindi quantità tra loro omogenee. Il concetto simbolico di numero è dunque quello di un determinato rapporto, concetto in accordo con la concezione dell'algebra come teoria generale delle proporzioni e delle equazioni.

I brevi cenni alle argomentazioni di Stevin e Wallis sono già sufficienti a mostrare la direzione secondo cui avviene il graduale passaggio dal concetto di grandezza in generale al concetto di quantità. Il termine 'quantità' può essere sostituito al termine 'grandezza in generale' perché entrambi denotano propriamente l'oggetto di quella scienza generale cui fa riferimento Proclo e che viene sviluppata in direzione algebrica tra '500 e '600.

La scienza generale cui si fa riferimento comprende sempre la teoria delle proporzioni di Eudosso ma nei vari autori può assumere connotazioni diverse. In Proclo essa comprende anche la teoria della similitudine, il metodo analitico e il metodo sintetico, le considerazioni sulla bellezza e sull'ordine, le potenze platoniche. In parte degli umanisti per scienza generale si intende una matematica generale che ha per oggetto le grandezze così come esse sono trattate nella teoria delle proporzioni. In Viète la teoria delle proporzioni è unita alla teoria delle equazioni e il concetto di grandezza muta in direzione della quantità perché le specie sono caratterizzate dalle proprietà delle operazioni numeriche. D'altra parte i numeri di cui si parla non sono più gli *Anzahlen* degli antichi, cioè i numeri di aggregati di oggetti, ma sono *Zahlen* cioè numeri algebrici, concetti simbolici di numero. In Stevin il parallelismo tra aritmetica e geometria viene ulteriormente sviluppato e i numeri sono sempre meno diversi dalle grandezze geometriche (ad esempio possono essere continui e divisibili); in Wallis infine i numeri algebrici sono assunti a oggetto di quella scienza generale che ormai prende anche il nome di *aritmetica universale* (nome mantenuto nei lavori di Newton).[102]

Proprio la progressiva attribuzione ai numeri del ruolo di oggetto della matematica universale, insieme alla identificazione tra teoria delle equazioni e teoria delle proporzioni, legittima la definizione di matematica come scienza

[102]Si pensi ad esempio alle lezioni di algebra pubblicate da Newton in latino nel 1707 con il titolo *Arithmetica universalis; sive De Compositione et Resolutione Arithmetica Liber*. Cfr. Newton (1707).

delle quantità. Il termine 'quantitas', che in Viète ancora non compare, viene sempre più frequentemente utilizzato per indicare genericamente l'oggetto dell'algebra e quindi della matematica universale. Tuttavia la definizione di matematica come scienza delle quantità non implica la fusione tra aritmetica, geometria e algebra: la stessa geometria cartesiana delle coordinate è ben lontana dall'affermare o dal ricercare l'identificazione tra numero e grandezza continua.

2.3 Scienza delle relazioni

Se la matematica, complici gli sviluppi dell'algebra, viene sempre più spesso definita come scienza delle grandezze o quantità, ciò non significa però che la definizione faccia leva su una categoria ontologica di oggetti: le grandezze in generale. Piuttosto, poiché le grandezze in generale sono definite all'interno della teoria delle proposizioni e delle equazioni, che stabilisce rapporti e relazioni tra le cose, la definizione di matematica comprendere anche un implicito riferimento all'idea di relazione e di operazione. Descartes esplicita questo carattere delle grandezze, che definisce — inaugurando una tradizione che perdura fino all'Ottocento — come «ciò che riceve il più e il meno» e come «ciò che può essere posto uguale o disuguale». Se il secondo carattere è attribuito tradizionalmente alla quantità, il primo è ciò che secondo Aristotele può convenire solo alla qualità e non alla quantità (cfr. il § 2.1.3 a pagina 68). Se entrambe sono soggette ad una trattazione matematica proprio perché sono suscettibili di aumento e diminuzione, non c'è più alcuna differenza tra qualità e quantità, tra quelle che potremmo anche chiamare rispettivamente grandezze intensive ed estensive?

La definizione di grandezza come «ciò che riceve il più e il meno» è esposta da Descartes nelle *Regulae*, composte intorno al 1628-29 ma pubblicate soltanto a fine Seicento: è interessante allora osservare che già nell'opera *Logica Hamburgensis* di Jungius del 1638 si ha una esplicita definizione del concetto di grandezza sia intensiva sia estensiva per mezzo del più e del meno. La diffusione e l'influenza del testo di Jungius è testimoniata dalla recensione della sua opera che Leibniz ha pubblicato nel 1678 sul *Journal des savants*: Jungius è definito, forse con un po' di esagerazione (secondo il rimprovero di Vagetius a Leibniz) come un matematico e un filosofo di rango non inferiore a Descartes e ad Aristotele.[103] Se l'essere passibili di aumento e diminuzione diviene una caratteristica propria non soltanto delle qualità ma anche delle quantità, facendo venir meno una delle differenze tra grandezze intensive e

[103]Cfr. anche *Historia et Commmendatio linguae universalis* in Leibniz (1875), VII, p. 186 e Couturat (1901), p. 74.

grandezze estensive, queste ultime vengono sempre più caratterizzate in base alla misurabilità, fino al punto che il poter essere aumentate o diminuite e il poter essere misurate finiscono con il diventare un unico carattere proprio delle grandezze estensive. Un esempio di questo uso lo vedremo in Wolff: nel *Mathematisches Lexicon* egli definisce infatti la matematica come «scienza che misura tutto ciò che è suscettibile di misura» o «scienza delle grandezze, cioè di tutte le cose suscettibili di essere ingrandite o diminuite».[104]

La definizione di matematica come scienza delle grandezze subisce dunque un ampliamento dovuto all'ampliarsi del concetto stesso di ciò che è oggetto della matematica, che da un lato è intrinsecamente legato all'idea di quantità mentre dall'altro attraverso il concetto di relazione e di operazione per mezzo del quale è definito è suscettibile di essere esteso fino a comprendere il concetto di qualità. In questa direzione si muovono le ricerche di Leibniz, la cui *mathesis universalis* non è più soltanto studio della relazione di uguaglianza e dell'operazione di somma (entrambe individuate come caratteristiche della quantità) ma è anche studio di altri tipi di relazioni, tra cui in particolare quella di similitudine, propria delle qualità.

2.3.1 Descartes: un nuovo rapporto tra algebra e geometria

Molteplici e fondamentali sono i contributi di Descartes alla matematica: pur non occupandoci qui in dettaglio di tutti questi contributi, vogliamo almeno accennare ad alcuni motivi di particolare interesse del pensiero di Descartes in relazione alla definizione di matematica, al concetto di grandezza come oggetto di una scienza generale, al simbolismo di figure e di lettere che permette un trattamento algebrico della geometria e un rapporto con l'estensione degli oggetti fisici che fa della matematica una scienza universale con un ruolo fondamentale nella conoscenza scientifica del mondo.

Nelle *Regulae*, composte probabilmente intorno al 1628-29 e pubblicate postume (in olandese nel 1684 e in latino nel 1701), Descartes fornisce molte indicazioni sul rapporto tra la propria filosofia e i propri studi di matematica ed espone il significato che attribuisce all'idea di una matematica universale. Riflettendo sul fatto che gli antichi filosofi non ammettevano allo studio della filosofia chi non avesse conoscenze di matematica, Descartes afferma di

[104] Una testimonianza analoga dell'ormai avvenuta identificazione di ciò che può essere aumentato o diminuito con ciò che può essere misurato si trova anche nei *Matheseos universalis elementa* (1727) di Gravisande mentre una limitazione esplicita e consapevole del concetto di grandezza o quantità a ciò che è misurabile si trova in *An Essay on Quantity* di Thomas Reid, pubblicato sugli *Atti della Società Reale di Londra* nel 1748. Cfr. Th. Reid, *Philosophical Works*, 1895, spec. p. 716 ss.

essere giunto alla conclusione che la matematica degli antichi fosse di una specie molto diversa da quella comune alla sua epoca, fosse cioè simile alla matematica di cui si trovano tracce in Pappo e in Diofanto e che sarebbe stata ridestata nel Seicento e chiamata con il nome barbaro di 'algebra'.[105]

La matematica universale è per Descartes una scienza sopraordinata alle altre discipline matematiche e ha per oggetto tutti gli oggetti delle scienze subordinate, cioè *i rapporti o le proporzioni tra oggetti*.[106] Infatti la conoscenza della verità può avvenire secondo Descartes soltanto per intuizione o per comparazione tra la cosa che è esaminata e la cosa che è data, e tali comparazioni sono semplici e chiare soltanto se le cose da comparare partecipano alla stessa maniera di una certa natura (cioè solo se sono omogenee) in modo che ≪appaia chiaramente l'uguaglianza tra ciò che viene esaminato≫ e ciò che è dato, in modo che la proporzione sia, come direbbe Viète, la costruzione di un'equazione.[107] Le cose che possono essere comparate in modo da formare una tale proporzione sono le 'grandezze' o 'grandezze in genere', ≪ciò che riceve il più e il meno≫.

> È da notare inoltre che a cotesta uguaglianza non si può ridurre se non ciò che riceve il più o il meno, e che esso può venir compreso tutto mediante la parola grandezza; per cui, dopo che secondo la regola precedente i termini della difficoltà sono stati separati da ogni oggetto, qui comprendiamo che noi in seguito dobbiamo occuparci solo delle grandezze in genere.
> Affinché però si immagini anche ora qualcosa, e non si faccia uso dell'intelletto puro, bensì dell'intelletto aiutato dalle immagini dipinte nella fantasia, è da notare infine che niente si dice delle grandezze in genere, che non possa anche essere riferito ad ognuna di esse in particolare.[108]

[105]Cfr. *Regulae*, IV, in Descartes (1701), pp. 28-9.

[106]≪Non per questo mi proposi di cercare di apprendere tutte le scienze particolari che si chiamano comunemente matematiche, ma vedendo che, pur avendo oggetti diversi, tutte concordano in quanto negli oggetti considerano solo i diversi rapporti o proporzioni che vi si riscontrano, pensai che era preferibile esaminassi solo queste proporzioni in generale, supponendole soltanto negli oggetti che servirebbero a facilitarmene la conoscenza, ma senza affatto collegarvele, in modo da poterle meglio applicare in seguito a tutti i casi a cui convenissero.≫ Cfr. D*iscorso sul metodo*, II, in Descartes (1637a), p. 304. Si veda anche il seguente passo: ≪Quanto poi questa [scienza] superi in utilità e facilità le altre che le sono subordinate, è manifesto da ciò, che essa si estende a tutte le cose a cui si estendono quelle, e per di più a molte altre, [. . .]≫ Cfr. *Regulae*, IV, in Descartes (1701), p. 30.

[107]Cfr. *Regulae*, XIV, in Descartes (1701), p. 72. Si noti che — come già in Viète — postulare una condizione di omogeneità per le cose da comparare significa che tali cose non sono intese solo come numeri; i numeri infatti sono tutti omogenei fra loro.

[108]Cfr. *Regulae*, XIV, in Descartes (1701), p. 72. ≪Il faut noter ensuite que rien ne peut être ramené à cette égalité que ce qui comporte le plus ou le moins, et que tout cela est

Si noti che le grandezze sono introdotte sia come *ciò che può essere posto uguale o disuguale* (caratteristica che in Aristotele denotava la quantità e in Euclide era espressa nelle nozioni comuni), sia come come *ciò che riceve il più o il meno*, vale a dire come ciò che è soggetto ad aumento o diminuzione. Si tratta infatti delle due principali caratteristiche con cui il concetto di grandezza che è oggetto della matematica sarà caratterizzato fino all'Ottocento.

In quanto teoria delle proporzioni e delle equazioni tra grandezze la matematica universale non si differenzia molto dalla logistica speciosa di Viète (rispetto alla quale i risultati di Descartes sarebbero — come egli stesso precisa — indipendenti) e si presenta come 'algebra', anche se tale termine è definito nelle *Regole* un'espressione barbara, straniera. Tuttavia Descartes, oltre ad insistere — come Viète — sulla centralità della teoria delle proporzioni, definisce la matematica universale, che comprende aritmetica, geometria, astronomia, musica, ottica, meccanica, ecc., come *scienza dell'ordine e della misura.*[109]

> E a chi consideri più attentamente, si rende noto infine che si riferiscono alla matematica soltanto tutte quelle cose nelle quali si esamina l'ordine o misura, e che non ha interesse se tale misura si debba ricercare nei numeri, o nelle figure, o negli astri, o nei suoni o in qualunque altro oggetto; e perciò ci deve essere una scienza generale, che spieghi tutto ciò che si può chiedere circa l'ordine e la misura non riferita ad alcuna speciale materia, ed essa, non già con un vocabolo straniero, ma con uno già antico e accettato dall'uso, ha da essere chiamata matematica universale, poiché in questa si contiene tutto ciò per cui altre scienze sono dette parti della matematica.[110]

Gli oggetti dei quali questa *matematica universale* ricerca la misura non sono né soltanto i numeri né soltanto le grandezze geometriche (come in Viète) ma anche gli astri, i suoni e qualunque altro oggetto. Descartes considera

compris sous le nom de grandeur; de telle sorte que quand, d'après la règle précédente, les termes de la difficulté sont abstraits de tout sujet, nous comprenons que toute la question ne roule plus que sur des grandeurs en général. Mais pour imaginer ici encore quelque chose, et nous servir non de l'intelligence pure, mais de l'intelligence aidée des figures peintes dans l'imagination, remarquons qu'on ne dit rien des grandeurs en général qui ne puisse se rapporter à chacune d'elles en particulier.≫ Cfr. *Regulae*, XIV, in *Oeuvres*, a cura di c. Adam e P. Tannery, vol. VI, Paris, Vrin, 1982.

[109]≪E avendomi questi pensieri richiamato dai particolari studi di aritmetica e di geometria ad una generale investigazione della matematica, mi domandai innanzi tutto che cosa di preciso tutti intendiamo con quel nome, e perché non soltanto quelle che già abbiamo indicato, ma anche l'astronomia, la musica, l'ottica, la meccanica, e altre parecchie, si dicano parti della matematica.≫ Cfr. *Regulae*, IV, in Descartes (1701), p. 29.

[110]Cfr. *Regulae*, IV, in Descartes (1701), pp. 29-30.

dunque, secondo un'idea già aristotelica, una scienza generale che studia le proporzioni tra diversi oggetti: numeri, lunghezze, solidi, intervalli di tempo (cfr. il paragrafo 2.1.2 a pag. 67). Descartes non definisce la matematica come scienza delle quantità (anche se tutti gli oggetti nominati sono quantità in senso aristotelico), perché l'oggetto primario della matematica non sono i diversi oggetti ma le proporzioni e le relazioni tra di essi:[111] definire la matematica come ordine e misura significa definirla per mezzo della teoria delle proporzioni e della relazione di uguaglianza tra grandezze omogenee. Infatti — scrive Descartes — ≪è da sapere che tutte le relazioni che possono essere tra enti del medesimo genere, debbono venir riferite a due fondamenti, e cioè all'ordine, o alla misura≫.[112] La grandezza in generale che costituisce l'oggetto della matematica universale non è altro che ciò che è espresso dal simbolismo algebrico per mezzo di segni letterali o per mezzo di figure (secondo il simbolismo adottato nelle *Regole*).[113] Tali segni possono rappresentare sia numeri sia figure geometriche o grandezze continue:[114] se i simboli sono figure, è possibile distinguere figure adatte a rappresentare le grandezze e figure adatte a rappresentare i numeri.[115]

---

[111]Si ricordi comunque che nemmeno Aristotele individua nella quantità il genere sommo di cui tratterebbe la matematica generale.

[112]Cfr. *Regulae*, XIV, in Descartes (1701), p. 80. Descartes pone l'accento sul concetto di ordine ben più di quanto non avesse fatto prima di lui Viète, che pure parlava di 'proportio' e di 'aequatio ordinata' nella definizione della poristica e dell'esegetica. Cfr. *Isagoge*, cap. I, in Viète (1591), p. 7.

[113]≪Ma, per facilità, facciamo uso dei caratteri a, b, c, ecc., per indicare grandezze già conosciute, e A, B, C, ecc., per indicare grandezze ignote; [...]≫ Cfr. *Regulae*, XVI, in Descartes (1701), p. 83. Si veda anche il seguente passo: ≪Per quello che si riferisce alle figure, già sopra è stato mostrato in qual modo mediante esse soltanto si possano formare le idee di tutte le cose; e manca ora di avvertire che fra tutte le loro innumerevoli diverse specie, noi qui useremo soltanto quelle con le quali si esprimono nella maniera più facile possibile tutte le differenze dei rapporti o proporzioni.≫ *Regulae*, XIV, in Descartes (1701), p. 79.

[114]≪[...] i calcolatori sono soliti indicare le singole grandezze mediante più unità, ossia mediante un numero, e noi invece in questo caso facciamo astrazione puranco dai numeri, non meno di quanto abbiamo fatto astrazione poco prima dalle figure geometriche, o da qualunque altra cosa. [...] così, se si chieda la base del triangolo rettangolo, i cui lati dati siano 9 e 12, il calcolatore dirà che essa è $\sqrt{225}$ o 15; noi invece in luogo di 9 e di 12 poniamo a e b, e troviamo che la base è $\sqrt{a^2 + b^2}$, e rimarranno distinte quelle due parti a^2 e b^2, che nel numero risultano confuse.≫ *Regulae*, XVI, in Descartes (1701), pp. 83-4. Si veda anche il seguente passo relativo alle figure usate come simboli: ≪[...] mediante le stesse figure si debbono rappresentare ora le grandezze continue, ora anche la quantità o numero; o che niente da un'accorta attività umana si può ritrovare di più semplice, per esporre tutte le differenze dei rapporti.≫ *Regulae*, XIV, in Descartes (1701), p. 81.

[115]≪Sono infatti almeno due i generi delle cose che si paragonano tra loro, il numero e la grandezza; e abbiamo anche due generi di figure per presentarle al nostro concetto: poiché, per esempio, i punti coi quali viene indicato il numero triangolare, oppure l'albero

Benché il ricorso ai simboli letterali non costituisca una novità ai tempi di Descartes, originale è l'uso di simboli figurati, che oltre ad assolvere la stessa funzione dei segni letterali hanno favorito l'applicazione dell'algebra alla geometria e la creazione della geometria cartesiana delle coordinate. Proprio dal simbolismo di figure adottato nelle *Regole* per esprimere le grandezze continue è scaturita infatti la considerazione algebrica e simbolica della geometria e la reinterpretazione delle operazioni aritmetiche per applicarle alle operazioni tra linee: Descartes infatti non identifica numeri e figure geometriche.

All'inizio della *Géométrie*, pubblicata come appendice al *Discours de la méthode* del 1637, Descartes dichiara di aver introdotto i termini dell'aritmetica in geometria (fa riferimento alle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione) per rendere quest'ultima più intellegibile: con ciò egli non identifica però aritmetica e geometria ma giustifica l'uso dei termini aritmetici per rappresentare certe operazioni geometriche tra linee che subito dopo si appresta a costruire e che quindi sono operazioni algebriche e non le corrispondenti operazioni aritmetiche.[116] Descartes, infatti, a differenza di Stevin, che ritiene che il numero possa essere una quantità continua, ritiene che la continuità sia una proprietà caratteristica delle grandezze geometriche e dunque non può semplicemente applicare le operazioni aritmetiche alla geometria, ma come Viète deve reinterpretarle.[117] Nel I libro Descartes introduce dei simboli letterali algebrici per rappresentare le linee geometriche e mostra come certi problemi geometrici determinati possano essere espressi mediante un'equazione letterale. L'algebra fornisce una soluzione dell'equazione letterale ma poi occorre costruire geometricamente tale soluzione: l'applicazione dell'algebra alla geometria non risolve ancora il problema geometrico, che è risolto solo da un'opportuna costruzione. Una delle ragioni per le quali Descartes applica l'algebra alla geometria è legata alla determinazione del rapporto tra classi di equazioni e classi di problemi geometrici risolubili con determinati tipi di costruzione: alcuni problemi saranno risolti solo con riga e compasso, altri con strumenti più elaborati, altri ancora invece non potranno essere risolti perché la costruzione non può essere effettuata con alcun movimento ammissibile.[118]

Abbiamo detto sopra che dal punto di vista dell'oggetto (le grandezze in

genealogico, ecc., sono figure adatte ad esibire il numero; mentre quelle che sono continue ed indivise, come il triangolo, il quadrato, ecc., rappresentano le grandezze.» *Regulae*, XIV, in Descartes (1701), pp. 79-80.

[116]Cfr. *La Géométrie*, Descartes (1637b), p. 369 ss.

[117]Cfr. Bos (2001), p. 264.

[118]Sul tema della costruzione geometrica, dell'esattezza e della possibilità di classificare le curve in base ai criteri di costruzione rimandiamo al già citato libro di Bos (2001), che dedica l'intera seconda parte alla geometria di Descartes.

genere studiate dalla teoria delle equazioni e delle proporzioni) la *mathesis universalis* di Descartes non differisce radicalmente dalla *logistica speciosa* di Viète. Tuttavia l'innovazione di Descartes consiste nell'aver considerato anche la geometria stessa e non più soltanto l'aritmetica come una scienza simbolica. Mentre in Viète l'applicazione della logistica all'aritmetica e alla geometria è separata, Descartes connette questi due aspetti, ma non perché identifichi gli oggetti dell'aritmetica e della geometria, bensì perché ha una concezione simbolica non solo dei numeri ma anche delle figure geometriche. Che Descartes non concepisca la scienza nuova come una fusione di aritmetica e geometria ma come una scienza simbolica in grado di risolvere più facilmente le questioni di entrambe appare con chiarezza dal seguente passo tratto da una lettera a Beeckman del 1619, in cui si parla di una *scienza nuova* con cui si possono risolvere in maniera generale tutti i problemi che si possono porre in qualunque genere di quantità, continua o discreta:

> Quel che sto costruendo — per dirvelo con semplicità — non è certo un'*Ars Brevis*, come quella di Lullo, ma una scienza affatto nuova, che permetta di risolvere in generale tutti i problemi che possono proporsi per qualsiasi quantità, sia continua che discontinua, ciascuna però secondo la sua natura. Come infatti in Aritmetica certi problemi possono trovare soluzione con numeri razionali, altri solo con numeri sordi e, infine, altri ancora possono sì immaginarsi, ma non risolversi, nello stesso modo — come spero di poter mostrare — per quel che riguarda la quantità continua certi problemi possono esser risolti soltanto con linee rette o circolari, mentre altri non possono trovare soluzione se non mediante altre linee curve, originate però da un solo movimento, ciò che è possibile grazie ai nuovi compassi che non stimo meno giusti e geometrici di quelli comuni con cui si tracciano circonferenze; altri, infine, non possono risolversi se non utilizzando linee curve generate da movimenti diversi gli uni dagli altri e non subordinati tra loro, linee che, evidentemente, sono soltanto immaginarie, come la quadratrice, che è abbastanza nota.[119]

Dopo aver applicato l'algebra alla geometria, Descartes compie un ulteriore passo: identifica l'oggetto dell'algebra o *mathesis universalis* con la sostanza del mondo, con la corporeità come estensione. Descartes connette per mezzo di un simbolismo fatto di figure (come si vede nelle regole 14, 15, 18) due diverse concezioni: la concezione dell'algebra come teoria generale delle proporzioni e l'identificazione dell'oggetto matematico simbolico

[119]Lettera del 26 marzo 1619 a Beeckman, in Descartes (1619), pp. 190-1. In questo passo è anche evidente una delle motivazioni che hanno spinto Descartes a servirsi dell'algebra in geometria: la classificazione dei problemi geometrici e il confronto con classi di problemi aritmetici.

con l'oggetto della vera fisica.[120] Oggetto della matematica universale sono, come si è detto, le grandezze in genere; tuttavia tutto ciò che si può dire delle grandezze in genere si può dire anche delle grandezze in particolare e specialmente di quella specie di grandezza che cogliamo con l'immaginazione e che è l'estensione dei corpi.[121] Poiché l'estensione non è un *quid* separato e distinto dal soggetto di estensione, lo studio delle grandezze in genere si collega con lo studio dei corpi estesi, vale a dire con la fisica: la facoltà che interviene in questo caso è, accanto all'intelletto (che ci darebbe solo la grandezza in generale), l'immaginazione.[122] Come l'estensione non è separata dal soggetto di estensione, così il numero non è separato dalla cosa numerata e il rapporto è colto non dall'intelletto puro ma dall'immaginazione: se infatti con l'intelletto possiamo pensare la semplice moltitudine astratta dalla cosa di cui è numero, con l'immaginazione l'idea di numero non può mai essere separata dall'idea di cosa numerata.[123] Il rapporto tra matematica e fisica è fondato sull'intrinseco rapporto tra numero e cosa numerata, tra estensione e corpo esteso, rapporto che è colto dall'immaginazione: quest'ultima è dunque nelle *Regole* ciò che garantisce la presa della *mathesis universalis* sul mondo reale. [124]

2.3.2 Leibniz: arte combinatoria e mathesis universalis

Lo sviluppo dell'algebra e la riformulazione del concetto di numero che essa ha comportato hanno contribuito a modificare il concetto di matematica. Da un lato nuovi oggetti quali i numeri fracti, surdi, negativi hanno richiesto un'interpretazione e una concettualizzazione, dall'altro l'impostazione algebrica ha suggerito un rapporto molto stretto e un parallelismo tra aritmetica e geometria che ha favorito lo sviluppo dell'idea di una scienza generale, sia che essa traesse le proprie caratteristiche prevalentemente dal dominio numerico, come nell'aritmetica universale di Wallis, sia che essa fosse presentata come scienza delle relazioni, cioè scienza dell'ordine e della misura come in Descartes. L'interpretazione di questa scienza generale come studio di quantità è abbastanza diffusa, sia che le quantità vengano assunte esplicitamente ad oggetto di essa sia che si parli piuttosto di grandezze in genere, poiché,

[120]Sull'analisi del rapporto tra matematica e fisica in Descartes si veda Klein (1934), p. 197 ss.

[121]Cfr. *Regulae*, XIV, in Descartes (1701), pp. 72-3.

[122]Cfr. *Regulae*, XIV, in Descartes (1701), p. 74.

[123]Cfr. *Regulae*, XIV, in Descartes (1701), p. 76.

[124]Secondo Klein la scelta di linee e di figure piane come simboli per rappresentare le grandezze in generale è strettamente collegata a questa concezione del rapporto tra estensione e corpo esteso e all'idea sopra tratteggiata della matematica universale come conoscenza dell'estensione dei corpi fisici. Cfr. Klein (1934), pp. 197-8.

come si è detto, i termini 'grandezza in genere' e 'quantità' tendono a divenire sinonimi.

Tra la metà del Seicento e il Settecento si sviluppano diversi campi di ricerca matematica che impongono una riflessione sulla suddivisione interna alla matematica: essa non comprende più soltanto aritmetica, algebra e geometria ma anche il calcolo infinitesimale, la teoria della probabilità, la teoria delle permutazioni e combinazioni, ecc. Tra questi, soprattutto l'analisi combinatoria, i cui primi passi sarebbero stati compiuti da Cardano e che è stata poi sviluppata da Pascal, Wallis, Leibniz e dai fratelli Bernoulli,[125] sollevò il problema dell'adeguatezza della definizione della matematica come scienza delle quantità. Lo studio delle combinazioni di n a n elementi e lo studio delle possibili disposizioni e permutazioni di un insieme di elementi aprono infatti un ambito di studio non meramente quantitativo. Secondo Leibniz, ad esempio, lo studio delle complessioni e del sito appartiene propriamente alla metafisica e costituisce prevalentemente uno studio dell'ordine o della disposizione di oggetti qualunque e non necessariamente di numeri e di grandezze: occorre dunque — e un argomento simile è presente anche in Bolzano e in Graßmann — riformulare la definizione 'tradizionale' di matematica come scienza delle grandezze. Tuttavia, nonostante la sua apparente inadeguatezza, tale definizione continua ad essere ripetuta per tutto il Settecento, come mostra l'analisi dei testi di Wolff, d'Alembert, Euler, Gauss e del Bolzano della *Grössenlehre*.[126] Per comprendere il problema suggerito dallo sviluppo dell'analisi combinatoria, prendiamo dunque le mosse dalla *Dissertatio de arte combinatoria* (1666) di Leibniz, che permette non solo di comprendere perché lo studio delle combinazioni non possa essere considerato esclusivamente come quantità, ma anche di tratteggiare il concetto leibniziano di *mathesis generalis*, che ha un significato più ampio rispetto alla scienza generale di Proclo interpretata dagli umanisti come teoria delle equazioni e delle proporzioni.

La *Dissertatio de arte combinatoria* fu pubblicata nel 1666 e costituisce un ampliamento della tesi (*Disputatio arithmetica de complexionibus*) presentata da Leibniz all'Università di Lipsia per ottenere il baccalaureato in legge.[127] La *Dissertatio* si apre con una dimostrazione dell'esistenza di Dio, quindi introduce alcuni corollari logici, metafisici, fisici, pratici e definisce il tipo di matematica di cui si tratta nell'opera: la dottrina delle complessioni.

[125]Cfr. B. Pascal, *Traité du triangle arithmétique* (Paris 1655), J. Wallis, *Treatise of Algebra* (London 1673 e 1685) e J. Bernoulli, *Ars Conjectandi* (Basel 1713).

[126]Cfr. le Appendici 1-4 e 6.

[127]Fu ripubblicata ad insaputa dell'autore nel 1690 a Francoforte: l'anno successivo Leibniz pubblicò sugli *Acta eruditorum* una recensione anonima per emendare alcune parti del testo, pur riconoscendone la validità.

Dopo aver indicato il proprio contributo originale alla dottrina delle complessioni rispetto alle soluzioni già trovate da altri autori, Leibniz risolve 12 problemi elencandone anche numerose applicazioni. Già noto era il calcolo delle combinazioni di n elementi a 2 a 2, il cui numero è nella terminologia moderna:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)\dots(n-2+1)}{1\cdot 2} = \frac{n!}{(2!(n-2)!)} = \frac{(n-2)! \quad (n-1)n}{2\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Il contributo originale di Leibniz all'analisi combinatoria consiste nel calcolo del caso più generale: il numero delle combinazioni di n elementi a k a k è calcolato sommando il numero delle combinazioni di $n-1$ elementi a $k-1$ a $k-1$ con il numero delle combinazioni di $n-1$ elementi a k a k. In simboli moderni:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ciò che però ci interessa in questa sede non sono tanto i contributi originali di Leibniz all'analisi combinatoria, quanto le pagine preliminari della *Dissertatio*, nelle quali sono introdotti diversi concetti matematici e filosofici.[128] Innanzitutto nel primo corollario logico Leibniz divide tutte le proposizioni di una scienza in necessarie e contingenti: le prime sono teoremi e le seconde sono osservazioni. Principio delle proposizioni necessarie è il principio di non contraddizione: ≪Ciò che è (tale) è o non è (tale), o viceversa≫. Principio delle proposizioni contingenti è ≪Qualcosa esiste≫.[129] Questa distinzione tra teoremi e osservazioni è ripresa nei *Nuovi Saggi*, dove Leibniz introduce l'analoga ma ben più nota distinzione tra verità di ragione e verità di fatto (cfr. il § 1.1.1 a pagina 1.1.1).[130]

La parte per noi più interessante della *Dissertatio* è la sezione, intitolata ≪Con Dio≫, immediatamente successiva ai Corollari: in essa si definisce la natura della matematica e il suo rapporto con la metafisica. La *metafisica* tratta sia dell'ente sia delle affezioni dell'ente, che non sono a loro volta enti. Le affezioni dell'ente possono essere o assolute (qualità) o relative (quantità e relazioni): né quantità nè qualità né relazioni sono enti. *Quantità* è ≪l'affezione di una cosa rispetto ad una sua parte≫, mentre *relazione* è ≪l'affezione

[128] Si veda in proposito Barone (1951), spec. il § 1.2.

[129] Cfr. *Dissertatio*, in Leibniz (1968), pp. 11-12.

[130] Un altro elemento di interesse riguarda la distinzione tra discipline teoriche e pratiche. Benché i termini della questione siano diversi, è interessante osservare che secondo Leibniz ≪nelle discipline pratiche accade che l'*ordine della natura* coincida con quello *della conoscenza*, perché in esse la stessa natura della cosa ha origine dal *nostro pensiero* e dalla nostra produzione. Infatti lo scopo ci muove sia a produrre i mezzi, sia a conoscerli, ciò che non accade per quegli oggetti che possiamo solo conoscere ma non produrre.≫ Cfr. *Dissertatio*, in Leibniz (1968), p. 12.

di una cosa rispetto ad un'altra cosa≫: se la parte è diversa dal tutto, le quantità sono anch'esse relazioni. La quantità è ≪il numero delle parti≫ e coincide con il numero, anche se può essere espressa estrinsecamente, in relazione o in rapporto ad altro, quando il numero delle parti non ci è noto, come nella geometria analitica di Descartes, che Leibniz chiama ≪analitica speciosa≫.[131]

Da un certo punto di vista, poiché il numero è ≪qualcosa di universalissimo≫, Leibniz considera la matematica come appartenente alla metafisica: quest'ultima studia infatti ≪ciò che è comune ad ogni genere di enti≫.[132] La matematica sembra essere intesa come studio di quantità e suddivisa in parti secondo gli enti di cui si studiano le quantità (che, lo ripetiamo, sono affezioni degli enti e non enti). Scrive Leibniz:

> La matematica, infatti (come si intende ora questo termine), per esprimersi accuratamente, non è una sola disciplina, ma è costituita di piccole parti staccate da varie discipline, le quali trattano in ciascuna la quantità dell'oggetto di studio, e che formarono giustamente un tutto unico per via della loro parentela. Infatti, come l'aritmetica e l'analisi trattano della quantità degli enti, così la geometria tratta della quantità dei corpi o dello spazio che è coesteso con i corpi.[133]

Assumendo questa definizione di matematica come scienza delle quantità (intese come numero delle parti di qualcosa), la differenza fra aritmetica e geometria consiste nel fatto che la prima si occupa delle quantità di enti in generale, mentre la seconda si occupa di quantità di particolari enti: i corpi.[134]

---

[131] Cfr. *Dissertatio*, in Leibniz (1968), p. 15.

[132] A sostegno di un'interpretazione platonico-pitagorica della concezione leibniziana della matematica — come è ad esempio quella di Barone nel saggio citato — si ricordi che la scienza generale di Proclo era 'conoscenza dell'essere in quanto essere'.

[133] Cfr. *Dissertatio*, in Leibniz (1968), p. 16.

[134] A proposito della definizione leibniziana di quantità come numero delle parti, si confronti il seguente passo di Aristotele: ≪Si dice 'parte' in un senso, ciò in cui una quantità può, in una maniera qualunque, essere divisa (sempre, infatti, ciò che viene sottratto alla quantità in quanto quantità si considera parte di quella, come il due può essere considerato una parte del tre); in un altro senso il termine si riferisce solo a quelle che, tra le parti indicate nell'accezione precedente, possono misurare l'intero: perciò, sotto un certo profilo, si può dire che il due è una parte del tre, sotto un altro profilo no.≫ Cfr. *Metafisica*, V.25.1023b12 in Aristotele (2002), p. 164. Nel primo senso parte è usato nel significato di aliquota (= una delle porzioni in cui è stata divisa una quantità), come nella definizione che apre il quinto libro degli *Elementi*: una grandezza è parte di una grandezza, la minore di quella maggiore, quando essa misuri la maggiore; nel secondo senso parte è invece usato in modo più generale, come nella Nozione comune V di Euclide: il tutto è maggiore della parte. Cfr. Euclide (1970), p. 297. La definizione leibniziana di quantità come numero delle parti significa allora che data una grandezza o qualcosa in generale, se

Leibniz introduce infine i concetti fondamentali della nuova analisi combinatoria: i concetti di *complessione* e di *sito*. Lo studio delle complessioni, che corrisponde all'odierna dottrina delle combinazioni, è lo studio di un tutto «diviso in parti intese come totalità minori» nelle quali sussistono delle parti comuni. Lo studio del sito o disposizioni di tali parti costituisce ciò che oggi chiamiamo invece dottrina delle disposizioni e delle permutazioni.[135] Lo studio delle complessioni e del sito appartiene in sé alla metafisica, che è la dottrina della totalità e delle parti, ma appartiene alla matematica, e in particolare all'aritmetica, se si considera la quantità della variazione delle parti rispetto a sé e alla totalità. La dottrina delle combinazioni appartiene per Leibniz all'aritmetica pura, mentre quella del sito all'aritmetica figurata (alla geometria): in tal modo si intende che le unità generano la linea. Il sito può essere assoluto o relativo: il primo, detto ordine o disposizione, è quello delle parti rispetto al tutto; il secondo, detto vicinanza o composizione, è quello delle parti rispetto alle parti.[136]

L'analisi combinatoria è solo in parte scienza delle quantità, cioè solo in quanto studia la quantità della variazione delle parti: solo dunque sotto questo aspetto quantitativo (che non la esaurisce) essa è parte della matematica propriamente detta (e in particolare dell'aritmetica). In generale essa è studio del rapporto tra le parti e il tutto e dunque è connessa alla metafisica. Se la *Dissertatio* muove i primi passi nella direzione di una riflessione sul posto che l'analisi combinatoria occupa rispetto alla matematica, diversi scritti

questa è divisibile in parti, il numero delle parti è la quantità di tale grandezza, perché è ciò che la misura. Infatti, scrive ancora Aristotele «è misura ciò in virtù di cui si conosce la quantità; e la quantità, nella sua autentica essenza, viene conosciuta sia mediante l'uno sia mediante il numero» *Metafisica*, X.1.1052b20-27 in Aristotele (2002), p. 278.

[135]Una *combinazione* è un allineamento (in cui non si tiene conto dell'ordine di disposizione degli elementi) di k elementi estratti da un insieme di n elementi (distinti), con $k \leq n$. Una *disposizione* è un allineamento di k elementi, presi in un certo ordine da un insieme n di elementi assegnato. Se $k = n$ si ha una permutazione. Combinazioni e disposizioni si dicono *semplici* se non sono ammesse ripetizioni, si dicono *con ripetizione* altrimenti. Il numero delle combinazioni semplici di n elementi a k a k è, come già si è visto, uguale a

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{(k!(k-2)!)},$$

mentre il numero delle combinazioni con ripetizione è

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Il numero delle disposizioni semplici di n elementi a k a k è uguale a $n(n-1)\cdot\dots\cdot(n-k+1)$, mentre il numero delle disposizioni con ripetizione è n^k.

[136]Cfr. *Dissertatio*, in Leibniz (1968), pp. 16-17.

inediti di Leibniz successivi alla *Dissertatio* mostrano come Leibniz abbia sviluppato l'idea che la combinatoria non sia solo studio di quantità. Essi mostrano d'altra parte come il problema della definizione della combinatoria e del suo oggetto di studio sia intrinsecamente legato alla riflessione sulla *mathesis universalis* e sul concetto di grandezza in generale, conducendo Leibniz alla formulazione di una definizione di matematica generale come scienza delle relazioni e non più come scienza delle quantità. Nel seguito accenneremo pertanto ad alcuni frammenti e testi inediti leibniziani che descrivono la natura della matematica universale introducendo nel contempo una distinzione tra grandezze o quantità e forme o qualità che è particolarmente importante per comprendere se e in che modo è inadeguata la definizione 'tradizionale' di matematica come scienza delle quantità o grandezze.

In *Mathesis universalis*, testo pubblicato da Gerhardt nel 1890, Leibniz scrive che le discipline matematiche (aritmetica, geometria, meccanica e le scienze miste o applicate) sono rami della logistica o scienza generale della grandezza (di cui l'algebra è una parte): la logistica è subordinata alla speciosa generale, la quale è a sua volta subordinata alla logica.[137] La scienza generale delle grandezze o logistica è soltanto una parte di una disciplina più ampia, chiamata talvolta speciosa generale, talvolta matematica generale, talvolta arte combinatoria. Poiché in Leibniz grandezza è un sinonimo di quantità, la matematica come scienza delle quantità è subordinata ad una disciplina generale che studia anche qualità: la matematica generale è la «determinazione della grandezza o quantità e della similitudine o qualità».[138] La speciosa generale non è l'algebra o logistica speciosa di Viète ma l'arte combinatoria, alla quale l'algebra è subordinata perché da essa dipende per la soluzione di diversi teoremi e per i suoi stessi principi. L'algebra di Viète è considerata una generalizzazione dell'aritmetica, dalla quale differisce soltanto per il fatto di essere un calcolo su numeri indeterminati anziché su numeri determinati. La logistica o scienza generale della grandezza è una parte della matematica generale, la quale è arte combinatoria: in quanto tale essa può applicarsi al numero e alla grandezza, ma anche alla qualità attraverso lo studio della similitudine.[139]

L'arte combinatoria appare subordinata all'aritmetica e all'algebra se in

[137]«Quemadmodum autem Logistica vel generalis de magnitudine scientia (cujus pars Algebra est) Speciosae generali et ipsi postremo Logicae subordinata est, ita vicissim sub se habet Arithmeticam et Geometriam et Mechanicam et Scientias quae mistae Matheseos appellantur.» *Mathesis universalis*, Praefatio, in Leibniz (1849), VII, p. 51.

[138]*Initia et Specimina Scientiae generalis*, in Leibniz (1875), VII, p. 59, tr. it. P*rincipi ed esempi della scienza generale*, in Leibniz (1968), p. 121. Il frammento compare anche nell'edizione di Erdmann del 1840 e dunque prima della pubblicazione dell'*Ausdehnungslehre* di Graßmann.

[139]Cfr. Couturat (1901), p. 285 ss.

essa si considera soltanto il problema di trovare il numero delle combinazioni, ma essa consiste piuttosto nell'arte di formare o di trovare tutte le combinazioni: in questo senso l'arte combinatoria non ha per oggetto né numeri né grandezze ma delle *forme* simili o dissimili.[140] In questo passo della lettera al Tschirnaus compare il termine 'forma' distinto dal termine 'grandezza': mentre la forma è caratterizzata come ciò che può essere simile o dissimile, il termine grandezza è assunto nell'accezione, sinonima di quantità, di ciò che può dirsi uguale o disuguale, cioè di ciò che è oggetto della teoria delle equazioni e delle proporzioni che Viète chiama logistica speciosa o algebra e che Descartes chiama matematica universale. La *matematica* nel suo concetto più generale è *sia scienza della grandezze o quantità sia scienza delle forme o qualità*, come affermano numerosi passi leibniziani:

> Dunque, se non erro, due sono le parti della matematica generale, l'arte Combinatoria circa la varietà e le forme o qualità delle cose in generale in quanto sono sottoposte ad un ragionamento distinto, e circa il simile ed il dissimile, e la Logistica od Algebra circa la quantità in generale.[141]
>
> Di qui risulta la sinora ignorata o negletta subordinazione dell'Algebra all'arte Combinatoria, ossia dell'Algebra Speciosa alla Speciosa generale, ossia della scienza delle formule significanti la quantità alla dottrina delle formule o espressioni in generale dell'ordine, della similitudine, della relazione, vale a dire della scienza generale della quantità alla scienza generale della qualità, così che la nostra Matematica speciosa non è altro che una specie illustre dell'Arte Combinatoria o speciosa generale.[142]
>
> La quinta è l'*Arte formularia* che tratta dello stesso e del diverso, del

[140]≪Infatti, se intendete per combinatoria la scienza del trovare il numero delle variazioni, Vi concederò volentieri che essa sia subordinata alla scienza dei numeri e, per conseguenza, all'algebra, poiché anche la scienza dei numeri è subordinata all'algebra, e dal momento che quei numeri [delle variazioni] non si trovano se non addizionando, moltiplicando, ecc. L'arte del moltiplicare, del resto, deriva dalla scienza generale della quantità, che alcuni chiamano Algebra. Ma per me l'arte combinatoria è qualcosa d'assai diverso, cioè la scienza delle forme, o del simile e del dissimile, allo stesso modo in cui l'algebra è la scienza della grandezza o dell'eguale e dell'ineguale; la combinatoria mi pare addirittura differire assai poco dalla scienza caratteristica generale, mediante cui sono o possono essere escogitati segni [characteres] adatti per l'algebra, per la musica ed anche per la logica.≫ *Lettera di Leibniz a Tschirnhaus del maggio 1678*, in Leibniz (1899), pp. 372-82, tr. it. in Leibniz (1968), p. 442.

[141]*De ortu, progressu et natura algebrae, nonnullisque aliorum et proprius circa eam inventis*, in Leibniz (1849), pp. 205-6. Per la traduzione italiana si veda l'introduzione di Mugnai a Leibniz (1968), p. lx.

[142]*Mathesis universalis*, in Leibniz (1849), p. 61. Per la traduzione italiana si veda l'introduzione di Mugnai a Leibniz (1968), p. lx.

> simile e del dissimile, cioè delle forme delle cose, facendo astrazione tuttavia dalla grandezza, dalla posizione, [dall'ordine], dall'azione.[143]
>
> Del resto, l'arte combinatoria, specialmente come io la considero, è quella scienza (che si potrebbe anche chiamare generalmente caratteristica o speciosa) in cui si tratta delle forme delle cose o delle formule in generale, cioè delle qualità in genere, ovverosia del simile e del dissimile, in quanto le varie formule traggono origine dalla combinazione reciproca degli stessi a, b, c, ecc. (sia che essi rappresentino qualità sia che essi rappresentino qualche altra cosa); e che si distingue dall'algebra, la quale tratta delle formule applicate alla quantità, ossia dell'eguale e del diseguale.[144]

Ma cosa distingue grandezza o quantità da forme o qualità? Già si è visto — e i passi citati lo confermano — che la quantità è connessa alla relazione di uguaglianza, mentre la qualità alla relazione di somiglianza. Questa connotazione richiama la concezione di Aristotele, secondo cui il carattere proprio di una quantità è il dirsi uguale e disuguale mentre è solo in virtù della qualità che due cose possono dirsi simili o dissimili.[145]

In un saggio composto dopo il 1714, gli *Initia rerum mathematicarum mataphysica*, Leibniz definisce i concetti matematici di qualità e quantità, implicati dal concetto di posizione [situs], che è ≪il modo della coesistenza≫. La quantità è una determinazione estrinseca delle cose, che può essere conosciuta solo per confronto con un'altra grandezza assunta come unità di misura: la quantità di una cosa può essere determinata solo se un'altra cosa omogenea alla prima è simultaneamente presente, cioè se è compresente. La qualità invece è una determinazione intrinseca che può essere conosciuta osservando una cosa singolarmente.[146] Se due cose possono essere distinte solo se considerate simultaneamente o solo se confrontate con una terza cosa

[143] ≪Quinta est *Ars formularia* quae agit de eodem et diverso, simili ac dissimili, id est de formis rerum, abstrahendo tamen animum a magnitudine, situ, [ordine], actione.≫ *Consilium de Encyclopaedia nova conscribenda methodo inventoria*, in Leibniz (1903), p. 37.

[144] *De synthesi et analysi universali, seu arte inveniendi et judicandi*, in Leibniz (1875), VII, tr. it. *Sintesi e analisi universale* in Leibniz (1968), p. 158.

[145] Cfr. *Categorie* 8.11a in Aristotele (1984), p. 33. Il passo è citato e commentato nel paragrafo 2.1.3 a pag. 68.

[146] ≪*Posizione* [Situs] è il modo della coesistenza. Pertanto essa implica non soltanto la quantità ma anche la qualità. *Quantità* o grandezza è ciò che nelle cose può essere conosciuto mediante la sola compresenza (o percezione simultanea). Così non possiamo conoscere che cosa sia un piede, che cosa sia un braccio se non abbiamo in atto qualcosa quale misura, che si possa quindi applicare agli altri oggetti. Non si può quindi spiegare che cosa sia il piede mediante alcuna definizione che non implichi di nuovo qualcosa di simile. Infatti, anche se diciamo che il piede è di dodici pollici, il medesimo problema sorge per il pollice, e non ne abbiamo luce maggiore: né si può dire se sia precedente per natura la nozione di piede o quella di pollice, poiché dipende dall'arbitrio quale delle due

che le misuri entrambe, allora sono simili, cioè identiche rispetto alla forma. Due cose simili (uguali rispetto alla forma e alla qualità) possono infatti essere distinte solo in base alla quantità e quest'ultima, essendo una proprietà estrinseca, può essere determinata solo con un confronto.

> [...] sono simili quelle cose che osservate una per una non possono esser distinte. La quantità può essere afferrata solo attraverso la compresenza delle cose o con l'intervento di qualcosa che può essere effettivamente applicato ad esse; la qualità, invece, presenta alla mente qualcosa che si può riconoscere nelle cose singolarmente prese e che si può usare nel confronto di due cose, senza prenderle assieme immediatamente o con la mediazione di un terzo *quid* quale misura.[147]

In base alla definizione di uguaglianza come identità di grandezza e di similitudine come identità di forma, la matematica universale o arte combinatoria si applica a tutti gli oggetti e non soltanto a numeri e grandezze: essa pertiene in generale alla metafisica, in quanto è *scienza delle forme*, cioè in quanto studia tutte le possibili relazioni tra oggetti qualunque: è — con le parole di Couturat — la scienza delle relazioni astratte.[148] Due grandezze hanno per Leibniz un rapporto quando non c'è bisogno di ricorrere ad una terza grandezza per confrontarle, cioè quando c'è un numero che esprime il rapporto dell'una rispetto all'altra presa come unità di misura.[149] Leibniz mostra con un esempio che il rapporto è diverso dalla similitudine: due figure

si voglia prendere per base. *Qualità*, invece, è ciò che si può conoscere nelle cose quando sono osservate singolarmente, e non è necessaria la compresenza. Sono tali gli attributi che possono essere spiegati mediante una definizione o attraverso le varie modificazioni che implicano.≫ Cfr. *Initia rerum mathematicarum metaphysica*, in Leibniz (1849), tr. it. in Leibniz (1968), pp. 199-200.

[147]Il testo così prosegue: ≪Immaginiamo che due templi o edifici siano costruiti secondo la regola che niente può essere trovato nel primo che non si trovi anche nell'altro: ed il materiale sia in entrambi lo stesso, ad esempio, marmo Pario; le proporzioni delle pareti, delle colonne, e di tutto il resto, siano le medesime in entrambi, e così pure gli angoli siano eguali, cioè con lo stesso rapporto all'angolo retto. Chi sia condotto in entrambi i templi ad occhi chiusi, e li apra quando è entrato, prima nell'uno e poi nell'altro, non riceve da essi alcun indizio per poterli discernere. E tuttavia essi possono differire per grandezza [...]. Si dirà pertanto che tali templi sono simili, poiché non si potranno distinguere singolarmente o presi per sé, bensì soltanto mediante l'osservazione simultanea reciproca o con una terza cosa.≫ Cfr. *Nova Algebrae promotio*, in Leibniz (1849), VII, pp. 179-80. La traduzione italiana è tratta da Leibniz (1968), p. 200, nota 2.

[148]Cfr. Couturat (1901), pp. 299-300. ≪Notandum est etiam, totam doctrinam Algebraicam esse applicationem ad quantitates Artis Combinatoriae, seu doctrinae de Formis abstractae animo, quae est Characteristica in universum, et ad Metaphysicam pertinet.≫ *Initia rerum mathematicarum metaphysica* (1714), in Leibniz (1849), VII, 24.

[149]Sulla definizione di rapporto e di omogeneità tra grandezze si veda Couturat (1901), p. 300 e ss. e Leibniz (1903), pp. 576-7. Couturat vede in Leibniz il precursore degli studi sulla logica delle relazioni di De Morgan, Peirce, Schröder: ≪si può vedere che Leibniz

simili possono avere diverso rapporto tra aree e lati omologhi e viceversa due figure che hanno stesso rapporto tra aree e lati omologhi possono non essere simili. Dunque i rapporti non sono l'unica relazione di grandezza possibile, quanto piuttosto la più semplice. Per compiere uno studio più generale delle relazioni, Leibniz adotta nella *Mathesis universalis* un segno per indicare una relazione in genere, una relazione indeterminata: egli usa cioè un simbolo generale per relazioni.[150]

Nello *Specimen Geometriae luciferae* Leibniz elenca diversi tipi di relazioni di cui si occupa la matematica universale e che Couturat chiama 'categorie' matematiche: l'identità o coincidenza, l'inclusione o relazione di contenente a contenuto, la determinazione, la congruenza, la similitudine, la relazione del tutto alle parti (che differisce dalla relazione d'inclusione perché si ha solo tra grandezze omogenee), l'uguaglianza e l'ineguaglianza, la continuità, il cambiamento, infine la situazione e l'estensione.[151] In un altro frammento leggiamo:

> In luogo degli assiomi e dei teoremi euclidei intorno alla grandezza e alla proporzione, io ne scopersi altri di importanza assai maggiore e di impiego più generale, intorno ai coincidenti, ai congruenti, ai simili, ai determinati, intorno alla causa e all'effetto, ossia alla potenza, intorno alle relazioni in generale, al contenente e al contenuto, intorno a ciò che accade per sé e per accidente, intorno alla natura generale della sostanza, alla perfetta spontaneità e incorruttibilità delle sostanze, e infine intorno all'unione delle cose e all'armonia delle sostanze tra di loro.[152]

---

aveva schizzato una teoria generale delle operazioni, considerate nelle loro proprietà e relazioni formali, e che egli aveva già quell'idea, tutta moderna, di considerare i segni algebrici stessi come simboli di operazioni indeterminate.≫ Cfr. Couturat (1901), p. 303.

150≪Oltre alla notazione della proporzione [proportio] e del rapporto uso anche talvolta un segno di relazione in genere. Infatti la proporzione è soltanto una specie di relazione, e la più semplice. Ma le relazioni possono variare in modi innumerabili, [...]≫ Cfr. *Mathesis uinversalis*, in Leibniz (1849), VII, p. 57. Si noti che Leibniz, come già molti degli autori secenteschi di cui si è parlato, usa il termine 'proportio' nel significato di rapporto, mentre usa 'analogia' per indicare la proporzione. Nella stessa pagina Leibniz distingue anche il simbolo della similitudine $\sim$ dal simbolo della coincidenza o identità $\propto$.

151Cfr. Couturat (1901), p. 304 e *Specimen Geometriae luciferae*, in Leibniz (1849), p. 260. Sulla differenza tra la relazione di parte a tutto e la relazione di inclusione si veda il frammento XX, datato da Couturat intorno al 1690, in Leibniz (1875), VII, spec. pp. 244-5, tr. it. in Leibniz (1968), p. 386: ≪[...] la parte è nel tutto, ed anche l'indivisibile è nel continuo, come il punto nella linea, sebbene il punto non sia una parte della linea. [...] se i termini che sono contenuti sono omogenei con il termine contenente, vengono chiamati parti e il termine contenente viene chiamato l'intero.≫

152Cfr. *De scientia universali seu calculo philosophico*, in Leibniz (1875), VII, p. 199, tr. it. in Leibniz (1968), pp. 170-1. Il titolo non è leibniziano ma è stato attribuito a questo frammento da Erdmann in *Opera philosophica* (1840), pp. 82-85. Si veda anche il seguente

Lo studio di queste relazioni oltrepassa l'aritmetica, l'algebra e la geometria e riguarda anche la logica, come nel caso dello studio delle relazioni di coincidenza e inclusione, che trovano applicazione nel sillogismo. La *coincidenza* è l'identità pura e semplice; la congruenza è uguaglianza e similitudine insieme: gli oggetti sono indiscernibili, perché la loro diversità concerne soltanto la posizione in cui sono situati. La *similitudine* è l'identità di forma o qualità, il che comporta che due oggetti simili siano indiscernibili se considerati separatamente; l'*uguaglianza* infine è l'identità di grandezza.[153]

La Matematica universale è dunque *scienza generale delle relazioni*. Ciascuna relazione è caratterizzata da un certo numero di proprietà formali e dà luogo a una teoria speciale con i suoi assiomi e i suoi teoremi e ad un calcolo di cui gli assiomi costituiscono le regole operative, cioè ad un'algebra. Di tutte queste algebre, Leibniz ne sviluppa due: il calcolo logico e quello geometrico. Il calcolo geometrico comprende principalmente le teorie della congruenza e della similitudine; il calcolo logico le teorie dell'identità e dell'inclusione (quest'ultima si applica sia alla logica sia alla geometria).

Riassumendo, si è dunque visto come Leibniz contrapponga la quantità o grandezza alla forma o qualità delle cose e come introduca il concetto di una matematica universale che non comprende soltanto la parte della matematica usualmente definita come scienza delle grandezze o quantità ma anche una parte rivolta allo studio di relazioni non riducibili a rapporti e proporzioni tra le cose e che egli chiama scienza delle forme. Pochissimi tra tutti i testi leibniziani citati sono stati pubblicati durante la sua vita, e molti di essi soltanto tra la metà dell'Ottocento e i primi anni del Novecento. Soltanto uno degli inediti citati è stato pubblicato da Erdmann nel 1840 e dunque era diffuso al momento della pubblicazione della *Ausdehungslehre* di Graßmann. Affronteremo la delicata questione del rapporto tra Leibniz e Graßmann nei prossimi capitoli, sia in relazione al calcolo geometrico sia in relazione alla definizione di matematica come scienza delle forme. Più che della problematica storica relativa all'influenza di Leibniz su Graßmann, trattata da Echeverria in un articolo apparso sugli *Studia Leibnitiana* nel 1979, focalizzeremo però

passo: ≪Utuntur vel uti possunt Geometrae variis notionibus aliunde sumtis, nempe de eodem et diverso seu de coincidente et non coincidente, de eo quod inest vel non inest, de determinato et indeterminato, de congruo et incongruo, de simili et dissimili, de toto et parte, de aequali, majori et minori, de continuo aut interrupto, de mutatione, ac denique quod ipsis proprium est de situ et extensione.≫ Cfr. *Specimen Geometriae luciferae*, in Leibniz (1849), p. 260.

[153]Dopo aver fornito questa definizione di congruenza sulla base dell'uguaglianza e della similitudine, Leibniz tenta anche di fare il contrario. Congruenza, uguaglianza e similitudine godono delle proprietà transitiva e simmetrica di gui gode anche l'identità, della quale esse sono forme parziali.

l'attenzione su un confronto teorico delle due definizioni per comprendere somiglianze e differenze relative al concetto di forma.

Capitolo 3

La definizione ‘tradizionale’ di scienza delle grandezze

3.1 Da grandezza in generale a grandezza estensiva

3.1.1 Wolff e l’introduzione del termine Größe

In Leibniz i termini ‘grandezza’ e ‘quantità’, espressi rispettivamente dai termini latini ‘magnitudo’ e ‘quantitas’, sono generalmente trattati come sinonimi. Infatti per quantità Leibniz intende la quantità di qualunque tipo di enti, cioè la grandezza in generale, distinta dalla quantità dei corpi estesi, che è l’oggetto specifico della geometria (cfr. il passo della *Dissertatio* citato nel § 2.3.2 a pagina 109). Questa sinonimia è istituzionalizzata nella lingua tedesca dalla scelta di Christian Wolff di tradurre il termine latino ‘quantitas’ con l’espressione tedesca ‘Größe’, che etimologicamente (groß = grande) significa invece ‘grandezza’.[1]

Nel 1716, nel suo *Mathematisches Lexicon*, Christian Wolff introduce termini tedeschi per i principali concetti della matematica, creando un linguag-

[1]Anzi, proprio perché il termine ‘Größe’ era divenuto sinonimo di grandezza o quantità matematica e cioè di *quanta*, di cose dotata di quantità o grandezza, i filosofi hanno poi introdotto il termine ‘Quantität’ ricalcato sul latino ‘Quantitas’ per esprimere il concetto astratto di quantità. Un tale uso si trova ad esempio in Kant e in Hegel, che scrive: ≪Coll’espressione di *grandezza* [Größe] si intende il *quanto* [Quantum], come negli esempi addotti, non la quantità [Quantität]; per cui, per avere un termine che esprimesse questo concetto, si è dovuto far ricorso ad una lingua non germanica. La definizione, che in matematica si dà della *grandezza* [Größe], riguarda anch’essa il quanto [Quantum].≫ *Wissenschaft der Logik*, vol. I, libro 1, sez. 2: La grandezza (Quantità), Nota, in Hegel (1812), I, pp. 196-7.

gio tecnico per la matematica, così come in altre opere ha fatto per la filosofia. Abbiamo riportato in appendice (cfr. il § 7.1 a pag. 349) alcune voci particolarmente significative tratte dal dizionario, ovverosia i concetti di matematica (vera e propria, applicata e universale), di quantità e di numero. È interessante notare che il concetto di grandezza (corrispondente al latino 'magnitudo') non è presente tra le voci del dizionario; il termine 'quantitas', però, è espresso con 'Größe', che significa ciò che Leibniz chiama quantità o grandezza e dunque sancisce il compimento di un processo progressivo di fusione del significato dei due termini di cui abbiamo tratteggiato alcuni momenti. Vediamo però più da vicino come Wolff definisca la quantità e che rapporto abbia quest'ultima con la definizione del concetto di matematica.

'Quantitas' o 'Größe' è ciò che si può aumentare (vermehren) o diminuire (vermindern). La considerazione della scelta dei termini 'vermehren' e 'vermindern' che derivano dai termini 'mehr' und 'minus', cioè dai simboli aritmetici 'più' e 'meno', indica già il significato algebrico che Wolff attribuisce alla grandezza.[2] Essa è quantità in quanto è soggetta alle operazioni algebriche: e infatti Wolff aggiunge che 'quantitates' sono numeri indeterminati rappresentati in algebra da lettere e sui quali si possono svolgere le stesse operazioni che si svolgono tra i numeri aritmetici. Dire che le quantità sono numeri indeterminati non significa però per Wolff soltanto che essi sono concetti simbolici di numero come in Viète. Wolff si riferisce anche alle grandezze geometriche, considerate però come numeri indeterminati nel senso che non è stata stabilita un'unità di misura per misurarle.[3]

In Wolff non sono univoche né la definizione del concetto di 'quantitas' né l'introduzione del termine 'Größe'. Infatti 'Größe' traduce non solo 'quantitas', ma anche 'Moles e Volumen', cioè mole o volume. Quest'ultimo è, secondo la definizione di Wolff, ≪lo spazio che il corpo occupa secondo la sua lunghezza, larghezza e profondità≫. L'uso di grandezza in questa accezione introduce confusione, perché un concetto specificamente geometrico viene tradotto con lo stesso termine di un concetto generale; tuttavia sotto questo aspetto si potrebbe dire che Wolff non fa che perpetuare un'ambiguità rimproverata allo stesso Euclide presente già negli *Elementi*, mantenendo la stessa duplicità semantica che in Euclide aveva il termine μέγεθος.[4]

[2]Si ricordi che la definizione di grandezza come ciò che riceve il più e il meno era stata data da Descartes nelle *Regulae*, pubblicate in latino nel 1701. Cfr. il § 2.3.1 a pagina 100.

[3]Questa definizione è vicina all'uso del simbolismo cartesiano di figure più che non alla definizione leibniziana di quantità data negli *Initia rerum mathematicarum metaphysica*, in cui appariva essenziale per la determinazione della quantità stessa la compresenza di due cose: una da misurare ed un'altra omogenea che ne fosse la misura.

[4]D'altra parte il concetto geometrico cui Euclide faceva riferimento era molto preciso: si trattava di lunghezza, area e volume, cioè delle misure (espresse come rapporti e non

Oltre al duplice uso di 'Größe' per esprimere 'quantitas' e 'moles' o 'volumen', Wolff dà due definizioni di quantità, che egli ritiene probabilmente sinonime ma che sono lievemente diverse. Abbiamo detto che 'quantitas' è propriamente definita come ciò che si può aumentare (vermehren) o diminuire (vermindern), ma introducendo la definizione della matematica come «scienza delle quantità», egli afferma che le quantità (Größen) sono tutte le cose suscettibili di essere ingrandite (vergrößern) o rimpicciolite (verkleinern).

I verbi 'vergrößern' e 'verkleinern' derivano dai termini 'gross' e 'klein' — grande e piccolo — e sono dunque associati etimologicamente al concetto di grandezza. Mentre i termini 'vergrößern' e 'verkleinern' lasciano indeterminato il tipo di variazione della grandezza o tutt'al più sottendono una variazione continua, i termini 'vermehren e 'vermindern' implicano che la variazione sia discreta, perché essi hanno precisamente il significato di aumentare di un'unità e di diminuire di un'unità. Ciò che è interessante in questa differenza, che Graßmann non mancherà di notare, è soprattutto il diverso contesto in cui appaiono le due definizioni. La caratterizzazione 'discreta' si ha nella definizione del concetto di quantità all'interno di un contesto essenzialmente algebrico, sia a testimonianza dell'uso generale del termine quantità per indicare il riferimento dei simboli algebrici, sia a testimonianza dell'ormai avvenuta identificazione tra l'oggetto della teoria delle proporzioni e la grandezza. La caratterizzazione più generale (continua) delle quantità si ha all'interno della definizione di matematica, le cui parti sono geometria, aritmetica e algebra. D'altra parte la matematica è considerata scienza delle quantità in quanto è «scienza che misura tutto ciò che è suscettibile di misura» e la misura ha tradizionalmente a che fare con grandezze continue.

Per comprendere questo interscambio tra discreto e continuo, tra numero e grandezza, occorre ricercare la definizione che Wolff dà del concetto stesso di numero. Accanto alla tradizionale definizione euclidea di numero come insieme di unità, come numero di un aggregato di cose, Wolff richiama infatti la definizione di numero data nel § 10 dei suoi *Elementa Arithmeticae*: un numero è ciò che si rapporta all'unità come una linea retta ad un'altra linea retta. Questa definizione permette di definire come numeri sia i numeri razionali sia i numeri irrazionali sia l'unità stessa, cioè tutti quegli oggetti sulla cui natura a lungo si era discusso tra Cinquecento e Seicento. La testimonianza di Wolff ben riflette le incertezze ancora diffuse sulla natura del numero e sul modo di darne una definizione più generale possibile. Wolff definisce il numero per mezzo di un rapporto tra grandezze omogenee: in altre parole

come numeri) delle figure geometriche, mentre in Wolff non è sempre chiaro se si intendano le misure o non piuttosto l'estensione in senso cartesiano, il luogo occupato da un corpo.

il numero è definito essenzialmente come ciò che esprime la misura di una grandezza geometrica. Dei numeri così intesi, nei quali sono ora inclusi razionali e irrazionali, si può effettivamente predicare la stessa continuità delle grandezze (sono infatti definiti in base a tale continuità) e dunque si comprende anche l'ambiguità del concetto di quantità definito talvolta mediante espressioni numeriche talvolta mediante espressioni relative alla grandezza.[5]

La definizione di matematica come scienza delle quantità o scienza della misura di cui si è parlato finora comprende per Wolff solo una parte della matematica in senso generale, cioè della *Mathesis universalis*. A questo proposito Wolff ben riassume diverse anime che la *Mathesis universalis* ha avuto nel secolo precedente: da nome per l'arte del calcolo letterale a riunione di calcolo aritmetico e calcolo algebrico in Wallis (cfr. § 2.2.2 a pag. 94) a studio delle proprietà generali delle grandezze (cfr. Viète, Descartes, Newton). Egli adotta infine la concezione leibniziana secondo cui la *Mathesis universalis* non concerne solo le grandezze o quantità ma tutte le cose e tuttavia afferma che matematica generale sono ≪le scienze in cui si danno le regole generali per misurare tutte le cose≫, mentre abbiamo visto che per Leibniz la *Mathesis universalis* non ha a che fare soltanto con la misura e la quantità, ovverosia con la relazione di uguaglianza, ma anche con svariati altri tipi di relazioni tra le cose e dunque anche con qualità.

3.1.2 D'Alembert e le voci dell'Encyclopédie

Nell'*Encyclopèdie*, anche perché la voce aritmetica è tradotta dalla corrispondente voce della *Cyclopaedia* di Chambers, d'Alembert non parla di *Mathesis universalis*, ma, secondo l'uso già di Wallis e poi di Newton, di *Arithmetica universalis*.[6] D'Alembert distingue due parti: l'*Algebra* vera e propria, che contiene le regole del calcolo delle quantità rappresentate da simboli (le regole delle operazioni algebriche) e l'*Analisi*, che contiene la teoria delle equazioni, cioè l'uso del metodo generale di calcolo per scoprire le quantità che si cercano per mezzo delle quantità note determinandone in forma di equazione il rapporto. Altrove d'Alembert definisce la differenza tra Algebra e Analisi affermando anche che l'Algebra è la scienza del calcolo delle grandezze in

[5]La definizione che Wolff dà del numero riprende la definizione come rapporto tra grandezze espressa nell'*Arithmetica universalis* di Newton: ≪By *Number* we understand not so much a Multitude of Unities, as the abstracted Ratio of any Quantity, to another Quantity of the same kind, which we take for Unity. And this is threefold; integer, fracted, and surd: An integer is what is measured by Unity, a Fraction, that which a submultiple Part of Unity measures, and a Surd, to which Unity is incommensurable.≫ Cfr. Newton (1707), p. 2.

[6]In Appendice sono parzialmente tradotte le seguenti voci dell'*Encyclopédie*: Aritmetica, Matematica, Misura, Misurare, Quantità. Cfr. il § 7.2 a pagina 353.

generale, mentre l'Analisi è il mezzo per impiegare l'Algebra nella soluzione dei problemi.

Se l'Algebra nella voce 'Aritmetica' è caratterizzata essenzialmente dall'estensione delle operazioni aritmetiche al caso in cui i numeri siano sostituiti da simboli più generali, nella voce 'Geometria' l'Algebra è anche considerata come Geometria simbolica e come Geometria metafisica, perché permette di esprimere gli oggetti geometrici mediante simboli e permette di applicare la geometria a tutte le altri parti della matematica: la matematica infatti si occupa sempre e solo del confronto tra grandezze e la grandezza in generale può essere rappresentata per mezzo di linee, superfici, solidi (come si è visto in Descartes).

Dunque aritmetica universale, geometria metafisica, algebra in senso lato, matematica generale sono tutti nomi per una stessa scienza simbolica che studia il confronto tra grandezze in generale. Grandezza appare in questo contesto come sinonimo di quantità algebrica e si applica tanto al numero quanto all'estensione. Proprio per mezzo di queste due grandezze d'Alembert definisce la matematica: essa è la scienza che ha per oggetto le proprietà della grandezza per quanto essa è calcolabile (numero) o misurabile (estensione) e si divide pertanto in aritmetica o arte del numerare, che studia le proprietà dei numeri, e in geometria, che studia le proprietà dell'estensione. La matematica così intesa può anche essere chiamata pura, in quanto studia le proprietà delle grandezze in modo astratto. Se invece la matematica studia le proprietà delle grandezze concrete essa si dice mista, perché considera le proprietà delle grandezze in certi corpi o soggetti particolari: tale studio è proprio della meccanica, dell'ottica, dell'astronomia, della geografia, della cronologia, dell'architettura militare, dell'idrostatica, dell'idraulica, dell'idrografia o navigazione, ecc.

Questa distinzione tra grandezza astratta e grandezza concreta presenta però alcuni problemi, perché altrove d'Alembert afferma che «la grandezza astratta è quella la cui nozione non designa alcun soggetto particolare» e che dunque comprende soltanto i numeri o grandezze numeriche, mentre «la grandezza concreta è quella la cui nozione contiene un soggetto particolare» e può essere composta o di parti coesistenti o di parti successive, contenendo dunque l'estensione e il tempo, e fa corrispondere alla grandezza astratta la quantità discreta e alla grandezza concreta la quantità continua. Sorgono così alcune domande: i termini 'grandezza' e 'quantità' sono usati come sinonimi? le grandezze astratte sono discrete e le concrete continue? la grandezza geometrica continua è una grandezza astratta o concreta?

Ad essere sinonimi sono le espressioni 'grandezze calcolabili e misurabili' e 'quantità': la matematica è infatti definita non solo come scienza delle proprietà della grandezza per quanto essa è calcolabile o misurabile ma anche come «scienza delle quantità», perché quantità è «tutto ciò che è suscettibile di misura o che, confrontato con cose della stessa specie, può essere detto più grande o più piccolo, o uguale o disuguale». Le 'quantità' così definite e le 'grandezze calcolabili e misurabili' altro non sono che le 'grandezze in generale' dell'algebra, che infatti è applicabile tanto all'aritmetica che alla geometria. In tal senso esse vanno distinte dalle grandezze intese in senso specifico come grandezze geometriche continue: di tali grandezze in senso specificamente geometrico parla d'Alembert quando, riferendosi alla matematica antica, osserva che la quantità si chiama *grandezza* se si applica ad un solo oggetto e *moltitudine* o *numero* se si applica a parecchi oggetti. Per gli antichi — continua d'Alembert — due erano infatti le specie di quantità: la grandezza o quantità continua e il numero o quantità discreta, mentre dai moderni la quantità è stata definita per mezzo di una proprietà comune a numeri e grandezze geometriche, cioè la proprietà di poter essere aumentate o diminuite: in questo senso è quantità la grandezza in generale, almeno per chi accetti la definizione di quest'ultima come «tutto ciò che è suscettibile di aumento e di diminuzione».[7] Questo passo mostra chiaramente la differenza tra il senso specifico di grandezza proprio della geometria e il senso generale proprio dell'algebra: solo in quest'ultimo senso il termine 'quantità' può essere considerato sinonimo del termine 'grandezza'.

Resta però da affrontare la seconda questione: le grandezze astratte sono discrete e quelle concrete continue? e in particolare le grandezze geometriche continue sono astratte o concrete? il che significa chiedersi: la geometria è parte della matematica pura o della matematica mista? Poiché d'Alembert ritiene che la geometria sia parte della matematica pura insieme all'aritmetica e all'algebra, se ne dovrebbe dedurre che le grandezze geometriche continue sono grandezze astratte e dunque che la corrispondenza tra grandezze astratte e quantità discrete è riportata come affermazione di altri piuttosto che come affermazione propria. La geometria è infatti studio delle proprietà dell'estensione (e l'estensione è una grandezza concreta) ma solo in quanto si considera l'estensione come semplicemente estesa e figurata (il che riconduce l'estensione ad una grandezza astratta dall'oggetto concreto che ha estensione). Tuttavia è significativo insistere su questa ambivalenza, perché si trova alla base dell'idea, che si sviluppa progressivamente nel Settecento, che la geometria non sia altrettanto pura dell'aritmetica proprio perché le grandezze di cui essa si occupa non sono altrettanto astratte di quelle di cui si occupa l'aritmetica. E infatti nell'Ottocento, soprattutto dopo la scoperta delle geometrie euclidee che evidenzia uno scarto netto tra spazio matematico-astratto

[7] Anche d'Alembert, come già Wolff, riprende la definizione cartesiana di grandezza come ciò che riceve il più e il meno. Cfr. il § 2.3.1 a pagina 100.

e spazio fisico, la geometria sarà spesso considerata sdoppiata in due parti: l'una appartenente alla fisica e avente per scopo lo studio delle grandezze estese concrete e delle proprietà dello spazio fisico in cui viviamo, l'altra appartenente alla matematica pura e avente per scopo lo studio puramente astratto dell'estensione.

3.1.3 Il concetto di matematica in Euler e in Gauss

Che la matematica sia scienza delle grandezze è ripetuto da diversi autori nella seconda metà del Settecento, tra cui anche Euler e Gauss. Nel primo capitolo di *Vollständige Anleitung zur Algebra* (1770) Euler definisce grandezza, come già Wolff e d'Alembert sulla scia di Descartes, ≪tutto ciò che è suscettibile di un aumento o di una diminuzione≫ e ritiene che le diverse parti della matematica si occupino dei diversi tipi di grandezza, mentre ≪la matematica in generale non è nient'altro che una scienza delle grandezze≫, o meglio una scienza della determinazione del rapporto in cui ciascuna grandezza sta con una grandezza assunta come nota.[8] Euler assume infatti la definizione newtoniana di numero per cui esso è ≪il rapporto in cui sta una grandezza rispetto ad un'altra che sia assunta come unità≫. Poiché dunque tutte le grandezze possono essere espresse da numeri, il fondamento della matematica è lo studio della teoria dei numeri e di tutti i tipi di calcolo, cioè l'algebra.

L'idea che una cosa sia una grandezza solo se essa è suscettibile di aumento o di diminuzione non è così indeterminata come a prima vista si potrebbe pensare.[9] Consideriamo l'esempio di Euler: ≪Così quando deve essere determinata la grandezza di una somma di denaro, si assume come nota una certa moneta [lett.: quantità di denaro] — ad esempio un fiorino, un rublo, un tallero o un ducato e simili — e si mostra quante di tali monete sono contenute nella detta somma di denaro.≫ L'esempio mostra che ciò che caratterizza una grandezza è essenzialmente il fatto che essa possa essere ottenuta come

[8]Cfr. il § 7.3 a pag. 361.

[9]Nel secondo capitolo di *A Philosophy of Mathematics* L.O. Kattsoff critica la definizione di matematica come scienza delle grandezze che si trova in Euler, affermando che il suo tentativo di caratterizzare la grandezza come ciò che è suscettibile di aumento o di diminuzione lascia indeterminato che cosa si debba intendere per grandezza. ≪Even Euler's comment that a magnitude is something which is capable of increase or diminution or to which something can be added or subtracted, although a step in the direction of greater precision, is vague and unclear.≫ Cfr. Kattsoff (1948), p. 9. Come abbiamo detto, però, la definizione di grandezza come ciò che può essere aumentato o diminuito si trova già nel *Mathematisches Lexicon* di Wolff del 1716 e nelle voci dell'*Encyclopédie* e risale non a Euler ma a Descartes: se di definizione indeterminata si tratta essa non è tuttavia da attribuire ad Euler.

somma di grandezze date (ad esempio come somma ripetuta dell'unità). Sottesa a questa definizione vi è l'idea che ancora oggi caratterizza le grandezze estensive nella teoria della misurazione, ovverosia che esse si distinguano dalle altre grandezze (quelle intensive) perché vale tra di esse un'operazione con le stesse proprietà dell'addizione tra numeri.[10] Proprio per questa caratteristica le grandezze di cui qui si parla possono essere considerate come numeri (tramite il rapporto che ciascuna di esse ha rispetto all'unità): è possibile infatti stabilire tra di esse un'operazione di addizione analoga a quella aritmetica.

In Gauss la definizione ormai tradizionale di matematica come scienza delle grandezze o quantità è accompagnata da una distinzione tra grandezze estensive e grandezze intensive. Nello scritto *Sulla metafisica della matematica* composto probabilmente nei primi anni dell'Ottocento e di cui riportiamo in Appendice la traduzione italiana (cfr. il § 7.4 a pagina 363) Gauss afferma che la matematica ha per oggetto «le grandezze estensive (quelle di cui si possono pensare delle parti) e le grandezze intensive (tutte quelle non estensive) solo in quanto dipendono da grandezze estensive.»

Le grandezze estensive sono definite come quelle di cui si possono pensare delle parti. Esempi di grandezze estensive sono «lo spazio o le grandezze geometriche, che comprendono linee, superfici, corpi e angoli, il tempo, il numero». È anche interessante osservare che nella definizione dell'oggetto proprio della matematica Gauss fa riferimento alle relazioni tra grandezze: come Descartes e come Leibniz, Gauss insiste sul concetto di relazione come oggetto vero e proprio della matematica. All'interno di tutti i possibili tipi di relazione tra grandezze ve ne sono alcune che egli considera come elementari, cioè le quattro operazioni aritmetiche di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. Addizione e sottrazione esprimono infatti la relazione del tutto alle sue parti (contenuta nel concetto stesso di grandezza estensiva, caratterizzato dall'addizione), mentre moltiplicazione e divisione esprimono la relazione del semplice e del multiplo. Si ha dunque ancora una volta un riferimento essenziale alla teoria euclidea delle grandezze, e in particolare alle nozioni comuni del libro I che determinano il rapporto tra il tutto e le sue parti e alle definizione del libro V che determinano il rapporto tra una grandezza e i suoi multipli e sottomultipli.

Gauss distingue poi un rapporto numerico tra grandezze da un rapporto geometrico e anche questo è un elemento molto interessante. Nella *Encyclopédie* il rapporto numerico tra due grandezze era costituito dall'operazione di addizione (e sottrazione), mentre il rapporto geometrico tra due grandezze era costituito dall'operazione di moltiplicazione (e divisione). In

[10] Cfr. il § 3.3.3 a pagina 149.

Gauss invece c'è l'idea di una differenza tra la considerazione dell'ordine e la considerazione della posizione. Benché il compito fondamentale della matematica sia unico e sia quello di rappresentare grandezze ignote per mezzo di grandezze note, ci sono due modi di rappresentare le grandezze: in modo mediato e in modo immediato. In ciò consiste la differenza tra rappresentazione geometrica o costruzione e rappresentazione aritmetica: la geometria infatti rappresenta effettivamente la grandezza cercata, mentre l'aritmetica, poiché lo fa con mezzi algebrici, fornisce piuttosto il modo di rappresentare la grandezza cercata mediante il suo rapporto ad una grandezza data immediatamente. La rappresentazione algebrica in questo senso è sempre una rappresentazione mediata, perché indica mediante numeri quante volte ci si debba rappresentare la grandezza data (l'unità di misura) per ottenere la grandezza cercata.

3.1.4 Grandezze intensive ed estensive

Abbiamo visto che Gauss caratterizza la matematica come scienza delle grandezze estensive e che il carattere distintivo delle grandezze estensive è la possibilità di pensarne delle parti. Perché le grandezze estensive sono oggetto specifico della matematica? E perché le grandezze estensive o quantità sono definite a partire da un certo punto (almeno dalle *Regole* di Descartes, cioè dagli anni Trenta del Seicento in poi) come ciò che si può aumentare o diminuire se per Aristotele non la quantità ma la qualità era soggetta al più o al meno?

Non è certo questo il luogo per ricostruire la storia della distinzione tra grandezze intensive e grandezze estensive, vogliamo tuttavia ricordare quanto sarebbe importante ripercorrere le tappe di tale differenziazione concettuale per spiegare in che senso la matematica è essenzialmente scienza delle grandezze estensive e solo in senso derivato anche scienza delle grandezze intensive. Annelise Maier sostiene che già in Tommaso d'Aquino emergerebbe la differenza essenziale tra la l'operazione di togliere o aggiungere simile all'operazione tra numeri e l'operazione di aumentare di un grado un'intensione: la carità non può aumentare per addizione ma per gradi.[11] Emergerebbe dunque già in Tommaso la differenza essenziale tra intensivo ed estensivo relativa ad un certo modo di ottenere il tutto o per somma di parti o per aumento di grado.

Ciò che nel Settecento caratterizza le grandezze estensive (accenneremo tra poco almeno alle definizioni di Wolff e di Kant) rispetto alle grandezze intensive è proprio un certo tipo di rapporto tra le parti e il tutto: poiché le

[11] Cfr. Maier (1951), p. 27.

parti in cui il tutto è divisibile sono le une esterne alle altre è possibile stabilire tra di esse un'operazione di addizione in modo che la somma delle parti dia il tutto e che ogni aumento o diminuzione possa essere spiegato mediante aggiunzione o sottrazione di parti. Poiché proprio questa caratteristica è espressa nei principi della teoria generale delle equazioni e delle proporzioni intesa come matematica generale, ben si comprende perché la matematica abbia per oggetto le grandezze estensive: queste infatti sono proprio le grandezze che ricevono il più e il meno nel senso di essere soggette alle relazioni e alle operazioni algebriche prescritte dalla matematica generale intesa come teoria generalizzata delle proporzioni.

Wolff analizza la natura delle grandezze estensive ed intensive cercando di definire le seconde per analogia con le prime: come le grandezze estensive aumentano e diminuiscono per aggiunta o sottrazioni di parti, così l'aumento o diminuzione del grado di una grandezza intensiva o qualità sarebbe determinato dall'aggiunta o dalla sottrazione di parti che però non sono le une esterne alle altre come nel caso delle grandezze estensive ma soltanto immaginarie. Le parti del grado di una grandezza intensiva non possono dunque essere riunite né è possibile dividere la grandezza allo stesso modo in cui è possibile dividere una linea nelle parti che la compongono (e la cui somma dà appunto la linea).[12]

Kant distingue grandezze estensive e grandezze intensive nel secondo capitolo della *Critica della Ragion Pura* (l'Analitica dei principi), dedicato alla rappresentazione sistematica di tutti i principi sintetici dell'intelletto puro, ma anche nei *Principi metafisici* e nella *Metafisica* di Pölitz. Già nei *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (1786) Kant distingue tra grandezze estensive, le cui parti sono esterne le une alle altre, e grandezze intensive, la cui costruzione deve avvenire non per aggiunzione di parti ma in un qualche altro modo. Non è evidente — scrive Kant — che due velocità uguali si possano unire come due spazi uguali e che una certa velocità sia composta di velocità più piccole come lo spazio è composto di spazi più piccoli, «poiché le parti della velocità non sono le une esterne alle altre come le parti dello spazio e se quella [la velocità] deve essere considerata come grandezza, allora il concetto di quella grandezza, poiché essa è intensiva, deve essere costruita in un altro modo rispetto al concetto della grandezza estensiva dello spazio.»[13] La composizione di due movimenti non può infatti essere

[12]Cfr. Ch. Wolff, *Philosophia prima sive ontologia*, §§ 750-57, § 789, in Wolff (1730).

[13]«[...] so wird hier etwas angenommen, was sich nicht von selbst versteht, nämlich: daß sich zwei gleiche Geschwindigkeiten eben so verbinden lassen, als zwei gleiche Räume, und es ist nicht für sich klar, daß eine gegebene Geschwindigkeit aus kleinern und eine Schnelligkeit aus Langsamkeiten eben so bestehe, wie ein Raum aus kleineren; denn die Theile der Geschwindigkeit sind nicht außerhalb einander, wie die Theile des Raumes, und

compiuta che mediante un terzo movimento e dunque si può avere solo una realizzazione meccanica del concetto di velocità, cioè eseguibile soltanto in natura o artificialmente mediante strumenti e forze, e non una costruzione matematica del contenuto del concetto che dovrebbe rendere intuibile che cosa sia l'oggetto come 'quantum'.[14] Da questo passo emerge con chiarezza la differenza essenziale tra le grandezze intensive e le grandezze estensive: mentre la composizione di due velocità richiede una costruzione meccanica, poiché le sue parti non sono le une esterne alle altre, un segmento di retta può essere sempre ottenuto come composizione di due segmenti con una costruzione matematica, perché le sue parti sono invece esterne le une alle altre e dunque la somma di grandezze ha le proprietà usuali dell'addizione aritmetica.

Anche nelle *Vorlesungen über die Metaphysik (Pölitz)* apparse postume nel 1821 Kant distingue grandezze estensive ed intensive: nelle prime è sempre possibile individuare insiemi di parti omogenee mentre questo non è possibile nelle seconde. Tutto ciò che può essere rappresentato nello spazio e nel tempo ha una grandezza estensiva, mentre ciò che è semplice può essere pensato come grandezza intensiva.[15] Qui emerge un altro elemento interessante: le grandezze estensive sono associate alla possibilità di determinare parti omogenee di esse, cioè parti che possono essere sommate e confrontate secondo la teoria generale delle proporzioni. Qui emerge anche il fatto, ampiamente spiegato nella *Critica della ragion pura*, che le intuizioni sono

wenn jene als Größe betrachtet werden soll, so muß der Begriff ihrer Größe, da sie intensiv ist, auf andere Art construirt werden, als der der extensiven Größe des Raumes.≫ Cfr. Kant (1900), IV, p. 493.

[14]≪Endlich, was die Zusammensetzung zweier Bewegungen, deren Richtung einen Winkel einschließt, betrifft, so läßt sie sich an dem Körper in Beziehung auf einen und denselben Raum gleichfalls nicht denken, wenn man nicht gar eine derselben durch äußere, continuirlich einfließende Kraft (z.E. ein den Körper forttragendes Fahrzeug) gewirkt, die andern als sich selbst hiebei unverändert erhaltend annimmt, oder überhaupt, man muß bewegende Kräfte und Erzeugung einer dritten Bewegung aus zwei vereinigten Kräften zum Grunde legen, welches zwar die mechanische Ausführung dessen, was ein Begriff enthält, aber nicht die mathematische Construction derselben ist, die nur anschaulich machen soll, was das Object (als Quantum) sei, nicht wie es durch Natur oder Kunst vermittelst gewisser Werkzeuge und Kräfte hervorgebracht werden könne.≫ Cfr. Kant (1900), IV, p. 494.

[15]≪Alle Größen (quantitates) kann man zweifach betrachten: entweder extensiv oder intensiv. Es giebt Gegenstände, in denen wir keine Menge von gleichartigen Theilen unterscheiden; dies ist die intensive Größe. Diese Größe ist der Grad. Die Gegenstände, in denen wir eine Menge von gleichartigen Theilen unterscheiden, haben extensive Größe. Die intensive Größe ist die Größe des Grundes, und die extensive Größe ist die Größe des Aggregats. Alles, was im Raum und in der Zeit vorgestellt wird, hat extensive Größe. Alle Realität im Raume und in der Zeit hat einen Grad. — Es kann etwas Einfaches als Größe gedacht werden, obgleich keine Menge dabei statt finden kann; also als intensive Größe.≫ Cfr. Kant (1821), p. 53.

quantità estensive: le intuizioni sono infatti rappresentazioni nello spazio e nel tempo.

Estensive sono nella *Critica* le grandezze in cui la rappresentazione delle parti rende possibile la rappresentazione del tutto: ciascuna grandezza deve cioè poter essere ottenuta come somma di parti omogenee. Se la grandezza estensiva è caratterizzata dal rapporto con le sue parti, la grandezza intensiva è invece definita da Kant come quella grandezza ≪che è appresa soltanto come unità, e in cui la molteplicità può essere rappresentata solo per approssimazione alla negazione = 0.≫ [16] Nella grandezza intensiva non si considera dunque il rapporto tra questa e le sue parti, ma essa è appresa come unità, come un semplice: essa è anche interamente data in un istante di tempo, mentre la grandezza estensiva è generata nel tempo. Mentre la grandezza intensiva rappresenta un'unità qualitativa non composta, la grandezza intensiva è un'unità quantitativa ottenuta per sintesi successiva e attraverso di essa sono collegati gli elementi dello spazio e del tempo.[17] Nella *Critica della ragion pura* il concetto di grandezza estensiva è infatti introdotto proprio per spiegare che le intuizioni sono quantità estensive mentre le sensazioni hanno un grado o quantità intensiva.

3.2 Oltre la definizione 'tradizionale'?

L'ambiguità nell'uso del termine 'Größe' — che può significare il concetto generale di quantità (e cioè numeri, grandezze discrete e continue) ma anche il concetto ristretto di grandezza geometrica continua — e lo sviluppo di nuove parti della matematica, quali l'analisi combinatoria, suscitarono le prime riflessioni sull'adeguatezza della definizione di matematica come scienza delle grandezze. Oltre a chi, come Kant, riteneva che una definizione generale di matematica potesse essere data in base alla sua forma e non in base ai suoi oggetti, vi era chi, come Bernard Bolzano e Hermann Graßmann, rifiutava la definizione di matematica come scienza delle grandezze osservando come alcuni nuovi campi d'indagine non avessero per oggetto delle grandezze. Analizzeremo ora brevemente le osservazioni di Kant e di Bolzano (che in una seconda fase fa ritorno alla definizione di matematica come scienza delle grandezze) mentre tratteremo più ampiamente nel prossimo capitolo la concezione della matematica di Hermann Graßmann.

[16] ≪Nun nenne ich diejenige Größe, die nur als Einheit apprehendirt wird, und in welcher die Vielheit nur durch Annäherung zur Negation = 0 vorgestellt werden kann, die intensive Größe.≫ Cfr. *Kritik der reinen Vernunft*, B210, tr. it. in Kant (1787), p. 154.

[17] Cfr. Kant (1787), p. 149 ss.

3.2.1 Kant: la matematica come scienza per costruzione di concetti

Nella parte della *Kritik der reinen Vernunft* intitolata *Dottrina trascendentale del metodo* Kant muove una critica alla definizione tradizionale della matematica come scienza delle grandezze o quantità e propone una nuova definizione filosofica. Ciò che distingue la matematica dalla filosofia non è secondo Kant il fatto che la prima tratti di quantità mentre la seconda di qualità, bensì il fatto che la prima è conoscenza razionale per costruzione di concetti mentre la seconda è conoscenza razionale per concetti, ove costruire un concetto significa esporre a priori un'intuizione corrispondente.[18] Distinguere la matematica dalla filosofia affermando che essa si occupa di quantità mentre la filosofia si occupa di qualità — prosegue Kant — significa scambiare l'effetto per la causa: la forma della matematica è la causa per cui essa si riferisce a quantità.[19] Abbiamo visto prima, infatti, che la matematica si occupa di quantità estensive, e che le intuizioni sono tutte quantità estensive perché sono nello spazio e nel tempo: dunque se la matematica è definita come scienza razionale per costruzione di concetti e se gli unici concetti costruibili (che si possono cioè esporre a priori nell'intuizione) sono le grandezze estensive, non stupisce che la matematica si occupi di quantità e non di qualità, che invece non si possono rappresentare se non nell'intuizione empirica.

Inoltre, la filosofia si occupa come la matematica di quantità, ad esempio della totalità e dell'infinità, mentre la matematica si occupa della differenza tra linee e superfici come di spazi di qualità diversa e della continuità come di una qualità dell'estensione. Quindi la distinzione in base all'oggetto (quantità o qualità) non è neppure adeguata. Kant si serve di vari termini per indicare la quantità: talvolta si serve del termine 'Größe', che significa grandezza (estensiva o intensiva) ma anche l'oggetto proprio della matematica generale, che Kant, seguendo l'uso dei matematici stessi, chiama in più

[18] ≪Die philosophische Erkenntniß ist die Vernunfterkenntniß aus Begriffen, die mathematische aus der Construction der Begriffe. Einen Begriff aber construiren, heißt: die ihm correspondirende Anschauung a priori darstellen.≫ Cfr. *Kritik der reinen Vernunft*, B742-3, tr. it. in Kant (1787), p. 447.

[19] ≪Diejenigen, welche Philosophie von Mathematik dadurch zu unterscheiden vermeinten, daß sie von jener sagten, sie habe bloß die Qualität, diese aber nur die Quantität zum Object, haben die Wirkung für die Ursache genommen. Die Form der mathematischen Erkenntniß ist die Ursache, daß diese lediglich auf Quanta gehen kann. Denn nur der Begriff von Größen läßt sich construiren, d.i. a priori in der Anschauung darlegen, Qualitäten aber lassen sich in keiner anderen als empirischen Anschauung darstellen.≫ Cfr. *Kritik der reinen Vernunft*, B742-3, tr. it. in Kant (1787), p. 447.

occasioni 'reine' oppure 'allgemeine Größenlehre'.[20] 'Quantität' è usato invece prevalentemente come categoria (contrapposta alla qualità).[21] 'Quantitas' occorre nel senso di quantità in generale, ovverosia come termine astratto, mentre 'quantum' e 'quanta' ricorrono per indicare le cose che hanno quantità, ad esempio le linee geometriche in contrapposizione al numero simbolico dell'algebra che è pura 'quantitas' o quantità in generale: il concetto di Größe è usato con questa duplice valenza: significa grandezza estesa o grandezza geometrica continua ma anche grandezza o quantità in generale.[22] Kant da un lato suggerisce una nuova definizione della matematica in base al metodo, dall'altra si muove all'interno della consueta definizione di matematica come

[20]Si vedano ad esempio i seguenti passi: ≪Was Chemiker beim Scheiden der Materien, was Mathematiker in ihrer *reinen Größenlehre* thun, das liegt noch weit mehr den Philosophen ob, damit er den Antheil, den eine besondere Art der Erkenntniß am herumschweifenden Verstandesgebrauch hat, ihren eigenen Werth und Einfluß sicher bestimmen könne.≫ *Kritik der reinen Vernunft*, B870, tr. it. in Kant (1787), p. 515. ≪Die allgemeine Arithmetik (Algebra) ist eine dermaßen sich erweiternde Wissenschaft, daß man keine der Vernunftwissenschaften nennen kann, die es ihr hierin gleich thäte, so gar, daß die übrige Theile der reinen Mathesis ihren Wachsthum großtentheils von der Erweiterung jener *allgemeinen Größenlehre* erwarten.≫ *An Johann Schultz – 25. Nov. 1788*, in Kant (1900), X, p. 555. ≪Phoronomie ist also die *reine Größenlehre* (Mathesis) der Bewegungen.≫ *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (1786), in Kant (1900), IV, p. 489. ≪Da die Größe den Gegenstand der Mathematik ausmacht, und in Betrachtung derselben nur darauf gesehen wird, wie vielmal etwas gesetzt sei, so leuchtet deutlich in die Augen, daß diese Erkenntniß auf wenigen und sehr klaren Grundlehren der *allgemeinen Größenlehre* (welches eigentlich die allgemeine Arithmetik ist) beruhen müsse. Man sieht auch daselbst die Vermehrung und Verminderung der Größen, ihre Zerfällung in gleiche Factoren bei der Lehre von den Wurzeln aus einfältigen und wenig Grundbegriffen entspringen. Einige wenige Fundamentalbegriffe vom Raume vermitteln die Anwendung dieser allgemeinen Größenkenntniß auf die Geometrie.≫ *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral* (1764), in Kant (1900), II, p. 282.

[21]Si vedano ad esempio il passo della *Dottrina trascendentale del metodo* citato nella nota 19 a pagina 131 e la tavola delle categorie nell'*Analitica dei concetti*.

[22]≪Die Mathematik aber construirt nicht bloß *Größen (quanta)*, wie in der Geometrie, sondern auch die *bloße Größe (quantitatem)*, wie in der Buchstabenrechnung, wobei sie von der Beschaffenheit des Gegenstandes, der nach einem solchen Größenbegriff gedacht werden soll, gänzlich abstrahirt. Sie wählt sich alsdann eine gewisse Bezeichnung aller Constructionen von *Größen überhaupt (Zahlen)* als der Addition, Subtraction u.s.w., Ausziehung der Wurzel; und nachdem sie den allgemeinen Begriff der Größen nach den verschiedenen Verhältnissen derselben auch bezeichnet hat, so stellt sie alle Behandlung, die durch die Größe erzeugt und verändert wird, nach gewissen allgemeinen Regeln in der Anschauung dar; wo eine Größe durch die andere dividirt werden soll, setzt sie beider ihre Charaktere nach der bezeichnenden Form der Division zusammen u.s.w. und gelangt also vermittelst einer symbolischen Construction eben so gut, wie die Geometrie nach einer ostensiven oder geometrischen (der Gegenstände selbst) dahin, wohin die discursive Erkenntniß vermittelst bloßer Begriffe niemals gelangen könnte.≫ *Kritik der reinen Vernunft*, B745, tr. it. in Kant (1787), p. 448.

scienza delle grandezze in generale o delle quantità.

3.2.2 La natura delle verità matematiche: Bolzano contra Kant

L'interesse di Bernard Bolzano per la matematica è testimoniato sia dai risultati originali che egli ha conseguito in tale disciplina (ad esempio il teorema del binomio, il teorema secondo il quale una funzione si annulla almeno una volta in un intervallo agli estremi del quale assume valori di segno opposto, il teorema dei valori intermedi e ancora il teorema del limite superiore) sia dall'attenzione rivolta ai fondamenti della matematica, alla sua definizione, allo studio della natura delle proposizioni matematiche. La concezione bolzaniana della matematica si è però modificata nel tempo: inizialmente Bolzano, influenzato da Kant, ritiene che i giudizi della matematica siano sintetici a priori: ciononostante muove forti critiche sia alla fondazione kantiana dei giudizi sintetici a priori nell'intuizione pura, sia alla concezione della matematica come scienza per costruzione di concetti. Successivamente l'interesse per la logica e la definizione di un nuovo concetto d'analiticità conducono Bolzano a ritenere analitiche le verità della matematica e ad ammettere che esse possano contenere anche rappresentazioni anoggettuali, ossia rappresentazioni dotate di significato ma prive di riferimento.

Nel 1810 Bolzano pubblica i *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, nei quali definisce per la prima volta la matematica come 'teoria delle forme' criticando la tradizionale definizione come 'scienza delle grandezze'. L'*Appendice* a tale opera contiene una critica radicale alla concezione kantiana della matematica, critica che si muove però ancora all'interno di un paradigma kantiano: Bolzano infatti accetta le definizioni kantiane di giudizio analitico e di giudizio sintetico e accoglie l'idea che la matematica contenga giudizi sintetici a priori.[23] D'altra parte, egli rifiuta la strategia kantiana di fondare l'universalità e la necessità dei giudizi sintetici della matematica nelle forme a priori dell'intuizione. Bolzano accetta la definizione kantiana di giudizio analitico, secondo la quale «il predicato appartiene al soggetto come qualcosa che è contenuto (implicitamente) in questo concetto»,[24] ma la specifica intendendola nel seguente modo: analitico è ogni giudizio della forma «(A cum B) est A», dove A è il predicato e «A cum B» il soggetto scomposto nelle sue parti semplici, vale a dire ogni

[23]L'*Appendice* ai *Beyträge* è tradotta integralmente nell'appendice a questo volume alla fine del paragrafo 7.5 a pagina 383.

[24]Cfr. Kant (1787), p. 39.

giudizio in cui il concetto A del predicato è un costituente della definizione «A cum B» del soggetto.[25]

Tutti i giudizi che non sono analitici sono sintetici e sono per Bolzano come per Kant estensivi. Come può avvenire l'estensione della conoscenza fornita dal giudizio sintetico? Nei giudizi sintetici a posteriori essa avviene per il tramite dell'esperienza. Accanto ai giudizi di esperienza vi sono però anche dei giudizi sintetici universali e necessari (come ad esempio il principio di ragione) che devono essere noti a priori, perché se il fondamento fosse l'esperienza, essi non potrebbero essere universali e necessari. Bolzano, pur riconoscendo — con Kant — che la matematica e la geometria contengono giudizi sintetici a priori, contesta la fondazione kantiana di tali giudizi: essi non hanno il fondamento nell'intuizione pura (forme a priori dello spazio e del tempo), bensì in altri giudizi a priori, i quali danno le proprietà dei concetti che compongono il soggetto o il predicato.[26] Secondo Bolzano i giudizi a priori contengono come parti solo concetti; i giudizi sintetici a priori hanno in aggiunta la proprietà di contenere come parti dei concetti complessi: in essi o il soggetto o il predicato sono complessi. I giudizi sintetici a priori, come tutti i giudizi a priori, non contengono dunque alcuna intuizione: proprio la diversa definizione di intuizione costituisce il centro della critica di Bolzano a Kant.

Intuizioni e concetti sono definiti da Bolzano come parti di un giudizio: in quanto tali non possono fornire la coscienza della necessità e dunque non possono costituire il fondamento dei giudizi sintetici a priori. «Per la costruzione di un concetto — scrive Kant nella *Dottrina Trascendentale del Metodo* — si richiede dunque un'intuizione non empirica, che in quanto intuizione è un oggetto singolo ma deve nondimeno, come costruzione di un concetto (di una rappresentazione universale), esprimere nella rappresentazione qualche cosa che valga universalmente per tutte le intuizioni possibili, appartenenti allo stesso concetto».[27] Per Bolzano la tesi secondo la quale un singolare fonda l'universale è insostenibile. Se io posso vedere l'universalità del triangolo nel triangolo disegnato — afferma — è solo per mezzo dell'universalità del concetto di triangolo e non certo per mezzo dell'intuizione.[28] L'incoerenza della tesi kantiana appare a Bolzano in tutta la sua evidenza nell'aritmetica. Kant considera 7+5=12 una proposizione sintetica, immediatamente certa e

[25]Cfr. Bolzano (1810), p. 136. Una definizione rigorosamente scientifica è una scomposizione di una rappresentazione complessa nelle rappresentazioni semplici che la compongono: una definizione in senso stretto è dunque possibile solo per le rappresentazioni complesse.

[26]Cfr. Bolzano (1810), p. 146.

[27]Cfr. Kant (1787), p. 446.

[28]Cfr. Bolzano (1810), p. 146.

indimostrabile e ne individua il fondamento nell'intuizione a priori del tempo.[29] Bolzano non nega che la proposizione in questione sia sintetica ma rifiuta a) che essa abbia il proprio fondamento nell'intuizione, b) che essa sia indimostrabile. Perché secondo Bolzano una proposizione aritmetica come 7+5=12 non necessita dell'intuizione del tempo? Bolzano, per brevità, considera la proposizione 7+2=9. Per la proprietà associativa della somma e per la definizione stessa di somma si può scrivere: 7+2 = 7+(1+1) = (7+1)+1 = 8+1 = 9, dunque la proposizione è dimostrata. La proposizione è sintetica, ma il suo fondamento non è l'intuizione del tempo, bensì la proposizione a partire dalla quale è stata dimostrata e cioè la proprietà della somma di essere indipendente dall'ordine (e perciò anche dalla successione nel tempo, che è una specie di ordine).[30]

Se nell'opera del 1810 Bolzano afferma che i giudizi della matematica sono sintetici, diversa opinione egli manifesta venti anni più tardi, quando nella *Wissenschaftslehre* — la sua opera principale — fornisce una nuova distinzione tra proposizioni sintetiche e analitiche e afferma, capovolgendo la tesi kantiana, che le verità matematiche sono analitiche. Bolzano fornisce qui una nuova definizione di analiticità, più ampia e molto diversa rispetto a quella kantiana. Assumiamo che ogni proposizione possa essere scritta in forma canonica ≪A ha b≫, ove A è la rappresentazione del soggetto, *ha* è la copula e b è la rappresentazione del predicato. Definiamo forma proposizionale un'espressione ottenuta da ≪A ha b≫ dichiarando alcune sue parti (rappresentazioni) come variabili (le indichiamo con le lettere X e y): es. ≪X ha b≫ (oppure ≪A ha y≫ oppure ≪X ha y≫). Immaginiamo ora di sottoporre la forma proposizionale ≪A ha y≫ a variazione: sostituiamo cioè alla rappresentazione A delle altre rappresentazioni e osserviamo il valore di verità delle proposizioni così ottenute. La variazione deve sottostare ad alcune condizioni, tra cui quella che il soggetto logico della proposizione sia non vuoto (cioè sia una rappresentazione alla quale corrisponde un oggetto). Ad esempio, ≪L'uomo Caio è mortale≫, con Caio variabile. Se sostituisco a ≪Caio≫ ≪triangolo≫ ottengo una proposizione il cui soggetto logico è vuoto: ≪L'uomo triangolo è mortale≫. Se le proposizioni ottenute per variazione sono tutte vere (tutte false) la proposizione data (o la forma proposizionale corrispondente) è universalmente valida (invalida).[31] Se le proposizioni sono in parte vere e in parte false si può analizzare in che proporzione lo sono e stabilire un grado di validità delle proposizioni. La validità è un concetto relativo alle rappresentazioni che consideriamo come variabili. L'analiticità

[29] Cfr. Kant (1787), p. 42.
[30] Cfr. Bolzano (1810), p. 147.
[31] Cfr. *Wissenschaftslehre*, §147, in Bolzano (1837), p. 82.

è la validità universale rispetto ad almeno una rappresentazione (non occorre specificare quale).[32] L'analiticità logica è l'analiticità rispetto a tutte le rappresentazioni che non siano costanti logiche. Ad esempio, ≪Un uomo moralmente cattivo non merita rispetto≫ è analitica rispetto a ≪uomo≫; ≪A è A≫, ≪B o non B≫ sono logicamente analitiche.[33]

Assumendo questa nuova definizione di proposizione analitica, Bolzano considera analitiche quasi tutte le verità matematiche. Ad esempio è analitica la proposizione geometrica ≪Questo triangolo ha la somma degli angoli uguale a due retti≫.[34] La geometria comprende però anche proposizioni sintetiche, quali ≪Ogni triangolo ha la somma degli angoli uguale a due retti≫.[35] Questo significa che può accadere che una proposizione universale sia sintetica mentre ogni istanziazione di essa (compiuta per mezzo di un pronome dimostrativo) è analitica.

Mentre la distinzione kantiana tra giudizi analitici e giudizi sintetici non esaurisce tutti i possibili giudizi, la definizione che Bolzano fornisce pretende di essere esaustiva: dato un qualunque giudizio esso o è analitico o è sintetico. Ciò accade se si considerano analitiche anche alcune proposizioni che a prima vista non lo sono ma che si rivelano tali se in esse si sostituiscono alcuni termini con dei sinonimi: un esempio è fornito dalla proposizione ≪Ogni triangolo è una figura≫, la quale diventa ≪Ogni figura che ha tre angoli è una figura≫. La nuova definizione di analiticità fornita nella *Wissenschaftslehre* è più ampia di quella di Kant, che secondo Bolzano comprenderebbe soltanto proposizioni della forma 1) ≪A è A≫, 2) ≪A che è B, è A≫, 3) ≪A che è B, è B≫. Kant escluderebbe proposizioni analitiche quali ≪Ogni oggetto è B o non B≫ e includerebbe invece proposizioni che non sembrano analitiche quali ≪Il padre di Alessandro, re di Macedonia, fu re di Macedonia≫. Mentre Kant vuole definire i giudizi sintetici a priori per fondare la matematica e le altre scienze, Bolzano definisce i giudizi analitici per arrivare a stabilire una nozione di verità logica (dipendente cioè soltanto dalla forma logica). Per questo la sua definizione di analiticità ha a che vedere con la forma della proposizione (con i suoi componenti) più che con la definizione (come in Kant e come nei *Beyträge*). Il risultato più importante della nuova nozione di analiticità è, per quanto riguarda la matematica, l'affermazione che l'aritmetica e la geometria contengono solo proposizioni concettuali (proposizioni che contengono come parti soltanto concetti) le quali sono, per la maggior parte, analitiche. In *Von der Mathematischen Lehrart* Bolzano presenta come esempio di ve-

[32]Cfr. *Wissenschaftslehre*, §147, in Bolzano (1837), p. 83.
[33]Cfr. *Wissenschaftslehre*, §148, in Bolzano (1837), p. 84.
[34]Cfr. *Wissenschaftslehre*, §197, in Bolzano (1837).
[35]Cfr. *Wissenschaftslehre*, §447, in Bolzano (1837).

rità matematiche conosciute a posteriori alcune proposizioni della teoria dei numeri, e in particolare quelle che sfruttano l'induzione completa.

Le proposizioni della matematica sono dunque concettuali (in linguaggio leibniziano potremmo dire che sono verità di ragione e non verità di fatto) e per lo più analitiche. Esse hanno anche una terza interessante caratteristica: le proposizioni matematiche possono contenere (e ciò avviene spesso) delle parti (rappresentazioni), che non si riferiscono ad alcun oggetto. Se la rappresentazione occorre come soggetto, la proposizione è falsa; altrimenti la proposizione può essere vera. Le rappresentazioni anoggettuali sono introdotte nella *Wissenschaftslehre*, e prima ancora nello scritto in risposta ad Exner, anche allo scopo di rendere conto di alcuni usi linguistici propri dei matematici.[36] In diversi passi Bolzano afferma esplicitamente che occorre ammettere tra le rappresentazioni anche quelle anoggettuali, perché spesso i matematici ne fanno uso, come quando affermano che non c'è un solido limitato da tre superfici.[37] Le rappresentazioni anoggettuali immaginarie possono comparire come parti in proposizioni vere che meritano per la loro rilevanza di essere stabilite in un trattato scientifico. È infatti rilevante riconoscere che una rappresentazione è immaginaria e non reale (e dunque che non rappresenta effettivamente l'oggetto che descrive), ma non sempre è possibile riconoscere immediatamente che una certa rappresentazione è immaginaria: è opportuno a tal fine che in un manuale scientifico siano comprese verità che stabiliscono quali rappresentazioni sono immaginarie. Ad esempio è importante inserire in un manuale di geometria la proposizione che nessuna superficie può essere delimitata da una o da due linee rette, mentre l'analisi mostra quanto sono importanti i teoremi contenenti il concetto contraddittorio $\sqrt{-1}$.[38] Un'ulteriore conferma della rilevanza delle rappresentazioni anoggettuali per la matematica è fornita dalla quantità di esempi di rappresentazioni immaginarie che Bolzano trae da tale scienza.

Nei *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* del 1810 Bolzano definisce la matematica come una scienza puramente ipotetica, la quale non afferma nulla intorno all'esistenza degli oggetti ma soltanto intorno alle condizioni di possibilità degli oggetti stessi (cfr. *infra*). L'affermazione «la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a due angoli piatti» significa che se c'è un triangolo, è impossibile che la somma dei suoi angoli interni sia diversa da due angoli piatti. Le qualità che le rappresentazioni attribuiscono agli oggetti sono le qualità che essi dovrebbero necessariamente

[36]Cfr. *Aufsatz, worin ein von Hrn. Exner in seiner Abhandlung: "Über den Nominalismus und Realismus" angeregte logische Frage beantwortet wird*, 1843.

[37]Cfr. Bolzano (1843), p. 73.

[38]Cfr. *Wissenschaftslehre*, §70, in Bolzano (1837), p. 322.

avere se esistessero. Gli enti matematici, però, secondo Bolzano sussistono ma non esistono.

Le rappresentazioni anoggettuali sono lo strumento mediante il quale Bolzano esprime i concetti logici modali. Un certo oggetto (che cade sotto alla rappresentazione [A]) è definito i) necessario, ii) impossibile, iii) possibile se e soltanto se i) ≪A ist≫ è una pura verità concettuale, ii) ≪A ist nicht≫ è una pura verità concettuale, iii) ≪A ist nicht≫ non è una pura verità concettuale. Poiché ≪A ist≫ e ≪A ist nicht≫ espresse in forma logica divengono rispettivamente ≪[A] ha [oggettualità]≫ e ≪[A] ha mancanza di [oggettualità]≫, la distinzione tra rappresentazioni anoggettuali e rappresentazioni oggettuali è in matematica funzionale all'esplicitazione della distinzione tra necessario e impossibile. Il ruolo che le rappresentazioni anoggettuali svolgono in matematica è una conseguenza del ruolo che esse svolgono nella determinazione dei concetti modali di possibilità, impossibilità, necessità. Se si ammette la natura puramente ipotetica della matematica, perché distinguere tra alcune rappresentazioni matematiche oggettuali ed altre anoggettuali? Perché [triangolo equiangolo] è oggettuale mentre [quadrato rotondo] no? In entrambi i casi, infatti, gli oggetti che cadono o che dovrebbero cadere (se ci fossero) sotto alle due rappresentazioni sono o sarebbero privi di esistenza. La distinzione tra rappresentazioni oggettuali e rappresentazioni anoggettuali svolge in matematica la funzione di determinare le condizioni di possibilità delle cose. Affermare che la rappresentazione [quadrato rotondo] è anoggettuale è un altro modo per esprimere l'impossibilità della proposizione esistenziale: ≪Ci sono quadrati rotondi≫. Vedremo infatti tra poco che la matematica è definita nei *Beyträge* come la scienza che si occupa della domanda: ≪quali caratteri devono avere le cose per essere possibili?≫[39]

3.2.3 Bolzano: la matematica come teoria delle forme

Nei *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* (una traduzione parziale del testo è riportata in appendice: si veda il paragrafo 7.5 a pagina 367) Bernard Bolzano critica la definizione di matematica come 'scienza delle grandezze' osservando che, se per grandezza si intende ≪un tutto in quanto esso consta di più parti uguali≫ (una grandezza estensiva) o ≪qualcosa che può essere determinato per mezzo di numeri≫, allora vi sono parti della matematica, quali l'analisi combinatoria, in cui non compaiono né il concetto di grandezza né quello di numero.[40] D'altra parte abbiamo visto che Bolzano, opponendosi a Kant, rifiuta la definizione di matematica come

[39]Cfr. *Beyträge*, in Bolzano (1810), p. 14.
[40]Cfr. *Beyträge*, I, § 4, in Bolzano (1810), p. 6.

scienza per costruzione di concetti così come rifiuta la nozione di intuizione a priori.

Bolzano propone una nuova definizione di matematica come «scienza che tratta delle leggi generali (forme) alle quali si conformano le cose nella loro esistenza».[41] Anche Bolzano, come già Kant, definisce la matematica per opposizione alla filosofia: la matematica si occupa soltanto delle condizioni di possibilità delle cose e non della loro esistenza, mentre la metafisica cerca di dimostrare a priori la realtà di certi oggetti (come ad esempio la libertà, Dio e l'immortalità dell'anima). Mentre la metafisica si chiede quali cose siano reali, la matematica si chiede quali caratteri debbano avere le cose per essere possibili: «la matematica tratterebbe della necessità ipotetica, la metafisica della necessità assoluta».[42] La nozione di forma è introdotta per fornire una nuova classificazione delle parti della matematica (includendo in essa discipline i cui oggetti non sono quantità, come ad esempio le permutazioni) e per confrontare matematica e metafisica (non a caso questo problema è vivo soprattutto nei *Beyträge*, ossia nella fase in cui Bolzano, benché già oppositore di Kant, è ancora fortemente influenzato dalla stessa concezione kantiana). Vedremo che nella Introduzione alla *Grössenlehre* Bolzano cambia idea e ritorna a definire la matematica come scienza delle grandezze: la natura della matematica è qui determinata in base al dominio degli oggetti di cui tratta anziché in base al modo in cui indaga gli oggetti.[43]

La definizione dei *Beyträge* è interessante per diverse ragioni: tra i problemi che apre vi è innanzitutto quello della natura della matematica e dell'opportunità di fornirne una definizione in base al metodo o in base al dominio di oggetti. Un'altra questione esplicitamente sollevata dalla definizione di Bolzano concerne il rapporto tra matematica e filosofia, questione centrale nella riflessione kantiana e ripresa da Bolzano per contrapporre l'ipoteticità della matematica alla necessità della metafisica, l'indagine sulla condizione di possibilità degli oggetti alla ricerca sull'esistenza necessaria dell'anima e di Dio. Infine in Bolzano la geometria appartiene alle applicazioni della matematica e non più alla matematica pura.[44]

---

[41]Cfr. Bolzano (1810), p. 11

[42]Cfr. Bolzano (1810), pp. 13-14.

[43]Cfr. Bolzano (1975a) e Sebestik (1992), pp. 302-3. Alla concezione della matematica come teoria delle forme presentata da Bolzano nei *Beyträge* si richiama invece Husserl, che rimprovera a Bolzano di aver soltanto sfiorato, senza riuscire a raggiungerlo, il vero concetto di formale che permette di considerare la matematica come un'ontologia formale. Husserl riconosce però anche che la definizione dei *Beyträge* «punta verso l'idea di una dottrina formale a priori dell'oggetto, benchè certo senza penetrare al suo effettivo senso». Cfr. Husserl (1929), p. 102.

[44]Bolzano distingue tra matematica universale pura, che comprende aritmetica, combinatoria, analisi, algebra e matematica speciale o applicata, che comprende eziologia, cal-

3.2.4 Ritorno al concetto di grandezza

Nella introduzione alla *Grössenlehre*, rimasta incompiuta e pubblicata soltanto nel 1975 a cura di Jan Berg, Bolzano ritorna alla definizione 'tradizionale' di matematica come scienza delle grandezze ma precisa alcune condizioni alle quali tale definizione può essere considerata accettabile.[45] Innanzitutto egli rileva le difficoltà nella definizione dell'oggetto proprio della matematica, cioè la grandezza e propone di intendere il termine in un senso duplice: in un senso più limitato per grandezza si deve intendere la grandezza continua, mentre in un senso più ampio si possono intendere con tale termine anche le grandezze discontinue o discrete e quindi i numeri. Sotto questo aspetto dunque Bolzano rileva nel termine 'grandezza' proprio la stessa ambiguità che noi abbiamo individuato collegando il termine da un lato alla tradizione geometrica greca che per 'grandezza' intende solo lunghezza, area e volume di figure, dall'altro alla ripresa della teoria delle proporzioni, nella quale 'grandezza' comprende sia le grandezze geometriche sia i numeri. E infatti, adottando il termine grandezza nel senso più ampio per definire la matematica come scienza delle grandezze, Bolzano afferma che tratto distintivo delle grandezze è l'essere ≪o una uguale all'altra o tali che una di esse contenga una parte uguale all'altra≫.

La teoria delle grandezze è spesso chiamata pura o generale perché — e qui crediamo che Bolzano si riferisca a Euler — si tratterebbe di una scienza ≪che considera le grandezze *soltanto in generale*, in modo che rimanga indeterminato di quale *tipo* esse siano≫. Bolzano precisa a questo proposito (ma occorre ricordare che la nota alla quale facciamo qui riferimento è stata cancellata e sostituita da un testo diverso nell'ultima versione del manoscritto originale) che le grandezze di cui si tratta non sono affatto oggetti generali ma particolari tipi di grandezze e cioè numeri interi, frazionari, irrazionali e simili; 'generale' significa soltanto che la trattazione è suscettibile di applicazione ai vari tipi di grandezze che costituiscono ciascuna l'oggetto di una sottodisciplina matematica; 'generale' significa astratto da altre proprietà che si trovano in tali grandezze, ma in nessun caso implica che vi sia un particolare oggetto della scienza generale, e cioè delle 'grandezze generali'.[46]

Tuttavia la definizione di matematica come teoria delle grandezze è per Bolzano una convenzione pratica più che una vera e propria caratterizzazione

colo della probabilità, cronometria, geometria, eziologia cronometrica, scienza pura della natura. Cfr. Bolzano (1810), p. 37.

[45]La prima sezione della Introduzione alla *Grössenlehre* è tradotta in appendice: si veda il § 7.6 a pagina 383.

[46]Questa distinzione tra generale e applicato ai vari tipi di grandezze è alla base della distinzione tra matematica pura e applicata.

univoca della scienza matematica, perché non è affatto vero che tutti gli oggetti della matematica siano grandezze. La Combinatoria, ma anche la Geometria intesa come Scienza dello spazio e la Scienza del tempo sono discipline matematiche i cui oggetti non sono tutti grandezze, anche se è vero che in esse si applicano almeno in parte la teoria dei numeri e delle grandezze geometriche.

La soluzione di Bolzano è fondata sulla propedeuticità dello studio della teoria generale delle grandezze per lo studio di queste discipline che non si occupano soltanto di grandezze. Egli scrive infatti che «una scienza merita il nome di Matematica solo se una parte considerevole della sua teoria contiene determinazioni di grandezza tali che la loro correttezza possa essere compresa solo per mezzo di certe considerazioni sulla natura delle grandezze che hanno bisogno di una propria introduzione.» D'altra parte — aggiunge — «questa mi pare la regola che i matematici più o meno consapevolmente hanno seguito quando hanno aumentato il numero delle discipline matematiche ora con questa ora con quella nuova scienza». Bolzano dunque riflette sulla natura della matematica e sulle sue possibili definizioni a partire da una considerazione della storia e dello sviluppo della matematica stessa e proprio per questa ragione è attento a fornire una definizione di matematica che sia compatibile con l'uso linguistico del termine nel linguaggio comune.

Sotto questo punto di vista Bolzano ha perfettamente ragione nel caratterizzare la matematica come scienza delle grandezze, perché analizzando alcuni brani di Wolff, d'Alembert, Euler, Gauss abbiamo visto che sia tra i matematici, sia tra i divulgatori delle idee matematiche, sia nei manuali di matematica la definizione più frequente della matematica stessa è proprio quella di scienza delle grandezze. Fino al Seicento tale definizione non è affatto tradizionale, sia perché tale definizione non compare nella matematica greca, sia perché il concetto di grandezza assume significati troppo diversi da autore ad autore, sia perché infine vi è chi, come Descartes o Leibniz, propone definizioni di matematica incentrate sul concetto generale di relazione. Tuttavia è vero che nel Settecento quando si parla di Matematica si intende di solito la *allgemeine Größenlehre*, cioè la teoria generale delle grandezze. In un certo senso la molteplicità di significati attribuiti a questa definizione non viene meno, perché alcuni insistono maggiormente sui vari tipi di relazione che possono sussistere tra grandezze (Gauss), altri sembrano privilegiare la relazione di uguaglianza e le operazioni aritmetiche (Euler), altri ancora considerano anche le qualità come oggetto della matematica (anche se lo studio di queste ultime è ricondotto allo studio delle quantità), infine perché per grandezza si intende generalmente la grandezza estensiva, ma una definizione univoca e rigorosa di grandezza estensiva ancora manca.

3.3 Quantità, grandezza, misura

3.3.1 Scienza delle quantità o grandezze estensive

Abbiamo visto come attraverso le traduzioni di Euclide e di Proclo gli umanisti del '500 abbiano caratterizzato e definito la matematica come scienza delle grandezze, attribuendo tra l'altro questa stessa definizione agli antichi, mentre propriamente per i greci le discipline matematiche erano due e non vi era, almeno non esplicitamente, un oggetto comune ad entrambe. Il concetto di grandezza in generale è assunto come genere più ampio in cui ricadono sia le grandezze geometriche propriamente dette sia i numeri. Le caratteristiche di tali grandezze in generale sono desunte dalle nozioni comuni del I libro e dalla teoria delle proporzioni del V libro e si riassumono nella proprietà con cui Aristotele caratterizzava la quantità: il dirsi uguali e diseguali.

Con lo sviluppo dell'algebra le proprietà delle grandezze vengono caratterizzate in modo più preciso: la creazione in Viète di un concetto simbolico di numero permette di caratterizzare le grandezze, intese come specie, per mezzo delle operazioni aritmetiche, ma pone il problema di come caratterizzare le grandezze continue.

Da un lato vi è chi, come Stevin, tende a comprendere il concetto di grandezza geometrica sotto al concetto simbolico di numero attribuendo a quest'ultimo la stessa continuità della cosa di cui è numero: Wallis, seguendo la linea di Stevin, arriva a caratterizzare perciò la matematica universale, cioè la scienza delle grandezze in genere, come aritmetica universale. La considerazione dell'unità come numero permette di istituire un parallelismo tra operazioni aritmetiche e operazioni geometriche. Se infatti l'unità è un numero, si ha che ciascun numero può essere espresso in una proporzione mediante un certo rapporto rispetto all'unità, proprio come ciascuna grandezza geometrica può essere rappresentata in una proporzione per mezzo di un certo rapporto all'unità di misura. L'unità non solo è assunta come numero (proprio come l'unità di misura è una grandezza) ma è anche ritenuta divisibile in parti che sono a loro volta numeri (i numeri *fracti* o razionali e i numeri *surdi* o irrazionali) proprio come l'unità di misura è divisibile in parti che sono a loro volta geometriche. Questa concezione dell'unità permette un parallelismo tra aritmetica e geometria che sollecita l'identificazione dei loro oggetti in un unico oggetto più generale (l'oggetto simbolico dell'algebra) le cui proprietà sono ricalcate sulle proprietà dei simboli algebrici e cioè sulle operazioni aritmetiche.

Dall'altro lato vi è chi, come Viète e Descartes, avverte delle differenze intrinseche tra gli oggetti dell'aritmetica e dell'algebra, quali ad esempio la continuità delle grandezze geometriche opposta alla natura discreta dei numeri, oppure la multidimensionalità delle operazioni sulle prime opposta all'adimensionalità delle operazioni sui secondi. Queste differenze fanno sì che per introdurre le operazioni algebriche tra grandezze geometriche siano necessarie particolari condizioni di omogeneità che nel caso dei numeri appaiono invece superflue. Le riformulazioni alle quali Viète e Descartes sottopongono le operazioni algebriche per renderle applicabili alla geometria testimoniano la convinzione di entrambi della non identificabilità di numeri e grandezze geometriche.

Nella prospettiva di Descartes e di Leibniz non ha senso parlare di un unico oggetto dell'algebra o matematica universale: ciò che caratterizza tale scienza è fondamentalmente lo *studio delle relazioni e delle proporzioni tra grandezze in genere*, cioè o tra numeri o tra grandezze geometriche o anche tra altre cose le cui relazioni si prestano ad essere espresse algebricamente: ad esempio movimenti, suoni, ecc. Ed è proprio questa generalizzazione ad altre cose oltre ai numeri e alle grandezze geometriche a rendere plausibile la caratterizzazione della matematica come scienza delle quantità intesa come scienza delle relazioni e delle proporzioni. Il concetto di quantità richiama in questo caso quello aristotelico, perché oltre ai numeri e alle grandezze geometriche Aristotele comprendeva sotto la categoria di quantità anche movimenti, tempi, ecc.

D'altra parte diversi elementi favoriscono la considerazione della matematica come scienza delle quantità. Si è detto che nelle edizioni di Euclide condotte sul testo latino di Campano prevale l'uso di rendere il μέγεθος greco con il termine 'quantitas'. La stessa logistica speciosa è caratterizzata da F. van Schooten come 'scientia quantitatum' nell'edizione del 1657 dell'opera di Viète. Anche nelle edizioni italiane il termine greco è spesso tradotto con quantità per distinguerlo dal termine 'grandezza' usato generalmente per le sole grandezze continue. Un'ulteriore conferma di una generale tendenza ad identificare il concetto di grandezza in genere con il concetto di quantità si ha leggendo il *Mathematisches Lexicon* di Ch. Wolff del 1716: Wolff usa un unico termine tedesco (Größe) per esprimere entrambi i concetti di 'quantitas' e di 'magnitudo', ormai considerati sinonimi.

Da un lato si può osservare che la quantità come oggetto della scienza generale è un genere molto più ampio di quello al quale sembrava pensare Aristotele e nello stesso tempo è più ristretto di quello di Proclo (l'essere in quanto essere) anche se a questo si avvicina nell'interpretazione di Descartes, perché se tutte le cose possono essere studiate nella loro quantità allora la matematica è scienza di tutto l'essere. D'altra parte definire la matematica come scienza della quantità pone ulteriori problemi se la quantità è definita aristotelicamente come ciò che può dirsi uguale o disuguale ad altre quantità ma che non può mai avere un grado maggiore o minore. La distinzione tra grandezze estensive e grandezze intensive suscita poi altre domande: se il numero e la grandezza geometrica sono grandezze estensive, mentre il colore, il calore, la pesantezza sono grandezze intensive (qualità continue e fluenti che hanno sempre gradi e non possono mai avere grado nullo), la matematica come scienza delle grandezze (o quantità) comprende entrambe? La teoria delle proporzioni o delle equazioni assunta come scienza generale tratta solo delle prime, cioè di quelle estensive: la *mathesis universalis* di Leibniz tratta invece certamente anche delle grandezze intensive poiché è anche scienza delle qualità.

Ma cosa occorre intendere per grandezze estensive? Nell'analisi dei testi di Descartes, Leibniz, Euler, Kant, Gauss sono emersi diversi tratti caratteristici di tali grandezze.

– In primo luogo si richiede un certo rapporto fra il tutto e le parti: il tutto è divisibile in parti e la somma delle parti è uguale al tutto. Con le parole di Kant, le parti devono essere esterne le une alle altre in modo che il tutto possa essere ottenuto per somma di esse con una costruzione matematica. Gauss chiama estensive le grandezze di cui si possono pensare delle parti. Viète pone come primo *symbolum* della logistica speciosa la condizione che il tutto (la somma) sia uguale alle sue parti. Leibniz, in forma meno esplicita, afferma che la quantità è l'affezione di una cosa rispetto ad una sua parte e che essa è il numero delle parti. In altre parole le grandezze possono essere divise in parti e queste parti, sommate, danno la grandezza di partenza. Inoltre le grandezze sono ciò che riceve il più o il meno, ciò che può essere aumentato o diminuito; questa affermazione cartesiana è ripetuta quasi come un *leit-motiv* da Wolff, d'Alembert, Euler, Gauss. Come la prima caratteristica, essa ha a che fare con la possibilità di definire un'operazione di addizione tra grandezze.

– In secondo luogo le grandezze in generale sono caratterizzate come ciò che nel confronto può essere detto uguale e diseguale. Le grandezze devono cioè essere omogenee per poter essere confrontate e si deve poter determinare una relazione di uguaglianza tra di esse. Si tratta di una condizione già chiaramente presente nell'opera euclidea e ripresa da tutti gli autori che si sono occupati della teoria delle proporzioni. Talvolta la condizione di omogeneità è abbandonata, come in Wallis, perché le quantità sono caratterizzate con le proprietà dei numeri algebrici e quindi sono per definizione tra loro omogenee. Anche se la maggior parte degli autori nomina solo la relazione di uguaglianza vi sono anche riferimenti all'ordine, soprattutto in Descartes e secondo alcuni (ad esempio Enriques) già nell'ottava nozione comune euclidea, che afferma che il tutto è maggiore della parte.

– In terzo luogo le grandezze geometriche sono caratterizzate da una qualche forma di continuità; così avviene nella teoria delle proporzioni euclidea, che richiede il principio di Archimede, cioè la densità. In seguito (si pensi dapprima a Stevin e a Wallis e poi alla definizione newtoniana di numero come rapporto) la continuità non è più ritenuta appannaggio delle sole grandezze geometriche ma considerata propria di tutte le quantità al fine di garantire la misura.

Il concetto di grandezza estensiva è caratterizzato all'inizio dell'Ottocento non soltanto dalle definizioni citate (a prima vista ancora un po' vaghe), ma anche e soprattutto dalle operazioni e dalle relazioni tra grandezze che esse sottendono. La storia della teoria delle proporzioni di Eudosso, presentata negli *Elementi* in modo separato per numeri e grandezze e poi generalizzata algebricamente da Viète e dai successivi algebristi è in parte anche la storia della caratterizzazione delle grandezze estensive. Gli elementi principali di cui oggi ci si serve per caratterizzare le grandezze estensive sono infatti tre: una relazione di ordine (che comprende l'uguaglianza), un'operazione di somma, un postulato di continuità che garantisca la possibilità della misura.

Se la matematica come scienza delle grandezze è nel Settecento essenzialmente studio delle grandezze estensive, vedremo nei prossimi capitoli, presentando l'opera di Hermann Graßmann, a quali teorie algebriche conduca lo sviluppo del concetto di grandezza estensiva e contemporaneamente come le grandezze estensive, una volta che il loro concetto sia determinato rigorosamente e separato dalle componenti geometrico-intuitive, non costituiscano più l'oggetto privilegiato della matematica e non ricorrano più nella sua definizione. Al concetto di grandezza si sostituisce un concetto più generale e con una diversa connotazione: la matematica è scienza delle forme di pensiero, entità che possono essere considerate come oggetti con caratteristiche e relazioni proprie, ma che sono il risultato di una generazione o evoluzione che affonda le proprie radici nell'attività costruttiva del soggetto pensante. Benché sostituito dal concetto di forma, il concetto di grandezza estensiva non perde importanza, ma diviene anzi oggetto di studio di un ramo astratto della matematica: la Teoria dell'estensione. Così da un lato negli sviluppi algebrici successivi le proprietà delle grandezze estensive (espresse nella nozione di spazio vettoriale) divengono uno strumento fondamentale nello studio dei rapporti tra strutture e perdono il rapporto privilegiato con la nozione di quantità, mentre nella teoria della misurazione che si sviluppa tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento permettono di isolare le proprietà quantitative in opposizione a quelle qualitative di certi sistemi di grandezze.

Rimandiamo ai prossimi capitoli la trattazione del concetto di grandezza estensiva proposta da Hermann Graßmann e che si trova all'origine del moderno concetto algebrico di spazio vettoriale (e dunque all'origine dell'algebra lineare e multilineare), mentre concludiamo questo capitolo dedicato alla matematica come scienza delle grandezze con un riferimento alla teoria delle grandezze estensive caratterizzata per la prima volta da Hölder a fine Ottocento con un gruppo di nove assiomi e poi divenuta parte di una più generale teoria della misurazione.

3.3.2 Hölder: la misura delle grandezze estensive

Il tentativo di Hölder — a fine Ottocento — di analizzare il concetto euclideo di grandezza e di caratterizzarlo con un gruppo di assiomi trasforma la teoria euclidea delle proporzioni in una rigorosa teoria della misurazione. In termini algebrici gli assiomi di Hölder significano che la misura è un omomorfismo su un gruppo abeliano ordinato archimedeo, cioè affermano che la possibilità della misura delle grandezze estensive è fondata su una certa somiglianza tra le relazioni e le operazioni che valgono fra di esse e le relazioni e le operazioni che sussistono in quel particolare gruppo abeliano ordinato archimedeo che sono i numeri reali. E questo è un modo preciso e formale per esprimere ciò che le definizioni citate contenevano in forma più vaga ma nondimeno significativa, asserendo condizioni su una relazione di uguaglianza (talvolta di ordine), su una operazione di somma, su una certa forma di continuità espressa inizialmente dal principio di Archimede e poi ampliata dalla considerazione dei numeri surdi.

In Euclide, benché la teoria di Eudosso permettesse di confrontare sia grandezze commensurabili sia grandezze incommensurabili, al rapporto tra grandezze era associato un numero solo nel caso commensurabile. Solo per le grandezze commensurabili era possibile affermare che una grandezza poteva essere misurata da un opportuno multiplo di un'altra grandezza minore, cioè che essa era *uguale* a tale multiplo. La ragione di ciò risiede, come è noto, nel fatto che i Greci ammettevano tra i numeri soltanto i numeri interi (i numeri razionali potevano essere concepiti come rapporto tra due interi ma non si poteva definire tale rapporto nel caso incommensurabile). Tuttavia la teoria delle proporzioni permetteva di confrontare anche le grandezze incommensurabili, perché una proporzione $A : B = C : D$ esprimeva in generale un'uguaglianza di rapporti senza assegnare un numero a ciascun rapporto. Nella teoria moderna, poiché il numero è definito in generale come rapporto tra grandezze, tale proporzione afferma qualcosa di più preciso: 1) la grandezza A può essere misurata dalla grandezza B dando luogo ad un numero che è la misura di A, 2) la grandezza C può essere misurata dalla grandezza D dando origine ad un numero che è la misura di C e 3) le due misure sono lo stesso numero.[47]

[47]Cfr. I. Newton, *Arithmetica universalis*, 1707, p. 2 e anche Descartes, *Géométrie*,

Tra i diversi autori che a fine Ottocento si occuparono della teoria delle grandezze rielaborando la teoria euclidea delle proporzioni, faremo riferimento a Hölder, perché egli ha definito in modo rigoroso non solo il concetto di un sistema di grandezze (definizione che si trova ad esempio anche in Bettazzi e in Veronese) ma perché egli ha costruito una vera e propria teoria della misurazione mostrando a quali condizioni è possibile associare dei numeri al rapporto tra le grandezze del sistema.[48] Con qualche variazione la teoria della misurazione delle grandezze estensive è ancora oggi descritta con un sistema di assiomi simile a quello presentato da Hölder nell'articolo "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass" del 1901.[49]

Hölder intende la teoria delle grandezze che ha il suo nucleo nella teoria delle proporzioni come una teoria della misurazione e come tale essenzialmente differente dalla teoria dei numeri: i principi delle due teorie avrebbero infatti una natura radicalmente diversa. In contrapposizione a Helmholtz, egli ritiene che i principi dell'aritmetica siano definizioni e non assiomi, perché essi non esprimono dei fatti, ma semplicemente descrivono come eseguire certi procedimenti e sono pertanto mere definizioni. Ad esempio — scrive Hölder — la formula sulla quale Hermann Graßmann ha fondato la teoria dell'addizione tra numeri interi sarebbe secondo Helmholtz un fatto indimostrabile e dunque un assioma; invece per Hölder è una descrizione del procedimento di addizione e dunque una definizione.[50] A differenza dell'aritmetica, la teoria delle grandezze misurabili deve essere fondata, al pari della geometria e della meccanica, su un certo numero di fatti, che Hölder chiama assiomi delle grandezze o assiomi della quantità.

Per grandezze o quantità Hölder intende tutte le cose che possono soddisfare gli assiomi da lui stabiliti, che definiscono una relazione d'ordine ed un'operazione di addizione all'interno di un certo sistema di cose: ad esempio tempi, masse, segmenti, contenuti, ecc. Gli assiomi di Hölder sono cioè validi per cose che possono dirsi uguali e disuguali, per cose da confrontare e sommare, in altre parole per grandezze estensive.[51] Tuttavia non è necessario includere sempre gli assiomi delle grandezze all'interno di una teoria perché

1638, t.1, p. 1.

[48]Si ricordino almeno Bettazzi (1890), Veronese (1889), Stolz (1885), Schur (1898), Weber (1895). Alcuni di questi autori prendono tra l'altro le mosse proprio dalla definizione di grandezza proposta all'inizio del *Lehrbuch der Arithmetik* di Hermann Graßmann di cui parleremo nel prossimo capitolo.

[49]Si veda ad esempio Suppes e Zinnes (1963), p. 41.

[50]Tutt'al più potrebbe essere considerata un'assunzione indimostrabile il fatto che questo procedimento di addizione possa essere sempre eseguito. Cfr. Hölder (1901), pp. 1-2.

[51]Infatti nelle esposizioni odierne di teoria della misurazione si identificano come grandezze estensive le quantità di cui si dia una teoria della misurazione come quella di Hölder, e cioè con una relazione d'ordine e un'operazione di addizione. Cfr. Suppes e Zinnes (1963).

le cose di cui si parla in essa siano confrontabili e sommabili: la geometria è un esempio del contrario, perché si può dimostrare che la relazione d'ordine e l'operazione di somma tra segmenti definita dagli assiomi geometrici soddisfa anche gli assiomi della teoria delle grandezze. Questo è ciò che Hölder fa vedere nella seconda parte del suo articolo, mostrando che la teoria delle grandezze è effettivamente una generalizzazione di alcune caratteristiche delle grandezze geometriche.

Hölder, rispetto ad Euclide, assume come relazione fondamentale non l'equivalenza (l'uguaglianza tra lunghezze, aree, volumi) ma l'identità: vengono meno pertanto alcune nozioni comuni euclidee, che non sono più esprimibili, poiché per il principio degli indiscernibili di Leibniz non ci possono essere due cose uguali distinte. Gli assiomi di Hölder sono sette: il primo è la tricotomia, il secondo richiede che l'insieme delle grandezze non abbia un minimo (e dunque sia infinito non numerabile), il terzo esprime la chiusura dell'insieme delle grandezze rispetto alla somma, il quarto richiede che la somma di due grandezze sia maggiore di ciascuna di esse, il quinto esprime la chiusura dell'insieme delle grandezze rispetto alla differenza (a sinistra e a destra, poiché non si è assunta la commutatività della somma), il sesto postula la commutatività della somma e il settimo è una formulazione dell'assioma di continuità di Dedekind. Hölder non si occupa dei sistemi di grandezze infinite e infinitesime trattati da Veronese e le cui proprietà sono state precisate nel 1907 da Hans Hahn; tuttavia egli accenna alla questione della dipendenza del principio di Archimede dal postulato di Dedekind e dai restanti assiomi, così come non trascura di precisare che la maggior parte delle proprietà delle grandezze rimarrebbe invariata assumendo il principio di Archimede anziché il postulato di continuità di Dedekind. Questa è tra l'altro una delle differenze più significative rispetto alla teoria euclidea.

Siano a, b grandezze appartenenti all'insieme G e si ricordi che l'uguaglianza, espressa dal simbolo $=$, è un'identità e non un'equivalenza come in Euclide; si ha un sistema di grandezze (più precisamente potremmo dire un sistema di grandezze estensive), se valgono le seguenti condizioni:[52]

I. $a = b \ \lor \ a > b \ \lor \ a < b$
II. $\forall a \in G \ \exists b \in G \mid b < a$
III. $\forall a, b \in G \mid (a + b) \in G$
IV. $(a + b) > a \ \land \ (a + b) > b$
V. $a < b \ \rightarrow \ \exists x \in G \mid a + x = b \land \exists y \in G \mid y + a = b$
VI. $(a + b) + c \ = \ a + (b + c)$
VII. Assioma di Dedekind

[52]Cfr. Hölder (1901), pp. 4-7.

Con gli assiomi sopra citati Hölder caratterizza un sistema di grandezze, di cui dimostra nel seguito altre proprietà (tra cui la commutatività dell'addizione).[53] Nella terminologia moderna potremmo dire che su G sono definite una relazione d'ordine lineare e una legge di composizione interna associativa con elemento neutro e inverso. Ne segue che (nella terminologia moderna) $\mathcal{G} = \langle G, \leq, + \rangle$ è un gruppo abeliano linearmente ordinato e archimedeo.

A questo punto Hölder applica l'aritmetica moderna alla teoria delle proporzioni euclidea, associando un numero ad ogni rapporto tra grandezze $\frac{a}{b}$ in modo che tale numero esprima la misura di a rispetto a b, considerata come unità.[54] Come insieme numerico adotta l'insieme dei numeri reali secondo la definizione di Dedekind (i numeri irrazionali come classi di sezioni di numeri razionali): tale insieme è (come diremmo oggi) un gruppo abeliano ordinato non archimedeo. La funzione che associa un numero reale a ciascuna grandezza deve essere compatibile con la somma e con la relazione d'ordine tra grandezze; in altre parole la funzione di misura $f : G \to \mathbb{R}$ deve soddisfare le seguenti condizioni ($\oplus$ sia il simbolo per l'addizione tra grandezze e $+$ il consueto simbolo dell'addizione tra numeri reali):

$$\begin{gathered} f(a \oplus b) = f(a) + f(b) \\ a < b \to f(a) < f(b). \end{gathered}$$

Oggi diremmo che Hölder definisce la misura di un sistema di grandezze come un omomorfismo tra G e $\mathbb{R}$, che è un gruppo ordinato abeliano archimedeo. Le ricerche successive in teoria della misurazione hanno generalizzato questo risultato: *misura di un sistema di grandezze estensive è un qualunque omomorfismo su un gruppo abeliano ordinato archimedeo.*

3.3.3 Grandezze estese e misurazione

Ogni teoria della misurazione deve affrontare due problemi principali, che seguendo le definizioni di Suppes, chiameremo rispettivamente teorema della rappresentazione e dell'unicità: giustificare l'assegnazione di numeri alle cose e specificare il grado in cui questa assegnazione è unica.[55] Per poter applicare dei numeri alle cose è necessario che le cose in questione abbiano una struttura simile alla struttura dei numeri che vorremmo assegnare ad esse: solo a questa condizione possiamo usare calcoli numerici per inferire proprietà delle cose in esame. Per stabilire se due insiemi su cui sono definite determinate relazioni e operazioni hanno la stessa struttura occorre verificare se esiste un

[53] Cfr. Hölder (1901), p. 7 ss.
[54] Cfr. Hölder (1901), p. 18 ss.
[55] Cfr. Suppes e Zinnes (1963), p. 4 ss.

isomorfismo tra di essi, cioè una funzione *biiettiva* che conserva le relazioni o perlomeno un *omomorfismo*, ovverosia una funzione *iniettiva* che conserva le relazioni (in questo secondo caso però gli insiemi potrebbero avere un numero diverso di elementi). Il problema della rappresentazione si riduce quindi alla ricerca di un sistema numerico omomorfo (o isomorfo) al sistema di oggetti in esame.

Il secondo problema affronta invece la questione se tale sistema numerico sia l'unico omomorfo al sistema di oggetti in esame o in caso contrario che tipo di unicità abbia. Definendo 'scala di misura' la terna ordinata $\langle \mathcal{G}, \mathbb{K}, f \rangle$ ove $\mathcal{G}$ è un dominio di oggetti da misurare, $\mathbb{K}$ un sistema numerico e f un isomorfismo da $\mathcal{G}$ a $\mathbb{K}$ e intendendo per ϕ una funzione da $\mathbb{K}$ in $\mathbb{K}$ che esprime la relazione tra il sistema numerico scelto e eventuali altri sistemi numerici isomorfi al sistema di oggetti da misurare, si possono individuare diversi tipi di unicità di una misurazione (cfr. tab. 3.1).[56]

Scala	*Trasformazione*	
Assoluta	Identica	$\phi(x) = x$
Rapporto	Simile	$\phi(x) = \alpha x$
Intervallo	Lineare	$\phi(x) = \alpha x + \beta$
Differenza	Traslazione	$\phi(x) = x + \beta$
Ordinale	Funzione monotona	
Nominale	Funzione biiettiva	

Tabella 3.1: Scale di misurazione

Molti teorici della misurazione distinguono i sistemi di cose da misurare in due gruppi: quantità o proprietà estensive e qualità o proprietà intensive. Le prime sono caratterizzate da un'operazione simile all'addizione tra numeri, mentre le seconde risultano prive di una tale operazione. Gli assiomi di Hölder che abbiamo citato sopra costituiscono la prima formulazione rigorosa di un sistema di quantità o proprietà estensive e della loro misura — formulazione non molto dissimile da quella in uso oggi. Suppes ad esempio presenta un insieme di assiomi per determinare le grandezze estensive analogo a quello di Hölder, quindi costruisce un sistema numerico isomorfo al sistema delle proprietà estensive e dimostra che esso è unico a meno di trasformazioni simili, cioè dimostra che la scala di misurazione è una Scala-

[56]Cfr. Suppes e Zinnes (1963), p. 11 ss.

rapporto.[57] Suppes indica sei assiomi che definiscono il concetto di sistema di grandezze o quantità o proprietà estensive $\mathcal{A} = \langle A, \leq, + \rangle$ (con $a, b, c \in A$):

1. $a \leq b \ \wedge \ b \leq c \ \rightarrow \ a \leq c$ (transitività)
2. $(a + b) + c \ \leq \ a + (b + c)$ (associatività)
3. $a \leq b \ \rightarrow \ a + c = c + b$
4. $a \nleq b \ \rightarrow \exists c \mid a \leq (b + c) \ \wedge (b + c) \leq a$
5. $(a + b) \nleq a$
6. $a \leq b \ \rightarrow \ \exists n \in \mathbb{N} \mid b \leq na$ (Archimede)

Per introdurre una misura di $\mathcal{A}$ Suppes costruisce dapprima una partizione di A in classi di equivalenza per mezzo della relazione di identità I e definisce una relazione $\leq^*$ e un'operazione $+^*$ su A/I; quindi determina un sistema numerico $\mathcal{K} = \langle K, \leq^\circ, +^\circ \rangle$ di cui dimostra che è isomorfo a meno di trasformazioni simili alla struttura $\mathcal{A}/\mathcal{I} = \langle A/I, \leq^*, +^* \rangle$: K è un insieme non vuoto di numeri reali positivo chiuso rispetto all'addizione e alla sottrazione di numeri minori da numeri maggiori, $\leq^\circ$ è l'usuale relazione d'ordine tra numeri e $+^\circ$ è l'usuale addizione tra numeri.[58]

---

[57] Traduciamo così il termine 'Ratio scale' inglese.

[58] Cfr. Suppes e Zinnes (1963), pp. 42-3.

Parte II

L'*Ausdehnungslehre* di H. Graßmann

Dopo aver riflettuto nel capitolo 2 sull'origine e sul significato della definizione di matematica come scienza delle grandezze ed essere così pervenuti ad una formulazione più precisa del concetto di grandezza estensiva, riteniamo opportuno analizzare l'opera di un autore, Hermann Graßmann, il quale ha contribuito allo sviluppo di una teoria autonoma delle grandezze estensive e nello stesso tempo ha sancito la fine della definizione di matematica come scienza delle grandezze, introducendo l'idea che la matematica sia piuttosto 'teoria delle forme'. Propriamente la definizione di matematica come Teoria delle forme comprende la definizione tradizionale: infatti il concetto di forma include sia i numeri sia le grandezze spaziali.

Come abbiamo analizzato il concetto di grandezza in relazione all'uso che ne è stato fatto nei tentativi di definire la matematica, così ora analizzeremo il concetto di forma non in generale, compito che sarebbe al di sopra delle nostre forze, ma piuttosto in relazione al significato che esso assume nella definizione di matematica come 'teoria delle forme'. Già si è detto che la prima definizione di matematica come teoria delle forme è stata proposta da Bolzano nel 1810[59] e si è accennato alla nozione di teoria delle forme così come essa compare nella classificazione delle scienze di Ampère;[60] ora si vedrà in dettaglio la concezione della matematica di Hermann Graßmann, concezione che ha un significato innovativo sia da un punto di vista filosofico sia da un punto di vista matematico. Il concetto di forma, infatti, da un lato è connesso ad una nuova determinazione della matematica come scienza formale che si occupa di oggetti prodotti dal pensiero, dall'altro è inserito in una nuova considerazione algebrica delle proprietà astratte delle operazioni matematiche.

Non intendiamo qui presentare in dettaglio la figura di Graßmann o le sue teorie matematiche (nel prossimo capitolo commenteremo tuttavia diversi passi della sua opera matematica principale), quanto indagare che significato assuma il termine forma nella sua opera, in che senso si distingua dal concetto di grandezza in generale e in che misura la teoria generale delle forme possa essere messa in relazione con la scienza generale delle grandezze di cui si è parlato nei capitoli precedenti. Per comprendere il significato del termine forma in Graßmann occorre innanzitutto esplicitare la concezione filosofica ed epistemologica che fonda la sua ricerca: essa non solo non è scindibile dalla ricerca matematica, ma è anche particolarmente utile per illuminare il tipo di cambiamento concettuale che ha luogo tra la concezione della matematica come scienza delle grandezze e la concezione della matematica come teoria delle forme. Infatti, mentre con il termine 'grandezze' si intendono affezioni

[59]Cfr. il § 3.2, p. 130.

[60]Cfr. il § 1.1.2, p. 20.

delle cose, aspetti astratti dagli oggetti sensibili, caratteristiche generali o addirittura universali degli oggetti del mondo, le ‘forme’ di Graßmann sono prodotti del pensiero caratterizzati non in base all’osservazione degli oggetti sensibili ma in base al modo in cui sono generati, cioè all’attività del soggetto che li costruisce. Le forme, benché dotate di proprietà generali, sono trattate alla stregua di oggetti particolari: la matematica è dunque scienza del particolare.

Obiettivo principale di questa seconda sezione è mostrare l’interesse matematico e filosofico dell’impostazione di Graßmann, interesse che sta non solo nella sostituzione del concetto di forma a quello di grandezza (accenneremo in proposito alle conseguenze epistemologiche e ontologiche di questo cambiamento) ma anche e soprattutto nella definizione degli oggetti e delle discipline matematiche attraverso ‘leggi di generazione’: lo studio matematico di certe forme di pensiero è determinato non in virtù delle caratteristiche stesse delle forme, ma in forza delle regolarità con cui esse sono state generate. E tali regolarità sono per Graßmann l’oggetto proprio della matematica come scienza generale, sia perché esse sono comuni a tutti i rami specifici della matematica sia perché esse ne costituiscono il fondamento: tutte le ricerche matematiche riguardano infatti ‘regolarità generative’.

Si è visto nel capitolo 2 che le grandezze sono considerate nel Settecento come l’oggetto vero e proprio della matematica; vedremo che solo con Graßmann esse divengono oggetto di una teoria generale e astratta: la Teoria dell’estensione. Senza affrontare in dettaglio la questione ormai abbastanza nota (e nemmeno troppo significativa) della tragedia di Graßmann, ovvero della difficoltà e del ritardo con cui le idee di Graßmann sono state comprese e accettate, mostreremo da un punto di vista concettuale cosa è avvenuto nell’opera di Graßmann e perché essa ha cambiato radicalmente il modo di affrontare la questione delle grandezze estensive. L’attenzione all’opera di Graßmann si inserisce nella considerazione del più ampio contesto del rapporto tra algebra e geometria. Uno degli aspetti più significativi, e non solo in prospettiva filosofica, del lavoro di Graßmann, è lo sviluppo di una teoria delle grandezze estese indipendente dall’introduzione di coordinate analitiche. Questo fatto ha rilievo sia dal punto di vista fondazionale sia dal punto di vista concettuale: Graßmann fonda la teoria dell’estensione in modo indipendente dall’aritmetica e rende conto della differenza tra numeri e grandezze (centrale nella discussione dei problemi di continuità e dimensione ma anche nella definizione della matematica) mediante diverse leggi generative associate all’unico concetto di forma.

Con la *Teoria dell’estensione* Graßmann vanifica la pretesa di definire la matematica in generale come scienza delle grandezze estensive, poiché queste divengono oggetto di studio soltanto di una tra le tante discipline matematiche. Tuttavia egli conserva l'idea di una matematica generale o meglio di una teoria generale preliminare alla matematica, che egli chiama *Teoria generale delle forme*. Le forme ricorrono in tutte le discipline particolari ma, proprio come per la teoria delle proporzioni, questo 'ricorrere' non significa che le diverse discipline abbiano gli stessi oggetti; infatti come le operazioni definite nella logistica speciosa di Viète necessitavano di essere interpretate e riformulate per essere applicate alla geometria, così avviene per le operazioni di cui si parla nella Teoria generale delle forme: esse devono essere applicate alle singole discipline e non tutte sono applicate nello stesso modo.

Nei lavori di Graßmann (e del fratello Robert) prende corpo l'idea di suddividere le discipline matematiche in base al tipo di operazioni proprie di ciascuna di esse, in base ai modi in cui sono generate le forme. Si realizza così l'idea che la generazione, la costruzione stessa delle forme permetta di distinguere le discipline matematiche, le quali sono caratterizzate non tanto dagli oggetti di cui trattano quanto dalle trasformazioni, dalle possibili combinazioni di tali oggetti. In altre parole il metodo con cui viene suddivisa la matematica riflette una diversa concettualizzazione di essa: le operazioni e le relazioni divengono i veri oggetti della teoria. Benché si parli ancora di forme come oggetti matematici particolari, protagoniste delle teorie matematiche divengono le regolarità generative che sole permettono di trovare un ordine nell'altrimenti indeterminata differenza, vale a dire le operazioni cui le forme sono soggette e con cui sono generate.[61] L'accento sul carattere funzionale delle operazioni e delle relazioni tra le forme non è tuttavia accompagnato dalle considerazioni insiemistiche cui noi oggi lo associamo: proprio per questo è importante distinguere il concetto grassmanniano di forma dalla nozione moderna di struttura.

[61]≪Poiché ciò che è differente da qualcosa di dato può esserlo in un'infinità di modi, la differenza [Verschiedenheit] si perderebbe totalmente nell'indeterminato [Unbestimmte] se non fosse soggetta ad una legge fissa.≫ Cfr. H. Graßmann, *Ausdehnungslehre*, Introduzione, B, §10, in Graßmann (1844), p. 28. Il testo è tradotto nell'appendice 7.7, p. 398.

Capitolo 4

La matematica come *Teoria delle forme*

L'opera principale di Graßmann si intitola *Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. I. Teil. Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre von Magnetismus und die Krystallonomie erläutert* [Scienza della grandezza estensiva o Teoria dell'estensione, una nuova disciplina matematica presentata e chiarita mediante applicazioni. Parte prima: la Teoria lineale dell'estensione, un nuovo ramo della matematica presentato e chiarito mediante applicazioni ai rimanenti rami della matematica e alla statica, alla meccanica, alla dottrina del magnetismo e alla cristallonomia].[1]

Nell'Introduzione Graßmann deduce il concetto di matematica pura, la quale comprende Aritmetica, Teoria delle funzioni, Analisi combinatoria e Teoria dell'estensione oltre ad una parte che le precede tutte: la Teoria generale delle forme. Alla luce delle concezioni di matematica che abbiamo indagato nei capitoli 2 e 3 ci proponiamo ora, dopo qualche cenno bio-bibliografico su Hermann, Robert e Justus, di analizzare i passi della *Ausdehnungslehre* nei quali si fornisce una concettualizzazione della matematica intesa non più come scienza delle grandezze ma come *Teoria delle forme di pensiero*, sia in relazione al complesso delle scienze sia in relazione alla filosofia. Il capitolo 5 sarà invece dedicato alla *Teoria delle forme estensive* o *Teoria dell'estensione*. Solo dopo aver analizzato le teorie matematiche proposte da Graßmann potremo infatti comprendere il significato della sua concettualizzazione e in

[1]Lineale, che deriva da 'Lineal' = 'riga, righello', denota ciò che può essere costruito soltanto con la riga in contrapposizione a ciò che richiede anche l'uso del compasso.

particolare del termine ‘forma’ che viene a sostituire quello di ‘grandezza’ come oggetto privilegiato della matematica.

In questo capitolo faremo ampio riferimento all’*Introduzione* alla *Ausdehnungslehre* del 1844, in particolare analizzeremo la sezione *A. Deduzione del concetto di matematica pura* nel § 4.2, la sezione *D. Forma dell’esposizione* nel § 4.3.1 e la sezione *B. Deduzione del concetto di Teoria dell’estensione* nei § 4.3.2 e § 4.3.3. Della rimanente sezione *C. Esposizione del concetto di Teoria dell’estensione* tratteremo invece nei capitoli dedicati alle grandezze estensive. Abbiamo tradotto il testo dell’*Introduzione* in appendice, avvalendoci della traduzione inglese parziale contenuta in un articolo di A.C. Lewis e della traduzione francese di D. Flament e B. Bekemeier.[2] Meno buona riteniamo invece la più recente traduzione inglese di Lloyd C. Kannenberg, che non traduce accuratamente il lessico filosofico di Graßmann e rende talvolta la comprensione del testo ancora più difficile di quanto già non sia.[3]

4.1 Cenni bio-bibliografici

Poiché mancano monografie in italiano su Graßmann e l’unica biografia in italiano risale al 1878, riteniamo opportuno fornire alcune brevi indicazioni bio-biliografiche su Hermann Günther Graßmann, sul fratello Robert e sul padre Justus. Come anticipato nella nota editoriale posta alla fine della Prefazione, adottiamo la seguente convenzione: con il cognome Graßmann intenderemo sempre Hermann Günther Graßmann, mentre il fratello Robert e il padre Justus saranno sempre indicati o soltanto per nome o mediante nome e cognome.

Justus Graßmann, figlio di un predicatore dello Hinterpommern, frequentò tra il 1799 e il 1801 l’università di Halle, ove studiò teologia e frequentò le lezioni di matematica e fisica di Klügel e di Gilbert.[4] Dal 1802 lavorò come predicatore; nel 1804 si sposò con Johanne Luise Friederike Medenweld, figlia del parroco di Klein-Schönfeld (oggi Greifenhagen in Pomerania), ed ebbe dieci figli, due dei quali morirono però in giovane età. Nel 1806 ottenne l’incarico di professore di matematica, fisica e disegno al ginnasio di Stettin,

[2]Cfr. Lewis (1977) e Graßmann (1994).

[3]Cfr. Graßmann (1995).

[4]Sulla vita e le opere di Graßmann si vedano Engel (1911), Schlegel (1878), Favaro (1878), Sturm *et al.* (1878), Heath (1917a), Petsche (1979a), Petsche (1979b) e Petsche (1980b). L’articolo di A. Favaro pubblicato nel 1878 comprende un riassunto di Schlegel (1878).

ove insegnò fino alla morte nel 1852, con una breve pausa tra il 1813 e il 1814, quando si arruolò per liberare la città dai francesi.[5]

Justus Graßmann è autore di alcuni manuali di matematica elementare: *Über den Begriff und Umfang der reinen Zahlenlehre* [Sul concetto e sull'estensione della Teoria pura dei numeri] del 1827 e *Raumlehre* [Teoria dello spazio] del 1824. Quest'ultimo è il testo dal quale Graßmann dichiara di aver derivato il concetto di prodotto esterno: in esso ricorre infatti per la prima volta l'idea di prodotto geometrico.[6] Justus Graßmann è noto anche per alcuni risultati di fisica: l'invenzione (1820) di un rubinetto (tuttora noto come rubinetto di Graßmann) per il funzionamento delle pompe ad aria a doppio cilindro e l'introduzione di una segnatura indicizzata per i cristalli.[7]

Robert Graßmann, fratello di Hermann, nacque a Stettin nel 1815 e morì nel 1901. Studiò scienze e teologia all'università di Bonn, quindi si trasferì a Berlino, dove studiò teologia con Neander; nel 1841 iniziò a insegnare dapprima nella Realschule e poi nella Höhere Tochterschule di Stettin. Nel 1852 abbandonò l'insegnamento e iniziò a pubblicare giornali politici e a svolgere attività editoriale. Collaborò in più occasioni con il fratello: insieme essi svolsero attività politica e scrissero manuali di grammatica latina e tedesca. Secondo le testimonianze di Robert, i due fratelli avrebbero anche iniziato a collaborare, dopo il 1847, alla stesura di un'esposizione generale della matematica. Hermann pubblicò in effetti il *Lehrbuch der Arithmetik* nel 1861 e l'*Ausdehnungslehre* nel 1862, ma non presentò quest'ultima come parte di un progetto più ampio svolto in comune con il fratello. In base al progetto comune Robert avrebbe dovuto curare la logica e la combinatoria, che apparvero soltanto nel 1872 come parte della *Formenlehre oder Mathematik*. Quest'opera comprende una parte generale, la *Grösenlehre*[sic], e quattro rami matematici particolari: la logica o *Begriffslehre*, la combinatoria o *Bindelehre*, l'aritmetica o *Zahlenlehre*, la teoria dell'estensione o *Ausenlehre*[sic].[8] Altre opere pubblicate successivamente da Robert Graßmann furono *Das Weltle-*

[5]Sulla vita e sulle opere di Justus Graßmann si vedano oltre al già citato Engel (1911) anche Heuser-Keßler (1996), Lewis (1981), Lewis (1996b), Radu (2000), Scholz (1996).

[6]Cfr. rispettivamente Graßmann (1824) e Graßmann (1827). Ritorneremo ampiamente su questo tema nel § 6, p. 297.

[7]Tale nuova segnatura, scoperta indipendentemente da Whewell, fu pubblicata in *Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre* del 1829.

[8]L'opera è divisa in cinque parti impaginate autonomamente. Cfr. Graßmann (1872). Sulla collaborazione tra i fratelli Robert e Hermann si veda in particolare Schubring (1996d), che ridimensiona il giudizio fortemente negativo sul contibuto di Robert espresso in Engel (1911).

ben oder die Metaphysik del 1881 e l'opera enciclopedica *Das Gebäude des Wissens* del 1890.[9]

Hermann Günther Graßmann nacque a Stettin il 15 aprile del 1809 (durante l'occupazione francese); nel 1813, quando il padre si arruolò, Hermann si trasferì per un anno con la madre e la famiglia a Greifenhagen. Dal 1814, di ritorno a Stettin, studiò dapprima in una scuola privata e poi nel ginnasio in cui insegnava il padre. Nel 1827 Hermann si trasferì a Berlino, dove si iscrisse alla facoltà teologica e frequentò lezioni di Teologia (Neander, Schleiermacher, Hengstenberg, Strauß, Marheinecke), Storia della riforma in Inghilterra (Raumer), Geografia della Germania (Zeune), Dialettica (Schleiermacher), Morale (Neander), Antichità greca (Boeckh), Psicologia (Schleiermacher), Storia della letteratura greca (Boeckh), Storia della filosofia (Ritter). Dopo un'iniziale attrazione per le lezioni di teologia di Neander, Graßmann subì sempre più l'influenza di Schleiermacher, come dimostra l'assidua frequenza alle sue lezioni di teologia, dialettica, psicologia e come è testimoniato nei diari tenuti dallo stesso Graßmann durante la permanenza a Berlino. Nell'ultimo periodo universitario, Graßmann abbandonò tuttavia progressivamente lo studio della teologia per dedicarsi alla filologia, leggendo da autodidatta le opere degli storici attici. Nei diari è testimoniato anche il progetto di leggere Omero e di studiare matematica; negli anni berlinesi Graßmann pare invece aver approfondito le proprie conoscenze matematiche solo attraverso la lettura delle opere del padre.

Nel 1830 Graßmann rientrò a Stettin dove preparò l'esame per l'insegnamento nella scuola superiore, sostenuto con parziale successo alla fine del 1831: Graßmann ottenne la facoltà di insegnamento (nelle prime classi del ginnasio) delle lingue antiche, della storia, della matematica, della filosofia naturale, della religione e della lingua tedesca ma non della filosofia. In questo periodo, accanto allo studio delle opere greche di Omero e di Orazio e della storia romana, si dedicò allo studio della matematica, della fisica e della storia naturale. Un curriculum di studi presentato per sostenere l'*Examen pro facultate docendi* testimonia la lettura di testi di geometria, matematica, trigonometria, calcolo differenziale, fisica — tra cui gli *Éléments de Géométrie* di Legendre, le *Vorlesungen über Mathematik* di Vega, la *Lehre von den Kegelschnitten* di Schneider, il *Vollständiger Lehrbegriff der höhern Analysis* di Meyer, il *Lehrbuch der mechanischen Naturlehre* di Fischer — nonché di altre opere di zoologia, mineralogia e botanica.[10] Intanto Graßmann continuava a studiare intensamente letteratura greca (in particolare i dialoghi platonici) e matematica. In una lettera inviata a Saint-Venant nel

[9]Su Robert Graßmann si vedano anche Peckhaus (1996) e Grattan-Guinness (1996).
[10]Cfr. Engel (1911), p. 36 ss.

1847 Graßmann afferma di aver sviluppato proprio in quegli anni i concetti di addizione e di prodotto geometrico.

Nel 1833 Graßmann riprese gli studi teologici in vista dell'esame per diventare predicatore che sostenne con successo l'anno seguente. Nel 1834 accettò un posto come insegnante di matematica in una scuola superiore di Berlino, ottenendo la cattedra di Jacob Steiner, che era stato nel frattempo nominato professore universitario. Nel 1836 ottenne un posto a Stettin come insegnante di matematica, tedesco, religione, fisica, latino, francese. In questo periodo continuò a studiare matematica e fisica, spesso in stretto contatto con il padre, che aveva fondato una società di fisica: oggetto del suo interesse erano prevalentemente la chimica e la cristallografia. Nel 1838 Graßmann superò il secondo esame di teologia: a questo periodo risale il testo di cristallografia *Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Krystallbildung* [Deduzione delle forme dei cristalli dalle leggi generali della formazione dei cristalli] (1839).[11] Nel 1840 Graßmann ottenne l'abilitazione all'insegnamento in tutte le classi del ginnasio di matematica, fisica, mineralogia e chimica: la tesi discussa per l'abilitazione, intitolata *Theorie der Ebbe und Flut* [Teoria del flusso e del riflusso], contiene la prima formulazione del prodotto vettoriale.[12] A questo periodo risale la lettura delle opere di Lacroix e di Lagrange e della *Mécanique céleste* di Laplace.

Nel 1842, dopo essere stato chiamato ad insegnare al ginnasio di Stettin, Graßmann iniziò a dedicarsi esclusivamente alla matematica. In questo periodo tenne un corso di lezioni sulla *Teoria dell'estensione* a parenti e amici, lesse il lavoro geometrico di Möbius *Der barycentrische Calcul*[13] e il *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* di Poncelet, che influenzò la stesura della *Theorie der Centralen*, apparsa sul Journal di Crelle nel 1842.[14]

Nel 1844 Graßmann pubblicò *Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert.* L'opera non ebbe molti lettori a giudicare dai commenti di Gauss e di Grunert e dal cortese rifiuto di Möbius di recensire l'opera. Gauss colse una tendenza simile nel progetto di Graßmann e nella propria idea di applicare la metafisica delle grandezze complesse all'indagine delle relazioni spaziali, ma trovava difficile familiarizzare con la terminologia 'idiosincratica' dell'*Ausdehnungslehre.*[15] Grunert, dopo aver di-

[11] Il testo, apparso nel programma della Ottoschule, è stato ristampato in Graßmann (1902), pp. 115-146.

[12] Cfr. il § 5.2.1 a pagina 271.

[13] Cfr. Möbius (1827).

[14] Cfr. Graßmann (1842).

[15] ≪. . . in einem Gedränge von anderen heterogenen Arbeiten Ihr Buch durchlaufend glaube ich zu bemerken, dass die Tendenzen desselben theilweise denjenigen Wegen be-

chiarato le proprie difficoltà nel leggere l'*Ausdehnungslehre*, criticò la forma espositiva troppo ricca di riflessioni filosofiche, aggiungendo che sarebbe stato meglio esporre l'argomento in forma euclidea: tuttavia propose a Graßmann di inviare egli stesso una breve nota sul contenuto della *Ausdehnungslehre* da pubblicare sul *Grunert Archiv*.[16] Graßmann scrisse a tal fine la "Kurze Übersicht über das Wesen der *Ausdehnungslehre*", pubblicata nel 1845. Möbius rifiutò di recensire l'opera di Graßmann appellandosi alla propria incompetenza filosofica, che gli avrebbe impedito di valutare correttamente un'opera che aveva una componente filosofica a fondamento dell'elemento matematico.[17] L'avversione per la componente filosofica dell'opera rivelava però soprattutto la difficoltà del testo, che non solo presentava una teoria estremamente generale ma introduceva anche una terminologia del tutto nuovo.[18] Favaro osserva che, se in Germania nessun matematico (ad eccezione di Bretschneider) poteva affermare di aver letto tutta l'*Ausdehnungslehre*, in Italia l'opera fu letta da Bellavitis, che entrò in contatto epistolare con Graßmann e si occupò di richiamare l'attenzione dei matematici italiani sulle sue ricerche.[19]

Nel 1846 Graßmann pubblicò un saggio contenente un'interessante applicazione della nuova teoria dell'estensione, in grado di estendere un risultato trovato con metodi proiettivi da Steiner: la possibilità di dare una definizione

gegnen, auf denen ich selbst nun seit fast einem halben Jahrhundert gewandelt bin, und wovon freilich nur in kleiner Theil 1831 in den Comment, der Göttingischen Societät un noch mehr in den Göttingische Gelehrten Anzeigen (1831, Stuck 64) gleichsam im Vorbeigehen erwähnt ist, nemlich die concentrirte Metaphysik der complexen Grössen, ... und ich sehe wohl, dass um den eigentlichen Kern Ihres Werkes herauszufinden, es nöthig sein wird, sich erst mit Ihren eigenthümlichen Terminologien zu familiarisiren.» Cfr. F. Gauss, *Lettera a H. Graßmann*, Göttingen, 14 dicembre 1844, cit. in una nota di F. Engel a Graßmann (1862), pp. 397-8.

[16] Il passo della lettera di Grunert a Graßmann è riportato in Engel (1911), p. 103.

[17] «Das philosophische Element Ihrer vortrefflichen Schrift, das doch dem mathematischen Elemente zum Grunde liegt, nach Gebühr zu würdigen, ja auch nur gehörig zu verstehen, bin ich daher unfähig, was ich auch genüglich daraus erkannt habe, daß bei den mehrfachen Versuchen, Ihr Werk uno tenore zu studiren, ich immer durch die große philosophische Allgemeinheit aufgehalten worden bin.» *Lettera di Möbius a H. Graßmann*, 2 febbraio 1845, cit. in Engel (1911), p. 100, al quale rimandiamo per un'analisi completa dei rapporti tra Graßmann e Möbius.

[18] In una lettera ad Apelt Möbius ammetteva per esempio di aver scoperto, pur non avendo letto integralmente ma solo 'sfogliato' l'*Ausdehnungslehre*, che essa conteneva molte novità, «ampliamenti di concetti, generalizzazioni ... ricche di influssi sulla matematica stessa, in particolare per la rappresentazione sistematica dei suoi elementi». Cfr. *Lettera di Möbius a Apelt*, 5, gennaio 1846, cit. in Engel (1911), p. 101.

[19] Cfr. Favaro (1878), p. 34. A conferma dell'interesse di Bellavitis per l'opera di Graßmann, si consideri ad esempio l'opera di G. Veronese (che successe a Bellavitis sulla cattedra di geometria di Padova) o quella di Peano e della sua scuola.

geometrica di tutte le curve algebriche. È interessante ricordare che anche in questa occasione, mentre Plücker non si accorse del risultato dimostrato da Graßmann, Bellavitis se ne occupò, sollevando anche obiezioni alla generalità del metodo, obiezioni poi confutate da Graßmann in uno scritto successivo.[20] Nel 1847 Graßmann pubblicò lo scritto *Geometrische Analyse*, vincitore del Concorso della Società Jablonowski, il cui tema recitava: «La ripresa e l'ulteriore sviluppo del calcolo geometrico scoperto da Leibniz o il ritrovamento di un calcolo simile ad esso». In questo scritto Graßmann sosteneva che la Teoria dell'estensione, se concepita geometricamente, poteva essere intesa come un'attuazione del progetto leibniziano.

Cinque anni dopo (nel frattempo si era sposato con Marie-Therese Knappe, da cui ebbe undici figli) Graßmann sostituì il padre come primo professore di matematica del ginnasio di Stettin. A questo periodo risalgono molte delle memorie di Graßmann, forse le sue opere più lette e più apprezzate, perché espresse in uno stile meno filosofico e nello stesso tempo chiaro e non rigidamente euclideo. In queste memorie Graßmann completò il teorema generale della generazione delle curve, mostrò che le relazioni di prospettività e di proiettività di Steiner potevano essere espresse con il nuovo metodo di analisi geometrica, stabilì il rapporto con il metodo di Plücker. Sempre in questi anni ebbe luogo una polemica con Cauchy, le cui chiavi algebriche (discusse in una serie di comunicazioni all'Accademia delle Scienze di Parigi) presentavano elementi di somiglianza con le grandezze estensive di Graßmann.[21]

Nel 1861 comparve il *Lehrbuch der Arithmetik*, un manuale di matematica elementare contenente la prima definizione induttiva dell'operazione di addizione.[22] L'anno successivo apparve una radicale rielaborazione dell'*Ausdehnungslehre*, riscritta in forma rigorosamente euclidea: l'opera, oltre a presentare in nuova veste la teoria 'lineale' dell'estensione del 1844, conteneva anche un maggior numero di applicazioni geometriche ed una nuova sezione dedicata alle funzioni algebriche, alle serie infinite, al calcolo differenziale e integrale. Questa edizione dell'*Ausdehnungslehre* ebbe ancora meno risonanza della precedente e non venne mai recensita. Grunert invitò Graßmann a pubblicare un annuncio di questa sua nuova opera sull'*Archiv*, ma questa volta accompagnò l'invito con un giudizio decisamente svalutativo dell'opera, che indusse Graßmann a declinare l'offerta. Secondo Grunert infatti i lavori sulle grandezze estensive non contenevano alcun progresso scientifico

[20]Cfr. Favaro (1878), pp. 34-5.

[21]Cfr. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, **38**, 1854, p. 744.

[22]Si veda in proposito il § 4.3.2.

né risultati matematicamente fecondi.[23]

Negli anni successivi, sfumata definitivamente la possibilità di ottenere un incarico accademico, Graßmann abbandonò gli studi matematici, dedicandosi intensamente alla linguistica e in particolare allo studio del sanscrito. In quegli stessi anni, però, la portata dell'opera di Graßmann e le sue implicazioni per l'algebra e per la geometria iniziarono ad essere riconosciute: da Hankel, Clebsch, Schlegel e poi ancora da Klein, Lie, Noth, Sturm. Intorno al 1876, quando iniziò a diffondersi un certo interesse per l'*Ausdehnungslehre* del 1844, l'opera risultava introvabile, essendo stata mandata al macero dall'editore che per dodici anni non ne aveva venduta nemmeno una copia. La ristampa fu progettata nel 1877 ma fu realizzata soltanto l'anno successivo, appena dopo la morte del suo autore.

Oltre che di matematica Graßmann si occupò anche di fisica, come testimoniano due memorie sulla elettrodinamica (la prima era apparsa nel 1845, la seconda nel 1878), scritti sulla teoria del suono vocale e sulla teoria di formazione delle consonanti, la costruzione di un eliostato, una teoria dei colori a difesa della teoria newtoniana della mescolanza. Degne di nota furono anche le sue ricerche sulla lingua tedesca (con il fratello e con il botanico Hess introdusse nomi tedeschi per le piante) e i suoi risultati nell'ambito della linguistica: la passione per il sanscrito condusse Graßmann a scrivere un dizionario e una traduzione tedesca dei Rig-Veda e a formulare la nota legge dell'aspirata di Graßmann.[24]

La storia della ricezione dei risultati matematici di Graßmann, diversa da quella dei suoi risultati in fisica, che furono accettati più rapidamente e dei suoi risultati in linguistica che furono subito riconosciuti e apprezzati (e per i quali Graßmann ottenne la laurea *honoris causa* a Jena), si articola in tre momenti: la restrizione da parte dei primi grassmanniani dei suoi risultati allo spazio geometrico tradizionale; il disdegno e la diffidenza di Engel e Study, editori delle opere complete, nei confronti delle dimensioni astratte algebriche; infine la decisiva svolta nella direzione delle concezioni algebriche attuata dai matematici francesi. Dieudonné ha parlato di 'tragedia' per descrivere il mancato riconoscimento dei lavori di Graßmann; Schubring e Rowe in recenti articoli hanno ridimensionato la tragicità e l'eccezionalità del destino di Graßmann, sostenendo che il suo caso non è più eclatante di tanti

[23]≪Damit ist es aber sehr wohl vereinbar, dass ich z.B. in Ihrer Ausdehnungslehre oder Ihren Arbeiten über die sogenannte extensive Grösse keinen eigentlichen wissenschaftlichen Fortschritt erkenne, von derselben keine erspriesslichen Früchte für die Wissenschaft erwarten kann, so sehr ich auch Ihren dabei an den Tag gelegten Scharfsinn ehre.≫ Cfr. *Lettera di Grunert a Graßmann*, 1862, cit. in Schlegel (1878), p. 47.

[24]Per un elenco cronologico o tematico delle opere di Graßmann rimandiamo rispettivamente a Engel (1911), p. 356 ss. e a Schlegel (1878), p. 79 ss.

altri casi nella storia della matematica: come tutte le innovazioni incisive i risultati di Graßmann hanno impiegato un notevole lasso di tempo prima di esercitare i propri effetti.[25] L'inizio della pubblicazione delle opere complete (promossa da Felix Klein) già diciassette anni dopo la morte può essere anche considerato come un segno di particolare venerazione nei confronti di Graßmann. A pochi matematici è stato riservato l'onore di una così precoce pubblicazione delle opere complete: si pensi al destino di Euler e Leibniz, le cui opere sono state pubblicate con grandissimo ritardo. Inoltre Graßmann è l'unico matematico non accademico per il quale sia stata progettata l'edizione delle opere complete.[26]

I seguaci di Graßmann privilegiarono secondo Schubring l'aspetto geometrico rispetto a quello algebrico astratto (quantità estese n-dimensionali): così fece ad esempio Lotze, autore della voce dedicata alla Teoria dell'estensione nella *Enzyklopädie*. La maggior parte dei grassmanniani considerava soltanto l'applicazione della teoria dell'estensione alle tre dimensioni dello spazio e spesso presentava il lavoro di Graßmann come un calcolo di punti (il termine *Punktrechnung* è stato introdotto, pare, da Mehmke) analogo a quello di Möbius.[27] Pertanto il vero problema della ricezione di Graßmann consiste non tanto nel ritardo con cui è avvenuta quanto nel fatto che essa è stata parziale: il contributo di Graßmann è stato recepito nella scuola di Königsberg da Clebsch e Klein, il cui interesse era rivolto prevalentemente alla geometria. Tobies mostra ad esempio in un recente articolo che nell'*Enzyklopädie* Graßmann è citato fequentemente a proposito della geometria e della meccanica, ma non in relazione all'algebra e all'analisi.[28] Mentre nell'articolo di Study sui diversi sistemi numerici apparso sull'*Enzyklopädie* Graßmann è citato soltanto in nota, la traduzione rivista e ampliata di Cartan nell'edizione francese dell'*Encyclopédie* contiene un paragrafo dedicato esplicitamente al calcolo dell'estensione di Graßmann. Proprio tramite Cartan i francesi hanno accolto ed apprezzato la componente algebrica del lavoro di Graßmann: da Cartan ha origine l'attenzione per Graßmann che ha condotto alle ricerche di algebra multilineare di Bourbaki.[29] Accanto all'area tedesca e all'area francese, Schubring individua una terza area di ricezione dell'opera di Graßmann: in Inghilterra infatti Whitehead si richiama all'*Ausdehnungslehre* nel *Treatise on Universal Algebra* del 1898.[30]

[25]Cfr. Röwe (1996) e Schubring (1996b).
[26]Cfr. Schubring (1996b), pp. xi-xii.
[27]Cfr. Schubring (1996b), pp.
[28]Cfr. Schubring (1996b), p. xix.
[29]Cfr. Cartan (1908).
[30]Cfr. Whitehead (1898).

4.2 Scienze reali e scienze formali

La prima sezione dell'Introduzione alla *Ausdehnungslehre* si intitola, come abbiamo detto, *Deduzione del concetto di matematica pura.* Che cosa intende Graßmann per deduzione e perché avverte la necessità di premettere alla trattazione matematica una deduzione del concetto di matematica? Graßmann non si limita a presentare una definizione della matematica in base agli oggetti che compaiono nelle sue dimostrazioni e proposizioni, ma vuole dedurne la definizione a partire dal concetto generale di scienza. Tale deduzione è immediatamente seguita dalla deduzione del concetto di *Teoria dell'estensione*, ovverosia dalla deduzione del concetto della nuova scienza introdotta nell'*Ausdehnungslehre.* Graßmann scrive infatti di essersi sentito in dovere di indicare il posto della nuova scienza all'interno del sistema del sapere; a tale fine, nonostante la scarsa fecondità delle riflessioni della scuola hegeliana sugli oggetti matematici e il timore che esse ispirano ai matematici, egli premette alla Teoria vera e propria un'introduzione 'filosofica':

> Infatti predomina ancora tra i matematici, e in parte non senza ragione, una certa reticenza di fronte alle spiegazioni filosofiche di oggetti matematici e fisici; e in effetti la maggior parte delle ricerche di questo tipo, e precisamente quelle condotte da Hegel e dalla sua scuola, soffre di mancanza di chiarezza e di arbitrarietà distruggendo così tutti i frutti di tali ricerche. Ciononostante io mi sono sentito in dovere di indicare il posto della nuova scienza nel dominio del sapere e per soddisfare entrambe le esigenze ho premesso un'introduzione che può essere tralasciata senza rovinare in modo essenziale la comprensione del tutto.[31]

Proprio questo riferimento alla scuola hegeliana sottende d'altra parte una certa familiarità di Graßmann con la tradizione idealistica, anche se Graßmann non risulta aver frequentato i corsi di Hegel all'Università di Berlino; è tuttavia provato che egli abbia frequentato i corsi di Storia della filosofia di Ritter, discepolo di Hegel.[32]

Graßmann appare poco influenzato dal kantismo matematico e sembra aver subito una maggiore influenza da parte della temperie culturale romantica, anche se questa inizia già ad essere screditata in ambito scientifico all'epoca in cui Graßmann pubblica la *Teoria dell'estensione*.[33]

La critica di Graßmann alla tradizione idealistica e più in generale alle «spiegazioni filosofiche di oggetti matematici» è del tutto in linea con la

[31] Cfr. *Vorrede zur ersten Auflage*, in Graßmann (1844), p. 15.

[32] Cfr. Engel (1911), p. 20. Si veda anche il § 4.1, p. 160.

[33] Si veda il § 6.1.1, p. 300 e in particolare Scholz (1994) per quanto riguarda i rapporti tra filosofia romantica e cristallografia.

tendenza dell'epoca. A testimonianza della scarsa considerazione in cui i matematici del primo Ottocento tenevano le riflessioni dei filosofi si ricordi ad esempio il carteggio tra Gauss e Schumacher. In risposta ad una lettera di Schumacher, che esprime una certa sorpresa di fronte a errori e confusioni nelle definizioni matematiche di Wolff, Gauss risponde:

> Che Lei ritenga i filosofi *ex professo* incapaci di confusione nei concetti e nelle definizioni, quasi mi stupisce. In nessun luogo la confusione è di casa come tra i filosofi che non sono matematici e Wolff non era un matematico, anche se ha scritto dei manuali a buon mercato. Dia solo un'occhiata ai filosofi contemporanei, a Schelling, a Hegel, a Nees von Esenbreck, non Le si drizzano i capelli in testa vedendo le loro definizioni?[34]

Anche se non intendiamo qui ricostruire storicamente il rapporto con i pensatori idealisti, ricordiamo che Graßmann aveva seguito assiduamente a Berlino i corsi di Schleiermacher, in particolare di teologia e dialettica. Schleiermacher si richiamava nelle sue lezioni alla dialettica platonica e ad alcune idee di Spinoza, confrontandosi polemicamente con Kant, Fichte, Schelling, Hegel. Oltre all'influenza diretta di Schleiermacher di cui parleremo a lungo in questo capitolo, Graßmann avrebbe anche subito, attraverso la figura del padre, una forte influenza da parte della *Naturphilosophie* e di Schelling (cfr. il § 6.1.1).[35]

Deduzione

Il titolo stesso della sezione *A. Deduzione del concetto di matematica pura* dell'Introduzione suggerisce che l'intento di Graßmann non è tanto rivolto alla determinazione del posto occupato dalla matematica nel sistema del sapere, scopo cui peraltro è rivolta l'Introduzione stessa, quanto ad una vera e propria *deduzione* del concetto di matematica pura. Pur non intendendo qui ricercare l'origine storica o filosofica di tale idea crediamo che sia interessante sottolineare con quali tradizioni essa ha punti in comune e con quali invece non ha nulla a che spartire.

La deduzione della matematica non va intesa in senso kantiano: essa non è infatti né una deduzione empirica che mostri in che modo il concetto di matematica possa essere acquistato per mezzo dell'esperienza né una deduzione trascendentale che spieghi in che modo il concetto di matematica

[34]Cfr. Gauss (1862), vol. 4, p. 337.

[35]Si vedano in particolare Lewis (1977) per quanto riguarda il riscontro di motivi schleiermacheriani nella filosofia di Graßmann, Heuser-Keßler (1996) per quanto riguarda il rapporto con Schelling e la *Naturphilosophie* e Otte (1989) per ciò che concerne l'influenza dello 'spirito del tempo'.

possa riferirsi ad oggetti di esperienza (e infatti il termine tedesco usato da Graßmann è 'Ableitung' e non il kantiano 'Deduction', che deriva dal lessico giuridico).[36] Nemmeno si tratta della deduzione fichtiana, che mira alla giustificazione delle proposizioni della filosofia per mezzo dell'Io: se infatti è vero che Graßmann riserva al soggetto un ruolo fondamentale nell'attività matematica, egli non prende qui le mosse dal soggetto, ma dal concetto di scienza, anzi di 'scienze'.

D'altra parte ben più che da Fichte, morto tredici anni prima dell'arrivo di Graßmann a Berlino, questi fu influenzato dalla figura di Schleiermacher, del quale seguì numerosi corsi di teologia ma anche corsi di dialettica e di psicologia. L'influenza di Schleiermacher si rafforzò specialmente negli ultimi anni di università, proprio quando Graßmann si occupava sempre meno di teologia e sempre più di filologia: nelle pagine del diario l'insegnamento di Schleiermacher è giudicato fondamentale in ogni disciplina, proprio perché esso consisterebbe in un metodo che permette di accostarsi in modo corretto a ogni sapere e di svilupparlo in modo autonomo.[37] Una conferma dell'influenza di Schleiermacher anche negli anni di poco precedenti la stesura della *Ausdehnungslehre*, è fornita dalla lettura — compiuta insieme al fratello Robert nel 1840 — della *Dialektik* nell'edizione postuma curata da Ludwig Jonas.[38]

Né Otte né Lewis, che pure conducono le due più interessanti analisi storico-filosofiche del testo di Graßmann, si soffermano esplicitamente sulla natura e sul significato di questa deduzione. Lewis tuttavia, analizzando il rapporto tra Schleiermacher e Graßmann, descrive il concetto di deduzione che si trova nelle *Grundlinien einer Kritik der bisherigen Sittenlehre* del 1803 e fornisce con ciò implicitamente la chiave di lettura per interpretare il concetto di deduzione che si trova nell'Introduzione all'*Ausdehnungslehre* di Graßmann. Nelle *Grundlinien* Schleiermacher individua tre metodi scientifici per trattare l'etica: 1) il metodo rapsodico, 2) il metodo dogmatico-deduttivo

[36]Cfr. Kant (1787), pp. 102-3.

[37]≪Ebensowenig will ich hier behaupten, daß ich die Schleiermacherschen Ansichten ganz zu meinem Eigentume gemacht hätte (da ich ja vieles davon nicht verstand), indessen gewann er doch einen so mächtigen Einfluß auf meine Entwickelung, ich habe ihm in geistiger Hinsicht so unendlich viel zu danken, daß ich nur ihn an die Spitze dieses Abschnittes stellen kann. [...] Doch erst im letzten Jahre zog mich Schleiermacher ganz an; und obwohl ich damals schon mich mehr mit der Philologie beschäftigte, so erkannte ich doch nun erst, wie man von Schleiermacher für jede Wissenschaft lernen kann, weil er weniges Positives gibt, als er geschickt macht, eine jede Untersuchung von der rechten Seite anzugreifen und selbstständig fortzuführen, und in den Stand setzt, das Positive selbst zu finden.≫ Cfr. Engel (1911), pp. 21-2.

[38]Cfr. Engel (1911), p. 91.

e 3) il metodo euristico.[39]

Il metodo *rapsodico* consiste nel confronto di elementi individuali senza un principio organizzativo. Richiamandoci a quanto abbiamo detto nel capitolo 1 a proposito dei criteri di classificazione delle scienze, potremmo dire che il metodo rapsodico corrisponde alle classificazioni naturali, cioè ai tentativi di organizzare gli oggetti delle scienze a partire dal confronto dei loro caratteri senza assumere preliminarmente un principio estrinseco come criterio classificatorio. Rapsodico sarebbe dunque in questo senso il procedere di Ampère, che ad imitazione delle classificazioni naturali di de Jussieu, prende le mosse dagli oggetti particolari delle scienze e li riunisce tenendo conto dei loro caratteri e costruendo gruppi via via più ampi: famiglie, ordini, classi, sottotipi, tipi, sottoregni, regni.[40] Il metodo rapsodico, che parte dal basso per salire verso l'alto, è un metodo che classifica gli elementi individuali in modo caotico, ma che ha il pregio di evitare le dispute sui principi più elevati, che non sono il punto di partenza ma il punto di arrivo di una generalizzazione dal particolare.

Il metodo *dogmatico-deduttivo*, invece, deriva una disciplina scientifica da un punto di partenza fissato secondo regole di formazione e relazione tra i concetti. Schleiermacher individua un esempio di tale metodo nell'*Ethica more geometrico demonstrata* di Spinoza: la validità del metodo dipende dal fatto che esso analizza e costruisce i concetti ma nello stesso tempo rimanda frequentemente all'intuizione di partenza.

Realizzando in modo completo questa esigenza di 'andata e ritorno' dall'intuizione iniziale ai concetti costruiti e viceversa, si ottiene il terzo e migliore metodo, detto *euristico*: esso determina ogni particolare e insieme presenta i principi generali per mezzo di una procedura in cui i punti intermedi unificano particolare e generale. Il miglior esempio di questo metodo è fornito dalla dialettica platonica che contiene infatti due momenti complementari: una visione d'insieme della molteplicità per raccoglierla sotto un'Idea e la divisione dicotomica di quest'Idea per verificare che essa sia proprio l'unità naturale delle cose molteplici di cui si cerca la definizione.

> S.– La prima forma di procedimento consiste nel ricondurre ad un'unica Idea, cogliendo con uno sguardo d'insieme le cose disperse in molteplici modi, allo scopo di chiarire, definendo ciascuna cosa intorno alla quale di volta in volta si voglia insegnare. [...] F.– E dell'altra forma di procedimento che cosa dici, Socrate? S.– Consiste, in senso opposto, nel saper dividere secondo le Idee, in base alle articolazioni che hanno per natura, e cercare di non spezzare nessuna parte, come invece suole fare un cattivo scalco. [...] E di queste forme di proce-

[39] Cfr. Schleiermacher (1802), p. 333 ss. e Lewis (1977), p. 111.
[40] Cfr. il § 1.1.2, p. 20.

> dimento, proprio io sono un amante, o Fedro, ossia delle divisioni e delle unificazioni, al fine di essere capace di parlare e di pensare. [...] E quelli che sono in grado di fare questo — se dico giusto o no lo sa un dio — io finora li chiamo «dialettici».[41]

Il metodo dialettico di Platone, a differenza della deduzione spinoziana, non tiene fermo il punto di partenza, il quale può essere soggetto a revisione se nella deduzione della molteplicità, nella divisione, emergono elementi del molteplice non riconducibili sotto all'unità dell'idea di partenza.

La deduzione di Graßmann è una derivazione per divisione dicotomica analoga al procedimento platonico di διαίρεσις ma rispetto a questa ha due diverse caratteristiche: 1) procede anche intersecando gli opposti e non soltanto per divisioni successive, 2) non è seguita da un movimento di risalita dal molteplice dei concetti costruiti all'unità del punto di partenza, che pertanto non è sottoposto ad una successiva verifica. Il punto di partenza — le scienze considerate come pensiero di un essere e le successive divisioni (della scienza in formale e reale, degli atti di generazione in continuo e discreto, degli elementi in uguali e differenti) — è considerato il più semplice secondo il concetto e dunque di per sé giustificato. La distinzione tra scienze formali e reali è contenuta immediatamente nel concetto e derivata da esso. Graßmann, a differenza di Ampère e di Comte, non mira a rendere conto delle molteplici differenze esistenti in natura, ma deduce le scienze dal concetto. Manca il riferimento alla provvisorietà o alla relatività della classificazione: le definizioni sono giustificate per il fatto di essere fondate sui concetti più semplici.[42] Vi è dunque una differenza essenziale rispetto alle classificazioni enciclopediche settecentesche di Chambers, di Diderot e d'Alembert, che assumono una posizione scettica sulla possibilità di fondare e giustificare una suddivisione delle scienze.[43]

Mentre Socrate costruisce dialogicamente i concetti derivandoli per divisione attraverso un dialogo con l'interlocutore, la deduzione di Graßmann non è dialogica ma è dialettica in quanto costruisce i concetti per mezzo di coppie di opposti che si determinano solo nella correlazione reciproca.[44] Come in

[41]Cfr. *Fedro*, 265d-266c, in Platone (1991), p. 572.

[42]«Und da die Gegensätze, durch welche diese Definitionen hervorgegangen sind, die einfachsten, in dem Begriffe der mathematischen Form unmittelbar mit gegeben sind, so ist hierdurch die obige Ableitung wohl hinlänglich gerechtfertigt.» Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 6, in Graßmann (1844), p. 26.

[43]Cfr. il § 1.1.1, p. 15.

[44]L'idea di una costruzione dialogica dei concetti è in Schleiermacher radicale: la verità non deve essere soltanto espressa ma costituita nel dialogo. A questo proposito egli critica lo stesso Platone sostenendo che alcuni dialoghi (non gli ultimi aporetici) sarebbero solo uno strumento pedagogico per costringere l'interlocutore ad abbandonare la propria posizione e ad approdare alla verità che Socrate già detiene. Cfr. Frank (2001), pp. 32-3.

Schleiermacher e a differenza che in Hegel, nell'opposizione è tenuta ferma la differenza degli opposti, la cui unità si dà solo nell'individualità di un soggetto pensante. Mentre Hegel toglie la differenza nel superamento dell'opposizione, cioè nella sintesi dei due momenti contrapposti, Schleiermacher ritiene che le opposizioni siano costitutivamente relative e non alternativamente escludentisi.[45] Vedremo in dettaglio nel § 4.3.3 come attraverso opposizioni di questo tipo, continuamente fluttuanti da un opposto all'altro nel soggetto pensante, Graßmann definisca la matematica e costruisca i suoi concetti fondamentali: numero, forma combinatoria, grandezza intensiva e grandezza estensiva.

Essere e pensiero

La deduzione di Graßmann prende l'avvio da una divisione iniziale (la divisione suprema, vale a dire la prima nella scala dicotomica) della scienza in reale e formale ed è giustificata dal seguente argomento: la scienza è sapere, il sapere ha per oggetto un essere, che può o presentarsi di fronte al pensiero come qualcosa di indipendente o essere posto dal pensiero stesso; nel primo caso la scienza è reale, nel secondo la scienza è formale.

> La divisione più alta [obersten] di tutte le scienze è quella in scienze reali e formali: le prime raffigurano [abbilden] l'essere nel pensiero come qualcosa di indipendente che si para davanti al pensiero e hanno verità nella concordanza del pensiero con quell'essere; le seconde invece hanno per oggetto ciò che è posto dal pensiero stesso e hanno verità nella concordanza reciproca dei processi di pensiero.[46]

I concetti di reale e formale sono introdotti non in relazione ad un rapporto tra forma e contenuto, come nella concezione logica di formale, o come nella concezione bolzaniana (formale è la condizione di possibilità di una cosa) o come nella concezione leibniziana (la matematica come scienza delle forme è lo studio di tutte le possibili relazioni tra oggetti). Formale non indica ciò che è proprio della qualità in contrapposizione alla quantità (significato che assume spesso in Leibniz: la matematica è anche scienza delle forme e non solo scienza delle grandezze).

[45] Contro la dialettica hegeliana Schleiermacher adotta due argomenti, uno dei quali si trova anche in Schelling (cfr. Schelling (1856), I.10, p. 137) per dimostrare che non vi può essere contraddizione tra i concetti hegeliani (o mere possibilità di pensiero) 'Essere' e 'Nulla', ma solo tra affermazioni reali; il secondo argomento, che si trova nell'*Ermeneutica*, mette addirittura in dubbio che vi possano essere concetti indipendenti dal linguaggio: non ci sono infatti pensieri al di fuori del discorso, ma al più sentimenti [Gefühle]. Cfr. Frank (2001), pp. 26-9.

[46] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 1, in Graßmann (1844), p. 22. Cfr. l'appendice 7.7, p. 391.

Formale non significa ideale (come contrapposto a reale) in senso ontologico, perché 1) sono le scienze a raffigurarsi l'essere come qualcosa di indipendente che si para di fronte ad esse (come un reale), perché 2) anche se l'essere è considerato come indipendente, ciò non significa che esso possa essere conosciuto solo attraverso l'osservazione empirica. La distinzione tra reale e formale non è una distinzione ontologica tra due regni: il regno degli oggetti esistenti nel mondo fuori di noi e il regno degli oggetti ideali o concetti che noi stessi produciamo. Si tratta non di una differenza nell'essere ma di una differenza nel modo di raffigurare l'essere, nel rapporto tra il soggetto e tale essere.

> Il pensare si ha solo in relazione ad un essere che si para davanti al pensiero e che per mezzo di esso è raffigurato; ma questo essere è nelle scienze reali un essere indipendente, che sussiste [bestehen] per sé al di fuori del pensiero, mentre nelle scienze formali è un essere posto dal pensiero stesso, che a sua volta si mette di fronte, in quanto essere, ad un secondo atto di pensiero.[47]

Nell'assenza di una divisione dicotomica tra mondo reale e mondo ideale si potrebbe vedere un elemento idealistico e in particolare un elemento schleiermacheriano, perché Schleiermacher si sforza di tenere insieme l'idealismo con il momento realistico della filosofia di Kant in opposizione al dualismo cartesiano. Schleiermacher cerca di tenere insieme idealismo e realismo non come alternative escludentisi ma come fattori contrapposti in modo relativo.[48]

Due sono per Schleiermacher le condizioni perché un pensiero sia scienza: deve essere necessario (deve cioè essere prodotto nello stesso modo da tutti coloro che hanno la facoltà di pensare) e deve corrispondere all'essere che in esso è pensato.[49] Nelle lezioni del 1818 Schleiermacher descrive questi due caratteri del sapere come l'uniformità nel portare a compimento il pensiero e l'accordo [Übereinstimmung] tra il pensiero e l'essere: perché un pensiero sia un sapere, occorre cioè che esso sia universale (che tutti gli uomini debbano pensare in quello stesso modo) e che sia vero (cioè che corrisponda all'essere che in esso viene pensato).[50] I due caratteri essenziali del sapere sono l'identità del processo di tutti i pensanti e l'invariabilità della relazione

[47] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 1, p. 22.

[48] La conciliazione di idealismo e realismo è svolta in una prospettiva che ricorda il superamento spinoziano del dualismo cartesiano: *res cogitans* e *res extensa* come affezioni della sostanza e non come sostanze. Cfr. Arndt (1986).

[49] Cfr. *Dialektik (1814)*, §§ 86-7 [40-3], in Schleiermacher (2001), I, pp. 179-82. Il numero tra parentesi quadre indica la pagina corrispondente della *Dialektik* rivista da Jonas e pubblicata nel 1839 nelle *Friedrich Schleiermacher's sämmtliche Werke*, 3.IV.2.

[50] Cfr. *Dialektik (1818)*, [44], in Schleiermacher (2001), I, pp. 182-3.

della rappresentazione all'oggetto: infatti ogni pensiero ha un oggetto, cioè un pensato distinto da sé e al quale esso si riferisce.[51]

Che natura ha per Schleiermacher l'oggetto del pensiero, distinto dal primo e indicato come un *essere* [Sein]? In ogni pensiero viene posto qualcosa di pensato al di fuori del pensiero: pensare qualcosa non significa soltanto che il pensiero è determinato, ma anche che si riferisce a qualcosa che è posto al di fuori di esso.[52] In ogni pensiero noi poniamo qualcosa di pensato al di fuori del pensiero; esso può essere sia in noi sia fuori di noi, ma è comunque distinto dal pensiero: anche se l'oggetto è interno, esso è fuori dal pensiero ed è in noi soltanto in quanto noi siamo essere e non in quanto siamo pensiero.[53] Se il pensiero inizia con uno stato percettivo, l'essere è tutto ciò che produce un'azione su di noi; se invece è originaria la nostra attività, l'essere è ciò su cui è prodotta un'azione da parte nostra e dunque è ciò che è modificabile dalla nostra attività. Il sapere deve corrispondere a entrambe queste espressioni dell'essere: non si tratta infatti di una divisione dell'essere in due categorie; piuttosto ogni essere deve essere pensato secondo entrambi gli aspetti. Oggetto del sapere può essere sia l'essere che deriva dalla percezione sia una nostra attività, ad esempio un volere, e non c'è differenza tra questi due tipi di sapere: dunque non c'è differenza tra i due tipi di essere corrispondenti. L'essere come volere e l'essere come ciò che deriva dalla percezione non sono un essere diverso se considerati entrambi in quanto essere come oggetto di pensiero.[54]

L'idea che ogni pensiero abbia un oggetto pensato distinto dal pensiero stesso è fondata nella prospettiva dialogica di Schleiermacher: se si ammettono rappresentazioni controverse e se si ammette che una rappresentazione controversa presuppone una pluralità di soggetti pensanti, allora si è già con ciò dimostrato che l'oggetto del pensiero è esterno e indipendente dal pensiero stesso; infatti ciascun pensiero ha in tal caso per oggetto il pensiero di un altro soggetto pensante. Inoltre se oggetto del pensiero è la nostra sensazione o il nostro volere, è già con ciò posta una relazione del pensiero a qualcosa di separato e indipendente da esso. Ciò accade anche quando uno stesso pensante ha diverse rappresentazioni che deve pensare solo una dopo l'altra: infatti la rappresentazione che si origina in un certo momento (il pensiero) è sempre distinta da ciò che si è pensato poco prima (che è quindi un ogget-

[51] Cfr. *Dialektik (1822)*, II.1, in Schleiermacher (2001), II, pp.127-31.

[52] Cfr. *Dialektik (1814)*, § 94 [48], in Schleiermacher (2001), I, p. 186.

[53] Cfr. *Dialektik (1818)*, [48], in Schleiermacher (2001), I, pp. 186-7.

[54] «Also muss auch das Sein, dem dieses Wissen entspricht, nicht verschieden sein, d.h. das Sein als Gegenstand des Denkens, sofern es Wollen wird, nicht verschieden vom Sein als Gegenstand des Denkens, sofern es von der Wahrnehmung ausgeht.» Cfr. *Dialektik (1831)*, [48-9], in Schleiermacher (2001), I, pp. 186-7.

to indipendente dal pensiero attuale). Non sarebbe mai possibile pensare a qualcosa di precedente se non si ammettesse questa differenza tra pensiero e pensato: ciò che è stato precedentemente pensato è l'essere del pensiero attuale.[55]

Abbiamo introdotto questa lunga digressione sulla distinzione schleiermacheriana tra pensiero ed essere per giustificare un'interpretazione dialettica della contrapposizione tra reale e formale in Graßmann. Reali infatti sono le scienze in cui il pensiero ha per oggetto un essere indipendente, un essere che si para davanti al pensiero stesso, vale a dire un essere che agisce su di noi e dunque un essere che deriva dalla percezione, secondo quanto si è visto nel passo di Schleiermacher sopra citato. Le scienze formali invece hanno come oggetto un essere posto dal pensiero, cioè un'attività del pensiero stesso, o un precedente pensiero che diviene l'essere del pensiero attuale. Secondo questa interpretazione le scienze formali sono scienze di un essere interno a noi e non esterno, cioè di un essere che noi consideriamo modificabile in quanto possiamo agire su di esso, un essere che noi stessi abbiamo posto. Esse però sono anche scienze di un essere che è un precedente nostro pensiero e dunque possono essere considerate come scienze che operano ad un grado più alto di astrazione, ovvero come scienze che prendono ad oggetto i pensieri che hanno a loro volta per oggetto un essere fuori di noi percepito attraverso i sensi. Secondo questa caratterizzazione delle scienze formali esse possono essere sia scienze che studiano la nostra attività interna, il nostro volere ad esempio, sia scienze che studiano i nostri pensieri sull'essere fuori di noi, cioè i nostri concetti sul mondo percepito. In ogni caso ciò che le distingue è il rapporto del soggetto con ciò che viene pensato e non una contrapposizione tra due regni di cose reali e ideali.

Formale e reale

Alla luce di questa lettura dialettica e schleiermacheriana di Graßmann crediamo si possa comprendere meglio il significato del termine 'formale'. Formale non significa ideale, cioè non implica un tipo di esistenza degli oggetti di cui la scienza si occupa, come ad esempio nella filosofia platonica della matematica, in cui le idee hanno un diverso grado di realtà rispetto al mondo sensibile. Nemmeno formale indica qualcosa che astrae dal contenuto, qualcosa che ha validità generale perché dipende solo dalla forma. Formale non significa neppure ciò che è condizione della possibilità di qualcosa, poiché non si fa menzione né del tipo di realtà delle cose né della loro possibilità:

[55] ≪In dieser Wiederholbarkeit des Denkens, in dieser Beharrlichkeit und Konstanz des Früheren ist uns das Gedachte zugleich das Sein.≫ Cfr. *Dialektik (1822)*, in Schleiermacher (2001), II, pp. 135-6.

la possibilità, come la realtà, presupporrebbe infatti considerazioni ontologiche. Formale e reale hanno piuttosto a che vedere con il rapporto tra il soggetto pensante e l'essere che egli pensa: se l'essere è considerato come indipendente, cioè come un essere che agisce sul soggetto pensante, allora il pensiero è un sapere reale; se invece l'essere è considerato come un'attività del pensante stesso (attività che può essere un volere, ma anche un pensare), allora il pensiero è un sapere formale, cioè un sapere di un essere che non sta fuori ma dentro, cioè di un essere che è o un'attività in generale o un pensiero particolare: quest'ultimo è ciò che Graßmann chiama una forma di pensiero.[56]

Se la nozione di formale non presuppone una distinzione netta tra un ambito di oggetti reali e un ambito di oggetti ideali, perché essa si fonda principalmente sulla relazione tra il soggetto pensante e il modo in cui l'essere pensato si presenta come oggetto di pensiero, una tale concezione non è tuttavia incompatibile con una distinzione tra ciò che può apparire sempre e solo come esterno e indipendente e ciò che può apparire sia come esterno ed indipendente sia come posto dal pensiero stesso. Graßmann infatti sembra considerare lo spazio come qualcosa che non può mai essere generato dal pensiero ma che piuttosto si para sempre davanti ad esso come qualcosa che è dato.

> Se anche noi dicessimo che l'intuizione dello spazio si para davanti al pensiero come qualcosa di dato indipendentemente, non avremmo con ciò ancora affermato che l'intuizione dello spazio ci deriva soltanto dalla osservazione delle cose spaziali; è invece un'intuizione fondamentale che ci è data insieme all'apertura [Geöffnetsein] dei nostri sensi al mondo sensibile e che ci è perciò attaccata originariamente come il corpo all'anima.[57]

Benché dunque la divisione delle scienze in formali e reali non sia fondata sulla distinzione di un ambito di oggetti reali e di un ambito di oggetti ideali, accade tuttavia che di certi oggetti si possa avere soltanto un sapere reale, perché essi si presentano sempre e soltanto come dati al pensiero e non possono mai essere posti; al contrario non sembra possibile individuare una categoria di oggetti che sono sempre e soltanto posti dal pensiero: qualunque oggetto posto dal pensiero può essere infatti successivamente considerato come dato.

Una conferma della concezione dello spazio come qualcosa di dato in natura viene da un breve testo scritto da Graßmann su richiesta di Grunert

[56]Ritorneremo ampiamente sul concetto di 'forma di pensiero' nel § 4.3.2, p. 198.

[57]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 3, in Graßmann (1844), p. 24. Cfr. l'appendice 7.7, p. 392.

"Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre" e pubblicato nel 1845:[58]

> La teoria dello spazio, poiché rimanda a qualcosa che è dato in natura, e cioè lo spazio, non è un ramo della pura matematica, ma un'applicazione di essa alla natura.[59]

L'osservazione sopra citata a proposito della natura dello spazio è particolarmente significativa perché è inserita in una riflessione sulla natura della geometria. Secondo Graßmann la geometria non è una scienza formale bensì una scienza reale, proprio perché rimanda ad un «essere reale». L'idea che la geometria, al pari della meccanica e della fisica, sia una scienza che si occupa di un essere reale, non determinabile a priori, si trova in una lettera di Gauss a Bessel del 1830:

> É mia più intima convinzione che la Teoria dello spazio [Raumlehre] abbia nel nostro sapere a priori un posto del tutto diverso rispetto alla Teoria pura delle grandezze. Alla nostra conoscenza della Teoria dello spazio manca completamente quella totale convinzione della propria necessità (e quindi anche della propria assoluta verità), che è propria invece della Teoria pura delle grandezze. Dobbiamo umilmente ammettere che se il numero è un mero prodotto del nostro spirito, lo spazio ha una realtà anche al di fuori del nostro spirito, realtà alla quale noi non possiamo prescrivere a priori e integralmente le leggi.[60]

Come Graßmann, anche Gauss ritiene che lo spazio sia un essere esterno al nostro spirito, qualcosa di cui il nostro spirito non può cioè determinare del tutto a priori le leggi: la geometria — scrive Gauss in un'altra famosa lettera a Bessel del 1829 — non può essere fondata completamente a priori.[61]

La concezione dello spazio di Graßmann sembra compatibile con l'idea che la nostra intuizione dello spazio sia in parte condizione di possibilità della nostra stessa esperienza e in parte frutto di osservazione empirica: lo spazio dunque non è né completamente a priori né completamente a posteriori. Vedremo più avanti come questa concezione dello spazio ben si accordi con la considerazione della geometria come applicazione particolare della Teoria dell'estensione.

[58]Il testo è stato stampato come appendice III alla seconda edizione della *Ausdehnungslehre 1844* nel 1877.

[59]Cfr. Graßmann (1845), p. 297.

[60]Cfr. *Lettera a Bessel del 9 aprile 1830*, in Gauss (1863), vol. 8, p. 201.

[61]«...meine Überzeugung, daß wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden.» Cfr. *Lettera di Gauss a Bessel del 27 gennaio 1829*, in Gauss (1863), vol. 8, p. 200. L'obiettivo polemico di Gauss è il kantismo geometrico.

L'idea che lo spazio sia parzialmente determinato a priori e parzialmente indipendente dal nostro pensiero avrà massima diffusione nella seconda metà dell'Ottocento con la riflessione filosofica sulle geometrie non euclidee. Tale idea consiste, a ben vedere, in una revisione parziale del kantismo e resterà viva per tutto l'Ottocento (da Helmholtz a Russell).[62] Pur ammettendo che le proprietà dell'intuizione a priori non coincidono con le caratteristiche della geometria euclidea, si difende l'idea di una forma a priori dello spazio (descritta da una geometria minimale) che esprime le condizioni essenziali di ogni rappresentazione dello spazio. Kant aveva affermato che la nostra intuizione dello spazio è la forma a priori che permette la rappresentazione degli oggetti spaziali: in quanto forma a priori dell'intuizione essa non può essere vera o falsa ma è una *conditio sine qua non* dell'esperienza. Per spiegare in che modo le geometrie non euclidee siano concepibili (o rappresentabili o intuibili) si sostiene (come in Kant) che l'intuizione dello spazio è una condizione della conoscenza ma si nega che gli assiomi della geometria euclidea siano a priori. In altre parole, si ammette che vi siano alcune proprietà intuitive e a priori dello spazio ma si ritiene che esse siano descritte non dagli assiomi euclidei bensì da un numero più ristretto di proposizioni (e cioè dagli assiomi comuni alle tre geometrie euclidea, iperbolica e riemanniana).[63]

Verità come corrispondenza tra pensiero e oggetto

Si è visto nel paragrafo precedente che per Schleiermacher il pensiero è un sapere solo se esso è intersoggettivamente fondato e solo se esso corrisponde all'essere di cui è pensiero. La verità dunque è essenzialmente intesa come corrispondenza tra il pensiero e il suo oggetto e tale concezione della verità, di matrice aristotelica, si trova anche in Graßmann. Nel caso delle scienze reali, la verità è definita come concordanza del pensiero con l'essere, mentre nelle scienze formali la verità è definita come concordanza del pensiero con ciò che ha posto il pensiero stesso, cioè del pensiero con un'altra attività di pensiero.

> Se la verità in quanto tale riposa sulla concordanza del pensiero con l'essere, allora in particolare nelle scienze formali essa riposa sulla con-

[62] Cfr. Helmholtz (1870), Helmholtz (1876), Helmholtz (1878) e Russell (1897).

[63] Così ad esempio Helmholtz: ≪[...] la domanda se gli assiomi della geometria siano proposizioni trascendentali o empiriche [...] deve essere del tutto separata da quella [...] se lo spazio sia in generale una forma trascendentale dell'intuizione oppure no. [...] dal fatto che lo spazio sia una forma dell'intuizione non segue assolutamente nulla riguardo ai fatti espressi dagli assiomi.≫ Cfr. Helmholtz (1878), pp. 700-701.

> cordanza del secondo atto di pensiero con l'essere posto dal primo atto di pensiero, cioè sulla concordanza di entrambi gli atti di pensiero.[64]

La corrispondenza è in Graßmann una corrispondenza tra due diversi tipi di oggetti: l'essere reale, sempre dato al pensiero, e ciò che è posto dal pensiero stesso; in entrambi i casi il pensiero è un sapere se corrisponde all'essere pensato, ma nel primo caso è un sapere reale, nel secondo un sapere formale. Criterio di verità è nel primo caso la corrispondenza con l'essere reale, nel secondo la corrispondenza con l'essere pensato.

Questi due diversi criteri di verità corrispondono forse alla distinzione kantiana tra criterio materiale e criterio formale di verità? Kant distingue nella *Critica della ragion pura* tra un criterio per la verità della conoscenza in relazione al proprio oggetto o materia e un criterio puramente formale della verità: è impossibile fornire un criterio materiale di verità perché la verità è corrispondenza con il proprio oggetto e dunque occorre tenere conto caso per caso delle proprietà dell'oggetto; è invece possibile dare un criterio puramente formale di verità, cioè un criterio che riguarda semplicemente la forma della conoscenza, astraendo dal contenuto di essa. Tale criterio formale verifica l'accordo di una conoscenza con le leggi generali e formali dell'intelletto e della ragione ed è perciò la condizione negativa di ogni verità: esso serve a verificare che una conoscenza non sia in se stessa contraddittoria, ma non dice nulla sull'eventuale contraddizione di essa con il proprio oggetto.[65] Il principio supremo della logica generale formale, che Kant chiama anche analitica in contrapposizione alla dialettica, è il principio di contraddizione, di cui Kant dà una interpretazione logica piuttosto che ontologica (e questo proprio perché lo ritiene un criterio puramente formale della verità): ≪a nessuna cosa conviene un predicato che la contraddica≫.[66] La concezione di Graßmann contiene un'importante differenza rispetto alla distinzione kantiana tra verità materiale e formale. Infatti per Kant il principio di non contraddizione non serve ad eliminare la contraddizione tra un pensiero e il suo oggetto, quanto piuttosto tra il pensiero e le leggi del pensiero stesso; in altre parole esso non contiene nessun riferimento al contenuto stesso del pensiero. In Graßmann al contrario è proprio di questo che si tratta: soltanto che, poiché l'oggetto è a sua volta un pensiero, la verità è determinata dalla corrispondenza tra due atti di pensiero.

La divisione delle scienze in reali e formali separa la Matematica e la Dialettica (Logica) da tutte le altre scienze, proprio come avviene con la

[64]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 1, in Graßmann (1844), p. 22. Si veda anche il passo citato nel § 4.2, p. 173.
[65]Cfr. Kant (1787), p. 82.
[66]Cfr. Kant (1787), p. 143.

distinzione leibniziana tra verità di fatto e verità di ragione.[67] La verità delle scienze formali è fondata sull'accordo tra atti di pensiero, ovvero sul principio di non contraddizione, proprio come avviene per le verità di ragione. Un elemento interessante di confronto con Leibniz riguarda l'analisi del ruolo delle definizioni nelle scienze formali. Graßmann sostiene, come vedremo nel prossimo paragrafo, che matematica e logica si fondano su definizioni mentre le scienze reali si fondano su assiomi. A questo proposito è utile ricordare che una delle differenze tra verità di ragione e verità di fatto in Leibniz concerne la diversa possibilità di analisi dei concetti che le compongono: le verità di ragione «si possono risolvere in verità identiche», mentre nelle verità di fatto l'analisi (almeno nella prospettiva finita e limitata degli esseri umani) non avrebbe mai termine, ma procederebbe all'infinito.[68] Risolvere una verità di ragione in una verità identica significa mettere in evidenza il carattere definitorio delle verità di ragione: anche se Graßmann, a differenza di Leibniz, non pretende di risolvere ciascuna definizione in una verità identica, egli ammette tuttavia che la matematica si distingue dalle altre scienze per la natura delle sue proposizioni primitive e perché si fonda sul principio di non contraddizione.[69]

Prima di passare all'analisi dei concetti di definizione e di assioma, è interessante confrontare la concezione di Graßmann anche con la posizione di Hume, in particolare per quanto riguarda la concordanza tra due attività di pensiero. Ad avvicinare Graßmann a Hume è l'idea che la certezza delle scienze formali dipenda dal fatto che la verità è determinata dalla somiglianza tra idee cioè, con le parole di Graßmann, dalla corrispondenza tra due attività di pensiero.[70] Proprio perché la geometria ha a che fare anche con gli oggetti esterni, dai quali trae i propri principi, e non soltanto con idee, essa non può avere secondo Hume un'esattezza ed una certezza pari all'aritmetica e all'algebra;[71] analogamente Graßmann afferma che proprio perché la geometria ha come essere un oggetto esterno, che è dato e non posto, cioè lo spazio, essa è una scienza reale e non formale.

Definizioni e assiomi

Le scienze formali prendono le mosse da definizioni, mentre le scienze reali da assiomi: infatti nelle prime la verità è data dalla corrispondenza tra un

[67] Cfr. il § 1.1.1, p. 6.
[68] Cfr. il passo citato nella nota 15 a p. 7.
[69] Si osservi che Graßmann non fa menzione di questioni relative alla necessità o alla contingenza delle proposizioni, elemento rilevante sia nella prospettiva di Leibniz sia in quella di Kant.
[70] Cfr. il § 1.1.1, p. 6.
[71] Cfr. Hume (1740), I.3.1. Si veda anche il § 1.1.1, p. 6.

atto di pensiero e l'essere posto da un precedente atto di pensiero, mentre nelle seconde la verità è data dalla corrispondenza tra il pensiero e l'essere che ad esso si para di fronte.

> Perciò nelle scienze formali la dimostrazione non oltrepassa il pensiero stesso entrando in un'altra sfera ma rimane ferma esclusivamente nella combinazione dei diversi atti di pensiero. Proprio per questo le scienze formali non possono iniziare da assiomi [Grundsätze], come fanno invece le scienze reali; a formare il loro fondamento sono invece le definizioni.[72]

Nelle scienze formali ogni dimostrazione avviene all'interno della combinazione di diversi atti di pensiero, senza mai uscire al di fuori della sfera del puro pensiero: la verità dunque è regolata dal principio di non contraddizione, cioè dall'accordo o disaccordo tra idee. Le scienze formali non possono contenere assiomi, ma soltanto definizioni, determinazioni precise dei concetti che in esse entrano in gioco. Le scienze formali hanno a che fare con proposizioni della stessa natura delle nozioni comuni di Euclide, cioè proposizioni che definiscono determinati concetti e non proposizioni che esprimono le proprietà dell'essere reale.

> Se nelle scienze formali, come ad esempio nell'aritmetica, sono stati tuttavia introdotti degli assiomi, questo è da considerarsi un abuso, che si può spiegare solo con il corrispondente trattamento della geometria. Ritornerò su questo punto ancora una volta più tardi e in modo più dettagliato. Qui basti aver mostrato la necessità dell'assenza di assiomi nelle scienze formali.[73]

L'aritmetica, in quanto scienza formale, non contiene assiomi, ma soltanto definizioni, ovvero determinazioni dei concetti fondamentali che in essa entrano in gioco. Per capire questo punto è interessante vedere come inizia l'aritmetica nella formulazione rigorosa che Graßmann dà nel 1861, data di pubblicazione del suo *Lehrbuch der Arithmetik*. L'opera si apre infatti con una serie di definizioni, tra cui anche quella di grandezza ottenuta da una sola grandezza data per mezzo di un'operazione, cioè la definizione astratta di numero come elemento di una serie di grandezze generate con un'operazione additiva.[74]

La geometria, invece, contiene assiomi, perché essa è una scienza reale, una scienza cioè che descrive un essere che si para di fronte al pensiero (lo spazio) e che è sempre dato e mai posto dal pensiero. Nel primo

[72]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 1, in Graßmann (1844), p. 22.
[73]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, §1, nota 1, in Graßmann (1844), p. 22.
[74]Si veda il § 4.3.2, p. 198.

capitolo dell'*Ausdehnungslehre* Graßmann riprende il tema dell'assiomatizzazione della geometria e in una lunga discussione sui fondamenti fornisce una caratterizzazione più precisa di che cosa egli intenda per assioma e per definizione.[75]

L'interesse di Graßmann per i fondamenti della geometria è legato all'intenzione di mostrare le differenze tra la geometria e la teoria dell'estensione (la prima è considerata un'applicazione della seconda) e di evidenziare analogie e differenze nello svolgimento delle due discipline (confrontando le rispettive proposizioni primitive e l'ordine dimostrativo).

> Passo ora a trattare delle applicazioni, dapprima soprattutto alla geometria, ma prima ancora voglio tentare di delineare almeno per accenni un inizio puramente scientifico della geometria stessa e in particolare in modo indipendente dalla nostra scienza, così che la concordanza o la divergenza nell'andamento delle due discipline possa essere meglio rilevata.[76]

La geometria non è fondata in modo scientifico, perché gli assiomi geometrici non sono stati individuati con la necessaria precisione e soprattutto non sono stati adeguatamente distinti dai principi delle scienze matematiche formali o astratte. Per spiegare l'inammissibilità dei fondamenti della geometria Graßmann adduce l'esempio del concetto di piano, il quale è usualmente introdotto con l'ausilio della seguente proposizione: ≪se una linea retta ha due punti in comune con il piano, essa giace nel piano≫. Questa proprietà del piano o è implicita o è parte della definizione stessa o è assunta come assioma.

> Il difetto di cui io voglio provare la presenza è riconoscibile nel modo più chiaro nel concetto di piano. Per come è definito (definirt) nei lavori di geometria a me noti, il concetto di piano è fondato sulla premessa che una linea retta che ha due punti in comune con il piano giaccia interamente in esso; talvolta si assume questo fatto tacitamente (così avviene in Euclide), talvolta lo si introduce nella definizione (Definition) del piano, talvolta infine lo si enuncia come un particolare assioma.[77]

La critica all'assunzione implicita di proprietà degli enti geometrici era già stata mossa ad Euclide da vari autori prima che da Graßmann: l'aspetto

[75]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 1, sez. B, § 21, in Graßmann (1844), p. 63. A questo proposito si veda l'analisi condotta in Lewis (1977), p. 137 ss.

[76]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, Einleitung, § 21, in Graßmann (1844), p. 63. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.1].

[77]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 21, in Graßmann (1844), p. 63. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.2].

più interessante dell'obiezione di Graßmann riguarda le possibili soluzioni del problema. Secondo Graßmann infatti non è scientifico ampliare la definizione del concetto di piano includendovi anche la proprietà suddetta (si tratterebbe di un sotterfugio per introdurre implicitamente una proprietà senza dimostrarla) né sarebbe scientifico assumere tale proprietà come assioma, se essa può essere dimostrata a partire dalla definizione di piano. Graßmann assume che il concetto di piano sia determinato in modo evidente:

> Giacché è evidente che il piano è già determinato (bestimmt), o come totalità delle parallele che possono essere tracciate da una retta in una direzione non contenuta nella retta stessa o come totalità delle rette che possono essere tracciate da un punto ad una retta.[78]

Graßmann distingue la *determinazione* (Bestimmung) del concetto di piano dalla *definizione* di tale concetto: la determinazione sarebbe derivata da altri concetti e dunque necessaria, mentre la definizione avrebbe una componente convenzionale. Il termine 'determinare' (bestimmen) sarebbe infatti usato da Graßmann nella *Ausdehnungslehre* per indicare in che modo un certo concetto deriva da altri concetti.[79] Per Graßmann si dà cioè una determinazione fondamentale del concetto di piano come insieme di tutte le parallele tracciabili da una retta data che si muove in una direzione diversa dalla propria: tale determinazione del piano deriva dal concetto stesso di grandezza di secondo livello (si veda il capitolo 5) che è generata per mezzo del movimento di una grandezza di primo livello (la retta) in una direzione non compresa nella prima.[80] La determinazione del piano come insieme di parallele tracciate dal movimento di una retta data esprime una fondamentale intuizione dello spazio: la definizione del piano nella geometria deve perciò contenere soltanto questa proprietà del piano e derivare tutte le altre dimostrativamente da essa.

Se ad esempio si determina il piano come totalità delle rette parallele ad una retta data, allora per dimostrare che ogni retta avente due punti in comune con il piano giace sul piano occorre dimostrare che se tale retta taglia due rette parallele ad una retta data essa taglia anche tutte le altre rette parallele ad essa (fig. 4.1). Poiché però — osserva Graßmann — quest'ultima proprietà può essere dimostrata soltanto mediante diversi teoremi ausiliari, essa non deve essere assunta senza dimostrazione e inclusa surrettiziamente nella definizione.

[78]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 21, in Graßmann (1844), p. 63. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.2].

[79]Cfr. Lewis (1977), p. 138.

[80]La seconda determinazione, come osserva Lewis, può essere intesa come versione proiettiva della prima. Cfr. Lewis (1977), p. 138.

> Teniamo ferma ad esempio la prima determinazione [Bestimmung] del piano [come totalità delle parallele che possono essere tracciate da una retta in una direzione non contenuta in essa]; allora è chiaro che si deve dapprima dimostrare che ogni linea retta che taglia due di queste parallele deve tagliare anche tutte le restanti parallele, ma questa proposizione non può essere dimostrata senza una serie di proposizioni ausiliarie. Se ora definiamo il piano come superficie che contiene interamente tutte le linee rette che hanno due punti in comune con esso, è evidente che così, nascosta nella definizione, la proposizione succitata è introdotta surrettiziamente nel dominio della geometria.[81]

Sarebbe come — aggiunge Graßmann — introdurre la proprietà dell'uguaglianza dei lati opposti direttamente nella definizione di parallelogramma anziché dimostrarla come conseguenza della proprietà di avere i lati opposti paralleli: dal fatto che i lati sono a due a due paralleli si deve dimostrare e non assumere che essi sono a due a due anche uguali. Nessun matematico — prosegue Graßmann — accetterebbe di assumere come ulteriore proprietà definitoria del parallelogramma una proprietà che può essere derivata dalla sua usuale definizione, né accetterebbe di introdurre un ulteriore assioma per una proprietà che si può dimostrare dalla definizione stessa.[82]

Analogamente non può essere considerato scientifico assumere come ulteriore proprietà definitoria del piano una proprietà che può essere derivata dalla sua usuale definizione come totalità delle rette parallele ad una retta data. Tantomeno sarebbe scientifico assumere tale proprietà come assioma, dal momento che essa può essere dimostrata a partire dalla definizione stessa di piano.

> Ma se un assioma può essere evitato senza che un nuovo assioma debba essere introdotto, allora ciò deve avvenire, anche a costo di una completa trasformazione dell'intera scienza: evitando tale assioma, infatti, la scienza guadagna necessariamente, conformemente alla propria essenza, in semplicità.[83]

Già da queste osservazioni sui fondamenti della geometria emerge l'idea di un unico ordine assiomatico appropriato per la geometria e la convinzione che una proposizione possa essere assunta come assioma solo se essa non è dimostrabile dagli assiomi precedentemente assunti. Gli assiomi, princìpi

[81] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 21, in Graßmann (1844), pp. 63-4. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.3].

[82] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 21, in Graßmann (1844), p. 64. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.3].

[83] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844* , *Einleitung*, § 21, in Graßmann (1844), p. 64. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.3].

delle scienze reali, hanno inoltre un'ulteriore fondamentale caratteristica che li distingue dai princìpi delle scienze formali: riguardano un essere esterno al pensiero. Nel caso della geometria sono assiomi reali solo le verità derivate dall'intuizione dello spazio e non le proposizioni che esprimono verità astratte o definizioni di determinati concetti, come ad esempio la prima nozione comune degli *Elementi*, che esprime le proprietà dell'uguaglianza ma non ha alcun contenuto geometrico.

> Innanzitutto si deve notare come accanto ad assiomi reali, che esprimono intuizioni geometriche, spesso sotto lo stesso nome sono introdotte proposizioni del tutto astratte, ad esempio ≪se due grandezze sono uguali ad una terza, allora sono uguali l'una all'altra≫, e come esse non meritino affatto questo nome, se si intendono per assiomi delle verità presupposte. Infatti io credo di aver dimostrato sopra (§1), che la proposizione astratta così introdotta esprime soltanto il concetto di uguaglianza e lo stesso si può dire delle restanti proposizioni astratte che si possono essenzialmente ricondurre al fatto che cose generate nello stesso modo da cose uguali sono uguali.[84]

Graßmann riprende in sostanza la distinzione euclidea tra nozioni comuni (corrispondenti alle definizioni delle scienze formali) e postulati (che corrispondono agli assiomi delle scienze reali). Tuttavia la principale differenza tra i due gruppi di proposizioni non è più relativa alla maggiore o minore applicabilità di tali proposizioni (ricordiamo che in Euclide, come già in Aristotele, la caratteristica principale delle nozioni comuni è quella di poter essere applicate a più scienze, mentre gli assiomi sono propri di ciascuna scienza, perché i principi possono vertere su un solo genere[85]), ovvero alla maggiore o minore generalità, quanto alla diversa natura di ciò di cui parlano: un oggetto che sta di fronte al pensiero come qualcosa di esterno in un caso, un oggetto che è esso stesso un pensiero nell'altro.

Proprio richiamandosi alla distinzione euclidea, Graßmann dichiara che in matematica si possono dare soltanto definizioni, mentre in geometria soltanto assiomi. In effetti, considerando che tra le proposizioni comuni a più generi negli *Elementi* compaiono non soltanto le nozioni comuni (che esprimono le proprietà dell'uguaglianza) ma anche le proposizioni (definizioni e teoremi) del libro V sulle proporzioni, Graßmann ha buon gioco a ritenere queste proposizioni della matematica come comuni in senso euclideo e quindi corrispondenti alle proprie definizioni. Analogamente il concetto di assioma come proposizione reale che esprime la nostra intuizione geometrica dello

[84] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 21, in Graßmann (1844), p. 64. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.5].

[85] Cfr. il § 2.1.1, p. 62.

spazio ben si concilia con la concezione euclidea dei postulati, che richiedono la possibilità di certe costruzioni.

> In verità questo rimprovero di confondere gli assiomi e i concetti presupposti non può essere mosso a Euclide, che accolse i primi tra i suoi postulati (αἰτήματα) e scelse i secondi come nozioni comuni (κοιναὶ ἔννοιαι).[86]

Sarebbero i commentatori successivi ad Euclide ad aver frainteso la sua distinzione e a non aver compreso il procedimento euclideo.[87]A questo proposito si presti attenzione alla differenza tra la terminologia di Graßmann e la terminologia consueta: le 'nozioni comuni' di Euclide, tradizionalmente indicate con il termine 'assiomi' corrispondono alle *definizioni* di Graßmann, mentre i 'postulati' di Euclide (cioè le costruzioni geometriche) corrispondono agli *assiomi* di Graßmann.[88]

Se per proposizioni primitive intendiamo le proposizioni da cui parte ciascuna scienza, allora la matematica ha per proposizioni primitive le definizioni, mentre la geometria gli assiomi. Questi ultimi esprimono le proprietà che derivano dalla nostra intuizione dello spazio, ossia il fatto che lo spazio è semplice e limitato. Come assiomi geometrici Graßmann assume infatti i seguenti:
1) lo spazio è omogeneo (è fatto nello stesso modo) in tutti i luoghi e in tutte le direzioni, cioè in tutti i luoghi e in tutte le direzioni si possono effettuare costruzioni uguali;
2) lo spazio è un sistema di terzo livello.[89]

Il primo assioma può anche essere espresso nella seguente forma, che spiega la possibilità della costruzione rispettivamente di linee, piani, angoli:
a) ciò che deriva da costruzioni uguali e di uguale verso è a sua volta uguale

[86]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 21, in Graßmann (1844), p. 64. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.5].

[87]In effetti Proclo nel commento ad Euclide discute tre diversi modi di caratterizzare postulati e assiomi: 1) secondo Gemino i postulati, come i teoremi, riguardano proprietà di una certa materia, mentre gli assiomi, come i problemi, riguardano attributi essenziali e autoevidenti delle cose (*Commentario*, 178.12 ss. e 181.4-11); 2) secondo altri i postulati riguardano soltanto la geometria mentre gli assiomi sono comuni a tutte le scienze che studiano quantità e grandezza (*Commentario*, 182.6-14); 3) Aristotele infine, oltre ad ammettere che gli assiomi sono comuni a più scienze, osserva che essi sono le proposizioni prime da cui parte la dimostrazione, mentre i postulati sono assunti come veri senza dimostrazione, pur essendo dimostrabili (*Analitici Secondi*, I. 10. 76b10-30, *Commentario*, 118-9.

[88]Si faccia anche attenzione alla differenza rispetto all'uso aristotelico del termine 'postulato' nel significato (ricordato nella nota precedente) di proposizione che, pur essendo dimostrabile, è assunta senza dimostrazione.

[89]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 22, in Graßmann (1844), pp. 65-6.

e di uguale verso; b) ciò che deriva da costruzioni opposte è a sua volta opposto; c) ciò che deriva da costruzioni uguali in senso assoluto (anche se in luoghi diversi e secondo direzioni iniziali diverse) è a sua volta uguale in senso assoluto. Graßmann osserva che la parte di geometria che corrisponde alla Teoria dell'estensione sviluppata nel primo volume del 1844 deriva soltanto dai primi due principi: e in effetti essa non presuppone la possibilità di definire una metrica e pertanto non riguarda l'uguaglianza assoluta di due grandezze.[90]

Mentre in geometria tutti i teoremi derivano dai due assiomi generali sopraccitati, le scienze formali, e dunque in particolare la matematica, partono sempre e soltanto da definizioni. Le dimostrazioni non sono altro che catene di definizioni e le proposizioni sono ottenute dalle definizioni per semplice applicazione di regole logiche. Graßmann menziona in particolare una legge logica generale o legge di avanzamento che serve a comprendere il significato di una proposizione generale. La caratterizzazione di Graßmann permette secondo noi di associare tale legge generale alla funzione che nei moderni sistemi di logica formale è svolta dalle regole di generalizzazione e di sostituzione.

> In verità le discipline astratte della matematica non conoscono alcun assioma; al contrario la prima dimostrazione avviene in esse per concatenazione di definizioni, in quanto non si fa uso di alcun altra legge di avanzamento se non della legge logica generale, secondo la quale ciò che è asserito di una successione di cose nel senso che esso deve valere per ciascuna singola cosa, può essere asserito effettivamente di ciascuna singola cosa che appartiene a quella successione.[91]

Tale legge logica generale non è un assioma, non è una proposizione da cui parte la dimostrazione ma uno strumento per esplicitare il significato delle definizioni in relazione alle singole cose di cui parlano.

> E a nessun matematico verrebbe mai in mente di assumere tra gli assiomi (come avviene erroneamente in logica), se non addirittura di dimostrare, questa legge di avanzamento [Fortschreitungsgesetz] che, come si vede, contiene solo una riflessione su ciò che si è voluto dire con una proposizione generale.[92]

[90]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 22, in Graßmann (1844), p. 66. Ritorneremo su questi temi in seguito, soprattutto nel capitolo 6.
[91]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 21, in Graßmann (1844), p. 65. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.5].
[92]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 21, in Graßmann (1844), p. 65. Cfr. l'appendice 7.8, n. [21.5].

4.3 Il concetto di matematica

La deduzione del concetto di matematica pura prosegue nell'Introduzione alla *Ausdehnungslehre* con la determinazione di due ulteriori caratteristiche: la matematica è scienza del particolare (in contrapposizione alla Dialettica, che è scienza del generale) e ha per oggetto la forma di pensiero [Denkform], vale a dire un essere particolare generato dal pensiero. Graßmann deriva così dal concetto di scienza in generale la concezione della matematica come *Teoria delle forme* [Formenlehre] estendendo la definizione tradizionale di *Teoria delle grandezze* [Grössenlehre]. La matematica è poi ulteriormente caratterizzata per mezzo del metodo, che è considerato scientifico soltanto se in grado di riassumere in sé sia la specificità del metodo filosofico (che procede dal generale al particolare) sia la specificità del metodo matematico stesso (che procede dal particolare al generale). Infine, poiché l'oggetto della matematica è determinato essenzialmente per mezzo della legge con cui è generato (è infatti un essere particolare considerato come 'divenuto per mezzo del pensiero'), ampio spazio è dedicato alla classificazione dei diversi tipi di oggetti matematici, determinati ciascuno da una diversa legge di generazione secondo le coppie di opposti continuo, discreto, uguale e differente.

4.3.1 Il metodo

Le riflessioni metodologiche di Graßmann, benché strettamente correlate le une alle altre su un piano teorico, possono essere distinte in tre gruppi fondamentali: 1) le considerazioni sul metodo della matematica come scienza del particolare posto dal pensiero piuttosto che come scienza delle leggi generali del pensiero; 2) le riflessioni sul metodo espositivo più adeguato a rendere conto del procedimento matematico stesso, cioè la scelta di una presentazione rigorosamente scientifica che sia sintetica come la geometria euclidea e contemporaneamente offra uno sguardo d'insieme sull'intero percorso, come avviene usualmente in filosofia; 3) la riflessione sull'opportunità di integrare metodo analitico e metodo sintetico, secondo quanto detto, anche nella costruzione ed esposizione di quella nuova disciplina matematica che è la Teoria dell'estensione. Poiché quest'ultima riflessione riguarda strettamente l'introduzione del nuovo calcolo vettoriale, riprenderemo le considerazioni sul rapporto tra metodo analitico e metodo sintetico in geometria e nella Teoria dell'estensione nel capitolo 6, dedicato al rapporto tra filosofia, geometria e algebra. Affrontiamo qui invece l'analisi delle riflessioni sul metodo condotte nella introduzione all'*Ausdehnungslehre* e dunque le riflessioni sulla natura della matematica come scienza del particolare e sulle caratteristiche che secondo Graßmann dovrebbe avere ogni esposizione rigorosamente scientifica.

Scienza del particolare

Stabilite le caratteristiche comuni alle scienze formali, e cioè il fatto che entrambe si occupano di forme di pensiero, Graßmann passa a considerare le differenze contrapponendo la Filosofia o Dialettica come studio del generale alla Matematica come scienza del particolare.

> Le scienze formali o considerano [betrachten] le leggi *generali* del pensiero o considerano il *particolare* posto dal pensiero: la prima la Dialettica (Logica),[a] la seconda la Matematica pura.[93]
>
> [a]La logica presenta un lato puramente matematico, che si può designare come logica formale e che è stata elaborata nel suo contenuto congiuntamente da mio fratello Robert e da me e che è stata esposta in forma appropriata da mio fratello nel secondo libro della sua *Formenlehre*, Stettin, 1872. [Nota aggiunta nell'edizione del 1877]

Sia la matematica sia la filosofia sono scienze formali, che hanno cioè a che fare con forme di pensiero: mentre però la dialettica studia le leggi generali del pensiero, la matematica si occupa di singole forme, studiate come particolari.

> L'opposizione [Gegensatz] tra generale e particolare comporta la divisione delle scienze formali in Dialettica e Matematica. La prima è una scienza filosofica in quanto cerca l'unità in tutto il pensiero; la matematica invece ha la direzione opposta in quanto concepisce ogni cosa pensata [Gedachte] singolarmente come un particolare [Besonderes].[94]

La distinzione tra dialettica e matematica per mezzo della coppia di opposti generale-particolare rimanda ad un'analoga distinzione di Schleiermacher:

> L'idea del sapere sotto la forma isolata del generale è la dialettica. L'idea del sapere sotto la forma isolata del particolare è la matematica. In ogni essere reale vi è perciò tanta scienza quanta dialettica e matematica.[95]

Per Schleiermacher ciò che separa la dialettica dalla matematica è il diverso modo di concepire il rapporto tra pensiero e forma. Le proposizioni della dialettica si riferiscono infatti a tutto il sapere in generale, mentre le proposizioni della matematica si riferiscono alla quantità e alla grandezza, cioè a qualcosa che viene posto come identico nel pensiero e nell'essere.

[93]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 2, in Graßmann (1844), pp. 22-3.

[94]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 2, in Graßmann (1844), p. 23.

[95]Cfr. *Dialektik (1814)*, §§ 344-346 [309], in Schleiermacher (2001), I, p. 403. Come segnalato in precedenza, il numero tra parentesi quadre indica la pagina corrispondente della *Dialektik* rivista da Jonas e pubblicata nel 1839 nelle *Friedrich Schleiermacher's sämmtliche Werke*, 3.IV.2.

> [...] il rapporto reciproco di pensiero e forma concepito sotto la forma del particolare è la matematica nella sua intera estensione, che ha a che fare con il quantitativo, con la grandezza [Grösse] che è posta come identica nel pensiero e nell'essere.[96]

Proprio per questa ragione Schleiermacher ritiene anche che la matematica sia più affine alle scienze empiriche di quanto non lo sia la dialettica.[97] La matematica infatti ha per oggetto il particolare posto dal pensiero come uguale all'essere: la grandezza o quantità. In Graßmann non si parla esplicitamente di un'affinità tra scienze empiriche e matematica, però esaminando la sua classificazione delle scienze si può osservare che la matematica pura (ad esempio la Teoria dell'estensione) è affine alla geometria, che è considerata, come si è visto, una scienza reale.[98]

Il carattere di scienza del generale si applica invece secondo noi alla *Teoria generale delle forme* che Graßmann premette alla trattazione della Teoria dell'estensione e che egli considera come una sorta di disciplina propedeutica a tutti i rami della matematica vera e propria. La Teoria generale delle forme, infatti (cfr. il § 4.4) non studia operazioni tra forme particolari (ad esempio l'addizione e la moltiplicazione di vettori), ma le leggi generali di ogni possibile operazione (associatività, commutatività, ecc.). Sotto questo aspetto la Teoria generale delle forme presenta affinità con le scienze speculative di Schleiermacher e con la dialettica o logica di cui parla Graßmann.

Il metodo espositivo

Nella sezione D dell'Introduzione all'*Ausdehnungslehre* del 1844 Graßmann si sofferma a descrivere il proprio metodo espositivo e a spiegarne la scientificità. Il carattere filosofico del testo è riscontrabile a due livelli: è filosofica la deduzione delle proprietà degli oggetti matematici dal concetto stesso di essi e l'introduzione delle forme di pensiero attraverso la determinazione della rispettiva legge generativa; ha un profondo significato filosofico e matematico

[96] Cfr. *Dialektik (1818)*, [310], in Schleiermacher (2001), I, p. 404.

[97] ≪Das Wahre ist, dass die Mathematik mehr der empirischen, die Dialektik mehr der spekulativen Form verwandt ist.≫ Cfr. *Dialektik (1822)*, [311], in Schleiermacher (2001), I, p. 405.

[98] A proposito della caratterizzazione della geometria come scienza reale, che ha per oggetto un essere, è interessante confrontare anche un passo dello scritto *Ferneren Darstellungen aus dem System der Philosophie* di Schelling del 1802, nel quale si afferma che l'aritmetica esprime l'unità di pensiero e essere nel pensiero, mentre la geometria esprime tale unità nell'essere. ≪so kann daraus, daß Geometrie und Arithmetik, jede ... diese Einheit, die eine ... im Seyn, die andere ... im Denken, ausdrückt, zugleich die Einheit und die Verschiedenheit der geometrischen und arithmetischen Anschauung hinlänglich begriffen werden.≫ Cfr. Schelling (1856), I.4, p. 347, cit. in Radbruch (1994), p. 62.

l'impostazione generale di Graßmann, fondata sul tentativo di costruire una teoria generale delle grandezze estensive indipendente dall'introduzione di coordinate e di costruire un nuovo sistema vettoriale che permetta di calcolare direttamente con le grandezze geometriche. Del primo aspetto ci occupiamo in questo capitolo a livello generale; nel prossimo capitolo mostreremo, nel caso particolare della Teoria dell'estensione, come la legge evolutiva determini le proprietà dei vettori e delle operazioni tra di essi. Del secondo aspetto ci occuperemo a livello teorico nel capitolo 6, dopo aver analizzato in dettaglio la presentazione della nuova teoria nella due edizioni dell'*Ausdehnungslehre*.

Il metodo espositivo scelto per la presentazione dell'opera del 1844 si propone come un metodo in grado di rispecchiare da un lato la specificità del procedere matematico, dall'altro la caratteristica peculiare del metodo filosofico. I due metodi sono infatti contrapposti in un modo che ricorda, a prima vista, la distinzione kantiana tra la filosofia, che considera il particolare nell'universale, e la matematica, che considera l'universale nel particolare.[99]

> Proprio del metodo filosofico è avanzare per opposizioni giungendo così dal generale al particolare; il metodo matematico al contrario avanza dai concetti più semplici ai più complessi ottenendo così per connessione del particolare nuovi e più generali concetti.[100]

A ben guardare più che in riferimento ai caratteri della distinzione kantiana, il metodo filosofico e il metodo matematico sono piuttosto caratterizzati in maniera analoga ai due diversi momenti del procedimento dialettico platonico: riduzione e divisione. Matematica e filosofia sono caratterizzate da un movimento contrario: la filosofia parte dal generale per giungere al particolare con un procedimento analitico di scomposizione del concetto complesso in concetti più semplici; la matematica procede in maniera sintetica e prende le mosse dai particolari che devono essere connessi per arrivare a un generale. Matematica e filosofia sembrano radicalmente distinte: l'una è scienza del particolare, l'altra è scienza dell'universale; l'una ha un procedimento sintetico, l'altra un procedimento analitico. La differenza tra matematica e filosofia risiede nel concetto stesso dei due saperi, perché l'una ha come originario l'unità dell'idea, l'altra la particolarità. La differenza di metodo non è altro che una conseguenza di questa differenza nel concetto.

[99]≪Die philosophische Erkenntniß betrachtet also das Besondere nur im Allgemeinen, die mathematische das Allgemeine im Besonderen, ja gar im Einzelnen, gleichwohl doch a priori und vermittelst der Vernunft, so daß, wie dieses Einzelne unter gewissen allgemeinen Bedingungen der Construction bestimmt ist, eben so der Gegenstand des Begriffs, dem dieses Einzelne nur als sein Schema correspondirt, allgemein bestimmt gedacht werden muß.≫ Cfr. *Kritik der reinen Vernunft*, B 742, tr. it. in Kant (1787), p. 447.

[100]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 13, in Graßmann (1844), p. 30. Cfr. l'appendice 7.7, p. 399.

> Mentre nel metodo filosofico prevale la visione d'insieme del tutto e lo sviluppo consiste proprio nella continua ramificazione e articolazione del tutto, nel metodo matematico predomina la concatenazione reciproca tra i particolari e ogni successione di sviluppo in sé conchiusa forma tutta insieme, a sua volta, un membro della concatenazione successiva; questa differenza di metodo risiede nel concetto: infatti nella filosofia è proprio l'unità dell'idea l'originario e la particolarità il derivato, mentre nella matematica la particolarità è l'originario e l'idea invece l'ultimo (ciò cui si tende), il che condiziona l'opposto procedere.[101]

Questa differenza concettuale tra matematica e filosofia accomuna Graßmann a Kant, che, come si è detto nel capitolo 3, distingue i due saperi non in base ad una differenza di oggetto ma ad una differenza di metodo. Tuttavia nel prosieguo dell'Introduzione la posizione di Graßmann si rivela radicalmente diversa dalla posizione kantiana: matematica e filosofia hanno infatti in comune qualcosa e precisamente ciò che le rende scientifiche. La scientificità della trattazione dell'una e dell'altra risiede in un metodo che accompagna il riconoscimento delle verità individuali ad una visione d'insieme.[102]

> Poiché sia la matematica sia la filosofia sono scienze in senso rigoroso, il metodo deve avere in entrambe qualcosa di comune e precisamente ciò che le rende scientifiche. Noi attribuiamo carattere scientifico ad un tipo di trattazione se per mezzo di esso il lettore da un lato è condotto con necessità al riconoscimento di ogni verità individuale, dall'altro è posto nella condizione, a ogni punto dello sviluppo, di avere una visione d'insieme della direzione del processo ulteriore.[103]

Graßmann mette dunque in questione la distinzione kantiana tra matematica e filosofia ammettendo che entrambe le scienze dovrebbero essere composte dai due momenti del metodo dialettico: la concatenazione dei particolari e il colpo d'occhio che mostra l'unità dell'idea. Per Graßmann ogni scienza dovrebbe contenere sia il metodo proprio della matematica sia il metodo proprio della filosofia o dialettica. Ciò è più difficile per la matematica

[101]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 13, in Graßmann (1844), p. 30. Cfr. l'appendice 7.7, p. 399.

[102]Una critica simile alla distinzione kantiana della filosofia e della matematica in base al metodo era già stata proposta da Schelling, secondo il quale in matematica sono presenti sia la considerazione dell'universale nel particolare (ad esempio in geometria) sia la considerazione del particolare nell'universale (ad esempio in aritmetica). Cfr. Schelling (1802).

[103]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 14, in Graßmann (1844), p. 30. Cfr. l'appendice 7.7, p. 400.

in quanto essa è scienza del particolare e dunque si fonda essenzialmente sul metodo sintetico che procede dal particolare al generale.

> Che in matematica queste successioni di sviluppo siano separate nel modo più netto dipende dalla peculiarità del metodo della matematica stessa (§ 13): poiché essa avanza per concatenazione partendo dal particolare, l'unità dell'idea è l'ultima cosa. Perciò la seconda successione di sviluppo ha un carattere diametralmente opposto a quello della prima e la compenetrazione delle due appare ancora più difficile che in qualunque altra scienza.[104]

Questa caratterizzazione del metodo di Graßmann è probabilmente influenzata dalla concezione schleiermacheriana. Poiché, per Schleiermacher, la matematica è sapere sotto la forma del particolare e la dialettica è sapere sotto la forma del generale, la matematica è più affine alla forma empirica e la dialettica è più affine alla forma speculativa. Poiché però ogni sapere deve contenere un momento empirico e un momento speculativo, ogni sapere è completo solo in quanto contiene dialettica e matematica:

> in ciascun pensiero reale che sia un puro pensiero [...] c'è tanto sapere quante sono la dialettica e la matematica che contiene. La verità è che la matematica è più affine alla forma empirica, la dialettica più affine alla forma speculativa. Non appena considero un pensiero nel tempo, devo valutare in esso cosa sia vero e cosa sia falso, cioè una relazione puramente quantitativa; devo inoltre ricercare i coefficienti della sua genesi e questo è compito della matematica. Ma una scienza della natura speculativa può essere costruita solo su principi dialettici [...]. Se ora tutti i filosofi hanno rappresentato la matematica come ciò che deve precedere la conoscenza filosofica, ciò si fonda sul fatto che prima di poter essere trattato tecnicamente l'usuale pensiero confuso che vuole diventare esperienza deve certo prima essere ordinato. Ma questo ordine interno è il frutto della matematica, che condiziona dunque la possibilità di un procedimento dialettico in quanto l'empirico precede sempre lo speculativo. In conclusione ho ritenuto perciò di porre come il più generale il canone secondo cui ogni sapere è un sapere completo solo in quanto riunisce dialettica e matematica.[105]

Poiché per Graßmann il metodo proprio della matematica è la sintesi e quello proprio della filosofia la scomposizione, ogni presentazione rigorosamente scientifica di una disciplina matematica deve fondarsi su entrambi i

[104]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 16, in Graßmann (1844), p. 32. Cfr. l'appendice 7.7, p. 401.

[105]Cfr. *Dialektik (1822)*, [311-312], in Schleiermacher (2001), I, pp. 405-6.

metodi: l'uno fornirà il contenuto proprio della teoria, l'altro influenzerà la forma dell'esposizione.

> Perciò la presentazione scientifica è secondo la sua essenza un intrecciarsi di due successioni di sviluppo, delle quali l'una conduce per conseguenza da una verità all'altra e forma il contenuto proprio, mentre l'altra governa il procedimento stesso e determina la forma.[106]

Lewis mostra l'influenza di Schleiermacher sul metodo scientifico di Graßmann analizzando le riflessioni metodologiche proposte da Schleiermacher in *Grundlinien einer Kritik der bisherigen Sittenlehre*.[107] Come abbiamo accennato nel § 4.2 Schleiermacher valuta tre diversi metodi scientifici per trattare l'etica e distingue 1) il metodo rapsodico, che confronta elementi individuali e li classifica senza ricorrere ad un unico principio organizzativo, 2) il metodo dogmatico-deduttivo, che fornisce regole di formazione dei concetti e di determinazione delle loro relazioni, 3) il metodo euristico, che determina ogni particolare presentando insieme principi generali e particolari. Schleiermacher preferisce quest'ultimo metodo, perché permette a chi lo pratica di controllare lo sviluppo e di avere ad ogni passo una visione d'insieme di tutti i suoi aspetti; analogamente Graßmann adotta un metodo grazie al quale il lettore ≪da un lato sia condotto a riconoscere ciascuna verità individuale, dall'altro sia posto in condizione di vedere, ad ogni punto dello sviluppo, la direzione del progresso ulteriore≫.[108]

> A ogni punto dello sviluppo il tipo di sviluppo ulteriore è determinato essenzialmente da un'idea guida che è o nient'altro che un'analogia congetturale con rami correlati e già noti del sapere o — e questo è il caso migliore — un presentimento diretto della verità seguente da cercare.[109]

Il concetto di un'idea guida della ricerca e il ricorso ad un'analogia con altri rami correlati del sapere evocano proprio le due regole fondamentali del procedimento euristico di Schleiermacher, così come esse sono esposte nella *Dialektik* del 1822: la *regola della congruenza* afferma che ogni membro di una totalità deve comportarsi rispetto ai membri vicini e al punto medio del sistema come ogni altro membro; la *regola dell'analogia* afferma che se si individua una certa regolarità, allora tale regolarità deve essere individuata anche

---

[106] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 16, in Graßmann (1844), p. 31. Cfr. l'appendice 7.7, p. 401.

[107] Cfr. Schleiermacher (1802) e Lewis (1977).

[108] Cfr. Graßmann (1844), p. 30, Graßmann (1995), p. 30.

[109] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 15, in Graßmann (1844), p. 31. Cfr. l'appendice 7.7, p. 400.

in altri domini del sapere. Schleiermacher considera ad esempio la ricerca di un nuovo pianeta nel sistema solare: secondo la regola della congruenza se individuiamo una certa regolarità (proporzionalità inversa) nella distanza di due pianeti, dobbiamo assumere che la stessa regolarità valga rispetto ai pianeti vicini e rispetto al sole e dunque dovremo rivolgere l'attenzione ad un particolare punto dello spazio nel quale, secondo tale idea-guida, dovrebbe trovarsi il nuovo pianeta; la regola dell'analogia ci invita invece ad assumere che il rapporto tra il sole e i pianeti valga anche in altri universi. Le due regole sono così formulate nella *Dialektik* del 1822:

> In ogni oggetto che sia un'identità di unità e molteplicità si presuppone una conformità a legge [Gesetzmäßigkeit] del comportamento dei singoli subordinati con se stessi e con il tutto ma solo per quanto si resti nel dominio dello stesso oggetto, [...]
>
> [La] presupposizione del simile in altri ambiti, poiché ogni punto deve avere il suo punto coordinato, è la legge dell'analogia.[110]

Il rapporto tra la regola della congruenza di Schleiermacher e l'idea guida di cui parla Graßmann diviene più chiaro se si analizzano altri passi dei due autori. Secondo Graßmann l'idea guida ha essenzialmente la funzione di indicare in quale direzione si trova la nuova verità che si sta cercando: non è infatti possibile arrivare alla verità nuova per combinazione casuale dei risultati.

> Il presentimento sembrerebbe estraneo al dominio della pura scienza e soprattutto a quello matematico. E tuttavia senza di esso è impensabile trovare una verità nuova; non ci si arriva per combinazione cieca dei risultati ottenuti; che cosa bisogna combinare, e in che modo, deve essere piuttosto determinato dall'idea guida e quest'idea a sua volta può apparire, prima di essersi realizzata attraverso la scienza stessa, solo nella forma di un presentimento.[111]

Graßmann ha in mente la procedura di ricerca di una nuova verità matematica: non è per combinazione delle ipotesi che si arriva alla tesi da dimostrare, ma si arriva a scoprire una nuova verità perché si ha già in mente una possibile concatenazione dei risultati sotto forma di congettura o 'presentimento'. Analogamente per Schleiermacher non si dà metodo euristico (metodo per trovare nuove verità) senza un calcolo, non si trova un nuovo risultato 'per caso'. Nell'esempio astronomico citato sopra, potremmo dire che l'astronomo che cerca un nuovo pianeta non trova la sua posizione a caso, ma

[110]Cfr. *Dialektik*, 1822, in Schleiermacher (2001), p. 449.

[111]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 15, in Graßmann (1844), p. 31. Cfr. l'appendice 7.7, p. 400.

solo con un calcolo diretto da un'idea guida: una certa regolarità nella determinazione delle distanze reciproche dei pianeti. La sensibilità è rivolta ad una determinata regione del sistema solare e questa limitazione dell'attenzione è il segno dell'attività libera del soggetto. La presupposizione del soggetto non è però casuale ma è guidata dall'idea di una connessione generale dei pianeti nel sistema, ovvero dalla regola di congruenza sopra citata.[112]

Come in Schleiermacher l'idea guida che induce a rivolgere l'attenzione in una certa direzione piuttosto che in un'altra rivela l'attività libera del soggetto, così in Graßmann soltanto chi ha una visione d'insieme ≪ottiene una conoscenza libera della verità≫ e pensa ≪in modo libero ed autonomo≫:

> Si trovano spesso dimostrazioni in cui all'inizio proprio non si potrebbe sapere dove dovrebbero condurre, se non fosse per la proposizione che sta all'inizio; in tali dimostrazioni, dopo aver seguito per un po' di tempo ogni passo in avanti ciecamente e a casaccio, alla fine, quando uno meno se lo aspetta, si arriva improvvisamente alla verità da dimostrare. Una tale dimostrazione magari non lascia niente a desiderare dal punto di vista del rigore ma non è scientifica: ad essa manca il secondo requisito, la visione d'insieme. Perciò chi segue una tale dimostrazione non ottiene una conoscenza libera della verità ma resta totalmente dipendente dal modo particolare in cui la verità è stata trovata, a meno che non si procuri da sé successivamente quello sguardo d'insieme; e questo sentimento di mancanza di libertà che in tal caso ha origine, almeno nel momento in cui il lettore è ricettivo, è il più opprimente per chi è abituato a pensare in modo libero e autonomo e ad appropriarsi di tutto ciò che riceve in modo spontaneo e vivo. Se al contrario il lettore a ogni punto dello sviluppo è posto in condizione di vedere dove va, egli rimane padrone della materia, non è più legato alla particolare forma della presentazione e l'assimilazione diviene una vera riproduzione.[113]

Talvolta però non è possibile avere un'idea guida che indichi il cammino da svolgere o la direzione in cui cercare le nuove verità: tale è il caso della Teoria dell'estensione, che costituisce una disciplina completamente nuova. Qui è molto utile il ricorso all'analogia, che si fonda sul confronto con la geometria: se si trova una certa conformità a legge nella geometria essa si deve trovare anche nella Teoria dell'estensione e viceversa. Proprio sul ragionamento per

[112] ≪Das hier auftretende Verfahren ist bestimmt durch die Idee der Gesetzmässigkeit in der Entfernung der Planeten. Diese Voraussetzung ist gewissermaßen ein willkürliches Denken; aber geleitet durch die Idee des allgemeinen Zusammenhanges.≫ Cfr. *Dialektik*, 1822, in Schleiermacher (2001), pp. 446-8.

[113] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 14, in Graßmann (1844), pp. 30-31. Cfr. l'appendice 7.7, p. 400.

analogia si fonda lo studio e il confronto delle proprietà dell'addizione e della moltiplicazione geometrica di segmenti e delle proprietà dell'addizione e della moltiplicazione tra tratti (vettori).

4.3.2 Le forme di pensiero

Abbiamo visto che nella sezione *A. Deduzione del concetto di matematica pura* dell'Introduzione Graßmann definisce la matematica pura come «la scienza dell'essere particolare» inteso «come un essere divenuto per mezzo del pensiero», cioè come una «forma di pensiero o semplicemente una forma». In questo senso la matematica è definita «Teoria delle forme». Cercheremo ora di riflettere sul significato di questo concetto di forma per comprendere in che misura esso possa essere distinto da quello di grandezza e considerato come una sorta di generalizzazione di quest'ultimo. Solo comprendendo il significato di questo termine è infatti possibile valutare se la nuova definizione di matematica come Teoria delle forme si contrapponga nettamente alla definizione tradizionale di scienza delle grandezze o non ne costituisca piuttosto un ampliamento.

La forma di pensiero è «la forma nel suo significato puro, astraendo da tutto il contenuto reale».[114] La forma è innanzitutto un particolare e non un universale: non è un genere che racchiuda più cose ma un essere particolare, una cosa. E infatti la matematica non è dottrina della forma in quanto studio delle somiglianze di struttura tra teorie ma *Teoria delle forme* in quanto studio di quei particolari che sono le forme.[115]

La forma deve essere sempre intesa come un particolare, come un oggetto determinato dalla propria legge di generazione o costruzione. Insistere sulla particolarità della forma è importante per due ragioni: innanzitutto perché in Graßmann non ha senso l'idea di un oggetto matematico generale non specificato e non determinato, come vedremo meglio commentando l'altra caratteristica delle forme e cioè l'essere poste dal pensiero in un atto costruttivo; in secondo luogo perché la determinatezza e la particolarità del concetto di forma sono legate alla sua natura di concetto simbolico, così come lo era la natura determinata delle specie di Viète: ciò che caratterizza la forma è l'operazione mediante la quale essa viene generata da un elemento dato.

Oltre ad essere particolare, la forma è «divenuta per mezzo del pensiero», è posta dal pensiero stesso. Questa affermazione può essere letta in due

[114] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 3, in Graßmann (1844), p. 23. Cfr. l'appendice 7.7, p. 392.

[115] Per una interessante concezione della filosofia della matematica come studio della struttura delle teorie e delle somiglianze di struttura, cioè degli isomorfismi, si veda Grattan-Guinness (1993).

modi: o insistendo sulla natura concettuale delle forme o sottolineando la componente costruttiva delle forme, che sono il risultato di un processo generativo messo in atto dal pensiero. La seconda lettura non esclude la natura concettuale delle forme, ma ha il pregio di coglierne meglio la peculiarità essenziale: il fatto che esse sono generate secondo una certa legge o regolarità. Per forma Graßmann intende infatti propriamente il risultato di un processo generativo da un elemento dato.

Le forme sono il prodotto di un atto del pensiero ma non per questo devono essere considerate come creazioni del soggetto pensante: Graßmann infatti usa il termine 'geworden' per indicare che le forme sono divenute per mezzo del pensiero e non il termine 'geschafft', che è invece solitamente usato per intendere la creazione dal nulla.[116] Le forme sono il risultato di un atto di pensiero applicato a qualcosa di dato; esse non sono il risultato di una creazione dal nulla ma il prodotto di un pensiero che costruisce, genera un essere a partire da un elemento iniziale sottoposto ad una data operazione. Vedremo nel capitolo 5 come le grandezze estese siano forme generate per mezzo di un elemento generatore che varia in modo continuo, mentre ad esempio i numeri sono forme generate per mezzo di un elemento generatore (che può essere una prima forma data) attraverso una variazione discreta. Come da un punto si genera la linea per una variazione continua e infinitesima del punto, così da un'unità si genera ciascun numero per addizione successiva di un'unità uguale all'unità data. Vedremo nel prossimo sottoparagrafo (analizzando la sezione B. dell'Introduzione) le caratteristiche specifiche di questi due tipi di variazione. Quello che fin d'ora ci interessa sottolineare è la necessità di associare inscindibilmente il concetto di forma alla legge con cui essa è generata. Che le legge presupponga sempre anche un elemento iniziale al quale essa deve essere applicata è evidente dalla considerazione del criterio di uguaglianza delle forme: vedremo nel capitolo 5 che due grandezze estensive sono uguali se sono generate in modo uguale da elementi uguali.[117] Per comprendere con un esempio cosa si deve intendere per legge generativa di una forma (un altro esempio verrà dalla considerazione delle grandezze estensive nel prossimo capitolo) possiamo fare riferimento alle pagine iniziali del *Lehrbuch der Arithmetik* in cui Graßmann definisce il concetto di addizione numerica.

[116] In matematica è interessante notare che il termine 'geschafft' è usato da Dedekind in *Was sind und was sollen die Zahlen?* per denotare l'atto di creazione da parte dell'uomo dei numeri (intesi così come prodotti culturali) in contrapposizione alla concezione di Kronecker.

[117] Ciò in cui due forme uguali possono essere sostituite non è un contesto ma la legge generativa. Le forme non sono creazioni dal nulla ma costruzioni da un dato iniziale secondo una certa legge.

Le forme nel *Lehrbuch* e nella *Formenlehre* Il *Lehrbuch der Arithmetik*, pubblicato a Berlino nel 1861, è la prima parte di un *Lehrbuch der Mathematik*, che avrebbe dovuto trattare, oltre che di aritmetica anche di planimetria, steoreometria e trigonometria.[118] Nella Prefazione Hermann Graßmann riconosce che la rielaborazione dell'aritmetica esposta nel volume è nei suoi principi essenziali frutto della collaborazione con il fratello Robert. La trattazione è presentata come la prima rielaborazione rigorosamente scientifica dell'aritmetica: il metodo è giudicato l'unico metodo possibile per una trattazione conseguente e adeguata della materia.[119]

L'opera si apre con una definizione generale di matematica come «scienza della connessione tra grandezze». Il termine 'grandezza' è qui usato come sinonimo di 'forma di pensiero': questo uso del termine 'grandezza' come sinonimo di 'forma' è testimoniato anche nella *Formenlehre* di Robert Graßmann. Dopo aver criticato il concetto espresso dal termine 'grandezza' così come esso era inteso dalla tradizione che abbiamo ricostruito nei capitoli 2 e 3 ed averlo esteso con l'introduzione di un nuovo concetto, quello di forma, Graßmann usa il termine tradizionale 'grandezza' nel nuovo significato di 'forma'. Se infatti, come vedremo tra poco, una delle critiche di Graßmann alla definizione tradizionale consisteva nel fatto che il termine 'grandezza' propriamente si riferiva soltanto alle figure geometriche e non ai numeri, qui il termine 'grandezza' è applicato proprio ai numeri e dunque non è inteso nel significato tradizionale di forma continua, ma di forma *tout court*.

La prima parte della definizione di grandezza non appare molto diversa dalla definizione tradizionale:

> *Grandezza* si chiama ogni cosa che dovrebbe (soll) essere posta uguale o disuguale rispetto ad un'altra. Due cose si dicono *uguali* quando in ogni espressione una può essere sostituita al posto dell'altra.[120]

La seconda parte però specifica che l'aritmetica è la scienza che «tratta delle grandezze che si ottengono da una sola grandezza per mezzo di un'operazione».[121] Già in questa definizione dell'aritmetica appare evidente il ruolo della legge generativa nella determinazione del concetto di grandezza. Gli oggetti dell'aritmetica, i numeri, sono infatti generati da una legge di passaggio al successore: dato un elemento iniziale, che può essere una qualunque

---

[118] In relazione al *Lehrbuch der Arithmetik* si vedano in particolare Peano (1899), Frege (1884), Wang (1957), Lewis (1996a), pp. 379-80 e Lewis (1995).

[119] Cfr. *Lehrbuch der Arithmetik*, Prefazione, in Graßmann (1861), p. v.

[120] Cfr. *Lehrbuch der Arithmetik*, § 1, in Graßmann (1861), p. 1. Il concetto di uguaglianza è definito dalla *sostituibilità salva veritate* e rivela una chiara matrice leibniziana. Ritorneremo ampiamente sul significato di questo concetto nel § 4.4.

[121] Cfr. *Lehrbuch der Arithmetik*, § 1, in Graßmann (1861), p. 2.

grandezza e (si noti che Graßmann non assume come elemento iniziale l'unità dell'aritmetica, ma un'unità in senso più generale ed astratto), si costruisce una successione contenente il successore di e e poi il successore del successore di e e così via.

> Si costruisca da una grandezza e una successione (Reihe) di grandezze con il seguente procedimento: si ponga e come un membro della successione, si ponga $e + e$ (letto e più e) come successore nella successione, e si prosegua così, derivando ogni volta dall'ultimo membro della successione il successore aggiungendo ad esso $+e$. Analogamente si ponga $e + -e$ (letto 'e più meno e') come il membro immediatamente precedente nella successione ad e e così si prosegua, derivando ogni volta dal primo membro della successione quello che immediatamente lo precede, aggiungendo ad esso $+ - e$: così si ottiene una successione infinita da entrambe le parti $\ldots e + -e + -e + -e, e + -e + -e, e + -e, e, e + e, e + e + e, \ldots$. Se in questa successione ogni membro è assunto come diverso da tutti gli altri membri della successione, allora la successione è chiamata *successione fondamentale*, e è chiamata l'unità *positiva*, $-e$ è chiamata l'unità *negativa*.[122]

In questo esempio è chiaro come ciascun membro della successione fondamentale sia costruito a partire da una qualunque grandezza assunta come unità: ciò che caratterizza i membri della successione (i numeri) è la legge generativa che esprime il passaggio al successore. Ciascuno dei membri della successione è una forma perché è generato o costruito a partire da un elemento dato conformemente ad un certa legge, secondo una regolarità generativa. Ciascun numero è una forma perché è determinato dalla regola del passaggio al successore. Il concetto di successore[123] è definito in generale per ogni membro della successione nel seguente modo:

> *Definizione.* Se a è un qualunque membro della successione fondamentale, allora si intenda per $a+e$ (anche se a è un membro della serie che precede e) il membro della successione immediatamente successivo ad a, e si intenda per $a + -e$ (anche se a è un membro della serie successivo ad e) il membro della successione che precede immediatamente a.[124]

Su questo concetto di successore si fonda l'operazione di addizione: infatti,

> quando b è il membro della successione immediatamente successivo ad a, allora

[122]Cfr. *Lehrbuch der Arithmetik*, § 2, in Graßmann (1861), pp. 2-3.

[123]Si tratta proprio dello stesso concetto che Peano esprime negli *Arithmetices Principia* con il termine 'sequens'. Cfr. Peano (1899), p. 59.

[124]Cfr. *Lehrbuch der Arithmetik*, § 2, in Graßmann (1861), p. 3.

(8) $b = a + e$
(9) $a = b + e$
Si chiami questa operazione (Verknüpfung) addizione delle unità.[125]

L'esempio numerico mostra come ogni forma sia determinata da una legge di generazione e da un elemento iniziale al quale la legge è applicata. Che il termine grandezza usato nel *Lehrbuch* corrisponda al termine 'forma' usato nell'*Ausdehnungslehre* è provato anche dall'uso del termine 'Gröse' [sic] nello stesso significato di forma nella *Formenlehre* di Robert Graßmann. Qui l'uso del termine è giustificato con un appello all'autorità di Leibniz, che in una lettera a Vagetius del 1696 avrebbe dato origine alla *Grösenlehre* (scientia de magnitudine).[126] La *Teoria delle forme* deve secondo Robert insegnare il pensiero rigorosamente scientifico[127] ed essere valida per tutti gli uomini di qualunque popolo e di qualunque lingua.[128]

Che gli oggetti della *Formenlehre* siano forme significa che qualunque oggetto del pensiero può diventare oggetto della *Formenlehre*.[129] Benché inizialmente Robert parli di forme, nel seguito chiama sempre 'grandezze' [Grösen (sic)] gli oggetti della *Formenlehre* e Teoria delle grandezze [Grösenlehre (sic)] la «scienza della connessione delle grandezze». Le grandezze non sono primariamente definite come ciò che può essere uguale o diverso (come nel *Lehrbuch*), bensì come «ciò che è o può diventare oggetto del pensiero», a condizione che abbia un valore univoco.[130] Questa affermazione di Robert ben si concilia con la nostra interpretazione delle forme come qualcosa di cui non è determinata la natura ontologica quanto il fatto che esse possono essere prodotte, costruite dal pensiero e non soltanto presentarsi al pensiero come qualcosa che sta di fronte ad esso: l'univocità è data dal modo in cui le cose sono generate.[131]

[125]Cfr. *Lehrbuch der Arithmetik*, § 2, in Graßmann (1861), p. 3.
[126]Cfr. *Formenlehre*, Einleitung in die Grösenlehre, in Graßmann (1872), p. 17.
[127]«Die Formenlehre soll uns die Gesetze lehren des streng wissenschaftlichen Denkens.» Cfr. *Formenlehre*, Einleitung, § 1, in Graßmann (1872), p. 5.
[128]«Die Formenlehre soll als streng Wissenschaft allgemein gültig sein für alle Menschen jeglichen Volkes, jeder Sprache.» Cfr. *Formenlehre*, Einleitung, § 1, in Graßmann (1872), p. 6. Si può cogliere qui un'eco del progetto leibniziano di una *characteristica universalis*.
[129]«Andrerseits muss, da die Formenlehre die Gesetze für jedes Denken entwickeln soll, jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, auch Gegenstand der Formenlehre werden können und ebenso jede Verknüpfung des Denkens auch als eine Verknüpfung der Formenlehre aufgefasst werden können.» Cfr. *Formenlehre*, Einleitung, § 1, in Graßmann (1872), p. 7.
[130]«Gröse heist [sic] jedes, was Gegenstand des Denkens ist oder werden kann, sofern es nur einen und nicht mehre Werthe hat.» Cfr. *Formenlehre*, Einleitung, § 1, in Graßmann (1872), p. 7.
[131]Cfr. il § 4.2, p. 176.

Robert precisa inoltre il concetto di uguaglianza, definendo uguali due grandezze quando possono essere sostituite in ogni connessione della *Formenlehre* senza variazione di valore.[132] Infatti il numero 2 e il numero 1+1 possono essere sostituiti senza variazione del risultato in ogni operazione aritmetica. Ad esempio $a + 2 = a + (1 + 1)$ oppure $a - 2 = a - (1 + 1)$ o ancora $\frac{a}{2} = \frac{a}{1+1}$, ecc. Ciò che dunque caratterizza la grandezza è la connessione con cui è stata costruita: se da due cose si ottengono cose uguali mediante connessioni uguali allora le cose date sono uguali. Accanto alla legge generativa, però, ogni grandezza è caratterizzata anche dall'elemento iniziale con cui è stata originariamante generata: tale elemento è chiamato da Robert *Stift*, bastoncino. Gli *Stifte* sono a loro volta grandezze, ma grandezze considerate come poste originariamente e dunque non ottenute per connessione da altre grandezze.[133] Vedremo nel capitolo 5 che anche nell'*Ausdehnungslehre* di Hermann Graßmann (soprattutto nella versione del 1862) svolgeranno un ruolo fondamentale alcune grandezze considerate come originariamente date.

La forma come concetto-funzione Questi due brevi riferimenti al *Lehrbuch* e alla *Formenlehre* hanno mostrato che ciascuna forma è determinata congiuntamente da una legge di generazione e da un elemento iniziale al quale essa è applicata. La novità di questa concezione degli oggetti matematici è descritta con molta lucidità da Cassirer quando illustra la differenza tra il concetto come genere e il concetto come funzione. Il concetto come genere nasce per soddisfare le esigenze della scienza naturale descrittiva, come raccolta e riproduzione di certi tratti effettivamente esistenti nelle cose. Questo tipo di concetto è secondo Cassirer (ma certamente anche secondo Graßmann) inadeguato a spiegare i concetti matematici: qui infatti non esiste come già data la molteplicità degli oggetti che cadono sotto il concetto (ad esempio i diversi triangoli); piuttosto tale molteplicità è creata: ≪da un semplice atto del porre viene prodotta per sintesi progressiva una connessione sistematica di creazioni del pensiero≫.[134]

Anche accantonando il caso degli oggetti matematici (di cui non abbiamo alcuna esperienza e dunque i cui caratteri non possiamo astrarre dall'esperienza) il concetto come genere non è comunque adatto — sempre secondo Cassirer — neppure per spiegare la formazione logica del concetto. Per poter

[132]≪Gleich heisen zwei Grösen, wenn man in jeder Knüpfung der Formenlehre die eine statt der andern ohne Aenderung des Werthes setzen kann.≫ Cfr. *Formenlehre*, Einleitung, § 1, in Graßmann (1872), p. 7.

[133]≪Die Grösen, welche verknüpft werden sollen, ohne dass sie selbst durch Knüpfung von Grösen entstanden sind, und welche also ursprünglich gesetzt sind, heisen jede ein Stift oder ein Element.≫ Cfr. *Formenlehre*, Einleitung, § 1, in Graßmann (1872), p. 7.

[134]Cfr. Cassirer (1910), p. 21.

individuare dei tratti comuni agli oggetti occorre poter confrontare gli elementi delle nostre rappresentazioni sensoriali, il che avviene solo per mezzo di un criterio, di una legge di ordinamento in successione. Infatti, «diciamo concettualmente compresa e ordinata una molteplicità offerta dall'intuizione allorché i suoi termini non stanno l'uno accanto all'altro senza rapporti, ma derivano in successione necessaria da un determinato termine iniziale secondo una fondamentale relazione generatrice.»[135]

Per mezzo della relazione generatrice ciascun elemento è dedotto da quello che lo precede; se la relazione generatrice è di somiglianza è possibile che il concetto sia una rappresentazione universale che riunisce i tratti dei singoli oggetti, ma la somiglianza non è l'unica relazione generatrice possibile — e qui sta la differenza rispetto al concetto come genere: «i termini possono essere ordinati secondo l'uguaglianza e la disuguaglianza, secondo la grandezza e il numero, secondo rapporti spaziali e temporali, o secondo la loro dipendenza causale.»[136]

Il vantaggio del concetto matematico come funzione, piuttosto che come genere è che, come sostiene Lambert nella sua critica alla scuola wolfiana, nei concetti universali della matematica la determinatezza non è distrutta, negata, tralasciata, ma conservata.[137] La formula matematica è generale non perché contenga tutti i casi particolari ma perché li può dedurre. «Il concetto vero e proprio non tralascia la peculiarità e la particolarità dei contenuti che sussume, ma cerca di mostrare come necessarie la comparsa e la connessione di questi stessi aspetti particolari. Ciò che esso dà è una regola universale per il collegamento del particolare stesso».[138] Il genere ha un'universalità astratta (in senso hegeliano), perché tralascia le differenze specifiche, mentre il concetto generale ha un'universalità concreta, perché raccoglie in sé il particolare di tutte le specie e lo svolge secondo una regola generale. Ad esempio $3x + 6 = 12$ è universale perché comprende la legge di formazione dei numeri cercati x ed è particolare perché è specie dei numeri determinati cercati.[139]

«Alla logica del concetto-genere, la quale, come abbiamo visto, si trova nel punto di vista e nel dominio del concetto di sostanza, si contrappone ora la logica del concetto matematico di funzione», che non trova applicazione solo in matematica ma in tutta la scienza. Per stabilire che una serie di contenuti sono uguali, occorre un punto di vista rispetto al quale stabilire l'uguaglianza e questo punto di vista non è a sua volta un contenuto ma è

[135]Cfr. Cassirer (1910), p. 25.
[136]Cfr. Cassirer (1910), p. 26.
[137]Cfr. Cassirer (1910), p. 29.
[138]Cfr. Cassirer (1910), p. 30.
[139]Cfr. Cassirer (1910), p. 31.

una «forma della coscienza». Cassirer distingue tra elementi e forma (legge) di una serie. Per comprendere un concetto non basta la comprensione degli elementi della sua estensione ma occorre conoscere il significato della legge che li collega. Per conoscere tale legge non basta l'enumerazione dei casi ma occorre il principio generale che rende collegabili i singoli termini in un tutto funzionale. «Se io conosco la relazione mediante la quale $a, b, c, \ldots$ sono ordinati, li posso ricavare con la riflessione e farne un oggetto particolare del pensiero; è invece impossibile ottenere, dalla semplice giustapposizione di $a, b, c, \ldots$ nella rappresentazione la relazione che li collega.»[140]

Nel capitolo dedicato al concetto di spazio e alla geometria Cassirer analizza la Teoria dell'estensione di Graßmann e la Teoria generale delle forme che la precede. Il vantaggio del calcolo geometrico di Graßmann, così come della teoria dei quaternioni di Hamilton, è che esso non si limita alla semplice composizione di quantità ma è «sintesi di relazioni»:

> Ora però il campo della considerazione si allarga: può infatti servire come base ogni elemento preso ad arbitrio, purché sia possibile, partendo da esso, far derivare una nuova struttura in virtù della ripetuta applicazione di una determinata relazione fondamentale concettualmente stabilita. Solo questa possibilità di *determinazione* viene mantenuta nel calcolo e forma di esso la condizione necessaria e sufficiente.[141]

L'elemento ammesso come dato iniziale non è determinato se non come un particolare diverso dall'altro particolare: esso è sottoposto a cambiamenti che a loro volta sono considerati solo come ripetizione di una sola e medesima operazione, che genera ad ogni ripetizione nuove forme o grandezze. Ogni forma considerata (e ogni sistema di tali forme) non è già data altrove, ma è nota e determinata soltanto mediante la regola con cui è stata costruita. Proprio questo aspetto del concetto matematico Cassirer riscontra in Graßmann:

> Sebbene pertanto l'attuazione concreta della teoria dell'estensione di Grassmann si limiti inizialmente alla considerazione di modi di trasformazione ben determinati, il piano generale si estende fin da principio più in là. Si tratta qui soltanto di quella funzione che è risultata essere la generalissima prerogativa del concetto matematico in genere: addurre una qualche regola, qualitativamente determinata e unitaria, la quale determini la forma del passaggio fra i termini di una serie.[142]

[140] Cfr. Cassirer (1910), pp. 38-9.
[141] Cfr. Cassirer (1910), pp. 132-133.
[142] Cfr. Cassirer (1910), pp. 134-135.

4.3.3 I modi di generazione delle forme

Il concetto di forma non comprende ancora alcuna determinazione specifica né dell'elemento iniziale (si sa solo che si tratta di qualcosa di dato originariamente come particolare) né della legge di variazione con cui si genera la forma (si sa soltanto che essa genera un'intera serie di forme per applicazione ripetuta). Con questa caratterizzazione generale del concetto di forma Graßmann copre l'intero ambito della matematica. Specificando alcune caratteristiche o proprietà della legge generativa suddivide poi la matematica nelle sue sottodiscipline: l'*aritmetica*, l'*analisi combinatoria*, la *teoria delle funzioni*, la *teoria dell'estensione*. Ciascuna forma infatti può essere generata in modo continuo o discreto, per ripetizione dell'uguale o del diverso: poiché la legge generativa è ciò che determina la forma generata, diversi modi di generazione determinano forme di diverso tipo (numeri, combinazioni, funzioni, grandezze estensive). Mentre il concetto di forma è sufficientemente indeterminato da poter abbracciare gli oggetti di tutte le discipline (infatti in esso è specificato soltanto che la forma è generata da un elemento iniziale con una legge), ciascuno dei quattro modi di generazioni considerati da Graßmann ha caratteristiche più specifiche che individuano un tipo particolare di forma. La divisione della matematica in sottodiscipline avviene sulla base dei diversi oggetti di ciascuna, ma poiché gli oggetti (le forme) sono a loro volta determinati dalla legge generativa, potremmo dire che la divisione della matematica in sottodiscipline avviene sulla base dei diversi modi di generazione.

Consideriamo dapprima la distinzione tra continuo e discreto, che dà luogo alla differenza tra forme continue (le grandezze) e forme discrete (numeri e combinazioni).

> Ogni cosa che è divenuta per mezzo del pensiero (cfr. § 3) può esserlo in due modi, o per mezzo di un atto semplice di *generazione* o per mezzo di un duplice atto di *porre* e *connettere*. Ciò che è divenuto nel primo modo è la *forma continua* o la *grandezza* in senso stretto, ciò che è divenuto nel secondo modo è la *forma discreta* o forma *di connessione*.[143]

Ciò che distingue la generazione continua dalla generazione discreta è l'atto del pensiero con cui la forma viene posta: se si ha un unico atto, la generazione è continua; se invece si hanno due atti, un primo atto che pone un elemento e un secondo atto che lo connette all'elemento precedente, allora

[143]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 4, in Graßmann (1844), p. 24. Cfr. l'appendice 7.7, p. 393.

la generazione è discreta. È importante osservare fin d'ora che la forma continua è considerata sinonima di grandezza. Nella prospettiva di Graßmann dunque i numeri e le combinazioni, che come vedremo tra poco sono generati in maniera discreta, non sono grandezze. Dunque una definizione della matematica come scienza delle grandezze escluderebbe secondo Graßmann l'aritmetica e l'analisi combinatoria.

La generazione continua è il puro e semplice divenire. Nella generazione discreta invece si ha un elemento che prima viene posto e poi considerato come dato e connesso all'elemento precedente nella serie, pensato insieme ad esso.

> Ciò che nella forma discreta è posto prima della connessione è certo anch'esso posto dal pensiero, ma all'atto della connessione appare come dato e il modo in cui la forma discreta diviene da ciò che è dato è un semplice pensare insieme.[144]

Il concetto di generazione continua, che è appunto il divenire puro e semplice, può però anche essere pensato come una generazione discreta in cui i due atti, quello del porre e quello del connettere ciò che prima è stato posto, sono così intimamente uniti e inseparabili da formare un unico atto. Nel continuo il nuovo elemento della serie che sta per essere generato è già pensato insieme all'elemento precedente nel momento stesso in cui viene posto: in altre parole, il nuovo elemento non è mai generato completamente prima di essere connesso con l'elemento precedente. Il momento della connessione è parte integrante del momento della generazione.

> Il concetto del divenire continuo può essere concepito nel modo più semplice se lo si considera dapprima per analogia con la genesi di tipo discreto, che è più familiare. E cioè nella generazione continua è tenuto fermo ciò che ogni volta è divenuto e ciò che nuovo si origina già nel momento della sua genesi viene pensato insieme a ciò che è divenuto. Dunque si può anche nel caso della forma continua, per analogia, distinguere in base al *concetto* un duplice *atto* di porre e di connettere ma entrambi sono riuniti in un unico atto e così combaciano in un'unità inseparabile. In altre parole dei due membri della connessione (se vogliamo tener ferma per un istante questa espressione per via dell'analogia) uno è ciò che già è divenuto mentre l'altro è quello che nuovo si origina nel momento stesso della connessione e perciò non è già completo prima della connessione. Entrambi gli atti, di porre e connettere, si fondono talmente uno nell'altro che qualcosa

[144]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 4, in Graßmann (1844), p. 24. Cfr. l'appendice 7.7, p. 393.

> non può essere connesso prima di essere posto né essere posto prima di essere connesso; o, tornando a parlare nel modo che conviene al continuo, ciò che nuovo si origina, si origina proprio solo su ciò che è già divenuto; così è un momento del divenire stesso ciò che qui appare nel suo ulteriore sviluppo come accrescimento.[145]

L'opposizione tra continuo e discreto è però fluttuante: una forma continua può essere concepita come discreta e viceversa una forma discreta può essere concepita come continua. Questa fluttuazione tra continuo e discreto rivela che i due concetti non vanno intesi come caratteristiche delle cose, bensì come modi del soggetto pensante di concepire e pensare le cose. Questo modo di descrivere i concetti di continuità e discretezza si accorda bene con quanto abbiamo sostenuto a proposito delle forme di pensiero nel § 4.2: le forme non sono oggetti ideali quanto piuttosto prodotti di atti del pensiero, modi di concepire (costruire) le cose (l'essere dato), indipendentemente dalla natura reale o ideale di ciò che è dato.

> L'opposizione tra continuo e discreto è (come ogni vera opposizione) fluttuante, in quanto il discreto può essere anche considerato come continuo e viceversa il continuo come discreto. Il discreto è considerato come continuo se ciò che è connesso è esso stesso concepito, a sua volta, come divenuto e se l'atto del connettere è concepito come un momento del divenire. E il continuo è considerato come discreto se i singoli momenti del divenire sono concepiti come puri atti di connessione e se ciò che in tal modo è stato connesso è considerato come dato per la connessione.[146]

Passiamo ora a considerare la distinzione tra uguale e differente, responsabile della differenza tra forme algebriche (numeri e grandezze intensive) e forme combinatorie (combinazioni e grandezze estensive).

> Ogni particolare diviene tale per mezzo del concetto di *differente*, con cui è coordinato ad un altro particolare e per mezzo del concetto dell'*uguale*, con cui è subordinato insieme all'altro particolare allo stesso Generale. Possiamo chiamare forma *algebrica* ciò che è divenuto dall'uguale, *forma combinatoria* ciò che è divenuto dal differente.[147]

[145] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 4, in Graßmann (1844), pp. 24-5. Cfr. l'appendice 7.7, p. 393.
[146] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 4, in Graßmann (1844), p. 25. Cfr. l'appendice 7.7, p. 393.
[147] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 5, in Graßmann (1844), p. 25. Cfr. l'appendice 7.7, p. 394.

Il concetto generale di forma è, come si è visto, determinato da una legge generativa non ulteriormente specificata e da un elemento iniziale di cui analogamente non è specificata alcuna caratteristica. Se l'opposizione tra continuo e discreto permette di distinguere due diverse tipologie di leggi generative, ora l'opposizione tra uguale e differente permette di distinguere un'altra caratteristica della forma: il rapporto tra ciascun elemento e gli altri elementi e tra ciascun elemento e la totalità della serie. Ciascun elemento infatti diviene un particolare per mezzo del concetto di differente che lo separa, lo distingue dagli altri elementi.[148] Se una forma è ottenuta tenendo ferma ogni volta la differenza tra il nuovo elemento e l'elemento che lo precede, allora la forma è combinatoria, cioè è «divenuta dal differente». Tuttavia nella generazione della forma si può invece considerare ciascun elemento come uguale agli altri elementi della serie in quanto tutti sono subordinati «allo stesso Generale», cioè in quanto tutti hanno una caratteristica simile che li accomuna, in quanto tutti cadono sotto lo stesso genere. Se dunque una forma è ottenuta tenendo ferma questa uguaglianza reciproca degli elementi (determinata da un generale sotto cui tutti cadono), allora la forma è algebrica, cioè è «divenuta dall'uguale».

Come già l'opposizione tra continuo e discreto, così anche l'opposizione tra uguale e differente è fluttuante. Infatti i due concetti si presuppongono reciprocamente e dunque non si può mai stabilire l'uguaglianza di due elementi senza considerarli in qualche modo come separati e dunque come differenti; analogamente due elementi differenti in quanto appartengono alla stessa serie sono comunque anche uguali in quanto parte della stessa totalità e dunque connessi tra loro nella serie generata. Ancora una volta il fatto che l'opposizione sia fluttuante fa sì che sia il pensiero a tener fermo ora l'uno ora l'altro momento, ora l'uguaglianza ora la diversità: i due momenti sono sempre connessi.

> L'opposizione dell'uguale e del differente è, analogamente, fluttuante. L'uguale è differente già in quanto l'uno è come separato dall'altro che è uguale ad esso (e senza questa separazione sarebbe soltanto uno e dunque non uguale); il differente è uguale già in quanto entrambi sono connessi dall'attività che si riferisce ad entrambi, quindi entrambi sono una cosa connessa. Perciò i due membri non si confondono affatto l'uno nell'altro, in modo da dover applicare una misura con cui determinare quanto di uguale e quanto di differente è stato posto tra due rappresentazioni; ma anche se il differente è già sempre attaccato in un qualche modo all'uguale e viceversa, tuttavia ogni volta solo uno

[148]Si noti che ancora non è determinata, specificata la differenza; si tratta per ora di una vuota differenza.

> forma il momento che si considera, mentre l'altro appare solo come il fondamento, che si deve presupporre, del primo.[149]

E proprio perché l'opposizione tra continuo e discreto così come l'opposizione tra uguale e differente sono fluttuanti, le forme che costituiscono gli oggetti delle singole discipline matematiche non sono in definitiva rigidamente separate le une dalle altre. I numeri sono forme uguali e discrete, le combinazioni forme differenti e discrete, le grandezze intensive forme uguali e continue, le grandezze estensive forme differenti e continue. Tuttavia poiché ciò che è discreto può anche essere considerato come continuo, e ciò che è uguale può anche essere considerato come diverso, la divisione della matematica in sottodiscipline per mezzo dei modi di generazione non si riduce ad una suddivisione rigida delle cose in quattro categorie. Gli oggetti matematici propri di ciascuna disciplina sono soltanto il riflesso del modo in cui sono stati generati, costruiti.

> Dall'intersecarsi di queste due opposizioni, di cui la prima si riferisce al tipo di generazione e la seconda agli elementi della generazione, risultano i quattro generi di forme e i corrispondenti rami della Teoria delle forme. In primo luogo la forma discreta si separa in numero e combinazione (legamento). *Numero* è la forma algebrica discreta, cioè l'unione di ciò che è posto come uguale; *combinazione* è la forma combinatoria discreta, cioè è l'unione di ciò che è posto come differente. Le scienze del discreto sono dunque la *Teoria dei numeri* e la *Teoria combinatoria* (Teoria del collegamento). [...] Analogamente la forma continua o grandezza si separa poi in forma algebrica continua o *grandezza intensiva* e in forma combinatoria continua o *grandezza estensiva*. La grandezza intensiva è ciò che è divenuto per mezzo della generazione dell'uguale; la grandezza estensiva o *estensione* è ciò che è divenuto per mezzo della generazione del differente. La prima costituisce, in quanto grandezza variabile, il fondamento della Teoria delle funzioni, del Calcolo differenziale e integrale; la seconda costituisce il fondamento della Teoria dell'estensione.[150]

Graßmann non manca di osservare come l'uso simbolico in matematica rifletta fedelmente la distinzione tra forme uguali e differenti. I numeri sono forme uguali e discrete e infatti una tipica rappresentazione simbolica di un numero è la seguente: $3 = 1 + 1 + 1$, ove cioè uno stesso segno (simbolo dell'unità) rappresenta ciascuno degli elementi, che infatti nel numero sono

[149] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 5, in Graßmann (1844), p. 25. Cfr. l'appendice 7.7, p. 394.

[150] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, §§ 6-7, in Graßmann (1844), pp. 24-6. Cfr. l'appendice 7.7, p. 395 ss.

considerati come uguali. Al contrario nella forma combinatoria gli elementi sono rappresentati con lettere diverse proprio per ricordare che essi sono considerati come tra loro differenti: si consideri ad esempio la combinazione $\binom{a\,b\,c}{b\,c\,a}$. Analogamente in una grandezza estesa, ciascun elemento è indicato con un diverso simbolo, proprio per indicare la differenza: così ad esempio si indica un segmento con AB ove A e B sono lettere diverse che indicano l'elemento iniziale e l'elemento finale.

> Mi limito soltanto ad osservare ancora come questa opposizione tra le due forme sia espressa in modo del tutto preciso dalla differente designazione dei loro elementi, in quanto ciò che è connesso a formare il numero è designato da uno ed uno stesso segno (1), mentre ciò che è connesso a formare la combinazione è designato con diversi segni (le lettere), peraltro del tutto arbitrarie. [...] Anche in questo caso la differenza che abbiamo formulato si vede bene nella designazione; infatti nella grandezza intensiva che costituisce l'oggetto della Teoria delle funzioni non si distinguono gli elementi attraverso segni particolari ma dove compaiono segni particolari si designa con ciò l'intera grandezza variabile. Invece nella grandezza estesa o nella sua presentazione concreta, la linea, i diversi elementi sono designati con segni diversi (le lettere) proprio come nella Teoria combinatoria.[151]

Nelle grandezze estensive l'elemento iniziale dal quale prende le mosse la generazione dà origine a elementi sempre diversi, passa cioè attraverso successivi stati differenti: il dominio (il sistema) della grandezza estensiva non è altro che l'intera serie di questi diversi stati, la totalità che li racchiude. Ad esempio per grandezza estensiva si può considerare ciò che in geometria è rappresentato dalla linea limitata e per dominio della grandezza estensiva la retta.[152] Nella grandezza estensiva

> è essenziale la separazione degli elementi e un tener fermo ciascuno di essi come qualcosa di separato; l'elemento generatore appare in essa come qualcosa che varia sempre, cioè che passa attraverso una diversità di stati e proprio la totalità dei diversi stati forma il dominio della grandezza estesa [Ausdehnungsgröße].[153] [...] Come esempio

[151]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, §§ 6-7, in Graßmann (1844), pp. 26-7. Cfr. l'appendice 7.7, p. 395 ss..

[152]Analizzeremo in dettaglio questi concetti nel capitolo 5.

[153]Traduciamo 'Ausdehnungsgröße' e 'Ausdehnungsform' rispettivamente con 'grandezza estesa' e 'forma estesa' anziché con grandezza estensiva, benché il significato sia pressoché lo stesso, per fedeltà al testo: Graßmann infatti usa anche l'espressione 'extensive Größe' (in questa stessa Introduzione, B, § 7), che ovviamente traduciamo con 'grandezza estensiva'.

> di grandezza estensiva la cosa migliore è scegliere la linea limitata (tratto[154]) i cui elementi sono essenzialmente separati e proprio per questo costituiscono la linea come estensione.[155]

Nelle grandezze intensive invece dall'elemento iniziale si generano elementi uguali, cioè elementi che non si presentano come esterni gli uni agli altri, come separati. Essi si presentano piuttosto come un grado di accrescimento e la grandezza intensiva si presenta come una quantità. Ad esempio possiamo considerare come grandezza intensiva la velocità di un corpo in un dato punto dello spazio.

> Nella grandezza intensiva invece la generazione di essa produce una serie continua di stati uguali a se stessi, la cui quantità [Quantität] è proprio la grandezza intensiva. Come esempio di grandezza intensiva possiamo scegliere un qualche punto dotato di una certa forza: qui gli elementi non si alienano ma si presentano solo nell'accrescimento formando così un determinato livello di accrescimento.[156]

Poiché l'opposizione tra continuo e discreto, tra uguale e differente è fluttuante, un qualunque insieme di cose particolari può essere concepito sia come numero sia come combinazione: la differenza dipende dal modo in cui lo consideriamo. Come ha mostrato convincentemente Lewis e come si è accennato nel § 4.2, in questa concezione dialettica degli opposti si può scorgere l'influenza della filosofia di Schleiermacher.[157] La dialettica di Schleiermacher non risolve l'opposizione togliendola nella sintesi: l'essenza della realtà è rappresentata dalla tensione tra elementi contrastanti, senza risoluzione. Analogamente in Graßmann ciascun opposto dipende dall'altro e l'opposizione è usata per determinare le leggi generative e gli elementi ai quali si

[154]Traduciamo 'Strecke', generalmente tradotto con segmento, con 'tratto' sia per mantenere una differenza rispetto alla sua applicazione geometrica sia perché il termine tedesco 'Strecke' significa propriamente 'tratto esteso', 'tratto percorso', cioè da un lato rinvia all'attività del tracciare un segmento, dall'altro rinvia al movimento da un punto ad un altro nello spazio: 'strecken' infatti ha in tedesco sia il significato transitivo di tracciare, estendere, distendere, sia il significato riflessivo di estendersi, allungarsi.

[155]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 7, in Graßmann (1844), p. 27. Cfr. l'appendice 7.7, p. 395.

[156]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 7, in Graßmann (1844), p. 27. Cfr. l'appendice 7.7, p. 395.

[157]Cfr. Lewis (1977). Recentemente sono state mosse alcune critiche all'idea che l'unico referente del pensiero filosofico di Graßmann sia stato Schleiermacher. In un interessante articolo sulla collaborazione tra i fratelli Graßmann Schubring suggerisce ad esempio che la filosofia della matematica di Fries abbia avuto un'influenza altrettanto significativa. Tale influenza sarebbe storicamente giustificata dal fatto che Justus Graßmann discusse e criticò nei suoi lavori alcune affermazioni di Fries tratte dall'opera del 1822 *Die mathematische Naturphilosophie*. Cfr. Schubring (1996d).

applicano. Se consideriamo gli elementi come uguali avremo un numero, se li consideriamo come differenti avremo una combinazione. Analogamente una qualunque grandezza può essere concepita o come grandezza intensiva o come grandezza estensiva: se consideriamo gli elementi come uguali avremo la grandezza intensiva, se li consideriamo come diversi avremo la grandezza estensiva.

> Non c'è nemmeno bisogno di menzionare il fatto che ciascun insieme di cose (particolarità) può essere concepito altrettanto bene come numero che come combinazione a seconda del differente modo di considerarlo. [...] Ed è anche chiaro come ciascuna grandezza reale [reale Größe] possa essere vista in un duplice modo, come intensiva e come estensiva; e cioè la linea è vista anch'essa come grandezza intensiva se non si tiene conto del modo in cui i suoi elementi sono separati e se si considera soltanto la quantità [Quantität] degli elementi; e analogamente un punto dotato di forza può essere pensato come grandezza estensiva se la forza è rappresentata sotto forma di linea.[158]

In conclusione, per forma occorre intendere ciò che è prodotto, generato, costruito dal pensiero, ciò che è divenuto per mezzo del pensiero in uno dei quattro seguenti modi:

1. in modo discreto generando elementi uguali: forma algebrica
2. in modo discreto generando elementi differenti: forma combinatoria
3. in modo continuo generando elementi uguali: grandezza intensiva
4. in modo continuo generando elementi differenti: grandezza estensiva.

La distinzione tra due diversi tipi di generazione (tra due diverse leggi generative), continua e discreta, e la distinzione tra due diverse caratteristiche degli elementi, che possono essere considerati o come uguali o come differenti, permette di individuare quattro tipi diversi di prodotti della generazione. In base a tali diversi prodotti del pensiero la matematica è divisa in quattro discipline. Rispetto al concetto tradizionale di grandezza che abbiamo tratteggiato nei capitoli 2 e 3 vi sono elementi comuni (l'attenzione all'uguale e al diverso), la distinzione tra continuità e discretezza. Tuttavia la differenza radicale rispetto alle definizioni precedenti risiede proprio nel collegamento tra le diverse forme e le diverse leggi con cui esse sono state generate. Sotto questo punto di vista Graßmann porta a compimento un processo che era già

[158] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, §§ 6-7, in Graßmann (1844), pp. 26-7. Cfr. l'appendice 7.7, p. 395 ss.

presente in Descartes e in Leibniz: la matematica diventa progressivamente scienza di relazioni. Le leggi generative infatti sono le regole della relazione tra gli elementi di ciascuna serie e dunque sono la regolarità delle serie stesse, ciò che permette di distinguerle le une dalle altre.

La nuova definizione

Alla luce di questa suddivisione della matematica per mezzo dei modi di generazione delle forme meglio si comprendono le critiche di Graßmann alla definizione tradizionale di matematica come scienza delle grandezze. Se per grandezza si intendono le figure geometriche, allora il termine designa ciò che anche in Graßmann prende il nome di grandezza e cioè le forme continue: intensive se gli elementi sono generati per mezzo dell'uguale, estensive se gli elementi sono generati per mezzo del diverso. La definizione di matematica come scienza delle grandezze è allora troppo ristretta, perché comprende soltanto le discipline che si occupano delle forme continue mentre esclude l'aritmetica e l'analisi combinatoria.

> Il nome Teoria delle grandezze [Grössenlehre] non è appropriato alla matematica nel suo complesso, perché non trova applicazione ad un ramo essenziale della matematica, e cioè alla Teoria combinatoria, e inoltre trova applicazione solo in senso improprio all'Aritmetica.[159]

Abbiamo visto infatti che Graßmann non considera il numero come una forma generata in modo continuo allo stesso modo delle grandezze: Graßmann non assume la definizione newtoniana di numero come rapporto tra grandezze ma considera il numero come una forma discreta. Per risolvere l'esigenza di generalità di cui abbiamo a lungo parlato nei capitoli 2 e 3 Graßmann non modifica la definizione tradizionale del concetto di numero (come ha fatto invece Newton per introdurre il concetto di numero irrazionale) ma modifica la definizione della matematica, ampliandola per mezzo del concetto di forma, che racchiude in sé sia i numeri sia le grandezze, perché comprende sia ciò che è generato in modo discreto sia ciò che è generato in modo continuo. Ciò che accomuna numeri e grandezze e che giustifica dunque la determinazione di un unico concetto che comprenda entrambi è la regolarità della loro generazione da un elemento iniziale.

Se pure numeri e grandezze sono entrambe forme, non bisogna tuttavia misconoscere la fondamentale differenza che sussiste fra di essi e che è testimoniata anche dalla lingua stessa con cui ne parliamo:

[159]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, 3, nota, in Graßmann (1844), p. 23. Si veda l'appendice, § 7.7, p. 392.

> Il concetto di grandezza [Grösse] è sostituito in aritmetica da quello di numero [Anzahl]; la lingua distingue infatti accuratamente aumentare [vermehren] e diminuire [vermindern], che appartengono al numero, da ingrandire [vergrössern] e rimpicciolire [verkleinern], che appartengono alla grandezza.[160]

In questo passo Graßmann distingue tra grandezza e numero anche per mezzo dello studio della espressione linguistica dei termini riferiti all'uno e all'altro: di una *grand*-ezza [*Größ*-e] ma non di un numero [*Zahl*] si dice che diventa più grande [*groß*] o più piccolo [*klein*], che in-*grand*-isce [ver-*größ*-ern] o rim-*picciol*-isce [ver-*klein*-ern]. Le cose numerate invece possono diventare non più grandi o più piccole ma *di più* [*mehr*] o *di meno* [*minder*], cioè possono aumentare [ver-*mehr*-en] o di-*minu*-ire [ver-*minder*-n].

Il concetto di grandezza che Graßmann sta criticando è il concetto di cui abbiamo rintracciato l'origine in Descartes e che, dopo essere stato formulato in tedesco da Wolff, è divenuto tradizionale nei testi matematici di lingua tedesca. Tra i critici della definizione wolfiana ricordiamo Hegel, che nella *Scienza della logica* volle mostrare la circolarità della definizione di grandezza come ciò che è suscettibile di aumento o di diminuzione.

> Ordinariamente si definisce una grandezza come qualcosa che si può *aumentare* [vermehren] o *diminuire* [vermindern]. Ma aumentare significa rendere qualcosa più *grande* [mehr groß]: diminuire, render meno *grande* [weniger groß]. Si ha qui una *differenza* [Unterschied] della grandezza in generale da se stessa, cosicché la grandezza sarebbe quello di cui si può mutar la grandezza. La definizione si dà perciò a vedere come inetta, essendovi adoprata quella determinazione stessa, che si tratta di definire.[161]

Se ammettiamo la distinzione linguistica evidenziata da Graßmann tra 'vermehren' e 'vergrössern', la definizione di grandezza come ciò che può essere aumentato o diminuito non è più circolare. Infatti aumentare non significa render *più grande*, ma rendere *di più*, cioè più numeroso. La definizione è in effetti circolare, ma non per la ragione indicata da Hegel: le grandezze sono infatti definite per mezzo dei numeri (*vermehren*), ma i numeri, almeno da Newton in poi, sono definiti come rapporti tra grandezze.

La distinzione tra i modi di generazione delle grandezze permette di derivare, una volta ammesse almeno le coppie di concetti contrapposti continuo

[160] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, 3, nota, in Graßmann (1844), p. 23. Si veda l'appendice, § 7.7, p. 392.

[161] *Wissenschaft der Logik*, vol. I, libro 1, sez. 2: La grandezza (Quantità), nota, in Hegel (1812), I, pp. 196-7.

e discreto, uguale e differente, le differenze tra numeri e grandezze e permette di dare una definizione indipendente di entrambi. Definire in modo indipendente i numeri e le grandezze estensive è tanto più importante perché permette di fondare in maniera indipendente le discipline matematiche corrispondenti: Aritmetica e Teoria dell'estensione.

Vedremo infatti nel capitolo 5 che Graßmann introduce la teoria delle grandezze estensive senza assumere coordinate numeriche e senza presupporre l'introduzione di una metrica. Analogamente nel *Lehrbuch* Graßmann definisce il concetto di numero in modo indipendente da quello di grandezza estesa. I numeri interi sono definiti dalla legge generativa di passaggio al successore di cui si è detto sopra. I numeri razionali sono definiti come frazioni, cioè come quozienti di numeri interi (con la consueta condizione che il denominatore non sia nullo) e in modo da soddisfare alle proprietà delle operazioni di addizione e di moltiplicazione con le rispettive inverse, cioè alle stesse regole generative dei numeri interi. I numeri irrazionali non sono introdotti come rapporti di grandezze incommensurabili, ma come numeri non razionali per cui valgono (con pari estensione) le stesse regole generative che valgono per i numeri razionali, cioè numeri tra i quali si possono definire le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione ma che non sono esprimibili come rapporto di due numeri interi.[162]

C'è dunque una ragione precisa per cui Graßmann definisce la matematica come teoria delle forme anziché ampliare il concetto di grandezza fino a comprendere in sé anche gli oggetti delle altre sottodiscipline. Al di là dell'abitudine di Graßmann di introdurre sempre termini nuovi per esprimere nuovi concetti, abitudine che rende talvolta un po' straniante la lettura dei suoi testi ma che ha il significativo pregio di non indurre in errore il lettore suggerendo fuorvianti affinità con concetti già noti, e al di là della possibile influenza dell'uso del termine 'forma' nell'opera leibniziana (citata dal fratello Robert nella *Formenlehre*), Graßmann ha bisogno di un nuovo termine in grado di contenere un riferimento al modo in cui gli oggetti della matematica sono stati generati. Tale riferimento deve però essere intrinseco e non estrinseco come avveniva nella concezione tradizionale delle grandezze come oggetti da porre in relazione reciproca, da sottoporre ad operazioni. Le forme, a differenza delle grandezze, non sono cose già date tra cui si istituiscono relazioni estrinseche o che si sottopongono a operazioni. Le forme sono essenzialmente, intrinsecamente determinate dalle relazioni e dalle operazioni che le generano. Ciò che si può considerare come 'dato' è soltanto l'elemento iniziale da cui le forme sono generate. La forma è una qualunque cosa par-

[162] Per la definizione dei numeri irrazionali si veda il § 250 del *Lehrbuch der Arithmetik*, in Graßmann (1861), p. 99. Per la definizione di frazione si veda invece il § 130, *ivi*, p. 44.

ticolare che possa essere derivata secondo una legge a partire da un qualche elemento dato: tutte le sue caratteristiche devono poter essere dedotte da quella legge o regolarità con cui è divenuta. Quella legge o regolarità, che sola è garanzia della determinatezza di ciò che si genera e che determina la formazione dei termini di una serie gli uni dagli altri, è l'essenza della forma di cui parla Graßmann o — con le parole di Cassirer — ≪la generalissima prerogativa del concetto matematico in genere≫.[163]

Proprio perché la forma è caratterizzata essenzialmente dalla regolarità con cui è generata, la matematica intesa come teoria delle forme rivolge l'attenzione non tanto alle cose che via via vengono generate, quanto alla relazione con cui sono generate e dunque è in ultima istanza propriamente *scienza delle relazioni*. Questa definizione di matematica si basa non su determinate categorie di oggetti considerati come già dati, ma su dei concetti funzionali che generano le forme. Questo concetto di matematica è puramente formale in quanto è ancora sottodeterminato: solo all'interno di ciascuna disciplina i modi di generazione, le regolarità assumono connotazioni sufficientemente specifiche da determinare tutte le caratteristiche delle forme coinvolte. Già abbiamo accennato alla legge generativa dei numeri; vedremo nel capitolo 5 un altro esempio del procedimento con cui Graßmann riempie di contenuto il concetto di forma nell'analisi della teoria delle grandezze estensive.

Una seconda ragione per la riflessione sul concetto di matematica e per la determinazione di una nuova definizione di essa riguarda la creazione di una nuova disciplina matematica: la *Teoria dell'estensione* e la conseguente esclusione di una disciplina tradizionale: la *Geometria*. Come spiegare che la matematica si occupa delle grandezze ma non comprende la geometria, se il termine stesso 'grandezza', pur nelle variazioni cui è stato soggetto nei vari autori e nelle varie epoche, è intimamente legato all'origine geometrica? Il significato primario del termine è, come si è visto, quello di lunghezza, area, volume di figure geometriche. Affronteremo nel capitolo 6 quest'ultimo problema, ponendo in evidenza le analogie e le differenze tra il concetto geometrico di grandezza e il nuovo concetto astratto di grandezza estesa o estensione proposto da Graßmann. Solo dopo aver analizzato in dettaglio lo sviluppo di questa nuova disciplina (capitolo 5) sarà infatti possibile affrontare il tema del rapporto con la geometria.

[163]Cfr. Cassirer (1910), pp. 134-5. Cfr. anche il seguente passo che meglio chiarisce come Cassirer intenda il concetto matematico: ≪Diciamo concettualmente compresa e ordinata una molteplicità offerta dall'intuizione allorché i suoi termini non stanno l'uno accanto all'altro senza rapporti, ma derivano in successione necessaria da un determinato iniziale secondo una fondamentale relazione generatrice. L'identità di questa relazione generatrice, che viene mantenuta pur nel mutare dei singoli contenuti, è ciò che costituisce la forma specifica del concetto.≫ Cfr. Cassirer (1910), p. 25.

4.4 La Teoria generale delle forme

I quattro diversi modi di generazione sopra considerati determinano la partizione della matematica in quattro discipline: aritmetica, analisi combinatoria, teoria delle funzioni, teoria dell'estensione. In verità Graßmann premette a tutte queste discipline matematiche una quinta parte che non è una disciplina a sé stante ma racchiude alcune verità che ricorrono in tutte le discipline citate. Questa parte, cui Graßmann dà il nome di *Teoria generale delle forme* [Allgemeine Theorie der Formen], esamina alcune proprietà generali delle forme che dipendono soltanto dalle caratteristiche delle leggi con cui sono generate (non si fa mai menzione, invece, del tipo di elementi cui le leggi sono applicate).

> Per Teoria generale delle forme intendiamo quella serie di verità che si riferiscono nello stesso modo a tutti i rami della matematica e perciò presuppongono soltanto i concetti generali di uguaglianza, differenza, connessione [Verknüpfung] e separazione [Sonderung]. Perciò occorre premettere la teoria generale delle forme a tutti i rami speciali della matematica; ma poiché quel ramo generale non esiste [vorhanden ist] ancora come tale e noi tuttavia non possiamo ometterlo senza involgerci in inutili lungaggini, non resta altro da fare che svilupparlo qui per quel tanto che è necessario alla nostra scienza.[164]

La *Teoria generale delle forme* non si presenta come un tentativo di fondare le discipline matematiche quanto come un modo per caratterizzare e nominare determinate leggi che ricorrono in tutta la matematica. Essa è essenzialmente fondata sui concetti di uguaglianza e differenza che, come si è detto sopra, servono a distinguere forme algebriche e forme combinatorie e sui concetti di connessione e separazione, che servono a spiegare gli atti di unione e separazione con cui il pensiero genera le forme. Il concetto di matematica come *Teoria delle forme* è puramente formale perché le forme sono determinate soltanto per mezzo di una non meglio specificata legge generativa e di un non meglio determinato elemento iniziale; anche la Teoria generale delle forme è formale perché riguarda solo la relazione di uguaglianza in generale (indipendentemente dalla determinazione del tipo di forme) e le operazioni di connessione e di separazione con le loro possibili proprietà. La *Teoria generale delle forme* presenta dunque una sorta di schema delle proprietà che le leggi generative potrebbero avere: le proprietà di ciascuna legge però possono essere determinate solo all'interno delle singole discipline matematiche.

[164] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 8, in Graßmann (1844), p. 28.

Uguaglianza

> Occorre qui stabilire dapprima il concetto di uguaglianza e differenza. Poiché necessariamente l'uguale deve apparire come diverso e il diverso anche come uguale, benché sotto un diverso aspetto, ad una considerazione superficiale appare necessario stabilire diverse relazioni di uguaglianza e differenza; così per esempio nel confronto di due linee limitate può essere espressa l'uguaglianza della direzione o della lunghezza, o della direzione e lunghezza, o della direzione e della posizione, ecc. e in altre cose da confrontare apparirebbero a loro volta altre relazioni di uguaglianza. Ma già il fatto che queste relazioni mutino in rapporto alla qualità delle cose da confrontare, fornisce la prova che queste relazioni non appartengono al concetto stesso di uguaglianza, ma agli oggetti ai quali quel concetto stesso di uguaglianza è applicato. Infatti di due tratti lunghi uguali non possiamo dire ad esempio che sono uguali in se stessi, ma soltanto che le loro lunghezze sono uguali e sono allora proprio queste lunghezze a stare anche nella completa relazione di uguaglianza. In questo modo abbiamo salvato la semplicità propria del concetto di uguaglianza e possiamo determinarlo nel modo seguente: uguale è ciò di cui si può enunciare sempre la stessa cosa, ciò che in ogni giudizio può essere reciprocamente sostituito.[a][165]
>
> [a]Questa non intende essere una determinazione filosofica del concetto, ma soltanto un chiarimento sul termine, in modo che non si intenda con esso qualcosa di diverso. La determinazione filosofica del concetto dovrebbe piuttosto afferrare l'opposizione di uguale e differente nel suo fluire e nella sua rigida delimitazione, cosa per la quale sarebbe necessario un apparato considerevole di determinazioni concettuali, che qui non c'entrano.

Il primo concetto che Graßmann analizza è l'uguaglianza: uguale e diverso costituiscono una coppia concettuale inscindibile e proprio per questo occorre spiegare come è possibile che due cose siano contemporaneamente uguali e diverse. Perché il rapporto tra uguale e diverso sia un rapporto fluttuante di opposizione, tale cioè che, come si è visto nel paragrafo precedente, ciò che è uguale sia anche sotto qualche rispetto diverso e viceversa, occorre, almeno a prima vista, che vi siano diverse relazioni di uguaglianza: ad esempio uguaglianza rispetto alla posizione, uguaglianza di direzione, uguaglianza di grandezza, ecc. Consideriamo infatti due segmenti orientati AB e CD: essi potranno avere la stessa lunghezza (essere uguali rispetto alla lunghezza) o avere la stessa direzione, cioè appartenere alla stessa retta o a due rette parallele (essere uguali rispetto alla direzione) o avere la stessa posizione, cioè coincidere. Eppure la relazione di uguaglianza è unica, perché è un'identità: Graßmann infatti ammette il concetto leibniziano di uguaglianza

[165]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 8, in Graßmann (1844), p. 28.

come *sostitubilità salva veritate*, che implica che due cose siano uguali quando sono identiche, cioè quando hanno tutte le stesse qualità e sono pertanto indiscernibili. Come spiegare questa apparente contraddizione?

Due segmenti propriamente non sono mai uguali, ma sono uguali le rispettive lunghezze o le rispettive direzioni o le rispettive posizioni. Ma come stabilire le qualità rilevanti che due cose devono avere uguali per parlare di uguaglianza? Se non si tratta di tutte le proprietà delle cose, di quali proprietà si tratta? Ciò che determina l'uguaglianza di due cose sono i caratteri che dipendono dalla legge generativa con cui le cose sono state generate. Come abbiamo già accennato nel paragrafo precedente, due cose sono uguali se possono essere sostituite in ognuna delle operazioni cui sono soggette, senza variazione del risultato dell'operazione. Ciò avviene quando entrambe le cose sono ottenute da cose uguali per variazioni uguali: ad esempio in aritmetica 3 e $1 + 2$ sono uguali perché entrambi possono essere ottenuti dalla ripetizione per tre volte dell'unità $1 + 1 + 1$. Proprio questa è la caratteristica fondamentale dell'uguaglianza: cose generate da cose uguali sono uguali.

> È evidente che fin qui si è anche detto che quando due forme sono uguali ad una terza, allora esse sono anche uguali l'una all'altra e che cose generate da cose uguali nello stesso modo sono uguali.[166]

Le forme sono infatti determinate essenzialmente dalla legge con cui sono generate e dunque sono uguali se sono generate con la stessa legge dallo stesso elemento iniziale. Questa caratteristica delle forme può essere utilmente confrontata con il concetto di uguaglianza espresso nelle nozioni comuni euclidee: essa appare come una formulazione generale delle nozioni II,III,V,VI.[167] Infatti qui non si specifica ancora quale sia il tipo di operazione con cui la totalità è stata generata, ma si indica soltanto che se la legge è la stessa e l'elemento iniziale pure, allora le forme ottenute sono uguali.

Negli *Elementi* l'uguaglianza di due cose è definita nelle nozioni comuni: due cose sono uguali se hanno la stessa quantità, la stessa grandezza. Usiamo $\sim$ come simbolo per ≪essere lo stesso≫, usiamo $\overline{a}$ per indicare la grandezza di una cosa a e $\equiv$ come simbolo per l'uguaglianza tra cose. Diciamo che a è uguale a b se e solo se la grandezza di a è la stessa di b.
In simboli:

$$a \equiv b \quad sse \quad \overline{a} \sim \overline{b}$$

Se vogliamo invece dire la stessa cosa con una notazione consueta, usando cioè il simbolo $=$ per l'identità e il simbolo $|a|$ per indicare la grandezza in valore assoluto di a, dobbiamo usare un simbolo $=_g$ per denotare l'uguaglianza fra

[166]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Einleitung*, § 8, in Graßmann (1844), p. 28.
[167]Cfr. il § 2.1.4, p. 71.

cose, perché essa non è un'identità:

$$a =_g b \quad \text{sse} \quad |a| = |b|$$

Per Leibniz due cose sono uguali se sono sempre sostituibili l'una all'altra nello stesso contesto. Perché due cose siano uguali non basta che esse abbiano la stessa grandezza: esse devono avere uguali tutte le caratteristiche. Solo a questa condizione posso infatti predicare dell'una tutto ciò che predico dell'altra; usando il simbolismo precedentemente introdotto e denotando con Q un qualunque predicato delle cose:

$$a \equiv b \quad \text{se e solo se posso sostituire} \quad b \quad \text{ad} \quad a \quad \text{in qualunque predicato} \quad Q.$$

Se vogliamo usare il simbolo = per l'identità, non occorre un diverso simbolo per indicare l'uguaglianza tra le cose: essa è infatti proprio un'identità.

$$a = b \quad \text{sse} \quad \forall Q \quad [Qa \quad \leftrightarrow \quad Qb]$$

Mentre in Euclide l'identità era definita come essere la stessa sostanza, come essere uno, in Leibniz essa è definita per mezzo di un'uguaglianza generalizzata, cioè per mezzo di un'uguaglianza che non riguarda soltanto la grandezza o quantità ma tutte le qualità di cui godono le cose. La definizione di identità di Leibniz è infatti ottenuta per mezzo del *principio dell'indiscernibilità degli identici* unito al *principio dell'identità degli indiscernibili*. Il primo afferma che se due cose sono identiche, allora non possono avere proprietà diverse e quindi non possono essere distinte; il secondo afferma che se due cose non possono essere distinte in base a diverse proprietà, allora esse sono identiche. In simboli, rispettivamente:

$$\forall x \forall y \, [(x = y) \; \rightarrow \; \forall P \, (Px \; \leftrightarrow \; Py)]$$
$$\forall x \forall y \, [\forall P \, (Px \; \leftrightarrow \; Py) \; \rightarrow \; (x = y)]$$

Facciamo un esempio: perché due segmenti siano uguali nel caso euclideo è sufficiente che essi abbiano la stessa grandezza ovvero, diremmo oggi, la stessa lunghezza. Perché due segmenti siano uguali secondo la definizione di Leibniz, essi devono essere assolutamente identici, cioè uguali rispetto a qualunque caratteristica di essi che siamo in grado di confrontare: la lunghezza, la direzione, il verso, la posizione. Dunque un segmento è identico solo a se stesso: infatti due segmenti che hanno stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso, possono ancora essere distinti per una differenza di posizione. Anche se una differenza di posizione è una qualità relazionale delle cose, Leibniz sembra ritenere che essa presupponga sempre anche una differenza intrinseca tra le cose stesse e dunque due cose distinte rispetto alla posizione non sono mai assolutamente uguali o identiche. Infatti per il principio di ragion sufficiente se sussiste una diversità di posizione nello spazio di due cose deve esserci anche una ragione, un motivo intrinseco a ciascuna delle due cose che ne determina la differenza.

La relazione di uguaglianza euclidea è un'applicazione di quella che oggi chiamiamo relazione di equivalenza, ossia una particolare relazione binaria che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva, mentre la relazione di uguaglianza di cui parla Leibniz corrisponde ad uno soltanto dei tanti tipi di relazione di equivalenza e cioè all'identità. Indichiamo con R una generica relazione di equivalenza, con $\equiv$ la relazione di uguaglianza rispetto alla grandezza di Euclide e con $=$ la relazione di identità:

$$\begin{array}{rcccl} R: & X & \longrightarrow & X & \\ & x & \longmapsto & y & \in [x]_R \\ & & & & \\ \equiv: & X & \longrightarrow & X & \\ & x & \longmapsto & y & \in [x]_g \\ & & & & \\ =: & X & \longrightarrow & X & \\ & x & \longmapsto & x & \in \{x\} \end{array}$$

Nel linguaggio della teoria matematica degli insiemi che sopra abbiamo adottato, risulta che una generica relazione di equivalenza può associare un elemento x a qualunque altro elemento dell'insieme che stia in relazione con esso, mentre l'identità manda ciascun elemento di un insieme soltanto in se stesso: dunque l'immagine della relazione di equivalenza è in generale un insieme di elementi, quella che si chiama classe di equivalenza appunto, mentre l'immagine della relazione di identità è un insieme singoletto. In altre parole, l'equivalenza non identica permette di considerare certi oggetti contemporaneamente per il fatto che sono uguali e per il fatto che sono diversi: sono uguali rispetto ad una relazione ma diversi in quanto non identici; dunque fornisce la possibilità di confrontare gli oggetti e di dire se essi sono uguali o diversi. L'identità invece si limita ad associare ciascun oggetto a se stesso e dunque propriamente non permette un confronto tra gli oggetti, perché essi sono tutti indifferentemente ciascuno uguale a se stesso e diverso dagli altri.

La nozione di uguaglianza di Graßmann sta a metà tra la nozione leibniziana sopra tratteggiata (l'uguaglianza è un'identità) e la nozione euclidea, perché l'identità non sussiste tra le cose ma tra alcune caratteristiche di esse. Le proprietà delle cose che stanno in relazione di uguaglianza (identità) sono determinate in modo preciso: poiché le forme non sono datità di cui occorre considerare tutte le caratteristiche ma prodotti di un atto del pensiero che le genera secondo una certa legge, saranno utili alla determinazione dell'uguaglianza di due forme tutte e solo le caratteristiche legate al modo in cui sono state generate.

Connessione e separazione

La connessione è l'atto con cui il pensiero congiunge due forme, mentre la separazione è l'atto con cui il pensiero separa le forme. Quest'ultimo è considerato come atto inverso al precedente, cioè come una separazione delle forme precedentemente connesse con un atto di pensiero. La connessione riguarda dapprima due elementi soltanto, detti membri della connessione, ma poiché il risultato può a sua volta essere congiunto con un altro membro, la connessione è estesa a un numero qualsivoglia di membri.[168] Il concetto di connessione è assunto come primitivo senza una vera e propria definizione: sarebbe una forzatura tentare di cogliere in Graßmann una definizione di operazione analoga a quella moderna. Quest'ultima presuppone infatti un insieme come dominio su cui è definita l'operazione (una categoria fissata di cose cui l'operazione può essere applicata), mentre nella prospettiva generale di Graßmann le proprietà della connessione e della separazione devono essere date in maniera del tutto indipendente dagli elementi cui esse sono applicate. In Graßmann mancano infatti i concetti insiemistici su cui sono fondate le strutture algebriche moderne.

Per caratterizzare in maniera più determinata questo generalissimo concetto di connessione Graßmann indaga alcune sue proprietà: in particolare studia in quali circostanze si ha una invarianza del risultato della connessione.[169] Gli unici due cambiamenti che possono avvenire senza modificare le forme stesse che vengono connesse sono il cambiamento delle parentesi e dell'ordine dei membri. Se togliendo le parentesi, il risultato di una connessione $\frown$ tra le forme a, b, c non cambia, allora tale connessione è caratterizzata dalla proprietà di *associatività* [Vereinbarkeit] dei membri.

$$a \frown (b \frown c) = a \frown b \frown c$$

Se tale caratteristica vale per almeno tre membri, Graßmann dimostra che essa vale per la connessione di un numero qualsiasi di membri.

Se in una connessione $a \frown b$ è possibile scambiare d'ordine i due membri senza variazione del risultato, allora tale connessione è caratterizzata dalla proprietà di *commutatività* [Vertauschbarkeit] dei membri.

$$a \frown b = b \frown a$$

[168] Cfr. *Allgemeine Formenlehre*, § 2, in Graßmann (1844), pp. 34-5.
[169] Cfr. *Allgemeine Formenlehre*, § 3, in Graßmann (1844), p. 35.

Se tale caratteristica vale per due membri, non è detto che valga per più di due membri. Se però una connessione commutativa è anche associativa, allora possono essere scambiati d'ordine un numero qualsivoglia di membri senza che il risultato varii. Una connessione associativa e commutativa è chiamata da Graßmann *semplice* [einfach].[170]

A questo punto Graßmann introduce il concetto di *connessione analitica*, nel significato di una connessione che scompone la connessione precedentemente data. Date a e b, la connessione che ha per risultato $a \frown b$ è sintetica. La connessione analitica (che Graßmann indica con il segno $\smile$) scompone questo risultato, di modo che, dato il risultato e uno dei membri, essa produce l'altro membro:

$$(a \frown b) \smile a = b$$

$$(a \frown b) \smile b = a$$

Graßmann dimostra quindi l'usuale regola algebrica dei segni in base alla quale, se una connessione è semplice (associativa e commutativa), è indifferente in che ordine si svolgono la connessione analitica e la connessione sintetica; le parentesi possono essere introdotte senza cambio di segno se la connessione che si pone tra parentesi è sintetica, con cambio di segno se è analitica.[171] Ad esempio:

$$a \frown b \smile c = a \smile c \frown b$$

$$a \smile b \frown c = a \smile (b \smile c)$$

$$a \frown b \smile c = a \frown (b \smile c).$$

Data una connessione sintetica, la connessione analitica potrebbe non avere un unico valore: se il risultato è unico, la connessione analitica è detta univoca [eindeutig].[172] Questa caratteristica è importante perché se la connessione sintetica è semplice e la connessione analitica è univoca, la regola dei segni dimostrata per tre membri può essere estesa a un numero qualunque di membri. In questo caso l'operazione sintetica è chiamata *addizione* e l'operazione analitica corrispondente è chiamata *sottrazione*.[173]

Per mezzo dei concetti di connessione sintetica e connessione analitica è possibile caratterizzare due tipi particolari di forme: l'una è detta *forma*

[170] Cfr. *Allgemeine Formenlehre*, §§ 3-4, in Graßmann (1844), pp. 35-6.

[171] Cfr. *Allgemeine Formenlehre*, § 5, in Graßmann (1844), pp. 37-8.

[172] Un esempio di connessione analitica non univoca è dato dalla divisione aritmetica: se il divisore è zero il risultato non è univoco, perché qualunque numero moltiplicato per zero dà zero. Si assuma $3 \cdot 0 = 0$; l'operazione analitica in cui si considera come dato il membro 0 e il risultato 0 e si cerca l'altro membro non è univoca. Infatti la divisione di zero per tre può dare come risultato qualunque numero.

[173] Cfr. *Allgemeine Formenlehre*, § 6, in Graßmann (1844), pp. 38-9.

indifferente ed è il risultato della connessione analitica di due forme uguali. Graßmann la indica con $a \smile a$ oppure, giacché essa ha sempre un unico valore, con il segno $\backsim$. L'altra è la *forma analitica* ed è il risultato della connessione analitica di una qualunque forma e della forma indifferente: $a \smile a \smile a$ oppure $\backsim\smile a$. Graßmann la indica in maniera abbreviata con $\smile a$. Se le connessioni sintetica e analitica in questione sono rispettivamente un'addizione e una sottrazione, allora la forma indifferente è detto anche *zero* e la forma analitica è detta forma *negativa*.[174]

Dopo aver considerato il rapporto tra connessione sintetica e connessione analitica, Graßmann passa a considerare il rapporto tra due connessioni sintetiche, per vedere come ciascuna possa essere determinata per mezzo dell'altra. A tal fine Graßmann osserva in quali circostanze rimane invariata un'espressione che contenga due connessioni sintetiche. Se ad esempio l'espressione $(a \frown b) \doteqdot c$ ha lo stesso valore dell'espressione $(a \doteqdot c) \frown (b \doteqdot c)$, allora la connessione indicata dal segno $\doteqdot$ è detta connessione di secondo livello. Se questa proprietà vale sia a destra sia a sinistra (Graßmann dice sia per il primo che per l'ultimo membro) e se inoltre la connessione è semplice e la sua corrispondente connessione analitica è univoca, allora la connessione di secondo livello si chiama *moltiplicazione*. Analogamente l'operazione di potenza può essere considerata come una connessione di terzo livello.[175]

Nella *Teoria generale delle forme* premessa alla *Teoria dell'estensione* Graßmann individua dunque alcune caratteristiche delle connessioni (associatività e commutatività) e alcune relazioni tra connessioni (connessione sintetica e analitica, connessione di secondo grado rispetto ad una connessione di primo grado). Queste proprietà sono le stesse che servono a caratterizzare le usuali operazioni aritmetiche e non a caso Graßmann attribuisce il nome di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione alle connessioni sopra introdotte. Tuttavia esse non coincidono con le operazioni dell'aritmetica, perché sono state determinate in modo puramente formale, cioè senza tenere conto degli elementi cui si applicano. A queste connessioni può corrispondere un concetto reale solo quando si tiene conto anche della natura delle cose che si devono connettere.[176] Già alla fine del § 4 Graßmann osservava che senza considerare il tipo di forme coinvolte nella connessione non è possibile fornirne una caratterizzazione completa: questa affermazione conferma l'ipotesi

[174]Cfr. *Allgemeine Formenlehre*, § 7, in Graßmann (1844), pp. 39-40.

[175]Cfr. *Allgemeine Formenlehre*, § 9, in Graßmann (1844), pp. 41-42.

[176]≪Auch den allgemeinen Begriff dieser Multiplikation haben wir somit formell bestimmt; diesem formellen Begriffe muss, wenn die Natur der zu verknüpfenden Grössen gegeben ist, ein realer Begriff entsprechen, welcher die Erzeugungsweise des Produkts vermittelst der Faktoren aussagt.≫ Cfr. *Allgemeine Formenlehre*, § 12, in Graßmann (1844), p. 44.

che la *Teoria generale delle forme* non possa e non debba essere considerata come uno studio di particolari strutture algebriche. Infatti fin dall'inizio Graßmann afferma esplicitamente che in questa parte non sono in questione gli elementi ai quali le operazioni o connessioni si applicano.

Pur senza sminuire la portata generalissima di questi risultati, che mostrano le proprietà astratte principali delle operazioni in maniera del tutto indipendente dalle grandezze cui possono essere applicate, è bene tuttavia ricordare che in Graßmann non vi è un insieme predeterminato su cui l'operazione è definita. Manca l'idea di struttura composta da un insieme e da certe operazioni definite su di esso e tuttavia sono presenti molti dei concetti che oggi servono a costruire le strutture algebriche: due operazioni associative e commutative, elemento neutro, inverso, distributività. È dunque importante ricordare che la *Teoria generale delle forme* non introduce o definisce dei nuovi oggetti matematici (le strutture) ma semplicemente presenta alcuni principi metodologici per individuare le caratteristiche di tutte le leggi generative. Vedremo nel prossimo capitolo come questi principi si applichino allo studio delle connessioni tra grandezze estensive.

Whitehead nell'Introduzione all'opera *A Treatise on Universal Algebra* assume come obiettivo ideale la costruzione di un calcolo che faciliti il ragionamento in connessione con ogni ambito del pensiero, in modo che ogni pensiero che non sia filosofia o ragionamento induttivo o letteratura possa essere matematica sviluppata per mezzo di un calcolo.[177] In quest'opera Whitehead si richiama proprio alla *Teoria generale delle forme* di Graßmann. Questa associazione tra Whitehead e Graßmann ha fatto sì che si parlasse di Graßmann come di un precursore dell'algebra universale.[178] L'algebra universale di Whitehead non ha però come obiettivo lo studio delle grandezze o delle forme di Graßmann bensì il confronto tra diversi sistemi simbolici.[179] Considerare Graßmann come un precursore dell'algebra universale è ancora più difficile se con questo termine si intende, come avviene oggi, lo studio delle strutture algebriche e delle loro relazioni. La teoria generale delle forme di Graßmann non è in questo senso un'algebra universale, perché 1) lo studio dei sistemi algebrici è uno studio di strutture costituite da un insieme e da operazioni sui suoi elementi, mentre in Graßmann non c'è il concetto di struttura, 2) nello studio delle strutture algebriche si considerano insiemi di entità già date, mentre in Graßmann le forme, come si è detto più volte,

[177] Cfr. Whitehead (1898), p. viii.

[178] Il termine 'algebra universale' proviene dal titolo di un articolo di Sylvester del 1884: "Lectures on the Principles of Universal Algebra", *American Journal of Mathematics*, 6 (1884).

[179] Whitehead attua questo confronto mediante un'interpretazione comune alle varie algebre, fornita dalle proprietà e dalle operazioni di un'idea generalizzata di spazio.

sono entità particolari ottenute per costruzione; 3) infine l'*Algebra universale* studia anche classi di algebre, mentre la *Teoria generale delle forme* studia le proprietà delle operazioni.

Capitolo 5

La *Teoria dell'estensione*

Nel capitolo 4 abbiamo mostrato come il concetto di 'grandezza in generale' sia stato sostituito in Graßmann dal concetto di 'forma di pensiero' nella definizione di matematica, mentre la grandezza estensiva è diventata l'oggetto di una sottodisciplina matematica: la *Teoria della grandezza estensiva o Teoria dell'estensione*. Come intende Graßmann l'oggetto particolare 'grandezza estensiva'?[1] Il suo approccio allo studio delle grandezze estensive o estese ha alcuni tratti molto particolari: innanzitutto la teoria dell'estensione è distinta dalla geometria, che ne costituisce soltanto un'applicazione; inoltre la teoria dell'estensione di Graßmann, a differenza del modo di studiare le grandezze estensive che confluisce nella teoria della misurazione (si veda ad esempio il § 3.3.2 del capitolo 3), è sviluppata nell'edizione del 1844 in modo indipendente dall'aritmetica. Il problema della misura non è centrale nella costruzione e nella fondazione della teoria dell'estensione, ma è piuttosto una questione relativa alle applicazioni. D'altra parte la teoria delle grandezze estese di Graßmann presuppone il concetto di movimento continuo, perché si basa su di essi per generare gli oggetti della *Ausdehnungslehre*. Graßmann affronta altri problemi emersi nell'analisi del concetto di grandezze: il rapporto tra l'adimensionalità dei numeri e la dimensionalità delle grandezze, la condizione di omogeneità tra grandezze, le nozioni di uguaglianza e di operazioni tra grandezze.

Se la grandezza estensiva non è più l'oggetto dell'intera matematica come tale, ma di una sua sottodisciplina, che cos'è l'estensione e quali sono le sue caratteristiche? Cercheremo una risposta a queste domande attraverso l'analisi del testo dell'*Ausdehnungslehre*, nella versione del 1844 e in quella del

[1]Conformemente all'uso di Graßmann stesso (cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, Einleitung, § 7) useremo i termini grandezza estensiva [extensive Grösse], grandezza estesa [Ausdehnungsgrösse], estensione [Ausdehnung] e forma estesa [Ausdehnungsform] come sinonimi.

1862, rivolgendo una particolare attenzione da un lato al concetto di somma tra grandezze estensive, dall'altro al prodotto tra di esse. In particolare osserveremo che la relazione tra tutto e parti viene analizzata in Graßmann da un punto di vista reale e da un punto di vista formale. Se infatti nella *Teoria generale delle forme* Graßmann ha mostrato le proprietà generali di ogni operazione che voglia presentarsi come addizione di forme, nella *Ausdehnungslehre* presenta il modo in cui tale operazione può essere intesa e definita nel caso delle grandezze estensive. In particolare osserveremo la peculiare analisi che Graßmann fa del concetto di dimensione, che emerge, benché non con questo nome, come livello o ordine o grado di un sistema, determinato dal modo in cui il sistema è stato generato.

Nella prospettiva di questa ricerca, però, lo studio del contenuto della *Teoria dell'estensione* svolge anche un altro ruolo: permette di comprendere con maggiore chiarezza il concetto stesso di forma. Se infatti la forma, considerata in generale come oggetto della matematica, contiene già un riferimento essenziale al modo in cui è stata generata, è soltanto nelle discipline specifiche della matematica che i modi di generazione possono venire determinati in modo sufficientemente preciso da caratterizzare completamente le forme. L'*Ausdehnungslehre* del 1844 contiene un'esemplificazione concreta della metodologia discussa da Graßmann nell'Introduzione: le proprietà delle grandezze estensive e delle operazioni di somma e prodotto tra di esse sono determinate in base al modo in cui le grandezze estese sono generate, e cioè per movimento continuo di un elemento (cfr. il § 4.3.1).

5.1 Addizione di grandezze estese

Per ragioni di brevità e di chiarezza indicheremo nel seguito la prima versione dell'*Ausdehnungslehre* (quella del 1844) con il simbolo $A1$ e la seconda versione dell'*Ausdehnungslehre* del 1862 con il simbolo $A2$.[2]

Nella prima parte di questo capitolo sulle grandezze estensive analizziamo la sezione teorica del primo capitolo della $A1$ e la corrispondente parte della $A2$ per confrontarle sia con la formulazione moderna della teoria degli spazi vettoriali sia con la prima assiomatizzazione di essi fornita da Peano nell'ultimo capitolo dell'opera *Calcolo geometrico secondo l'*Ausdehnungslehre *di Graßmann*.[3]

Innanzitutto occorre ricordare che il testo della *Ausdehnungslehre* redat-

[2] Graßmann stesso si serve di queste abbreviazioni per indicare rispettivamente la prima e la seconda versione della *Ausdehnungslehre*. Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Vorrede zur zweiten Auflage*, in Graßmann (1844), p. 20.

[3] Cfr. Peano (1888).

to e pubblicato da Graßmann nel 1844 era pensato come prima parte di un lavoro più ampio, che avrebbe dovuto comprendere non solo la *Teoria dell'estensione lineale*, ma anche una sezione dedicata allo sviluppo della teoria per ciò che concerne le rotazioni e gli angoli.[4] L'attributo 'lineal' con cui Graßmann caratterizza la prima parte del suo lavoro (la seconda tuttavia non verrà mai pubblicata) non va confuso con il termine moderno 'lineare' (anche se indubbiamente i risultati di Graßmann oggi apparterrebbero all'algebra lineare) ma deve essere inteso come riferentesi piuttosto a tutto ciò che può essere costruito soltanto con la riga: 'Lineal' significa infatti in tedesco 'riga, righello'. Ritorneremo più dettagliatamente su questo punto nel § 5.2.1.

Anche se non intendiamo esaminare e commentare analiticamente tutto il testo della *Ausdehnungslehre* in questa sede, riteniamo opportuno analizzare almeno la parte dell'opera che introduce il concetto di grandezza estensiva (nell'edizione del 1844 Graßmann predilige il termine 'estensione' o 'grandezza estesa' al termine 'grandezza estensiva', che invece sarà adottato uniformemente nella edizione del 1862) e le operazioni di somma e prodotto tra grandezze. Il primo capitolo introduce il concetto di spazio vettoriale e le nozioni ad esso connesse di base, dimensione, combinazione lineare e indipendenza. La nascita del concetto di spazio vettoriale e del concetto di vettore è, come accenneremo nel § 6.2, legata a problematiche diverse, dalla teoria dei determinanti e delle matrici utilizzata nella risoluzione di sistemi di equazioni lineari alla teoria delle forze in meccanica, al problema di un calcolo geometrico condotto direttamente sulle grandezze senza l'assegnazione preliminare di coordinate numeriche. I termini spazio vettoriale, vettore, base, combinazione lineare non compaiono in quanto tali nel testo della $A1$, tuttavia i concetti che essi denotano nella odierna teoria degli spazi vettoriali possono essere rintracciati, pur con alcune importanti differenze, nel testo di Graßmann.

L'interesse da un punto di vista storico-filosofico dell'opera di Graßmann consiste proprio nella presentazione 'filosofica' della materia, poco compresa e troppo spesso criticata in modo superficiale. Abbiamo visto nel § 4.3.1 che per Graßmann la scientificità dell'esposizione di una disciplina deve essere misurata sulla base di quelle che egli chiama «due serie di sviluppo», e cioè la serie deduttiva delle verità, che forma il contenuto proprio di una rappre-

[4]Il titolo completo dell'opera di Graßmann recita infatti: *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. I. Teil. Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre von Magnetismus und die Krystallonomie erläutert.*

sentazione scientifica, e la serie procedurale ovvero la forma dell'esposizione, che dovrebbe permettere di cogliere lo sviluppo della teoria con una visione d'insieme che ad ogni momento illustri la tappa successiva dello sviluppo o per mezzo di un'idea guida o per mezzo di un'analogia con un'altra scienza. Nel caso della Teoria dell'estensione presentata nella $A1$ la visione d'insieme è fornita per mezzo di un'analogia con la geometria più che per mezzo di un'idea guida astratta.

L'analogia con la geometria fa sì che Graßmann definisca il concetto di grandezza estensiva distinguendo tra grandezze di vario livello: in geometria infatti vi sono figure di diversa dimensione: linee, superfici, volumi. Tuttavia non è solo la geometria a costituire il punto di riferimento di Graßmann per la determinazione del concetto di estensione: esso infatti è legato intrinsecamente al modo di generazione della materia, come mostreremo analizzando le idee principali della *Naturphilosophie* e in particolare un saggio di Schelling del 1800.[5] Il riferimento alla geometria ha il significato di fornire un contenuto reale alla Teoria dell'estensione, ma non ne costituisce un fondamento. Al contrario è la Teoria dell'estensione a costituire il nuovo fondamento sul quale edificare la geometria. Torneremo su questo aspetto della questione nel § 6.2.3.

5.1.1 Le grandezze estese nell'*Ausdehnungslehre* del 1844

Nel seguito commenteremo dapprima i capitoli, rispettivamente della $A1$ e della $A2$, dedicati alla definizione del concetto di grandezza estesa o estensiva e all'introduzione di un'operazione di addizione tra grandezze, quindi commenteremo nel § 5.2 la determinazione di vari tipi di prodotti tra grandezze. La maggior parte dei passi commentati in questo paragrafo e nel § 5.1.2 sono riportati rispettivamente nelle appendici 7.8 e 7.9 per consentire una preliminare lettura complessiva.

A. Il concetto di grandezza estesa (§§ 13-14)

Al concetto geometrico di linea limitata è correlata l'introduzione del concetto astratto di estensione: come la linea limitata è generata da un punto che assume diverse posizioni in successione continua, cioè è formata dalla totalità dei punti in cui il punto generatore trapassa nella variazione, così l'estensione è generata da un elemento generatore ed è formata dalla totalità

[5]Cfr. il § 6.1, p. 298.

degli elementi in cui esso trapassa in una variazione continua.[6] Il concetto astratto di estensione differisce da quello di linea limitata perché al posto delle relazioni spaziali si assumono relazioni concettuali; al posto del punto, che indica un luogo determinato nello spazio si considera l'elemento, cioè un particolare considerato come distinto da un altro particolare.[7]

L'elemento è considerato come il particolare *tout court*, privo di alcun contenuto reale: non ha dunque senso né chiedersi che tipo di particolare sia né sotto quale rispetto sia diverso da un altro particolare, perché esso non ha alcun contenuto rispetto al quale possa essere detto uguale o diverso. Il concetto di diversità che è in gioco nella Teoria dell'estensione è lo stesso che si ha nella Teoria Combinatoria: gli elementi sono diversi solo in quanto *stati* diversi di uno stesso elemento generatore, proprio come i punti sono diversi soltanto perché sono *posizioni* diverse nello spazio.

> Chiamiamo *variazione* [Änderung] il passaggio dell'elemento generatore da uno stato in un altro e questa variazione astratta dell'elemento generatore corrisponde alla variazione di posizione o al movimento del punto in geometria.[8]

In geometria il movimento di un punto genera dapprima una linea, poi, sottoponendo la figura così ottenuta a quello stesso movimento, si possono generare figure spaziali di livelli superiori. Così nella Teoria dell'estensione sottoponendo l'elemento generatore ad una variazione continua si ottiene dapprima la formazione estesa di primo livello:[9]

---

[6]Il concetto di variazione continua è così definito nell'Introduzione: ≪Il divenire continuo, diviso nei suoi momenti, appare come un generarsi continuo tenendo fermo ciò che è già divenuto. Nella forma estesa [Ausdehnungsform] ciò che ogni volta nuovo si origina è posto come un differente; se noi in ciò non teniamo fermo ciò che ogni volta è divenuto, otteniamo il concetto della *variazione continua* [stetigen Aenderung].≫ Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, Einleitung, sez. C, § 9, in Graßmann (1844), p. 28. Il passo è riportato nell'appendice 7.7.

[7]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §13, in Graßmann (1844), p. 47.

[8]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §13, in Graßmann (1844), p. 47. Cfr. anche l'appendice 7.8, n. [13.1].

[9]Nel seguito tradurremo sempre il termine tedesco 'Stufe' con livello e non con dimensione, nonostante in alcuni casi possa suonare strano che si parli di livelli anziché di dimensioni di figure. La ragione di questa scelta consiste nell'intenzione di rispettare la differenziazione terminologica voluta da Graßmann, che non usa il termine 'Dimension', ma il termine 'Stufe', tra l'altro adatto ad esprimere il passaggio da un livello all'altro mediante un processo di ascesa o di costruzione simile a quello dei gradini di una scala. Inoltre la scelta di tradurre 'Stufe' con livello anziché con dimensione ha il pregio di evitare una possibile confusione tra lo 'Stufe' di un dominio, che corrisponde nella terminologia moderna alla 'dimensione' di uno spazio vettoriale, con lo 'Stufe' di una grandezza estensiva, che corrisponde invece al suo grado, poiché è il numero di unità che compaiono in

> *Per formazione estesa di primo livello [Ausdehnungsgebilde erster Stufe]*[10] *intendiamo la totalità degli elementi in cui trapassa un elemento generatore per variazione continua*
>
> e in particolare chiamiamo elemento iniziale l'elemento generatore nel suo primo stato e elemento finale l'elemento generatore nel suo ultimo stato.
>
> Da ciò segue immediatamente che ad ogni formazione estesa appartiene una formazione opposta, che contiene gli stessi elementi, benché essi abbiano avuto origine nel modo contrario, in modo cioè che l'elemento iniziale dell'una sia l'elemento finale dell'altra.[11]

Se in una variazione da un elemento A si ottiene un elemento B, la variazione opposta è quella con cui da B si ottiene A, per cui l'essere opposto è una relazione reciproca [wechselseitig].

> La formazione estesa appare come semplice solo quando le variazioni cui è soggetto l'elemento generatore possono essere sempre poste come uguali tra loro.[12]

Una formazione estesa è *semplice* se da un elemento A viene generato un elemento B e se da B viene generato con una uguale variazione l'elemento C e così via, anche quando A e B sono concepiti come elementi contigui [stetig aneinandergränzende].

---

essa come fattori del prodotto vettoriale che la genera. Ritorneremo su questo punto nei prossimi paragrafi introducendo la definizione di livello di un sistema e di livello di una grandezza data da Graßmann nella $A2$ e riportata nell'appendice 7.9 con il numero [G-5], p. 415.

[10]Traduciamo 'Gebilde' con formazione, anziché con il più consueto termine 'figura' perché quest'ultimo non rende appieno il concetto espresso da 'Gebilde', che contiene non soltanto l'idea di figura ma anche quella di qualcosa che è stato formato, costruito (da 'bilden', che significa appunto formare, costruire). La formazione estesa è infatti propriamente una costruzione o generazione da un elemento iniziale per variazione di quell'elemento stesso. Per queste ragioni aderiamo pienamente alla scelta di D. Flament e B. Bekemeier di tradurre 'Gebilde' con il termine francese 'formation', mentre non troviamo molto convincete la scelta di L.C. Kannenberg di tradurre in inglese con l'espressione 'structure'. Cfr. Graßmann (1994), p. 11 e Graßmann (1995), p. 45. Anche S. Briccoli Bati traduce opportunamente con 'formazione': cfr. Briccoli Bati (1992), p. 167.

[11]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §13, in Graßmann (1844), p. 48. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [13.2].

[12]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §14, in Graßmann (1844), p. 48. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [14.1].

> Possiamo chiamare variazione fondamentale una variazione attraverso la quale da un elemento di una forma continua viene generato un elemento immediatamente contiguo e diremo inoltre: ≪la *formazione estesa semplice* [einfache Ausdehnungsgebilde] è una formazione che risulta dal proseguire continuo di una stessa variazione fondamentale≫. Nello stesso senso in cui le variazioni possono essere poste come uguali tra loro, noi potremo porre come uguali anche le formazioni generate per mezzo di esse, e in questo senso, cioè in quanto può essere a sua volta posto come uguale ciò che è generato nello stesso modo per mezzo di variazioni uguali, chiamiamo la formazione estesa semplice di primo livello una *grandezza estensiva* [Ausdehnungsgrösse] o una *estensione di primo livello* [Ausdehnung erster Stufe] o un *tratto*[a] [Strecke].[13]
>
> [a]Il significato astratto di questa denominazione originariamente concreta non ha bisogno di alcuna giustificazione, poiché i nomi di ciò che è astratto hanno tutti originariamente un significato concreto.

La formazione estesa semplice è un segmento orientato o, nella terminologia degli spazi vettoriali, un vettore applicato, perché essa è generata per mezzo di una variazione da un elemento dato: essa dipende dall'elemento iniziale. Al contrario la grandezza estesa è un concetto puramente astratto, ottenuto da quello di formazione estesa astraendo dalla considerazione dei punti che compongono la formazione. Infatti la grandezza estensiva è la formazione estesa considerata come uguale a tutte le formazioni estese ottenute per mezzo della stessa variazione.

Usando una terminologia moderna, potremmo intendere ciò che afferma Graßmann considerando la grandezza estensiva come un ente astratto dalle formazioni estese che sono ottenute per mezzo di una stessa variazione, ovvero come il rappresentante di una classe di vettori applicati collineari. È un atto di astrazione a condurci dall'idea di una formazione estesa con un elemento iniziale ed un elemento finale ad un ente che è considerato soltanto per la sua direzione (per la variazione che lo ha generato, secondo l'espressione di Graßmann). Tutte le formazioni estese che sono state generate per mezzo

[13]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §14, in Graßmann (1844), pp. 48-9. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [14.2]. 'Strecke', che si traduce in generale con segmento, è tradotto qui con 'tratto' sia per mantenere una differenza rispetto alla sua applicazione geometrica sia perché il termine tedesco 'Strecke' significa propriamente 'tratto esteso', 'tratto percorso', cioè da un lato rinvia all'attività del tracciare un segmento, dall'altro rinvia al movimento da un punto ad un altro nello spazio: 'strecken' infatti ha in tedesco sia il significato transitivo di tracciare, estendere, distendere, sia il significato riflessivo di estendersi, allungarsi. In questo caso è sicuramente da preferirsi la traduzione inglese di 'Strecke' con 'displacement' alla traduzione francese con 'segment'. Cfr. Graßmann (1994), p. 13 e Graßmann (1995), p. 47.

della stessa variazione sono considerate come uguali e dunque indistinguibili rispetto a tale variazione.[14]

> La semplice formazione estesa diviene grandezza estesa quando astraiamo dagli elementi che la prima contiene e teniamo fermo soltanto il tipo della generazione [Art der Erzeugung]; e mentre due formazioni estese possono essere poste come uguali solo quando contengono gli stessi elementi, due grandezze estese possono essere poste come uguali già quando, pur senza contenere gli stessi elementi, sono generate nello stesso modo (cioè per mezzo delle stesse variazioni).[15]

Con una terminologia non grassmanniana ma più familiare al lettore moderno potremmo affermare: perché due vettori applicati in un punto possano essere detti uguali, occorre che essi abbiano non solo la stessa direzione ma anche lo stesso punto di applicazione; perché due vettori liberi possano essere detti uguali, non occorre tener conto degli elementi che li compongono e quindi neppure del loro punto di applicazione, ma è sufficiente l'uguaglianza di direzione. In verità in entrambi i casi occorre anche che i vettori abbiano la stessa 'lunghezza': nella terminologia di Graßmann questa condizione è espressa dalla richiesta che le due grandezze estese siano generate per mezzo delle stesse variazioni.

> Chiamiamo infine un *sistema*[a] (o un dominio) *di primo livello* la totalità di tutti gli elementi che sono generabili proseguendo una stessa variazione fondamentale e la sua opposta. I tratti che appartengono allo stesso sistema di primo livello sono allora tutti generati con il proseguire una stessa variazione fondamentale o con il proseguire variazioni opposte.[16]
>
> [a]Ora preferisco l'espressione 'dominio' all'espressione 'sistema', che è usato molto spesso in un senso diverso. [N.d.A. aggiunta nella 2[a] ed. del 1877]

Per rendere più facilmente intuibili i concetti sopra introdotti, Graßmann accenna subito alle applicazioni alla geometria:

[14]È importante distinguere il concetto di variazione [Änderung] dal concetto di modo di variazione [Änderungsweise]. Mentre infatti la variazione è rappresentata da un tratto ottenuto per generazione da un elemento in una direzione, il modo o tipo di variazione indica la direzione nella quale il tratto viene generato.

[15]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §14, in Graßmann (1844), p. 49. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [14.3].

[16]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §14, in Graßmann (1844), p. 49. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [14.4].

> L'uguaglianza del tipo di variazione è sostituita qui [in geometria] dall'uguaglianza di direzione; come sistema di primo livello si presenta perciò qui la linea retta infinita, come estensione semplice di primo livello la linea retta limitata. Ciò che là viene chiamato omogeneo [gleichartig] appare qui come parallelo, e il parallelismo presenta due aspetti, come parallelismo in uno stesso verso [Sinne] e come parallelismo nel verso opposto.[a][17]
>
> [a]Questa differenza è così importante per la geometria che fissarla con denominazioni semplici è un non piccolo contributo alla semplificazione delle proposizioni e dimostrazioni geometriche: io proporrei a tale scopo le espressioni isoverso [gleichläufig] e antiverso [gegenläufig]. Il nome di tratto possiamo tenerlo fermo nel senso corrispondente anche per la geometria e dunque intendere per tratti uguali le linee limitate che hanno uguale direzione e lunghezza.

Abbiamo introdotto il neologismo 'isoverso' (e il suo contrario 'antiverso') per esprimere la differenza tra i due termini tedeschi 'parallel', che traduciamo con parallelo nel significato di avente uguale direzione, e 'gleichläufig', che traduciamo con 'isoverso' per significare uguaglianza di direzione *e* di verso; un'ulteriore ragione per adottare i termini 'isoverso' e 'antiverso' consiste nel fatto che essi esprimono, proprio come i corrispondenti termini tedeschi, l'idea di un movimento in un senso o nel senso contrario: 'gegenläufig' significa infatti propriamente 'contromarcia' ed esprime un inversione della rotta in un movimento. Questa osservazione è importante, perché mostra che non è vero che Graßmann confonde l'idea di parallelismo con l'idea di uguaglianza di verso, come suggerisce invece la traduzione di Kannenberg con 'equally' e 'oppositely-directed'.[18] : .Graßmann introduce invece termini distinti per le due proprietà; sarebbe piuttosto la traduzione di 'gleichläufig' con 'parallelo' (significato che il termine ha nella lingua tedesca corrente) a determinare tale confusione.

Nel passo sopra citato compare anche il termine 'gleichartig', omogeneo, cui corrisponde il termine 'parallelo' in geometria. Ma cosa significa omogeneo? Significa 'di uguale direzione', come sembra suggerire l'analogia geometrica? La definizione di grandezze omogenee era stata introdotta da Graßmann in un passo della Teoria generale delle forme:

> [...] Possiamo riunire le grandezze generate nello stesso verso e quelle generate nel verso opposto sotto al nome di grandezze omogenee (glei-

[17]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §14, in Graßmann (1844), p. 49. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [14.5].

[18]Cfr. Graßmann (1995), p. 48. Non convince d'altra parte neppure la traduzione francese 'synchrone' e 'allant en des sens opposés'. Cfr. Graßmann (1994), p. 13.

> chartige Grössen) e in questo modo si è così determinato in generale il concetto *reale* di addizione e sottrazione per grandezze omogenee.[19]

'Gleichartig' significa generato nello stesso verso o nel verso opposto per mezzo di uno stesso tipo di variazione, cioè significa dello stesse genere nel senso di generato nello stesso modo: questo significato ci sembra conservato dal termine italiano 'omogeneo'.[20] La natura di un ente, il suo genere è immediatamente identificato con il modo della sua generazione: la divisione delle grandezze in classi omogenee è allora fondata sul concetto di generazione. Omogeneo non significa dunque né di uguale direzione (questo è solo un significato derivato dal primo quando esso è applicato alla geometria) né di uguale dimensione, anche se due grandezze omogenee hanno sempre uguale dimensione. L'omogeneità non è più in Graßmann una condizione necessaria per il confronto tra le grandezze né l'introduzione di un'operazione di addizione è relativa soltanto a grandezze omogenee. Definire l'omogeneità non in relazione alla quantità o al rapporto o al confronto tra grandezze secondo un qualche tipo di misura, bensì per mezzo del modo in cui le grandezze sono generate comporta una differenza rispetto alla concezione dell'omogeneità che abbiamo visto nel capitolo 2. Proprio per questo Graßmann ha proposto il nuovo concetto di forma: se i numeri sono essenzialmente adimensionali e le grandezze o figure geometriche sono tra loro diverse per dimensione, occorre trovare un nuovo concetto in grado di comprendere sia i numeri sia le grandezze e che possa spiegare questa diversa caratteristica di entrambi. Tale nuovo concetto è proprio la forma: la differenza tra numeri e grandezze in relazione alla dimensione dipende non dal fatto che entrambi sono forme ma dalla differenza delle rispettive leggi generative.

La determinazione di criteri di omogeneità tra le grandezze era necessaria per poter applicare ad esse le operazioni algebriche di somma e di prodotto. Il problema, presente ad esempio in Viète e in Descartes, era collegato in geometria al concetto di dimensione di una figura geometrica: poiché ad esempio alla somma tra una superficie e un solido non erano applicabili le usuali leggi delle operazioni algebriche, si cercava una definizione di omogeneità tra grandezze che escludesse questo caso. Nella geometria euclidea la proprietà di omogeneità (due grandezze sono omogenee se sono entrambe lunghezze, aree, volumi) era una condizione della possibilità del confronto tra grandezze (se due grandezze sono omogenee allora una sarà maggiore, minore o uguale

[19] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Allgemeine Formenlehre*, §8, in Graßmann (1844), pp. 40-41.

[20] Proprio per questa ragione ci appare inadeguata la scelta di L.C. Kannenberg di tradurre 'gleichartig' con 'similar', che rimanda non al modo di generazione, ma a proprietà geometriche degli enti. Cfr. Graßmann (1995), p. 39 ss.

all'altra).[21] L'omogeneità era la condizione perché due grandezze potessero avere un rapporto. Già in Wallis però emergeva la convizione che fosse possibile confrontare tra loro anche grandezze non omogenee, tuttavia ciò avveniva per rapporto e non mediante un'operazione di somma.[22] L'esigenza dell'omogeneità continuava perciò a sussistere come condizione per la determinazione della relazione parte-tutto tra grandezze[23] e di conseguenza per la determinazione del concetto di grandezza estensiva, che su tale relazione parte-tutto era fondato. Ciò che permetteva il confronto tra enti disomogenei era l'introduzione di coordinate analitiche; Graßmann invece definisce le grandezze estese e il concetto di dimensione in modo indipendente dalle coordinate e proprio questo costituisce il merito principale del suo lavoro, come vedremo anche nel § 6.2.

B. Addizione e sottrazione di tratti omogenei (§ 15)

Graßmann applica le definizioni di somma, grandezza negativa e zero ai tratti estesi, mostrando che vi è un'adeguata interpretazione della somma tra tratti estesi. Quindi fornisce un criterio di costruzione della somma tra tratti estesi nel caso in cui questi siano adiacenti. Con il termine 'adiacenti' designiamo i tratti che Graßmann chiama 'stetig verknüpft', cioè connessi in modo continuo, in modo che l'elemento finale del primo sia l'elemento iniziale del secondo. Bisogna infatti ricordare che qui Graßmann sta introducendo l'addizione solo per tratti estesi omogenei, cioè solo per tratti che sono stati generati per mezzo del proseguimento o della stessa variazione fondamentale o della sua opposta.[24] Comunque, poiché si era detto che le grandezze estese del sistema di primo livello sono tutte generate per mezzo della stessa variazione fondamentale o della sua opposta, si ha anche che tutte le grandezze estese del sistema di primo livello sono tra loro omogenee.

> Quando la generazione continua del tratto è pensata come interrotta durante il suo procedere e poi come di nuovo proseguita, l'intero tratto appare come connessione di due tratti serrati l'uno all'altro in modo continuo [welche sich stetig aneinanderschliessen] e dei quali l'uno appare come proseguimento dell'altro. I due tratti che costituiscono i membri di questa connessione sono generati nello stesso verso (§ 8) e il risultato della connessione è il tratto che va dall'elemento iniziale

[21] Cfr. il § 2.1.4, p. 75.

[22] Cfr. il § 2.2.1, p. 94 e il § 2.2.2, p. 98.

[23] Si veda in proposito Leibniz, secondo il quale ciò che distingue la relazione delle parti al tutto dalla relazione di inclusione è proprio il fatto che la prima sussiste solo tra grandezze omogenee mentre la seconda no. Cfr. il § 2.3.2, p. 115.

[24] Cfr. il passo [14.4] citato sopra e riportato nell'appendice 7.8.

> del primo all'elemento finale del secondo, se i tratti sono disposti l'uno accanto all'altro in modo continuo, cioè se sono rappresentati in modo che l'elemento finale del primo sia allo stesso tempo l'elemento iniziale del secondo.[25]

Nella somma di tratti adiacenti, Graßmann considera l'elemento iniziale e l'elemento finale di ciascun tratto, cioè introduce la somma dapprima solo per quelli che noi oggi chiamiamo vettori applicati. Graßmann non introduce assiomaticamente un sistema di enti e delle operazioni tra di esse, come farà Peano nel 1888,[26] ma dopo aver definito in modo astratto le operazioni di addizione e di sottrazione con le rispettive proprietà, considera se tra le grandezze di cui sta parlando non sia possibile introdurre un'operazione che goda di tali proprietà. E per farlo deve considerare il modo in cui tali grandezze sono costruite o generate: solo così può infatti mostrare che il concetto di somma è intrinseco alla maniera stessa in cui le grandezze estese sono costruite e concepite. La somma di tratti estesi non deve dunque apparire come un'arbitraria connessione tra grandezze di cui si definiscono certe proprietà, ma deve emergere dal concetto stesso di generazione di una grandezza estesa per mezzo della variazione di un elemento.

Per comprendere questo fatto e per comprendere le successive affermazioni di Graßmann è opportuno analizzare con attenzione i seguenti passi tratti dalla Teoria generale delle forme.[27]

> Fino a qui abbiamo concepito il concetto di addizione in modo puramente formale, determinandolo per mezzo della validità di certe leggi di connessione. Questo concetto formale resta anche sempre l'unico generale. Tuttavia non è questo il modo in cui noi otteniamo questo concetto nei singoli rami della matematica. In essi si dà piuttosto un modo peculiare di connessione che proviene dalla generazione delle grandezze stesse: solo successivamente tale modo di connessione si presenta come addizione nel senso generale indicato sopra, poiché ad esso sono applicabili quelle leggi formali.
>
> Se infatti consideriamo due grandezze (forme), che risultano proseguendo lo stesso modo di variazione e che chiamiamo «generate nello stesso verso [Sinn]», allora è chiaro come esse possano essere messe in una successione tale da formare insieme un tutto, mentre il loro reciproco contenuto, cioè le parti che entrambe contengono, vengono pensate insieme a formare un'unità, e questo tutto è pensato allora

[25]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §15, in Graßmann (1844), pp. 49-50. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [15.1].
[26]Cfr. il § 6.2.2, p. 331.
[27]Cfr. anche il § 4.4, p. 218.

> come generato contemporaneamente alle due grandezze e nello stesso verso.[28]

Per mostrare che la connessione tra grandezze è un'addizione bisogna mostrare che per essa valgono le proprietà che caratterizzano una connessione come addizione: la semplicità (le proprietà commutativa e associativa) e l'univocità dell'analisi, cioè l'esistenza di un'unica operazione inversa.

> Abbiamo già dimostrato sopra (§ 8) che questa connessione, poiché rappresenta la riunione [Vereinigung] di grandezze generate nello stesso verso, deve essere concepita come addizione e la corrispondente connessione analitica come sottrazione e perciò per esse valgono tutte le leggi di questi tipi di connessione. Qui dobbiamo solo mostrare ancora quale peculiare significato acquista la grandezza negativa nel nostro dominio.[29]

Per rendere intuitivo il significato della grandezza negativa in questo caso, Graßmann ricorre a vettori applicati (di cui considera elemento iniziale e finale) e definisce il risultato della sottrazione di un tratto da un altro tratto come il tratto che ha per elemento iniziale l'elemento iniziale del secondo e per elemento finale l'elemento iniziale del primo.

Poiché la somma di tratti adiacenti (si ricordi che con questo termine abbiamo reso per brevità il concetto che Graßmann esprime dicendo che i tratti sono serrati l'uno all'altro o disposti l'uno accanto all'altro in modo continuo) può essere concepita come il tratto che va dal punto iniziale del primo al punto iniziale del secondo, sia nel caso di grandezze che hanno lo stesso verso, sia nel caso di grandezze che hanno versi opposti, Graßmann introduce una definizione generale di somma valida per tratti omogenei:

> *Se si connettono due tratti omogenei in modo continuo, cioè in modo che l'elemento finale del primo divenga l'elemento iniziale del secondo, allora il tratto che va dall'elemento iniziale del primo all'elemento finale del secondo è la loro somma;*
> e designando tale connessione come somma, si esprime con ciò il fatto che tutte le leggi dell'addizione e della sottrazione sono valide per tale modo di connessione.[30]

[28] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, Allgemeine Formenlehre, §8, in Graßmann (1844), p. 40. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [15.2].

[29] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §15, in Graßmann (1844), p. 50. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [15.3].

[30] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §15, in Graßmann (1844), pp. 51-2. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [15.4].

Una conseguenza di questa definizione di somma è che se gli estremi [Gränzelemente] di un tratto variano entrambi di un tratto uguale, allora il tratto che sta tra gli elementi così ottenuto è uguale al tratto di partenza (fig. 5.1).

Occorre ricordare che questi risultati sono stati ottenuti tenendo conto dell'elemento iniziale e finale dei tratti perché i tratti sono stati considerati in base al modo con cui sono stati originariamente generati. I risultati fin qui ottenuti valgono cioè solo relativamente al modo originario di generazione.

C. Sistemi a più dimensioni (§ 16)

Per introdurre ora l'addizione tra tratti non omogenei bisogna innanzitutto costruire dei tratti non omogenei e quindi introdurre almeno due tipi diversi di generazione o due diversi modi di variazione.

> Se ora, per ottenere le connessioni tra tratti non omogenei, io assumo dapprima due variazioni fondamentali non omogenee e faccio proseguire quanto si vuole un elemento secondo il primo modo di variazione (o il suo opposto) e poi l'elemento così variato secondo l'altro modo di variazione, allora io potrò così generare da un elemento un numero infinito di nuovi elementi e chiamo la totalità degli elementi che così si possono generare un sistema di secondo livello. Se inoltre assumo poi una terza variazione fondamentale che da quell'elemento iniziale non conduca più ad un elemento dello stesso sistema di secondo livello, e che io perciò designo come indipendente dalle prime due, e se faccio proseguire quanto si vuole un qualunque elemento di quel sistema di secondo livello secondo questo terzo modo di variazione (o il suo opposto), allora la totalità degli elementi che così si possono generare forma un sistema di terzo livello; e poiché a questo modo di generazione, secondo il suo concetto, non è posto alcun limite, io potrò proseguire in questo modo fino a sistemi di livello alto quanto si vuole.[31]

Per costruire un sistema di secondo livello, Graßmann assume fin dall'inizio due variazioni fondamentali non omogenee, cioè di tipo diverso. Per costruire un sistema di terzo livello introduce invece un ulteriore concetto: l'indipendenza. La condizione di non omogeneità non è sufficiente perché qualunque vettore di direzione diversa è non omogeneo ai vettori dati, ma non qualunque vettore non omogeneo associato ai due vettori dati genera un sistema di terzo livello. Quando si passa alla costruzione del sistema di terzo livello occorre indicare una condizione più restrittiva perché non basta scegliere una variazione non omogenea rispetto alla seconda variazione: occorre

[31] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §16, in Graßmann (1844), p. 52. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [16.1].

assumere che la terza variazione conduca ad un elemento che non appartiene al sistema di secondo livello. È questa la definizione di indipendenza di una variazione da due altre variazioni date.

Anche se ritorneremo nei prossimi paragrafi in modo più approfondito sul concetto di indipendenza, anticipiamo fin d'ora la differenza tra il concetto di indipendenza di due variazioni definito qui da Graßmann e il concetto di indipendenza così come è usualmente definito nelle formulazioni moderne della teoria degli spazi vettoriali. Nella formulazione moderna i concetti di dipendenza e indipendenza sono definiti nei termini della nozione di combinazione lineare e analogamente — lo vedremo nel prossimo paragrafo — farà Graßmann nella $A2$. Nella $A1$ il concetto di indipendenza è definito invece in relazione ai modi di generazione del sistema sia perché l'approccio di Graßmann è genetico-costruttivo sia anche perché in questo modo la nozione di indipendenza è definita senza presupporre considerazioni numeriche.[32] Nel concetto di combinazione lineare è invece implicita la scelta di un insieme numerico di coefficienti (e infatti nella $A2$ Graßmann assume come coefficienti numerici i numeri reali).

Un sistema di terzo livello è dunque generato da tre variazioni indipendenti che costituiscono, usando la terminologia propria della moderna teoria degli spazi vettoriali, un sistema di generatori del sistema indipendenti per definizione, cioè una base. A dire il vero, per poter affermare che le tre variazioni sono dei generatori del sistema (secondo l'accezione moderna del termine) bisognerebbe far vedere che tutti gli altri tratti del sistema possono essere derivati per combinazione lineare dei tratti generati secondo quelle variazioni: in effetti Graßmann dimostra proprio qualcosa di simile.

Fino ad ora è stato fondamentale il ruolo degli elementi. La somma è definita in relazione agli elementi, il concetto di sistema anche: esso è la totalità degli elementi generati.[33] Graßmann non assume mai come dati

---

[32]Se anche pare inevitabile che i coefficienti numerici entrino in gioco nella definizione dell'omogeneità, Graßmann cerca in realtà di non presupporli ragionando in termini di parti e scomposizioni in parti dei tratti (un esempio molto interessante di trova nella definizione del concetto di dipendenza e indipendenza lineare, la cui complessità è dovuta proprio alla mancata introduzione di coefficienti numerici. Graßmann evita intenzionalmente di introdurre i numeri all'inizio perché li definisce successivamente come tipi particolari di grandezze estese. Si veda in proposito il § 5.2.4.

[33]Graßmann qui (non così, lo vedremo, nella $A2$) costruisce una geometria affine (che è, secondo la formulazione algebrica moderna, uno spazio vettoriale che agisce su un insieme di punti e soddisfa ovvie condizioni) piuttosto che definire il concetto di spazio vettoriale. D'altra parte Graßmann introduce le operazioni tra punti solo dopo le operazioni tra grandezze: infatti la prima parte dell'$A1$ è dedicata al calcolo con le grandezze estese mentre la seconda parte è dedicata al calcolo con le grandezze elementari, cioè al calcolo tra punti. Ritorneremo su questo tema in seguito.

elementi qualunque del sistema, ma assume come dati soltanto elementi che ha generato per mezzo delle variazioni originarie del sistema:

> Qui è importante tener fermo che tutti gli elementi generati in questo modo non possono essere concepiti come già dati in qualche altro modo[a] ma solo come originariamente generati e che perciò essi, in quanto generati originariamente da variazioni diverse, appaiono tutti come diversi secondo il loro concetto. Al contrario è anche chiaro che, una volta che gli elementi sono stati generati, essi appaiono da quel momento in poi come dati ed è chiaro che non si può decidere della loro diversità o identità se non facendo riferimento alla generazione originaria.[34]
>
> [a]Ad esempio nella Teoria dello spazio tutti i punti sono già dati originariamente per mezzo dello spazio presupposto.

Questo passo esprime molto chiaramente il punto di vista di Graßmann, che non ammette alcun elemento come dato se prima non ha indicato un modo per generarlo. Proprio per questa ragione nei §§ 17-19 della $A1$ Graßmann affronta un complesso ragionamento per generare, a partire dalle variazioni originarie del sistema, tutti gli elementi necessari a garantire la validità delle proprietà dell'addizione tra tratti non omogenei.

D. Addizione e sottrazione di tratti non omogenei (§§17-19)

Somma come connessione di variazioni Nel § 15 la somma di due tratti omogenei era definita come il tratto compreso tra l'elemento iniziale del primo tratto e l'elemento finale del secondo: ora Graßmann introduce una connessione tra due variazioni di due sistemi diversi per mostrare che la variazione così ottenuta può essere concepita come somma delle due variazioni date.

> Se io ora faccio variare, per tornare al nostro compito, un elemento prima secondo un tratto a e poi l'elemento così ottenuto secondo il tratto b, allora il risultato totale delle due variazioni può essere insieme concepito come il risultato di una variazione che è la connessione delle prime due e che, se i due tratti fossero omogenei, apparirebbe come la loro somma (§15).[35]

[34]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §16, in Graßmann (1844), p. 52. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [16.2].

[35]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, § 17, in Graßmann (1844), p. 53. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [17.1].

Per poter assumere che la connessione delle due variazioni sia la somma di esse occorre mostrare innanzitutto che tale connessione è associativa e commutativa, quindi che la sua operazione inversa è determinata univocamente (o, secondo la terminologia di Graßmann, che l'analisi è univoca).[36]

Associatività A proposito della proprietà associativa Graßmann osserva che poiché l'atto del riunire non modifica lo stato dell'elemento sottoposto a variazione, allora dal concetto della connessione sopra introdotta deriva immediatamente che essa gode della proprietà associativa:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Commutatività La proprietà commutativa invece non può essere derivata in modo altrettanto immediato perché il sistema è stato generato per mezzo di una serie successiva di variazioni che sono date in un certo ordine. Se ad esempio il sistema è stato generato da $a, b, c, \ldots$ e se questo è considerato l'unico modo di generazione degli elementi, allora nel sistema non si potrà mai generare l'elemento che costituisce l'estremo finale di $b+a$, ma solo quello che costituisce l'estremo finale di $a+b$. In altre parole, per poter affermare la proprietà commutativa della connessione in questione, occorre dimostrare che all'interno del sistema è possibile generare uno stesso elemento in due modi diversi, cambiando l'ordine delle variazioni. Ma per garantire questo, occorre garantire in generale che tutti gli elementi del sistema possano essere ottenuti in modo univoco, indipendentemente dall'ordine in cui si considerano le variazioni che li generano. Per rendere commutativa la somma, occorre allora assumere che

$$a+b = b+a,$$

cioè, dato un elemento A che varia prima secondo a fino in B e poi secondo b fino in C e facendo variare l'elemento A secondo b fino in B' e poi secondo a fino in C', assumere che l'elemento C e l'elemento C' coincidano (fig. 5.2).

Osserviamo innanzitutto che la commutatività qui assunta riguarda le variazioni (che indichiamo con lettere minuscole dell'alfabeto) e non i tratti cui esse danno origine (che indichiamo invece ad esempio con AB). Questa osservazione è importante, perché Graßmann procede prima assumendo la commutatività in relazione all'elemento iniziale e finale di un tratto, cioè agli elementi ottenuti per variazione da un elemento dato del sistema, e poi estende questa assunzione per mezzo del concetto di variazione fondamentale

[36] Cfr. il § 4.4 a p. 218.

(una sorta di variazione infinitesimale dell'elemento che genera tutti gli elementi di un tratto continuo) all'intero tratto. Vedremo tra poco un esempio di questo procedimento.

Tratti generati in modo uguale da tratti uguali sono uguali Assumere $a+b=b+a$ nel caso in cui a sia la variazione di A in B e b la variazione di A in A' e di B in B' non è ancora sufficiente, perché la commutatività della somma tra variazioni non omogenee deve avere le stesse proprietà della commutatività della somma tra tratti omogenei. Graßmann aveva dimostrato come conseguenza della commutatività della somma tra tratti omogenei che se gli estremi [Gränzelemente] di un tratto variano entrambi di un tratto omogeneo uguale, allora il tratto che sta tra gli elementi così ottenuto è uguale al tratto di partenza (si veda la fine del §15). Dunque bisogna che qualcosa di simile valga anche nel caso di variazioni non omogenee, e cioè occorre in generale che la proprietà citata valga per qualunque variazione considerata (non necessariamente omogenea). Dunque se gli estremi [Gränzelemente] di un tratto variano entrambi secondo una stessa variazione a, allora il tratto che sta tra gli elementi così ottenuto è uguale al tratto di partenza. Se a questo punto si fanno variare gli elementi iniziale e finale di ciascuno dei due tratti ottenuti secondo un'altra variazione non necessariamente uguale alla prima (ad esempio indipendente da essa) b, allora i tratti così ottenuti dovrebbero essere ancora uguali tra loro. Perché questa proprietà sia valida in un sistema di livello m, cioè per m modi diversi di variazione, Graßmann la assume inizialmente solo per le variazioni e poi la estende ai tratti per mezzo del concetto di variazione fondamentale.

Graßmann assume che, se due coppie di elementi sono generabili l'una dall'altra per mezzo di un'uguale variazione [cioè se B è ottenuto da A con una variazione uguale a quella con cui D è ottenuto da C, e cioè con la variazione che in figura è indicata con a], e se si sottopongono tutti i quattro elementi ad una nuova variazione, uguale per tutti [si veda la variazione indicata con b in figura], allora anche le coppie di elementi che ne risultano possono essere generate l'una dall'altra per mezzo di variazioni uguali [cioè B' può essere ottenuto da A' con una variazione uguale a quella con cui D' può essere ottenuto da C'] (fig. 5.3).[37]

A questo punto Graßmann fa vedere che la proprietà così mostrata per gli elementi iniziali e finali dei tratti (cioè per le variazioni) può essere generalizzata a tutti gli elementi dei tratti in questione se per variazioni a e b si intendono le variazioni fondamentali secondo quei tratti, cioè delle variazio-

[37]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, § 17, in Graßmann (1844), p. 54.

ni infinitesime nelle direzioni rispettivamente di a e di b. Se si dimostra la proprietà precedente per tutti gli elementi, allora

> da ciò segue non solo che un tratto, quando tutti i suoi elementi sono soggetti ad una uguale variazione, resta un tratto, ma inoltre che, se si è mostrato già solo per la variazione fondamentale che essa rimane uguale in quel proseguimento del tratto, lo stesso vale allora anche per l'intero tratto.[38]

In generale si è così assunto che cose generate da cose uguali con variazioni uguali sono uguali; si è cioè esteso al caso di un sistema di livello m quanto si era dimostrato sopra per un sistema di primo livello come conseguenza della definizione di somma tra tratti omogenei.

> [...] perciò stabiliamo che quando in un sistema di livello m un tratto che appartiene ad uno dei precedenti m modi di variazione che determinano il sistema è sottoposto ad una delle variazioni successive (e in particolare tutti gli elementi allo stesso modo di variazione), allora le variazioni fondamentali corrispondenti nel tratto originariamente dato e nel tratto che ha avuto origine da quelle variazioni devono essere poste come uguali.[39]

In simboli, possiamo ora scrivere che

$$\text{se} \quad AB = CD \quad \text{e se} \quad AA' = BB' = CC' = DD' \quad \text{allora} \quad A'B' = C'D'.$$

Se invece gli elementi del tratto dato sono sottoposti a modi di variazione diversi, le variazioni fondamentali corrispondenti nel tratto originariamente dato e nel tratto che ha avuto origine da quelle variazioni devono essere poste come diverse.

In nota Graßmann precisa il significato del suo modo di procedere: anziché assumere semplicemente delle proprietà definitorie della somma tra grandezze estese, egli vuole far vedere perché se ne assumono alcune e non altre. Scrive infatti, richiamandosi a quanto già affermato nell'introduzione (cfr. il § 4.3.1):

> La deduzione, per mezzo della quale noi siamo giunti a questa definizione di uguale variazione, appartiene a quella serie di sviluppo (Introduzione, § 16) che dovrebbe fornire una visione d'insieme. Per la serie di sviluppo matematica essa appare, come in generale ogni definizione, puramente arbitraria.[40]

---

[38]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, § 17, in Graßmann (1844), p. 54. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [17.2].

[39]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, § 17, in Graßmann (1844), p. 55. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [17.3].

[40]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, § 17, in Graßmann (1844), p. 55. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [17.4].

Graßmann dunque non si limita a fare assunzioni arbitrarie (come pure il matematico è legittimato a fare, almeno se non ha di mira un'esposizione rigorosamente scientifica della teoria) ma vuole permettere al lettore di capire le ragioni e gli obiettivi di tali assunzioni perché ha in mente una fondazione filosofica della nuova teoria. Egli dunque deduce le assunzioni teoriche dal concetto di sistema ad m dimensioni e dal concetto di operazione tra i suoi tratti.[41]

La dimostrazione che un tratto soggetto ad un certo numero di variazioni del sistema e in qualunque ordine (cioè non necessariamente nell'ordine di generazione del sistema) resta ancora un tratto e resta uguale al tratto di partenza serve a mostrare la commutatività dell'operazione di connessione tra variazioni diverse e anche l'unicità dell'operazione inversa, dunque a caratterizzare l'operazione tra modi diversi di variazione come una somma.

Graßmann conclude dunque il § 17 con una nozione generale di somma tra modi diversi di variazione, che però è definita relativamente all'elemento iniziale sottoposto a variazione e all'elemento finale ottenuto per variazione:

> Se $[\alpha\beta]$ e $[\beta\gamma]$ rappresentano variazioni qualunque, allora si ha che:
>
> $$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma].$$ [42]

Se con a, b, c indichiamo rispettivamente le variazioni da A a B, da B a C, da A a C, possiamo esprimere la somma di variazioni nel modo seguente:

$$c = a + b.$$

Somma come connessione di tratti La definizione precedente riguarda soltanto la somma di modi di variazione e non la somma dei tratti che essi generano; in altre parole è garantita l'esistenza di una variazione dall'elemento iniziale sottoposto alla prima variazione all'elemento finale ottenuto con la seconda variazione, ma non è ancora garantito che questi due elementi determinino in modo univoco un tratto che li congiunge. Mentre è certo che siano tratti quelli ottenuti da un elemento per successive variazioni originarie del sistema, non è invece garantito che sia un tratto anche quello ottenuto dallo stesso elemento per mezzo della variazione somma.

> Nello sviluppo dell'ultimo paragrafo avevamo considerato le variazioni originate per connessione solo in riferimento al loro elemento iniziale e finale, senza considerare i tratti che le uniscono; per contro risultavano come tratti soltanto quelli che appartenevano ai tipi originari di

[41] Sul significato del concetto di deduzione vedi il § 4.2.

[42] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, § 17, in Graßmann (1844), p. 56. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [17.5].

> variazione del sistema. Per completare ciò che manca, dobbiamo mostrare in che modo per mezzo di due elementi in un dominio di livello superiore sono determinati tutti gli elementi restanti che giacciono con questi due in un sistema di primo livello.[43]

Per garantire che alla variazione somma corrisponda un tratto, che sia la somma dei tratti corrispondenti alle variazioni da sommare, occorre garantire che dati due elementi qualunque in un sistema di livello m esistono sempre il tratto che li congiunge e tutti i tratti che stanno in un sistema di primo livello con esso o, in altre parole, che dati due elementi sono determinati all'interno del sistema il tratto che li unisce e tutti i tratti ad esso omogenei. Non solo, i tratti devono essere determinati in modo univoco.

Graßmann mostra che se un elemento B è ottenuto per m variazioni $a, b, c, \ldots$ da un elemento A, allora per la definizione di sistema di primo livello, sottoponendo l'elemento B ad una variazione uguale a quella con la quale è stato ottenuto (e cioè sottoponendolo ad una serie di m variazioni $a, b, c, \ldots$), si ottiene un nuovo elemento B' che appartiene allo stesso sistema di primo livello di B e così via. Graßmann mostra cioè dapprima che per mezzo di m variazioni è possibile determinare un tratto di un sistema di primo livello e tutti i tratti ad esso omogenei e uguali. Poi, ricorrendo al concetto di variazione fondamentale (cioè infinitesima) estende questa proprietà a tutti i tratti omogenei al tratto AB.

A questo punto Graßmann mostra anche l'unicità, ovvero che per mezzo di due elementi di un sistema di livello superiore si ottiene uno e un solo sistema di primo livello, ovvero che due elementi di un sistema di livello superiore determinano univocamente un sistema di primo livello.

> Dopo aver mostrato come di fatto per mezzo di due elementi possa essere stabilito uno e un solo sistema di primo livello, ora si è così eliminata la mancanza cui si era accennato all'inizio di questo paragrafo: per quanto riguarda i tratti che dovrebbero apparire come somma di due tratti, non sono determinati soltanto l'elemento iniziale e finale, ma è determinato l'intero tratto con tutti i suoi elementi. Il concetto di somma è perciò determinato non solo per le variazioni, ma anche per i tratti stessi. Se dunque $[\alpha\beta], [\beta\gamma], [\alpha\gamma]$ sono tratti generati secondo il principio sopra sviluppato, allora si ha sempre in generale
>
> $$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$$
>
> cioè
> *se si uniscono in modo continuo due o più tratti, allora il tratto dal-*

[43]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, § 18, in Graßmann (1844), p. 56. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [18.1].

l'elemento iniziale del primo all'elemento finale del secondo è la loro somma.[44]

Indicando con AB, BC, AC rispettivamente i tratti da A a B, da B a C, da A a C, possiamo scrivere:

$$AC = AB + BC.^{45}$$

Unicità e combinazione lineare Che la somma di due qualunque variazioni del sistema sia un tratto del sistema determinato in modo univoco significa anche che ogni tratto del sistema che non sia generato in modo univoco per mezzo delle variazioni originarie del sistema può essere generato come somma di variazioni del sistema.

Anche se il riferimento alla formulazione moderna della teoria degli spazi vettoriali potrebbe essere fuorviante ai fini della comprensione filosofica del procedimento genetico adottato nell'$A1$ da Graßmann, riteniamo tuttavia che esso possa contribuire alla comprensione del significato del testo. Ciò che infatti rende difficile ad un lettore moderno la comprensione di questo paragrafo della $A1$ è l'assenza del concetto a noi familiare di 'combinazione lineare'. La proprietà che Graßmann esprime potrebbe essere resa per mezzo del concetto di combinazione lineare nel modo seguente: dati due elementi qualunque di un sistema di livello m, è determinato in modo univoco un tratto (vettore) di cui quei due elementi sono estremi e quel tratto è determinato come combinazione lineare di m variazioni originarie del sistema.

Se ora si considera il fatto che le variazioni originarie del sistema sono per definizione tra loro indipendenti, il risultato cui giunge Graßmann nel § 18 della $A1$ può anche essere riformulato nel modo seguente: dato un insieme di m generatori indipendenti di un sistema a m dimensioni, ogni vettore del sistema può essere espresso in modo univoco come combinazione lineare di essi.

Indipendenza e combinazione lineare Tenendo conto del fatto che una variazione è indipendente dalle altre se conduce ad un elemento che non è compreso nel sistema generato dalle altre, allora dalla proprietà sopra esposta deriva anche un'altra proprietà importante: due variazioni del sistema sono

[44]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, § 18, in Graßmann (1844), p. 59. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [18.2].

[45]Graßmann usa, in modo un po' fuorviante, la stessa notazione per le variazioni e per i tratti. Cfr. i due passi citati, entrambi riportati nell'appendice 7.7 rispettivamente con in numeri [17.5] e [18.2]. Noi abbiamo distinto inevce tra la somma di variazioni $c = a + b$ e la somma di tratti $AC = AB + BC$.

tra loro indipendenti se i tratti dell'una non possono essere espressi come somma di tratti che appartengono all'altra.

Ecco le parole con cui Graßmann esprime questo risultato, che connette i concetti di 'combinazione lineare' e di indipendenza:

> Se ora applichiamo questo concetto di somma al concetto di indipendenza, come lo abbiamo presentato nel § 16, ne risulta che una variazione è dipendente dalle altre, se i tratti che appartengono alla prima si possono rappresentare come somme di tratti che appartengono alle altre, mentre è indipendente da esse in caso contrario.[46]

Consideriamo un sistema di terzo livello generato dalle variazioni a, b, c in cui sono dati tre elementi A, B, C che determinano i tratti $[AB]$ e $[AC]$. $[AB]$ è un tratto esprimibile come 'combinazione lineare' delle variazioni originarie del sistema (per ciò stesso indipendenti) a e b e pertanto appartiene ad una variazione (indicata con d in figura), che non è indipendente rispetto ad a e a b: essa infatti non conduce ad alcun elemento che non sia generabile anche con le variazioni a e b (fig. 5.4). Consideriamo ora invece il tratto $[AC]$, che non può essere espresso come 'combinazione lineare' di a e di b, perché l'elemento C non può mai essere generato nel sistema di secondo livello generato da a e b. Questo significa allora che la variazione e, alla quale appartiene il tratto $[AC]$ è indipendente dalle variazioni a e b.

Graßmann definisce dunque l'indipendenza delle variazioni di un sistema per mezzo del concetto di combinazione lineare, proprio come avviene nella moderna teoria degli spazi vettoriali: se tra i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ce n'è uno esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti, allora si dice che i vettori sono linearmente dipendenti; in caso contrario si dice che sono linearmente indipendenti.

Indipendenza dalle variazioni originarie Nei paragrafi successivi si dimostra che un sistema di livello m è indipendente dalle variazioni originarie con cui è stato generato, e cioè che esso può essere determinato nello stesso modo da qualunque altro insieme di m variazioni tra loro indipendenti: ciascuno dei suoi tratti infatti è esprimibile in modo univoco come combinazione lineare di m suoi tratti indipendenti qualunque.

Dati due elementi α e β del sistema, il fatto che β sia ottenuto in un unico modo da α è garantito dalle variazioni che generano il sistema: infatti β è generabile in un unico modo per mezzo di una data successione di m variazioni $a, b, c, \ldots$ del sistema. Se però anziché assumere le variazioni $a, b, c, \ldots,$

[46]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, § 18, in Graßmann (1844), p. 59. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [18.2].

io assumo altre variazioni $a', b', c', \ldots$, cosa garantisce che l'elemento β sia generabile da α anche mediante tali variazioni, che sono diverse da quelle che generano il sistema?

Dapprima Graßmann mostra che la somma di due tratti generati per mezzo delle variazioni a e b del sistema non dipende da tali variazioni stesse. Per farlo fa vedere che essi possono essere espressi come somme delle rispettive parti e dunque come somme di altri tratti appartenenti alle variazioni date ma che non sono le variazioni stesse (cioè non sono le unità con cui è stato generato il sistema). Vediamo il seguente esempio (fig. 5.5). Consideriamo due segmenti p_1 e p_2 generati dalle variazioni a e b. Siano a_1 e a_2 parti di p_1 e b_1 e b_2 parti di p_2, allora si ha che:

$$p_1 + p_2 = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = p_3 + p_4$$

Siano ora α_1, α_2 parti di a_1, α_3 e α_4 parti di a_2, β_1, β_2 parti di b_1, β_3 e β_4 parti di b_2, si ha che:

$$p_1 + p_2 = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) + (\alpha_3 + \beta_3) + (\alpha_4 + \beta_4) = p_5 + p_6 + p_7 + p_8$$

Questo esempio esprime con chiarezza la proprietà che Graßmann così enuncia:

> Dati due tratti, se si varia un qualunque elemento di una parte del primo tratto e poi (proseguendo) della corrispondente parte del secondo tratto, allora la totalità degli elementi così generati è la somma di quei due tratti.[47]

Questo enunciato implica un processo di divisione all'infinito dei due tratti in parti: solo così la totalità degli elementi generati è la somma dei due tratti dati. Ciascuno degli elementi del tratto $P1P2$ può essere generato con variazioni che sono parti delle variazioni date.

Solo a questo punto, dopo aver determinato il concetto di somma di tratti in tutta la sua generalità, Graßmann enuncia la proprietà già introdotta in precedenza con la massima generalità:

> Se tutti gli elementi di un tratto variano altrettanto [gleich viel], allora il tratto che ne risulta resta uguale a quello dato.[48]

Infatti ciò che risulta è ancora un tratto per quanto si è detto nel §18 sulla combinazione lineare dei tratti ed è uguale per l'applicazione della stessa formula già presentata alla fine del § 15.

[47]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §14, in Graßmann (1844), p. 60. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [19.1].

[48]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §14, in Graßmann (1844), p. 60. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [19.2].

L'affermazione che un tratto, sottoposto a variazione in un sistema di dominio m, dà origine a un tratto uguale ha un significato profondo: corrisponde all'assunzione dell'invarianza dei vettori per traslazione nello spazio, cioè al fondamento della determinazione del concetto di vettore libero: tutti i tratti generati nel sistema secondo un'uguale variazione sono tra loro uguali. Questa è la condizione per poter determinare in modo più generale le proprietà del sistema e la stessa operazione di somma tra tratti non omogenei.

E. Indipendenza dei sistemi di livello superiore(§ 20)

Indipendenza dai tipi originari di variazione A questo punto resta un'ultima cosa da dimostrare e cioè che la somma dei tratti di un sistema a m dimensioni non dipende dai tipi di variazioni assunte come primitive, ovvero dai tipi di variazioni con cui è stato effettivamente generato il sistema.

> Possiamo eliminare questa dipendenza [dai tipi di variazione con cui il sistema è stato generato] solo se possiamo mostrare che lo stesso sistema di livello m può essere generato da m modi qualunque di variazione che gli appartengono e che sono indipendenti (nel senso del § 16), cioè che non possono essere contenuti in un sistema di livello inferiore a m.
>
> Io voglio dapprima mostrare che, se il sistema è generabile da certi m tipi di variazione, posso introdurre al posto di uno qualunque di essi un nuovo modo di variazione p indipendente dai restanti $m - 1$ modi e appartenente allo stesso sistema di livello m e per mezzo di p e dei restanti $m - 1$ modi di variazione posso generare il sistema dato.
>
> E poiché questo procedimento può essere proseguito, segue che si può generare lo stesso sistema per mezzo di m modi indipendenti qualunque di variazione del sistema o
>
> *ogni tratto di un sistema di livello m può essere rappresentato come somma di m tratti che appartengono ad m modi di variazione dati indipendenti ma anche ogni volta in un solo modo.*[49]

Qui Graßmann introduce quello che oggi è noto come teorema dello scambio (o teorema di Steinitz) e che riformulerà in maniera più simile alla concezione moderna nella $A2$.[50] Nella terminologia moderna il teorema afferma che se io ho una base del sistema (m tipi originari di variazione che generano

[49]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §14, in Graßmann (1844), pp. 61-2. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [20.1].

[50]Si veda in proposito il passo riportato nell'appendice 7.9 con il numero [G-19] a p. 418 e il prossimo paragrafo, nel quale commenteremo l'esposizione della $A2$.

il sistema) e se sostituisco ad uno dei vettori della base (ad uno dei tipi di variazione) un altro vettore del sistema p (un altro modo di variazione) indipendente rispetto ai restanti $m-1$ vettori (modi di variazione), allora gli $m-1$ vettori (modi di variazione originari) insieme al nuovo vettore (modo di variazione) generano il sistema dato.

La traduzione nella terminologia moderna non rende propriamente giustizia al testo di Graßmann: in effetti tradurre con base gli m tipi originari di variazione che generano il sistema non tiene conto del fatto che proprio nei passi sopra citati emerge il concetto moderno di base e che esso è caratterizzato non solo dalla proprietà di essere formato dagli m tipi originari di variazione indipendenti che generano il sistema, ma da m tipi qualunque di variazione indipendenti. Rispetto al concetto moderno di base manca propriamente ancora una condizione (che sarà aggiunta però nella $A2$) e cioè la dimostrazione che sono sempre necessari almeno m modi indipendenti di variazione per generare l'intero sistema.[51] Questo fatto non è dimostrato, ma è in un certo senso presupposto nella definizione di sistema di livello m. Tale sistema è infatti generato da un sistema di livello $m-1$ aggiungendo una variazione che permette di raggiungere elementi non altrimenti raggiungibili con le $m-1$ variazioni che generano il sistema di livello $m-1$. È proprio il procedimento genetico a presupporre una proprietà del concetto di base che invece nella $A2$, ove il metodo è diverso, dovrà essere specificamente dimostrata.

Indipendenza dall'elemento iniziale Infine Graßmann mostra che ogni elemento che è generabile da un certo elemento iniziale α del sistema può essere generato anche da qualunque altro elemento dello stesso sistema. Così rende il sistema indipendente dall'elemento iniziale.

> Ogni sistema di livello m può essere pensato come generato da m modi di variazione indipendenti qualunque del sistema da un qualunque elemento del sistema stesso, cioè da un tale elemento possono essere generati tutti gli altri elementi con quei modi di variazione.[52]

Con quest'ultima dimostrazione Graßmann rende il sistema totalmente indipendente dalla base per mezzo della quale il sistema è generato, perché lo stesso sistema può essere generato a partire da un suo elemento qualunque. Già si era visto che ogni tratto può essere traslato con variazioni successive rimanendo uguale a se stesso: l'indipendenza dal punto di applicazione è

[51] Cfr. Dorier (1995), p. 245.

[52] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §14, in Graßmann (1844), p. 62. Cfr. anche l'appendice 7.7, n. [20.2].

ora mostrata per l'intero sistema e dunque per ogni somma di tratti al suo interno.

Prima di formulare alcune riflessioni conclusive sull'originalità e sul significato filosofico di questo modo di introdurre la teoria delle grandezze estensive, presentiamo anche l'esposizione del 1862, che a differenza della $A1$ può essere più facilmente e forse anche più proficuamente confrontata con la teoria moderna degli spazi vettoriali. Dopo un confronto con la esposizione della $A2$ non solo sarà più evidente il significato originale della $A1$ ma sarà anche più facile comprendere il contenuto e lo sviluppo della teoria delle grandezze estensive.

Prima però di affrontare l'esposizione della $A2$, occorre almeno osservare che Graßmann ha definito il concetto di somma di grandezze estese non omogenee senza l'introduzione di coordinate numeriche e senza fare uso in alcun modo di coefficienti numerici per confrontare le grandezze. La ragione di questa scelta è da cercare nell'intenzione di Graßmann di presentare la teoria dell'estensione in maniera indipendente dalle altre discipline della matematica. Vedremo tuttavia nel § 5.2 che Graßmann introduce anche nella $A1$ i numeri, ma li introduce come quoziente di grandezze omogenee e dunque solo per mezzo del concetto di moltiplicazione tra grandezze.[53]

5.1.2 La teoria dell'estensione nel 1862

In questo paragrafo commentiamo analiticamente i primi due paragrafi del primo capitolo della $A2$ (in particolare i numeri 1-26): una selezione dei passi commentati è riportata nell'appendice 7.9. Nel seguito faremo riferimento con il simbolo G seguito da un numero arabo ai passi corrispondenti nell'appendice 7.9 (il numero è lo stesso con cui li indica Graßmann nell'*Ausdehnungslehre* del 1862).

§1. Concetti e leggi di calcolo

La prima definizione della $A2$ introduce il concetto di combinazione lineare:

> [G1] *Definizione.* Io dico che una grandezza a è *derivata* [abgeleitet] dalle grandezze $b, c, \ldots$ per mezzo dei numeri $\beta, \gamma, \ldots$ se
>
> $$a = \beta b + \gamma c + \ldots$$
>
> ove $\beta, \gamma, \ldots$ sono numeri reali qualsiasi (non importa se razionali, irrazionali, nulli, diversi da zero). Dico anche che in questo caso a è *numericamente derivato* [numerisch abgeleitet] da $b, c, \ldots$[54]

[53]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, sez. I, cap. 4, §§ 60-73.

[54]Cfr. l'appendice 7.9, p. 414.

È importante osservare che Graßmann non inizia la trattazione delle grandezze estensive, come avviene invece oggi nelle esposizioni assiomatiche della teoria degli spazi vettoriali, con l'indicazione di un insieme di grandezze all'interno del quale si possono prendere le grandezze $a, b, c, \ldots$, ma prima definisce il concetto di combinazione lineare tra grandezze date e poi introduce il concetto di dominio contenente tali grandezze. Questo approccio risente dell'esposizione adottata nella $A1$, in cui Graßmann costruisce il dominio delle grandezze per mezzo di certe variazioni originarie (oggi diremmo per mezzo di una base primitiva). Tuttavia nella $A2$ a differenza che nella $A1$ è indicato fin dall'inizio il dominio numerico nel quale sono scelti i coefficienti (oggi diremmo il campo sul quale è definito lo spazio vettoriale), cioè l'insieme dei numeri reali. Nelle trattazioni moderne la definizione di spazio vettoriale è introdotta prima della definizione di combinazione lineare di un qualunque vettore di V per mezzo di n vettori di V. Un'altra differenza rispetto a Graßmann consiste nel fatto che nella notazione moderna si definisce una combinazione lineare rispetto ad un numero finito n di vettori, mentre Graßmann non specifica il numero di vettori coinvolti.[55]

La definizione seguente utilizza il concetto di combinazione lineare («essere derivato numericamente») per introdurre la nozione di dipendenza lineare (con le parole di Graßmann «relazione numerica reciproca» [Zahlbeziehung zu einander]) di un insieme di grandezze:

> [G2] *Definizione.* Dico inoltre che due o più grandezze $a, b, c, \ldots$ stanno in una *relazione numerica* reciproca [in einer Zahlbeziehung zu einander stehen], o che la riunione delle grandezze $a, b, c, \ldots$ soggiace ad una relazione numerica, se una di esse è derivabile numericamente dalle altre, cioè ad esempio se vale
>
> $$a = \beta b + \gamma c + \ldots$$
>
> ove $\beta, \gamma, \ldots$ sono numeri reali. Se la riunione è composta da una sola grandezza a, la riunione soggiace ad una relazione numerica soltanto nel caso in cui $a = 0$. Se *due* grandezze non nulle stanno in una relazione numerica reciproca, le indico con $a \equiv b$ e dico che a è *congruente* a b.[56]

Graßmann assume fin dall'inizio della $A2$ i numeri reali e le loro proprietà algebriche. Invece nella $A1$, poiché non utilizzava il concetto di combinazione

[55] Ritorneremo su questo punto affrontando la questione, abbastanza controversa, se la *Teoria dell'estensione* di Graßmann sia da considerarsi una teoria di spazi a infinite dimensioni o soltanto ad un numero n di dimensioni.

[56] Cfr. l'appendice 7.9, p. 414.

lineare con coefficienti in $\mathbb{R}$, Graßmann non aveva bisogno di 'prendere in prestito dall'aritmetica' le proprietà dei numeri. Vedremo nel § 5.2.4 che i numeri sono introdotti nella $A1$ come quoziente di grandezze omogenee e perciò come grandezze di livello nullo per le quali è possibile dimostrate la validità delle usuali operazioni algebriche tra numeri.

Oggi il concetto di dipendenza lineare è definito in maniera del tutto analoga rispetto alla definizione di Graßmann: se tra i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ce n'è uno esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti, allora si dice che i vettori sono linearmente dipendenti; in caso contrario si dice che sono linearmente indipendenti.

La definizione che riportiamo di seguito rimanda ad una delle caratteristiche peculiari dell'approccio di Graßmann, cioè alla generazione del dominio delle grandezze estensive per mezzo di variazioni originarie.

> [G-3] *Definizione. Unità* [Einheit] chiamo quella grandezza che serve a derivare numericamente una serie di grandezze e la chiamo unità *originaria* [ursprünglich], se essa non è a sua volta derivata da un'altra unità. Chiamo unità *assoluta* l'unità dei numeri, cioè l'uno, e chiamo unità *relative* tutte le altre. Lo zero non può mai fungere da unità.[57]

Unità è «una grandezza che serve a derivare numericamente una serie di grandezze», cioè una grandezza che permette di ottenere altre grandezze esprimibili come combinazioni lineari di essa. Oggi si definisce un sistema di generatori rispetto ad uno spazio vettoriale con la condizione che dai generatori si possano derivare per combinazione lineare tutti i vettori di V: n vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ costituiscono un sistema di generatori dello spazio vettoriale V se e solo se ogni vettore dello spazio può essere rappresentato come combinazione lineare dei vettori $v_1, \ldots, v_n$. Graßmann invece definisce «unità» ciascun vettore per mezzo del quale altri vettori possono essere derivati numericamente, senza riferimento ad un insieme dato di vettori. Anche in questo caso, dunque, come già nel caso della definizione di combinazione lineare, non è assunto preliminarmente un dominio di grandezze all'interno del quale sono poi definite relazioni e operazioni (procedimento che caratterizza invece il metodo assiomatico); al contrario a partire dalla considerazione di singole grandezze (che nella $A1$ vengono proprio «generate») si costruisce il dominio di grandezze che le contiene.

Alcuni studiosi hanno sottolineato che sotto questo punto di vista la trattazione della $A1$ è più soddisfacente della trattazione della $A2$, o almeno complementare ad essa. Infatti nella seconda da un lato si assumono come

[57] Cfr. l'appendice 7.9, p. 415.

date e non come generate o costruite le grandezze estensive, ma si mantiene un riferimento ad un modo privilegiato di generazione: si pensi ad esempio al concetto di unità originaria, cioè di una grandezza che serve a derivare le altre ma che non è a sua volta derivata. L'introduzione del concetto di unità originaria può essere meglio compreso in riferimento ai modi originari di variazione con i quali Graßmann generava l'intero sistema nella $A1$.

Proprio per questo Jean-Luc Dorier ritiene ad esempio che la *Ausdehnungslehre* del 1862 non possa essere compresa senza la versione del 1844 e preferisce la fondazione intuitiva della $A1$ al nudo formalismo della $A2$.[58] Anche se i concetti di base e di dimensione di cui parleremo tra poco sono definiti ed espressi in modo più esplicito nella $A2$ che non nella $A1$, Dorier ritiene che l'origine di tali concetti sia comunque da ricercare nella prima versione, dove sono discussi contemporaneamente gli aspetti formali e reali, e afferma che solo la conoscenza del metodo di presentazione adottato nella $A1$ permette di comprendere i concetti di base e dimensione espressi nella $A2$.[59] Anche Arno Zaddach nell'interessante volume *Graßmanns Algebra in der Geometrie* ritiene che la versione del 1844 non sia in alcun modo superata dalla versione del 1862 perché la prima contiene informazioni sul processo di generazione delle grandezze estese e sulla creazione 'spirituale' della teoria.[60]

Per mezzo del concetto di unità Graßmann introduce l'idea di un sistema di generatori linearmente indipendenti.

> [G-4] *Definizione.* Chiamo *sistema di unità* [System von Einheiten] una riunione di grandezze che non stanno in relazione numerica reciproca e che serve a derivare altre grandezze da tali unità per mezzo di numeri qualsiasi.[61]

Graßmann chiama sistema di unità un insieme qualunque di grandezze che non stanno in relazione numerica reciproca (grandezze linearmente indipendenti) e che sono unità, cioè servono a derivare altre grandezze per combinazione lineare (svolgono la funzione di un sistema di generatori). Ad

[58] ≪The bare formalism of the $A2$ is the artificial result of Grassmann's attempt to satisfy the criticism received after the edition of 1844; this resulted in the inaccessibility of most intuitive discussion, which is to be found in the $A1$.≫ Cfr. Dorier (1996), p. 182.

[59] ≪Even though the $A2$ brought more explicit statements, the $A1$ is essential to understand the origin and the pertinence of the question which brought these two concepts into focus.≫ Cfr. Dorier (1996), p. 182.

[60] Secondo Zaddach l'opera del 1844 ≪[...] wird noch auf lange Zeit eine Fundgrube für Studien mannigfacher Art bleiben, auch wenn der eigentlich-mathematische Inhalt heute anderweitig (Bourbaki, Pickert) in vorteilhafterer Form dargestellt wird.≫ Cfr. Zaddach (1994), p. 81.

[61] Cfr. l'appendice 7.9, p. 415.

eccezione dell'unità numerica, infatti, tutte le altre unità sono o l'unità originaria (cioè l'unità con cui è stato effettivamente generato il sistema) o unità relative. Proprio il concetto di unità relativa rimanda all'idea moderna di base — con una certa approssimazione, perché, come abbiamo già detto, in Graßmann non c'è una definizione preliminare dell'insieme contenente tutte le grandezze da generare — e in particolare rimandaalla proprietà di una base espressa dal criterio dei generatori linearmente indipendenti.[62]

Nella teoria moderna degli spazi vettoriali si definisce generalmente la base come insieme massimale di vettori linearmente indipendenti, ma questa definizione è equivalente a quella di Graßmann, così come sarebbe equivalente definire una base come il più piccolo insieme di generatori lineari o come l'insieme dei vettori tali che ogni altro vettore dello spazio può essere espresso in modo unico come combinazione lineare di essi.[63] Il modo di definire la nozione di base scelto da Graßmann è fondato su due concetti, quello di indipendenza lineare e quello di generazione, che trovano il loro fondamento nella esposizione della $A1$. Infatti nel 1844 Graßmann prende le mosse da una prima variazione e genera lo spazio delle grandezze linearmente dipendenti da essa, quindi introduce una seconda variazione che per definizione è indipendente rispetto alla prima e genera lo spazio delle grandezze linearmente dipendenti dalle prime due variazioni, e così via. Questo modo di procedere, anche se contiene già un implicito riferimento alla dimensione dello spazio (che corrisponde al numero di variazioni indipendenti considerate successivamente), pone in evidenza il concetto di base come insieme di variazioni indipendenti per mezzo delle quali è possibile generare tutte le altre grandezze. Graßmann fornisce perciò nella $A2$ una definizione che rende conto del procedimento di generazione esposto nella $A1$: lì infatti la base era una sorta di insieme primitivo di variazioni che erano indipendenti per definizione e in grado di generare sistemi di livello via via più alto, qui la base è un insieme di generatori linearmente indipendenti.

Il concetto di unità originaria e la sua differenza rispetto al concetto di unità può essere meglio compreso anticipando l'idea di prodotto vettoriale, di cui ci occuperemo nel § 5.2. Un'unità può essere ad esempio data dal prodotto di due variazioni, cioè dalla variazione di un elemento che genera un tratto e poi dalla variazione dell'intero tratto che genera una superficie. Se l'unità considerata è una superficie, essa sicuramente non può essere un'unità originaria. Se invece è un'unità originaria (uno degli originari m modi

[62]Un insieme di elementi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una base di V se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ generano V e se sono linearmente indipendenti. Dire che gli elementi $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ generano V significa che ogni altro vettore di V deve poter essere espresso come combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Gli elementi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono detti allora *generatori* di V.

[63]Di questi modi equivalenti di definire il concetto di base parleremo ancora più avanti.

di variazione con cui si genera il sistema, allora essa è un tratto, cioè è una grandezza di primo livello. Un sistema di unità originarie ha allora la caratteristica (propria del concetto moderno di base) di essere costituito da tratti (oggi diremmo da vettori).

Soltanto dopo aver introdotto il concetto di base Graßmann introduce una definizione del concetto di grandezza estensiva come grandezza che può essere derivata da un sistema di unità (cioè generata da una base) per mezzo di numeri di derivazione (coefficienti numerici o scalari).

> [G-5] *Definizione*. Chiamo *grandezza estensiva* [extensive Grösse] ogni espressione derivata da un sistema di unità (che non sia però limitato alla unità assoluta) per mezzo di numeri che chiamo *numeri di derivazione* [Ableitungszahlen] delle unità per quella grandezza; ad esempio il polinomio
>
> $$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots,$$
>
> oppure
>
> $$\sum \alpha e \quad \text{oppure} \quad \sum \alpha_r e_r,$$
>
> ove α_1, $\alpha_2, \dots$ sono numeri reali, $e_1, e_2, \dots$ formano un sistema di unità, è una grandezza estensiva, e precisamente la grandezza derivata dalle unità $e_1, e_2, \dots$ per mezzo dei numeri α_1, $\alpha_2, \dots$. Se il sistema consiste solo dell'unità assoluta, la grandezza derivata non è una grandezza *estensiva* ma una grandezza numerica [Zahlgrösse]. Manterrò l'espressione *grandezza* in generale [Grösse überhaupt] solo per questi due generi di grandezze. Quando la grandezza estensiva può essere derivata dalle *unità originarie*, la chiamo una grandezza estensiva di primo livello [erster Stufe].[64]

Graßmann distingue due diversi generi di grandezze: le grandezze numeriche (ottenute dall'unità assoluta, cioè dal numero 1) e le grandezze estensive (ottenute per mezzo di almeno un'unità non assoluta). In questo passo i due diversi generi (numeri ed estensioni) sono riuniti sotto al comune termine 'grandezza in generale' [Grösse überhaupt]. Nella $A1$ invece (e lo vedremo nel § 5.2.4) Graßmann introduce dapprima solo le grandezze estensive e poi mostra che le grandezze numeriche possono essere definite come un caso particolare delle prime.

Nella definizione [G-5] sopracitata Graßmann introduce anche il concetto di livello [Stufe] di una grandezza, concetto che non va confuso con quello di livello di un dominio. Mentre il livello di un dominio corrisponde al concetto moderno di dimensione e viene introdotto soltanto in seguito (si veda più

[64]Cfr. l'appendice 7.9, p. 415.

avanti il passo citato con il numero [G-14]) il livello di una grandezza riguarda il modo in cui essa è composta. Se una grandezza v è esprimibile come combinazione di un certo numero di unità originarie (vettori della base), allora essa è di primo livello, perché le uniche operazioni che entrano in gioco nella composizione della grandezza sono moltiplicazioni per uno scalare e somma di vettori, e dunque può essere espressa come $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots,$. Dopo aver introdotto il prodotto vettoriale, Graßmann considera anche grandezze di livello superiore, come ad esempio la grandezza $w = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 e_3$, che non può essere espressa come combinazione lineare delle sole unità originarie e_1, e_2, e_3 perché contiene non soltanto somme di unità ma anche prodotti vettoriali di unità. Essa è ad esempio esprimibile come combinazione lineare delle unità $e_1, e_2 e_3$, ma $e_2 e_3$ non è un'unità originaria. Se una grandezza di primo livello è un vettore, una grandezza di secondo livello è la grandezza ottenuta come prodotto di due vettori ed è perciò una grandezza di secondo livello.[65] Il prodotto di due vettori infatti, e lo vedremo nel § 5.2.1, non è un vettore ma una superficie orientata. Poiché l'addizione di grandezze di primo livello genera grandezze di primo livello (la somma di vettori è ancora un vettore), le grandezze ottenute per addizione di grandezze di uguale livello sono tra loro omogenee. Ciò che permette di introdurre una differenza di dimensione è l'operazione di prodotto: quest'ultima è la legge generativa che determina la dimensionalità delle grandezze estese e di conseguenza la differenza con i numeri.

Le definizioni seguenti definiscono un'operazione di somma e un'operazione di sottrazione tra grandezze estensive considerate come combinazione lineare della stessa base.

> [G-6]. *Definizione. Addizionare* [addiren] due grandezze estensive che sono derivate dallo stesso sistema di unità significa addizionare i numeri di derivazione che appartengono alle stesse unità, cioè:
>
> $$\sum \alpha e + \sum \beta e = \sum (\alpha + \beta) e.$$
>
> [G-7]. *Definizione. Sottrarre* [subtrahiren] una grandezza estensiva da un'altra derivata dallo stesso sistema di unità significa sottrarre i numeri di derivazione appartenenti alla stessa unità della prima da quelli della seconda, cioè:
>
> $$\sum \alpha e - \sum \beta e = \sum (\alpha - \beta) e.^{66}$$

[65] Il livello di una grandezza è simile al concetto di grado di un polinomio.

[66] Cfr. l'appendice 7.9, p. 416.

Questo punto è importante perché segna una delle differenze essenziali rispetto al procedimento della $A1$, in cui invece la somma tra vettori era definita senza fare riferimento a coefficienti numerici ma in relazione ad una sorta di base primitiva, costituita da variazioni indipendenti. Sommare due grandezze estensive (u, w) espresse come combinazione lineare della stessa base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$

$$\begin{aligned} u + w &= (k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_n e_n) + (j_1 e_1 + j_2 e_2 + \ldots + j_n e_n) \\ &= (k_1 + j_1)e_1 + (k_2 + j_2)e_2 + \ldots + (k_n + j_n)e_n \end{aligned}$$

significa addizionare tra loro i coefficienti (numeri di derivazione) k_i, j_i appartenenti alle stesse unità.

A questo punto Graßmann dimostra le proprietà dell'addizione tra grandezze estensive: la proprietà commutativa (8.1), la proprietà associativa (8.2), due proprietà che caratterizzano la sottrazione come proprietà inversa dell'addizione (addizionare e sottrarre oppure sottrarre e poi addizionare una stessa grandezza ad una grandezza data dà ancora la grandezza di partenza) (8.3 e 8.4).

> [G-8]. [*Teorema*] Per le grandezze estensive a, b, c valgono le seguenti formule fondamentali:
> 1) $a + b = b + a$,
> 2) $a + (b + c) = a + b + c$,
> 3) $a + b - b = a$,
> 4) $a - b + b = a$.[67]

Quindi conclude affermando che per le grandezze estensive valgono tutte le leggi usuali dell'addizione e della sottrazione algebrica.

> [G-9].[*Teorema*] Per le grandezze estensive valgono tutte le leggi dell'addizione e della sottrazione algebrica.[68]

Nella teoria moderna degli spazi vettoriali questo fatto è espresso postulando che l'insieme V dei vettori sia un gruppo commutativo rispetto all'operazione di addizione.

Graßmann dà poi due definizioni che introducono un'operazione di moltiplicazione delle grandezze estensive per un numero e un'operazione inversa di divisione per un numero. Per la moltiplicazione valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} u \cdot j = j \cdot u &= j \cdot (k_1 e_1 + k_2 e_2 + \ldots + k_n e_n) \\ &= jk_1 e_1 + jk_2 e_2 + \ldots + jk_n e_n \end{aligned}$$

[67]Cfr. l'appendice 7.9, p. 416.

[68]Cfr. l'appendice 7.9, p. 416.

[G-10]. *Definizione. Moltiplicare* [multipliciren] una grandezza estensiva per un numero significa moltiplicare tutti i suoi numeri di derivazione per quel numero, cioè:

$$\sum \alpha e.\beta = \beta.\sum \alpha e = \sum (\alpha\beta)e.$$

[G-11]. *Definizione. Dividere* [multipliciren] una grandezza estensiva per un numero diverso da zero significa dividere tutti i suoi numeri di derivazione per quel numero, cioè:

$$\sum \alpha e : \beta = \sum \frac{\alpha}{\beta} e.$$ [69]

Il teorema seguente dimostra che il prodotto per uno scalare è 1. commutativo, 2. associativo, 3. distributivo rispetto all'addizione di vettori, 4. distributivo rispetto all'addizione di numeri, 5. ha come elemento neutro il numero 1, è nullo solo se uno dei due fattori è nullo.

[G-12]. [*Teorema*] Per la moltiplicazione e la divisione di grandezze estensive (a, b) per i numeri (β, γ) valgono le formule fondamentali:
1) $a\beta = \beta a$,
2) $a\beta\gamma = a(\beta\gamma)$,
3) $(a + b)\gamma = a\gamma + b\gamma$,
4) $a(\beta + \gamma) = a\beta + a\gamma$,
5) $a.1 = a$,
6) $a\beta = 0$ se o $a = 0$ o $\beta = 0$,
7) $a : \beta = a\frac{1}{\beta}$ se $\beta \neq 0$.[70]

Infine la condizione 7 enuncia una proprietà dell'operazione inversa di divisione, e cioè che la divisione di un vettore per uno scalare è uguale alla moltiplicazione dello stesso vettore per l'inverso dello scalare. La proprietà 3 corrisponde nella moderna teoria degli spazi vettoriali alla condizione $k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$, la proprietà 4 alla condizione $(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v$, la proprietà 2 alla condizione $k_1(k_2v) = (k_1 \cdot k_2)v$ e la proprietà 5 alla condizione $1v = v$.

Il teorema seguente conclude che per la moltiplicazione e per la divisione per uno scalare valgono le leggi algebriche della moltiplicazione e della divisione.

[G-13]. [*Teorema*] Per la moltiplicazione e la divisione di grandezze estensive per numeri valgono le leggi algebriche della moltiplicazione e della divisione.[71]

[69] Cfr. l'appendice 7.9, p. 416.
[70] Cfr. l'appendice 7.9, p. 416.
[71] Cfr. l'appendice 7.9, p. 417.

§2. Nesso tra le grandezze derivabili da un sistema di unità

Passiamo ora al commento del secondo paragrafo del primo capitolo della *Ausdehnungslehre* del 1862, nel quale Graßmann introduce i concetti di dominio di grandezze estensive (ciò che oggi indicheremmo con l'insieme V dei vettori) e di dimensione di tale dominio. Nella seguente definizione viene chiamato *dominio* [Gebiet] derivabile da una serie di grandezze qualsiasi (non necessariamente indipendenti) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ l'insieme delle grandezze che si possono ottenere da esse per combinazione lineare. Dato un insieme di grandezze, il dominio è il sistema generato da esse.

> [G-14]. *Definizione.* Chiamo la totalità delle grandezze numericamente derivabili da una serie di grandezze $a_1, a_2, \ldots, a_n$ il *dominio* [Gebiet] derivabile da quelle grandezze (il dominio delle grandezze $a_1, a_2, \ldots, a_n$) e in particolare lo chiamo un *dominio di livello* n [n-ter Stufe] se quelle grandezze sono di primo livello (cioè derivabili numericamente da n unità originarie) e *se il dominio non può essere derivato da meno di n tali grandezze.* Un dominio che non contiene alcuna grandezza oltre allo zero lo chiamo dominio di livello nullo.[72]

Mentre nell'approccio assiomatico moderno prima si assume che sia dato un insieme, una totalità di grandezze con certe operazioni e poi si cercano dei criteri per individuare all'interno di questo sistema che tipo e che numero di grandezze potrebbero generarlo, nell'approccio di Graßmann sono date prima certe grandezze (che poi non sono altro che le variazioni indipendenti della $A1$) e poi si determina il sistema che tali grandezze generano.

Solo dopo aver introdotto il concetto di sistema di generatori e in particolare il concetto di base (sistema di unità), e dunque quello di dominio generato da un insieme di grandezze, Graßmann definisce il livello (la dimensione) di un dominio come il minimo numero di grandezze di primo livello che servono a generare il dominio o — in terminologia moderna — come la cardinalità del sistema minimale di generatori del dominio. Tale sistema di generatori è una base o un sistema di unità nel senso di Graßmann, cioè un insieme di grandezze linearmente indipendenti che servono a derivare le altre grandezze.[73] Il concetto di sistema minimale di generatori del dominio è spesso usato, nella teoria moderna degli spazi vettoriali, come criterio per stabilire quando un insieme di vettori è una base.[74]

---

[72]Cfr. l'appendice 7.9, p. 417.

[73]Cfr. la [G-4], p. 415.

[74]Un insieme $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è una base di V se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è un sistema minimale di generatori per V. Dire che $v_1, v_2, \ldots, v_n$ è un insieme minimale di generatori per V significa che $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono generatori di V e che se tolgo uno qualunque dei vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ciò che mi resta non è più un sistema di generatori per V.

Dorier osserva che tra la $A1$ e la $A2$ ci sono forti differenze nel modo di introdurre il concetto di dominio di dimensione n: nella $A1$ la dimensione di un dominio (il livello) è determinata dal numero di variazioni indipendenti, mentre nella $A2$ è determinata dalla minimalità del sistema di generatori.[75] Ciò che Dorier vuole mostrare, tuttavia, non è una contraddizione interna all'opera di Graßmann, dal momento che le due nozioni sono equivalenti (si dimostra infatti che la cardinalità dell'insieme massimale di vettori linearmente indipendenti è uguale alla cardinalità dell'insieme minimale di generatori); Dorier intende piuttosto mettere l'accento sulla profonda differenza concettuale tra $A1$ e $A2$. Nell'$A1$, dove le variazioni sono introdotte una dopo l'altra con l'esplicita funzione di generare il sistema, è in qualche modo scontato che si abbia a che fare con un insieme di generatori e ciò che conta è assumere, passo dopo passo, che la variazione aggiunta è indipendente dalle precedenti. Il problema è proprio quello di rendere l'idea di indipendenza, che è espressa in riferimento agli elementi. Una variazione è indipendente da due variazioni date se permette di raggiungere un elemento non ancora compreso nel sistema generato fino a quel momento. Nell'$A2$, dove non si assume una base di riferimento, è importante mostrare come un insieme di vettori qualsiasi (comunque scelti e non determinati uno dopo l'altro al fine di costruire un dominio di livello n) siano in grado di generare tutte le altre grandezze e siano anche tra loro linearmente indipendenti (in modo cioè che il sistema di generatori non contenga vettori 'superflui').[76] Il concetto di dipendenza è qui definito in maniera precisa per mezzo del concetto di combinazione lineare (relazione numerica reciproca).

Graßmann ha compreso e mostrato già nella $A1$ per mezzo del teorema di scambio (anche se poi non ha esplicitato in tutta chiarezza la conclusione del suo ragionamento) che un sistema di livello m non può essere generato da più di m vettori linearmente indipendenti: tuttavia tale proprietà emerge con maggiore chiarezza nella $A2$, proprio perché qui il dominio è considerato come generato da un insieme di grandezze non necessariamente indipendenti e dunque diventa rilevante studiare il rapporto tra numero dei generatori e indipendenza.

La seguente definizione introduce i due concetti di intersezione (dominio comune) e di somma (dominio congiunto) di due domini.

> [G-15]. *Definizione.* Due domini si dicono *identici* [identisch] se ciascuna grandezza del primo dominio è insieme una grandezza del secondo e viceversa. Se ogni grandezza di un dominio (A) è anche grandezza

[75] Cfr. Dorier (1996), p. 182.

[76] L'equivalenza delle due formulazioni del concetto di base di uno spazio vettoriale di dimensione n è stata dimostrata da Steinitz. Cfr. Dorier (1995) e Krömer (2000).

> di un dominio (B) (senza che il contrario abbia necessariamente luogo), allora chiamo i due domini *incidenti* [incident] e dico anche che il primo dominio (A) è *subordinato* [untergeordnet] al secondo e che il secondo è *sovraordinato* [übergeordnet] al primo. La totalità delle grandezze che appartengono contemporaneamente a due o più domini si chiama il loro dominio *comune* [gemeinschaftliches Gebiet] e la totalità delle grandezze che si lasciano derivare dalle grandezze di due o più domini si chiama il loro dominio *congiunto* [verbindendes Gebiet].[77]

Il dominio comune corrisponde all'intersezione insiemistica: dati due domini di grandezze il loro dominio comune è costituito dalle grandezze che appartengono ad entrambi. Il dominio congiunto non coincide con l'unione insiemistica dei due domini, ma è più ampio rispetto ad essa: esso non comprende soltanto le grandezze di un dominio e le grandezze dell'altro ma anche tutte le grandezze derivabili per combinazione lineare da esse. Ad esempio, dati due insiemi V e W generati rispettivamente dalle basi e_1, e_2 e da e_2, e_3, la somma di V e di W è data non solo dalle grandezze di V che sono del tipo $k_1e_1 + k_2e_2$ e dalle grandezze di W che sono del tipo $j_2e_2 + j_3e_3$ ma anche da tutte le grandezze del tipo $l_1e_1+l_2e_2+l_3e_3$ con l_1 e l_3 non nulli. La definizione di somma (dominio congiunto) data da Graßmann corrisponde alla definizione moderna di somma di due sottospazi di uno spazio vettoriale: la somma dei due insiemi V e W citati sopra è data dall'insieme $V + W$ contenente tutti i vettori della forma $v + w$ con $v \in V$ e $w \in W$, dove però v e w non sono vettori delle basi di V e di W rispettivamente, ma vettori qualunque e perciò rispettivamente della forma $v = k_1e_1 + k_2e_2$ e $w = j_2e_2 + j_3e_3$, la cui somma dà $v + w = k_1e_1 + (k_2 + j_2)e_2 + j_3e_3$.

Il teorema che riportiamo di seguito contiene la dimostrazione di un criterio di dipendenza lineare: n grandezze sono linearmente dipendenti solo se c'è una combinazione lineare di esse che è uguale a zero senza che i coefficienti siano tutti nulli.

> [G-16]. [*Teorema*] Tra le grandezze $a_1, \ldots, a_n$ si ha una relazione numerica se e soltanto se si dà l'uguaglianza
>
> $$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$$
>
> in cui i numeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non sono tutti nulli.[78]

Si tratta dello stesso criterio che oggi è spesso presentato nella forma di un criterio di indipendenza lineare, affermando che le n grandezze sono linear-

[77]Cfr. l'appendice 7.9, p. 417.
[78]Cfr. l'appendice 7.9, p. 418.

mente indipendenti solo se l'unico caso in cui la loro combinazione lineare può essere uguale a zero è quando i coefficienti sono tutti nulli.[79]

A questo punto Graßmann dimostra che dato un insieme di n grandezze linearmente dipendenti, è sempre possibile trovare un sottoinsieme di $n - r$ grandezze linearmente indipendenti e tali che le r grandezze scartate siano derivabili dalle $n - r$ grandezze linearmente indipendenti.

> [G-17]. [*Teorema*] Se n grandezze stanno in relazione numerica reciproca, e non sono tutte nulle, allora da esse si può separare una riunione di meno di n grandezze che non stanno in relazione numerica reciproca e dalle quali sono derivabili numericamente le restanti grandezze.[80]

Il teorema successivo fornisce un criterio di indipendenza lineare: se n grandezze sono tali che la prima non è nulla e nessuna delle successive è derivabile dalle precedenti, allora esse sono linearmente indipendenti.

> [G-18]. [*Teorema*] Se in una riunione di grandezze $a_1, \ldots, a_n$ la prima grandezza a_1 non è nulla, e nessuna delle seguenti si può derivare numericamente dalle precedenti, allora la riunione non soggiace ad alcuna relazione numerica.[81]

Il teorema seguente, noto oggi anche con il nome di teorema dello scambio di Steinitz, afferma che se una grandezza $u = k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_na_n$ e se $k_1 \neq 0$, allora il dominio generato da $u, a_2, \ldots, a_n$ è uguale a quello generato da $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

> [G-19]. [*Teorema*] Se una grandezza a_1 è numericamente derivabile da n grandezze $b_1, b_2, \ldots, b_n$ e il numero di derivazione di b_1 è diverso da zero, allora il dominio derivabile dalle n grandezze $b_1, b_2, \ldots, b_n$ è identico a quello derivabile dalle n grandezze $a_1, b_2, \ldots, b_n$.[82]

Questo teorema è usato oggi nella dimostrazione del teorema del massimo numero di elementi linearmente indipendenti. Il teorema si trova, come

[79]≪Se tra i vettori $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ce n'è uno esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti, allora si dice che i vettori sono linearmente dipendenti; in caso contrario si dice che sono linearmente indipendenti.≫

[80]Cfr. l'appendice 7.9, p. 418.

[81]Cfr. l'appendice 7.9, p. 418.

[82]Cfr. l'appendice 7.9, p. 418.

precisa lo stesso Graßmann in un'annotazione alla $A2$, anche nella $A1$ e precisamente nel § 20.[83]

Il successivo teorema introdotto da Graßmann è simile al teorema di completamento della base, solo che invece di supporre che lo spazio vettoriale sia di dimensione n assume la condizione che le grandezze $a_1, a_2, \ldots, a_n$ derivino da n grandezze $b_1, b_2, \ldots, b_n$.[84]

> [G-20] [*Teorema*] Se m grandezze $a_1, \ldots, a_m$ che non stanno in relazione numerica reciproca sono derivabili numericamente da n grandezze $b_1, \ldots, b_n$, allora alle m grandezze $a_1, \ldots, a_m$ si possono sempre aggiungere $(n-m)$ grandezze $a_{m+1}, \ldots, a_n$ in modo che anche le grandezze $b_1, \ldots, b_n$ siano derivabili numericamente da $a_1, \ldots, a_n$ e allora il dominio delle grandezze $a_1, \ldots, a_n$ è identico al dominio delle grandezze $b_1, \ldots, b_n$; si possono anche sottrarre le $(n-m)$ grandezze dalle grandezze $b_1, \ldots, b_n$.[85]

Un altro teorema afferma che due basi con lo stesso numero di elementi generano lo stesso spazio vettoriale. Questo teorema è sostanzialmente analogo a quello del numero di elementi delle basi nella teoria moderna degli spazi vettoriali: ≪Sia V uno spazio vettoriale e si supponga che esista una base costituita da n elementi, mentre esiste un'altra base costituita da m elementi. Allora $m = n$.≫.

> [G-21]. [*Teorema*] Se le grandezze $(a_1, \ldots, a_n)$ che non stanno in relazione numerica reciproca sono numericamente derivabili da n altre grandezze $(b_1, \ldots, b_n)$, allora il dominio della prima serie di grandezze è identico al dominio della seconda serie di grandezze.[86]

Il teorema successivo esprime il fatto che n grandezze che derivano da $m < n$ grandezze sono linearmente dipendenti. Da ciò è subito chiaro che un dominio di livello n non può essere derivato da meno di n grandezze.[87]

> [G-22]. [*Teorema*] Se n grandezze $(a_1, \ldots, a_n)$ sono numericamente derivabili da meno di n grandezze $(b_1, \ldots, b_m)$, allora quelle n grandezze stanno sempre in relazione numerica reciproca.[88]

[83] Cfr. Graßmann (1844), p. 61 ss. e si veda sopra il § 5.1.1.

[84] Il teorema del completamento della base afferma: ≪Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e siano $v_1, \ldots, v_r$ elementi linearmente indipendenti di V. È possibile allora trovare in V degli elementi $v_{r+1}, \ldots, v_{r+n}$ in modo che $v_1, \ldots, v_n$ sia una base di V.≫

[85] Cfr. l'appendice 7.9, p. 418.

[86] Cfr. l'appendice 7.9, p. 418.

[87] Cfr. Dorier (1996), p. 182.

[88] Cfr. l'appendice 7.9, p. 418.

Del teorema che presentiamo ora già si è detto discutendo il concetto di dimensione di un dominio: esso pone in relazione il numero di dimensioni di uno spazio vettoriale e il massimo numero di generatori di tale spazio linearmente indipendenti.

> [G-23]. [*Teorema*] Se un dominio di livello n è derivabile da n grandezze di primo livello, allora queste grandezze non stanno in relazione numerica reciproca e viceversa: se n grandezze di primo livello non stanno in relazione numerica reciproca, allora il dominio derivabile da esse è un dominio di livello n.[89]

Se un dominio di dimensione n ha un sistema di generatori costituito da n grandezze, allora esse sono linearmente indipendenti (e dunque sono una base del dominio) e viceversa se n grandezze sono linearmente indipendenti in un dominio di dimensione n allora esse costituiscono un sistema di generatori del dominio (e dunque una base). Questo teorema esprime ciò che nella teoria moderna degli spazi vettoriali è espresso dai due criteri per stabilire quando n grandezze di un dominio di dimensione n sono una base: 1. se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti; 2. se $v_1, \dots, v_n$ è un sistema di generatori di V.

Un altro teorema generalizza il rapporto tra il concetto di base e il concetto di dimensione espresso dal teorema precedente, affermando che qualunque insieme di n grandezze linearmente indipendenti in un dominio di dimensione n ne costituisce una base. Dunque il dominio è indipendente dalla base che lo ha generato.

> [G-24]. [*Teorema*] Ogni dominio di livello n può essere derivato da n grandezze che gli appartengono e che non stanno in relazione numerica reciproca e precisamente da n grandezze qualsiasi (di tal tipo e appartenenti al dominio).[90]

Questo teorema, insieme al teorema dello scambio ([G-19]), si trova già nel § 20 della $A1$.[91]

Il teorema seguente introduce la proprietà che è ancora oggi nota come formula di Graßmann ed esprime una relazione tra la dimensione di due domini e la dimensione della somma e della intersezione di quei domini.

---

[89] Cfr. l'appendice 7.9, p. 418.
[90] Cfr. l'appendice 7.9, p. 419.
[91] Cfr. il § 5.1.1.

> [G-25]. [*Teorema*] La somma dei numeri dei livelli di due domini è grande quanto la somma dei numeri dei livelli del loro dominio comune e del loro dominio congiunto, cioè, se m e n sono i numeri dei livelli dei domini dati, r il numero del livello del dominio comune e v il numero del livello del dominio congiunto, allora
>
> $$m + n = r + v.$$ [92]

In termini moderni, essa può essere espressa nel modo seguente:

$$dimX + dimY = dim(X \cap Y) + dim(X + Y).$$

Anche questo teorema si trova già nella $A1$ e precisamente nel § 126.[93] Si tratta di un teorema fondamentale dell'algebra lineare che trova importanti applicazioni nella teoria delle equazioni lineari.

Infine l'ultimo teorema della sezione che consideriamo afferma, in terminologia moderna, che, dati X e Y sottospazi di V, se

$$dimX + dimY > dim(V)$$

allora

$$dim(X \cap Y) \geq dimX + dimY - dim(V).$$

> [G-26]. [*Teorema*] Due domini (A e B) che sono rispettivamente di livello α e β e che giacciono in un dominio di livello n, hanno, se $\alpha + \beta > n$, un dominio comune che ha almeno livello $(\alpha + \beta - n)$.[94]

Questa breve presentazione di alcuni dei risultati raggiunti da Graßmann nella $A2$ permette già di valutare la grande originalità, generalità e novità delle ricerche di Graßmann rispetto al modo usuale di trattare le grandezze estensive. In particolare l'applicazione della teoria dell'estensione alla geometria mostra la differenza rispetto alla geometria tradizionale: non occorre presupporre oggetti di tipo diverso (linee, superfici, volumi) cioè la dimensione non deve essere considerata come una caratteristica già data degli oggetti matematici. Piuttosto assumendo soltanto grandezze omogenee (i 'tratti') è possibile costruire grandezze estese di diverse dimensioni mediante operazioni di prodotto. Inoltre la geometria è soltanto una delle tante applicazioni possibili della Teoria dell'estensione: essa è applicabile anche alla fisica (alla meccanica e alla cristallografia) e alla teoria delle equazioni lineari.[95]

[92] Cfr. l'appendice 7.9, p. 419.

[93] Ne riparleremo nel § 5.2 per porre in evidenza il rapporto tra questo teorema e i concetti di prodotto progressivo e regressivo in Graßmann.

[94] Cfr. l'appendice 7.9, p. 419.

[95] Cfr. in particolare il § 6.1.2.

5.2 Il prodotto di grandezze estese

Nella *Teoria generale delle forme* Graßmann ha messo in evidenza le caratteristiche astratte della connessione che prende il nome di prodotto: essa è un'operazione di secondo livello (c'è chi ha visto un parallelo tra il crescere di livello delle grandezze e il crescere di livello delle operazioni), perché è caratterizzata dalla distributività rispetto ad un'altra connessione. Nella Teoria delle grandezze estensive la definizione puramente formale di moltiplicazione si incarna in un tipo di prodotto che genera grandezze estese di livello superiore.

Le proprietà richieste per caratterizzare un'operazione come moltiplicazione sono di due tipi. L'operazione è innanzitutto una connessione di secondo grado se è distributiva rispetto ad una connessione data. Se una connessione di secondo grado è distributiva sia a destra sia a sinistra rispetto ad un'operazione additiva (cioè un'operazione associativa, commutativa e che ha l'inversa), allora è una moltiplicazione. Si osservi che, perché una connessione di secondo grado sia una moltiplicazione, non si postula in generale né che essa sia associativa né che essa sia commutativa.[96]

In questo paragrafo presenteremo tre tipi di prodotto: esterno, interno, regressivo. I nomi con cui Graßmann indica questi diversi tipi di prodotto variano da un testo all'altro: il prodotto esterno (così chiamato nella $A1$) è detto geometrico nella *Theorie der Ebbe und Flut* (testo nel quale è presentato per la prima volta) mentre è considerato come un caso particolare del prodotto combinatorio nella $A2$ e chiamato progressivo per differenza rispetto al prodotto regressivo nel caso in cui sia riferito ad un dominio fondamentale. Il prodotto interno al quale Graßmann fa un brevissimo cenno nella prefazione alla $A1$ e che sviluppa invece nella $A2$ è introdotto già nella *Theorie der Ebbe und Flut* con il nome di prodotto lineale.

5.2.1 Prodotto esterno o geometrico

Nello scritto *Theorie der Ebbe und Flut* il prodotto geometrico di due segmenti è definito come la superficie orientata costituita dal parallelogramma che essi delimitano: tale prodotto ha un valore numerico (scalare) determinato come prodotto delle lunghezze dei segmenti per il seno dell'angolo compreso. Tale valore è massimo quando i vettori sono perpendicolari (infatti il seno dell'angolo ha valore unitario) e si annulla quando i vettori sono collineari (il seno dell'angolo è nullo). Il prodotto geometrico di tre segmenti è definito come il parallelepipedo generato da essi.

[96] Per un'analisi esauriente di tutti i tipi di prodotto considerati da Graßmann si veda in particolare Graßmann (1854).

> Per prodotto geometrico di due vettori intendiamo la superficie del parallelogrammo determinato da tali vettori, ove sia fissata la posizione del piano in cui giace il parallelogrammo. Consideriamo due superfici geometricamente uguali solo quando sono uguali e giacciono su piani paralleli. Per prodotto geometrico di tre vettori intendiamo il solido (il parallelepipedo) formato da essi.[97]

Già in questo scritto del 1840 Graßmann dimostra le proprietà fondamentali del prodotto tra segmenti: associatività e distributività, commutatività con cambio di segno (anticommutatività), l'annullarsi del prodotto quando i segmenti sono paralleli. Analizziamo ora più in dettaglio il modo in cui Graßmann introduce il prodotto vettoriale nella $A1$ e nella $A2$, per mostrare che anche in relazione al prodotto, come già in relazione all'addizione e alla sottrazione tra vettori, la differenza tra la $A1$ e la $A2$ non è soltanto una differenza espositiva o notazionale ma una differenza concettuale.

Il prodotto esterno nella $A1$

Non commentiamo qui la parte iniziale del secondo capitolo della $A1$, dedicato ad un'applicazione alla geometria (alla moltiplicazione di segmenti), ma affrontiamo subito lo sviluppo teorico. Ritorneremo nel § 6.1.2 sulle applicazioni del calcolo vettoriale alla geometria e più in generale sul rapporto tra Teoria dell'estensione e geometria.

Dopo aver introdotto nel primo capitolo le estensioni generate per mezzo di un elemento, e la connessione di estensioni che produce estensioni dello stesso genere (cioè dello stesso livello), Graßmann introduce nel secondo capitolo estensioni di livello superiore. Dalla totalità degli elementi di un tratto è possibile generare, sottoponendo tutti gli elementi alla stessa variazione, una nuova grandezza estensiva. Sia ad esempio a il tratto dato e si sottopongano tutti i suoi elementi ad una variazione secondo il tratto b: il tratto a è in questo caso il 'generatore', il tratto b è la 'misura' della generazione e il 'risultato' della generazione è una parte limitata del sistema di secondo livello determinato da a e b. Per analogia con quanto avviene nel sistema di primo livello, si suppone che anche il sistema di secondo livello sia semplice, cioè sia composto di parti omogenee e che dunque due qualunque estensioni del sistema di secondo livello siano tra loro omogenee.[98]

L'estensione generata da a e b nel modo sopra descritto è definita come risultato di una generica connessione $\frown$ tra i due tratti:

[97] Cfr. Graßmann (1840), p. 30. Si veda anche Crowe (1967), pp. 61-2.
[98] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 31, in Graßmann (1844), pp. 80-1.

> per $a \frown b$, ove a e b sono tratti, intendiamo per ora quella estensione che è generata quando ogni elemento di a genera il tratto b e in particolare tale estensione è concepita come una delle parti del sistema di secondo livello omogenea alle altre parti del sistema.[99]

Questa definizione è poi estesa al caso di più di due tratti:

> per $a \frown b \frown c \frown \ldots$, ove $a, b, c, \ldots$ sono un qualunque numero, ad esempio n tratti, intendiamo per ora quella estensione che ha origine quando ogni elemento di un tratto a genera il tratto b, ciascuno degli elementi che così risultano genera il tratto c e così via, e in particolare intendiamo che questa estensione sia posta come omogenea alle restanti parti dello stesso sistema di livello n. Noi chiamiamo l'estensione così generata un'estensione di livello n.[100]

A questo punto Graßmann assume che la connessione così introdotta sia distributiva a destra e a sinistra rispetto all'addizione di tratti omogenei e pertanto sia una moltiplicazione.[101]

Quindi assume che l'operazione di prodotto sopra definita sia distributiva non solo rispetto all'addizione di tratti omogenei, ma rispetto all'addizione di grandezze estensive qualunque. In particolare si mostra la seguente proprietà generale della moltiplicazione:

> se un fattore contiene un sommando omogeneo ad uno dei fattori vicini, tale sommando può essere trascurato.[102]

Sia b_1 omogeneo a b, allora:

$$(a + b_1)b = ab \qquad \text{e} \qquad b(a + b_1) = ba$$[103]

In ciò è già compreso il fatto che se due fattori vicini sono omogenei, il prodotto si annulla. L'operazione moltiplicativa caratterizzata da questa legge (cioè dal fatto che il prodotto di due fattori omogenei si annulla) prende il nome di prodotto esterno o moltiplicazione esterna [äussere Multiplikation].[104]

Graßmann mostra poi che

$$P.a.b.Q = -P.b.a.Q$$

[99]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 31, in Graßmann (1844), p. 80.
[100]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 31, in Graßmann (1844), p. 80.
[101]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 32, in Graßmann (1844), p. 83.
[102]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 34, in Graßmann (1844), pp. 85-6.
[103]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 33, in Graßmann (1844), p. 83.
[104]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 34, in Graßmann (1844), p. 86.

e cioè che il prodotto è commutativo solo a condizione di invertire il segno: in particolare Graßmann sviluppa una legge dei segni, secondo la quale il segno non cambia se commuto un numero pari di volte, mentre cambia se commuto un numero dispari di volte.[105]

In base alle proprietà precedenti si mostra la validità della proprietà distributiva del prodotto di n fattori rispetto all'addizione di grandezze nel caso in cui uno dei fattori sia scomposto in parti in modo che tutti i fattori e tutte le parti appartengano allo stesso sistema di livello n:

> se in un prodotto di n fattori semplici uno di essi è diviso in modo che tutti i fattori e le parti appartengano allo stesso sistema di livello n, allora continua a valere la relazione moltiplicativa (rispetto all'addizione).[106]

Il prodotto così definito prende il nome di prodotto esterno perché solo se i fattori si separano (se escono l'uno al di fuori dell'altro), cioè se il prodotto genera una nuova estensione, esso ha un valore non nullo: al contrario se i fattori rimangono uno nell'altro, se non producono una nuova estensione, il prodotto è nullo.[107]

Così Graßmann riassume i risultati fin qui ottenuti:

> Se per prodotto esterno di n tratti si intende la grandezza estensiva di livello n che è generata quando ogni elemento del primo tratto genera il secondo e ogni elemento così generato genera il terzo e così via e in modo che ogni grandezza estensiva di livello n possa essere concepita come parte omogenea alle altre parti del sistema di livello n al quale appartiene, allora valgono per tale prodotto — fintanto che i prodotti di n fattori sono considerati solo all'interno dello stesso sistema di livello n — tutte le leggi che esprimono la relazione della moltiplicazione all'addizione e alla sottrazione e inoltre la legge che i fattori semplici possono essere commutati solo cambiando il segno.[108]

Due sono dunque le regole caratteristiche del prodotto esterno: 1) commutando l'ordine dei fattori il prodotto cambia di segno; 2) il prodotto di due vettori di uguale direzione è nullo. Proprio per questa ragione Graßmann ha in seguito chiamato questo tipo di prodotto con il nome di 'esterno': esso ha valore non nullo solo se i vettori si allontanano l'uno dall'altro, solo cioè se hanno direzioni divergenti. Esempi di possibili applicazioni del prodotto

[105] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 35, in Graßmann (1844), p. 87.
[106] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 36, in Graßmann (1844), p. 88.
[107] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 36, in Graßmann (1844), p. 89.
[108] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 36, in Graßmann (1844), pp. 88-90.

esterno sono lo studio dei momenti delle forze e la soluzione di equazioni a grado n in n incognite.[109]

Da dove trae origine la condizione che il prodotto di due fattori omogenei si annulla? Essa deriva dal fatto che il prodotto genera un'estensione. Ad esempio un segmento che varia secondo un segmento non omogeneo genera una superficie, mentre se varia secondo un segmento ad esso omogeneo (cioè collineare) non genera alcuna superficie. Ecco perché il prodotto di fattori omogenei si annulla: variando l'uno lungo l'altro non si può infatti generare una superficie. Così più in generale il prodotto di due grandezze genera una grandezza di livello superiore solo se le due grandezze non sono omogenee. Più in generale ancora, il prodotto di n grandezze non indipendenti è nullo, perché esse non potrebbero generare una grandezza di livello n.

Siccome questo tipo di prodotto è caratterizzato allo scopo di generare grandezze estensive di livello superiore,il prodotto di grandezze omogenee o in generale il prodotto di grandezze dipendenti deve essere posto uguale a zero.[110] Il prodotto di n fattori è sempre nullo se uno dei fattori è nullo (è, diremmo oggi, il vettore nullo) e questo sia perché un tratto nullo può essere sempre considerato come linearmente dipendente dagli altri tratti sia perché con un tratto nullo non si può generare una grandezza estensiva di livello superiore.[111]

Prodotto combinatorio e prodotto esterno nella $A2$

Il procedimento con cui Graßmann introduce il concetto di prodotto esterno nella $A2$ segue un andamento completamente diverso. Ciò è dovuto innanzitutto al fatto che nella $A2$ Graßmann prende le mosse dalla determinazione delle grandezze come combinazioni lineari. Dunque fin dall'inizio esse sono caratterizzate da coefficienti numerici di cui occorre tenere conto nella definizione del prodotto e nella determinazione delle proprietà di tale definizione.

Il capitolo 2 della $A2$ si intitola "La formazione del prodotto in generale" e prende le mosse dalla definizione generale di una operazione moltiplicativa. Il prodotto è però definito come prodotto di grandezze estensive espresse come combinazione lineare e non in maniera puramente formale come nella Teoria generale delle forme che precedeva la $A1$. Date due grandezze $\alpha = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n = \sum a_re_r$ e $\beta = b_1e_1 + b_2e_2 + \ldots + b_me_m = \sum b_se_s$ con $e_1, e_2, \ldots, e_n$ unità originarie del sistema e $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ coefficienti

[109] Per quanto riguarda l'applicazione alla soluzione di equazioni si vedano in particolare il § 45 e il § 93 della $A1$.

[110] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 32, in Graßmann (1844), p. 83.

[111] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 2, § 32, in Graßmann (1844), p. 83.

numerici, il prodotto tra di esse è così definito:

$$[\alpha\beta] = [\sum a_r e_r \sum b_s e_s] = \sum a_r b_s [e_r e_s]$$

Il prodotto può essere una grandezza oppure un numero: questo dipende da come si definisce ulteriormente il prodotto tra le unità $[e_r e_s]$.[112] In una annotazione Graßmann cita tre modi diversi di definire il prodotto delle unità $[e_r e_s]$ per mezzo della proprietà commutativa e dei casi in cui il prodotto si annulla (vedremo in seguito i rapporti tra questi diversi tipi di prodotti e il calcolo vettoriale moderno):

1. $[e_r e_s] = [e_s e_r]$

Il prodotto è commutativo e ha le stesse proprietà della moltiplicazione algebrica.[113]

2. $[e_r e_s] = -[e_s e_r]$, $[e_r e_r] = 0$ e $[e_s e_s] = 0$

Il prodotto è anticommutativo (si possono commutare i fattori solo a condizione di invertire il segno) e si annulla se due fattori sono linearmente dipendenti.[114] Si tratta del prodotto esterno della $A1$, qui chiamato combinatorio se è espresso come prodotto di unità originarie ed esterno se i fattori possono essere grandezze estensive qualunque (di livello qualsiasi e non necessariamente di primo livello come le unità).

3. $[e_r e_s] = 0$, $[e_s e_r] = 0$, $[e_r e_r] = 1$ e $[e_s e_s] = 1$

Questo tipo di moltiplicazione prende il nome di prodotto interno proprio perché è diverso da zero solo nel caso in cui i fattori siano linearmente dipendenti, siano cioè interni l'uno all'altro, omogenei.[115]

Prima di procedere alla determinazione del prodotto combinatorio e delle sue proprietà, Graßmann introduce alcune proprietà generali del prodotto, che valgono nel caso in cui i fattori del prodotto siano espressi, come è il caso nella $A2$, per mezzo di combinazioni lineari (e dunque di coefficienti numerici). Queste proprietà non sono presenti nella $A1$ proprio perché lì le grandezze estensive non sono espresse mediante combinazioni lineari di grandezze primitive o unità.

Ecco, in sintesi, le proprietà generali del prodotto[116] (le lettere greche stanno per coefficienti, le lettere latine per le grandezze e le parentesi quadre simboleggiano il prodotto):

$$1. [\sum \alpha_r e_r . b] = \sum \alpha_r [e_r . b]$$

[112] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 2, § 1, in Graßmann (1862), p. 28.
[113] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 2, § 1, in Graßmann (1862), p. 29.
[114] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 2, § 1, in Graßmann (1862), p. 29.
[115] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 2, § 1, in Graßmann (1862), p. 29.
[116] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 2, § 1, in Graßmann (1862), pp. 28-31.

$$2.(a+b+\ldots)p = [ap]+[bp]+\ldots; p(a+b+\ldots) = [pa]+[pb]+\ldots$$

$$3.[(\alpha a)b] = \alpha[ab]; [b(\alpha a)] = \alpha[ba]$$

$$4.[(\alpha a+\beta b+\ldots)p] = \alpha[ap]+\beta[bp]+\ldots; [p(\alpha a+\beta b+\ldots)] = \alpha[pa]+\beta[pb]+\ldots$$

$$5.[\sum \alpha_r a_r . \sum \beta_s b_s] = \sum \alpha_r \beta_s [a_r b_s]$$

Graßmann introduce poi la seguente definizione di prodotto 'lineale' o moltiplicazione:

> Definizione. Ogni modo di formare il prodotto [Produktbildung] le cui uguaglianze determinanti [Bestimmugsgleichen] restano valide se al posto delle unità che compaiono in esse si sostituiscono grandezze qualunque numericamente derivabili da esse si chiama formazione di prodotto lineale [lineale] (moltiplicazione).[117]

Abbiamo tradotto 'lineale' con lineale anziché con il termine oggi consueto 'lineare', perché ciò che Graßmann vuole esprimere è qualcosa di ben preciso, che il seguente passo esprime con chiarezza:

> Definizione. Se da una successione di grandezze si deriva una seconda successione di grandezze aggiungendo ad una qualunque grandezza della successione un multiplo della grandezza vicina nella successione, mentre tutte le altre grandezze della successione sono lasciate invariate, allora io dico che la prima successione è trasformata nella seconda per mezzo di una *variazione lineale semplice* [einfache lineale Aenderung]; se da questa seconda successione si deriva a sua volta una terza successione con una variazione lineale semplice, e così via, allora io dico che la prima successione è trasformata nell'ultima per mezzo di una variazione lineale *molteplice* [mehrfache]. In entrambi i casi dico che la prima successione è trasformata nell'ultima per mezzo di una variazione lineale.[118]

Ancora più importante ai fini della comprensione del significato di 'lineale' è l'annotazione che segue alla definizione sopra riportata:

> La scelta dell'espressione si riferisce alla contrapposizione con una variazione che sarà trattata più oltre e che io chiamo variazione circolare. Entrambe le espressioni rimandano alla geometria e in particolare alle due figure fondamentali della geometria, la linea retta [gerade Linie] e il cerchio [Kreis] o piuttosto alla riga [Lineal] e al compasso [Zirkel] in quanto, come mostrerò più tardi, la variazione lineale si può realizzare in geometria nel modo più semplice per mezzo della riga, mentre la

[117]Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 2, § 3, n. 50, in Graßmann (1862), p. 34.
[118]Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 3, § 2, n. 71, in Graßmann (1862), p. 49.

> variazione circolare si può realizzare nel modo più semplice per mezzo del compasso.[119]

Tornando ora al concetto di moltiplicazione o prodotto lineale, si può osservare innanzitutto che le 'uguaglianze determinanti' di cui si parla altro non sono che le proprietà per mezzo delle quali si caratterizza il prodotto. Graßmann infatti prosegue affermando che soltanto due tipi di prodotto (cioè soltanto due tipi di operazioni associative e distributive rispetto ad un'operazione additiva) soddisfano alla condizione definitoria della 'linealità'; essi sono espressi rispettivamente dalle proprietà seguenti:

$$1. [e_r e_s] + [e_s e_r] = 0$$

$$2. [e_r e_s] = [e_s e_r]$$

Queste sono le uguaglianze determinanti che devono soddisfare alla proprietà suddetta, ovvero essere tali da rimanere valide per sostituzione in esse di un'unità con un'unità linearmente dipendente.

Consideriamo ora il prodotto caratterizzato dalla seconda proprietà: esso è commutativo, quindi è un prodotto con le stesse proprietà della moltiplicazione algebrica. Benché dunque dal punto di vista delle leggi del calcolo esso appaia decisamente più semplice, non è facile interpretare che tipo di grandezza sia il prodotto così ottenuto. Infatti le grandezze così ottenute come prodotto non sono più grandezze semplici ma hanno piuttosto a che fare con le funzioni algebriche.[120] Proprio per motivi di semplicità nello studio delle grandezze, Graßmann è dunque condotto — così afferma — alla scelta della prima uguaglianza per caratterizzare il prodotto di grandezze:

> Poiché nello sviluppo della scienza si tratta prima di ogni altra cosa di afferrare le grandezze che via via risultano nel loro concetto più semplice, così qui si impone necessariamente il passaggio al primo genere di moltiplicazione.[121]

Infatti in un prodotto che rispetta la prima condizione, come quello esterno, in cui si pone inoltre che $[e_r e_r] = 0$, è facile ridurre il calcolo semplificando, mentre non è altrettanto facile se il prodotto rispetta la seconda condizione. Consideriamo un esempio proposto da Graßmann stesso.[122] Sia dato il prodotto, nel caso di due unità e_1, e_2, dei seguenti fattori:

$$[(q_1 e_1 + q_2 e_2)(r_1 e_1 + r_2 e_2)] = q_1 r_1 [e_1 e_1] + q_2 r_2 [e_2 e_2] + q_1 r_2 [e_1 e_2] + q_2 r_1 [e_2 e_1]$$

[119] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 3, § 2, n. 71, in Graßmann (1862), p. 49. Si noti che la lingua tedesca presenta la stessa affinità etimologica tra 'lineale' e 'Lineal' che sussiste tra 'circulär' e 'Zirkel'. Cfr. anche Beutelspacher (1996).

[120] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 2, § 3, in Graßmann (1862), p. 38.

[121] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 2, § 3, in Graßmann (1862), p. 38.

[122] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 2, § 3, in Graßmann (1862), pp. 37-38.

Se il prodotto soddisfa la prima condizione, ponendo $[e_1e_1] = [e_2e_2] = 0$ e ricordando che $[e_1e_2] = -[e_2e_1]$ si può semplificare ottenendo:

$$(q_1r_2 - q_2r_1)[e_1e_2]$$

Se il prodotto soddisfa la seconda condizione, anche semplificando si ottengono sempre non una ma almeno tre unità distinte:

$$q_1r_1[e_1e_1] + q_2r_2[e_2e_2] + (q_1r_2 + q_2r_1)[e_1e_2]$$

Si osservi la differenza tra la $A1$ e la $A2$ in relazione all'introduzione del prodotto geometrico: nella $A1$ la proprietà caratteristica del prodotto è determinata dall'esigenza di definire un'operazione che permetta di descrivere la generazione di grandezze di livello superiore e a questo scopo si introduce la proprietà che il prodotto di due grandezze omogenee sia nullo. Nella $A2$ invece la proprietà caratteristica del prodotto esterno è introdotta come una proprietà invariante rispetto a trasformazioni lineali, il che è intrinsecamente legato al concetto di combinazione lineare sviluppato nei primi paragrafi. Se questo fatto è molto importante perché esplicita la natura affine della trasformazioni rispetto alle quali sono invarianti le grandezze estensive, d'altra parte essa implica anche la dipendenza della trattazione dai coefficienti numerici introdotti insieme al concetto di combinazione lineare. Nella $A2$ inoltre la scelta della proprietà del prodotto di annullarsi per fattori omogenei è giustificata con la ricerca di una maggiore semplicità del calcolo, mentre nella $A1$ Graßmann era soprattutto preoccupato di spiegare in che modo il prodotto potesse generare estensioni di livello superiore.

Introduciamo ora le proprietà specifiche del prodotto che soddisfa alla condizione della anticommutatività e che Graßmann chiama prodotto combinatorio. Innanzitutto ricordiamo che la definizione di prodotto combinatorio è relativa alle unità originarie del sistema e non a grandezze qualunque.

> Definizione. Se i fattori di un prodotto P sono derivati da un sistema di unità e se è nulla la somma di due prodotti di tali unità ottenuti l'uno dall'altro scambiando gli ultimi due fattori, ma ogni prodotto che contiene unità diverse come fattori è diverso da zero, allora io chiamo quel prodotto P un prodotto *combinatorio* e chiamo fattori semplici i suoi fattori; cioè se b e c sono *unità* e A una qualunque *successione di unità*, allora la determinazione che abbiamo assunto è espressa dalla formula:
>
> $$[Abc] + [Acb] = 0.$$[123]

[123]Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 3, § 1, in Graßmann (1862), p. 38.

Da ciò deriva innanzitutto che si possono scambiare tra loro gli ultimi due fattori a condizione di cambiare di segno il prodotto, poi Graßmann dimostra che questa proprietà vale non solo per gli ultimi due fattori ma per due fattori qualunque. La legge dei segni che regola lo scambio dei fattori afferma, come abbiamo visto già nella $A1$, che se il numero degli scambi è pari, il segno non cambia, mentre se il numero degli scambi è dispari il segno cambia. Graßmann dimostra poi che due fattori uguali annullano il prodotto, così come due fattori linearmente dipendenti.[124]

Dopo aver introdotto i determinanti per il calcolo del prodotto, Graßmann dimostra ancora che le proprietà del prodotto combinatorio sono invarianti rispetto alla base scelta, vale a dire, nel linguaggio di Graßmann, che «tutte le leggi della moltiplicazione combinatoria continuano a valere anche se al posto delle n unità originarie si introducono n grandezze derivate da esse e che non stanno in relazione numerica reciproca.»[125]

Solo a questo punto della trattazione Graßmann si pone il problema di caratterizzare il risultato del prodotto combinatorio come una grandezza e dunque di caratterizzare il prodotto combinatorio come prodotto esterno. Il procedimento è dunque opposto a quello che abbiamo visto nella $A1$ dove invece il presupposto da cui partire per determinare le proprietà del prodotto era proprio il fatto che esso avrebbe dovuto 'generare' una grandezza. La seguente osservazione di Graßmann è molto interessante per capire quali requisiti un'operazione deve avere per poter essere considerata un'operazione tra grandezze:

> Osservazione preliminare. Quando una connessione tra grandezze deve essere a sua volta riconosciuta come una grandezza, occorre rispondere alle seguenti domande: quando due connessioni di quel tipo sono tra loro uguali o diverse? quando stanno in una relazione numerica reciproca e in quale? Per completare il concetto allora è anche importante poter derivare tutte le successioni di grandezze che, sottoposte alla connessione in questione, danno la stessa grandezza. Qui occorre rispondere a queste domande in relazione al prodotto combinatorio e per farlo poniamo a fondamento il concetto di combinazione moltiplicativa [multiplikative Kombination].[126]

In altre parole, se il prodotto combinatorio di n fattori deve avere come risultato un dominio di un certo livello n, occorre poter determinare da quali successioni di fattori può essere determinato lo stesso dominio, in modo che questo sia univocamente determinato come risultato del prodotto. Ancora

[124] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 3, § 1, in Graßmann (1862), pp. 38-42.
[125] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 3, § 1, in Graßmann (1862), p. 46.
[126] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 3, § 2, in Graßmann (1862), p. 46.

una volta è evidente la differenza di prospettiva rispetto alla $A1$: nella $A1$ i fattori sono le n variazioni indipendenti che generano il sistema, mentre nella $A2$ bisogna chiarire quanti modi diversi di generare il sistema ci possono essere. Anche se non abbiamo intenzione di presentare in dettaglio gli sviluppi della $A2$, vogliamo almeno accennare al fatto che per mezzo del concetto di combinazione moltiplicativa (che è una sorta di generalizzazione della nozione di relazione numerica reciproca introdotto all'inizio), Graßmann dimostra che due prodotti combinatori non nulli stanno in una relazione numerica reciproca se e solo se i domini derivabili dai rispettivi fattori sono uguali. Infine Graßmann mostra che il prodotto combinatorio di una successione di grandezze è invariante per trasformazioni lineali e che se due prodotti combinatori non nulli sono uguali i rispettivi fattori possono essere ottenuti gli uni dagli altri per trasformazione lineale.[127]

Solo a questo punto Graßmann definisce il concetto di grandezza di livello m come combinazione moltiplicativa delle m unità originarie: tale grandezza è semplice se è esprimibile come prodotto combinatorio di m grandezze di primo livello, composta in caso contrario.[128] E solo a questo punto Graßmann introduce anche il termine di prodotto esterno per designare il prodotto di grandezze qualunque, definito per mezzo del prodotto combinatorio di unità di livello superiore.[129]

La differenza di prospettiva tra $A1$ e $A2$ ben rappresenta l'interazione tra approccio geometrico e approccio algebrico. Nel primo caso lo scopo del prodotto è quello di generare una grandezza e le proprietà specifiche dell'operazione (anticommutatività e annullamento del prodotto di vettori collineari) sono stabilite tenendo conto delle proprietà geometriche. Nel secondo caso il prodotto è introdotto in maniera molto generale come moltiplicazione algebrica di numeri complessi: non si individuano dunque subito le proprietà del prodotto in modo che questo produca grandezze estese (geometriche), ma si considerano dapprima tutte le possibili proprietà astratte di tale prodotto. Un altro esempio molto significativo di questo procedimento algebrico si trova nell'articolo "Sur les différents genres de multiplication" pubblicato da Graßmann nel 1854, in cui si analizzano differenti tipi di prodotto in base alle proprietà astratte che possono avere: se il prodotto commuta con variazione di segno oppure senza, se il prodotto di due fattori uguali si annulla o è diverso da zero, ecc.[130]

---

[127] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 3, § 2, in Graßmann (1862), p. 47-55.
[128] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 3, § 2, in Graßmann (1862), p. 56.
[129] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, cap. 3, § 3, in Graßmann (1862), p. 56.
[130] Cfr. Graßmann (1854).

5.2.2 Prodotto interno o scalare

Accanto al prodotto geometrico di due segmenti definito come la superficie orientata determinata dai due segmenti stessi, e al valore numerico che esprime tale area determinato come prodotto delle lunghezze dei segmenti per il seno dell'angolo compreso, in *Theorie der Ebbe und Flut* Graßmann introduce anche un altro tipo di prodotto tra segmenti, che chiama *prodotto lineale*.

> Per prodotto lineare di due segmenti intendiamo il prodotto algebrico di un segmento moltiplicato per la proiezione perpendicolare del secondo su di esso. Scegliamo il segno $\frown$ come segno della moltiplicazione lineare, in modo che per definizione $a \frown b = ab\cos(ab)$. Da questa definizione e poiché $\cos(ab) = cos(ba)$, vediamo che $a \frown b = b \frown a$.[131]

Il prodotto lineare di segmenti così definito nella *Theorie der Ebbe und Flut* è sostanzialmente identico a quello che oggi prende il nome di prodotto scalare tra vettori e che si può definire per spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ nel modo seguente:

> Dati due vettori $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ si chiama prodotto scalare o interno dei due vettori il numero reale:
>
> $$\langle \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2} \rangle = |\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}| \cos\theta.$$
>
> Il prodotto scalare è un'applicazione $\mathbf{V^n} \times \mathbf{V^n} \rightarrow \mathbf{R}$ che gode delle seguenti proprietà:
> 1. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$
> 2. $\langle k\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = k\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$
> 3.$\langle (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}), \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$
> 4. $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle \geq 0$ ($= 0$ se e solo se $\overrightarrow{u} = 0$)

Nella $A1$ il *prodotto interno* è presentato rapidamente soltanto nell'introduzione come prodotto aritmetico di un vettore per la proiezione ortogonale dell'altro su di esso:

> Quando io proietto un tratto perpendicolarmente sull'altro, il prodotto aritmetico di questa proiezione per il tratto sul quale è stata proiettata si pone analogamente come prodotto di quei tratti, in quanto anche in questo case vale la relazione moltiplicativa rispetto all'addizione.[132]

[131]Cfr. *Theorie der Ebbe und Flut* in Graßmann (1840), pp. 40, 212. Si veda anche Crowe (1967), p. 63.

[132]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, Prefazione alla prima edizione, in Graßmann (1844), p. 11.

Come nel caso del prodotto esterno, cui Graßmann ha fatto cenno poco prima, anche nel caso di questa operazione aritmetica (il cui risultato è un numero) vale la proprietà distributiva rispetto all'addizione tra tratti, dunque anche in questo caso a buon diritto si può parlare di prodotto.

> Ma il prodotto era di un tipo del tutto diverso dal primo [il prodotto esterno] in quanto i suoi fattori potevano essere commutati senza cambio di segno e il prodotto di due tratti perpendicolari appariva come nullo. Io ho chiamato quel primo prodotto esterno, quest'ultimo interno, in quanto il primo aveva un valore non nullo soltanto nel caso di direzioni che si disgiungono, mentre quest'ultimo solo nel caso di direzioni che si avvicinano. Questo concetto del prodotto interno, che mi si era presentato come necessario già nella elaborazione della meccanica analitica conduceva nello stesso tempo al concetto di lunghezza assoluta.[133]

Il prodotto interno ha dunque questo nome perché ha valore non nullo soltanto se i due vettori si avvicinano, mentre è nullo se sono ortogonali.[134] Il prodotto interno non è sviluppato nella $A1$ (avrebbe dovuto fare parte del secondo volume che Graßmann non ha mai pubblicato) ma è trattato nello scritto *Geometrische Analyse*, vincitore del Premio Jablonovski nel 1847. Qui Graßmann definisce dapprima il prodotto tra tratti paralleli:

> (Definizione 3.) Per prodotti interni di due tratti paralleli intendo grandezze tali da poter essere poste proporzionali ai numeri che risultano se si misurano i due tratti paralleli di ciascun prodotto interno con la stessa misura e si moltiplicano tra loro i quozienti di tali due misurazioni, assumendo però tutte le misure di uguale lunghezza. Il prodotto interno di due tratti sia indicato con $a \times b$, il quadrato interno $a \times a$ con a^2.[135]

Graßmann non definisce il prodotto interno di segmenti direttamente come un numero ma come una grandezza proporzionale ad un certo numero: il prodotto così definito è commutativo e distributivo. Quindi Graßmann definisce il prodotto di segmenti non paralleli:

> (Definizione 4.) Per prodotto interno $a \times b$ di due segmenti non paralleli a e b si deve intendere il prodotto del primo per la proiezione perpendicolare del secondo sul primo.[136]

[133] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, Prefazione alla prima edizione, in Graßmann (1844), p. 11.
[134] Cfr. Graßmann (1844), p. 11.
[135] Cfr. *Geometrische Analyse*, § 7, in Graßmann (1847), p. 345.
[136] Cfr. *Geometrische Analyse*, § 7, in Graßmann (1847), p. 347.

Il prodotto interno è ripreso anche nella $A2$, ma qui il concetto di prodotto interno è fondato sulla nozione di completamento [Ergänzung] di una grandezza. Graßmann infatti definisce il prodotto interno di due unità di qualunque livello come il prodotto della prima per il completamento della seconda:

> Il prodotto interno di due qualunque grandezze è uguale al corrispondente prodotto della prima per il completamento della seconda, cioè $[A|B]$ è il prodotto interno delle grandezze A e B.[137]

Ma che cos'è il completamento di una grandezza? Esso è definito per mezzo del concetto di completamento di un'unità, il quale suppone a sua volta il concetto di dominio fondamentale [Hauptgebiet] o dominio delle unità originarie:

> Se in un dominio fondamentale [Hauptgebiet] di livello n il prodotto combinatorio delle n unità originarie $e_1, e_2, \ldots, e_n$ è posto uguale a 1, e E è un'unità di qualunque livello, cioè o una delle unità originarie o un prodotto combinatorio di alcune di esse, allora chiamo ≪completamento di E≫ quella grandezza che è uguale od opposta al prodotto combinatorio E' di tutte le unità non presenti in E, a seconda che $[EE']$ sia uguale all'unità o opposto ad essa. Designo il completamento di una grandezza con un trattino verticale posto prima del segno di grandezza, dunque designo il completamento di E con $|E$. Il completamento di un numero lo pongo uguale a quel numero.[138]

Se ad esempio $E = [e_1e_2e_3e_4]$, allora $E' = [e_5e_6 \ldots e_n]$ e dunque o $|E = E'$ se $[EE'] = 1$ oppure $|E = -E'$ se $[EE'] = -1$. Sulla base di questa definizione di completamento di un'unità Graßmann definisce poi il concetto di completamento di una grandezza in generale:

> Per completamento di una qualunque grandezza A intendo quella grandezza $|A$ che si ottiene se nell'espressione che rappresenta la derivazione numerica di quella grandezza dalle unità si sostituisce al posto di quelle unità il rispettivo completamento, cioè
>
> $$|(\alpha_1E_1 + \alpha_2E_2 + \ldots) = \alpha_1|E_1 + \alpha_2|E_2 + \ldots,$$
>
> ove $E_1, E_2, \ldots$ sono unità di qualunque livello.
> Se n è il numero del livello del dominio fondamentale e α è il numero del livello della grandezza A, allora il numero del livello della grandezza che è il completamento di A è $n - \alpha$.[139]

[137] Cfr. $A2$, cap. 4, § 1 , in Graßmann (1862), p. 112.
[138] Cfr. $A2$, cap. 3, § 4 , in Graßmann (1862), p. 62.
[139] Cfr. $A2$, cap. 3, § 4 , in Graßmann (1862), pp. 62-3.

Il completamento di una figura da un punto di vista geometrico è una figura ad essa perpendicolare: ad esempio se il dominio è il piano il completamento di un segmento è un segmento ad esso perpendicolare; se il dominio è lo spazio il completamento di un segmento è il piano ad esso perpendicolare e il completamento di un piano è il segmento ad esso perpendicolare.

Tornando ora alla definizione di prodotto interno per mezzo del concetto di completamento, si può osservare che il prodotto interno di due segmenti in un piano, ad esempio $A = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ e $B = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ è il prodotto di A per il completamento di B e cioè:

$$[(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 |e_1 + \beta_2 |e_2)] = [(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_2 + \beta_2 e_1)] = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$$

Il completamento di B rispetto ad A può essere considerato come il segmento che rappresenta la distanza da B ad A, cioè come il segmento perpendicolare ad A e passante per B. Scegliamo ora un esempio in cui il segmento A sia parallelo all'unità e_1 e otteniamo subito che in questo caso si ha che: $\alpha_2 = 0$. Il prodotto interno di A e di B è allora: $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \alpha_1\beta_1$, cioè è uguale al prodotto della misura di A (α_1 rappresenta la coordinata di A lungo e_1) per la misura della proiezione di B su A (rappresentata in questo caso particolare dalla coordinata β_1) poiché A è parallelo ad e_1 (fig. 5.6). In altre parole il prodotto interno definito come prodotto di una grandezza per il completamento dell'altra comprende come caso particolare il prodotto interno definito nella *Theorie der Ebbe und Flut* e in effetti Graßmann dimostra che il prodotto interno di due grandezze dello stesso livello è un numero.[140]

5.2.3 Prodotto regressivo

Accanto al prodotto esterno e al prodotto interno Graßmann definisce un tipo diverso di prodotto, che chiama *prodotto regressivo* (regressiv) o *applicato* (eingewandt): esso permette di calcolare il prodotto di fattori all'interno di un sistema di un certo ordine dato.

Nello scritto "Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre" un prodotto combinatorio i cui fattori di primo ordine siano grandezze di ordine $(n-1)$ che giacciono però tutte in uno e in uno stesso dominio di livello n è chiamato prodotto applicato e in particolare un prodotto applicato relativo [bezüglich] a quel dominio. Esempi di prodotto applicato sono ad esempio il prodotto di segmenti in un piano o il prodotto di superfici nello spazio.[141] Se consideriamo le linee AB e AC, il prodotto applicato (simboleggiato da

[140] Cfr. *A*2, cap. 4, § 1 , in Graßmann (1862), p. 114.
[141] Cfr. Graßmann (1845), p. 310.

un punto basso) $AB.AC$ in un piano è uguale ad $ABC.A$, cioè dati due parti di linee incidenti, il prodotto è il punto di intersezione A con una parte del piano ABC come coefficiente. Se si assume una parte del piano come unità, allora le parti di piano da cui i punti sono affetti appaiono come vere e proprie grandezze numeriche e i prodotti appaiono come punti molteplici.[142]

Il prodotto regressivo o applicato è descritto con più ampi dettagli nel terzo capitolo della seconda sezione della $A1$, cioè nella sezione dedicata alle grandezze elementari.

Il prodotto esterno presentato da Graßmann nella prima sezione della $A1$ è caratterizzato dal fatto di annullarsi quando due fattori sono uguali o dipendenti l'uno dall'altro. Questa idea di dipendenza — osserva Graßmann — non risiede nel concetto stesso di prodotto, dunque il prodotto deve poter essere definito in un modo più generale in cui tale dipendenza sia tolta oppure sia sostituita da un'altra condizione.[143] Due sistemi di livello superiore sono tra loro dipendenti quando ci sono grandezze che appartengono a entrambi: questo implica che essi contengano oltre a tali grandezze anche l'intero sistema che esse generano. Si può dunque definire una dipendenza tra due sistemi di grado m se essi hanno in comune un sistema di grado m. Si dirà anche che due grandezze hanno un grado di dipendenza m se i sistemi che esse determinano hanno un grado di dipendenza m (si potrebbe anche dire che esse hanno grado di dipendenza m se m è il livello del massimo fattore cui entrambe si lasciano ridurre o ancora se m è il livello del sistema che esse hanno in comune).[144]

A ogni grado di dipendenza tra i sistemi corrisponde un tipo di moltiplicazione e tutti questi tipi di moltiplicazione possono essere riuniti sotto al nome di prodotto applicato [eingewandtes Produkt]. Un prodotto applicato reale di grado m è caratterizzato dal fatto che i fattori dipendono tra di loro almeno in grado m (cioè hanno in comune un sistema che ha almeno grado m, o ancora l'intersezione dei rispettivi spazi ha almeno grado m) e dal fatto che in ciascun fattore può essere trascurata soltanto una parte che dipenda da un altro fattore secondo un grado superiore a quello del prodotto stesso. Il prodotto è nullo sia se uno dei fattori è nullo sia se uno dei fattori dipende da un altro fattore secondo un grado superiore a quello del prodotto o, detto in altre parole, se il grado del sistema comune ai due fattori è superiore al grado del prodotto.[145] Se indichiamo con p il numero del livello del prodotto applicato e con $a \cap b$ il numero del sistema comune ai due fattori non nulli

[142]Cfr. Graßmann (1845), p. 311.

[143]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, sezione II, cap. III, § 125, in Graßmann (1844), p. 206.

[144]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, sezione II, cap. III, § 125, in Graßmann (1844), pp. 206-7.

[145]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, sezione II, cap. III, § 125, in Graßmann (1844), p. 207.

di livello a e b rispettivamente, un prodotto di livello p è un prodotto in cui

$$a \cap b \geq p.$$

Per definizione infatti si esclude il caso in cui $a \cap b < p$, perché esso dà luogo a valori formali e non reali (nell'edizione del 1877, alla luce dei risultati nel frattempo dimostrati nella $A2$, il prodotto applicato è dichiarato inutile). Ciò che in particolare caratterizza il prodotto regressivo è il fatto che se i due fattori sono non nulli, il prodotto è non nullo se e solo se

$$a \cap b = p.$$

È possibile determinare il concetto di prodotto applicato in riferimento non al sistema comune ai due fattori (come si è fatto finora per mezzo del concetto di dipendenza), cioè all'intersezione dei sistemi determinati dalle grandezze da moltiplicare, ma in riferimento al sistema cui i due fattori (le due grandezze) appartengono. A questo fine occorre introdurre il concetto di più piccolo sistema che comprende i due fattori dati, sistema cui Graßmann dà il nome di "zunächst umfassende", difficile da tradurre se non con la perifrasi "il primo che li comprende".[146] Trovare il più piccolo sistema che comprende due grandezze date significa cercare il sistema che le comprende entrambe e che ha il livello più piccolo. Proprio da queste ricerche finalizzate alla precisazione del concetto di prodotto applicato Graßmann arriva nella $A1$ alla presentazione di quella formula (detta ancora oggi di Graßmann) di cui già abbiamo parlato alla fine del § 5.1.2 e che abbiamo indicato con il numero [G-25].[147] Nella $A1$ il linguaggio è lievemente diverso, ma il concetto e la dimostrazione sono analoghi. Ecco l'enunciato della formula:

> Quando due grandezze A e B hanno come massimo fattore comune una grandezza C e si pone una di esse, ad esempio B uguale al prodotto esterno CD, allora il prodotto dell'altra per la grandezza D, cioè il prodotto AD, rappresenta il più piccolo sistema che comprende entrambe le grandezze date.
>
> Se indichiamo i numeri dei livelli delle quattro grandezze A, B, C, D con le lettere minuscole corrispondenti e indichiamo il livello del più piccolo sistema che comprende A e B con u, allora abbiamo che u è uguale ad $a + d$ o che, poiché $B = CD$, e dunque $b = c + d$, che
>
> $$u = a + b - c$$
>
> o
>
> $$u + c = a + b$$

[146]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, sezione II, cap. III, § 126, in Graßmann (1844), p. 208.
[147]Cfr. anche l'appendice 7.9 a p. 419.

> o
>
> $$c = a + b - u$$
>
> cioè:
>
> I numeri di livello di due grandezze sono, presi insieme, altrettanto grandi del numero del livello del sistema ad essi comune e del più piccolo sistema che le comprende;
>
> o
>
> dal numero del livello del sistema comune a due grandezze si trova il numero del livello del più piccolo sistema che le comprende se si sottrae il primo dalla somma dei numeri dei livelli delle singole grandezze;
>
> o
>
> dal numero del livello del più piccolo sistema che comprende due grandezze si trova il numero del livello del sistema comune ad esse per sottrazione del primo dalla somma dei numeri dei livelli delle singole grandezze.[148]

Per mostrare la corrispondenza tra questa formula e quella enunciata nella $A2$ e riportata sopra alla fine del § 5.1.2 è sufficiente porre $a = m$, $b = n$, $r = c$ e $u = v$ per ottenere $m + n = r + v$.

Chiamiamo numero di riferimento [Beziehungszahl] del prodotto applicato il numero che rappresenta la differenza tra la somma dei numeri dei livelli dei fattori e il numero del livello del prodotto applicato e indichiamolo con g. Avremo allora per definizione:

$$g = a + b - p.$$

Si è visto sopra che il prodotto di due fattori non nulli ha per definizione valore non nullo solo se il numero del livello del sistema ad essi comune è uguale al numero del livello del prodotto applicato, cioè solo se

$$a \cap b = p,$$

o, poiché $c = a \cap b$ solo se

$$p = c.$$

Dalla formula di Graßmann ricaviamo che $c = a + b - u$ e dunque possiamo dire che il prodotto è non nullo solo se

$$p = a + b - u.$$

[148]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, sezione II, cap. III, § 126, in Graßmann (1844), p. 209.

Ricordando che il numero di riferimento del prodotto g è stato definito come la differenza tra la somma dei numeri dei livelli dei fattori e il numero del prodotto applicato, si avrà ora che il prodotto è non nullo solo se

$$g = a + b - p = a + b - (a + b - u) = u,$$

cioè soltanto se il numero di riferimento del prodotto è uguale al numero del livello del più piccolo sistema che comprende le grandezze. Il prodotto ha invece valore nullo quando $g > u$ (se invece fosse $g < u$ il prodotto avrebbe solo un valore formale).[149]

Il prodotto esterno di due grandezze non nulle è nullo solo se sono dipendenti, cioè se il numero del livello del più piccolo sistema che le comprende è uguale alla somma dei livelli dei due fattori

$$u = a + b$$

o, se consideriamo come sistema di riferimento per il prodotto esterno il sistema il cui livello è maggiore o uguale alla somma dei livelli delle grandezze, solo se

$$g \geq a + b.$$

La proprietà del prodotto può allora essere espressa in generale dicendo che:

un prodotto di due valori non nulli è nullo solo se i fattori sono indipendenti e se il più piccolo sistema che li comprende ha livello minore di quello del sistema di riferimento, cioè se

$$u < a + b \wedge u < g.$$

Viceversa il prodotto è non nullo se

$$a + b = u \vee u = g.$$

Se vale il primo disgiunto il prodotto è esterno, se vale il secondo il prodotto è applicato ed ha livello zero. Si può formulare anche la seguente generalizzazione:
se in un prodotto di due fattori non nulli, il livello della somma dei fattori è più piccolo del numero di riferimento, allora il prodotto è esterno; se è più grande, il prodotto è applicato e il suo livello è la differenza della somma dei fattori meno il numero di riferimento; se è uguale, il prodotto è sia esterno sia applicato di livello zero:
1. se $a + b < g$ il prodotto è esterno;

[149] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, sezione II, cap. III, § 127, in Graßmann (1844), p. 210.

2. se $a + b > g$ il prodotto è applicato di livello $p = a + b - g$;
3. se $a + b = g$ il prodotto è esterno e applicato di livello $p = 0$.[150]

Grazie al concetto di sistema di riferimento di un prodotto, Graßmann ottiene quindi il risultato di generalizzare il concetto stesso di prodotto, in modo da formulare un'unica regola per stabilire quando si annulla, sia che si tratti di un prodotto esterno, sia che si tratti di un prodotto applicato.

Un esempio geometrico può aiutare a comprendere la differenza tra prodotto progressivo e regressivo. Assumiamo come dominio di riferimento lo spazio a tre dimensioni e consideriamo: 1. il prodotto di due segmenti, 2. il prodotto di due superfici, 3. il prodotto di una superficie per un segmento.

1. Nel caso dei segmenti abbiamo che $a + b < g$ perché i segmenti hanno livello 1 e lo spazio ha livello 3: dunque $1+1 < 3$. Il prodotto di due segmenti nello spazio è progressivo: è una superficie.

2. Nel caso del prodotto di superfici abbiamo che $a + b > g$ perché le superfici hanno livello 2 e lo spazio ha livello 3: dunque $2 + 2 > 3$. Il prodotto è regressivo ed ha livello $p = a + b - g$ cioè $p = 2 + 2 - 3 = 1$: dunque il prodotto applicato di due superfici in uno spazio è un segmento (è la loro intersezione).

3. Nel caso del prodotto di una superficie per un segmento nello spazio abbiamo che $a + b = g$ perché $2 + 1 = 3$. Il prodotto è esterno e genera un solido. Il prodotto può però anche essere considerato come applicato di livello $p = 2 + 1 - 3 = 0$, cioè come un punto (l'intersezione tra la superficie e il segmento). Tutto questo vale però solo nel caso in cui i fattori siano indipendenti, cioè solo se 1. i segmenti non sono collineari, 2. le superfici non sono collineari, 3. il segmento non giace nel piano.

Una definizione generale di prodotto, comprensiva del prodotto esterno e del prodotto applicato è fornita da Graßmann nella *A*2, anche se la terminologia è modificata.

> Definizione. Se la somma dei numeri del livello di due unità è più piccola o altrettanto grande del numero del livello n del dominio fondamentale, allora io intendo per prodotto progressivo il prodotto esterno di esse, tuttavia con la determinazione che il prodotto progressivo delle n unità originarie sia 1. Al contrario se la somma dei numeri del livello di due unità è più grande del numero di livello n del dominio fondamentale, intendo per prodotto regressivo di esse quella grandezze il cui completamento è il prodotto progressivo dei completamenti di quelle unità.
>
> Riunisco insieme il prodotto progressivo e il prodotto regressivo sotto il nome di prodotto riferito ad un dominio fondamentale.[151]

[150] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, sezione II, cap. III, § 128, in Graßmann (1844), p. 211.
[151] Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, sez. I, cap. 3, § 5, in Graßmann (1862), p. 65.

All'interno di un dominio fondamentale Graßmann riesce dunque a fornire una definizione generale di prodotto che comprenda sotto di sé il prodotto esterno e il prodotto applicato o, come sono anche chiamati qui, il prodotto progressivo e il prodotto regressivo e a porli in relazione reciproca. Sul fondamentale significato geometrico del prodotto regressivo e in generale sulle applicazioni geometriche di tutti i tre tipi di prodotto torneremo nel capitolo 6.

5.2.4 Le grandezze numeriche nella $A1$

Nella $A2$ la moltiplicazione delle grandezze estese per uno scalare, cioè per un numero, è introdotta già nei numeri 10-13 del primo capitolo perché l'esposizione della Teoria dell'estensione è fondata sul concetto di numero reale, che è presupposto già nella prima definizione dell'opera, cioè nel concetto di combinazione lineare. Nella $A1$ invece Graßmann dichiara di voler sviluppare la Teoria dell'estensione in modo del tutto indipendente dalla teoria dei numeri e per questo non desume dall'aritmetica il concetto di numero con le proprietà algebriche che lo contraddistinguono. Tuttavia il concetto di numero (e in particolare quello di numero reale o di campo numerico) è molto importante nella definizione odierna del concetto di spazio vettoriale, come già si è accennato durante l'analisi della $A2$ e come vedremo anche meglio nel § 6.2.2. Assume allora un rilievo storico e filosofico significativo la domanda se la definizione del prodotto per un numero (oggi diremmo per uno scalare) sia già presente nella $A1$ e in che termini.

Il concetto di prodotto per uno scalare e di somma tra scalari, con tutte le proprietà algebriche usuali, sono in effetti presenti anche nella $A1$, e in particolare nei §§ 60-73 della parte teorica del quarto capitolo, che ora commenteremo brevemente. Abbiamo posticipato la trattazione dei numeri perché essi sono definiti per mezzo dell'operazione di prodotto esterno: sono infatti introdotti come gli unici quozienti tra grandezze il cui valore è determinato univocamente, ove per quoziente si deve intendere il risultato di un'operazione inversa dell'operazione di prodotto esterno.

La divisione esterna consiste, in quanto operazione inversa del prodotto esterno, nella ricerca, quando sono dati un prodotto esterno ed un suo fattore, dell'altro fattore.[152] Sia dato ad esempio un prodotto $AB = C$, allora la divisione $C : A$ è una grandezza solo se il divisore A è subordinato o è di livello inferiore al dividendo C: in particolare il livello del quoziente sarà uguale alla differenza del livello del dividendo e del livello del divisore.[153] Tuttavia, anche

[152] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 60, in Graßmann (1844), p. 118.
[153] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 61, in Graßmann (1844), p. 119.

ove questa condizione sia soddisfatta, il quoziente è in generale determinato solo a meno di una certa altra grandezza e questo è conseguenza di una particolare proprietà del prodotto esterno: sappiamo infatti che il prodotto di due fattori omogenei è nullo. Questo significa che date le grandezze A, B tra loro indipendenti e la grandezza A_1 omogenea ad A, avremo che:

$$AB = C \quad \text{ma anche che} \quad A(B + A_1) = AB + AA_1 = AB + 0 = AB = C.$$

In altre parole il prodotto esterno non è una funzione iniettiva: se infatti indichiamo con f l'applicazione prodotto esterno e con x, y, z le grandezze alle quali è applicato, quanto detto significa che

$$f(x, y) = f(x, z) \not\Rightarrow y = z.$$

Infatti $(B + A_1) \neq B$ e ciononostante sono uguali i prodotti di ciascun fattore per A. Se l'applicazione non è iniettiva, non è determinata univocamente l'operazione inversa e dunque il quoziente di due grandezze è determinato a meno di una certa altra grandezza. Può essere:

$$\frac{C}{A} = B \quad \text{ma anche} \quad \frac{C}{A} = B + A_1,$$

cioè il quoziente è determinato a meno di una grandezza omogenea al divisore, che Graßmann esprime nel modo seguente: $\frac{0}{A}$, perché tutte le grandezze omogenee ad una grandezza data sono quelle che moltiplicate per essa danno valore nullo.

Riassumendo, il quoziente di due grandezze C e A tali che il divisore A sia subordinato e di livello inferiore al dividendo C è determinato in modo soltanto parziale, cioè:

$$\frac{C}{A} = B + \frac{0}{A}.$$ [154]

In una nota Graßmann precisa che il membro indeterminato dell'uguaglianza sopra citata può essere confrontato con la costante indeterminata dell'integrazione e che il procedimento che si introduce nei due casi è lo stesso.[155]

L'analogia è ancora più chiara se si considera qual è il significato geometrico dell'operazione di quoziente così definita. Assumiamo il caso semplice del prodotto di due tratti a, b e supponiamo che $ab = C$ ove C è una certa superficie orientata. Per le proprietà del prodotto esterno se a_1 è un tratto omogeneo (collineare) ad a, allora avremo anche che $a(b + a_1) = ab + aa_1 = ab + 0 = ab = C$. Dunque anche il prodotto del tratto a per la somma del

[154] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 62, in Graßmann (1844), pp. 120-1.
[155] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 62, in Graßmann (1844), p. 121.

tratto b con un certo altro tratto a_1 omogeneo ad a è rappresentata dalla superficie orientata C. Geometricamente questo fatto, come si vede nella figura 5.7, ha un significato molto importante, perché vuol dire che la stessa superficie è ottenuta sia come prodotto di a per b sia come prodotto di a per un qualunque tratto che abbia per elemento iniziale lo stesso elemento iniziale di a e per elemento finale un qualunque elemento che appartenga alla retta parallela ad a e passante per l'elemento finale di b. In altre parole, tutti i parallelogrammi che hanno uguale base e uguale altezza hanno anche uguale superficie.

A causa della mancata iniettività dell'operazione di prodotto esterno, non è dunque possibile definire un'operazione inversa univoca: questo significa dunque anche che per il quoziente esterno di grandezze non sono valide in generale le leggi della divisione aritmetica. Per avere un quoziente esterno al quale siano applicabili tali leggi, occorrerebbe innanzitutto avere un prodotto esterno con la seguente proprietà (indichiamo con A, B, C grandezze, di cui C è indipendente rispetto a B, e con C_1 una grandezza omogenea a C):

$$BC = A \wedge BC_1 = A \qquad \Rightarrow \qquad C = C_1.$$

In questo caso infatti il valore di $\frac{A}{B}$ è determinato in modo univoco. Questa condizione è soddisfatta ad esempio nel quoziente tra grandezze omogenee del tipo $\frac{A}{A_1}$. In particolare il prodotto del quoziente di due grandezze omogenee $\frac{A}{A_1}$ per una qualunque altra grandezza B dà una grandezza B_1 omogenea a B che soddisfi alla condizione:

$$AB = A_1B_1.$$ [156]

La seguente nota spiega con grande chiarezza perché nella $A1$ Graßmann non abbia semplicemente introdotto dei numeri per esprimere il rapporto tra grandezze omogenee così definito:

> Con un'occhiata alla teoria dei numeri, con cui la nostra scienza qui entra in contatto senza però prendere in prestito proposizioni da essa, è subito chiaro che se A_1 è un multiplo di A, allora anche B_1 deve essere quello stesso multiplo di B e perciò se noi per $\frac{A}{A_1}$ intendiamo il numero che indica che A_1 è un multiplo di A, allora B_1 potrebbe essere rappresentato nella forma $\frac{A}{A_1}B$. Tuttavia per quanto semplice possa essere questa applicazione della teoria dei numeri, noi non possiamo assumerla qui senza nuocere alla nostra scienza. E questo tradimento della nostra scienza si vendicherebbe ben presto per mezzo delle complicazioni e delle difficoltà in cui noi ci imbatteremmo subito

[156] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 63, in Graßmann (1844), pp. 121-3.

> con il concetto della irrazionalità. Noi rimarremo dunque fedeli alla nostra scienza senza lasciarci sedurre dalla prospettiva ingannevole di una via più comoda.[157]

A questo punto Graßmann mostra che il prodotto di una qualunque grandezza C indipendente rispetto ad A e a B per $\frac{A}{A_1}$ è definito univocamente. Infatti

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A}{A_1}C = \frac{B}{B_1}C.$$ [158]

Oggi diremmo che il prodotto per il quoziente di due grandezze omogenee (cioè il prodotto per uno scalare) è un'applicazione f, poiché $x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$. In seguito Graßmann mostra anche che il prodotto per il quoziente di due grandezze omogenee è anche distributivo rispetto alla somma di grandezze (il che ne fa a tutti gli effetti un quoziente tra grandezze):

$$\frac{A}{A_1}(B + C) = \frac{A}{A_1}B + \frac{A}{A_1}C.$$ [159]

Poiché il livello della grandezza quoziente era stato definito come la differenza del livello del dividendo e del livello del divisore, il quoziente di due grandezze omogenee può allora essere considerato come una grandezza di livello nullo, il che spiega anche perché qualunque grandezza moltiplicata per un quoziente di due grandezze omogenee dia una grandezza che ha lo stesso livello di quella di partenza.[160]

Le grandezze di livello nullo ottenute come quoziente di grandezze omogenee sono chiamate da Graßmann *grandezze numeriche* [Zahlengrössen].[161] Il prodotto delle grandezze numeriche per le grandezze estese è univoco e distributivo rispetto alla somma di grandezze estese per quanto si è appena visto. Esso è inoltre associativo e commutativo. Dopo aver definito infine il prodotto di più grandezze numeriche ed aver precisato che il quoziente di due grandezze numeriche è determinato univocamente solo se il denominatore è non nullo, Graßmann conclude che

> *tutte le leggi della moltiplicazione e della divisione aritmetica sono valide per la connessione di grandezze numeriche tra loro e con le grandezze estese.*[162]

[157]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 63, nota, in Graßmann (1844), pp. 121-3.
[158]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 64, in Graßmann (1844), pp. 123-6.
[159]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 66, in Graßmann (1844), pp. 126-9.
[160]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 66, nota, in Graßmann (1844), p. 129.
[161]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 68, in Graßmann (1844), p. 130.
[162]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 71, in Graßmann (1844), p. 134.

Tuttavia, precisa ancora in nota, con ciò non si prende in prestito alcuna proposizione dall'aritmetica, perché le operazioni così dette aritmetiche sono state definite nella Teoria generale delle forme in modo indipendente dai numeri. Al contrario appare qui una sorta di dipendenza della moltiplicazione aritmetica rispetto al prodotto esterno, perché la prima è un genere particolare del secondo, cioè un caso che si verifica quando i fattori sono grandezze estese di livello nullo.[163]

Seguendo l'uso di Graßmann, possiamo indicare $\frac{A}{A_1}$ con il simbolo greco α, $\frac{B}{B_1}$ con il simbolo greco β e indicare con C, D grandezze estese qualunque e riassumere le proprietà del prodotto di una grandezza numerica per una o più grandezze estese nel modo seguente:

1. $\alpha(C + D) = \alpha C + \alpha D$
2. $\alpha(CD) = (\alpha C)D$
3. $\alpha A = A\alpha$.
4. $\alpha : \beta$ è determinato univocamente solo se $\beta \neq 0$

Graßmann osserva a questo punto che tra le grandezze estese di livello nullo, cioè le grandezze numeriche come egli le ha definite (e che indichiamo nel seguito con simboli dell'alfabeto greco), è possibile definire anche un'operazione additiva commutativa e associativa, rispetto alla quale l'operazione di prodotto tra grandezze numeriche è distributiva:

5. $\alpha C + \beta C = (\alpha + \beta)C$
6. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
7. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
8. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Graßmann conclude:

> *Tutte le leggi delle connessioni aritmetiche valgono anche per le connessioni delle grandezze numeriche tra loro e con le grandezze estese; e tutte le leggi della moltiplicazione esterna e della sua relazione all'addizione e alla sottrazione restano valide anche se si considerano le grandezze numeriche come grandezze estese di livello nullo; soltanto con ciò il risultato della divisione diventa determinato.*[164]

Infine introduce una osservazione molto interessante sull'applicazione del concetto di indipendenza alle grandezze numeriche: poiché per le grandezze numeriche devono valere le proprietà della moltiplicazione esterna, deve valere anche la proprietà per cui il prodotto di due grandezze dipendenti si annulla. Le grandezze numeriche devono allora essere considerate tutte tra

[163] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 71, in Graßmann (1844), p. 134.
[164] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 73, in Graßmann (1844), p. 137.

loro indipendenti, anche se tutte tra loro omogenee, altrimenti il prodotto di due qualunque di esse sarebbe sempre banalmente nullo. Mentre non stupisce la considerazione dei numeri come grandezze omogenee, è più difficile comprendere cosa significhi l'affermazione che i numeri sono tutti tra loro indipendenti.[165]

Per completezza indichiamo infine la corrispondenza tra le proprietà del prodotto per uno scalare presentate nei passi citati della $A1$ e le proprietà del prodotto per uno scalare presentate nel n.12 della $A2$.[166] Innanzitutto le proprietà indicate qui con i numeri 4,7-9, cioè le proprietà associativa, commutativa e distributiva del prodotto tra grandezze numeriche e l'univocità del quoziente quando il denominatore è non nullo non erano esplicitate nella $A2$ in quanto già presupposte come proprietà algebriche dei numeri reali. La proprietà 1, cioè la distributività del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di grandezze estese era espressa dal punto 3), la proprietà 3, cioè la commutatività del prodotto per uno scalare era espressa dal punto 1), la proprietà 5, cioè la distributività del prodotto esterno rispetto alla somma di grandezze numeriche era espressa dal punto 4). La proprietà 2 era espressa in altro modo al punto 2), cioè nella forma $C\alpha\beta = C(\alpha\beta)$, mentre nella $A1$ mancano due altre proprietà esplicitate invece nella $A2$: la 5) $C.1 = C$ e la 6) $C\alpha = 0$ se o $C = 0$ o $\alpha = 0$.[167]

[165]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, cap. 4, § 73, in Graßmann (1844), p. 137.

[166]Cfr. *Ausdehnungslehre 1862*, § 1, n. 12, in Graßmann (1862), p. 14. Si veda anche il § 5.1.2 e il passo riportato con il numero [G-12] nell'appendice 7.9 a p. 416.

[167]Cfr. il passo riportato con il numero [G-12] nell'appendice 7.9 a p. 416.

Capitolo 6

Le grandezze estese

Quest'ultimo capitolo è dedicato allo studio del rapporto tra filosofia, geometria e algebra in relazione ai concetti di forma e grandezza estensiva, così come essi sono presentati nell'opera di Hermann Graßmann. Al di là delle influenze dimostrabili storicamente, la concezione dinamica della *Naturphilosophie* permette di comprendere meglio sia il concetto di forma come oggetto determinato da una legge generativa sia il concetto di estensione presentato nella $A1$. Analizzando la concezione dinamica della *Naturphilosophie* emerge un'analogia tra il concetto schellinghiano di costruzione dello spazio tridimensionale e l'idea di Graßmann della determinazione di grandezze di dimensioni via via superiori mediante il concetto di prodotto geometrico. Tale analogia a livello generale si accompagna però a differenze più marcate non appena si confronta la concezione schellinghiana della produzione dello spazio con la generazione delle grandezze estese nella $A1$. Accanto allo stretto rapporto tra filosofia e matematica, rapporto che si rivela nella concezione grassmanniana delgli oggetti matematici come forme di pensiero e nella generazione delle grandezze estese, un motivo filosoficamente interessante dell'opera di Graßmann riguarda il rapporto tra geometria e algebra. In Graßmann trova infatti attuazione il progetto leibniziano di un calcolo geometrico che permetta di operare direttamente su grandezze senza trasformare i problemi geometrici in equazioni algebriche.

La *Teoria dell'estensione* di Graßmann è fondata sul concetto di 'tratto', vale a dire sull'idea di una grandezza estesa di cui si possono considerare direzione e lunghezza, cioè di un vettore. Benché Graßmann non abbia fornito un contributo diretto, storicamente documentabile, allo sviluppo del calcolo vettoriale moderno, l'indagine del rapporto tra il concetto di vettore e le grandezze estese mette in evidenza una caratteristica significativa del nuovo calcolo: esso non si riduce ad una semplice abbreviazione notazionale, ma, come coglie molto bene Maxwell, ha un significato più profondo. Il calcolo vettoriale permette di operare direttamente con gli oggetti (siano essi fisici o geometrici) e attribuisce un significato ad ogni passo della dimostrazione o dello sviluppo simbolico. La novità del calcolo di Graßmann, anche rispetto alla teoria dei quaternioni di Hamilton, consiste proprio nel fatto che esso è presentato esplicitamente e fin dall'inizio come un calcolo che può essere sviluppato in maniera del tutto indipendente dall'introduzione di coordinate.

Se i contributi di Graßmann non sono stati decisivi nella costruzione del calcolo vettoriale moderno, ben altro discorso si può e si deve fare per quanto riguarda i contributi allo sviluppo della teoria matematico-algebrica degli spazi vettoriali. L'assenza in Graßmann di una formulazione assiomatica della teoria degli spazi vettoriali non deve indurre a sminuire il significato storico della sua concezione: l'*Ausdehnungslehre* è rilevante sia perché ha ispirato la presentazione assiomatica di Peano sia soprattutto perché ha stabilito i concetti fondamentali dell'algebra lineare e ne ha dimostrato alcuni importanti risultati. Non meno importante da un punto di vista storico è è la ripresa bourbakista del concetto di prodotto geometrico di Graßmann nella costruzione della multialgebra.

Il significato fondazionale della teoria dell'estensione di Graßmann emerge come soluzione di un problema essenzialmente matematico: come rappresentare geometricamente lo studio di curve descritto da equazioni algebriche di grado superiore a tre? Per risolvere questo problema Graßmann prende le mosse da una concezione metodologica ed epistemologica determinante: la scelta di indagare le grandezze estese senza introdurre un insieme arbitrario di coordinate. Questa impostazione permette di fondare in modo nuovo la stessa geometria per mezzo del concetto di vettore e soprattutto permette di studiare i rapporti tra geometria affine, proiettiva, metrica. La distinzione tra numero e figura geometrica è mantenuta come opposizione tra oggetti adimensionali e oggetti che hanno una dimensione, ma è tolta nella formulazione di un concetto più generale di forma, che può essere applicato ad entrambi. Proprio questa concezione formale dell'oggetto della matematica permette sia una nuova definizione della stessa sia una ristrutturazione delle sottodiscipline matematiche per mezzo dei modi di generazione delle forme.

6.1 Generazione e calcolo

Pur senza pretendere di riscontrare un'influenza storicamente documentabile della *Naturphilosophie* sulla concezione grassmanniana delle grandezze estese come prodotto di grandezze di livello inferiore è tuttavia utile analizzare brevemente la concezione dinamica della natura propria della filosofia romantica. Assumendo alcuni risultati dei recenti articoli storici di M.-L. Heuser e di E.

Scholz sul rapporto tra Graßmann e la *Naturphilosophie* (articoli che vedono nella figura di Justus Graßmann il *trait-d'union* tra il primo e la seconda), rivolgeremo un'attenzione particolare allo scritto *Allgemeine Deduktion des dynamischen Processes*[1] per confrontare il concetto di costruzione in Schelling con il concetto di generazione di una grandezza estesa in Graßmann. Scopo di questo confronto non è principalmente la verifica di una possibile influenza diretta di Schelling su Graßmann, quanto il tentativo di chiarire meglio l'origine concettuale e filosofica dell'idea di forma.

Un altro confronto specifico tra teoria matematica e teorie filosofiche è possibile nell'analisi della concezione grassmanniana del calcolo geometrico: in che rapporto sta con il progetto leibniziano di una geometria di posizione in grado di calcolare direttamente con le grandezze? Prenderemo le mosse da alcune ricerche storiche sul calcolo proposto da Graßmann nella *Geometrische Analyse*,[2] ma, senza entrare nel merito della discussione sulla maggiore o minore coincidenza delle idee dei due autori, ci soffermeremo principalmente sul significato nuovo di questo metodo, insieme analitico e sintetico, che riprende il concetto greco di costruzione (ricordiamo che 'lineale' significa 'costruibile con la riga') ma sfrutta anche i metodi della tradizione geometrica analitica.

6.1.1 La *Naturphilosophie*

Per comprendere l'influenza della *Naturphilosophie* sulla concezione degli oggetti matematici come forme di pensiero le cui caratteristiche sono determinate dal rispettivo modo di generazione, è opportuno analizzare la concezione dinamica della natura che considera la materia come un prodotto di forze. Il concetto di una natura dinamica deriva dalla concezione della materia come risultato di due opposte forze di attrazione e di repulsione presentata nei *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* di Kant.[3] Per i dinamisti la materia non è inerte né è costituita da atomi e vuoto ma è il risultato di un'attività organizzatrice della natura stessa che si riflette ed è riflessa in una parallela attività costruttiva umana. La considerazione dell'attività della natura, la concezione del vivente in continuo fluire, la possibilità di afferrare la natura con un atto conoscitivo totale di intuizione sono elementi della scienza romantica che rimandano alla concezione goethiana. La materia è smaterializzata: il rifiuto delle teorie atomistiche è accompagnato da una concezione della materia come prodotto di forze e in particolare come relazione di opposizione tra forze: proprio la polarità delle forze — il contrapporsi di positivo e negativo — costituisce il principio e il fondamento unitario della natura; lo

[1] Cfr. Schelling (1800).
[2] Cfr. Graßmann (1847).
[3] Cfr. Kant (1786).

studio della simmetria e degli stati di equilibrio delle forze divengono aspetti centrali dello studio dei fenomeni naturali, in particolare della cristallografia.

L'atomismo al quale la filosofia della natura si oppone è da ricercare non tanto nell'opera di Newton, quanto nella concezione atomistica della materia propria della filosofia meccanica della natura settecentesca, esemplificata dall'opera *Lucrèce Neutonien* (1784) di Le Sage e dall'opera *De l'origine des forces magnétiques* di P. Prevost.[4] Le tesi fondamentali di questo atomismo meccanico riguardano l'impenetrabilità e la non divisibilità all'infinito della materia, l'esistenza tra gli atomi di spazi intermedi vuoti in grado di determinare con differenze di estensione e di numero la diversa struttura e consistenza dei corpi. Le qualità dei corpi sono riconducibili alla loro forma o struttura, cioè alla configurazione degli atomi componenti.[5] La critica all'atomismo può essere meglio compresa in relazione all'obiettivo primario della *Naturphilosophie*: concepire un'unità tra natura e ragione, far corrispondere all'attività costruttiva umana i processi produttivi di natura.

L'idea di una natura attiva e in evoluzione dinamica permette infatti di istituire un parallelismo con l'attività costruttrice del soggetto che ben si conforma all'unificazione di spirito e natura propria di tanta filosofia idealistica. Ciò che però qui interessa è soprattutto il rapporto tra le leggi di produzione della natura e le leggi dell'attività costruttiva umana: questo parallelismo potrebbe spiegare l'origine dell'idea di Graßmann di considerare gli oggetti matematici come forme di pensiero, come prodotti del pensiero le cui caratteristiche sono determinate dalle leggi con cui le forme sono state prodotte. Una testimonianza in questo senso viene da un'affermazione di Justus Graßmann, secondo la quale nelle formazioni di natura (nella forma dei cristalli in particolare) si troverebbero realizzate le costruzioni del nostro ragionamento.[6]

La cristallografia costituisce uno dei terreni di maggiore influenza della *Naturphilosophie* su Justus e su Hermann Graßmann. Il principio fondamentale della cristallografia basata su principi dinamici è l'interpretazione della

[4] Per questa tesi relativa alle origini delle componenti atomistiche della filosofia della natura si veda S. Poggi, *Il genio e l'unità della natura. La scienza della Germania romantica*. Cfr. Poggi (2000), spec. p. 70.

[5] Cfr. Poggi (2000), p. 220. Alla base della polemica romantica contro il meccanicismo newtoniano c'è indubbiamente l'influsso di Goethe e in particolare della sua critica alla teoria newtoniana del colore. Goethe rifiuta l'idea che la luce sia composta e che il colore derivi dalla decomposizione della luce nel passaggio attraverso un prisma. Le leggi di natura di Newton sono per Goethe schematizzazioni unilaterali della natura che non tengono conto dell'unione tra punto di vista soggettivo e punto di vista oggettivo, tra fisiologia e fisica, tra colore e occhio che lo percepisce e che è tutt'uno con la luce. Cfr. Poggi (2000), pp. 107-8.

[6] Cfr. Graßmann (1829), pp. vi, 173-6.

struttura e della formazione dei cristalli per mezzo di un sistema regolare di forze che agiscono all'interno del cristallo e si manifestano all'esterno in una certa disposizione di piani. Le forze interne possono essere derivate per combinazione da alcune forze principali, che determinano la disposizione geometrica delle facce dei cristalli: è questa la legge detta di Weiss dal nome di Christian Samuel Weiss (1780-1856). Weiss prende le mosse dalla critica alla teoria geometrica atomistica di René Just Haüy, secondo la quale la materia dei cristalli è fatta di molecole integranti corrispondenti alle molecole chimiche di Lavoisier, molecole che inizialmente si riuniscono a formare le forme fondamentali (dette anche nuclei ipotetici o forme cristalline elementari). Da queste forme elementari, di cui Haüy indica diciotto tipi diversi, si formano delle forme secondarie per aggiunta regolare (sugli angoli e sugli spigoli) di mattoni a forma di parallelepipedo. La regolarità di formazione delle forme secondarie segue due leggi dette di decrescenza e di simmetria. Questa teoria ebbe un successo immediato in Francia (si ricordi ad esempio l'elogio che Ampère fa di Haüy nella classificazione delle scienze[7]), anche perché la teoria dei cristalli di Haüy ben si conciliava con il programma di Laplace, che fondava la spiegazione dei fenomeni fisici sull'assunzione di una materia composta da molecole e da atomi e di forze ad essi associate.[8] In antitesi alla spiegazione atomistica di Haüy i dinamisti intendevano spiegare la cristallografia e classificare i cristalli senza assumere l'esistenza indipendente della materia e senza assumere che essa fosse composta da atomi e molecole. La materia era spiegata come un prodotto di forze in conflitto, in continua modificazione e mutamento. Le forze erano intese da Weiss non come forze agenti tra centri di materia inerti (atomi o molecole), ma come principi generativi della materia stessa: benché non direttamente osservabile, la presenza di tali forze era inferita dai rispettivi effetti, cioè dalla configurazione geometrica dei cristalli.

Tra i contributi più interessanti di Weiss alla cristallografia vi è lo studio della simmetria. Introducendo il concetto di asse di un cristallo e studiando le configurazioni geometriche che esso sviluppa intorno all'asse, Weiss contribuì da un lato a geometrizzare lo studio dei cristalli dall'altro ad ampliare il concetto di simmetria geometrica che era fino ad allora sostanzialmente limitato alla simmetria speculare. E infatti i dinamisti successivi a Weiss svilupparono lo studio geometrico delle simmetrie e introdussero un sistema tridimensionale di vettori per studiare i cristalli.[9] Tra gli autori che usarono sistemi di forze per spiegare la composizione dei cristalli vi fu Ju-

[7]Cfr. la nota 56, p. 26.
[8]Cfr. Scholz (1994), pp. 220-1.
[9]Cfr. Scholz (1994), p. 227.

stus Graßmann, che fece esplicito riferimento alla legge di Weiss nello scritto "Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Kristallbildung".[10] Hermann Graßmann descrisse l'essenza dei cristalli per mezzo della loro struttura interna, considerata come un sistema di forze equivalente ad un sistema di possibili piani, ciascuno dei quali corrisponde ad una delle facce che delimitano il cristallo: le leggi che regolano i rapporti tra le forze sono la legge del parallelogrammo per la composizione di forze, già presente nel testo del padre (quando due forze formano un piano, ciò che propriamente forma il piano è la forza intermedia, espressa come diagonale del parallelogrammo formato dalle prime due), e la legge di Weiss secondo cui tutte le forze interne possono essere derivate da alcune forze elementari.[11] Il ruolo della legge del parallelogramma nella formazione dei cristalli assume un significato rilevante nella storia del prodotto vettoriale, perché il concetto di prodotto geometrico è elaborato da Hermann Graßmann a partire dal concetto di prodotto di forze, che a sua volta deriva dalle riflessioni geometriche del padre Justus.[12]

La concezione dinamica della natura e l'attenzione rivolta al concetto di forza sollevano il problema della comprensione e definizione delle grandezze, specialmente di quelle intensive, di cui occorre misurare il grado. Anche la mutata concezione del concetto di grandezza, inteso sempre in maniera continua piuttosto che discreta, costituisce un elemento interessante del panorama culturale in cui Hermann Graßmann si è venuto a trovare. Il concetto di grandezza subisce infatti nella *Naturphilosophie* una modificazione e una diversa interpretazione: piuttosto che come qualcosa di dato da scomporre nelle sue parti, la grandezza è considerata come qualcosa di costruito in un'evoluzione dinamica, sia che essa sia considerata come frutto dell'attività della natura sia che essa sia considerata come prodotto dell'attività costruttiva umana corrispondente. Avversando la concezione atomistica che considera la grandezza come qualcosa che si può ottenere per somma finita di parti, si riprende e si amplia la concezione dinamica e fluentista della fisica

[10] Cfr. Graßmann (1839).

[11] Cfr. Scholz (1996), pp. 39-40.

[12] La formulazione del prodotto geometrico si trova in due opere dedicate rispettivamente alla teoria dello spazio e alla geometria: la *Raumlehre* e la *Trigonometrie*. Cfr. Graßmann (1824) e Graßmann (1835). Nell'opera *Zur physischen Kristallonomie und geometrischen Combinationslehre* del 1829 Justus Graßmann non solo si serve della legge del parallelogramma per determinare la risultante dell'interazione di due forze, ma formula una teoria combinatoria in grado di esprimere simbolicamente le interazioni tra le forze che generano i cristalli e atta a fornire un criterio classificatorio dei cristalli stessi. L'opera è estremamente interessante non solo da un punto di vista scientifico, ma anche per gli elementi filosofici che contiene e che riflettono, come ha mostrato recentemente Scholz, motivi propri della *Naturphilosophie*. Si vedano in particolare Scholz (1994) e Scholz (1996).

newtoniana: la grandezza è determinata e costruita attraverso il fluire di un elemento che la genera e dunque per mezzo di una serie infinita di elementi. La formazione del concetto è — scrive Schelling — una 'rappresentazione dell'infinito nel finito', ove l'infinito è l'attività costruttrice incondizionata, mentre il finito è il singolo dato nell'intuizione empirica.[13]

Anche le serie matematiche sono da intendersi come grandezze originate non per *composizione* (Zusammensetzung) ma per *evoluzione* (Evolution): i singoli elementi della serie non possono infatti determinare la totalità della serie ma costituiscono piuttosto dei limiti al suo sviluppo infinito.

> Che in matematica serie infinite siano composte di grandezze, non è una prova di quella assunzione [...]. La serie originariamente infinita, di cui tutte le singole serie (in matematica) sono imitazioni, non ha origine per composizione ma per evoluzione, per evoluzione di una grandezza la quale è già infinita nel suo punto d'inizio che fluisce attraverso l'intera serie. In quest'unica grandezza è originariamente concentrata l'intera infinità; le successioni nella serie indicano solo, per così dire, i singoli ostacoli che continuamente pongono limiti all'estensione di quella grandezza in una serie infinita (in uno spazio infinito), cosa che altrimenti avverrebbe con velocità infinita e non permetterebbe alcuna intuizione reale.[14]

Le serie matematiche infinite considerate come composizione di grandezze finite non spiegano la vera natura dell'infinito: piuttosto questo si esprime nel continuo originario dal quale ogni grandezza può avere origine per evoluzione. Ciascuna serie non è infinita solo nella propria fine, ma in ciascuno dei suoi elementi: ciascuno dei suoi punti rimanda ad un originario continuo.[15] La serie si genera dunque per evoluzione, è un continuo dinamico e fluente: il concetto newtoniano di grandezza fluente è ripreso in senso metafisico e applicato nella costruzione filosofica delle grandezze, che è insieme originarsi spazio-temporale delle cose nel continuo e intuizione trascendentale di esse e del loro fluire.[16]

In questa tradizione si inserisce la concezione che Graßmann ha della 'grandezza' come 'forma continua': la grandezza è infatti, come si è visto nel

[13] Cfr. Moiso (1994), p. 76.

[14] Cfr. Schelling (1856), III, p. 15. Per la traduzione italiana citata si veda Moiso (1994), p. 76.

[15] Moiso interpreta questo passo per mezzo di un riferimento ad una dibattuta interpretazione della somma di particolari serie infinite, come ad esempio la serie di Guido Grandi $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$ il cui valore è $\frac{1}{2}$: si può dire che la somma della serie, che per ogni numero finito di addendi è 1 o -1, all'infinito è $\frac{1}{2}$? Cfr. Moiso (1994), p. 80. Per un'analisi dettagliata della storia di questa serie si veda Cantor (1900), III, pp. 351-353.

[16] Cfr. Moiso (1994), p. 81.

§ 4.3.3, ciò che è divenuto «per mezzo di un atto semplice di generazione». Carattere distintivo generale della grandezza non è principalmente 'un certo rapporto del tutto con le parti' esprimibile affermando che il tutto è somma delle parti (cfr. i capitoli 2 e 3) ma il modo di generazione della grandezza. Soltanto le grandezze estensive, vale a dire le forme continue combinatorie ottenute per mezzo del differente, saranno caratterizzate specificamente da quel particolare rapporto tra il tutto e le parti che Graßmann esprime con le proprietà dell'addizione vettoriale. Ciò che principalmente accomuna Graßmann e i *Naturphilosophen* è l'accento posto sulle forze piuttosto che sulle configurazioni, l'accento posto sui modi di generazione piuttosto che sulle forme stesse. Forze e configurazioni, modi di generazione e forme stanno d'altra parte in relazione dinamica, proprio come esterno ed interno nella *Naturphilosophie*, come atomismo e dinamismo nella cristallografia.[17]

La 'allgemeine Deduktion' di Schelling

Recentemente Marie-Luise Heuser ha indagato l'influenza sull'opera di Justus Graßmann della *Naturphilosophie* dinamista di Schelling. Storicamente l'influenza di Schelling può essere giustificata dal fatto che Justus Graßmann fu studente a Halle tra il 1799 e il 1801, in un periodo, cioè, in cui forte era l'influenza in tale università della *Naturphilosophie* jenese; inoltre in quegli stessi anni a Halle studiava Achim von Arnim, poeta romantico, fisico e *Naturphilosoph*, che si occupava di magnetismo e di elettricità in una prospettiva molto vicina a quella di Schelling.[18] Non ci sono tuttavia prove decisive a favore di questa tesi, che ha comunque il pregio di suggerire e favorire uno studio comparato di Schelling e di Graßmann.

Le ricerche di Marie-Luise Heuser sono volte a rintracciare la ripresa di alcuni temi tipici della *Naturphilosophie* dinamica di Schelling nelle opere di Justus Graßmann: *Raumlehre* e *Zur physischen Kristallonomie und geometrischen Combinationslehre*. Due sono gli aspetti fondamentali della filosofia dinamica che Heuser riscontra nei lavori di Justus Graßmann: la concezione dello spazio come risultato di un processo dinamico di espansione e costru-

[17]Scrive infatti Justus Graßmann: «Unserer Ansicht nach verhalten sich Atomistik und Dynamik nur wie Aussen und Innen ... und können beide zu denselben Resultaten führen, wie in der Beziehung auf die Krystallgestalten Hauy's Krystallographie lehrt. — Was dem Atomisten Lage, Zahl, Gestalt der Atome und integrirenden Moleküle, dasselbe leisten die Formen der Complexionen dem Dynamiker durch die Elemente, die Wiederholungsexponenten und deren Verhältniss ... Ueberall, wo man zur Construction der Erscheinungen von Atomen ausgegangen ist, wird man mit viel grösserm Vortheile von Kräften ausgehen, und deren Combinationen entwickeln können ... » Cfr. Graßmann (1829), p. 177 ss., cit. in Scholz (1994), pp. 228-229.

[18]Cfr. Heuser-Keßler (1996).

zione piuttosto che come opposizione statica tra attrazione e repulsione e la teoria del rapporto tra dimensioni dello spazio e prodotto delle forze agenti in esso.

Qui cercheremo di valutare se e come i concetti individuati dalla Heuser nell'opera di Justus siano presenti anche in quella di Hermann Graßmann e in che modo il contenuto del saggio di Schelling *Allgemeine Deduktion des dynamischen Processes* possa aiutare a comprendere il concetto grassmanniano di prodotto geometrico: analizzando il testo cercheremo perciò eventuali punti di contatto con la terminologia e la determinazione evolutivo-generativa delle forme estese nell'*Ausdehnungslehre*. Poiché il saggio di Schelling è poco noto e difficilmente reperibile (è pubblicato soltanto, per quanto ne sappiamo, nell'edizione delle *Sämmtliche Werke* del 1856) ne presentiamo in sintesi la prima parte.

Il saggio di Schelling si apre con l'indicazione del compito della scienza della natura: costruire la materia e ricercare i principi generali della sua produzione. I processi dinamici della natura sono un autocostruirsi della materia che si ripete a diversi livelli.[19] Magnetismo, elettricità e processo chimico (categorie generali della fisica) sono le tre funzioni con cui si costruisce la materia, ma solo nel rapporto di tali funzioni con lo spazio. Nel *Sistema dell'idealismo trascendentale* Schelling aveva già svolto la prima parte della costruzione fino alla contrapposizione originaria delle forze: l'una espansiva, che va verso l'esterno e l'altra attrattiva, che rientra, ritorna nell'intimo della natura. La prima è un puro produrre in cui non si può distinguere nulla, la seconda introduce la divisione (separazione) nell'identità generale, quindi è la prima condizione della produzione reale. Queste due forze, poiché sono forze di uno stesso e identico soggetto — la natura — sono contrapposte non relativamente ma in modo assoluto: l'una è positiva, l'altra è negativa.[20] Come — continua Schelling — si deve necessariamente assumere un'originaria opposizione di due attività, così occorre necessariamente assumere una terza attività, che esprime la tensione della natura a ritornare in quell'identità da cui è stata strappata con la divisione. Nella natura non può essere pensata una divisione delle due attività senza che insieme sia pensata la sintesi. Se A è il punto massimo della forza espansiva, essa diminuirà fino a raggiungere un punto C in cui c'è equilibrio con la forza attrattiva, che da lì in avanti aumenterà fino a raggiungere un punto di massimo in B. I punti A, B, C determinano la linea. Se due forme hanno un punto di equilibrio (in C) è con ciò determinata la linea o la pura dimensione della lunghezza. La linea può esistere in natura solo sotto la forma di quei tre punti. La forza espansiva di per sé è priva di direzione e dunque da essa sola non si può dedurre la possibilità di una direzione né tantomeno quella di

[19]Cfr. Schelling (1800), §§ 1-3, pp. 3-4.
[20]Cfr. Schelling (1800), §§ 4-6, pp. 4-6.

una dimensione (dimensione e direzione sono due concetti del tutto diversi). Solo due forze, positiva e negativa, pensate come riunite in un punto, danno la linea, che rappresenta la prima sintesi del punto con lo spazio infinito, sintesi che non dà la linea in generale ma la linea tracciata per quei tre punti. Questi tre punti sono quelli necessari alla costruzione del magnete. Le lunghezze in natura possono esistere solo nella forma del magnetismo o, equivalentemente, il magnetismo è in generale la condizione delle lunghezze nella costruzione della materia.[21]

Finché sono condizionate dal punto C le forze possono agire solo in una direzione, ma se viene a mancare il punto che le lega, esse sono di nuovo libere di agire in qualunque direzione e in particolare in tutte le direzioni che formano un angolo con la linea AB. Così alla dimensione originaria della lunghezza si aggiunge quella della larghezza. Questo momento di costruzione della materia che aggiunge una seconda dimensione alla prima è in natura l'elettricità. Mentre nel magnetismo l'opposizione appare in uno stesso soggetto, nell'elettricità essa appare in due individui distinti.[22]

Il terzo momento necessario per la costruzione di ogni prodotto reale aggiunge una terza dimensione. Ciò che rende possibile la materia non è la semplice concorrenza di forza attrattiva e forza repulsiva, ma un certo rapporto reciproco di esse in riferimento allo spazio. La terza dimensione è un certo mezzo di mediazione di quel rapporto, del rapporto tra forza repulsiva e attrattiva per cui l'azione diviene un'azione in tutte le direzioni. Schelling critica la distinzione kantiana tra forza repulsiva (che agirebbe soltanto su una superficie per contatto) e forza attrattiva (penetrante), perché sia il contatto sia l'impenetrabilità presuppongono già la materia.[23] Le due forze sono così a un tempo dinamicamente separate e poste come identiche per l'intuizione: la prima cosa è necessaria perché è condizione della realtà, la seconda perché è condizione dell'identità della natura con se stessa. Le produzioni delle due forze (che danno ciascuna una superficie) sono rappresentate in un terzo comune, che è la seconda potenza della superficie o il cubo.

Ciò è possibile solo se lo spazio è impenetrabile, se è spazio riempito o materia e la materia non esiste in sé ma solo come soluzione di quel problema in natura. Se noi consideriamo le due forze matematicamente separate abbiamo o la linea, in cui c'è un solo punto che riunisce in sé le due forze, o abbiamo la superficie, ma in nessuno dei due casi ha origine, si genera lo riempimento dello spazio. La rappresentazione comune delle due forze è possibile solo per mezzo di una terza forza composta dalle prime due che rende lo spazio impenetrabile, e cioè una forza che è essa stessa penetrabile e che agisce in una terza dimensione.[24]

La materia ha origine da un reciproco potenziarsi delle superfici attrattiva e re-

[21] Cfr. Schelling (1800), §§ 7-14, pp. 6-11.
[22] Cfr. Schelling (1800), §§ 16-20, pp. 12-5.
[23] Cfr. Schelling (1800), § 31, pp. 26-8.
[24] Cfr. Schelling (1800), §§ 34-5, pp. 31-3.

pulsiva per mezzo di una forza sintetica che toglie nel prodotto (per l'intuizione) una contrapposizione che in principio non è toglibile.

Nell'ultima parte del saggio (che riassumiamo in nota perché meno rilevante ai fini del confronto con Graßmann) Schelling spiega in termini di forza attrattiva tra prodotti l'attrazione reciproca dei corpi e critica il modo in cui Newton ha concepito la forza gravitazionale, quindi presenta la luce come modo per descrivere idealmente lo spazio senza riempirlo. Infine spiega come tutte le proprietà della materia possano essere spiegate, sulla base dei tre fenomeni citati (magnetismo, elettricità, processo chimico), come produzioni delle tre dimensioni dello spazio.[25]

[25]Non ci può essere un prodotto senza un certo grado di forza attrattiva (determinata indipendentemente dal prodotto) che ne permetta la costruzione. Non ci può dunque essere un singolo prodotto ma solo una totalità assoluta di prodotti che si originano contemporaneamente, ciascuno dei quali contiene quell'opposizione che è condizione dell'originarsi degli altri prodotti. L'azione reciproca dei prodotti con cui essi si assicurano l'opposizione di forze che li fonda consiste in una divisione generale reciproca della forza attrattiva, che è anche condizione della forza sintetica o costruttiva. (§§ 36-7) La funzione della forza sintetica è quella di porre in un certo rapporto forza attrattiva e forza repulsiva in modo che attraverso la loro azione reciproca venga riempito lo spazio. Il grado di riempimento dello spazio di un certo prodotto è proporzionale al grado di forza attrattiva che ogni altro prodotto trasmette ad esso e con cui esso a sua volta agisce sugli altri prodotti. Si ha così un'attrazione reciproca generale di tutte le materie che è esercitata da ciascuna sulle altre, a pari distanza, in misura proporzionale al grado di riempimento dello spazio, cioè alla massa. (§ 38) Newton ha tenuto conto — continua Schelling — solo dell'aspetto grezzo del fenomeno e non della costruzione stessa della materia. Nella prospettiva empirica di Newton resta indeciso se la forza attrattiva sia una forza della materia già pronta che va verso l'esterno o se essa sia contemporaneamente una condizione della materia stessa e un fattore della sua costruzione. La gravitazione (cioè l'attrazione) non è semplice ma composta e il peso è un fenomeno non primitivo ma derivato. (§ 39) I corpi possono modificarsi per azione reciproca secondo tre momenti: si magnetizzano, si elettrificano, si modificano in relazione al peso. I tre momenti non si danno nella natura reale; vi è un unico processo (processo di primo ordine). Nella realtà si danno solo processi di second'ordine, ripetizioni di quel processo nella natura, riproduzioni di quel produrre. Il processo di second'ordine che corrisponde al peso è il processo chimico. Come si manifesta nella natura visibile questo processo di second'ordine? L'attività del costruire il costruire, del produrre idealmente le tre dimensioni (descrivere le dimensioni dello spazio senza veramente riempirlo) è la luce. Essa non è materia (spazio riempito) ma costruzione del riempimento dello spazio. Una volta che la natura ha prodotto il produrre, continua con questo riprodurre il produrre e il pensiero non è che l'ultimo esito di ciò che ha inizio con la luce. (§§ 41-3) Tutte le determinazioni della materia che chiamiamo qualità (e che Schelling chiama proprietà della seconda potenza) hanno il loro fondamento nel diverso rapporto dei corpi con le tre funzioni: magnetismo, elettricità e processo chimico. Al magnetismo corrisponde una funzione della lunghezza: la coesione; all'elettricità tutte le funzioni della superficie (tra di esse c'è il colore e in genere tutte le qualità percepibili con i sensi); al processo chimico le funzioni della terza dimensione (e cioè le determinazioni dei corpi fluidi e in generale

Per Schelling la materia si costituisce attraverso un processo di moltiplicazione delle forze. Al *primo stadio* della deduzione, correlato alla polarità del magnete, si costruisce la prima dimensione dello spazio, e cioè la linea. Essa è determinata da due forze opposte e da un punto di equilibrio al quale entrambe sono applicate. La condizione della formazione della linea è l'opposizione tra una forza espansiva e una forza attrattiva, opposizione che si trova concentrata nel punto di equilibrio. Al *secondo stadio* della deduzione i poli si separano l'uno dall'altro come nel caso dell'elettricità e producono un'area, ovvero la seconda dimensione dello spazio. La seconda dimensione è determinata dal venir meno di un punto di equilibrio delle due forze, che divengono così libere di agire in direzioni diverse. Ciascuna delle due forze, muovendosi in direzione diversa dalla propria genera una superficie (in questa descrizione del prodotto di forze nasce l'idea di prodotto geometrico). Al *terzo stadio* della deduzione si costituisce infine la materia come prodotto dei prodotti delle due forze, cioè come prodotto di due aree. Scrive infatti Schelling a questo proposito:

> Con questo potenziamento reciproco delle due produzioni l'una per mezzo dell'altra si innalza la costruzione del puro geometrico (alle due prime dimensioni si è aggiunta la terza) e lo strumento di mediazione per mezzo del quale le due forze possono essere poste a un tempo come non identiche e come riunite per l'intuizione è lo spazio stesso (non la linea o la superficie), cioè la grandezza estesa secondo tre dimensioni.[26]

L'elemento cruciale nella deduzione di Schelling è il processo di esponenziazione che produce la materia e che determina dapprima la lunghezza, poi la larghezza, infine lo spazio secondo le sue tre dimensioni. Ai tre momenti della produzione dello spazio e delle grandezze estese tridimensionali corrispondono tre fenomeni fisici: magnetismo, elettricità, processo chimico. Ciò che qui conta sottolineare, ai fini di un confronto con Graßmann, è la concezione della superficie come prodotto di due forze. Infatti questa concezione appare in questo testo di Schelling per la prima volta: mentre era nota la regola del parallelogramma per il calcolo della risultante di due forze, nessuno prima di Schelling aveva mai fatto menzione di un prodotto di forze che genera una superficie. Secondo Heuser proprio questa idea di Schelling è stata sviluppata, insieme ad altri spunti della *Naturphilosophie*, da Justus Graßmann nella determinazione di una superficie come prodotto geometrico di vettori. Ma si ritrova questa idea in modo analogo nella *Ausdehnungslehre* di Hermann Graßmann?

Le differenze tra Graßmann e Schelling sono in realtà più marcate di quanto possa sembrare da una considerazione generale dell'idea schellinghia-

tutte le proprietà chimiche dei corpi). (§ 47)

[26]Cfr. Schelling (1800), § 34, p. 31.

na del prodotto di forze come momento costitutivo delle dimensioni dello spazio. Nella *Ausdehnungslehre* del 1844 un elemento che varia in una direzione data forma un tratto e la totalità degli elementi generabili secondo la stessa variazione in una direzione e nella direzione opposta formano la linea. La superficie è formata da un elemento che varia dapprima secondo una variazione formando un tratto e poi dal tratto così ottenuto sottoposto ad una seconda variazione non omogenea rispetto alla prima (cioè di direzione diversa). Questo modo di generazione della superficie si differenzia notevolmente dalla produzione schellinghiana. Infatti in Schelling una linea è determinata da due forze aventi un punto di equilibrio e una superficie è prodotta da due forze non più condizionate dal punto di equilibrio. Tuttavia nella *Teoria dell'estensione* Graßmann presenta la superficie anche come prodotto di due tratti, ma anche in questo caso il prodotto è determinato dalla variazione di un tratto lungo la variazione determinata dall'altro tratto: se vi è senz'altro un elemento comune con la produzione di Schelling (e cioè il fatto che il prodotto di due vettori determini un'area e non un vettore), d'altra parte i due tratti in questione non corrispondono necessariamente a forze contrapposte. La distanza di Graßmann da Schelling è determinata dall'estrema generalità dell'approccio della *Teoria dell'estensione*, che può essere applicata alla geometria ma non è fondata geometricamente. Mentre la *Allgemeine Deduktion* si arresta alla terza dimensione, perché lo scopo è la produzione dinamica dello spazio, in Graßmann manca la limitazione geometrica alla terza dimensione. Nella *Ausdehnungslehre* c'è, è vero, un'applicazione fisica del prodotto di due grandezze estese al caso delle forze, ma in tal caso il prodotto esprime un concetto fisico diverso da quello schellinghiano: il momento di una forza rispetto ad un punto, e cioè la superficie del parallelogrammo determinato dal vettore della forza e dal vettore che congiunge il punto di riferimento ad un qualsiasi punto del vettore della forza.[27] Se dunque un'influenza generale della filosofia schellinghiana e della *Naturphilosophie* sull'opera di Graßmann ci sembra giustificata dalla impostazione generale della *Ausdehnungslehre* del 1844 e dall'insistenza di Graßmann sulla concezione delle forme di pensiero come leggi generative, ci pare più difficile rintracciare nello scritto di Schelling analogie precise: Graßmann riprende l'idea della generazione dello spazio come prodotto di grandezze, ma con modalità abbastanza diverse che suggeriscono un'influenza mediata dalle opere del padre piuttosto che diretta. La descrizione di Graßmann della generazione della superficie per variazione di un elemento prima secondo una direzione e poi secondo una direzione indipendente dalla prima è del resto molto vicina alla concezione fluentista di stampo newtoniano, che è tipica anche della *Naturphilosophie*.

[27]Cfr. *Ausdehnungslehre*, § 41, in Graßmann (1844), p. 96.

6.1.2 Il calcolo geometrico

Uno dei problemi storiografici più dibattuti in ambito filosofico in relazione all'opera di Graßmann riguarda la composizione dello scritto *Geometrische Analyse* e più precisamente il rapporto tra il calcolo geometrico grassmanniano e l'*analysis situs* di cui Leibniz parla in una lettera a Huygens dell'8 settembre 1879. Graßmann concorse con lo scritto *Geometrische Analyse* al Premio Jablonowski 1846, che proponeva di riprendere l'idea leibniziana di una caratteristica geometrica e di costruire un calcolo secondo lo spirito della lettera di Leibniz a Huygens pubblicata per la prima volta nel 1833. In quella lettera Leibniz esprimeva il desiderio di costruire un'analisi geometrica lineare, che permettesse di esprimere direttamente la posizione allo stesso modo in cui l'algebra esprime la grandezza:

> [...] non sono ancora contento dell'algebra, per il fatto che essa non ci dà né le vie più brevi né le costruzioni più belle di geometria. Per questo, quando si tratta della geometria, io credo che abbisogni ancora un'altra analisi propriamente geometrica lineare, che ci esprima direttamente la posizione [situs], come l'algebra esprime la grandezza [magnitudo]. Ed io credo d'averne la possibilità, e che si potrebbe rappresentare figure ed anche macchine e movimento mediante caratteri, così come l'algebra rappresenta i numeri o grandezze.[28]

Dopo aver espresso il desiderio di un'analisi geometrica lineare, Leibniz sottopose al giudizio di Huygens un breve saggio nel quale costruiva una nuova caratteristica con lo scopo di affiancare alla soluzione algebrica la costruzione geometrica:

> Ho trovato qualche elemento di una nuova caratteristica, del tutto diversa dall'algebra, e che offrirà grandi vantaggi per rappresentare esattamente e al naturale, nella mente, ed anche senza figure, tutto ciò che dipende dall'immaginazione. L'algebra non è altro che la caratteristica dei numeri indeterminati o delle grandezze. Ma essa non esprime direttamente la posizione [situation], gli angoli e il movimento, dal che deriva che spesso è difficile riportare in un calcolo ciò che è nella figura, e che è ancor più difficile trovare dimostrazioni e costruzioni geometriche sufficientemente comode, anche quando il calcolo algebrico è tutto fatto. Invece, questa nuova caratteristica, seguendo le figure visuali, non può non dare contemporaneamente sia la soluzione sia la costruzione e la dimostrazione geometrica, il tutto in maniera naturale e mediante un'analisi; cioè, attraverso procedimenti determinati.

[28] Cfr. *Lettera a Ch. Huygens* dell'8 settembre 1879, in Leibniz (1899), pp. 567-70, tr. it. in Leibniz (1968), pp. 459-60.

> L'algebra è costretta a supporre gli elementi della geometria, mentre tale caratteristica spinge l'analisi sino al termine.[29]

Leibniz, pur ritenendo questo scritto un semplice abbozzo, lo inviò a Huygens per mostrare la credibilità del proprio progetto di un'analisi geometrica lineare e per fornire ai posteri una qualche testimonianza della nuova idea, qualora egli non fosse riuscito a realizzarla.

> Ma io non ho notizie che qualche altro abbia mai avuto la stessa idea; e siccome ciò mi fa temere ch'essa se ne vada persa, se non ho il tempo di compierla, aggiungerò qui un saggio che mi pare notevole, e che basterà almeno per rendere il mio progetto più credibile e più agevole da concepire, cosicché, se qualche caso fortuito ne ostacolerà al presente la perfetta realizzazione, esso possa nondimeno servire come testimonianza [monument] per i posteri e dare occasione a qualche altro di venirne a capo.[30]

La novità e l'importanza della nuova caratteristica sono garantite dalla ricchezza delle applicazioni che essa potrebbe avere: l'analisi di macchine complesse, la descrizione della struttura interna delle piante e degli animali, l'abbreviazione di ragionamenti complessi in geometria e in meccanica.

> Se essa fosse completata nel modo in cui la concepisco, si potrebbe fare in caratteri, che non saranno altro che le lettere dell'alfabeto, l'analisi di una macchina quanto si voglia complessa; [...] Con questo mezzo si potrebbero anche fare descrizioni esatte delle cose naturali, come, ad esempio, delle piante e delle strutture degli animali [...] L'utilità principale consiste invece nelle conseguenze e nei ragionamenti che si posson fare mediante le operazioni con i caratteri, conseguenze e ragionamenti che non si potrebbe esprimere mediante figure (ed ancor meno mediante modelli), senza renderle troppo numerose o senza renderle confuse con un numero troppo grande di punti e di linee, essendo d'altra parte costretti a fare un'infinità di tentativi inutili: mentre questo metodo condurrebbe sicuramente e senza fatica. Io credo che in questo modo si potrebbe trattare la meccanica quasi come la geometria, e che si potrebbe anche pervenire sino all'esame delle qualità dei materiali, poiché ordinariamente essa dipende da certe figure delle loro parti sensibili. Infine, non spero che si possano fare grandi progressi in fisica prima d'aver trovato un simile processo abbreviativo [abrégé] per non gravare l'immaginazione.[31]

[29] Cfr. Allegato alla *Lettera a Ch. Huygens* dell'8 settembre 1879, in Leibniz (1899), pp. 567-70, tr. it. in Leibniz (1968), p. 462.

[30] Allegato alla *Lettera a Ch. Huygens* dell'8 settembre 1879, in Leibniz (1899), pp. 567-70, tr. it. in Leibniz (1968), pp. 463-4.

[31] Allegato alla *Lettera a Ch. Huygens* dell'8 settembre 1879, in Leibniz (1899), pp. 567-70, tr. it. in Leibniz (1968), pp. 462-3.

Lo scritto che Graßmann presenta al concorso Jablonowski come riproposizione e rielaborazione del progetto leibniziano di un calcolo geometrico si apre con un elogio di Leibniz, giudicato non solo un rappresentante del suo tempo (giacché i lavori sull'analisi infinitesimale furono sviluppati contemporaneamente anche da Newton) ma anche un precorritore del suo tempo, dal momento che alcune delle sue idee non furono comprese perché troppo in anticipo sui tempi. Così sarebbe avvenuto secondo Graßmann per il concetto di analisi geometrica, che appartiene a quelle idee profetiche di cui lo scopritore coglie già la fecondità ma che solo dopo molti anni possono trovare un terreno fertile per svilupparsi. L'idea leibniziana di un'analisi geometrica — continua Graßmann — sarebbe però stata nascosta anche troppo a lungo: infatti alla data della sua pubblicazione da varie parti già erano sorti calcoli geometrici o tentativi di una simile analisi puramente geometrica.[32] Nonostante Leibniz avesse inteso, come si è visto sopra, lasciare testimonianza di questa nuova idea, tale testimonianza fu infatti riscoperta quando ormai altri autori (tra cui Möbius, Bellavitis, Graßmann), indipendentemente, avevano sviluppato idee simili. E infatti Graßmann aggiunge di essere pervenuto alla scoperta del nuovo calcolo geometrico per una via completamente diversa rispetto a quella seguita da Leibniz nella caratteristica. Egli presenta tuttavia il proprio lavoro come una realizzazione dell'ideale leibniziano mostrando che analoghi risultati possono essere raggiunti anche seguendo la via tracciata da Leibniz.[33]

Il giudizio che Graßmann dà nella Introduzione della caratteristica geometrica effettivamente abbozzata da Leibniz non è però molto positivo. Graßmann distingue infatti tra l'idea anticipatrice di un'analisi geometrica, feconda di quelle applicazioni che Leibniz stesso aveva previsto, e la caratteristica realizzata, che resta così lontana dalla meta prefissa da non poterne costituire che un acerbo inizio.[34] Il più grande merito riconosciuto a Leibniz in

[32]Cfr. *Geometrische Analyse*, in Graßmann (1847), pp. 325-6.

[33]≪Um auch andrerseits die wissenschaftliche Bedeutung seiner eigenthümlichen Charakteristik ans Licht treten zu lassen, und damit sein wissenschaftliches Verdienst auf diesem Gebiete auch nach der andern Seite hin zur Anschauung zu bringen, will ich bei der Ableitung und Entwickelung der neuen Analyse *den* Weg einschlagen, dass ich von der Leibniz'schen Charakteristik ausgehe und zeige, wie von diesem Keime aus bei konsequenter Durchführung und Fortentwickelung, bei gehöriger Ausscheidung des Fremdartigen und Befruchtung durch die Ideen der geometrischen Verwandtschaften, die Analyse hervorgeht, welche ich als die, wenn auch nur relative, Verwirklichung der Leibniz'schen Idee einer geometrischen Analyse anzusehen geneigt bin. Dass dies nicht der Weg ist, auf welchem ich zu dieser Analyse gelangt bin, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.≫ Cfr. *Geometrische Analyse*, in Graßmann (1847), pp. 327-8.

[34]≪In der That überzeugt man sich leicht, dass die von Leibniz versuchte Charakteristik nicht im mindesten das leistet, was er von der geometrischen Analyse überhaupt

relazione alla nuova idea di un'analisi geometrica è la capacità di cogliere l'importanza delle conseguenze che essa avrebbe potuto avere. In questo elogio del talento di Leibniz si può cogliere un riferimento a quell'idea guida di cui Graßmann aveva parlato nell'Introduzione all'*Ausdehnungslehre*,[35] al presentimento che permette di cogliere un'intera serie di sviluppo anche senza percorrerla tutta.[36]

Dopo aver esposto la propria analisi geometrica secondo le linee direttive dell'abbozzo leibniziano, Graßmann si sofferma nella conclusione sulle possibili applicazioni del calcolo, riconoscendo a Leibniz la grandissima capacità di aver saputo prevedere con esattezza la fecondità della propria idea anticipatrice. Secondo Leibniz, infatti, la nuova analisi avrebbe permesso di fornire contemporaneamente la soluzione, la costruzione e la dimostrazione di un problema, in modo naturale e necessario.[37] Realizzando tale intuizione l'analisi geometrica di Graßmann mostra proprio che ogni equazione analitica esprime una relazione geometrica e dunque affianca al calcolo analitico la costruzione geometrica.[38] Il metodo della nuova analisi è d'altra parte il più naturale, il più conforme alla natura del problema, proprio perché non introduce nulla di estraneo o di arbitrario: non presuppone infatti le coordinate analitiche.[39]

---

verheisst, dass sie vielmehr hinter dem von ihm selbst gesteckten Ziele so unendlich weit zurückbleibt, dass sie nur als ein roher, wenn gleich sehr anerkennungswerther Anfang zu einer Annäherung an jenes Ziel angesehen werden kann.≫ Cfr. *Geometrische Analyse*, in Graßmann (1847), p. 326.

[35]Si veda il § 4.3.1, p. 191.

[36]≪Eben dies hervorragende Talent Leibnizens, eine ganze Entwickelungsreihe, ohne sie durchzumachen, dennoch ahnend zu überschauen, und, ohne sie vorher zu zergliedern und auseinander zu legen, sie dennoch mit prophetischem Geiste sich zu vergegenwärtigen und so ihre Folgewichtigkeit zu erkennen, dies Talent ist es eben, was ihn zu so grossartigen Entdeckungen fast auf allen Gebieten des Wissens geführt hat.≫ Cfr. *Geometrische Analyse*, in Graßmann (1847), p. 327.

[37]Si veda il passo della lettera a Huygens sopra citato.

[38]≪Da nun in der hier dargelegten Analyse jede Gleichung nur der in die Form der Analyse gekleidete Ausdruck einer geometrischen Beziehung ist, und diese Beziehung in der Gleichung, ohne durch willkürliche Grössen — wie etwa die Koordinaten der gewöhnlichen Analyse — verhüllt zu sein, rein und klar sich ausspricht und daher aus ihr ohne Weiteres abgelesen werden kann; und da ferner jede Umgestaltung einer solchen Gleichung nur der Ausdruck einer ihr zur Seite gehenden Konstruktion ist, so folgt, dass in der That durch die angegebene Analyse die analytische Auflösung einer geometrischen Aufgabe gleichzeitig mit der Konstruktion und mit dem Beweise derselben erfolgt.≫ Cfr. *Geometrische Analyse*, in Graßmann (1847), pp. 396-7.

[39]≪Da ferner nichts Willkürliches, was mit der Natur der Aufgabe in keinem nothwendigen Zusammenhange steht, wie die Koordinaten der analytischen Geometrie, eingeführt zu werden braucht, so muss die Art der Lösung auch stets die der Natur der Aufgabe gemässe sein, und da sie die Form der Analyse hat, auch eine nothwendige, bei der von

Leibniz aveva anche intuito la possibilità di applicare la nuova analisi geometrica allo studio della meccanica e più in generale della fisica. E Graßmann ribadisce la fecondità dell'intuizione leibniziana citando ad esempio le proprie applicazioni alla meccanica e osservando che altri esempi potrebbero venire dall'ottica, dall'acustica, dall'elettrodinamica. Neppure — conclude Graßmann — si è molto lontani dalla convinzione leibniziana di poter descrivere con la nuova analisi perfino la costituzione dei corpi naturali: le ricerche cristallografiche di Graßmann studiano infatti la struttura interna dei corpi proprio per mezzo del prodotto geometrico. Anche sotto questo punto di vista è evidente per Graßmann che la nuova analisi sarà indispensabile in fisica, a condizione che non ne si voglia annullare l'intuibilità con l'introduzione di coordinate.[40]

Graßmann cerca di realizzare perfino l'ultima profezia leibniziana: la nuova analisi servirà anche a comprendere le cose non soggette all'immaginazione, cioè — secondo Graßmann — le cose che non hanno una natura spaziale. Il progetto che Graßmann ha perseguito nella *Ausdehnungslehre* è in effetti la costruzione di una nuova disciplina indipendente dalla geometria e dall'intuizione dello spazio che a quest'ultima si accompagna. Proprio perché le forme della *Teoria dell'estensione* sono puramente astratte, prodotto di una generazione continua intesa in senso astratto e non come generazione nello spazio, la nuova analisi si presta a descrivere anche cose non spaziali.[41] Proprio perché, come si è detto nel § 4.2, la teoria dell'estensione non ha per oggetto un essere dato che sta di fronte al pensiero, essa non è e non può avere per oggetto lo spazio: la geometria perciò non è parte della teoria ma un'applicazione di essa.

Le applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla cristallografia cui Graßmann fa riferimento sono presentate già nell'*Ausdehnungslehre*. Appli-

keinem Umhersuchen nach Auflösungsmethoden die Rede sein kann.≫ Cfr. *Geometrische Analyse*, in Graßmann (1847), p. 397.

[40]≪[...] jedenfalls ist klar, schon aus den Anwendungen, welche diese Analyse auf die Krystallgestalten gestattet [...], dass dabei die neue Analyse unentbehrlich sein würde, wenn man nicht durch Einführung von Koordinaten und anderem die Behandlung störenden Apparate die Anschaulichkeit vernichten und die Methode in unnütze Weitläuftigkeiten (sic) verwickeln wollte.≫ Cfr. *Geometrische Analyse*, in Graßmann (1847), p. 398.

[41]≪Nun lassen sich in der That, wie dies in Grassmanns Ausdehnungslehre durchweg geschehen ist, alle Begriffe und Gesetze der neuen Analyse ganz unabhängig von der räumlichen Anschauung entwickeln, indem sie rein an den abstrakten Begriff eines allmäligen (stetigen) Ueberganges geknüpft werden können; und es ist leicht zu sehen, wenn man einmal diese Idee des rein begrifflich gefassten stetigen Ueberganges in sich aufgenommen hat, dass auch die in dieser Abhandlung entwickelten Gesetze dieser von der räumlichen Anschauung gelösten Auffassung fähig sind.≫ Cfr. *Geometrische Analyse*, in Graßmann (1847), p. 398.

cazioni dell'addizione tra 'tratti' alla geometria e alla meccanica si trovano già nei paragrafi iniziali, perché la *Teoria dell'estensione* è presentata alternando sviluppo teoretico e applicazioni: *deviazione [Abweichung] di un punto* A *da un punto* B è il tratto BA considerato secondo la sua direzione e la sua lunghezza; *deviazione totale [Gesammtabweichung] di un punto* R *da una successione di punti* $A, B, C\ldots$ è la somma delle deviazioni di quel punto dai singoli punti della successione. Per mezzo di questo concetto di deviazione totale è possibile definire il punto medio di una successione di punti: *medio [Mitte]* di una successione di punti è il punto la cui deviazione totale dai punti della successione è nulla (cioè un punto tale che la somma totale delle distanze di esso dai punti della successione è nulla). La ricerca del medio di una successione di punti ha applicazione in fisica nella determinazione del *baricentro [Schwerpunkt]* di un sistema.[42] Dopo aver introdotto il concetto di prodotto esterno, Graßmann presenta applicazioni di quest'ultimo: la legge del cambio di segno quando si invertono fattori spaziali, la determinazione del momento statico di una forza in relazione ad un punto e del momento totale in un punto, la soluzione di equazioni algebriche di primo grado a più incognite.[43] Altre importanti applicazioni geometriche del prodotto esterno e del prodotto regressivo sono legate rispettivamente alle operazioni di proiezione e di sezione delle figure.

Gli argomenti con cui Graßmann argomenta a favore dell'intuizione leibniziana di una nuova analisi geometrica sono dunque principalmente due: l'importanza di un nuovo metodo di calcolo che affianchi dimostrazione e costruzione e la ricchezza di applicazioni che garantisca la fecondità della nuova disciplina. E infatti Graßmann presenta la propria *Teoria dell'estensione* non come un'abbreviazione, non come un modo per semplificare i calcoli, ma proprio come un nuovo ramo della matematica. In Leibniz sono presenti, stando ai passi riportati sopra, sia la convinzione della possibilità di scoprire nuove verità con la nuova analisi, sia la convinzione che essa possa costituire una comoda abbreviazione del calcolo. In Graßmann la *Teoria dell'estensione* più che essere considerata un'abbreviazione è vista come una teoria in grado di rendere conto in maniera puramente astratta di una peculiarità delle grandezze geometriche che l'algebra non può descrivere: la dimensione.

> [La Teoria dello spazio] non è una pura applicazione dell'algebra, neppure se la grandezza algebrica, come nella teoria delle funzioni è considerata come variabile in modo continuo; perché *all'algebra manca il concetto delle diverse dimensioni che è proprio della teoria dello spazio.* Perciò è necessario un ramo della matematica che nel concetto di grandezza variabile in modo continuo include quello delle differenze

[42] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §§ 24-7, in Graßmann (1844), pp. 69-77.

[43] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, §§ 37-46, in Graßmann (1844), pp. 90-102.

> che corrispondono alle dimensioni dello spazio e questo ramo è la mia Teoria dell'estensione.[44]

Quando dunque Graßmann afferma che la *Teoria dell'estensione* non oscura l'idea ma permette di coglierla in ogni passo della dimostrazione (si veda il passo citato a 318), egli non fa riferimento soltanto ad una maggiore evidenza o chiarezza del contenuto, ma ad una diversa possibilità di intendere il concetto fondamentale della Geometria e della *Teoria dell'estensione* stessa: la dimensione. Già si è visto nel capitolo 5 e lo vedremo nuovamente nei prossimi paragrafi, che il contributo principale di Graßmann risiede proprio nella determinazione precisa dei concetti di dimensione, base, dipendenza e indipendenza lineare e dunque nella determinazione precisa delle differenze tra i numeri adimensionali e le grandezze geometriche dotate di differenti dimensioni.

D'altra parte è solo in riferimento al calcolo geometrico che si può comprendere perché Graßmann abbia progettato e costruito la nuova disciplina matematica che prende il nome di *Teoria dell'estensione*. Nell'Introduzione alla prima edizione della *Ausdehnungslehre* si legge che, benché la giustificazione per l'introduzione di una nuova disciplina non possa essere fornita che attraverso l'opera stessa, tuttavia una descrizione del modo in cui l'autore è arrivato a quei risultati può fornire indicazioni utili per valutare la sua pretesa di aver sviluppato una nuova disciplina matematica.[45] Il primo passo attraverso il quale Graßmann dichiara di essere arrivato alla *Teoria dell'estensione* è lo studio del negativo in geometria, cioè la considerazione dei tratti AB e BA come grandezze opposte. Da questa idea derivò l'idea di una somma geometrica di segmenti, di cui si considerano non soltanto la lunghezza ma anche la direzione: la somma tra segmenti è introdotta cioè non soltanto tra segmenti aventi lo stesso verso e un estremo comune, ma anche tra segmenti opposti e tra segmenti di direzioni arbitrarie. La legge dell'addizione è dunque $AB + BC = AC$ per A, B, C punti qualunque, non necessariamente collineari.[46]

La somma tra segmenti (limitata al caso di segmenti collineari) era già stata introdotta nel 1827 da A. F. Möbius nell'opera *Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte* del 1827. Già Leibniz e Carnot avevano usato simboli letterali per indicare i punti come

[44]Cfr. "Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre", in Graßmann (1845), p. 297, corsivo mio.

[45]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Vorrede zur ersten Auflage*, in Graßmann (1844), p. 7.

[46]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Vorrede zur ersten Auflage*, in Graßmann (1844), p. 7.

estremi dei segmenti; Möbius si servì però specificamente dell'orientamento delle lettere per indicare la direzione del segmento di cui sono estremi: AB e BA costituiscono due entità distinte tali che $AB = -BA$, cioè sono due segmenti opposti con somma $AB + BA = 0$.[47] Möbius non considerò però il caso dell'addizione tra segmenti orientati non collineari, che costituisce un elemento di novità della Teoria dell'estensione di Graßmann.[48] La concezione di Möbius differisce inoltre da quella di Graßmann perché nel calcolo del baricentro tratta non specificamente di segmenti orientati, ma piuttosto di punti, eventualmente dotati di un certo peso (espresso da un coefficiente). In ogni caso l'elaborazione di Graßmann è indipendente da quella di Möbius, stando a quanto Graßmann stesso dichiara nella *Vorrede zur ersten Auflage*: egli afferma infatti di aver dapprima conosciuto il testo di Möbius solo di nome e di averlo letto negli anni '40, cioè solo dopo aver sviluppato indipendentemente, già nel 1832, il concetto di addizione geometrica.[49]

La fecondità dell'addizione geometrica di segmenti si sarebbe rivelata a Graßmann soltanto attraverso la combinazione dell'idea di somma con l'idea di prodotto, mutuata dal concetto di prodotto geometrico inventato dal padre Justus,[50] che aveva concepito il quadrato come prodotto di segmenti perpendicolari. Graßmann estese la considerazione del prodotto a segmenti incidenti non necessariamente perpendicolari, ottenendo come risultato un parallelogramma. L'armonia che risultava dalla definizione di somma e di prodotto geometrico, vale a dire la proprietà che oggi chiamiamo di distributività del prodotto rispetto alla somma, indusse Graßmann a credere di aver trovato un intero nuovo campo di analisi, che egli decise perciò di sviluppare in una nuova disciplina matematica. Come banco di prova della nuova analisi Graßmann scelse inizialmente la teoria della maree, come risulta dallo scritto *Theorie der Ebbe und Flut* di cui si è parlato nel § 5.2.1.

Il vantaggio metodologico della nuova disciplina, decantato nella *Geometrische Analyse*, era già espresso similarmente nella Prefazione alla prima edizione della *Ausdehnungslehre*:

[47] Cfr. Möbius (1827), p. 3.

[48] Sul confronto tra Möbius e Graßmann si veda Briccoli Bati (1992), spec. pp. 142-3.

[49] Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Vorrede zur ersten Auflage*, in Graßmann (1844), p. 10. La data del 1832 compare in una lettera a Saint-Venant del 18 aprile 1847. Un ampio estratto della lettera, in francese, è citato in Engel (1911), pp. 42-3.

[50] *Ausdehnungslehre 1844*, *Vorrede zur ersten Auflage*, in Graßmann (1844), pp. 7-8.

> Di fatto non solo ogni formula prodotta nel processo di sviluppo poteva essere tradotta in parole nel modo più semplice ed esprimeva ogni volta una particolare legge, ma anche ogni passo da una formula ad un'altra appariva immediatamente soltanto come espressione simbolica di un'argomentazione concettuale che procedeva parallela. Con il metodo abituale l'idea appariva completamente oscurata a causa dell'introduzione di coordinate arbitrarie che non avevano nulla a che fare con la cosa, e il calcolo consisteva in un sviluppo meccanico di formule che non offriva nulla allo spirito e perciò lo mortificava. Al contrario qui, dove l'idea non essendo offuscata da alcunché di estraneo si irradiava attraverso le formule con la massima chiarezza, accadeva anche che in ogni sviluppo di formule lo spirito fosse afferrato nel progresso dell'idea.
> In forza di questo successo mi sono sentito legittimato a sperare di aver trovato in questa nuova analisi l'unico metodo conforme a natura secondo il quale deve proseguire ogni applicazione della matematica alla natura e secondo il quale ugualmente deve essere trattata la geometria se essa deve condurre a risultati generali e fecondi.[a][51]
>
> [a]Di fatto si mostrò presto come attraverso questa analisi scomparisse completamente la differenza tra trattazione analitica e trattazione sintetica della geometria.

Per superare l'opposizione tra metodo sintetico e metodo analitico, Graßmann proponeva un metodo di calcolo che li unificasse, cioè che trapiantasse i pregi dell'uno sul terreno dell'altro in modo che ad ogni costruzione fosse affiancata una semplice operazione analitica e viceversa.[52]

> Con i metodi usuali l'idea era completamente oscurata dall'introduzione di coordinate arbitrarie, che non hanno nulla a che fare con la cosa, e il calcolo consisteva in uno sviluppo meccanico di formule che nulla apportano allo spirito e che di conseguenza lo uccidono. Qui, invece, dove l'idea non essendo turbata da alcunché di estraneo traspare in tutta la sua chiarezza attraverso le formule, lo spirito è afferrato, anche nel momento di ciascun sviluppo di formule, attraverso lo sviluppo progressivo dell'idea.[53]

A inizio Ottocento la contrapposizione tra metodo sintetico e metodo analitico era abbastanza netta: ciascuno dei due metodi aveva sostenitori autorevoli. Il metodo analitico era fondato sullo studio della geometria introdotto da Descartes e da Fermat nel Seicento: ricorrendo alle risorse dell'analisi algebrica nella soluzione dei problemi geometrici, stabiliva una corrispondenza

[51]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Vorrede zur ersten Auflage*, in Graßmann (1844), p. 9.
[52]Cfr. Graßmann (1845), p. 300.
[53]Cfr. *Ausdehnungslehre 1844*, *Vorrede zur ersten Auflage*, in Graßmann (1844), p. 9.

fra i punti di una retta ed i numeri reali, traducendo le questioni geometriche in problemi algebrici. Tale metodo prevalse fino all'inizio dell'Ottocento, quando alcuni matematici, tra i quali Gaspard Monge, Jean-Victor Poncelet, Michel Chasles, sostennero la rinascita del metodo sintetico puro, fondato sullo studio diretto delle figure: frutto di questo nuovo approccio metodologico furono le ricerche in geometria proiettiva. Pur riconoscendo nella generalità senza limiti dei risultati algebrici un pregio irrinunciabile della geometria analitica i geometri proiettivi ritenevano possibile ottenere un'analoga generalità con metodi puramente sintetici. Sintetico era il metodo greco, fondato sulla costruzione delle figure; esso permetteva d'evitare un grave difetto dell'analisi: l'assenza di significato geometrico dei risultati, che a causa della loro astrattezza e generalità richiedevano di essere interpretati alla fine di ogni dimostrazione. A ciò si aggiungeva spesso anche l'impossibilità di attribuire un'interpretazione geometrica ai singoli passi delle dimostrazioni, con la conseguente difficoltà a comprendere il ragionamento che dalle premesse conduceva alla conclusione. Proprio mentre la rivalità fra i sostenitori dell'uno e dell'altro metodo iniziava ad inasprirsi, Graßmann cercò di superare questa frattura metodologica interna alla geometria mediante la creazione di un nuovo metodo atto a riassumere la generalità dell'algebra e l'evidenza del procedimento costruttivo euclideo.

Proprio in relazione alla valutazione dell'originalità e della fecondità di questo metodo la concezione di Graßmann appare particolarmente vicina a quella di Leibniz. Mentre dal punto di vista dello svolgimento del calcolo la *Geometrische Analyse* è radicalmente diversa dalla caratteristica leibniziana, dal punto di vista delle finalità del nuovo metodo le affermazioni di Graßmann e quelle di Leibniz sostanzialmente coincidono. In entrambi i casi lo scopo è la costruzione di un nuovo calcolo che si applichi direttamente agli oggetti geometrici.

> Nella mia Teoria dell'estensione compare un metodo peculiare di calcolo che, trasportato alla Teoria dello spazio è di una fertilità inesauribile e qui (nella Teoria dello spazio) consiste nel fatto che le figure spaziali (punti, linee, e così via) sono sottoposte immediatamente al calcolo.[54]

Può dunque il calcolo di Graßmann essere considerato a pieno titolo una realizzazione dell'ideale leibniziano? Questa era l'opinione di A.E. Heath, che riteneva simile il fine dei due autori e realizzate tutte le previsioni di Leibniz relative al nuovo calcolo.[55] Se Heath concordava sostanzialmente con l'opinione dello stesso Graßmann, un ben diverso parere si legge in "L'Analyse Géométrique de Grassmann et ses rapports avec la Caractéristique

[54]Cfr. Graßmann (1845), pp. 299-300.
[55]Cfr. Heath (1917b), spec. p. 52 ss.

Géométrique de Leibniz", articolo di J. Echeverría che critica la lettura grassmanniana di Leibniz e nega che la *Geometrische Analyse* possa essere considerata un proseguimento delle concezioni geometriche leibniziane.[56] Già Couturat a inizio secolo aveva criticato la lettura di Graßmann, sostenendo che se giustamente si può notare una sproporzione tra l'ideale leibniziano e la realizzazione che egli ne diede nel saggio allegato alla lettera di Leibniz, ingiusto è però, almeno storicamente, il troppo netto giudizio di Graßmann.[57]

L'idea che il calcolo geometrico di Graßmann costituisca la prima realizzazione e generalizzazione del *calculus situs* leibniziano si ritrova anche negli articoli scritti da Rothe e da Lotze per l'*Enzyklopädie*.[58] In anni più recenti, come mostra Echeverría nell'articolo citato, a partire da uno scritto di H. Freudenthal, la tendenza si è invertita: la critica di Graßmann a Leibniz è stata accentuata sempre di più fino ad arrivare alla conclusione che tra l'analisi geometrica del primo e la caratteristica progettata dal secondo non vi è più in comune altro che il nome.[59] Echeverría riprende questa critica ribaltandola: la ragione della differenza tra Graßmann e Leibniz non sta nello scarso contenuto matematico o geometrico del saggio sulla caratteristica ma nel fatto che Graßmann ne critica fin dall'inizio i presupposti sostituendoli con i principi della propria *Teoria dell'estensione*. Rifiutando di ammettere come relazione fondamentale la congruenza e sostituendo ad essa l'uguaglianza, Graßmann modifica radicalmente l'impostazione del problema di Leibniz: non c'è dunque alcun rapporto a livello di contenuto tra la caratteristica geometrica e l'Analisi di Graßmann, così come non c'è secondo Echeverría alcun rapporto con gli altri calcoli geometrici ottocenteschi.[60]

Già abbiamo citato il calcolo baricentrico costruito da Möbius nel 1827, calcolo nel quale è definita un'operazione di somma di punti in cui si tiene conto sia della posizione sia della lunghezza dei tratti che li congiungono.[61] Altri calcoli geometrici furono proposti da Bellavitis, Saint-Venant, Cauchy. Bellavitis pubblicò il suo calcolo delle equipollenze per la prima volta nel 1832 nella memoria "Sopra alcuni teoremi di Geometria": punto di partenza delle sue ricerche furono sia i lavori sulla geometria di posizione di Carnot sia le discussioni intorno alla rappresentazione geometrica dei numeri com-

[56]Cfr. Echeverría (1979).

[57]Si veda il passo citato nella nota 34, p. 312. Couturat dedica l'appendice V della sua monografia su Leibniz al calcolo geometrico di Graßmann: si veda Couturat (1901), pp. 529-538.

[58]Cfr. Rothe (1916) e Lotze (1923).

[59]Cfr. Freudenthal (1954).

[60]Cfr. Echeverría (1979), spec. p. 273. Un breve riferimento al rapporto tra l'*analysis situs* di Leibniz e il calcolo di Graßmann si trova anche in Muenzenmayer (1979) e nei commenti di F. Barone a Leibniz (1968).

[61]Cfr. Möbius (1827).

plessi (in particolare la rappresentazione geometrica dei numeri immaginari proposta da Buée).[62] Il calcolo di Bellavitis fu sviluppato indipendentemente dai lavori di Graßmann e con un metodo più generale di quello di Möbius. Il calcolo geometrico ha poi suscitato un grande interesse in Italia a fine Ottocento, come testimoniano il *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann* pubblicato da Peano nel 1888 e l'*Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de Graßmann* di Burali-Forti.[63] Tra gli altri calcoli geometrici ottocenteschi ricordiamo ancora il calcolo di Saint-Venant, che nell'opera *Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la Mécanique* introdusse la somma geometrica tra linee, il prodotto geometrico di una linea per una linea, il prodotto geometrico di una superficie per una linea.[64] È interessante notare che il prodotto vettoriale di due linee è, come in Graßmann, una superficie e non un vettore.[65] Nel 1853 apparve l'opera *Les clefs algébriques* di Cauchy, che conteneva un prodotto esterno algebricamente equivalente a quello introdotto da Graßmann.[66] Ne sorse anche una disputa di priorità sottoposta ad un comitato di cui faceva parte lo stesso Cauchy, ma che non arrivò a prendere alcuna decisione.[67]

6.2 Il concetto di vettore

Dopo aver visto il rapporto tra la *Teoria dell'estensione* e la geometria, il rapporto con altre applicazioni e anche il legame di continuità o di rottura rispetto al progetto filosofico leibniziano, rivolgiamo ora l'attenzione al significato della teoria proposta da Graßmann da un punto di vista storico, matematico e filosofico. Valuteremo infatti dapprima il contributo della teoria di Graßmann allo sviluppo del concetto di vettore e dell'algebra lineare (§ 6.2.1 e § 6.2.2), quindi cercheremo di comprendere il significato fondazionale

[62] Per un'accurata descrizione delle fonti di Bellavitis e dei principi del suo calcolo delle equipollenze rimandiamo a Freguglia (1992), che analizza gli sviluppi del calcolo geometrico in Italia fino a Peano e alla sua scuola.

[63] Cfr. Peano (1888) e Burali-Forti (1897). Del calcolo di Peano torneremo a parlare nel § 6.2.2, in cui analizzeremo la presentazione in forma assiomatica fornita da Peano della teoria di Graßmann.

[64] Cfr. Saint-Venant (1845).

[65] Il lavoro di Saint-Venant, apparso nel 1845, attirò l'attenzione di Graßmann, che decise di scrivere a Saint-Venant per segnalare una stretta analogia con i propri risultati ma, non avendo l'indirizzo di Saint-Venant, inviò la lettera a Cauchy insieme a due esemplari della *Ausdehnungslehre*, pregando quest'ultimo di inviarne una copia a Saint-Venant.

[66] Cfr. Cauchy (1853).

[67] Si veda in proposito Crowe (1967), p. 84.

dell'approccio di Graßmann nel caso dell'applicazione alla geometria e allo studio dell'estensione in generale (§ 6.2.3).

6.2.1 Il calcolo vettoriale moderno

La *Teoria dell'estensione* studia operazioni di somma e di prodotto tra 'tratti', vale a dire tra grandezze estese di cui si considera anche la direzione. Tali grandezze hanno le stesse proprietà che oggi si attribuiscono ai vettori: sorge dunque spontaneo chiedersi quale contributo abbia dato Graßmann allo sviluppo del calcolo vettoriale moderno. Nel suo noto studio sulla storia del concetto di vettore Michael Crowe ritiene che l'*Ausdehnungslehre* non abbia avuto alcuna influenza né sullo sviluppo né sull'accettazione del sistema vettoriale moderno. Crowe intende infatti come moderno sistema vettoriale il sistema Gibbs-Heaviside, nel quale il prodotto vettoriale è definito come un vettore, mentre in Graßmann il prodotto è una superficie: non si può cogliere perciò nessuna influenza diretta delle concezioni di Graßmann su Gibbs o Heaviside, i quali, pur opponendosi radicalmente all'ortodossia quaternionista, appartennero comunque ad una tradizione che faceva riferimento alle teorie di Hamilton e di Tait. La storia del concetto di vettore tracciata da Crowe è una storia parziale, particolarmente insoddisfacente proprio per chi cerca tracce del contributo di Graßmann: Crowe rivolge infatti l'attenzione in modo quasi esclusivo agli sviluppi della fisica, menzionando invece solo marginalmente la storia dell'accettazione della teoria degli spazi vettoriali in matematica. A quest'altra storia, cui hanno dato un contributo fondamentale tra gli altri Graßmann e Peano, dedicheremo il prossimo paragrafo.

Ripercorriamo qui alcune tappe della storia del calcolo vettoriale, confrontando dapprima la concezione di Graßmann con la teoria dei quaternioni di Hamilton e analizzando in seguito l'impostazione metodologica di Maxwell e di Gibbs, che attribuiscono al concetto di vettore un significato molto simile a quello che ad esso attribuiva Graßmann: il calcolo vettoriale non è uno strumento per abbreviare i calcoli, ma un mezzo per calcolare direttamente con le grandezze fisiche o geometriche, per evitare di mettere in moto il «motore analitico».

Tre sono, secondo Crowe, le idee fondamentali che hanno contribuito al sorgere del concetto di vettore negli anni Quaranta dell'Ottocento: lo studio delle forze e in particolare del parallelogramma delle forze, le ricerche di geometria di posizione e l'idea di rappresentare geometricamente i numeri immaginari.[68] Proprio perché trascura lo sviluppo dell'algebra lineare, Crowe omette un quarto fattore, che in effetti ha giocato un ruolo rilevante non

[68]Cfr. Crowe (1967), p. 1 ss.

tanto nella determinazione dell'idea fisica di vettore quanto nello sviluppo dei concetti di combinazione lineare, dipendenza, base e dimensione di uno spazio vettoriale: lo studio di equazioni e di sistemi di equazioni lineari.[69]

Oltre a Graßmann, altri autori hanno lavorato intorno a calcoli geometrici incentrati sul concetto di vettore: abbiamo accennato nel paragrafo precedente ai lavori di Möbius, Bellavitis, Saint-Venant e Cauchy. Nessuno di questi autori ha avuto però un'influenza decisiva sugli sviluppi del calcolo vettoriale moderno; il sistema di Gibbs e Heaviside è infatti nato dalla rielaborazione della teoria dei quaternioni di Hamilton.[70] Tale teoria è stata creata e sviluppata all'incirca negli stessi anni in cui Graßmann ha elaborato la *Teoria dell'estensione* e costituisce pertanto un interessante termine di confronto per comprendere il significato dell'*Ausdehnungslehre*. Non solo, Graßmann stesso si confronta con la teoria dei quaternioni per mostrare le differenze fra le due impostazioni e in particolare la maggiore generalità del proprio approccio: le motivazioni di Hamilton sono infatti prevalentemente fisiche e non astratte.[71]

I quaternioni, scoperti da Hamilton nel 1843, costituiscono un sistema numerico che non soddisfa alle usuali leggi algebriche, perché la moltiplicazione non è commutativa; tale sistema può essere rappresentato geometricamente in uno spazio tridimensionale.[72] Tra i quaternioni è possibile definire un'operazione di somma commutativa e associativa, una moltiplicazione associativa e distributiva rispetto all'addizione, un'operazione inversa del prodotto non ambigua. In simboli (siano a, b, c quaternioni):

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $(ab)c = a(bc)$
4. $(a + b)c = ac + bc$
5. $a(b + c) = ab + ac$
6. $c = a : b \quad \wedge \quad d = a : b \quad c = d.$

Ma cosa sono i quaternioni? I quaternioni sono numeri ipercomplessi della

[69]Tra le applicazioni della *Teoria dell'estensione* Graßmann cita anche la soluzione di sistemi di n equazioni in un'incognita.

[70]Per una ricostruzione puntuale degli sviluppi del calcolo rimandiamo al già citato Crowe (1967).

[71]Si veda lo scritto di Graßmann pubblicato nel 1877 sui *Mathematische Annalen* dal titolo "Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der *Ausdehnungslehre*". Cfr. Graßmann (1877).

[72]L'esposizione più completa della teoria si trova nelle *Lectures on Quaternions* pubblicate a Dublino nel 1853. Cfr. Hamilton (1853).

seguente forma:

$$w + ix + jy + kz$$

con w, x, y, z numeri reali. In una rappresentazione geometrica tridimensionale i, j, k possono essere considerati come vettori unitari giacenti sugli assi cartesiani e per i quali valgono le seguenti regole:

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j$$

e l'anticommutatività:

$$ij = -ji = -k, \quad jk = -kj = -i, \quad ki = -ik = -j.$$

Dato un quaternione $w + ix + jy + kz$ Hamilton chiama w parte scalare e $ix + jy + kz$ parte vettoriale, ove x, y, z sono intese nella rappresentazione geometrica come proiezioni del vettore sugli assi ortogonali i, j, k.[73] Nel caso particolare in cui la parte scalare di due quaternioni sia nulla, Hamilton definisce due diversi tipi di prodotto tra le parti vettoriali nel modo seguente (siano $\alpha = xi + yi + zk$ e $\alpha' = x'i + y'j + z'k$):

$$S.\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz')$$

$$V.\alpha\alpha' = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx').$$[74]

A Hamilton risale dunque l'uso, oggi mantenuto, dei termini 'scalare' e 'vettoriale' per indicare rispettivamente la parte numerica e la parte vettoriale del quaternione. Tali termini non riscossero l'approvazione di Graßmann, che nel 1877 scriveva:

> Inoltre è riprovevole, ed è stato anche poco utile alla teoria dei quaternioni che secondo l'esempio di Hamilton si siano indicati concetti semplici e noti da lungo tempo con nomi nuovi spesso del tutto inadeguati, come 'vettore' invece di 'tratto', 'tensore' invece di 'lunghezza' o 'valore numerico' (*A*2, Nr. 414), ecc.[75]

Questi due tipi di prodotto corrispondono rispettivamente al prodotto scalare (che in Hamilton ha però segno negativo) e al prodotto vettoriale del sistema moderno, come si può facilmente vedere confrontando le definizioni dei prodotti scalare e vettoriale in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

[73]Cfr. Hamilton (1846), pp. 26-7, cit. in Crowe (1967), pp. 31-2.
[74]Cfr. Crowe (1967), p. 30.
[75]Cfr. Graßmann (1877), p. 268.

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (u_y v_z - u_z v_y)\overrightarrow{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\overrightarrow{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\overrightarrow{k}.$$

Confrontando la propria teoria con quella di Hamilton Graßmann affermò che il tipo di prodotto presentato nella Teoria dei quaternioni poteva essere fondato rigorosamente anche in base ai principi della Teoria dell'estensione: per dimostrarlo Graßmann considerava un tipo di prodotto, detto *mediano*, con proprietà analoghe al prodotto tra quaternioni ed esprimibile come combinazione del prodotto interno o del prodotto esterno definiti nella $A2$.[76] Quindi osservava che la teoria dei quaternioni pur presentando una forte somiglianza con la Teoria dell'estensione riguardo alle proprietà delle operazioni (in particolare all'anticommutatività del prodotto) era meno generale, perché le proprietà del prodotto erano determinate con riferimento ad un sistema di assi cartesiani ortogonali.

Hamilton, per parte sua, inizialmente non riconobbe neppure la somiglianza fra la propria opera e quella di Graßmann, né tantomeno si espresse positivamente al riguardo, come testimoniano alcune lettere a De Morgan o l'introduzione alle *Lectures*; tuttavia successivamente, soprattutto dopo aver letto una serie di articoli pubblicati da Graßmann sul *Journal de Crelle* nel 1855, ammise di aver ricevuto molti stimoli dalla *Teoria dell'estensione*.[77]

La teoria dei quaternioni di Hamilton diede origine ad un numero considerevole di studi, molti dei quali rivolti all'indagine sull'utilità del nuovo metodo e sulle proprietà che lo avrebbero reso fecondo di applicazioni fisiche.[78]

---

[76] Cfr. Graßmann (1877), p. 268 ss.

[77] Cfr. Crowe (1967), pp. 86-7.

[78] Crowe ricorda a questo proposito in particolare i contributi di Tait, Peirce, Maxwell e Clifford, l'unico tra gli autori citati a conoscere sia il testo di Graßmann sia il testo di Hamilton. Cfr. Crowe (1967), cap. 4. Senza entrare in dettagli ci limitiamo ad osservare che il contributo di questi autori è analizzato da Crowe soprattutto in funzione della creazione del prodotto vettoriale moderno; Crowe afferma infatti che il confronto tra i lavori citati mostra la comune convinzione nei vantaggi dell'applicazione del metodo vettoriale ai problemi fisici e nella maggiore utilità dei prodotti scalare e vettoriale rispetto al prodotto di quaternioni inizialmente introdotto da Hamilton. Questa prospettiva, pur permettendo, soprattutto attraverso l'analisi dei testi di Maxwell, di cogliere con chiarezza il rapporto tra il nuovo metodo e gli sviluppi della fisica, non mette però nella giusta luce il rapporto tra il calcolo vettoriale e l'algebra lineare: a conferma di ciò si osservi la scarsa attenzione dedicata da Crowe a Peano, il primo ad aver presentato in maniera assiomatica il concetto di spazio vettoriale, e proprio a partire dalla rielaborazione delle idee di Graßmann. Si noti in particolare che Crowe fa riferimento a Peano come a uno degli appartenenti alla tradizione grassmanniana più per spiegare l'origine dell'interesse di Burali-Forti e Marcolongo per Grassmann che non per analizzare i contributi di Peano allo sviluppo del concetto di vettore. Cfr. Crowe (1967), pp. 235-6. La maggiore attenzione dedicata a Burali-Forti e a Marcolongo è d'altra parte ben giustificata nel quadro della ricerca di Crowe (rivolta come si è detto allo studio delle origini del moderno calcolo vettoriale in fisica) in virtù del contributo sostanziale che essi hanno dato al confronto e

A partire dagli anni Settanta dell'Ottocento anche la *Teoria dell'estensione* iniziò ad avere numerosi sostenitori. Crowe mostra, con strumenti statistici e sociologici, una forte presenza di entrambe le tradizioni concorrenti (quella di Graßmann e quella di Hamilton) fino ai primi anni del Novecento. Nonostante la superiorità numerica delle pubblicazioni di stampo hamiltoniano e la maggiore diffusione al di là del paese di origine, la tradizione grassmanniana è testimoniata da numerose pubblicazioni e volumi. Questo dato mostra innanzitutto che la scarsa influenza della teoria di Graßmann sullo sviluppo del concetto fisico di vettore non è dovuta ad una mancata diffusione delle sue idee. I sostenitori di Graßmann erano sicuramente numerosi se Klein racconta nelle *Vorlesungen* di due 'sette' contrapposte: grassmanniani e hamiltoniani.[79] La diffusione delle idee di Graßmann mostra d'altra parte che, come si è già accennato, non è opportuno parlare, con Dieudonné, di 'tragedia' a proposito della tardiva ricezione dell'opera di Graßmann. Piuttosto la pubblicazione delle opere complete a pochi anni dalla morte (opera che fu voluta da Felix Klein, il quale, nonostante la scarsa simpatia per i grassmanniani, non mancò mai di riconoscere il proprio debito nei confronti di Graßmann) testimonia che la ricezione e lo studio dell'opera di Graßmann cominciarono presto. Più che di tragedia sarebbe allora opportuno parlare di 'grandezza tragica' di Graßmann, perché la tardiva ricezione delle sue opere appare dovuta piuttosto alla mancata comprensione di molti dei suoi risultati, troppo nuovi, generali ed astratti.[80] Per questa ragione quindi le idee di Graßmann sono state sviluppate nel Novecento (si pensi alla teoria degli spazi vettoriali e alla multialgebra) più che nell'Ottocento.

La distinzione di Hamilton fra parte scalare e parte vettoriale dei quaternioni, insieme alla considerazione separata di un prodotto scalare e di un prodotto vettoriale, ebbe una grande influenza sul successivo sviluppo del calcolo, soprattutto attraverso i lavori di Tait, il più importante matematico della tradizione hamiltoniana.[81] Da un punto di vista fisico-applicativo il pregio dei quaternioni consisteva non tanto nella forma di numeri impercomplessi con quattro componenti quanto nella distinzione tra prodotto scalare e prodotto vettoriale. Infatti la distinzione delle componenti scalare e vettoriale del prodotto permetteva di studiare alcune grandezze fisiche come le velocità e le forze per mezzo dell'idea di vettore. Per questa stessa ragione

alla discussioni delle diverse notazioni da adottare nel nuovo calcolo. Cfr. Burali-Forti e Marcolongo (1907) e Marcolongo (1909).

[79]Cfr. Klein (1926), pp. 169-170.

[80]Se proprio di tragedia si vuole parlare, perché non menzionare allora il destino tragico dell'elemento filosofico presente nell'*Ausdehnungslehre*, elemento che è stato spesso misconosciuto o poco compreso anche da chi ne ha sviluppato le idee matematiche?

[81]Cfr. Tait (1867).

la teoria dei quaternioni iniziò ad essere approfondita nello studio della fisica da Tait, Maxwell e Clifford. William Kingdon Clifford (1845-1879), professore all'University College di Londra, era uno dei pochi matematici dell'epoca che conoscesse sia la teoria dei quaternioni sia la teoria di Graßmann, ma nella sua opera più nota, pubblicata postuma con il titolo *Common Sense of the Exact Sciences* e la cui redazione definitiva è opera di Karl Pearson,[82] mancano ampi riferimenti a Hamilton e Graßmann non è mai citato. A Graßmann Clifford aveva però dedicato un articolo pubblicato nel 1878 e intitolato: "Applications of Grassmann's Extensive Algebra".[83]

Chi colse molto bene l'importanza del concetto di vettore fu James Clerk Maxwell, che dapprima presentò i suoi lavori sull'elettricità per mezzo di una notazione basata sulle coordinate cartesiane e successivamente li riformulò sulla base del concetto di vettore. Maxwell colse nel nuovo concetto di vettore non tanto un'abbreviazione o un potenziamento del calcolo (come Tait), quanto un metodo più naturale, intrinseco alla fisica e alla geometria. Maxwell attruibisce ai vettori un significato simile a quello che Graßmann attribuiva alle grandezze estese: l'indipendenza del calcolo geometrico dall'introduzione di coordinate numeriche e la possibilità di attribuire un significato geometrico direttamente ad ogni passo del calcolo.

In una lettera a Tait del 2 novembre 1871 il significato attribuito alla teoria dei quaternioni è espresso in maniera molto più chiara, con riferimento alla possibilità di calcolare direttamente con le entità senza mettere in moto il 'motore analitico':

> Ma prova e usa i quaternioni. Gli increduli insorgono. Dicono "mostrami qualcosa che sia stato ottenuto con i quaternioni e non con i vecchi schemi. Tutt'al più potrà essere annoverato nel rango delle notazioni abbreviate." Dovrai rispondere a questo, e senza dubbio lo farai. Ma il valore dei quaternioni non sta tanto nel risolvere questioni difficili, quanto nel fatto che essi permettono di vedere il significato della questione e della sua soluzione, senza sviluppare la questione in x, y, z, inviarla al motore analitico, e quando la soluzione è rispedita indietro tradurla di nuovo da x, y, z in modo che possa apparire al profano come A, B, C.[84]

L'opportunità di evitare il ricorso al 'motore analitico' ben si concilia con il vantaggio che Graßmann attribuisce al nuovo metodo adottato nella Teoria dell'estensione e che è caratterizzato essenzialmente dalla possibilità di esprimere con la massima chiarezza l'idea senza oscurarla con l'introdu-

[82] Cfr. Clifford (1885).
[83] Cfr. Clifford (1878).
[84] Cfr. Maxwell (1965), p. 101, cit. in Crowe (1967), p. 133.

zione di coordinate arbitrarie.[85] Un altro brano di Maxwell presenta ancora più affinità con le affermazioni di Graßmann sulla necessità di attribuire un significato geometrico ad ogni passo delle dimostrazioni:

> Ora, i quaternioni, o la dottrina dei Vettori, è un metodo matematico, ma è un metodo per pensare e non, almeno per la generazione attuale, un metodo per risparmiare pensiero. Ci invita ad ogni passo a formare un'immagine mentale delle configurazioni geometriche rappresentate dai simboli, così che, studiando geometria con questo metodo noi impegniamo le nostre menti con idee geometriche e non ci è concesso crederci geometri mentre siamo solo aritmetici.[86]

Maxwell esprime inoltre con la massima chiarezza la differenza tra la concezione analitica e la concezione vettoriale nell'applicazione al calcolo fisico: anziché fare riferimento alle coordinate di un punto e alle sue tre direzioni lungo gli assi, il nuovo calcolo vettoriale permette di rivolgere subito l'attenzione ad un punto e alla forza applicata in esso secondo una certa direzione.

> Ma per molti scopi del ragionamento fisico, in quanto distinto dal calcolo, è desiderabile evitare di introdurre esplicitamente le coordinate cartesiane e fissare subito la mente su un punto dello spazio invece che sulle sue tre coordinate e sulla grandezza e sulla direzione di una forza invece che sulle sue tre componenti. Questo modo di contemplare le quantità fisiche e geometriche è più primitivo e più naturale dell'altro [quello cartesiano], anche se le idee ad esso connesse non ricevettero pieno sviluppo finché Hamilton non fece il passo maggiore [dopo quello di Descartes] nella trattazione dello spazio con l'invenzione del suo Calcolo dei Quaternioni.[87]

Proprio ispirandosi ai lavori di Maxwell e alla teoria dei quaternioni di Hamilton Gibbs e Heaviside crearono il sistema vettoriale usato ancora oggi in fisica. La principale differenza rispetto al sistema di Graßmann riguarda la concezione del prodotto vettoriale, che è definito come un vettore e non come una superficie orientata.[88] Gibbs, pur avendo sviluppato la propria teoria indipendentemente da Graßmann, ne conobbe successivamente i risultati. In una lettera a Victor Schlegel del 1888 Gibbs afferma di non essere stato influenzato in modo specifico da Graßmann nella costruzione della propria analisi vettoriale, anzi di non avere neppure letto le due edizioni dell'*Ausdehnungslehre*. Tuttavia egli rivela la conoscenza di altri testi

[85] Si veda a questo proposito il passo citato nel § 6.1.2, p. 310.
[86] Cfr. Maxwell (1873a), p. 137.
[87] Cfr. Maxwell (1873b), vol. 1, pp. 9-10.
[88] Si veda quanto detto nel § 5.2.1.

di Graßmann e mostra di apprezzarne l'impostazione teorica. Gibbs infatti riteneva che i metodi di Graßmann fossero superiori a quelli di Hamilton e giudicava la propria algebra vettoriale più simile alla Teoria dell'estensione che non alla teoria dei quaternioni.[89]

> Ho fatto conoscenza per la prima volta con i quaternioni leggendo *A Treatise on Electricity and Magnetism* di Maxwell. Benché i metodi fossero chiamati quaternionici, l'idea del quaternione non compariva affatto: si trattava di considerare una parte scalare e una parte vettoriale del prodotto e non di considerare il tutto come un quaternione. Anche Grassmann l'ho conosciuto per il tramite del libro di Maxwell. Mi accorsi che i metodi che io stavo usando, mentre erano simili a quelli di Hamilton, erano quasi esattamente quelli di Grassmann. Mi sono così procurato le due edizioni dell'*Ausdehnungslehre*, ma ne ho trovato difficile la lettura. Di fatto non ho mai avuto la perseveranza di leggere per intero nessuno dei due e ho forse tratto più idee dalle sue memorie miscellanee che da quei due lavori. Non sono comunque consapevole che gli scritti di Grassmann abbiano esercitato alcuna particolare influenza sulla mia *Analisi Vettoriale*, benché io mi sia trincerato dietro ai nomi di Grassmann e di Clifford per introdurre alcune modifiche notazionali che sarebbero risultate sgradite ai quaternionisti. Considero i metodi di Grassmann superiori a quelli di Hamilton. È interessante notare che cominciando con i metodi di Hamilton e influenzato dal semplice desiderio di ottenere l'algebra più semplice per l'espressione delle relazioni fisico-geometriche, sono stato condotto essenzialmente all'algebra dei vettori di Grassmann, indipendentemente dall'influenza sua o di chiunque altro.[90]

Per tutta la seconda metà dell'Ottocento e fino all'inizio del Novecento si susseguirono discussioni sul significato e sulla portata del calcolo vettoriale. Accanto alla controversia tra i metodi di Graßmann e di Hamilton si discuteva se il nuovo metodo vettoriale fosse necessario per la risoluzione di determinati problemi matematici o se esso non fosse soltanto un'abbreviazione rispetto al metodo delle coordinate cartesiane. Secondo Cayley, ad esempio, il metodo dei quaternioni di Hamilton costituiva dal punto di vista delle applicazioni soltanto una notazione abbreviata rispetto all'usuale metodo cartesiano. Anzi Cayley prospettava addirittura l'ipotesi che il metodo dei quaternioni si applicasse soltanto a casi particolari risolubili mediante coordinate ortogonali in uno spazio tridimensionale.

[89] Un'analoga affermazione si trova nel paragrafo introduttivo a *Vector Analysis*.
[90] Cfr. Gibbs, *Lettera a Victor Schlegel*, cit. in Crowe (1967), pp. 152-3.

> In conclusione direi che, mentre le coordinate sono applicabili all'intera scienza geometrica e sono la base e il metodo naturale e appropriato nella scienza, i quaternioni mi sembrano un metodo molto particolare e artificiale per trattare quelle parti della scienza geometrica tridimensionale che sono più naturalmente discusse per mezzo delle coordinate ortogonali x, y, z.[91]

La critica di Cayley si applica in realtà alla formulazione originaria dei quaternioni, che presuppone, come si è detto, l'uso di i, j, k e dunque l'uso delle coordinate. Essa non si applica però secondo Tait alla propria formulazione della teoria, nella quale i quaternioni sono primitivi rispetto alle coordinate con cui sono indicati:

> i quaternioni sono innanzitutto un modo di rappresentazione dello stesso tipo di un diagramma o di un modello. I quaternioni sono virtualmente le cose che rappresentano e sono perciò antecedenti e indipendenti dalle coordinate. I quaternioni esistono nello spazio e noi dobbiamo soltanto riconoscerli, mentre dobbiamo immaginarci o inventarci coordinate di tutti i tipi.[92]

Grazie anche alla vigorosa difesa di Tait, la teoria dei quaternioni di Hamilton conobbe una maggiore fortuna rispetto alla tradizione dell'algebra vettoriale di Graßmann. Tuttavia diversi autori hanno ripreso il simbolismo di Graßmann e hanno argomentato a difesa dei suoi metodi, ritenuti più naturali da un punto di vista fisico e geometrico proprio perché indipendenti dalle coordinate numeriche. Accanto al già citato Gibbs e a Peano (cfr. il § 6.2.2), ricordiamo che la tradizione dei grassmanniani prosegue fino all'inizio del Novecento, con i lavori di Eugen Jahnke, Cesare Burali-Forti, Roberto Marcolongo e Timerding.[93] In particolare Jahnke nelle *Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwendungen auf die Geometrie, Mechanik und mathematische Physik* afferma che il sistema vettoriale grassmanniano è preferibile alla tradizione dei quaternioni perché permette applicazioni non solo alla fisica ma anche alla geometria. Vedremo tra poco in che modo la teoria dell'estensione di Graßmann abbia contribuito allo sviluppo dell'algebra lineare, suggerendo anche un nuovo modo di fondare la geometria: analizzeremo infatti dapprima la presentazione fornita da Peano della teoria dell'estensione di Graßmann, presentazione che ha fornito una prima assiomatizzazione di quella che oggi è chiamata teoria degli spazi vettoriali, quindi cercheremo di comprendere il significato fondazionale di tale teoria.

---

[91]Cfr. Cayley (1895), p. 275, cit. in Crowe (1967), p. 213.

[92]Cfr. Tait (1867), cit. in Crowe (1967).

[93]Si vedano ad esempio Janhke (1905), Burali-Forti (1897), Burali-Forti (1896), Burali-Forti e Marcolongo (1907), Burali-Forti e Marcolongo (1909), Marcolongo (1909) e Timerding (1902).

6.2.2 La teoria degli spazi vettoriali

Nel capitolo 5 abbiamo mostrato che nella *Ausdehnungslehre* Graßmann presenta per la prima volta i concetti fondamentali della teoria degli spazi vettoriali: base, dimensione, dipendenza e indipendenza lineare, generatore di un sistema. La teoria degli spazi vettoriali è parte dell'algebra lineare: uno spazio vettoriale è un modulo su un campo.[94] Non possiamo qui presentare la storia dell'algebra lineare perché il tema richiederebbe una ricerca a sé; l'algebra lineare ha infatti le proprie radici non in una sola disciplina matematica, ma in molteplici discipline che vanno dall'algebra alla geometria alla fisica: la teoria delle equazioni lineari, la teoria delle forme bilineari, la teoria delle matrici, la teoria dei quaternioni e i sistemi di numeri ipercomplessi, la geometria affine e proiettiva, la teoria dei segmenti orientati, la teoria delle equazioni differenziali lineari e degli spazi a infinite dimensioni, la teoria del calcolo vettoriale.[95]

In questo paragrafo ci limiteremo a valutare il contributo di Graßmann alla storia dell'algebra lineare e in particolare al concetto di spazio vettoriale. Benché la storia della teoria degli spazi vettoriali sia stata oggetto in anni più recenti di alcuni studi di MacLane, Gray, Moore, Dorier,[96] manca ancora una monografia esauriente sull'argomento.[97]

Il contributo di Graßmann all'algebra lineare non consiste nella presentazione assiomatica della teoria degli spazi vettoriali. L'analisi della *Ausdehnungslehre* condotta nel capitolo 5 dovrebbe aver mostrato che la presentazione dei sistemi di livello n (il corrispettivo del moderno concetto di spazio vettoriale) non è assiomatica né nella $A1$ né nella $A2$. Una presentazione assiomatica assume come punto di partenza l'esistenza di un sistema di grandezze di cui si postulano certe proprietà. L'idea di assumere un sistema dato di grandezze cozza in Graßmann con la fondamentale tendenza a prendere le mosse dalla generazione (o costruzione) delle grandezze stesse. Se è vero che la presentazione fornita nella $A2$ non si basa sulla costruzione degli enti, essa è tuttavia ben lontana dall'essere una presentazione assiomatica in senso moderno, perché presuppone molti concetti esposti nella $A1$, come hanno mostrato in maniera convincente Dorier e Zaddach.[98]

[94] La teoria degli spazi vettoriali è definibile più in generale su un corpo: in tal caso si introducono uno spazio vettoriale destro e uno spazio vettoriale sinistro.

[95] Sulla caratterizzazione multidisciplinare dell'algebra lineare si veda anche Wang (1957), pp. 262-3.

[96] Cfr. Gray (1980), MacLane (1981), Wang (1957), Moore (1995), Dorier (1995), Dorier (1996).

[97] Per un primo contributo (di carattere prevalentemente bibliografico) in questa direzione si veda Krömer (2000).

[98] Cfr. Lewis (1995) e Zaddach (1994).

Se nella Teoria generale delle forme Graßmann presenta in modo puramente astratto e formale le proprietà delle operazioni, non bisogna però dimenticare che
1. Graßmann non usa il concetto di un insieme di enti chiuso rispetto ad un'operazione (differenza molto rilevante rispetto al moderno studio di strutture);
2. per Graßmann ciò che dà propriamente senso alla teoria è l'incarnazione o interpretazione mediante costruzione (da un elemento generatore). La Teoria generale delle forme non è una teoria del tutto astratta ma presenta considerazioni sulle proprietà delle operazioni e sui possibili modi di combinarle che devono trovare un'applicazione nelle discipline matematiche specifiche.

Se Graßmann non ha esposto in maniera assiomatica la propria teoria, occorre tuttavia considerare il ruolo estremamente significativo che la sua opera ha esercitato su Giuseppe Peano, al quale è dovuta la prima formulazione assiomatica della teoria degli spazi vettoriali pubblicata nel 1888 nell'opera *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann* con l'esplicita intenzione di diffondere le idee di Graßmann.

> Sarei lieto delle mie fatiche nello scrivere questo libro (e questa sarà l'unica ricompensa ch'io ne aspetti), se esso servirà a divulgare fra i matematici alcune delle idee del Grassmann.[99]

Il metodo di Graßmann ha il pregio, secondo Peano, di contenere formule più semplici e dà luogo a un calcolo più potente.

> Di questi vari metodi l'ultimo citato comprende in gran parte gli altri, e li supera nella potenza del calcolo, e nella semplicità delle formule. Ma i concetti troppo elevati ed astrusi contenuti nell'*Ausdehnungslehre* impedirono la diffusione di questa scienza; e quindi anche le sue applicazioni alla geometria sono ancora pochissimo note ai matematici.[100]

Peano presenta nell'ultimo capitolo dell'opera, intitolato "Trasformazioni lineari", la prima esposizione assiomatica della teoria che egli chiama dei *sistemi lineari*.[101]

> Esistono dei sistemi di enti sui quali sono dati le seguenti definizioni:
>
> [P-1.] È definita l'*eguaglianza* di due enti a e b del sistema, cioè è definita una proposizione, indicata con $a = b$, la quale esprime una

[99]Cfr. Peano (1888), p. vii. Questo e i successivi passi del *Calcolo geometrico* citati nel testo sono riportati nell'appendice 7.10, p. 421.
[100]Cfr. Peano (1888), p. v.
[101]Per un'esposizione del calcolo geometrico di Peano rimandiamo al già citato Freguglia (1992) e a Freguglia (1985).

condizione fra due enti del sistema, soddisfatta da certe coppie di enti, e non da altre, e la quale soddisfa alle equazioni logiche:

$$(a = b) = (b = a), \quad (a = b) \cap (b = c) < (a = c).$$ [102]

[P-2.] È definita la *somma* di due enti a e b, vale a dire è definito un ente, indicato con $a + b$, che appartiene pure al sistema dato, e che soddisfa alle condizioni:

$$(a = b) < (a + c = b + c), \quad a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c,$$

e il valor comune dei due membri dell'ultima eguaglianza si indicherà con $a + b + c$.

[P-3.] Essendo a un ente del sistema, ed m un numero intero e positivo, colla scrittura ma intenderemo la somma di m enti eguali ad a. È facile riconoscere, essendo $a, b, \ldots$ enti del sistema, $m, n, \ldots$ numeri interi e positivi, che
$(a = b) < (ma = mb)$; $\quad m(a + b) = ma + mb$; $\quad (m + n)a = ma + na$; $\quad m(na) = (mn)a$; $\quad 1a = a$.

Noi supporremo che sia attribuito un significato alla scrittura ma, qualunque sia il numero reale m, in guisa che siano ancora soddisfatte le equazioni precedenti. L'ente ma si dirà *prodotto* del numero (reale) m per l'ente a.

[P-4.] Infine supporremo che esista un ente del sistema, che diremo *ente nullo*, e che indicheremo con 0, tale che, qualunque sia l'ente a, il prodotto del numero 0 per l'ente a dia sempre l'ente 0, ossia

$$0a = 0.$$ [103]

Se alla scrittura $a - b$ si attribuisce il significato $a + (-1)b$, si deduce: $a - a = 0, \quad a + 0 = a$.[104]

[P-5] DEF. *I sistemi di enti per cui sono date le definizioni 1, 2, 3, 4, in guisa da soddisfare alle condizioni imposte, diconsi* sistemi lineari.[105]

[102] Il simbolo $\cap$ indica la congiunzione logica mentre il simbolo $<$ indica l'implicazione logica.

[103] Si noti che Peano, pur distinguendo concettualmente tra il numero 0 e il vettore nullo, non utilizza due simboli diversi per indicare i due concetti.

[104] Si osservi che qui Peano intende con 0 il vettore nullo. Infatti

$$a + (-1)a = (1 - 1)a = 0a = 0$$

dove il primo simbolo ≪0≫ è da intendersi come il numero 0 mentre il secondo simbolo ≪0≫ è da intendersi come il vettore nullo.

[105] Cfr. l'appendice 7.10, pp. 423-424.

Un sistema lineare è definito in maniera puramente astratta come un sistema S di enti per cui valgono le seguenti quattro condizioni:
1) in S è definita una relazione riflessiva e transitiva, chiamata uguaglianza;
2) in S è definita un'operazione di somma, che è commutativa, associativa e compatibile con la relazione di uguaglianza;
3) dato un qualunque elemento a di S è definita un'operazione di prodotto di a per un numero reale m in modo che valgano la distributività del prodotto per un numero rispetto alla somma di enti di S, la distributività del prodotto per una grandezza rispetto alla somma di numeri reali, l'associatività del prodotto, l'esistenza di un elemento neutro di tale prodotto che è il numero 1, la compatibilità del prodotto rispetto all'uguaglianza;
4) l'esistenza di un ente nullo nel sistema come risultato del prodotto di zero per una qualunque grandezza a di S.

Le condizioni cui sono soggetti i sistemi lineari di Peano sono simili alle proprietà alle quali sono soggetti gli spazi vettoriali, ma vi sono alcune differenze. Si consideri ad esempio la seguente assiomatizzazione moderna di uno spazio vettoriale su un campo:

> Ha struttura di spazio vettoriale su un campo K un insieme V dotato di un'operazione di addizione $+$ rispetto alla quale V è un gruppo commutativo e di un'operazione (detta moltiplicazione per scalari) da $K \times V \to V$ che a ogni coppia costituita da un elemento k di K e da un elemento v di V associa un elemento kv di V tale che valgano le seguenti condizioni:

$$
\begin{gathered}
k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2 \\
(k_1 + k_2)v = k_1v + k_2v \\
k_1(k_2v) = (k_1 \cdot k_2)v \\
1v = v.
\end{gathered}
$$

Gli elementi di V sono detti *vettori*, gli elementi di K sono detti *scalari*. Uno spazio vettoriale si dice reale se K è il campo dei numeri reali. Uno spazio vettoriale si dice complesso se K è il campo dei numeri complessi. Un campo K può essere considerato uno spazio vettoriale su se stesso ($K \times K \to K$). Confrontando la definizione di Peano di sistema lineare con la nozione di spazio vettoriale sopra riportata, si possono osservare alcune differenze:

1. Peano non caratterizza l'insieme S degli enti come un gruppo abeliano, bensì soltanto come un semigruppo abeliano: richiede cioè soltanto l'associatività e la commutatività dell'operazione di somma e non l'esistenza dell'elemento neutro e l'esistenza di un elemento inverso per

ciascun ente del sistema. Tuttavia egli aggiunge la condizione (assente nella formulazione moderna) dell'esistenza di un vettore nullo come prodotto di qualunque ente per 0;[106]

2. Peano non dà una definizione generale di spazio vettoriale su un campo, bensì definisce i sistemi lineari per mezzo dell'insieme dei numeri reali, cioè di un campo specifico che ha l'ulteriore proprietà di essere un corpo (infatti il prodotto tra numeri reali è commutativo);

3. Peano definisce in S una relazione riflessiva e transitiva che chiama uguaglianza e conseguentemente aggiunge due condizioni di compatibilità rispetto a tale uguaglianza sia per la somma tra enti sia per il prodotto per un numero reale.

Graßmann nella $A2$ introduce il concetto di combinazione lineare all'inizio della trattazione mentre Peano lo introduce dopo aver dato una definizione assiomatica di sistema lineare. In effetti i riferimenti di Peano sono sempre all'edizione del 1844 e non a quella del 1862. Ciò è confermato dall'assenza nella formulazione di Peano del teorema secondo cui un insieme di generatori può avere meno di n elementi se n è il numero delle dimensioni dello spazio. Questo teorema è infatti derivabile dal teorema dello scambio, che è già presente in nuce nella $A1$ ma è esplicitato da Graßmann solo nella $A2$. È interessante precisare, a conferma dell'interesse di Graßmann per la teoria delle equazioni lineari, che Graßmann sa dimostrare questo risultato non solo con il teorema dello scambio ma anche con la teoria della eliminazione in un sistema di equazioni: egli preferisce però il primo procedimento perché in esso appare più chiaramente la relazione tra le grandezze estensive.[107]

Dalla definizione assiomatica di sistema lineare Peano deduce che una combinazione lineare di enti del sistema (cioè una somma di tali grandezze, moltiplicata ciascuna per un certo numero reale) è ancora un ente del sistema.

> Si deduce che se $a, b, c, \dots$ sono enti d'uno stesso sistema lineare, $m, n, p, \dots$ numeri reali ogni funzione lineare omogenea della forma $ma + nb + pc + \dots$ rappresenta un ente dello stesso sistema.[108]

Peano definisce il concetto di indipendenza di un certo numero di enti per mezzo di un principio che oggi viene usato come criterio di indipendenza

[106] Le due condizioni sono equivalenti, come si desume dalla nota 104 a p. 333.
[107] Cfr. *Ausdehnungslehre* 1862, in Graßmann (1862), p. 21 e Dorier (1995), p. 248.
[108] Cfr. l'appendice 7.10, p. 424.

lineare: infatti nelle formulazioni moderne n vettori sono usualmente definiti come vettori dipendenti se uno di essi è esprimibile come combinazione lineare dei rimanenti, quindi si dimostra un criterio di indipendenza lineare secondo cui gli n vettori sono linearmente indipendenti se la loro combinazione lineare è uguale a zero solo quando i coefficienti sono tutti nulli. La definizione moderna è uguale a quella assunta da Graßmann nella $A1$.[109] Peano procede esattamente al contrario e cioè usa il criterio come definizione: n enti sono linearmente indipendenti se e solo se la loro combinazione lineare si annulla quando tutti i coefficienti si annullano. Dunque n enti sono dipendenti se uno di essi può essere espresso come combinazione lineare dei rimanenti (fatto che costituiva per Graßmann la definizione di dipendenza lineare).

> [P-6.] DEF. *Più enti $a_1 a_2 \dots a_n$ d'un sistema lineare diconsi fra loro dipendenti, se si possono determinare n numeri $m_1 m_2 \dots m_n 4$, non tutti nulli, in guisa che risulti*
>
> $$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0.$$
>
> In questo caso un qualunque degli enti, il cui coefficiente non sia nullo, si può esprimere qual funzione lineare omogenea dei rimanenti.[110]

Il concetto di dimensione è introdotto come numero delle dimensioni di un sistema, numero che coincide con il massimo numero di enti fra loro indipendenti del sistema. Scrive infatti Peano:

> [P-7.] DEF. *Numero delle dimensioni d'un sistema lineare è il massimo numero di enti fra loro indipendenti che si possono prendere nel sistema.*[111]

È interessante osservare che il concetto di dimensione è più primitivo di quello di base, che è introdotto solo dopo aver dimostrato che, dati n enti indipendenti in un sistema il cui numero di dimensioni è n, allora ciascun ente del sistema è esprimibile in maniera univoca come combinazione lineare di quegli enti. Peano dimostra infatti il seguente teorema:

[109] Cfr. il § 5.1.1.

[110] Cfr. l'appendice 7.10, p. 424. In Peano manca l'idea, espressa oggi con l'assioma della dimensione, che n indichi non solo il massimo numero di vettori indipendenti ma anche il minimo numero di essi. La dimensione è stata definita storicamente o come potenza (cardinalità) del più piccolo insieme di generatori o come massimo numero di vettori linearmente indipendenti del sistema senza che fino a dopo Steinitz si dimostrasse che i due numeri sono lo stesso numero. Cfr. Dorier (1996). L'*Assioma della dimensione* n (nello spazio $\mathbf{V^n}$ ci sono almeno n e soltanto n vettori linearmente indipendenti; $n+1$ vettori di $\mathbf{V^n}$ saranno dunque linearmente dipendenti) fu introdotto da Weyl in modo che senza di esso tutti i restanti assiomi valessero anche per il caso di una dimensione infinita.

[111] Cfr. l'appendice 7.10, p. 424.

> [P-8.] TEOR. *Se il sistema A è ad n dimensioni, presi nel sistema n enti indipendenti $a_1 \dots a_n$, e dato un nuovo ente a, si possono sempre determinare n numeri $x_1 \dots x_n$, in guisa che risulti*
> 1) $$a = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$$
> *Inoltre essi sono determinati univocamente, ossia*
> 2) $(x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = x'_1 a_1 + \dots + x'_n a_n) = (x_1 = x'_1) \cap \dots \cap (x_n = x'_n)$.[112]

Questo teorema corrisponde nella teoria moderna al criterio dell'unicità della combinazione lineare, ma c'è una differenza, perché nella formulazione di Peano c'è la condizione che lo spazio abbia n dimensioni:[113]

> Un insieme $v_1, v_2, \dots, v_n$ è una base di V se ogni vettore $w \in V$ può essere rappresentato in modo unico come combinazione lineare di $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$.

Il procedimento assiomatico di Peano è molto diverso dal procedimento di Graßmann: Peano non prende le mosse dalla generazione del sistema di enti, ma lo assume come dato e solo in seguito introduce un modo per ottenere l'intero sistema dal massimo numero di enti linearmente indipendenti che appartengono ad esso.

Il ruolo svolto dal concetto di base in Graßmann è quello di un sistema di generatori (indipendenti) e non è finalizzato principalmente all'introduzione di un sistema di vettori di riferimento e dunque di un sistema di coordinate. La nozione di base serve soprattutto a caratterizzare ciascun sistema per mezzo di una sua peculiare regolarità generativa. Analogamente nell'algebra lineare il concetto di base permette di classificare gli spazi per mezzo di ciò che serve a generarli: infatti, poiché ogni spazio vettoriale su un campo ha una base, si dimostra che per costruire un'applicazione lineare tra gli spazi è sufficiente costruire un'applicazione lineare tra le rispettive basi.

Questa breve presentazione dell'assiomatizzazione di Peano e il confronto con l'andamento della Teoria dell'estensione di Graßmann ha mostrato l'ampiezza dei contributi di Graßmann alla storia degli spazi vettoriali: ricordiamo ad esempio che Graßmann aveva compreso che la dimensione dello spazio indica anche il minimo numero di generatori indipendenti, risultato che in Peano manca e che sarà ripreso nel Novecento nell'assioma della dimensione. Mentre l'addizione delle grandezze estese ha dato origine alla teoria degli spazi vettoriali, non meno importanti sono stati gli sviluppi del concetto di prodotto geometrico, che, grazie agli studi di Bourbaki, sono sfociati nelle

[112] Cfr. l'appendice 7.10, p. 424.

[113] Lo stesso teorema si trova anche nell'opera di Steinitz del 1910: *Algebraische Theorie der Körper*. Cfr. Steinitz (1910).

ricerche di multialgebra. Al prodotto di 'tratti' corrisponde in multialgebra il prodotto di vettori che dà come risultato dei multivettori:

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d} \wedge \ldots$$

Se dunque la Teoria dell'estensione non è servita a sviluppare il calcolo vettoriale essa ha però costituito il fondamento di nuove discipline algebriche. Proprio l'estrema generalità e applicabilità della teoria conferma da un lato le previsioni sulla sua fecondità che si è vista nell'opera di Graßmann e dall'altro spiega il particolare significato che la teoria riveste in geometria.

6.2.3 La fondazione vettoriale della geometria

La teoria dell'estensione è quella parte della matematica che studia le forme continue e differenti (le grandezze estensive) e che fonda, secondo Graßmann, la geometria. Quest'ultima è infatti un'applicazione particolare della prima nel caso tridimensionale. In verità, non è chiaro se la costruzione della teoria dell'estensione nella *Ausdehnungslehre* del 1844 sia completamente indipendente da alcune intuizioni geometriche: Graßmann fa riferimento ad esempi geometrici per rendere comprensibile la propria teoria e sembra presupporre il concetto di variazione continua. In ogni caso la teoria degli spazi vettoriali può essere formulata (come si è visto nel paragrafo precedente) in maniera del tutto indipendente dalla geometria.

Oltre alla fondazione assiomatica euclidea della geometria, generalmente presentata nella moderna riformulazione hilbertiana, è possibile — ed è questa la via oggi più diffusa — fondare assiomaticamente la geometria sul concetto di spazio affine e dunque su quello di vettore anziché sui concetti di punti, rette, piani e sulla relazione 'stare tra'. La fondazione vettoriale della geometria presenta alcuni indubbi vantaggi da un punto di vista matematico, perché è semplice e perché permette di esprimere in termini molto chiari il rapporto tra spazi affini, proiettivi e metrici. La fondazione vettoriale permette — in linea con il progetto esposto nel Programma di Erlangen[114] — di presentare il rapporto tra le diverse geometrie e i gruppi di trasformazioni: la geometria affine in particolare è caratterizzata per mezzo del gruppo di trasformazioni affini o affinità. Affinità sono tutte quelle trasformazioni di uno spazio in se stesso che conservano le proprietà affini, vale a dire il parallelismo (rette parallele si trasformano in rette parallele), il rapporto di un segmento e il rapporto delle aree di figure. Poiché uno spazio affine è definito per associazione con uno spazio vettoriale, le proprietà che in una trasformazione affine restano invarianti sono proprio le proprietà dei vettori.[115]

[114] Cfr. Klein (1872).

[115] Trasformazioni affini sono ad esempio i movimenti speculari rispetto ad un asse. Di

Nella Teoria dell'estensione Graßmann costruisce dapprima uno spazio vettoriale, poi associa ad esso uno spazio affine. La struttura affine è una struttura aggiuntiva rispetto a quella di spazio vettoriale perché la presuppone e ne dipende. Uno spazio vettoriale è infatti associato ad uno spazio affine per mezzo di un'applicazione che associa coppie di punti ad un vettore (in un modo opportuno). Proprio in relazione a questa nuova sintesi tra punto e vettori è stato rilevante il contributo di Graßmann che ha ripreso l'idea (già leibniziana) di calcolare direttamente con gli oggetti geometrici piuttosto che con le rispettive rappresentazioni algebriche.

Sia dato ad esempio un piano affine P (intuitivamente consideriamo P come un insieme di punti): è possibile costruire uno spazio vettoriale di dimensione due sul campo dei numeri reali da associare a P. Per costruire uno spazio vettoriale è necessario fissare un punto $O \in P$ e definire i vettori come coppie ordinate del tipo (O, A) con $A \in P$. Sia V lo spazio vettoriale ottenuto in questo modo. Fissiamo ora un altro punto $O' \in P$ e definiamo i vettori come coppie ordinate $(O'A)$ con $A \in P$: lo spazio vettoriale V' così ottenuto non è identico allo spazio V, pur essendo isomorfo ad esso. Per associare in modo univoco uno spazio vettoriale ad uno spazio affine occorre considerare non un qualsiasi spazio vettoriale determinato fissando un punto di P come origine, bensì lo spazio vettoriale delle traslazioni del piano affine in se stesso. Vettori di questo spazio non sono né i vettori OA né i vettori $O'A$ bensì le traslazioni dei punti di P in punti di P e dunque ad esempio la traslazione di O in O' e di A in A'. In generale, la differenza tra uno spazio affine e uno spazio vettoriale consiste nella dipendenza o indipendenza del sistema dall'origine. Uno spazio affine è determinato dalla scelta di un punto come origine dello spazio, mentre lo spazio vettoriale associato allo spazio affine è indipendente dall'origine. Ogni spazio vettoriale diviene uno spazio affine se si sceglie un'origine, mentre ogni spazio affine diviene uno spazio vettoriale e cioè quello delle traslazioni dello spazio affine in se stesso.

In forza di questo rapporto tra spazio affine e spazio vettoriale ad esso associato, calcolare con gli oggetti stessi (con i vettori), non esclude la possibilità di calcolare con gli elementi (i punti): tuttavia, mentre le affermazioni sui vettori sono invarianti per cambiamento di base, le affermazioni sui punti dipendono dalla base scelta. Il riferimento agli elementi si trova infatti nella *Ausdehnungslehre* del 1844, dove Graßmann assume una base privilegiata: l'insieme delle variazioni indipendenti che generano il sistema. Rispetto a Möbius il contributo di Graßmann sta proprio nell'aver colto questo rappor-

particolare interesse sono le omografie (il cui gruppo di trasformazioni è associato alla geometria proiettiva), le similitudini (il cui gruppo di trasformazioni conserva la perpendicolarità) e i movimenti, cioè traslazioni e rotazioni (il cui gruppo di trasformazioni conserva la congruenza).

to tra vettori e punti nello spazio, che permette di studiare in maniera più astratta le proprietà invarianti per trasformazioni affini dello spazio. In particolare, questo studio della geometria è possibile attraverso la considerazione degli oggetti geometrici stessi (i segmenti) senza l'introduzione di coordinate arbitrarie (dipendenti dall'origine scelta).

La fondazione vettoriale della geometria, proprio perché associa i punti ai vettori anziché determinarli per mezzo di una ennupla di coordinate, permette anche di separare con chiarezza lo studio della geometria affine dallo studio della geometria metrica. Se è vero che un piano affine può essere considerato come un piano euclideo nel quale si faccia astrazione dalle proprietà metriche (cioè dalle proprietà che dipendono dalla possibilità di misurare lunghezze ed angoli), tuttavia nel piano affine è possibile una qualche forma di misurazione. Infatti il concetto di prodotto per uno scalare permette di confrontare segmenti appartenenti a rette parallele. Fare geometria senza presupporre una metrica non vuol dire infatti prescindere dal riferimento al confronto tra grandezze. La definizione di spazio vettoriale di cui ci si serve nello studio degli spazi affini fa riferimento ad un campo, cioè ad un insieme con caratteristiche analoghe a quelle dei numeri reali. L'uso dei numeri reali è però confinato al confronto tra grandezze, e in particolare al confronto tra segmenti orientati appartenenti a rette parallele. Si tratta, in altre parole, di uno strumento per misurare grandezze generate da vettori confrontabili in termini di prodotto per uno scalare.[116]

Ciò che non si può fare con il concetto di prodotto per uno scalare è confrontare segmenti non paralleli: a tal fine occorre uno strumento di misurazione che funzioni contemporaneamente in tutte le direzioni. Per confrontare segmenti appartenenti a rette non parallele non è più sufficiente traslare per mezzo della riga, ma occorre uno strumento (come il compasso) che permetta di ruotare i segmenti. In ciò risiede la differenza essenziale tra geometria affine e geometria metrica.

Per introdurre le proprietà metriche in uno spazio vettoriale, si può procedere in due modi: o si definisce una funzione di distanza e quindi una misura

[116]Ci sono infatti due diversi modi in cui i numeri reali possono intervenire nella determinazione del rapporto tra vettori di un sistema ad una dimensione. Nel primo caso il numero reale indica la coordinata di un vettore espresso come combinazione lineare dell'altro. Tale numero esprime un rapporto tra le due grandezze geometriche e non il rapporto di ciascuna di essa rispetto ad un'opportuna unità di misura. Nel secondo caso il numero reale esprime la misura della distanza tra i punti iniziale e finale di ciascun vettore considerato come applicato, cioè come avente un punto iniziale ben preciso. Tale distanza è una misura del vettore rispetto all'unità di misura del sistema, la quale determina un sistema di coordinate. Nel primo caso si può parlare di rapporto tra grandezze anche senza che intervenga la definizione di una metrica, nel secondo caso invece il rapporto tra le grandezze è determinato dal rapporto delle rispettive misure o lunghezze.

delle figure geometriche, oppure si introduce una norma. La distanza usualmente è introdotta per mezzo di un sistema di coordinate e dunque dipende dalla base scelta. Se invece si introduce la metrica per mezzo del concetto di norma, la possibilità di misurare lunghezze ed angoli è indipendente dalla base. Ciò che permette di definire le lunghezze e gli angoli in uno spazio vettoriale è il prodotto interno o scalare: la lunghezza di un vettore è determinata dalla sua norma, cioè dal valore assoluto della radice quadrata del prodotto interno del vettore per se stesso; l'ampiezza di un angolo tra due vettori è definita da un particolare numero che soddisfa ad una condizione espressa in termini delle norme e del prodotto interno dei vettori dati.[117]

Nel capitolo 7 del già citato studio *Grassmanns Algebra in der Geometrie* Arno Zaddach discute diversi motivi per preferire la presentazione della teoria degli spazi vettoriali fornita da Graßmann e assiomatizzata da Peano alla definizione intuitiva di vettore come grandezza geometrica (un segmento) con direzione e lunghezza. Non si tratta infatti soltanto di una maggiore precisione nella determinazione di un concetto, anche se soltanto il primo modo di procedere è rigoroso, ma anche e soprattutto di un modo più generale di trattare lo stesso argomento che rende manifeste proprietà e caratteri dei vettori stessi che altrimenti rimarrebbero in ombra. Sulla scorta delle argomentazioni di Zaddach a favore della fondazione vettoriale della geometria così come essa è sviluppata oggi nell'algebra lineare, possiamo fare alcune osservazioni sul contributo che Graßmann ha fornito ai fondamenti della geometria (e in generale ai fondamenti della matematica).

1. Il termine 'direzione' perde completamente significato in uno spazio a più di tre dimensioni. Esso è infatti un concetto intuitivo legato all'esperienza della tridimensionalità dello spazio e come tale non può e non deve trovare posto in un sistema assiomatico. Una teoria matematica rigorosa non può parlare di direzione se questa non è definita. Concepire un vettore come una grandezza geometrica con una certa direzione è privo di significato matematico e può anche trarre in inganno. Tra i meriti più significativi di Graßmann vi è proprio il tentativo di introdurre un concetto nuovo di direzione, che nella $A1$ è espresso come variazione indipendente e nella $A2$ per mezzo del concetto di indipendenza lineare.

[117]Vi è un'ulteriore differenza tra l'introduzione della metrica in uno spazio vettoriale V su un campo K per mezzo del concetto di distanza o per mezzo del concetto di norma. Per introdurre una distanza in V non occorre fare ipotesi sul campo K; se K non è ordinato, semplicemente si avrà come conseguenza il fatto che la struttura metrica non è un caso particolare della struttura affine corrispondente. Per introdurre una norma in V occorre invece che K sia ordinato: a seconda del tipo di ordine di K si possono avere strutture affini diverse, ad esempio archimedee e non archimedee.Uno spazio vettoriale normato non è infatti necessariamente archimedeo.

2. Per poter parlare di lunghezza di un vettore occorre che sia stata definita una metrica: invece in uno spazio geometrico affine, vale a dire proprio nello spazio geometrico oggi associato ad uno spazio vettoriale, gli elementi non hanno né una lunghezza né una norma né alcun valore numerico ad essi associato. Se quindi si vuole ragionare nel modo più generale possibile, e cioè in uno spazio vettoriale affine, occorre fermarsi ad un grado di generalità precedente quello dell'introduzione di una metrica, e dunque non si può definire il concetto di vettore per mezzo della sua lunghezza o del suo valore numerico senza perdere immediatamente la generalità cercata. Proprio la ricerca della massima generalità e l'affrancamento dalla trattazione analitico-geometrica sono caratteristiche di Graßmann che abbiamo inteso mettere in rilievo in questo lavoro.

3. Essenziali nella trattazione vettoriale sono le operazioni tra vettori e le operazioni con gli scalari (i numeri del campo associato allo spazio vettoriale). In particolare ciò che caratterizza i vettori come grandezze estensive è la struttura di gruppo abeliano che essi hanno rispetto all'addizione, cioè le proprietà che caratterizzano la somma tra vettori. Questa struttura, oscurata dalla concezione intuitiva dei vettori come segmenti orientati, emerge in tutta la sua chiarezza nella definizione di spazio vettoriale.

4. Dotare una grandezza di lunghezza e di direzione non è sufficiente a determinare in modo univoco il concetto di vettore, perché non garantisce una delle proprietà essenziali dei vettori: la commutatività della somma. Zaddach considera l'esempio di una sfera e delle sue rotazioni finite intorno ad un asse: ciascuna delle figure della sfera nella rotazione può essere descritta con un valore numerico (l'angolo di rotazione) e con una direzione (l'asse di rotazione appunto) e la somma di due rotazioni può essere ancora considerata una rotazione. Tuttavia l'operazione di somma non è commutativa (al cambiare delle direzioni) e dunque non è un'addizione vettoriale.

Dopo aver criticato la concezione intuitiva del concetto di vettore, ritenendola non solo matematicamente inadeguata ma anche didatticamente inefficace, Zaddach critica un altro modo di introdurre il concetto di vettore con un'obiezione che è secondo noi molto importante per comprendere sia la novità dell'approccio di Graßmann sia le questioni filosofiche alle quali esso è associato. Spesso il concetto di vettore è introdotto come una ennupla di numeri reali; questa definizione si basa sull'introduzione di un sistema di coordinate. Poiché, scelta una base dello spazio vettoriale (assumiamo ad esempio che essa sia $\langle\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}\rangle$) ciascun vettore può essere espresso in modo univoco come combinazione lineare di tali coordinate ($\overrightarrow{v} = k_1\overrightarrow{e_1} + k_2\overrightarrow{e_2} + \ldots + k_n\overrightarrow{e_n}$), per brevità il vettore può essere definito come la ennupla delle sue coordinate rispetto alla base scelta: $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Questo procedimento — secondo la critica di Zaddach — non solo introduce confusione perché sia i punti dello spazio sia i vettori sono espressi da ennuple di numeri reali, ma sacrifica la generalità del procedimento di Graßmann e l'assiomatizzazione che Peano ne ha dato. Questo modo di procedere impedisce infatti di mettere in rilievo due fatti molto importanti: da un lato che l'insieme dei numeri reali non è l'unico insieme sul quale può essere definito uno spazio vettoriale, con la conseguenza che non è neppure possibile porsi la domanda perché nel fare geometria ci si serva dell'insieme dei numeri reali, dall'altro che fare geometria senza introdurre le coordinate e conseguentemente una metrica, permette di ottenere risultati più generali, che esulano dalla stessa geometria.

Se l'insieme dei numeri reali è presupposto nella definizione del concetto di vettore, non è possibile definire uno spazio vettoriale su insiemi diversi dai numeri reali e soprattutto non è possibile chiedersi perché la geometria analitica si fondi sui numeri reali. Che questa domanda non sia affatto oziosa è evidente dalla possibilità della costruzione di geometrie non archimedee. Tra coloro che si sono richiamati esplicitamente all'opera di Graßmann possiamo ricordare infatti Giuseppe Veronese, il quale non si è limitato a mutuare da Graßmann la classificazione delle scienze e il concetto di forma, ma ha anche derivato dall'*Ausdehnungslehre* il progetto fondamentale di fare geometria con gli oggetti stessi, senza l'introduzione di coordinate arbitrarie. Proprio in forza di questa adesione al metodo e ai principi della Teoria dell'estensione Veronese ha pensato e 'costruito' un continuo non archimedeo, opponendosi alla definizione del concetto geometrico di continuità per mezzo della continuità propria dei numeri reali: solo rifiutando questo presupposto è infatti possibile scoprire che le proprietà del continuo geometrico possono essere più generali di quelle del continuo aritmetico.[118]

Il significato matematico dell'opera di Graßmann si coglie dunque soltanto tenendo conto della estrema generalità dei suoi risultati, della fecondità algebrica del suo approccio, della possibilità di studiare i rapporti tra diverse geometrie e diverse strutture algebriche. Studiare la geometria senza l'introduzione di coordinate è importante per Graßmann perché egli ritiene che le grandezze geometriche abbiano una natura intrinsecamente diversa rispetto ai numeri e serve a descrivere in maniera indipendente grandezze prive di dimensione e grandezze che hanno dimensioni diverse. La base filosofica della nuova concezione matematica di Graßmann e della sua nuova teoria delle grandezze estese è incentrata sulla formulazione del concetto matematico di forma come oggetto di pensiero determinato dalla propria legge generativa. Sotto a tale concetto cadono sia i numeri sia le grandezze estese. Le differenze intrinseche tra ciò che chiamiamo numero e ciò che chiamiamo grandezza

[118] Cfr. Veronese (1891), Veronese (1889), Veronese (1908) e Veronese (1905).

sono il risultato di un diverso modo in cui tali forme sono generate: per mezzo della ripetizione di un'operazione di addizione in un caso, per mezzo di un prodotto nel secondo caso. Il senso dell'impresa di Graßmann si può dunque riassumere nel passaggio della matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme: e per teoria delle forme non si intende lo studio degli isomorfismi di struttura tra teorie quanto lo studio della legge generativa di ciascuna grandezza matematica e delle proprietà che ne derivano.

6.3 Conclusioni

Nell'ambito di una ricerca sul passaggio della matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme, l'analisi dell'opera di Graßmann è centrale per due ragioni: da un lato perché Graßmann critica una definizione divenuta ormai tradizionale ma avvertita da più parti come inadeguata perché non rende conto di nuove discipline come l'analisi combinatoria; dall'altro perché egli propone una nuova definizione di matematica come teoria delle forme richiamandosi all'idea tipicamente romantica della concezione dinamica della natura: le caratteristiche di ciascuna cosa coincidono con le proprietà della sua legge generativa. Secondo questa nuova definizione la matematica non è più né teoria dei numeri né teoria delle figure geometriche, come, nonostante l'insistenza sul concetto di ordine e di relazione già presente in Descartes e in Leibniz, la matematica ha continuato a essere fino all'Ottocento. Essa è piuttosto scienza di qualunque cosa possa essere ottenuto con un procedimento costruttivo (secondo una determinata legge o regolarità) da un elemento iniziale. Sotto questo punto di vista la differenza tra Graßmann e i contemporanei non potrebbe essere più radicale.

In questa prospettiva perde radicalmente rilevanza il problema della determinazione della matematica in base ai criteri classificatori tradizionali: né il criterio dei fini, né quello delle facoltà sono qui in gioco; neppure è questione di metodo assiomatico, anche se Graßmann porta l'attenzione sul fatto che la matematica prende le mosse non da assiomi ma da definizioni, non da proposizioni su come è fatto il mondo (sull'essere dato) ma da proposizioni la cui verità si fonda sull'accordo tra diversi atti di pensiero. Il principale criterio adottato da Graßmann per la sua caratterizzazione della matematica è, accanto a quello della natura delle proposizioni che la compongono, quello degli oggetti. Ma per oggetti non si intende una categoria ontologica di cose, siano esse cose concrete come nell'empirismo di Mill, o cose ideali come nel cosiddetto platonismo matematico, bensì si intendono dei modi di generazione delle cose. La caratteristica più rilevante della matematica è quella di avere per oggetti delle forme e cioè delle leggi generative, che non sono sistemi di relazioni tra oggetti o strutture con particolari modelli ma oggetti caratterizzati da una regolarità costruttiva, generativa. Proprio questo aspetto costituisce il punto di partenza ideale per un'indagine di filosofia della matematica: l'accento in Graßmann non è posto sulla discussione della natura reale o ideale degli oggetti, quanto sulle modalità con cui gli oggetti sono pensati e costruiti. Si tratta di una filosofia della matematica che indaga non che tipo di essere hanno le cose, ma come sono pensate, da quali regolarità sono determinate. Poiché l'accento è posto sulla genesi degli oggetti, la prospettiva di Graßmann, come quella di molta ricerca matematica di stampo intuizionista e costruttivista, aiuta a comprendere non solo le ragioni per introdurre nuovi concetti matematici ma anche i mezzi e gli strumenti necessari per farlo. Questo è infatti secondo noi un possibile significato del 'problema ontologico' della matematica, troppo spesso oscurato da domande mal poste.

La riflessione concettuale del matematico sulla propria disciplina si rivela in Graßmann ricca di conseguenze: mostra analogie e differenze fra i concetti, connette ambiti diversi (aritmetica e teoria dell'estensione) fondando l'uno indipendentemente dall'altro e mostrando i rispettivi punti di contatto, analizza la legge con cui gli oggetti sono generati individuando ciò che si è assunto come elemento iniziale. Se queste funzioni sono oggi svolte, grazie al metodo assiomatico, dalla metamatematica, ciò non deve far dimenticare che sono stati usati in passato (e possono essere usati) altri strumenti a questo scopo: l'approccio 'filosofico' di Graßmann (benché di non facile lettura e comprensione) ha svolto un'analoga funzione spiegando le ragioni della nascita di una nuova teoria e i suoi fondamenti. Lungi dall'essere un ostacolo allo sviluppo della teoria, l'elemento filosofico svolge un'essenziale funzione di *concettualizzazione* del sapere matematico: esso non serve solo a definire che cosa è matematica o a spiegare di che natura sono gli oggetti matematici ma è insieme soluzione di problemi matematici e filosofici.

Parte III

Appendice

Capitolo 7

Antologia di testi

7.1 Ch. Wolff Voci del *Dizionario di matematica*

Le voci qui presentate in traduzione parziale sono tratte da Ch. Wolff, *Mathematisches Lexicon*, Gleditsch, Leipzig, 1716, rist. anast. in *Gesammelte Werke*, Hildesheim, Olms, 1977.

Mathematica seu Mathesis [**die Mathematik**][1]
La *Matematica* è una scienza che misura tutto ciò che è suscettibile di misura. Nel complesso la si caratterizza *per scientiam quantitatum*, come Scienza delle grandezze, cioè di tutte le cose suscettibili di essere ingrandite o rimpicciolite. Poiché tutte le cose finite sono suscettibili di misura in tutto ciò che esse hanno in sé di finito, cioè ciò che esse sono, così non c'è nulla al mondo cui la matematica non possa essere applicata. Poiché non si può avere conoscenza più precisa di quando si possono misurare le proprietà delle cose, la matematica ci conduce alla conoscenza più completa di tutte le cose possibili nel mondo. Poiché inoltre questa conoscenza ci rende capaci di impiegare le forze della natura a nostro piacere per il nostro vantaggio in qualunque grado vogliamo, così otteniamo con la matematica il dominio sulla natura. Da questa definizione di matematica si vede subito che essa consiste propriamente solo di geometria, aritmetica e algebra, ovvero delle scienze su cui si fonda ogni misurazione. E le restanti parti della matematica non sono altro che parti prese in prestito da altre discipline che con la matematica si rielaborano e si portano a compimento. Così dalla fisica abbiamo ottenuto la meccanica, la statica, l'idrostatica, l'idraulica, l'ottica, la catottrica, la diottrica, la prospettiva, l'aacustica, l'aerometria, l'astronomia, la geografia,

[1]Cfr. Wolff (1716), pp. 864-66.

l'idrografia; dalla metafisica o piuttosto dall'ontologia abbiamo ottenuto la cronologia e la gnomonica; dalla politica l'arte delle fortificazioni e l'arte delle costruzioni civili. [...]

Mathesis impura sive mixta [die angebrachte Mathematik][2]
Matematica applicata si chiama la scienza che prende in considerazione e misura in particolare le grandezze delle cose che occorrono in natura. Nella geometria, in quanto parte della Matematica in senso proprio, si tratta della linea retta in generale. Se invece ci si rappresenta la linea retta come larghezza di un fiume, altezza di un corpo, distanza della luna dalla terra e così via, allora la geometria viene applicata alla vita umana e alla natura e questa trattazione appartiene rispettivamente alla geodesia, all'altimetria, all'astronomia ecc. Tutto ciò che occorre in matematica oltre ad aritmetica, geometria e algebra appartiene alla matematica applicata.

Mathesis pura sive simplex [die eigentliche Mathematik][3]
Matematica in senso proprio si chiama la scienza che considera le grandezze solo come grandezze, ad esempio una linea retta come una linea retta, il numero 6 come 6. Perciò appartengono alla matematica in senso proprio l'aritmetica e la geometria, oltre alla trigonometria e all'algebra.

Mathesis Universalis [die Universal-Mathematik oder allgemeine Mathematik][4]
Matematica universale o Matematica generale è chiamata da Erasmo Bartholino Arte del calcolo letterale. Il famoso matematico inglese Johannes Wallis ha riunito insieme sotto questo nome il calcolo con le cifre e con le lettere nella sua opera matematica pubblicata nel 1657 (a Oxford). Altri intendono per matematica universale una disciplina in cui non solo viene presentato il calcolo con le lettere ma con l'aiuto di esso sono anche dimostrate proprietà generali delle grandezze. Piuttosto si dovrebbe intendere per matematica universale ciò che intende Leibniz (*Acta Eruditorum*, 1691, p. 446), cioè quelle scienze in cui si danno regole generali per misurare tutte le cose: questa Mathesis universalis non è stata finora ancora trovata.

[2] Cfr. Wolff (1716), pp. 866-7.
[3] Cfr. Wolff (1716), p. 868.
[4] Cfr. Wolff (1716), p. 869.

Moles, Volumen [die Größe][5]
La *grandezza* è lo spazio che il corpo occupa secondo la sua lunghezza, larghezza e profondità.

Numerus [eine Zahl][6]
Numero è in generale chiamato seguendo Euclide un insieme di unità, cioè si dice che si ha un numero quando sono prese insieme molte cose di uno stesso tipo, ad esempio palline di pietra. Ma Euclide ha definito solo i numeri razionali [...] Nei miei *Elementa Arithmeticae* [...] descrivo (§10) un numero come ciò che si rapporta all'unità come una linea retta ad un'altra linea retta. Così questa definizione conviene sia ai numeri razionali sia ai numeri irrazionali. [...] Perciò non stupisce che si possano moltiplicare e dividere anche linee con linee in modo che nel primo caso il prodotto e nel secondo il quoziente siano una linea, come ha mostrato Descartes nei libri 1 e 2 della Geometria [...] L'utilità di tale definizione si rivela quando si applica l'algebra alla geometria. Dalla mia definizione generale di numero segue che anche l'unità è un numero, perché essa si rapporta all'unità, cioè a se stessa, come una linea retta ad un'altra che è uguale ad essa.

Quantitas [eine Größe][7]
Grandezza si chiama in matematica tutto ciò che è suscettibile di aumento o diminuzione (vermehren und vermindern). Le quantità non sono infatti altro che numeri indeterminati, poiché non si è ancora posta una certa unità alla quale esse si riferiscano. In algebra le quantità sono rappresentate da lettere e si procede del resto con esse come con gli altri numeri. E proprio perché sono numeri indeterminati, di esse si può dire tutto ciò che è stato dimostrato per i numeri.

[5] Cfr. Wolff (1716), pp. 906-7.
[6] Cfr. Wolff (1716), pp. 944-5.
[7] Cfr. Wolff (1716), p. 1143.

7.2 J.-B. D'Alembert Voci matematiche dell'*Enciclopedia*

Le voci seguenti, scelte per la loro rilevanza ai fini dell'analisi dei concetti di matematica e di grandezza, sono in parte semplici traduzioni dalla *Cyclopaedia* di Chambers (contrassegnate con C), in parte opera di D'Alembert (contrassegnate con A): abbiamo tradotte solo alcune parti, secondo noi le più interessanti per la concettualizzazione della matematica. Il testo è tratto da Diderot, D., d'Alembert, J-B., *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*, Paris, 1751

Aritmetica [Arithmétique][8]

[***C***] è l'arte del numerare, o quella parte della matematica che considera le proprietà dei numeri. Con essa si impara a calcolare esattamente, facilmente, rapidamente. Alcuni autori definiscono la matematica la scienza della quantità discreta. Le quattro grandi regole o operazioni, chiamate addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, compongono propriamente tutta l'aritmetica. [...] L'aritmetica, tale quale essa è oggi, si divide in specie differenti: teorica, pratica, strumentale, logaritmica, numerale, speciosa, decimale, tetradica, duodecimale, sessagesimale, ecc. L'*Aritmetica teorica* è la scienza delle proprietà e dei numeri astratti, con le ragioni e le dimostrazioni delle diverse regole. Un'aritmetica teorica si trova nei libri settimo, ottavo e nono degli *Elementi* di Euclide. [...] L'*Aritmetica pratica* è l'arte di numerare o di calcolare, cioè l'arte di trovare dei numeri per mezzo di certi numeri dati, di cui sia nota la relazione ai primi: come se si chiedesse, ad esempio, di determinare il numero uguale a due numeri dati, 6 e 8. Il primo libro di aritmetica pratica ci è stato dato da Tartaglia nel 1556. [...] L'*Aritmetica strumentale* è quella in cui le regole comuni sono eseguite per mezzo di strumenti immaginati per calcolare con facilità e rapidità: ad esempio i bastoni di Neper, lo strumento di Moreland, quello di Leibniz, la macchina aritmetica di Pascal, ecc. [...] L'*Aritmetica logaritmica* è quella che si esegue per mezzo delle tavole logaritmiche. [...] L'*Aritmetica numerale* è quella che insegna il calcolo dei numeri o delle quantità astratte designate per mezzo di cifre: le operazioni si fanno con cifre ordinarie o arabe. L'*Aritmetica speciosa* è quella che insegna il calcolo delle quantità designate per mezzo di lettere dell'alfabeto. Questa Aritmetica è quella che si chiama ordinariamente *Algebra o Aritmetica letterale.* [...] L'*Aritmetica volgare* riguarda gli interi e le frazioni. [...] L'*Aritmetica degli infiniti* è il metodo di trovare la somma

[8] Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), vol. 1, pp. 673-5.

di una successione di numeri i cui termini sono infiniti o di determinarne i rapporti. [...]

[***A***] Noi osserveremo innanzitutto che ogni numero, secondo la definizione di Newton, non è altro che un rapporto. Per comprendere questo, occorre osservare che ogni grandezza che si confronta ad un'altra è o più piccola o più grande o uguale; e che così ogni grandezza ha un certo rapporto con un'altra grandezza con la quale la si confronta, che cioè essa è contenuta nell'altra in un certo modo. Questo rapporto o questo modo di contenere o di essere contenuto è ciò che si chiama numero. Così il numero 3 esprime il rapporto di una grandezza ad un'altra più piccola che si prende come unità e che la più grande contiene tre volte. Al contrario la frazione 1/3 esprime il rapporto di una certa grandezza, che è contenuta tre volte in quella più grande, ad un'altra più grande che si prende per unità. [...] Poiché i numeri sono dei rapporti percepiti dallo spirito e distinti per mezzo di segni particolari, l'*Aritmetica*, che è la scienza dei numeri, è dunque l'arte di combinare tra loro questi rapporti, servendosi per fare tale combinazione dei segni stessi che li distinguono. Di là le quattro regole dell'Aritmetica; poiché le diverse combinazioni che si possono fare dei rapporti si riducono o a esaminare l'eccesso dell'una sulle altre, o la maniera in cui le contengono: l'addizione e la sottrazione hanno il primo oggetto, poiché non si tratta che di aggiungere o di sottrarre dei rapporti; il secondo oggetto è quello della moltiplicazione e della divisione, poiché in esse si determina in quale modo un rapporto ne contiene un altro. Ci sono, come è noto, due tipi di rapporti, l'aritmetico e il geometrico. I numeri non sono propriamente che dei rapporti geometrici: ma sembra che nelle due prime regole dell'Aritmetica si considerino aritmeticamente tali rapporti, mentre nelle due altre regole li si considera geometricamente. Nell'addizione di due numeri (poiché addizione si riduce propriamente a quella di due numeri) uno dei due numeri rappresenta l'eccesso della somma sull'altro numero. Nella moltiplicazione uno dei due numeri è il rappporto geometrico del prodotto all'altro numero.

Aritmetica universale [Arithmétique universelle] [*A*][9] è così che Newton chiama l'algebra o il calcolo delle grandezze in generale e non è senza ragione che questa denominazione sia stata data a tale calcolo da quel grand'uomo, il cui genio ugualmente luminoso e profondo pare essere risalito in tutte le scienze ai loro veri principi metafisici. In effetti, nell'*Aritmetica* ordinaria si possono osservare due tipi di principi: i primi sono delle regole generali, indipendenti dai segni particolari con cui si esprimono i numeri; le altre sono

[9]Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), vol. 1, pp. 675-8.

delle regole dipendenti da quegli stessi segni e sono quelle che si chiamano più particolarmente *regole dell'Aritmetica*. Ma i primi principi non sono altra cosa che delle proprietà generali dei rapporti, che hanno luogo qualunque sia il modo in cui tali rapporti sono designati; tali sono, per esempio, le seguenti regole: se si toglie un numero da un altro, quest'altro numero aggiunto al resto, deve dare il primo numero; se si divide una grandezza per un'altra, il quoziente moltiplicato per il divisore deve dare il dividendo; se si moltiplica la somma di più numeri per la somma di più altri numeri, il prodotto è uguale alla somme dei prodotti di ciascuna parte per tutti gli altri, ecc.

Di là deriva innanzitutto che designando i numeri per mezzo di espressioni generali, cioè espressioni che non designano un numero più di quanto non ne designino un altro, si potranno formare certe regole relative alle operazioni che si possono fare sui numeri così designati. Queste regole si riducono a rappresentare nel modo più semplice possibile il risultato di una o più operazioni che si possono fare sui numeri espressi in maniera generale; e il risultato così espresso non sarà propriamente che un'operazione aritmetica indicata, operazione che varierà a seconda dei differenti valori che si daranno alle quantità, che nel risultato di cui si tratta rappresentano dei numeri.

[...]

Si vede dunque che ci sono nell'Aritmetica universale due parti da distinguere. La prima è quella che insegna a fare le combinazioni e il calcolo delle quantità rappresentate da segni più universali dei numeri, in modo che le quantità incognite, cioè quelle di cui si ignora il valore numerico, possano essere combinate con la stessa facilità delle quantità note, cioè le quantità alle quali si può assegnare un valore numerico. Queste operazioni non suppongono altro che le poprietà generali della quantità, cioè considerano la quantità semplicemente come quantità e non come rappresentata e fissata da tale o tal'altra espressione particolare. La seconda parte dell'*Aritmetica universale* consiste nel saper fare uso del metodo generale di calcolo delle quantità per scoprire le quantità che si cercano per mezzo delle quantità che si conoscono. A tal fine occorre rappresentare nel modo più semplice e più comodo la legge del rapporto che ci deve essere tra le quantità note e le incognite. Questa legge del rapporto è ciò che si chiama equazione; e così il primo passo da compiere quando si ha un problema da risolvere è di ridurre innanzitutto il problema all'equazione più semplice. Infine bisogna estrarre da tale equazione il valore o i differenti valori che deve avere l'incognita che si cerca; il che si chiama *risolvere l'equazione*. [...] La prima parte dell'Aritmetica universale si chiama propriamente *Algebra* o scienza del calcolo delle grandezze in generale; la seconda si chiama propriamente *Analisi*, ma questi due nomi si impiegano spesso l'uno al posto dell'altro.

[...]

Noi non abbiamo parlato finora che dell'uso dell'Algebra per la risoluzione delle questioni numeriche, ma ciò che abbiano detto dell'Analisi degli antichi ci conduce naturalmente a parlare dell'uso dell'Algebra in Geometria: questo uso consiste principalmente nel risolvere i problemi geometrici per mezzo dell'Algebra come si risolvono i problemi numerici, cioè a dare dei nomi algebrici alle linee note e incognite e, dopo aver enunciato la questione algebricamente, a calcolare nello stesso modo in cui si risolverebbe un problema numerico. Ciò che in Algebra si chiama *equazione di una curva* non è altro che un problema geometrico indeterminato, in cui tutti i punti della curva danno la soluzione, e così via. Nell'applicazione dell'Algebra alla Geometria le linee note o date sono rappresentate per mezzo di lettere dell'alfabeto, come i numeri noti o dati nelle questioni numeriche, ma si deve osservare che le lettere che rappresentano linee nella soluzione di un problema geometrico non potrebbero essere sempre espresse da numeri. [...] E così i calcoli algebrici applicati alla Geometria hanno un vantaggio nel fatto che i caratteri che esprimono le linee date possono indicare quantità commensurabili o incommensurabili, mentre nei problemi numerici i caratteri che rappresentano i numeri dati non possono rappresentare altro che numeri commensurabili. È vero che il numero che si cerca può essere rappresentato da un'espressione algebrica che designa un incommensurabile, ma allora si ha un'indicazione che tale numero incognito e cercato non esiste affatto, che la questione non può essere risolta che approssimativamente e non esattamente; al contrario nell'applicazione dell'Algebra alla Geometria si può sempre assegnare con una costruzione geometrica la grandezza esatta della linea incognita, anche se l'espressione che designa tale linea è incommensurabile. Spesso si può perfino assegnare il valore di tale linea, anche se non se ne può dare l'espressione algebrica, sia commensurabile sia incommensurabile: è ciò che avviene nel caso irreducibile del terzo grado.

Geometria [Géométrie] [*A*][10] è la scienza delle proprietà dell'estensione, in quanto la si considera come semplicemente estesa e figurata. [...]

(Riassunto) La Geometria si divide in Geometria elementare (lo studio delle proprietà delle rette e delle linee circolari, delle figure e dei solidi più semplici, cioè delle figure rettilinee e circolari e dei solidi limitati da tali figure) e in Geometria trascendente (lo studio delle curve, che presuppone il calcolo algebrico). Osservazioni sull'uso dell'analisi e della sintesi in Geometria:

1. Il calcolo algebrico non deve essere affatto applicato alle proposizioni della Geometria elementare, perché non si deve impiegare questo calcolo se non per facilitare le dimostrazioni e non pare che ci sia nella geometria elementare alcuna dimostrazione che possa essere davvero semplificata da tale

[10] Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), vol. 7, pp. 628-39.

calcolo. [...] 2. Noi crediamo che sia ridicolo dimostrare per via sintetica ciò che può essere trattato in maniera più semplice e più facile per mezzo dell'analisi, come le proprietà delle curve, le loro tangenti, i loro punti di flesso, i loro asintoti, i loro rami, la loro rettificazione e la loro quadratura. [...] 3. Tra Algebra e Analisi vi è in Matematica la seguente differenza: l'Algebra è la scienza del calcolo delle grandezze in generale, mentre l'Analisi è il mezzo per impiegare l'Algebra nella soluzione dei problemi. [...] 4. L'Algebra può essere chiamata Geometria simbolica a causa dei simboli di cui si serve nella soluzione dei problemi: tuttavia il nome di Geometria metafisica che è stato dato all'Algebra pare anch'esso conveniente, perché ciò che è proprio della Metafisica è generalizzare le idee e l'Algebra non solo esprime gli oggetti della Geometria per mezzi di caratteri generali, ma può anche facilitare l'applicazione della Geometria ad altri oggetti. [...] La Geometria, soprattutto quando è aiutata dall'Algebra, è dunque applicabile a tute le altri parti della Matematica, poiché in Matematica non è mai questione di alcun altra cosa se non del confrontare le grandezze tra loro; e non senza ragione alcuni geometri filosofi hanno definito la *Geometria* la scienza *della grandezza in generale*, poiché la grandezza in generale è o può essere rappresentata per mezzo di linee, superfici e solidi.

Grandezza [Grandeur] (Filosofia e Matematica) [*A*][11] Ecco una di quelle parole di cui tutto il mondo crede di avere un'idea precisa e che tuttavia è molto difficile definire bene. Non sarà perché l'idea che questa parola contiene è più semplice delle idee con le quali si tenta di spiegarla? Comunque sia, i matematici definiscono ordinariamente la *grandezza* come ciò che è suscettibile di aumento [augmentation] o di diminuzione [diminution]; secondo questa definizione l'*infinito* non sarebbe una *grandezza* più di quanto lo sia lo zero, poiché l'infinito non è suscettibile di aumento e lo zero non è suscettibile di diminuzione. Così parecchi matematici considerano lo zero da un parte e l'infinito dall'altra non come *grandezze* ma come il limite delle *grandezze*; l'uno per la diminuzione, l'altro per l'aumento. Si è senz'altro liberi di esprimersi così e non è il caso di discutere sulle parole, ma è contrario all'uso ordinario dire che *l'infinito non è affatto una grandezza* poiché si parla di *una grandezza infinita*. Sembra dunque che si debba cercare una nozione di *grandezza* più simile alle nozioni comuni. Inoltre secondo la definizione presentata sopra si dovrebbe chiamare *grandezza* tutto ciò che è suscettibile di aumento e di diminuzione; tuttavia ci si esprimerebbe in modo molto inappropriato se si considerasse la luce come una *grandezza*. Altri modificano lievemente la definizione precedente sostituendo *o* al posto di *e* e definiscono la *grandezza*

[11] Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), vol. 7, p. 855.

come ciò che è suscettibile di aumento *o* di diminuzione. Secondo questa definizione, in cui la *o* è disgiuntiva, zero sarebbe una *grandezza*, poiché se non è suscettibile di diminuzione, è però suscettibile di aumento; questa definizione è tuttavia ancora meno buona della precedente. Si può, mi sembra, definire piuttosto bene la *grandezza* come ciò che è composto di parti. Ci sono due tipi di *grandezze*, la *grandezza* concreta e la *grandezza* astratta. La *grandezza* astratta è quella la cui nozione non designa alcun soggetto particolare. Essa non è altro che i numeri, che si chiamano anche *grandezze numeriche*. Così il numero 3 è una quantità astratta, perché non designa 3 gazze più che 3 ore, ecc. La *grandezza* concreta è quella la cui nozione contiene un soggetto particolare e può essere composta o di parti coesistenti o di parti successive: sotto questa idea essa contiene due specie, l'*estensione* e il *tempo*. Non ci sono propriamente che due specie di *grandezze*; tutte le altre si rapportano a queste direttamente o indirettamente. L'estensione è una *grandezza* le cui parti esistono nello stesso tempo; il tempo è una *grandezza* le cui parti esistono una dopo l'altra. La *grandezza* si chiama anche *quantità* e sotto questa idea si può dire che la *grandezza* astratta corrisponde alla quantità *discreta* e la *grandezza* concreta alla quantità *continua*.

Matematica o Matematiche [*A*][12] è la scienza che ha per oggetto le proprietà della grandezza per quanto essa è calcolabile o misurabile. Matematiche al plurale è oggi molto più usato di matematica al singolare. Non si dice quasi mai la matematica ma le matematiche. [...] La matematica si divide in due classi: la prima, che si chiama matematica pura, considera le proprietà delle grandezze in modo astratto: sotto questo punto di vista la grandezza è calcolabile o misurabile: nel primo caso essa è rappresentata per mezzo di numeri; nel secondo per mezzo dell'estensione; nel primo caso la matematica pura si chiama aritmetica, nel secondo caso si chiama geometria. La seconda classe si chiama matematica mista e ha per oggetto le proprietà della grandezza concreta, in quanto essa è misurabile e calcolabile: chiamiamo questa classe matematica *della grandezza concreta*, cioè della grandezza considerata in certi corpi o soggetti particolari. Alla matematica mista appartengono la meccanica, l'ottica, l'astronomia, la geoegrafia, la cronologia, l'architettutra militare, l'idrostatica, l'idraulica, l'idrografia o navigazione, ecc.

Misura [*C*][13] in Geometria marca una certa quantità che si prende come unità e di cui si esprimono i rapporti con altre quantità omogenee. Questa

[12]Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), vol. 10, pp. 188-189.
[13]Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), vol. 10, pp. 408-9.

definizione è più generale di quella di Euclide, che definisce la misura come una quantità che, essendo ripetuta un certo numero di volte, diviene uguale ad un'altra, corrispondendo dunque soltanto all'idea di parte aliquota. [...]

Misurare (Geom.) [C][14] Secondo la definizione matematica della parola significa prendere una certa quantità e esprimere i rapporti che tutte le altre quantità dello stesso genere hanno con essa. Ma considerando la parola nel senso popolare significa servirsi di una certa misura comune, determinando con essa l'estensione precisa, la quantità o capacità di qualcosa. [...]

Quantità (Filosofia) [A][15] si dice di tutto ciò che è suscettibile di misura o che, confrontato con cose della stessa specie, può essere detto più grande o più piccolo, o uguale o disuguale. Le matematiche sono la scienza della quantità. La quantità è un attributo generale che si applica a cose diverse in sensi diversi, cosa che rende molto difficile darne una definizione esatta. La quantità si applica ugualmente sia alle cose sia ai modi, al singolare se si applica a uno solo o al plurale se si applica a parecchi. Nel primo caso si chiama grandezza, nel secondo si chiama moltitudine. Parecchi filosofi definiscono in generale la quantità come la differenza interna delle cose simili o ciò in cui le cose simili possono differire senza che la loro somiglianza ne risenta. Gli antichi facevano della quantità un genere sotto il quale racchiudevano due specie, il numero e la grandezza. Essi chiamavano il numero quantità discreta, perché le sue parti sono attualmente discrete o separate e tali che prendendo una di tali parti come unità, la quantità è attualmente determinata. La grandezza al contrario portava il nome di quantità continua perché le sue parti non sono attualmente separate e perché si può dividere in diverse maniere il tutto che tali parti compongono. I matematici moderni, adottando questi concetti, hanno inoltre osservato che il numero e le grandezze avevano una proprietà comune, e cioè di essere soggette di aumento o diminuzione; e così essi hanno definito in generale la quantità come ciò che può essere aumentato o diminuito. La quantità esiste in ogni essere finito e si esprime con un numero indeterminato, ma essa non può essere conosciuta e compresa che per via di confronto, rapportandola ad un'altra quantità omogenea. Noi ci rappresentiamo con un concetto astratto la quantità come una sostanza e gli accrescimenti o le diminuzioni come modificazioni ma non c'è niente di reale in tale nozione. La quantità non è affatto un soggetto suscettibile di diverse determinazioni, le une costanti, le altre variabili, cosa che caratterizza invece

[14]Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), vol. 10, pp. 426-7.
[15]Cfr. Diderot e d'Alembert (1751), vol. 13, pp. 653-5.

le sostanze. La quantità ha bisogno di un soggetto in cui risiedere, al di fuori del quale essa non è che una pura astrazione. [. . .]

(Riassunto) - La quantità può essere ridotta a quattro classi: quantità morale, intellettuale, fisica della materia stessa (estensione), fisica delle facoltà e proprietà dei corpi naturali (pesantezza, movimento, luce, calore, freddo, rarità, densità). La quantità può essere discreta (il numero) o continua (il tempo e lo spazio).

7.3 L. Euler *Le scienze matematiche in generale*

Il testo che riportiamo in traduzione corrisponde al primo capitolo (*Von den mathematischen Wissenschaften überhaupt*) della Sezione I (*Von den verschiedenen Rechnungs-Arten mit einfachen Grössen*) di L. Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra mit den Zusätzen von J.L.Lagrange*, St. Peterburg: Kayserlichen Akademie der Wissenschaften, 1771, in *Leonhardi Euleri Opera omnia*, Teubner, Leipzig-Berlin, I. Opera mathematica, vol. 1, 1911, pp. 9-11.[16]

1.

Innanzitutto si chiama grandezza tutto ciò che è suscettibile di un aumento o di una diminuzione, o al quale si possa aggiungere o togliere ancora qualcosa.

Perciò una somma di denaro è una grandezza, perché ad essa si può aggiungere o togliere.

Parimenti è una grandezza anche un peso e simili.

2.

Ci sono dunque molti tipi diversi di grandezze, che non si possono [qui] enumerare tutti, da cui derivano le diverse parti della matematica, ciascuna delle quali si occupa di un tipo particolare di grandezze, mentre la matematica in generale non è nient'altro che una scienza delle grandezze, ed una scienza la cui ricchezza sta nello strumento, cioè in come si devono misurare le grandezze.

3.

Una grandezza non può essere determinata o misurata altrimenti che assumendo come nota una grandezza che sia esattamente dello stesso tipo e mostrando il rapporto in cui ciascuna grandezza di quel tipo sta con la grandezza assunta come nota.

Così quando deve essere determinata la grandezza di una somma di denaro, si assume come nota una certa moneta [lett.: quantità di denaro] — ad esempio un fiorino, un rublo, un tallero o un ducato e simili — e si mostra quante di tali monete sono contenute nella detta somma di denaro.

[16]Cfr. Euler (1771).

Analogamente quando deve essere determinata la grandezza di un peso si assume come noto un certo peso — ad esempio un *Pfund*, un *Centner* o un *Loth*[17] — e si mostra quante volte esso è contenuto nel peso dato.

Se invece si deve misurare una lunghezza o una larghezza, ci si cura di usare allo scopo una certa lunghezza nota, detta un piede.

4.

Nelle determinazioni o nelle misurazioni delle grandezze di tutti i tipi avviene così in primo luogo che si fissi una certa grandezza nota dello stesso tipo (chiamata misura o unità), che dipende dunque unicamente dal nostro arbitrio, e in secondo luogo che si determini in quale rapporto la grandezza data stia con questa misura, rapporto che è indicato ogni volta da numeri, così che un numero non è altro che il rapporto in cui sta una grandezza rispetto ad un'altra che sia assunta come unità.

5.

Da quanto si è detto è chiaro che tutte le grandezze possono essere espresse da numeri e dunque che il fondamento di tutte le scienze matematiche deve essere individuato nel considerare in maniera precisa e nel trattare in modo esauriente la teoria dei numeri e tutti i tipi di calcolo che possono ricorrere in essa.

Questa parte fondamentale della matematica è chiamata Analitica o Algebra.

6.

Nell'Analitica si prendono in considerazione soltanto i numeri con cui si indicano le grandezze, senza occuparsi del tipo particolare di grandezze, come accade invece nelle restanti parti della matematica.

7.

Dei numeri tratta in particolare l'Aritmetica o Arte del calcolo, ma essa si estende soltanto a certi tipi di calcolo che ricorrono più frequentemente nella vita comune; l'Analitica invece comprende in sé in una maniera più generale tutto ciò che possa mai ricorrere nei numeri e nel loro calcolo.

[17] Pfund (libbra), Centner [o Zentner] e Loth [o Lot] sono antiche misure di peso: 1 libbra corrisponde a 1 chilogrammo, 1 Zentner corrisponde a 100 libbre (= 1 quintale), 1 Lot corrisponde a circa 1/30 di libbra (= 33 gr. ca.). [N.d.T.]

7.4 F. Gauss
La metafisica della matematica

Il testo qui tradotto è stato composto da Gauss probabilmente intorno al 1800 e pubblicato con il nome di *Zur Metaphysik der Mathematik* in C.F. Gauss, *Werke*, hrsg. von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Berlin, vol.7, rist. anast. Hildesheim, Olms, 1981, §13, pp. 57-61.[18]

1. Oggetto della matematica sono tutte le grandezze estensive (quelle di cui si possono pensare delle parti) e le grandezze intensive (tutte quelle non estensive) solo in quanto dipendono da grandezze estensive. Al primo tipo di grandezze appartengono: lo spazio o le grandezze geometriche, che comprendono linee, superfici, corpi e angoli, il tempo, il numero; al secondo tipo di grandezze appartengono: velocità, densità, durezza, altezza e profondità dei toni, intensità dei toni e della luce, probabilità ecc.

2. Una grandezza per sé non può ancora essere oggetto di una indagine scientifica: la matematica considera le grandezze solo nel rapporto [Beziehung] reciproco. Il rapporto reciproco che sussiste tra grandezze solo in quanto sono grandezze si chiama rapporto aritmetico; nelle grandezze geometriche ha luogo anche una relazione riguardo alla posizione [Lage], che chiamiamo rapporto geometrico. È chiaro che le grandezze geometriche possono avere reciprocamente anche rapporti aritmetici.

3. La matematica insegna propriamente verità generali, che riguardano le relazioni tra grandezze e il cui fine è quello di rappresentare [darstellen] grandezze che sono in rapporto con grandezze note o con cui grandezze note sono in rapporto; in altre parole il fine è quello di rendere possibile la rappresentazione [Vorstellung] di tali grandezze. Noi possiamo però avere una rappresentazione di una grandezza in un modo duplice: o per intuizione immediata (una rappresentazione immediata) o tramite il confronto con altre grandezze che ci sono date per intuizione immediata (rappresentazione mediata). Il compito del matematico è perciò o quello di rappresentare effettivamente la grandezza cercata (rappresentazione [Darstellung] geometrica o costruzione) o quello di indicare in che modo si possa giungere dalla rappresentazione di una grandezza data immediatamente alla rappresentazione della grandezza cercata (rappresentazione [Darstellung] aritmetica). Quest'ultima si ottiene

[18] Cfr. Gauss (1800).

cioè per mezzo dei numeri [Zahlen], che mostrano quante volte ci si deve rappresentare ripetuta la grandezza data immediatamente[19] per ottenere una rappresentazione [Vorstellung] della grandezza cercata. Quella grandezza si chiama in questo caso unità [Einheit] e il procedimento stesso si chiama misurare [messen].

4. Questi diversi rapporti delle grandezze e i diversi modi di rappresentazione delle grandezze sono i fondamenti delle due discipline fondamentali della matematica. L'aritmetica considera le grandezze nei loro rapporti aritmetici e le rappresenta aritmeticamente; la geometria considera le grandezze nei loro rapporti geometrici e le rappresenta geometricamente. Il rappresentare geometricamente le grandezze che hanno rapporti aritmetici, cosa così consueta presso gli antichi, non lo è più oggigiorno, altrimenti si dovrebbe ritenerlo una parte della geometria. Al contrario si applica sempre più spesso il modo di rappresentazione aritmetica a grandezze che hanno rapporti geometrici, per esempio nella trigonometria o nella teoria delle linee curve, che sono considerate discipline geometriche. Che i matematici recenti [die Neuern] preferiscano così tanto il modo di rappresentazione aritmetico a quello geometrico non accade senza ragione, soprattutto perché il nostro metodo di contare (nel sistema decimale [Dekadik]) è infinitamente più semplice di quello degli antichi.

5. Poiché tra i rapporti aritmetici tra grandezze può aver luogo una grande differenza, così anche le parti della scienza aritmetica sono di natura molto diversa. Di massima importanza è la circostanza se in questo rapporto deve essere presupposto il concetto di infinito oppure no, il primo caso appartiene al calcolo [Rechnung] dell'infinito o alla matematica superiore, il secondo caso alla matematica generale o inferiore. Tralascio le ulteriori sottodivisioni che si possono derivare dai concetti precedenti.

6. Nell'aritmetica poi si determinano tutte le grandezze indicando quante volte una grandezza nota (l'unità) o una sua parte aliquota deve essere ripetuta o composta per ottenere una grandezza ad essa uguale, cioè si esprime tale grandezza per mezzo di un numero, e così l'oggetto proprio dell'aritmetica è il numero. Ma poiché è possibile in questo caso astrarre dal significato dell'unità, ci deve essere un mezzo per ridurre ad un'unica unità le grandezze che sono determinate per mezzo di unità diverse: questo compito verrà svolto nel seguito.

[19]Talvolta anche quante volte ci si deve rappresentare ripetuta una parte della grandezza data, il che dà allora il concetto di numero frazionario [gebrochenen Zahl].

7. Poiché l'oggetto proprio della matematica sono le relazioni [Relationen] tra grandezze, noi dobbiamo familiarizzarci cone le più importanti tra queste relazioni e soprattutto con quelle che per la loro semplicità possono essere ritenute come gli elementi delle rimanenti, proprio come anche qui le prime (addizione e sottrazione) sono a fondamento delle rimanenti (moltiplicazione e divisione).[20]

8. Il più semplice rapporto tra grandezze è indiscutibilmente quello tra il tutto e le sue parti, che è già una conseguenza immediata del concetto di grandezza estensiva. Il teorema principale in questo rapporto, che si può ritenere come principio, è che «le parti, riunite in un qualche ordine senza trascurarne nessuna, sono uguali al tutto». Come trovare il tutto dalle parti è insegnato dal primo tipo di calcolo (specie): l'addizione; come trovare dal tutto e da una parte l'altra parte è mostrato nel secondo tipo di calcolo: la sottrazione. In rapporto all'addizione le parti si chiamano grandezze da sommare [summirenden], il tutto si chiama somma [Summe] o aggregato [Aggregat]; in rapporto alla sottrazione il tutto si chiama maggiore o minuendo, la parte nota si chiama minore e la parte cercata si chiama differenza o resto. È chiaro che il minore e la differenza devono poter essere reciprocamente scambiati.

9. Oltre al rapporto tra il tutto e le sue parti, si deve notare il rapporto del semplice [Einfachen] e del multiplo [Vielfachen], che analogamente dà luogo a due tipi di calcolo. In questo rapporto dobbiamo considerare tre grandezze: il semplice, il multiplo e il numero, che indica di quale multiplo si tratta. La moltiplicazione insegna a trovare il secondo dal primo e dall'ultimo; la divisione insegna a trovare l'ultimo dai primi due: in rapporto alla moltiplicazione il semplice si chiama moltiplicando, il numero che determina il tipo di multiplo si chiama moltiplicatore, entrambi si chiamano fattori, il multiplo si chiama prodotto. In rapporto alla divisione il semplice si chiama divisore, il numero che determina il tipo di multiplo si chiama quoziente e il multiplo si chiama dividendo.

10. Le più importanti verità che riguardano la moltiplicazione sono le seguenti

[20] Benché in generale le verità seguenti valgano per le frazioni non meno che per i numeri interi, tuttavia potranno essere dimostrate qui soltanto per i numeri interi, e così anche le definizioni, per essere adatte anche alle frazioni, avranno nel seguito bisogno in parte di una piccola modifica.

1. Il moltiplicatore moltiplicato per il moltiplicando dà lo stesso prodotto che dà la moltiplicazione dell'ultimo con il primo, o i fattori si possono scambiare: $a.b = b.a$.

2. Quando il moltiplicatore è un prodotto, è possibile, anziché moltiplicare il moltiplicando per il moltiplicatore, moltiplicare il moltiplicando con un fattore del moltiplicatore e moltiplicare il prodotto così ottenuto con il secondo ; $(a.b).c = a.(b.c)$.

3. Un prodotto di più fattori resta invariato, qualunque sia l'ordine in cui si prendono i fattori; $a.b.c.d = a.d.c.b = c.b.a.d$ ecc.

4. È indifferente se si addiziona il moltiplicando in una sola volta con il moltiplicatore o se si moltiplicano le sue parti singolarmente con il moltiplicatore e poi si addizionano i prodotti così ottenuti: $(a + b).c = ac + bc$.

5. È indifferente se si moltiplica il moltiplicando in una sola volta con il moltiplicatore 0 se si moltiplicano le sue parti singolarmente con il moltiplicatore e poi si uniscono i prodotti; $a(b + c) = ab + ac$.

11. La divisione insegna a trovare dal multiplo e dal semplice la grandezza che determina il tipo del multiplo. Qui ci sono tre grandezze che stanno esattamente nello stesso rapporto reciproco come nella moltiplicazione e quello che di esse è stato dimostrato là deve valere anche qui, ad eccezione del fatto che qui si fa uso dei nomi consueti per questo tipo di calcolo anziché di quelli consueti nella moltiplicazione. Se là si dimostra che il moltiplicatore e il moltiplicando si possono scambiare (cioè che il semplice può essere ritenuto una grandezza che determina il multiplo e la grandezza che determina il multiplo può essere ritenuta il semplice), così qui questo significa che il quoziente e il divisore possono essere scambiati; e conseguentemente dati il quoziente e il divisore, si trova il divisore con la stessa operazione che se fossero dati il divisore e il dividendo. Perciò si vede che, benché siano possibili tre combinazioni, tuttavia risultano solo due tipi di calcolo.

7.5 B. Bolzano *Contributi per una rappresentazione più fondata della matematica*

Nel seguito sono stati tradotte la Prefazione, i paragrafi 1-10 della prima parte e l'Appendice di B. Bolzano, *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Prag, 1810. Rist. anast. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1974.

Prefazione[21]

Multum adhuc restat operis, multumque restabit: nec ulli nato post mille saecula praecludetur occasio aliquid adhuc adjiciendi. - Multum egerunt, qui ante nos fuerunt, sed non peregerunt: suspiciendi tamen sunt, et ritu Deorum colendi.

Seneca, Epist. 64.

Che la matematica sia tra tutte le scienze la più vicina alla perfezione è qualcosa che ogni giudice imparziale deve ammettere. Nei più comuni manuali di matematica regna in effetti più determinatezza e chiarezza concettuale, più sicurezza e convinzione nei giudizi di quanta al momento ancora se ne trovi nei più perfetti (compiuti) manuali di metafisica. Ma se ciò è innegabile, anche il matematico non dovrebbe d'altra parte mai dimenticare che anche per la sua scienza vale ciò che là è scritto per tutto il sapere umano, e cioè "*che esso è solo un lavoro imperfetto*". I più grandi esperti di questa scienza hanno però in realtà da sempre riconosciuto non solo che l'edificio della loro scienza è un edificio ancora in costruzione e in se stesso non finito (non ancora condotto a termine, non ultimato), ma anche che perfino le prime fondamenta di questo edificio, per il resto così splendido, non sono ancora del tutto solide e regolari; o, fuor di metafora, che perfino nelle prime teorie elementari di tutte le discipline matematiche si trovano ancora alcune lacune e imperfezioni.

Per dimostrare qui questo giudizio solo con alcune prove, non hanno forse riconosciuto i più grandi matematici del tempo recente (contemporanei) che in *aritmetica la teoria delle grandezze opposte (negative)*, insieme a tutto ciò che da essa dipende, non è ancora chiara (pura, scevra da errori, corretta)? non si trova quasi in ogni manuale di aritmetica una diversa rappresentazione di questa teoria? - Ancora più vacillante e in parte pieno di contraddizioni reciproche è il capitolo delle grandezze *irrazionali* e *immaginarie*. Non voglio qui menzionare i difetti dell'*algebra superiore* e del *calcolo differenziale e*

[21] Cfr. Bolzano (1810), pp. ii-xvi.

integrale; è noto che finora non ci si è mai accordati una volta sul concetto di differenziale; e solo alla fine dello scorso anno la *Società delle Scienze di Lipsia di Fürst e Jablonov* ha assegnato come domanda per il premio *la discussione delle diverse teorie del calcolo infinitesimale e la delibera di quale meriti preferenza.*

Nondimeno l'aritmetica è secondo me ancora la parte di gran lunga più perfetta delle discipline matematiche; la *geometria* ha difetti ben più seri e difficili da eliminare. Qui manca al momento ancora una definizione determinata dei concetti fondamentali: *linea, superficie, corpo.* Non una volta ci si è ancora potuti accordare sulla definizione di *linea retta* (che forse potrebbe essere data prima del concetto di *linea in generale*). Qualche anno fa il *Dr.Grashof* ("Theses sphaereologicae, quae ex spherae notione veram rectae lineae sistunt definitionem, omnisque geometriae firmum jaciunt firmamentum" Berol, 1896) ci ha regalato una definizione del tutto nuova, la quale tuttavia difficilmente può soddisfare. Il difetto più vistoso, del miglioramento del quale ci si è occupati, per quanto ne sappiamo *noto* già dai tempi di *Proclo* ma probabilmente già molto prima di *Euclide*, riguarda però la *teoria delle parallele.* Ma per quanti tentativi si siano fatti finora, nessuno ha potuto rallegrarsi dell'approvazione generale.

Nella *meccanica* sono i concetti di *velocità* e di *forza* all'incirca proprio una simile pietra dello scandalo come il concetto di linea retta in geometria. Già da lungo tempo si è riconosciuto che i due teoremi più importanti di questa scienza e cioè quello del *parallelogramma delle forze* e quello della *leva* non sono stati ancora dimostrati con precisione. Per questa ragione la *Reale Società delle Scienze di Kopenhagen* propose ancora nel 1807 come compito di un premio una più fondata teoria del parallelogramma delle forze. Poiché io non ho ancora ricevuto in visione la trattazione del Prof. *De Mello*, che ha ottenuto il premio, non posso assicurare che il tentativo, che io immagino fornito in *questi* fogli, sarà qualcosa di nuovo. Per quanto riguarda la teoria della *leva*, si ritiene certamente che la dimostrazione di *Kästner* elimini tutte le difficoltà, ma io credo di mostrare il contrario nella presente trattazione.

Infine in *tutte* le parti della matematica, ma soprattutto in geometria, già dal tempo di *Ramo* si è rimproverato il *difetto dell'ordine.* E in realtà i singoli teoremi in *Euclide* non trattano forse di oggetti disparati? Dapprima di *triangoli*, ma in modo tale che qui sono già coinvolti anche *cerchi* che si intersecano in determinati punti; poi di *angoli*, adiacenti e opposti al vertice; poi dell'*uguaglianza dei triangoli*; solo molto più tardi della loro *similitudine*, la quale tuttavia è dedotta con un giro lunghissimo soltanto dalla considerazione della *parallele*, perfino della *superficie* del triangolo, e così via. - Se si considera che ταυθ΄ὅπως γέγραπται τοῖς καιροῖς καὶ ταῖς ἀκριβείαις;[22] se si tiene presente che ogni proposizione che segue in una dimostrazione, con la quale *Euclide* la comprende, ha bisogno in modo del tutto necessario della proposizione che la precede; allora bisogna proprio arrivare a pensare che il fondamento di quel disordine deve trovarsi più in profondità e che tutto il tipo di dimostrazione che *Euclide* utilizza deve essere scorretto.

I presenti fogli hanno allora lo scopo di produrre l'eliminazione non solo dei difetti della matematica ora rimproverati, ma anche di alcuni altri la cui presenza può essere dimostrata solo nel seguito. A buon diritto mi si chiederà *come io sia stato chiamato a questo.* Voglio addurre qui molto francamente ciò che so dire a questo proposito a mio favore o contro di me.

Da circa quindici anni - perché non è da più tempo che io conosco la matematica - questa scienza è stata sempre uno dei miei studi preferiti; soprattutto però soltanto nella sua parte speculativa, come ramo della filosofia e strumento per l'esercizio al ragionamento corretto. Subito la prima volta che ho fatto conoscenza con la matematica, il che accadde secondo l'eccellente manuale di Kästner, mi accorsi dell'uno o dell'altro difetto e mi occupai nelle ore secondarie (cioè quelle non dedicate alla filosofia) della loro eliminazione, in verità non per vanità ma per un intimo interesse che io trovavo in una tale speculazione. In seguito ad una più lunga riflessione aumentò ancora il numero dei difetti che io credevo di aver trovato. È vero che a poco a poco mi riuscì di eliminare l'uno o l'altro di tali errori; soltanto allo stesso modo non avevo fiducia nella soluzione per paura di ingannarmi, perché amavo di più la verità del piacere di una invenzione immaginaria. Soltanto dopo aver verificato un'opinione sotto tutti gli aspetti e averla trovata sempre confermata, acquistavo più fiducia in essa. Nel frattempo, per quanto me lo permettessero i miei altri studi e da cinque anni il mio insegnamento, oltre ad altre circostanze, esaminai anche quei libri che sono stati scritti con l'intenzione di perfezionare il sistema scientifico della matematica. Qui trovai già effettivamente esposto qualcosa di ciò cui ero stato condotto per conto mio attraverso la mia riflessione; qualcos'altro invece non l'ho ancora trovato da nessuna parte. Tuttavia, poichè non ho potuto procurarmi una conoscenza completa della letteratura matematica, potrebbe sempre accadere che anche qualcos'altro di ciò che io ritengo nuovo sia stato già detto da qualche parte: sicuramente non è però questo il caso per tutto quanto.

Del resto non mi è *ignoto* che voler modificare e migliorare qualcosa nei primi fondamenti della matematica è un'impresa veramente *rischiosa.* "*Tutti*

[22] La citazione potrebbe riferirsi ad un passo dell'orazione di Isocrate contro Filippo (5.155): «[sta agli ascoltatori giudicare] quanto il discorso sia stato composto nel modo più appropriato e più rifinito [. . .]». [N.d.T.]

quelli che vollero superare Euclide" dice in qualche luogo Kästner con verità storica, "*si sono finora coperti essi stessi di vergogna.*" Non sta forse anche di fronte a me un simile destino, tanto più perché proprio là ove io dovrei avere la verità al *mio* fianco il pregiudizio e l'ostinazione mi si opporranno? Tuttavia dal fallimento di *numerosi* tentativi non segue però sempre che tutti gli *altri* tentativi devono fallire; inoltre la via che io qui propongo è molto diversa dalle vie finora tentate. Ritenni perciò mio dovere sottoporla al giudizio degli esperti.

Veramente io pubblicai già nel 1804 un piccolo saggio delle mie modifiche dal titolo: *Considerazioni su alcuni oggetti della geometria elementare.* Tuttavia l'estensione ristretta del breve scritto, il suo titolo che non dice nulla, lo stile oltremodo laconico insieme ad alcune altre circostanze non furono per nulla adatte a procurare ad esso attenzione. Perciò non ne è seguito null'altro che l'annuncio in alcune dotte riviste (per esempio in Leipziger Zeitung, 1805, luglio, parte 95; Jenaer Zeitung, 1806, febbraio, numero 29), senza che qualcuno abbia accusato la teoria delle parallele ivi esposta di un errore *evidente.* Ora è ovvio che da quel tempo ho progredito nei miei concetti e perciò credo di rappresentare adesso alcune cose meglio e in modo più corretto rispetto a quanto è avvenuto allora. Pertanto in questi *Contributi*, che dovrebbero essere pubblicati in fascicoli così piccoli come quello presente e ad intervalli di tempo indeterminati e il cui numero altrettanto poco posso determinare in anticipo, ho l'intenzione di esaminare in parte le singole discipline a priori della matematica secondo l'*ordine* nel quale sono disposte nel presente I capitolo, §20. La maggior parte delle modifiche e le più importanti riguarderanno la *geometria*, alla cui rappresentazione mi affretterò più velocemente possibile perché, o rafforzato nelle mie opinioni o istruito sul mio errore dal giudizio dell'esperto, io non perda altro tempo sulla cattiva strada.

I. Sul concetto della matematica e la sua divisione[23]

§. 1.

Il più antico e in certo qual modo ancora insuperato manuale della matematica, gli *Elementi di Euclide*, non contiene, come è noto, *proprio nessuna definizione* della scienza di cui tratta. Non oso io giudicare se l'immortale autore degli *Elementi* lo abbia fatto per una forma di caparbietà o perché abbia ritenuto che non ne valesse la pena o perché non ha saputo darci una definizione pienamente valida. - Al contrario in tutti i nuovi manuali della

[23]Cfr. Bolzano (1810), pp. 1-16.

matematica è enunciata la seguente definizione: "*La matematica è la scienza delle grandezze.*" Questa definizione è stata già criticata da Kant nella *Critica della Ragion Pura* (v. pag. 742 della seconda edizione), perché attraverso di essa "non è indicata *alcuna caratteristica essenziale* della matematica e l'*effetto* è preso *per la causa.*" [KrV 447]

§. 2.

Naturalmente tutto dipende in questo caso da ciò che si intende con la *parola grandezza.* Così l'autore anonimo del libro *Tentativo di agevolare lo studio della matematica per mezzo del chiarimento di alcuni concetti fondamentali e per mezzo di metodi conformi al fine*, Bamberg e Würzburg, 1805 (pag. 4) enuncia la seguente definizione di grandezza: "*Una grandezza è qualche cosa che è e che può essere percepita mediante un qualche senso.*" Questa definizione è sempre una di queste due cose: o troppo ampia o troppo ristretta, a seconda che l'autore consideri le parole *è e può essere percepita* nel loro senso più ampio, ove esse significano una pura *esistenza ideale* e una *possibilità di essere pensate*, oppure nel loro senso ristretto e proprio, nel quale esse valgono solo per un *oggetto sensibile realmente esistente.* Nel primo caso *grandezza* sarebbe *ogni oggetto pensabile senza eccezione*; e qualora noi definissimo dunque la matematica come la scienza delle grandezze, trascineremmo allora in sostanza tutte le scienze nel dominio di quest'unica scienza. Nel secondo caso al contrario soltanto gli *oggetti sensibili* sarebbero grandezze e il dominio della matematica sarebbe pertanto evidentemente troppo ristretto, perché invece anche cose soprasensibili, per es. gli spiriti e le forze spirituali, possono divenire un oggetto della matematica e in special modo dell'arte del calcolo.

§. 3.

Però in realtà questa definizione di grandezza (pag. 2), che la si interpreti così o in altro modo, è del tutto contraria all'uso linguistico. Io del resto ne ho fatto menzione qui solo per mostrare a partire da ciò nel seguito che già questo autore aveva in mente, benché soltanto in modo oscuro, una certa idea che a me pare vera. Se noi non vogliamo allontanarci troppo dall'uso linguistico (cosa che a dire il vero non dovremmo fare senza necessità anche nelle altre scienze), allora dobbiamo intendere per grandezza *un tutto in quanto esso consta di più parti uguali* o, ancora più in generale, *qualcosa che può essere determinato per mezzo di numeri.* Presupposto questo significato della parola grandezza, la consueta definizione della matematica come scienza delle grandezze è indubbiamente insufficiente, e in particolare *troppo ristretta.* Perché la grandezza è considerata *per sé* e *in astratto* soltanto nella pura *mathesis generale*, cioè nella *logistica* o nell'*aritmetica*, ma nemmeno esaurisce il contenuto di *questa* scienza. Infatti in molti problemi di *teoria combinatoria* (questa parte così importante della mathesis generale) il concetto di grandezza o di un numero non compare neppure; per es. quando si solleva la questione: *quali* - e non *quanti* - *spostamenti delle cose date a,b,c... si ammettono*? Nelle parti *speciali* della matematica, la *cronometria*, la *geometria*, ecc., compare ovunque, come suggeriscono già i nomi, oltre al concetto di *grandezza* anche un certo *altro oggetto* (per es. il tempo, lo spazio e così via), al quale il primo è soltanto *applicato spesso*, cosicché precisamente in molte di queste discipline vi sono parecchi principi e teoremi nei quali il concetto di grandezza non è affatto contenuto. Così ad esempio deve essere enunciata in cronometria la proposizione *che tutti gli istanti sono tra loro simili* e in geometria quella *che tutti i punti sono tra loro simili*; proposizioni nelle quali il concetto di grandezza o di numero non è affatto contenuto e che perciò nella matematica non potrebbero nemmeno essere enunciate, se essa fosse soltanto una *scienza delle grandezze*.

§. 4.

Ma non così facilmente come ci riuscì di criticare e rifiutare la definizione finora consueta ci potrebbe riuscire di mettere al suo posto una definizione migliore. Abbiamo notato poco fa che quegli *oggetti speciali* che compaiono oltre al concetto di grandezza nelle singole parti della matematica, hanno la proprietà che quest'ultimo concetto può essere facilmente applicato ad essi. Ciò potrebbe forse condurre all'idea di definire la matematica come *una scienza degli oggetti ai quali è applicabile il concetto di grandezza*. E sembra in effetti che proprio coloro che ammisero la definizione citata non avessero in fondo inteso altro che questo. Tuttavia ad una riflessione più precisa si rivela che anche questa stessa definizione è da rifiutare. Il concetto di grandezza è applicabile prima o poi (einmahl) in tutte le circostanze (durchaus) a *tutti* gli oggetti, perfino agli *entia rationis* (Gedankendinge). Se dunque si volesse considerare la pura *applicabilità del concetto di grandezza* ad un oggetti una ragione sufficiente per annoverare la teoria di tali oggetti tra le discipline matematiche, allora si dovrebbero in realtà includere tutte le scienze nella matematica, per es. anche quella nella quale è dimostrata la proposizione che ci sono solo *quattro* (o, come *Platner* giustamente insegna, solo *due*) figure sillogistiche insieme a quella che afferma che ci sono *né più né meno di quattro volte tre* [dodici] puri e semplici concetti dell'intelletto (categorie), e così via. Per salvare nondimeno questa definizione si dovrebbe allora prendere in considerazione almeno anche la *differenza di applicabilità più frequente o più rara*, cioè si dovrebbero includere nella matematica soltanto gli oggetti ai quali il concetto di grandezza si lascia applicare *spesso e in molti modi*. Ma chi non vede che ciò fornirebbe una determinazione di confine altamente oscillante e nient'affatto scientifica del dominio della matematica? Noi dobbiamo perciò andare in cerca di una definizione *migliore*.

§. 5.

La *filosofia critica* sembra prometterci una tale definizione. Essa crede di aver scoperto una determinata e caratteristica differenza tra le due classi principali di conoscenze umane a priori, le filosofiche e le matematiche, nel fatto che *la conoscenza matematica è in grado di* rappresentare, cioè di *costruire*, adeguatamente tutti i suoi concetti in un'*intuizione pura* e proprio perciò anche di *dimostrare* i suoi teoremi, mentre *la conoscenza filosofica*, priva di ogni intuizione, si deve accontentare di puri *concetti discorsivi*. Quindi l'essenza della matematica sarebbe espressa nel modo più caratteristico dalla definizione secondo la quale essa è *una scienza di ragione per costruzione di concetti*. (v. Kant, Critica della Ragion Pura, pag. 712) [cfr. KrV 446]. - Perciò questa definizione è stata accolta anche da molti matematici che sostengono la filosofia critica, tra i quali anche *Schulz*, certamente benemerito per la fondazione della matematica pura, nei suoi *Primi principi di pura Mathesis*, Königsberg, 1791.

§. 6.

Per parte mia voglio riconoscere del tutto sinceramente che fino ad ora non ho potuto convincermi - come della verità di alcune altre dottrine della filosofia critica - così in particolare anche della correttezza delle affermazioni kantiane sulla *pura intuizione* e sulla *costruzione dei concetti per mezzo di essa*. Io credo sempre ancora che già *nel concetto di un'intuizione pura* (cioè a priori) si trovi un'intima contraddizione; e ancora molto meno posso convincermi che il concetto di *numero* debba essere costruito necessariamente nel *tempo* e che di conseguenza l'intuizione del tempo appartenga essenzialmente all'aritmetica. Poiché in appendice a questa trattazione affermo qualcosa in più a questo proposito, qui mi accontento di aggiungere solo che in Germania ci sono alcune e probabilmente molte persone tra quelle che pensano autonomamente, le quali sono altrettanto poco d'accordo con queste affermazioni di Kant quanto lo sono io. Perfino alcuni che inizialmente erano stati inclini a quella definizione kantiana in seguito si sono ugualmente trovati nella necessità di abbandonarla. A questi appartiene per es. *Michelsen* nei suoi *Contributi all'incremento dello studio della matematica*, Berlin, 1790, S.I.B, parte V.

§. 7.

Ma ancora più illuminante di ciò che afferma Michelsen in questa trattazione fu per me ciò che trovai nella Allgemeine Leipzig Litteratur-Zeitung (luglio 1808, parte 81). Il dotto Rec.[card] critica la così consueta definizione della matematica come *scienza delle grandezze*, a proposito della quale afferma: "La grandezza è oggetto della matematica solo perché è la *forma più generale che sia finita*; la *matematica* però secondo la sua natura è *una teoria generale delle forme*; e in particolare l'*aritmetica* in quanto considera la *grandezza* come la *forma* generale *delle cose finite*, la *geometria* in quanto considera lo spazio come *forma* generale *della natura*, la *teoria del tempo* in quanto considera la *forma* generale *delle forze*, la *teoria del movimento* in quanto considera la *forma* generale *delle forze che agiscono nello spazio*." - Io non so se ho inteso queste definizioni proprio nel senso del loro inventore; ma almeno questo devo riconoscere, che esse mi hanno aiutato a perfezionare e a sviluppare meglio la seguente definizione e la suddivisione della matematica pura che già prima avevo abbozzato nei suoi elementi principali.

§. 8.

Io penso dunque che si potrebbe definire al meglio la matematica come una *scienza* che *tratta delle leggi generali (forme) alle quali si conformano le cose nella loro esistenza.* Con la parola *cosa* intendo io qui non solo *quelle* che hanno un'*esistenza oggettiva*, indipendente dalla nostra coscienza, ma anche quelle che esistono solo nella nostra *rappresentazione* e ciò a sua volta in particolare *o come individui* (cioè *intuizioni*) *o come puri concetti generali*; in una parola dunque - *tutto ciò che può essere un oggetto della nostra facoltà di rappresentazione.* Affermo inoltre che la matematica tratta delle *leggi alle quali le cose si conformano nella loro esistenza*; questo indica dunque che la nostra scienza non si occupa della dimostrazione dell'*esistenza* di queste cose ma soltanto e unicamente delle *condizioni della loro possibilità.* E mentre chiamo *generali* queste leggi io dò ad intendere che la matematica non si occupa mai di una singola cosa come *individuo* ma sempre di interi *generi.* Questi generi possono però certo essere superiori o inferiori e proprio su ciò si fonderà la suddivisione della matematica in *singole discipline.*

§. 9.

Certamente non si troverà che la definizione fornita qui sia troppo ristretta, perché essa abbraccia tutto ciò che finora si è sempre incluso nel dominio della matematica. Piuttosto temo che la si trovi un po' troppo ampia e che si possa muoverle il rimprovero che essa lascia troppo poco alla filosofia (alla metafisica). Questa infatti è limitata dalla mia definizione soltanto all'unico compito di dimostrare da concetti a priori l'esistenza reale di certi oggetti. La matematica e la filosofia, componenti principali della nostra conoscenza a priori, sarebbero opposte l'una all'altra da questa definizione in modo che la prima tratterebbe delle condizioni generali in base alle quali è possibile l'esistenza delle cose mentre la seconda cercherebbe di dimostrare a priori la realtà di certi oggetti (come ad esempio la libertà, Dio e l'immortalità dell'anima); o, in altre parole, la prima si occuperebbe della domanda: quali caratteri devono avere le cose per essere possibili? la seconda solleverebbe la domanda: quali cose sono reali - e in particolare (poiché essa dovrebbe rispondere a priori a questa domanda) - necessariamente reali? O ancora più brevemente la matematica tratterebbe della necessità ipotetica,[24] la metafisica della necessità assoluta.

§. 10.

Quando mi viene in mente un pensiero *nuovo*, cerco sempre di chiedermi "se qualcuno abbia avuto la stessa idea prima di me." Se sì, naturalmente si accresce anche la mia *convinzione*. Per quanto riguarda la sopracitata definizione, è superfluo dire quanto ciò che il Sig. Reccard (cfr. il paragrafo 7) si avvicini alla mia presentazione se non addirittura coincida del tutto con essa. Ma anche l'autore del libro (di cui al paragrafo 2) sembra aver avuto in mente questa idea, anche se solo in modo oscuro. Infatti definendo la grandezza, oggetto della matematica, come *ciò che è*, sembra proprio aver intuito che la matematica concerne *tutte* le forme delle cose e non solo la loro *componibilità per mezzo di parti uguali* (*numerabilità*). – *Kant* definisce la *scienza naturale* (che sotto il nome di meccanica è stata da sempre ritenuta una parte della matematica) come una *scienza delle leggi alle quali sottostà l'esistenza delle cose* (dei fenomeni). Questa definizione può facilmente condurre a quella che noi abbiamo presentato sopra. *Tempo* e *spazio* sono cioè due *condizioni* alle quali sottostà l'esistenza delle cose fenomeniche; pertanto la *cronometria* e la *geometria*, che considerano in abstracto le proprietà di queste due forme, trattano anche, sebbene *in modo indiretto*, delle leggi a cui sottostà l'esistenza delle cose sensibili. L'*aritmetica*, infine, proprio perché tratta delle leggi della *numerabilità*, sviluppa le leggi *più generali* alle quali si devono conformare le cose nella loro esistenza, perfino nella loro esistenza *ideale*.

[24]Benchè non tutte le sue proposizioni possiedano questa forma ipotetica, perché la condizione, soprattutto nella cronometria e nella geometria, che essa sia la stessa in tutte le proposizioni è tacitamente omessa.

Appendice
La teoria kantiana della costruzione dei concetti per mezzo di intuizioni[25]

§. I.

Il fatto di avere per primo richiamato l'attenzione sull'importante differenza che regna tra la parte analitica e quella sintetica del nostro sapere, rimane un *merito* che *Kant* si è conquistato, anche qualora fosse impossibile difendere e conservare tutto ciò che tale filosofo ha aggiunto sulla natura interna dei nostri giudizi sintetici. È certo che la verità dei giudizi analitici riposa su un fondamento del tutto *diverso* da quello dei giudizi sintetici. Ammesso infatti che *i primi* meritino in altro modo il nome di *giudizi veri* (il che concedo loro non senza riserve[26]), essi riposano tutti su quell'*unica* proposizione universale espressa dalla formula: *(A cum B) è una specie di A*. Se chiamiamo questa proposizione *principio dell'unità* o *di contraddizione*, allora possiamo almeno dire che *il principio di contraddizione è la fonte universale di tutti i giudizi analitici.* Ben diversi sono invece i giudizi *sintetici*, che manifestamente non si lasciano derivare da quel principio. Per questo motivo Kant sollevò la seguente questione: "qual è mai allora *qui* il fondamento che determina il nostro intelletto ad unire ad un certo soggetto un predicato che non è affatto contenuto nel *concetto* (nella *definizione*) del primo?" – Ed egli credette di scoprire che questo fondamento non poteva essere nient'altro che un'*intuizione* che noi colleghiamo con il concetto del soggetto e che nello stesso tempo contiene il predicato. Di conseguenza devono corrispondere *intuizioni* a tutti i concetti a proposito dei quali pensiamo di poter costruire giudizi sintetici. Se però queste intuizioni sono sempre soltanto *empiriche*, anche i giudizi ottenuti per mezzo di esse sono sempre *empirici.* Ora, dato che esistono anche giudizi sintetici *a priori* (come la matematica e la scienza naturale pura ne contengono innegabilmente), devono esistere – per quanto strano possa suonare – anche *intuizioni a priori.* E se un giorno si è stabilito che possono esistere intuizioni a priori, allora ci si convince anche facilmente, a vantaggio della matematica e della scienza naturale pura, che tali intuizioni sono il *tempo* e lo *spazio.*

§. 2.

A buon diritto chiediamo qui che cosa intenda allora *Kant* per *intuizione.* E noi otteniamo per esempio dalla sua *Logica* pubblicata da *Jäsche* o anche da una quantità di altri passi dei suoi scritti (per es. Critica della ragion

[25] Cfr. Bolzano (1810), pp. 135-52.
[26] Cfr. la sezione II, §. 18.

pura, p. 47 e altri) la seguente risposta: tutte le rappresentazioni sono o *intuizioni*, vale a dire rappresentazioni di un individuo, o *concetti*, vale a dire rappresentazioni di qualcosa di universale. Se noi domandiamo infine cosa possa significare un'*intuizione pura a priori*, allora nessun'altra risposta mi pare, almeno qui, possibile se non la seguente: *un'intuizione che è collegata con la coscienza della necessità che essa debba essere così e non altrimenti.* Perché solo se è contenuta nell'intuizione questa coscienza della necessità può trovarsi anche nel legame che essa determina tra soggetto e predicato, vale a dire nel *giudizio*.

§. 3.

È noto che già molti si sono scandalizzati per queste *intuizioni a priori* della filosofia *critica*. Da parte mia concedo volentieri che ci deve essere un certo *fondamento* del tutto distinto dal principio di contraddizione in base al quale l'intelletto connette il predicato di un giudizio sintetico con il concetto del soggetto. Soltanto non trovo evidente come questo *fondamento* possa essere e chiamarsi *intuizione*, e in particolare nei giudizi a priori intuizione *pura*. Veramente, se devo essere sincero, tutto ciò mi appare riposare su una distinzione che non è stata pensata con sufficiente chiarezza tra ciò che nella nostra conoscenza si chiama *empirico* e ciò che si chiama *a priori*. È vero che la *Critica della ragion pura* inizia proprio con questa distinzione, ma essa non ne dà una vera *definizione* (cosa che mi aveva già scandalizzato al mio primo approccio con questo libro). Come è possibile ora sopperire a questa mancanza? Dato che i due concetti di *empirico* e di *a priori* sono contrapposti uno all'altro in modo contraddittorio, sarebbe sufficiente aver determinato in modo appropriato uno dei due, ad esempio il concetto di *empirico*; la determinazione dell'altro si darebbe poi da sé per mera contrapposizione. Che cosa chiamiamo allora dunque propriamente *empirico*? – Non ci si voglia dire in risposta: "*empirico è ciò che otteniamo attraverso i cinque sensi – o attraverso un oggetto esteriore*". In quanto filosofi non possiamo ancora presupporre cosa sono i *cinque sensi*, né che *vi siano oggetti esterni*.

§. 4.

Secondo la mia opinione, la differenza tra empirico e a priori nelle nostre conoscenze concerne originariamente solo i nostri *giudizi*, e solo per mezzo di questi tale differenza può esssere estesa indirettamente anche ai nostri *concetti o rappresentazioni*. Io sono infatti cosciente di possedere giudizi della forma: "*io percepisco – X*"; e questi giudizi io li chiamo *giudizi* empirici, *di percezione* o *di realtà* e chiamo un'*intuizione* o, se si vuole, una *rappresentazione empirica* quell'X che compare in essi. La copula essenziale in tutti questi giudizi è il concetto del *percepire* che io ritengo un concetto *semplice* e di conseguenza *indefinibile*. Tuttavia per delimitare tale concetto e premunirsi contro malintesi si potrebbe forse dire che è il concetto di un *essere*, a) di un semplice essere *puro*, senza necessità, b) di un essere che non è quello di un *oggetto esteriore* in quanto tale, ma solo di una semplice *rappresentazione in me* (vale a dire dell'*intuizione*[27]) . – Chiamo invece a priori i miei *restanti* giudizi, ovverosia quelli che esprimono a) una *necessità*, oppure b) una *possibilità*, oppure c) un *dovere* (cfr. §. 15. della sezione II) e chiamo *concetti a priori* i concetti che compaiono in essi in qualità di soggetto o di predicato.

§. 5.

Dal *principio di ragione* sono tuttavia condotto alla ricerca di un qualche *fondamento* per tutti i miei giudizi. Tale fondamento è però completamente diverso per i giudizi empirici e per i giudizi a priori. I primi o i cosiddetti *giudizi di realtà* hanno la peculiarità che io cerco il loro fondamento *in ciò che è* (in qualcosa di reale, nelle *cose*); e più precisamente, a seconda delle circostanze, in parte in ciò che chiamo "*la proprietà particolare della mia facoltà percettiva*", in parte in certe "*cose distinte da me e cioè esteriori che* (secondo il modo di dire corrente) *agiscono sulla mia facoltà percettiva*." – Diversi sono i miei *giudizi a priori*, nei quali non posso supporre il fondamento in base al quale attribuisco il predicato al soggetto altro che nel *soggetto stesso* (e nella peculiare proprietà del predicato)[28], come già abbiamo fatto nella sezione II, §20. – Le *intuizioni* non servono e non possono, a mio parere, servire qui a nulla, come sarà forse chiarito meglio con altre considerazioni nei paragrafi seguenti.

§. 6.

Certo esistono realmente un tipo di giudizi, i cosiddetti *giudizi di esperienza* o *di probabilità* (cfr. sez. II, §15), nei quali il legame del predicato con il soggetto è di fatto attuato *per mezzo di intuizioni*. Poiché non appena ho il giudizio di percezione: "*io percepisco le intuizioni X e Y; e in particolare mai X senza Y*", ne deduco per mezzo del principio di ragione il *giudizio di probabilità*: "*la cosa che è fondamento dell'intuizione X è verosimilmente in relazione con quella che è fondamento di Y come una causa con il suo*

[27]Perché deve essere prima dimostrato che un oggetto esteriore corrisponde come fondamento alla rappresentazione.

[28]Se tuttavia si dice alcune volte che questo fondamento si trova nell'assoluta necessità della cosa o nella particolare proprietà del nostro intelletto; questi sono, io credo, vuoti modi di dire, che in definitiva non dicono nulla di più che: è così perché è così.

effetto." Di questa forma sono, a mio parere, tutti i nostri cosiddetti *giudizi di esperienza.* Quando per esempio diciamo: *il sole riscalda la pietra*, ciò non significa in realtà null'altro che: *l'oggetto* (sole) *che è la causa dell'intuizione* X (vale a dire del disco solare luminoso) *è anche il fondamento dell'intuizione* Y (vale a dire dell'intuizione diuna pietra calda). Ma tutti questi giudizi possiedono secondo la loro natura solo *probabilità.*

§. 7.

Come possono però avere origine tramite un legame con le intuizioni giudizi *assolutamente certi* quali sono tutti i giudizi a priori?[29] Kant sembra voler dire: "Quando io lego ad un'intuizione il concetto universale per esempio di un *punto* o di una *direzione* o di una *distanza*, cioè quando mi rappresento un singolo punto, una singola direzione o una singola distanza, allora scopro in questi *singoli* oggetti che ad essi conviene questo o quel predicato e contemporaneamente sento che *è lo stesso* per *tutti gli altri* oggetti che cadono sotto questo concetto." Se questa è l'opinione di *Kant* e dei suoi seguaci, pongo ora la seguente domanda: come giungiamo noi però dall'intuizione di un tale *oggetto singolare* al *sentimento che ciò che notiamo in esso convenga anche ad ogni altro*? Per mezzo di ciò che è *singolare* e individuale o per mezzo di ciò che è *universale* in questo oggetto? Manifestamente solo per mezzo di ciò che è universale, vale a dire per mezzo del *concetto*, non per mezzo *dell'intuizione* (§. 2).

§. 8.

Fino a che punto la dottrina kantiana delle intuizioni possa essere scabrosa si rivela con particolare chiarezza se la si estende anche ad altre proposizioni che non appartengono alla *geometria.* Il principio di ragione e la maggior parte delle proposizioni dell'aritmetica sono, secondo una giusta osservazione di Kant, *proposizioni sintetiche.* Ma chi non sente come sia forzato ciò che Kant dovette affermare per applicare in modo universale la sua teoria delle intuizioni e cioè che anche a fondamento di *queste* proposizioni vi è un'intuizione, e precisamente (poiché quale altra potrebbe mai essere?) l'*intuizione del tempo*? Il *principio di ragione* è valido anche là ove non sia dato alcun tempo e (secondo un'osservazione che è stata già fatta spesso) proprio

[29]Tutti i giudizi a priori hanno assoluta certezza e non solo essi, ma anche i giudizi empirici. Assoluta certezza hanno cioè non solo, come si ha usualmente l'abitudine di rappresentare la cosa, i giudizi di necessità, ma anche i giudizi di possibilità, di realtà e di obbligo; in breve tutti i nostri giudizi ad eccezione di quelli di cui abbiamo parlato nel paragrafo precedente, i quali proprio perciò meritano il titolo caratteristico di giudizi di probabilità.

solo in conseguenza *di questo principio Kant* stesso ammette l'esistenza dei *noumeni*, i quali non sono nel tempo. Le proposizioni dell'*aritmetica* non necessitano in alcun modo dell'intuizione del tempo. Vogliamo analizzare ora un solo esempio. *Kant* introduce la proposizione $7 + 5 = 12$; al posto di questa, per una esposizione più semplice, noi vogliamo assumere la proposizione più breve $7 + 2 = 9$. La dimostrazione di questa proposizione non presenta alcuna difficoltà, a condizione di presupporre la proposizione universale $a + (b + c) = (a + b) + c$ e cioè che in una somma *aritmetica* si tenga conto solo dell'*insieme* e non dell'*ordine* (un concetto certo più vasto rispetto a quello di *successione nel tempo*) dei membri. Questa proposizione anziché presupporre il concetto del *tempo*, al contrario lo esclude. Ma una volta assunta quest'ultima proposizione, la dimostrazione della proposizione sopra citata potrà essere condotta nel seguente modo. *1 + 1 = 2, 7 + 1 = 8, 8 + 1 = 9* sono semplici *definizioni* e proposizioni *arbitrarie*. Da cui *7 + 2 = 7 + (1 + 1), (per def.) = (7 + 1) + 1, (per propos. praeced.) = 8 + 1, (per def.) = 9, (per def.)*.

§. 9.

"Ma allora, si dirà, è vero perlomeno in *geometria* che vi sono a fondamento certe intuizioni. Perché in realtà non appena ci *rappresentiamo* solo il concetto di *punto*, subito ci compare davanti agli occhi anche l'*intuizione* di un punto." Certamente, ma questa *immagine* che accompagna il nostro puro *concetto* di punto non è ad esso affatto *essenziale*, bensì vi è legata solo attraverso associazioni di idee, poiché noi abbiamo spesso pensato insieme immagine e concetto. Da ciò segue anche che la proprietà di questa immagine è molto diversa per persone diverse e dipende da mille circostanze accidentali. Chi per esempio avesse visto sempre soltanto linee rozze e disegnate con un tratto spesso o colui al quale le *linee* diritte fossero state sempre rappresentate solo per mezzo di catene o *bastoni*, a costui, al pensiero di una linea, verrebbe in mente l'immagine di una catena o di un bastone. Alla parola *triangolo* a uno viene in mente sempre un triangolo *equilatero*, a un altro un triangolo *rettangolo*, a un *terzo* forse un triangolo *ottusangolo*. Perciò non arrivo proprio a comprendere come Kant abbia potuto trovare una così grande differenza tra l'intuizione che ci fa apparire un qualche triangolo *disegnato* realmente davanti a noi e l'intuizione che ci fa vedere un triangolo *costruito* soltanto nell'*immaginazione*, al punto che egli dichiarò il primo del tutto superfluo e insufficiente, il secondo invece necessario e sufficiente per la dimostrazione di una *proposizione* sintetica a priori. – Secondo la mia opinione è certamente *inevitabile* che la nostra immaginazione, al pensiero di un qualche oggetto spaziale che abbiamo visto spesso, ci rappresenti un'*immagine* di tale oggetto; avere in mente questa immagine è anche *utile e comodo* per un più facile giudizio dell'oggetto, ma non lo ritengo affatto *necessario* per tale giudizio. Ci sono in effetti anche teoremi veri in geometria per i quali noi non abbiamo alcuna intuizione. La proposizione che ogni linea retta può essere prolungata all'infinito non ha per sé alcuna intuizione, le linee che la nostra immaginazione ci permette di rappresentarci non sono infinitamente lunghe. Nella *stereometria* noi abbiamo spesso a che fare con così tanti oggetti spaziali riuniti insieme, che perfino la più vivace immaginazione non è più in grado di rappresentarseli chiaramente; continuiamo nondimeno a calcolare con i nostri *concetti* e troviamo verità.

§. 10.

"Ma se non sono le *intuizioni* a marcare la differenza essenziale tra la matematica e le altre scienze, da dove viene allora la grande *certezza* ed *evidenza* della matematica?" – Io rispondo: dal fatto che è possibile *verificare* facilmente tramite *intuizioni* ed *esperienze* i risultati della matematica. Che per esempio la linea retta sia proprio la linea più breve tra due punti ciascuno di noi lo sperimenta con innumerevoli esperimenti molto prima di poterlo dimostrare per via deduttiva. Da ciò segue anche che la famosa evidenza della matematica gradualmente cessa via via che l'esperienza ci abbandona: analogamente certe proposizioni, benché dedotte, hanno spesso un grado di intuibilità molto più ampio rispetto ai principi veri e propri (cfr. sezione II, §21, nota).

§11.

"Non ci sarebbe allora assolutamente alcuna differenza tra le intuizioni che Kant ha chiamato *a priori* e le intuizioni empiriche? Tutti gli oggetti devono ben avere una *figura*, mentre non è necessario che possiedano *colore*, *odore* e simili." Io rispondo: è necessario che possiedano una *figura* non *tutti* gli oggetti che ci devono *apparire*, bensì soltanto quelli che ci devono apparire come *esterni*, vale a dire nello *spazio*. Ma precisamente questi oggetti devono poi anche possedere qualcosa che *riempia* questa figura e questo qualcosa può essere, in base alla proprietà peculiare della nostra facoltà percettiva, solo una delle cinque cose seguenti: o un *colore*, o un *odore*, ecc. Pertanto anche il colore, l'odore ecc. sono forme a priori nel senso preciso della parola secondo cui lo sono lo spazio e il tempo, solo che l'ambito dei primi è più stretto di quello dei secondi; proprio come, analogamente, la forma dello *spazio* ha un ambito più stretto rispetto a quello del *tempo*. Tra i *concetti* non sussiste infatti (tale è il nostro giudizio finale) alcuna differenza giustificabile in base alla quale essi possano essere divisi in *empirici* e *a priori*; al contrario sono tutti a priori.

- Tu, si quae nosti rectius istis, Candidus imperti! si non: his utere mecum.

7.6 B. Bolzano *Il concetto di matematica e le sue parti* (1840 ca.)

Il testo che traduciamo è la prima sezione della *Introduzione alla Teoria delle grandezze*, testo inedito di Bolzano pubblicato per la prima volta a cura di J. Berg in B. Bolzano, *Gesamtausgabe*, II.A. Nachgelassene Schriften, vol. 7: *Einleitung zur Grössenlehre und Erste Begriffe der allgemeinen Grössenlehre*, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt, 1975, pp. 25-45. La seconda sezione (*Von der mathematischen Lehrart*) è disponibile in traduzione italiana a cura di C. Cellucci con il titolo *Del metodo matematico*, Torino, Bollati Boringhieri, 1985.[30]

§*1. Che cosa intendo per grandezze in senso generale?*

Non mi vergogno ad ammettere di fronte al lettore che la determinazione del concetto di grandezza — concetto della scienza la cui prima teoria voglio esporre qui — mi è costata più fatica della definizione di tutti gli altri concetti di questa scienza; non mi vergogno ad ammettere che in nessun altro caso ho cambiato opinione più spesso e perfino ora sostengo la posizione che alla fine mi è parsa corretta senza lo stesso grado di fiducia con cui mi sono concesso alcune altre deviazioni dalla concezione usuale — deviazioni che il lettore troverà in questo libro. Sono convinto che la soluzione migliore consista nel distinguere due significati in cui viene assunto il termine *grandezza*, uno più ampio e uno più stretto, intendendo per grandezza in senso *stretto* precisamente solo ciò che si chiama altrimenti anche grandezza *continua* e assumendo il termine in senso più *ampio* in modo che esso comprenda accanto alle grandezze continue anche le cosiddette grandezze *discontinue* o *discrete* e null'altro. Quando si definisce la *Matematica* come una scienza delle grandezze in generale (una definizione alla quale io ora sono in sostanza ritornato), indubitabilmente si assume il termine grandezza in senso ampio, perché certamente si considera anche la Teoria dei *numeri* come una disciplina matematica, e tra le più importanti. In questo senso più ampio chiamiamo (credo) *grandezza* (**quantum**) ogni oggetto, se noi lo consideriamo come appartenente ad un certo tipo di cose, tra due qualunque delle quali possiamo sempre affermare una sola delle due seguenti relazioni reciproche: esse devono essere o una *uguale* all'altra o tali che una di esse contenga una *parte uguale* all'altra. Così per esempio chiamiamo grandezza

[30]Cfr. rispettivamente Bolzano (1975a) e Bolzano (1975b).

un insieme di talleri in quanto pensiamo o che ogni altro insieme di talleri sia uguale a questo o che uno dei due insiemi sia un tutto che racchiude in sé una parte uguale all'altro insieme. Analogamente chiamiamo grandezza ogni intervallo temporale, perché certamente due intervalli temporali stanno nel rapporto seguente: o sono tra loro uguali o uno dei due contiene una parte che è uguale all'altro insieme. Una definizione più esaustiva di questo concetto, in cui dovranno essere determinati anche i componenti immediati a partire dai quali noi qui lo componiamo, sarà data più avanti.

§*2. Come concepisco quella Matematica che chiamo anche Teoria delle grandezze?*

Non c'è quasi nessuna scienza in cui talvolta il discorso non cada su un oggetto che si possa considerare come una grandezza, almeno nel significato più ampio definito sopra, e che sia considerato effettivamente come tale.

[...]

Da ciò deriva già che non sarebbe appropriato voler dividere tutte le scienze in quelle in cui talvolta si parla di grandezze e in quelle in cui non se ne parla mai; e inoltre ne deriva che sarebbe ancora meno appropriato voler riunire nel dominio di un'unica scienza tutte le verità in cui compare o è determinato il concetto di una grandezza. Ben altro sarebbe se invece noi separassimo solo le scienze in cui la maggior parte delle dottrine e le più importanti sono determinazioni di grandezza, e in particolare quelle scienze la cui correttezza può essere intesa solo per mezzo di ampie considerazioni che necessitano di una propria introduzione.

Siamo, credo, abituati da molto tempo a chiamare *matematiche* le scienze di quel genere, usando un termine derivato dalla lingua greca e al cui significato originario non pensiamo più. Poiché tutte le grandezze sono determinate da *numeri* — e la determinazione di esse è chiamata un *misurare* o *calcolare* — così tali scienze potrebbero essere chiamate, da chi pretendesse un termine tedesco,[31] o *Scienze delle grandezze* o *Scienze dei numeri* o ancora scienze *misuranti* o *calcolanti*. Se dunque non fosse contraria allo scopo la costruzione del concetto di una scienza che contenga solo come rami particolari le scienze sopra discusse (se cioè il dominio di una tale scienza non risultasse troppo esteso), allora io credo che tale scienza potrebbe essere correttamente e convenientemente chiamata *Matematica* o *Teoria delle grandezze* o *Scienza delle grandezze.*

Annotazione. Poiché la definizione consueta, quella che è stata data finora del concetto di matematica, non dice altro se non che essa è Scienza

[31] 'italiano' per chi legge [N.d.T.].

delle grandezze (**scientia quantorum**), spero che non si rimprovererà alla mia definizione di deviare troppo dal consueto. Tuttavia io mi devo giustificare perché *non* ho conservato *del tutto* le stesse espressioni. Si direbbe in modo del tutto corretto che la matematica è una Teoria delle grandezze, se gli oggetti che si considerano nelle diverse scienze matematiche fossero nel complesso grandezze e fossero oggetto di trattazione solo di tali scienze. Ma non è questo il caso: discipline matematiche molto importanti si occupano almeno in parte di oggetti che non sono grandezze, benché nella loro trattazione si applichino concetti di grandezza e di numero. Così, come è noto, l'oggetto della *Sintattica* (o *Teoria Combinatoria*) è l'indagine della domanda a quali e a quanti diversi collegamenti tra gli oggetti possa essere soggetto un insieme di oggetti. Qui è evidente che solo la seconda ma non la prima parte è domanda di un numero e dunque di una grandezza (in senso ampio). Il fatto che la Sintattica sia annoverata tra le scienze matematiche non deriva dal fatto che gli oggetti dei cui collegamenti ci si occupa in Sintattica debbano già essere grandezze in se stesse, come alcuni hanno sostenuto in modo decisamente falso, perché in effetti come elementi **a**, **b**, **c**... si potrebbe intendere qualunque cosa, anche mere proposizioni o rappresentazioni in sé. Ciò deriva unicamente dal fatto che, poiché noi dobbiamo nel complesso non solo indicare ma anche *contare* i collegamenti che hanno luogo tra le cose date, dobbiamo spesso fare considerazioni molto difficili per determinare tale numero. Anche la Teoria del tempo e la Teoria dello spazio sono una coppia di scienze matematiche e la seconda, che abitualmente è chiamata Geometria è una parte così vasta e importante della matematica che spesso il matematico è chiamato semplicemente *geometra*. Tuttavia né il tempo né lo spazio sono in se stesse una grandezza, o, se questo dovesse essere contestato, è certamente incontestabile che in entrambe le scienze noi consideriamo alcuni oggetti che non sono grandezze.

[...]

Se volessimo dunque definire la matematica come una mera Teoria delle grandezze, allora a rigore non dovremmo chiamare discipline matematiche né la Teoria dell'ordine (la Sintattica) né la Teoria del tempo né la Teoria dello spazio, cosa che sembrano aver compreso *Fischer* e *Krause* (nel loro libro *Lehrb. d. Combin. u. Arithm.*, Dresden, 1812), quando indicano come oggetto della matematica al posto del concetto di grandezza qualcosa di più ampio e cioè la proprietà di essere un tutto, per cui vogliono che la matematica sia conosciuta in tedesco anche con il nome di *Teoria della totalità* o di *Scienza della totalità*. In tal modo si può giustificare la Sintattica come una disciplina matematica, ma gli esempi che ho addotto sopra mostrano che non è un tutto l'oggetto che la matematica considera nelle sue due importanti discipline: Teoria del tempo e Teoria dello spazio. Si evitano tutte queste difficoltà con la seguente definizione: una scienza merita il nome di Matematica solo se una parte considerevole della sua teoria contiene determinazioni di grandezza tali che la loro correttezza possa essere compresa solo per mezzo di certe considerazioni sulla natura delle grandezze che hanno bisogno di una propria introduzione. Questa aggiunta apparirà sicuramente a molti altrettanto sconveniente quanto — non lo nascondo — apparve una volta anche a me, perché riconduce la differenza tra scienze matematiche e non matematiche ad un semplice più o meno. Non nego che questo sia un inconveniente, ma non vedo come lo si possa evitare senza determinare il concetto di Matematica in un modo che non devii troppo dall'uso linguistico universalmente vigente e che non produca alla fine più confusione che vantaggi.

[. . .]

In ogni caso questa mi pare la regola che i matematici più o meno consapevolmente hanno seguito quando hanno aumentato il numero delle discipline matematiche ora con questa ora con quella nuova scienza.

[. . .]

— Più di trent'anni fa io credetti, a dire il vero, di poter tracciare un confine più preciso tra le matematiche e le altre scienze attribuendo alla matematica tutte le verità nelle quali si parla non dell'esistenza attuale ma solo delle condizioni di *possibilità* dell'esistenza. Ma ho abbandonato questo pensiero quando mi sono accorto che non tutte le teorie matematiche si riferiscono solo a cose che sono attuali o che potrebbero avere attualità, vale a dire che hanno possibilità, e che invece per esempio le teorie dell'Aritmetica e della Sintattica hanno un'estensione molto più generale e valgono anche per oggetti che non possono mai divenire attuali, come ad esempio meri concetti e proposizioni in sé. — Se fosse fondata la teoria dell'intuizione pura di *Kant*, che con piccole variazioni è accettata ancora oggi da molte persone, ci sarebbe una parete divisoria ben determinata tra le scienze matematiche e tutte le restanti scienze di concetti puri e potremmo già servirci di questa differenza per definire le scienze matematiche stesse: dovremmo solo dire (come ha fatto Kant) che la matematica è una scienza razionale per costruzione dei concetti per mezzo di pure intuizioni. Ma tutto questo è una concezione alla quale io non posso aderire per le più importanti ragioni e al contrario della quale credo che — e spero di farlo vedere di fatto in questo libro — tutte le verità matematiche debbano e possano essere dimostrate da puri concetti se la loro esposizione deve meritare il nome di una vera e propria scienza. Ma di ciò dirò più ampiamente in seguito. Mentre ora passo sotto silenzio alcuni altri tentativi meno significativi di definire il concetto di matematica, voglio ancora accennare, in poche parole, ad una definizione che si incontra quasi altrettanto spesso di quella di cui abbiamo trattato in precedenza. Secondo questa definizione la Matematica dovrebbe essere una scienza che insegna a trovare da grandezze note altre grandezze che non sono note. Così il contenuto essenziale di tutte le scienze matematiche consisterebbe nella ricerca di grandezze incognite da condizioni note; tutte le altre proposizioni, e con esse un insieme di stupende verità che incontriamo nei più stimati manuali della nostra scienza potrebbero giustificare la loro presenza al più soltanto con il fatto che esse conducono a quelle regole svolgendo la funzione di *proposizioni ausiliarie* o di *premesse*. Così tutte le verità che noi spesso consideriamo così notevoli, e di cui tuttavia non vediamo come potrebbero aiutarci nel calcolo di grandezze incognite, potrebbero essere inserite solo a titolo di mere *proposizioni opportune* (di circostanza). Chi non percepisce da sé l'ingiustizia in queste concezioni?

§. *3. In quali singole scienze si divide il dominio della Teoria delle grandezze?*

Riassunto dei capoversi 1-8. La matematica è Teoria pura delle grandezze se considera le grandezze astraendo da tutte le altre loro proprietà che non appartengono all'essere grandezza (Großheit), è Teoria applicata delle grandezze se considera anche altre proprietà delle grandezze. Una scienza matematica è una Teoria particolare delle grandezze se considera solo grandezze di un genere particolare, come ad esempio la Teoria dello spazio, che si occupa solo di grandezze spaziali, mentre è una Teoria generale delle grandezze se comprende tutti i tipi di grandezze. Se una scienza è una Teoria applicata delle grandezze, essa è anche una Teoria particolare delle grandezze, ma non vale necessariamente il viceversa, perché ad esempio la Teoria delle grandezze infinite e infinitesime è particolare ma non applicata.
La Teoria delle grandezze comprende tra le teorie pure la Teoria dei numeri e tra le teorie applicate la Sintattica o Teoria combinatoria o Teoria dell'ordine, la Teoria della probabilità, la Teoria del tempo e la Teoria dello Spazio, la Teoria dell'anima o Psicologia, la Teoria dello spirito o Pneumatologia, la Teoria della quiete (equilibrio) e del movimento.
Tutte queste scienze sono scienze di puri concetti o perlomeno una parte delle loro verità contiene solo proposizioni concettuali della cui verità possiamo convincerci con giudizi puramente concettuali. Accanto alle teorie di puri concetti vi sono però anche altre teorie composte di proposizioni empiriche, cioè contenenti una qualche intuizione.

Nota 1* [cancellata interamente nel manoscritto per essere sostituita dalla successiva Nota 1]

Mi pare un'espressione sbagliata la definizione proposta da alcuni della Teoria *pura* o *generale* delle grandezze come di una scienza «che considera le grandezze *soltanto in generale*, in modo che rimanga indeterminato di quale *tipo* esse siano». Anche nella teoria generale delle grandezze si considerano particolari tipi di grandezze, ad esempio i numeri interi, frazionari, irrazionali e simili, tra cui perfino dei numeri affatto individuali come e, π e i numeri di Bernoulli. La denominazione *generale* si riferisce soltanto al fatto che noi in questa scienza consideriamo solo quei tipi di grandezze che non sono subordinate ad un singolo tipo di grandezza che occorra nelle Teorie *particolari* delle grandezze, ad esempio in Geometria, Meccanica, ecc., ma che al contrario appaiono nello stesso modo in parecchie di queste scienze. Così per esempio il concetto della grandezza (o numero) π è stato assunto nella Teoria generale delle grandezze, o piuttosto già nella Teoria dei numeri, perché si è osservato che esso trova applicazione non solo in geometria ma anche altrove, per esempio nella soluzione delle equazioni, ecc. La generalità che si attribuisce alle teorie che fanno parte della Teoria generale delle grandezze va assunta solo *in senso relativo*, solo in riferimento a quei particolari tipi di grandezze sui quali riposa la divisione delle Teorie particolari delle grandezze. La differenza essenziale in base alla quale la Teoria generale delle grandezze si differenzia già secondo il suo concetto da quelle Teorie applicate consiste unicamente nel fatto che nella prima le grandezze sono considerate soltanto **in abstracto** (secondo il loro esser grandezze), mentre nelle seconde le grandezze sono sempre considerate insieme a certe ulteriori proprietà che non riguardano affatto l'esser grandezze. Perciò la denominazione Teoria *pura* delle grandezze è in fondo proprio indovinata.

Nota 1. Le denominazioni *pura* e *applicata* non sono sempre assunte nel significato che io ho usato sopra. Certamente le ha assunte con lo stesso significato *Kästner* quando ha scritto che «la matematica *pura* separa la grandezza da tutte le altre proprietà delle cose, mentre la matematica applicata considera oltre alla grandezza anche altre proprietà delle cose in cui si trova la grandezza». Tuttavia Kästner mi sembra inconseguente quando subito dopo aggiunge: «Si può considerare la grandezza come un insieme di parti oppure si può contemporaneamente considerare il collegamento tra quelle parti; nella prima considerazione la grandezza è parte dell'aritmetica, nella seconda della geometria». E subito dopo: «Le teorie della matematica *pura* si lasciano ricondurre ad una delle due scienze nominate.» Non siamo giustificati ad obiettare a questa definizione che ove si consideri in una grandezza accanto all'insieme delle parti anche il tipo del collegamento fra di esse, si considera non solo la mera grandezza (esser grandezza), ma anche un'ulteriore proprietà? e che così la *Geometria* (se del resto la geometria ha origine in tal modo) non apparterrebbe più, secondo quella definizione, alla matematica pura ma a quella applicata? — Parecchi autori commettono lo stesso errore. Altri invece, come *Pasquich* (*Anfangsgr. d. Math.*, Wien, 1812), *Klügel* (nel dizionario), lo stesso *Ohm*, *Krug* (nel dizionario filosofico alla voce *Grössenlehre*), concepiscono la differenza tra matematica *pura* e *applicata* nel modo seguente: nella prima vogliono includere tutte le verità matematiche che consistono solo di *puri concetti* e che possono essere dimostrate senza alcun ricorso all'esperienza, mentre la parte *applicata* dovrebbe includere tutto il resto e cioè ciò che deve essere prodotto a partire dall'esperienza. Anch'io (come già si sa) considero una tale differenza fondata e rilevante, anzi io vorrei addirittura che si distinguesse ulteriormente tra il caso in cui le *dimostrazioni* di una proposizione mi sono fornite dall'esperienza e il caso in cui la proposizione stessa è *empirica*, ovvero contiene in sé una qualche intuizione. Tuttavia io trovo che le denominazioni puro e applicato siano inadeguate a questo scopo e chiamerei piuttosto una scienza che ha bisogno dell'esperienza una *Scienza empirica* o *Scienza di esperienza.*

7.7 H. Graßmann *Ausdehnungslehre 1844*, *Introduzione*

Traduciamo nel seguito l'Introduzione a *Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. I. Teil. Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre von Magnetismus und die Krystallonomie erläutert*, Verlag von Otto Wigand, Leipzig, 1844. Rist. della 2a edizione del 1877 con il titolo *Die Ausdehnungslehre von 1844 nach der Ausgabe von 1878* in H. Graßmann, *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*, vol. I.1.[32]

A. Deduzione del concetto di matematica pura[33]

1. La divisione più alta [obersten] di tutte le scienze è quella in scienze reali e formali: le prime raffigurano [abbilden] l'essere nel pensiero come qualcosa di indipendente che si para davanti al pensiero e hanno verità nella concordanza del pensiero con quell'essere; le seconde invece hanno per oggetto ciò che è posto dal pensiero stesso e hanno verità nella concordanza reciproca dei processi di pensiero.

Il pensare si ha solo in relazione ad un essere che si para davanti al pensiero e che per mezzo di esso è raffigurato; ma questo essere è nelle scienze reali un essere indipendente, che sussiste [bestehen] per sé al di fuori del pensiero, mentre nelle scienze formali è un essere posto dal pensiero stesso, che a sua volta si mette di fronte, in quanto essere, ad un secondo atto di pensiero. Se la verità in quanto tale riposa sulla concordanza del pensiero con l'essere, allora in particolare nelle scienze formali essa riposa sulla concordanza del secondo atto di pensiero con l'essere posto dal primo atto di pensiero, cioè sulla concordanza di entrambi gli atti di pensiero. Perciò nelle scienze formali la dimostrazione non oltrepassa il pensiero stesso entrando in un'altra sfera ma rimane ferma esclusivamente nella combinazione dei diversi atti di pensiero. Proprio per questo le scienze formali non possono iniziare da assiomi [Grundsätze], come fanno invece le scienze reali; a formare il loro fondamento sono invece le definizioni.[34]

[32]Cfr. Graßmann (1844).

[33]Cfr. Graßmann (1844), pp. 22-4.

[34]Se nelle scienze formali, come ad esempio nell'aritmetica, sono stati tuttavia introdotti degli assiomi, questo è da considerarsi un abuso, che si può spiegare solo con il corrispondente trattamento della geometria. Ritornerò su questo punto ancora una volta più tardi

2. Le scienze formali o considerano [betrachten] le leggi generali del pensiero o considerano il *particolare* posto dal pensiero: la prima la Dialettica (Logica),[35] la seconda la Matematica pura.

L'opposizione [Gegensatz] tra generale e particolare comporta la divisione delle scienze formali in Dialettica e Matematica. La prima è una scienza filosofica in quanto cerca l'unità in tutto il pensiero; la matematica invece ha la direzione opposta in quanto concepisce ogni cosa pensata [Gedachtes] singolarmente come un particolare [Besonderes].

3. La matematica pura è dunque la scienza dell'essere particolare in quanto divenuto [gewordenen] per mezzo del pensiero. Chiamiamo l'essere particolare inteso in questo senso una forma di pensiero [Denkform] o semplicemente una forma [Form]. Perciò la matematica pura è Teoria delle forme [Formenlehre].

Il nome Teoria delle grandezze [Grössenlehre] non è appropriato alla matematica nel suo complesso, perché non trova applicazione ad un ramo essenziale della matematica, e cioè alla Teoria combinatoria, e inoltre trova applicazione solo in senso improprio all'Aritmetica.[36] Al contrario l'espressione 'forma' sembra ancora troppo ampia e il nome 'forma di pensiero' più adatto. Ma la forma nel suo significato puro, facendo astrazione da tutto il contenuto reale, non è null'altro che la forma di pensiero e quindi l'espressione è appropriata.

Prima di passare alla divisione della Teoria delle forme, dobbiamo escluderne un ramo che è stato finora attribuito ingiustamente ad essa, e cioè la Geometria. Già dal concetto che abbiamo stabilito sopra è evidente che la geometria, come la meccanica, rimanda ad un essere reale [reales Sein]; e infatti per la geometria tale essere reale è lo spazio [Raum]: ed è chiaro che il concetto di spazio non può essere in alcun modo generato [erzeugt] dal pensiero, ma piuttosto si para sempre davanti ad esso come qualcosa che è dato [gegebenes]. Chi volesse sostenere il contrario, dovrebbe assumersi il compito di derivare la necessità delle tre dimensioni dello spazio dalle pure leggi del pensiero, un compito la cui soluzione si rivela subito impossibile.

---

e in modo più dettagliato. Qui basti aver mostrato la necessità dell'assenza di assiomi nelle scienze formali.

[35]La logica presenta un lato puramente matematico, che si può designare come logica formale e che è stata elaborata nel suo contenuto congiuntamente da mio fratello Robert e da me e che è stata esposta in forma appropriata da mio fratello nel secondo libro della sua *Formenlehre*, Stettin, 1872. [Nota aggiunta nell'edizione del 1877]

[36]Il concetto di grandezza [Grösse] è sostituito in aritmetica da quello di numero [Anzahl]; la lingua distingue infatti molto bene tra aumentare [vermehren] e diminuire [vermindern], che appartengono al numero, e ingrandire [vergrössern] e rimpicciolire [verkleinern], che appartengono alla grandezza.

Se qualcuno, pur concedendoci questo, volesse tuttavia per amore della geometria estendere anche ad essa il nome di matematica, noi potremmo certamente accettarlo, se anch'egli da parte sua [auf der andern Seite] ammettesse il nostro nome di Teoria delle forme o un qualche altro equivalente; tuttavia noi dovremmo segnalargli in anticipo che quel nome, poiché racchiude in sé le cose più diverse, sarà coll'andar del tempo rigettato come superfluo.

La posizione della Geometria rispetto alla Teoria delle forme dipende dalla relazione tra l'intuizione [Anschauung] dello spazio e il puro pensiero. Se anche noi dicessimo che l'intuizione dello spazio si para davanti al pensiero come qualcosa di dato indipendentemente, non avremmo con ciò ancora affermato che l'intuizione dello spazio ci deriva soltanto dalla osservazione delle cose spaziali; è invece un'intuizione fondamentale che ci è data insieme all'apertura [Geöffnetsein] dei nostri sensi al mondo sensibile e che ci è perciò è attaccata originariamente come il corpo all'anima. Lo stesso accade per il tempo e per il movimento, che è fondato sulle intuizioni del tempo e dello spazio; e perciò anche la Teoria pura del movimento (la Forometria) è stata annoverata a pari diritto della Geometria tra le scienze matematiche. Poiché dall'intuizione del movimento scaturisce per mezzo dell'opposizione tra causa ed effetto il concetto di forza in movimento, la Geometria, la Forometria e la Meccanica appaiono applicazioni della Teoria delle forme alle intuizioni fondamentali del mondo sensibile.

B. Deduzione del concetto di Teoria dell'estensione[37]

4. Ogni cosa che è divenuta per mezzo del pensiero (cfr. § 3) può esserlo in due modi, o per mezzo di un atto semplice di *generazione* [Erzeugen] o per mezzo di un duplice atto di *porre* [Setzen] e *connettere* [Verknüpfen]. Ciò che è divenuto nel primo modo è la *forma continua* [stetige Form] o la *grandezza* [Grösse] in senso stretto, ciò che è divenuto nel secondo modo è la *forma discreta* [diskrete] o forma *di connessione* [Verknüpfungsform].

Il concetto assolutamente semplice di divenire dà la forma continua. Ciò che nella forma discreta è posto prima della connessione è certo anch'esso posto dal pensiero, ma all'atto della connessione appare come dato e il modo in cui la forma discreta diviene da ciò che è dato è un semplice pensare insieme [Zusammendenken]. Il concetto del divenire continuo può essere concepito nel modo più semplice se lo si considera dapprima per analogia con la genesi di tipo discreto, che è più familiare [Entstehungsweise]. E cioè nella generazione continua è tenuto fermo [festgehalten] ciò che ogni volta è divenuto e ciò che nuovo si origina [neu entstehendes] già nel momento della sua genesi viene pensato insieme a ciò che è

[37]Cfr. Graßmann (1844), pp. 24-8.

divenuto. Dunque si può anche nel caso della forma continua, per analogia, distinguere in base al *concetto* [dem Begriffe nach] un duplice *atto* di porre [Setzen] e di connettere [Verknüpfen] ma entrambi sono riuniti in un unico atto e così combaciano in un'unità inseparabile. In altre parole dei due membri della connessione (se vogliamo tener ferma per un istante questa espressione per via dell'analogia) uno è ciò che già è divenuto mentre l'altro è quello che nuovo si origina nel momento stesso della connessione e perciò non è già completo [fertig] prima della connessione. Entrambi gli atti, di porre e connettere, si fondono talmente uno nell'altro che qualcosa non può essere connesso prima di essere posto né essere posto prima di essere connesso; o, tornando a parlare nel modo che conviene al continuo, ciò che nuovo si origina, si origina proprio solo su ciò che è già divenuto; così è un momento del divenire stesso ciò che qui appare nel suo ulteriore sviluppo come accrescimento [Wachsen].

L'opposizione tra continuo e discreto è (come ogni vera opposizione) fluttuante [fliessend], in quanto il discreto può essere anche considerato come continuo e viceversa il continuo come discreto. Il discreto è considerato come continuo se ciò che è connesso è esso stesso concepito, a sua volta, come divenuto e se l'atto del connettere è concepito come un momento del divenire [Moment des Werdens]. E il continuo è considerato come discreto se i singoli momenti del divenire sono concepiti come puri atti di connessione e se ciò che in tal modo è stato connesso è considerato come dato per la connessione.

5. Ogni particolare [Besonderes] diviene tale per mezzo del concetto di *differente*, con cui è coordinato [nebengeordnet] ad un altro particolare e per mezzo del concetto dell'*uguale*, con cui è subordinato [übergeordnet] insieme all'altro particolare allo stesso Generale. Possiamo chiamare forma *algebrica* [algebraische Form] ciò che è divenuto dall'uguale, *forma combinatoria* [kombinatorische Form] ciò che è divenuto dal differente.

L'opposizione dell'uguale e del differente è, analogamente, fluttuante. L'uguale è differente già in quanto l'uno è come separato [gesondert] dall'altro che è uguale ad esso (e senza questa separazione [Sonderung] sarebbe soltanto uno e dunque non uguale); il differente è uguale già in quanto entrambi sono connessi dall'attività che si riferisce ad entrambi, quindi entrambi sono una cosa connessa. Perciò i due membri non si confondono affatto l'uno nell'altro, in modo da dover applicare una misura con cui determinare quanto di uguale e quanto di differente è stato posto tra due rappresentazioni [Vorstellungen]; ma anche se il differente è già sempre attaccato in un qualche modo all'uguale e viceversa, tuttavia ogni volta solo uno forma il momento [Moment] che si considera, mentre l'altro appare solo come il fondamento, che si deve presupporre, del primo.

Per forma algebrica si intende qui non solo il numero [Zahl] ma anche ciò che corrisponde al numero nel dominio [Gebiet] del continuo e per forma combinatoria non si intende solo la combinazione [Kombination] ma anche ciò che ad essa corrisponde nel dominio del continuo.

6. Dall'intersecarsi di queste due opposizioni, di cui la prima si riferisce al tipo [Art] di generazione e la seconda agli elementi [Elemente] della generazione, risultano i quattro generi [Gattungen] di forme e i corrispondenti rami della Teoria delle forme. In primo luogo la forma discreta si separa in numero [Zahl] e combinazione [Kombination] (legamento [Gebinde]). *Numero* [Zahl] è la forma algebrica discreta, cioè l'unione di ciò che è posto come uguale; *combinazione* [Kombination] è la forma combinatoria discreta, cioè è l'unione di ciò che è posto come differente. Le scienze del discreto sono dunque la *Teoria dei numeri* e la *Teoria combinatoria* [Kombinationslehre] (Teoria del collegamento [Verbindungslehre]).

Non credo occorra alcuna prova ulteriore del fatto che in questo modo il concetto di numero, come quello di combinazione, è stato presentato in maniera esauriente ed è stato adeguatamente circoscritto. Poiché le opposizioni da cui sono derivate quelle definizioni sono le più semplici e sono date immediatamente nel concetto di forma matematica, la deduzione [Ableitung] precedente è stata giustificata a sufficienza.[38] Mi limito soltanto ad osservare ancora come questa opposizione tra le due forme sia espressa in modo del tutto preciso dalla differente designazione [Bezeichnung] dei loro elementi, in quanto ciò che è connesso a formare il numero è designato da uno ed uno stesso segno (1), mentre ciò che è connesso a formare la combinazione è designato con diversi segni (le lettere), peraltro del tutto arbitrarie. — Non c'è nemmeno bisogno di menzionare il fatto che ciascun insieme di cose [Menge von Dingen] (particolarità [Besonderheiten]) può essere concepito altrettanto bene come numero che come combinazione a seconda del differente modo di considerarlo.

7. Analogamente la forma continua [stetige Form] o grandezza [Grösse] si separa poi in forma algebrica continua o *grandezza intensiva* [intensive Grösse] e in forma combinatoria continua o *grandezza estensiva* [extensive Grösse]. La grandezza intensiva è ciò che è divenuto per mezzo della generazione dell'uguale; la grandezza estensiva o *estensione* [Ausdehnung] è ciò che è divenuto per mezzo della generazione del differente. La prima costituisce, in quanto grandezza variabile, il fondamento della Teoria delle funzioni [Funktionenlehre], del Calcolo differenziale e integrale [Differential- und Integral-

[38]Il concetto di numero e di combinazione è già stato sviluppato in modo del tutto simile diciassette anni fa in un trattato scritto da mio padre sul concetto di Teoria pura dei numeri e che è stato stampato nel programma del Ginnasio di Stettino nel 1827, senza però giungere a conoscenza di un più vasto pubblico.

Rechnung]; la seconda costituisce il fondamento della Teoria dell'estensione [Ausdehnungslehre].

Poiché il primo di questi due rami è di solito subordinato alla Teoria dei numeri come ad un ramo superiore, mentre il secondo appare ancora come un ramo sconosciuto, è necessario spiegare più in dettaglio questa considerazione, resa difficile dal concetto del fluire continuo.

Come nel numero risulta [hervortritt] l'unificazione [Einigung] e nella combinazione la separazione [Sonderung] di ciò che è pensato assieme, così anche nella grandezza intensiva risulta l'unificazione degli elementi, che certo secondo il loro concetto sono ancora separati, ma formano la grandezza intensiva solo nell'essere essenzialmente uguali fra loro; invece nella grandezza estensiva risulta la separazione degli elementi che sono certamente uniti, in quanto formano una grandezza, ma costituiscono tale grandezza proprio solo nella separazione [Trennung] reciproca. La grandezza intensiva è allora per così dire il numero divenuto fluente [flüssig] e la grandezza estensiva è per così dire la combinazione divenuta fluente. In quest'ultima grandezza è essenziale [wesentlich] la separazione [Auseinandertreten] degli elementi e un tener fermo [Festhalten] ciascuno di essi come qualcosa di separato [als aus einander seiender]; l'elemento generatore [das erzeugende Element] appare in essa come qualcosa che varia sempre, cioè che passa attraverso una diversità di stati e proprio la totalità dei diversi stati [Zustände] forma il dominio [Gebiet] della grandezza estesa [Ausdehnungsgröße].[39] Nella grandezza intensiva invece la generazione di essa produce una serie [Reihe] continua di stati uguali a se stessi, la cui quantità [Quantität] è proprio la grandezza intensiva. Come esempio di grandezza estensiva [extensive Größe] la cosa migliore è scegliere la linea limitata [die begrenzte Linie] (tratto [Strecke][40]) i cui elementi sono essenzialmente separati e proprio per questo costituiscono la linea come estensione. Come esempio di grandezza intensiva possiamo scegliere un qualche punto [Punkt] dotato di una certa forza [Kraft]: qui gli elementi non si alienano [sich entäussern] ma si presentano [sich darstellen] solo nell'accrescimento [Steigerung] formando così un determinato livello [Stufe] di accrescimento.

Anche in questo caso la differenza [Differenz] che abbiamo formulato si vede bene nella designazione; infatti nella grandezza intensiva che costituisce l'oggetto

[39]Traduciamo 'Ausdehnungsgröße' e 'Ausdehnungsform' rispettivamente con 'grandezza estesa' e 'forma estesa' anziché con grandezza estensiva, benché il significato sia pressoché lo stesso, per fedeltà al testo: Graßmann infatti usa anche l'espressione 'extensive Größe' (in questa stessa Introduzione, B, § 7), che ovviamente traduciamo con 'grandezza estensiva'. [NdT]

[40]Traduciamo 'Strecke', generalmente tradotto con segmento, con 'tratto' sia per mantenere una differenza rispetto alla sua applicazione geometrica sia perché il termine tedesco 'Strecke' significa propriamente 'tratto esteso', 'tratto percorso', cioè da un lato rinvia all'attività del tracciare un segmento, dall'altro rinvia al movimento da un punto ad un altro nello spazio: 'strecken' infatti ha in tedesco sia il significato transitivo di tracciare, estendere, distendere, sia il significato riflessivo di estendersi, allungarsi.

della Teoria delle funzioni non si distinguono gli elementi attraverso segni particolari [besondere] ma dove compaiono segni particolari si designa con ciò l'intera grandezza variabile [veränderliche]. Invece nella grandezza estesa [Ausdehnungsgröße] o nella sua presentazione [Darstellung] concreta, la linea, i diversi elementi sono designati con segni diversi (le lettere) proprio come nella Teoria combinatoria. Ed è anche chiaro come ciascuna grandezza reale [reale Größe] possa essere vista in un duplice modo, come intensiva e come estensiva; e cioè la linea è vista anch'essa come grandezza intensiva se non si tiene conto del modo in cui i suoi elementi sono separati [auseinander sind] e se si considera soltanto la quantità [Quantität] degli elementi; e analogamente un punto dotato di forza può essere pensato come grandezza estensiva se la forza è rappresentata sotto forma di linea.

Dei quattro rami della matematica storicamente si sono sviluppati il discreto prima del continuo (perché il discreto più del continuo è vicino all'intelletto analizzante [zergliedernd]), l'algebrico prima del combinatorio (poiché l'uguale è concepito più facilmente del differente). Perciò è sorta per prima la Teoria dei numeri, poi contemporaneamente la Teoria combinatoria e il Calcolo differenziale, e di tutte la Teoria dell'estensione nella sua forma astratta doveva essere l'ultima, anche se d'altra parte la sua raffigurazione [Abbild] concreta (benché limitata), la Teoria dello spazio [Raumlehre], appartiene già ai tempi più antichi.

8. Alla suddivisione della Teoria delle forme nei quattro rami citati si può far precedere una parte più generale, che possiamo chiamare Teoria generale delle forme [allgemeine Formenlehre], che presenta le leggi generali di connessione, cioè leggi applicabili allo stesso modo a tutti i rami.

Far precedere questa parte al tutto è essenziale perché così si risparmia la ripetizione delle stesse successioni deduttive [Schlussreihen] in tutti e quattro i rami e perfino nelle diverse sezioni di uno stesso ramo, abbreviando così lo sviluppo in maniera significativa; inoltre ciò che in base all'essenza è affine è presentato insieme e a fondamento del tutto.

C. Esposizione del concetto di Teoria dell'estensione[41]

9. Il divenire continuo, diviso nei suoi momenti, appare come un generarsi continuo tenendo fermo ciò che è già divenuto. Nella forma estesa [Ausdehnungsform] ciò che ogni volta nuovo si origina è posto come un differente; se noi in ciò non teniamo fermo ciò che ogni volta è divenuto, otteniamo il concetto della *variazione continua* [stetige Aenderung]. Chiamiamo elemento generatore [erzeugendes Element] ciò che è soggetto a [erfährt] questa variazione e chiamiamo elemento della forma [Form] continua l'elemento

[41]Cfr. Graßmann (1844), pp. 28-9.

generatore in uno qualunque degli stati [Zustände] che assume nella sua variazione. Dopo di ciò la forma estesa [Ausdehnungsform] è allora la totalità [Gesammtheit] degli elementi in cui passa [übergeht] l'elemento generatore in una variazione continua.

Il concetto della variazione continua dell'elemento può risultare [hervortreten] solo nella grandezza estesa [Ausdehnungsgröße]; nella grandezza intensiva abbandonando [bei Aufgebung] ciò che ogni volta è divenuto rimarrebbe soltanto un inizio [Ansatz] di divenire, qualcosa di completamente vuoto.

Nella Teoria dello spazio [Raumlehre] appare come elemento il punto, come sua variazione la variazione di luogo [Ortsänderung] o movimento [Bewegung], come suoi stati differenti le diverse posizioni [Lagen] del punto nello spazio.

10. Perché il generato sia determinato [ein bestimmtes], il differente [Verschiedenes] si deve sviluppare secondo una legge [Gesetze]. Nella forma *semplice* [einfache Form] questa legge deve essere la stessa per tutti i momenti del divenire. La forma estesa [Ausdehnungsform] semplice è allora una forma che ha origine da una variazione dell'elemento generatore secondo una stessa legge; chiamiamo *sistema* [System] o *dominio* [Gebiet] la totalità [Gesammtheit] di tutti gli elementi generabili [erzeugbaren] secondo una stessa legge.

Poiché ciò che è differente da qualcosa di dato può esserlo in un'infinità di modi, la differenza [Verschiedenheit] si perderebbe totalmente nell'indeterminato [Unbestimmte] se non fosse soggetta ad una legge fissa. Tuttavia nella Teoria pura delle forme [reine Formenlehre] questa legge non è però determinata da un qualche contenuto; il concetto dell'estensione è determinato invece dalla pura idea astratta del conforme a legge [Gesetzmässigen] e il concetto dell'estensione *semplice* dall'idea pura astratta di una stessa legge per tutti i momenti della variazione. In conseguenza di ciò l'estensione semplice ha la proprietà che se da un elemento a dell'estensione risulta [hervorgeht] un elemento b della stessa estensione, allora da b con lo stesso atto di variazione risulta [hervorgeht] un terzo elemento c di quella stessa estensione.

Nella Teoria dello spazio la legge che comprende [umfassende] le singole variazioni è l'uguaglianza [Gleichheit] di direzione [Richtung], all'estensione semplice corrispondono i segmenti di retta [propr. i tratti estesi (Strecke)], all'intero sistema corrisponde la linea retta infinita.[42]

11. Se si applicano due diverse leggi di variazione, la totalità degli elementi generabili per mezzo di entrambe le leggi forma un sistema di secondo livello

[42]Per uguaglianza di direzione si intenda qui la legge che prescrive che ogni singola variazione proceda sempre nella stessa direzione in cui ha avuto inizio. [NdT]

[Stufe]. Le leggi di variazione con cui gli elementi di questo sistema possono risultare gli uni dagli altri sono dipendenti [abhängig] da quelle prime due; se si aggiunge ancora una terza legge indipendente si ottiene un sistema di terzo livello e così via.

Come esempio potrebbe servire qui ancora una volta la Teoria dello spazio. In essa tutti gli elementi di un piano [Ebene] vengono generati da un elemento secondo due diverse direzioni in quanto l'elemento generatore avanza di quanto si vuole secondo le due direzioni, una dopo l'altra, e la totalità dei punti così generati (elementi) è concepita come una cosa sola. Il piano è allora il sistema di secondo livello; in esso è contenuto un insieme [Menge] infinito di direzioni che dipendono da quelle prime due. Se si aggiunge una terza direzione indipendente, per mezzo di essa viene generato l'intero spazio infinito (come sistema di terzo livello); e mentre nella Teoria dello spazio non si può andare oltre le tre direzioni indipendenti (leggi di variazione), nella Teoria pura dell'estensione invece il numero di direzioni può aumentare all'infinito.

12. La differenza delle leggi esige a sua volta, per poter essere determinata in modo preciso, un modo di generazione [Erzeugungsweise] per mezzo del quale un sistema passa [übergeht] nell'altro. Il passaggio [Uebergang] dei diversi sistemi l'uno nell'altro forma perciò un secondo naturale livello nel dominio della Teoria dell'estensione con cui è già terminato il dominio della presentazione [Darstellung] elementare di questa scienza.

A questo passaggio del sistema in un altro corrisponde nella Teoria dello spazio il movimento di rotazione [Schwenkungsbewegung] e a ciò sono collegate la grandezza degli angoli [Winkelgröße], la lunghezza assoluta [absolute Länge], la perpendicolarità [senkrechter Stand] ecc., tutte cose che saranno sviluppate soltanto nella seconda parte della *Ausdehnungslehre*.

D. Forma della presentazione [Darstellung][43]

13. Proprio del metodo filosofico è avanzare [fortschreiten] per opposizioni [in Gegensätzen] giungendo così dal generale al particolare; il metodo matematico al contrario avanza dai concetti più semplici ai più complessi ottenendo così per connessione [Verknüpfung] del particolare nuovi e più generali concetti.

Mentre nel metodo filosofico prevale la visione d'insieme del tutto e lo sviluppo consiste proprio nella continua [allmälig] ramificazione e articolazione del tutto, nel metodo matematico predomina la concatenazione reciproca [Aneinanderkettung]

[43]Cfr. Graßmann (1844), pp. 30-2.

tra i particolari e ogni successione di sviluppo [Entwicklungsreihe] in sé conchiusa forma tutta insieme, a sua volta, un membro della concatenazione [Verkettung] successiva; questa differenza di metodo risiede nel concetto: infatti nella filosofia è proprio l'unità dell'idea l'originario e la particolarità il derivato, mentre nella matematica la particolarità è l'originario e l'idea invece l'ultimo (ciò cui si tende), il che condiziona l'opposto [entgegensetzt] procedere.

14. Poiché sia la matematica sia la filosofia sono scienze in senso rigoroso, il metodo deve avere in entrambe qualcosa di comune e precisamente ciò che le rende scientifiche. Noi attribuiamo carattere scientifico ad un tipo di trattazione se per mezzo di esso il lettore da un lato è condotto con necessità al riconoscimento di ogni verità individuale, dall'altro è posto nella condizione, a ogni punto dello sviluppo, di avere una visione d'insieme della direzione del processo ulteriore.

Tutti ammettono l'indispensabilità della prima condizione e cioè quella del rigore scientifico. Per quanto riguarda la seconda, essa continua a costituire un aspetto che dalla maggior parte dei matematici non è ritenuto necessario. Si trovano [vorkommen] spesso dimostrazioni in cui all'inizio proprio non si potrebbe sapere dove dovrebbero condurre, se non fosse per la proposizione che sta all'inizio;[44] in tali dimostrazioni, dopo aver seguito per un po' di tempo ogni passo in avanti ciecamente e a casaccio, alla fine, quando uno meno se lo aspetta, si arriva improvvisamente alla verità da dimostrare. Una tale dimostrazione magari non lascia niente a desiderare dal punto di vista del rigore ma non è scientifica: ad essa manca il secondo requisito, la visione d'insieme [Uebersichtlichkeit]. Perciò chi segue una tale dimostrazione non ottiene una conoscenza libera della verità ma resta totalmente dipendente dal modo particolare in cui la verità è stata trovata, a meno che non si procuri da sé successivamente quello sguardo d'insieme [Ueberblick]; e questo sentimento di mancanza di libertà che in tal caso ha origine, almeno nel momento in cui il lettore è ricettivo, è il più opprimente per chi è abituato a pensare in modo libero e autonomo e ad appropriarsi di tutto ciò che riceve in modo spontaneo e vivo. Se al contrario il lettore a ogni punto dello sviluppo è posto in condizione di vedere dove va, egli rimane padrone della materia [Stoff], non è più legato alla particolare forma della presentazione [Darstellung] e l'assimilazione [Aneignung] diviene una vera riproduzione [Reproduktion].

15. A ogni punto dello sviluppo il tipo di sviluppo ulteriore è determinato essenzialmente da un'idea guida che è o nient'altro che un'analogia congetturale [vermuthete Analogie] con rami correlati e già noti del sapere o — e

[44] Presumibilmente l'enunciato della tesi del teorema da dimostrare. [NdT]

questo è il caso migliore — un presentimento [Ahnung] diretto della verità seguente da cercare.

Poiché fa entrare in gioco domini correlati, l'analogia è solo un ripiego, a meno che non si tratti proprio di dare rilievo in modo completo alla relazione con un ramo correlato e quindi di tracciare un'analogia continua con esso.[45] Il presentimento sembrerebbe estraneo al dominio della pura scienza e soprattutto a quello matematico. E tuttavia senza di esso è impensabile trovare una verità nuova; non ci si arriva per combinazione cieca dei risultati ottenuti; che cosa bisogna combinare, e in che modo, deve essere piuttosto determinato dall'idea guida e quest'idea a sua volta può apparire, prima di essersi realizzata attraverso la scienza stessa, solo nella forma di un presentimento. Perciò questo presentimento è qualcosa d'irrinunciabile nel dominio scientifico: è, se è del tipo giusto, un vedere insieme come un'unità [in eins zusammenschauen] l'intera successione dello sviluppo che conduce alla verità nuova — ma con i momenti dello sviluppo non ancora dispiegati — e perciò all'inizio è solo un oscuro presentire; il dispiegamento di quei momenti contiene nello stesso tempo la scoperta della verità e la critica di quel presentire.

16. Perciò la presentazione scientifica è secondo la sua essenza un intrecciarsi di due successioni di sviluppo, delle quali l'una conduce per conseguenza da una verità all'altra e forma il contenuto proprio, mentre l'altra governa il procedimento stesso e determina la forma. Nella matematica queste due successioni di sviluppo sono separate nel modo più netto.

È consuetudine in matematica già da molto tempo — Euclide stesso ne ha fornito il modello — lasciar apparire solo la successione di sviluppo che forma il contenuto proprio, mentre si lascia l'altra al lettore da leggere tra le righe. Per quanto possano essere compiuti l'ordinamento e la presentazione della prima successione di sviluppo, tuttavia in questo modo non si può esigere che chi deve imparare la scienza abbia già presente ad ogni punto dello sviluppo la visione d'insieme né si può metterlo in condizione di avanzare oltre in modo spontaneo e libero. A tal fine è necessario piuttosto che il lettore sia posto il più possibile nella condizione nella quale presumibilmente si trovava, nel caso più favorevole, lo scopritore della verità. In chi scopre la verità ha luogo una continua riflessione sull'andamento dello sviluppo e prende forma una peculiare successione di pensieri a proposito della via da imboccare e dell'idea che sta a fondamento del tutto; e questa successione di pensieri forma il contenuto proprio e lo spirito della sua attività, mentre il conseguente dispiegamento delle verità è soltanto l'incarnazione di quell'idea.

[45] Questo caso si presenta nella scienza da trattare qui in relazione alla geometria, ragion per cui ho per lo più preferito la via dell'analogia.

Voler pretendere dal lettore che egli, senza essere stato introdotto a questa successione di pensieri, tuttavia avanzi in modo autonomo sulla via della scoperta, significa porlo al di sopra dello scopritore stesso della verità e così capovolgere il rapporto tra il lettore e l'autore, per cui l'intera stesura dell'opera sembra inutile. Perciò alcuni matematici recenti, e in particolare i francesi, hanno iniziato a intrecciare entrambe le successioni di sviluppo. L'attrattiva che in questo modo le loro opere hanno guadagnato consiste nel fatto che il lettore si sente libero e non costretto in forme che non domina e dovrebbe pertanto seguire servilmente.

Che in matematica queste successione di sviluppo siano separate nel modo più netto dipende dalla peculiarità del metodo della matematica stessa (§ 13): poiché essa avanza per concatenazione partendo dal particolare, l'unità dell'idea è l'ultima cosa. Perciò la seconda successione di sviluppo ha un carattere diametralmente opposto a quello della prima e la compenetrazione delle due appare ancora più difficile che in qualunque altra scienza. A causa di questa difficoltà non si deve però, come fanno i matematici tedeschi, abbandonare e rinnegare l'intero procedimento.

Nell'opera presente ho perciò imboccato la strada cui si è fatto cenno e questo mi è sembrato tanto più necessario in una nuova scienza in quanto l'idea di essa deve essere messa in luce contemporaneamente all'inizio.

7.8 H. Graßmann *Ausdehnungslehre 1844*

Per rendere più facile la comprensione del contenuto dei primi due capitoli della *Ausdehnungslehre* del 1844, riportiamo in appendice, l'uno di seguito all'altro, i vari passi tradotti e commentati nel testo, in modo da dare un'idea generale (anche se inevitabilmente frammentaria e parziale) del contenuto dell'opera.

Capitolo I. Addizione e sottrazione di estensioni semplici di primo ordine o di segmenti.

A. Sviluppo teorico

§§ *13-14. La formazione estesa, il tratto e il sistema di primo livello*[46]

[13.1] Chiamiamo *variazione* [Änderung] il passaggio dell'elemento generatore da uno stato in un altro e questa variazione astratta dell'elemento generatore corrisponde alla variazione di posizione o al movimento del punto in geometria.

[13.2] *Per formazione estesa di primo livello [Ausdehnungsgebilde erster Stufe] intendiamo la totalità degli elementi in cui trapassa un elemento generatore per variazione continua*

e in particolare chiamiamo elemento iniziale l'elemento generatore nel suo primo stato e elemento finale l'elemento generatore nel suo ultimo stato.

Da ciò segue immediatamente che ad ogni formazione estesa appartiene una formazione opposta, che contiene gli stessi elementi, benché essi abbiano avuto origine nel modo contrario, in modo cioè che l'elemento iniziale dell'una sia l'elemento finale dell'altra.

[14.1] La formazione estesa appare come semplice solo quando le variazioni cui è soggetto l'elemento generatore possono essere sempre poste come uguali tra loro.

[14.2] Possiamo chiamare variazione fondamentale una variazione attraverso la quale da un elemento di una forma continua viene generato un elemento immediatamente contiguo e diremo inoltre: «la *formazione estesa semplice* è una formazione che risulta dal proseguire continuo di una stessa variazione fondamentale».

[46] Cfr. Graßmann (1844), pp. 46-49.

Nello stesso senso in cui le variazioni possono essere poste come uguali tra loro, noi potremo porre come uguali anche le formazioni generate per mezzo di esse, e in questo senso, cioè in quanto può essere a sua volta posto come uguale ciò che è generato nello stesso modo per mezzo di variazioni uguali, chiamiamo la formazione estesa semplice di primo livello una *grandezza estensiva* [Ausdehnungsgrösse] o una *estensione di primo livello* [Ausdehnung erster Stufe] o un *tratto*[47] [Strecke].

[14.3] La semplice formazione estesa diviene grandezza estesa quando astraiamo dagli elementi che la prima contiene e teniamo fermo soltanto il tipo della generazione [Art der Erzeugung]; e mentre due formazioni estese possono essere poste come uguali solo quando contengono gli stessi elementi, due grandezze estese possono essere poste come uguali già quando, pur senza contenere gli stessi elementi, sono generate nello stesso modo (cioè per mezzo delle stesse variazioni).

[14.4] Chiamiamo infine un *sistema*[48] (o un dominio) *di primo livello* la totalità di tutti gli elementi che sono generabili proseguendo una stessa variazione fondamentale e la sua opposta. I tratti che appartengono allo stesso sistema di primo livello sono allora tutti generati con il proseguire una stessa variazione fondamentale o con il proseguire variazioni opposte.

[14.5] L'uguaglianza del tipo di variazione è sostituita qui [in geometria] dall'uguaglianza di direzione; come sistema di primo livello si presenta perciò qui la linea retta infinita, come estensione semplice di primo livello la linea retta limitata. Ciò che là viene chiamato omogeneo [gleichartig] appare qui come parallelo, e il parallelismo presenta due aspetti, come parallelismo in uno stesso verso [Sinne] e come parallelismo nel verso opposto.[49]

[47] Il significato astratto di questa denominazione originariamente concreta non ha bisogno di alcuna giustificazione, poiché i nomi di ciò che è astratto hanno tutti originariamente un significato concreto.

[48] Ora preferisco l'espressione 'dominio' all'espressione 'sistema', che è usato molto spesso in un senso diverso. [N.d.A. aggiunta nella 2^a ed. del 1877]

[49] Questa differenza è così importante per la geometria che è un piccolo contributo alla semplificazione delle proposizioni e dimostrazioni geometriche il fissare questa differenza con denominazioni semplici: io proporrei a tale scopo le espressioni isoverso [gleichläufig] e antiverso [gegenläufig]. Il nome di tratto possiamo tenerlo fermo nel senso corrispondente anche per la geometria e dunque intendere per tratti uguali le linee limitate che hanno uguale direzione e lunghezza.

§ *15. Addizione e sottrazione di tratti estesi omogenei*[50]

[15.1] Quando la generazione continua del tratto è pensata come interrotta durante il suo procedere e poi come di nuovo proseguita, l'intero tratto appare come connessione di due tratti serrati l'uno all'altro in modo continuo [welche sich stetig aneinandereschliessen] e dei quali l'uno appare come proseguimento dell'altro. I due tratti che costituiscono i membri di questa connessione sono generati nello stesso verso (§ 8) e il risultato della connessione è il tratto che va dall'elemento iniziale del primo all'elemento finale del secondo, se i tratti sono disposti l'uno accanto all'altro in modo continuo, cioè se sono rappresentati in modo che l'elemento finale del primo sia allo stesso tempo l'elemento iniziale del secondo.

[15.2] Fino a qui abbiamo concepito il concetto di addizione in modo puramente formale, determinandolo per mezzo della validità di certe leggi di connessione. Questo concetto formale resta anche sempre l'unico generale. Tuttavia non è questo il modo in cui noi otteniamo questo concetto nei singoli rami della matematica. In essi si dà piuttosto un modo peculiare di connessione che proviene dalla generazione delle grandezze stesse: solo successivamente tale modo di connessione si presenta come addizione nel senso generale indicato sopra, poiché ad esso sono applicabili quelle leggi formali.

Se infatti consideriamo due grandezze (forme), che risultano proseguendo lo stesso modo di variazione e che chiamiamo ≪generate nello stesso verso [Sinn]≫, allora è chiaro come esse possano essere messe in una successione tale da formare insieme un tutto, mentre il loro reciproco contenuto, cioè le parti che entrambe contengono, vengono pensate insieme a formare un'unità, e questo tutto è pensato allora come generato contemporaneamente alle due grandezze e nello stesso verso.

[15.3] Abbiamo già dimostrato sopra (§ 8) che questa connessione, poiché rappresenta la riunione [Vereinigung] di grandezze generate nello stesso verso, deve essere concepita come addizione e la corrispondente connessione analitica come sottrazione e perciò per esse valgono tutte le leggi di questi tipi di connessione. Qui dobbiamo solo mostrare ancora quale peculiare significato acquista la grandezza negativa nel nostro dominio.

[15.4] *Se si connettono due tratti omogenei in modo continuo, cioè in modo che l'elemento finale del primo divenga l'elemento iniziale del secondo, allora il tratto che va dall'elemento iniziale del primo all'elemento finale del secondo è la loro somma;*

[50]Cfr. Graßmann (1844), pp. 49-51.

e designando tale connessione come somma, si esprime con ciò il fatto che tutte le leggi dell'addizione e della sottrazione sono valide per tale modo di connessione.

§ *16. Sistemi di livelli superiori*[51]

[16.1] Se ora, per ottenere le connessioni tra tratti non omogenei, io assumo dapprima due variazioni fondamentali non omogenee e faccio proseguire quanto si vuole un elemento secondo il primo modo di variazione (o il suo opposto) e poi l'elemento così variato secondo il secondo modo di variazione, allora io potrò così generare da un elemento un numero infinito di nuovi elementi e chiamo la totalità degli elementi che così si possono generare un sistema di secondo livello. Se inoltre assumo poi una terza variazione fondamentale che da quell'elemento iniziale non conduca più ad un elemento dello stesso sistema di secondo livello, e che io perciò designo come indipendente dalle prime due, e se faccio proseguire quanto si vuole un qualunque elemento di quel sistema di secondo livello secondo questo terzo modo di variazione (o il suo opposto), allora la totalità degli elementi che così si possono generare forma un sistema di terzo livello; e poiché a questo modo di generazione, secondo il suo concetto, non è posto alcun limite, io potrò proseguire in questo modo fino a sistemi di livello alto quanto si vuole.

[16.2] Qui è importante tener fermo che tutti gli elementi generati in questo modo non possono essere concepiti come già dati in qualche altro modo[52] ma solo come originariamente generati e che perciò essi, in quanto generati originariamente da variazioni diverse, appaiono tutti come diversi secondo il loro concetto. Al contrario è anche chiaro che, una volta che gli elementi sono stati generati, essi appaiono da quel momento in poi come dati ed è chiaro che non si può decidere della loro diversità o identità se non facendo riferimento alla generazione originaria.

§§*17-19. Addizione e sottrazione di tratti estesi non omogenei*[53]

[17.1] Se io ora faccio variare, per tornare al nostro compito, un elemento prima secondo un tratto a e poi l'elemento così ottenuto secondo il tratto b, allora il risultato totale delle due variazioni può essere insieme concepito come il risultato di una variazione che è la connessione delle prime due e che, se i due tratti fossereo omogenei, apparirebbe come la loro somma (§15).

[51]Cfr. Graßmann (1844), pp. 51-3.

[52]Ad esempio nella Teoria dello spazio tutti i punti sono già dati originariamente per mezzo dello spazio presupposto.

[53]Cfr. Graßmann (1844), pp. 53-60.

[17.2] ... da ciò segue non solo che un tratto, quando tutti i suoi elementi sono soggetti ad una uguale variazione, resta un tratto, ma inoltre che, se si è mostrato già solo per la variazione fondamentale che essa rimane uguale in quel proseguimento del tratto, lo stesso vale allora anche per l'intero tratto.

[17.3] ... perciò stabiliamo che quando in un sistema di livello m un tratto che appartiene ad uno dei precedenti m modi di variazione che determinano il sistema è sottoposto ad una delle variazioni successive (e in particolare tutti gli elementi allo stesso modo di variazione), allora le variazioni fondamentali corrispondenti nel tratto originariamente dato e nel tratto che ha avuto origine da quelle variazioni devono essere poste come uguali.

[17.4] La deduzione, per mezzo della quale noi siamo giunti a questa definizione di uguale variazione, appartiene a quella serie di sviluppo (Introduzione, § 16) che dovrebbe fornire una visione d'insieme. Per la serie di sviluppo matematica essa appare, come in generale ogni definizione, puramente arbitraria.

[17.5] Se $[\alpha\beta]$ e $[\beta\gamma]$ rappresentano variazioni qualunque, allora si ha che:

$$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$$

[18.1] Nello sviluppo dell'ultimo paragrafo avevamo considerato le variazioni originate per connessione solo in riferimento al loro elemento iniziale e finale, senza considerare i tratti che le uniscono; per contro risultavano come tratti soltanto quelli che appartenevano ai tipi originari di variazione del sistema. Per completare ciò che manca, dobbiamo mostrare in che modo per mezzo di due elementi in un dominio di livello superiore sono determinati tutti gli elementi restanti che giacciono con questi due in un sistema di primo livello.

[18.2] Dopo aver mostrato come di fatto per mezzo di due elementi possa essere stabilito uno e un solo sistema di primo livello, ora si è così eliminata la mancanza cui si era accennato all'inizio di questo paragrafo: per quanto riguarda i tratti che dovrebbero apparire come somma di due tratti, non sono determinati soltanto l'elemento iniziale e finale, ma è determinato l'intero tratto con tutti i suoi elementi. Il concetto di somma è perciò determinato non solo per le variazioni, ma anche per i tratti stessi. Se dunque $[\alpha\beta], [\beta\gamma], [\alpha\gamma]$ sono tratti generati secondo il principio sopra sviluppato, allora si ha sempre in generale

$$[\alpha\gamma] = [\alpha\beta] + [\beta\gamma]$$

cioè
se si uniscono in modo continuo due o più tratti, allora il tratto dall'elemento iniziale del primo all'elemento finale del secondo è la loro somma.

Se ora applichiamo questo concetto di somma al concetto di indipendenza, come lo abbiamo presentato nel § 16, ne risulta che una variazione è dipendente dalle altre, se i tratti che appartengono alla prima si possono rappresentare come somme di tratti che appartengono alle altre, mentre è indipendente da esse in caso contrario.

[19.1] Dati due tratti, se si varia un qualunque elemento di una parte del primo tratto e poi (proseguendo) della corrispondente parte del secondo tratto, allora la totalità degli elementi così generati è la somma di quei due tratti.

[19.2] Se tutti gli elementi di un tratto variano altrettanto [gleich viel], allora il tratto che ne risulta resta uguale a quello dato.

§ *20. Indipendenza dei sistemi di livelli superiori*[54]

[20.1] Possiamo eliminare questa dipendenza [dai tipi di variazione con cui il sistema è stato generato] solo se possiamo mostrare che lo stesso sistema di livello m può essere generato da m modi qualunque di variazione che gli appartengono e che sono indipendenti (nel senso del § 16), cioè che non possono essere contenuti in un sistema di livello inferiore a m.

Io voglio dapprima mostrare che, se il sistema è generabile da certi m tipi di variazione, posso introdurre al posto di uno qualunque di essi un nuovo modo di variazione p indipendente dai restanti $m-1$ modi e appartenente allo stesso sistema di livello m e per mezzo di p e dei restanti $m-1$ modi di variazione posso generare il sistema dato.

E poiché questo procedimento può essere proseguito, segue che si può generare lo stesso sistema per mezzo di m modi indipendenti qualunque di variazione del sistema o

ogni tratto di un sistema di livello m può essere rappresentato come somma di m tratti che appartengono ad m modi di variazione dati indipendenti ma anche ogni volta in un solo modo.

Reso con ciò il sistema indipendente dalla scelta degli m modi indipendenti di variazione, dobbiamo ancora renderlo indipendente dall'elemento iniziale.

[20.2] Ogni sistema di livello m può essere pensato come generato da m modi di variazione indipendenti qualunque del sistema da un qualunque

[54]Cfr. Graßmann (1844), pp. 61-3.

elemento del sistema stesso, cioè da un tale elemento possono essere generati tutti gli altri elementi con quei modi di variazione.

B. Applicazioni

§ *21 Inammissibilità dei fondamenti tradizionali della geometria e tentativo di una nuova fondazione*[55]

[21.1]

Passo ora a trattare delle applicazioni, dapprima soprattutto alla geometria, ma prima ancora voglio tentare di delineare almeno per accenni un inizio puramente scientifico della geometria stessa e in particolare in modo indipendente dalla nostra scienza, così che la concordanza o la divergenza nell'andamento delle due discipline possa essere meglio rilevata. Io affermo cioè che la geometria manca ancora sempre di un inizio scientifico e che i fondamenti per l'intero edificio della geometria hanno finora sofferto di un difetto che rende necessaria una totale ricostruzione della geometria. Se io avanzo una tale tesi che minaccia di sovvertire una costruzione consacrata da millenni, non posso esimermi dal giustificare tale tesi con ragioni assolutamente decisive.

[21.2]

Il difetto di cui io voglio provare la presenza è riconoscibile nel modo più chiaro nel concetto di piano. Per come è definito nei lavori di geometria a me noti, il concetto di piano è fondato sulla premessa che una linea retta che ha due punti in comune con il piano giaccia interamente in esso; talvolta si assume questo fatto tacitamente (così avviene in Euclide), talvolta lo si introduce nella definizione del piano, talvolta infine lo si enuncia come un particolare assioma. Se il primo modo di procedere si rivela subito non scientifico, neppure il secondo, come mostrerò tra poco, può avanzare pretese di scientificità. Perché è chiaro che il piano è già determinato [bestimmt], o come totalità delle parallele che possono essere tracciate da una retta in una direzione non contenuta in essa, o come totalità delle rette che possono essere tracciate da un punto su una retta.

[21.3]

Teniamo ferma ad esempio la prima determinazione del piano [come totalità delle parallele che possono essere tracciate da una retta in una direzione non contenuta in essa]; allora è chiaro che si deve dapprima dimostrare che ogni linea retta che taglia due di queste parallele deve tagliare anche tutte le restanti parallele, ma questa proposizione non può essere dimostrata senza

[55] Cfr. Graßmann (1844), pp. 63-5.

una serie di proposizioni ausiliarie. Se ora si definisce [definirt man] il piano come superficie che contiene interamente tutte le linee rette che hanno due punti in comune con esso, è evidente che così, nascosta nella definizione, la proposizione succitata è introdotta surrettiziamente nel dominio della geometria. Come un matematico non accetterebbe che, definendo il parallelogramma come un quadriangolo con i lati opposti uguali e paralleli, si volesse evitare la dimostrazione della proposizione che in un parallelogramma i lati opposti hanno uguale lunghezza, così non si può accettare che grazie a quella definizione di piano la proposizione succitata sia introdotta in geometria in modo illegittimo. Se si vuole mantenere l'andamento tradizionale della geometria non resta che trasformare quella proposizione in un assioma. Ma se un assioma può essere evitato senza che un nuovo assioma debba essere introdotto, allora ciò deve avvenire, anche a costo di una completa trasformazione dell'intera scienza: evitando tale assioma, infatti, la scienza guadagna necessariamente, conformemente alla propria essenza, in semplicità.

[21.4]
Se ora da questo difetto, che speriamo di aver dimostrato [. . .], torniamo indietro a cercarne le cause, scopriamo che esse risiedono in una concezione manchevole degli assiomi geometrici.

[21.5]
Innanzitutto si deve notare come accanto ad assiomi reali, che esprimono intuizioni geometriche, spesso sotto lo stesso nome sono introdotte proposizioni del tutto astratte, ad esempio «se due grandezze sono uguali ad una terza, allora sono uguali l'una all'altra», e come esse non meritino affatto questo nome, se si intendono per assiomi delle verità presupposte. Infatti io credo di aver dimostrato sopra (§1), che la proposizione astratta così introdotta esprime soltanto il concetto di uguaglianza e lo stesso si può dire delle restanti proposizioni astratte che si possono essenzialmente ricondurre al fatto che cose generate nello stesso modo da cose uguali sono uguali. In verità questo rimprovero di confondere gli assiomi e i concetti presupposti non può essere mosso a Euclide, che accolse i primi tra i suoi postulati (αἰτήματα) e scelse i secondi come nozioni comuni (κοιναὶ ἔννοιαι). Questo procedimento non fu più compreso già dai commentatori di Euclide e ha trovato, con danno per la scienza, poco seguito anche tra i matematici recenti. In verità le discipline astratte della matematica non conoscono alcun assioma; al contrario la prima dimostrazione avviene in esse per concatenazione di definizioni, in quanto non si fa uso di alcun altra legge di avanzamento se non della legge logica generale, secondo la quale ciò che è asserito di una serie di cose nel senso che esso deve valere per ciascuna singola cosa, può essere asserito effet-

tivamente di ciascuna singola cosa che appartiene a quella serie. E a nessun matematico verrebbe mai in mente di assumere tra gli assiomi (come avviene erroneamente in logica), se non addirittura di dimostrare, questa legge di avanzamento [Fortschreitungsgesetz] che, come si vede, contiene solo una riflessione su ciò che si è voluto dire con una proposizione generale.

7.9 H. Graßmann *Ausdehnungslehre 1862*

Traduciamo nel seguito una parte dell'Introduzione dedicata al concetto di grandezza e i primi due paragrafi del primo capitolo della prima sezione della *Ausdehnungslehre* del 1862, che presenta la teoria delle grandezze estensive in forma euclidea. Sono stati tradotti integralmente gli enunciati dei teoremi (di cui sono state omesse però tutte le dimostrazioni) e delle definizioni (il segno [...] indica però che sono state omesse delle annotazioni).

Introduzione[56]

Può apparire sorprendente che un'idea così semplice debba evolversi di fatto in una nuova scienza, un'idea che non consiste in niente altro che nel trattare come grandezza autonoma una somma multipla [Vielfachensumme] di grandezze diverse (che appare di qui in poi come grandezza estensiva). Richiamandosi a ciò, qualcuno mi ha mosso l'obiezione che l'intera teoria dell'estensione sia solo una notazione abbreviata, addirittura che è errato trattare come grandezze delle espressioni che non sono affatto grandezze. Ma questa obiezione riposa su un totale misconoscimento dell'essenza della matematica e delle grandezze. In questo modo l'intera aritmetica, anzi si potrebbe dire l'intera matematica pura sarebbe solo una notazione abbreviata, giacché il numero è solo una espressione abbreviata per una somma di unità, il prodotto per una somma di numeri uguali, la potenza per un prodotto di tali numeri, e così via; invece senza questa notazione abbreviata o, per esprimersi più correttamente, senza questa riunione in un'unità del concetto non sarebbe pensabile nessun progresso. Per esempio senza questa riunione non sarebbe possibile ottenere il concetto dei modi di calcolo per eliminazione (sottrarre, dividere, estrarre la radice, calcolare il logaritmo) e le nuove forme numeriche che si sono sviluppate per mezzo di essi: numeri negativi, razionali, irrazionali, immaginari. Ciò che conta è in tutti i casi riunire veramente ciò che secondo la sua essenza forma un'unità e che perciò deve anche condurre a nuovi risultati che non si otterrebbero senza quella riunione.

La Teoria dell'estensione conduce ora di fatto ad una ricchezza inesauribile di tali relazioni, le quali non sarebbero in alcun modo concepibili né derivabili senza la formazione di quell'unità concettuale che appare nella

[56]Cfr. *Ausdehnungslehre* 1862, in Graßmann (1862), pp. 5-6.

grandezza estensiva. Il volere o meno concedere a questo concetto il nome di grandezza ha in sé e per sé un significato molto subordinato perché qui il nome conta poco. La domanda è se questo nuovo concetto sia realmente così connesso con il concetto generale di grandezza che tali concetti secondo la propria essenza si riuniscono in un solo concetto che li comprende entrambi [Gesamtbegriff] e che tracciando una linea di confine tra i due ambiti si separerebbe arbitrariamente e contraddittoriamente ciò che deve stare insieme. Se quest'ultimo è il caso, sarebbe addirittura erroneo non attribuire a questo nuovo concetto il nome di grandezza.

In realtà io credo che tra ciò che io ho chiamato grandezza estensiva e le grandezze numeriche generali e specialmente la grandezza immaginaria $(a+bi)$ vi sia una relazione così intima che sarebbe assurdo considerare l'una come grandezza e l'altra no, proprio perché di fatto la grandezza immaginaria è derivabile da due unità 1 e $i=\sqrt{-1}$ per mezzo di coefficienti numerici reali proprio come le grandezze estensive sono derivabili da due o più unità (cfr. l'annotazione al § 413). Così mi pare allora del tutto giustificato chiamare *grandezza* la grandezza estensiva. E non mi fermo qui, in quanto non solo la chiamo grandezza in generale, ma anche grandezza *semplice* [einfach]. Ad essa si contrappongono infatti altre grandezze che hanno un carattere di grandezze composte così marcato come quello che le prime hanno di grandezze semplici e che fanno la loro comparsa solo per addizione di formazioni superiori e in particolare con la trattazione dei quozienti e delle funzioni (cfr. i §§ 77, 377 e 364).

Capitolo 1. Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione di grandezze estensive

§ *1. Concetti e leggi di calcolo.*[57]

[G-1]. *Definizione.* Io dico che una grandezza a è *derivata* dalle grandezze $b, c, \ldots$ per mezzo dei numeri $\beta, \gamma, \ldots$ se

$$a=\beta b+\gamma c+\ldots$$

ove $\beta, \gamma, \ldots$ sono numeri reali qualsiasi (non importa se razionali, irrazionali, nulli, diversi da zero). Dico anche che in questo caso a è *numericamente derivato* [numerisch abgeleitet] da $b, c, \ldots$

[G-2]. *Definizione.* Dico inoltre che due o più grandezze $a, b, c, \ldots$ stanno in una *relazione numerica* reciproca [in einer Zahlbeziehung zu einander

[57] Cfr. *Ausdehnungslehre* 1862, in Graßmann (1862), pp. 11-16.

stehen], o che la riunione delle grandezze $a, b, c, \dots$ soggiace ad una relazione numerica, se una di esse è derivabile numericamente dalle altre, cioè ad esempio se vale

$$a = \beta b + \gamma c + \dots$$

ove $\beta, \gamma, \dots$ sono numeri reali. Se la riunione è composta da una sola grandezza a, la riunione soggiace ad una relazione numerica soltanto nel caso in cui $a = 0$. Se *due* grandezze non nulle stanno in una relazione numerica reciproca, le indico con $a \equiv b$ e dico che a è *congruente* a b.

[...]

[G-3]. *Definizione. Unità* [Einheit] chiamo quella grandezza che serve a derivare numericamente una serie di grandezze e la chiamo unità *originaria* [ursprünglich], se essa non è a sua volta derivata da un'altra unità. Chiamo unità *assoluta* l'unità dei numeri, cioè l'uno, e chiamo unità *relative* tutte le altre. Lo zero non può mai fungere da unità.

[G-4]. *Definizione.* Chiamo *sistema di unità* [System von Einheiten] una riunione di grandezze che non stanno in relazione numerica reciproca e che serve a derivare altre grandezze da tali unità per mezzo di numeri qualsiasi.

[...]

[G-5]. *Definizione.* Chiamo *grandezza estensiva* [extensive Grösse] ogni espressione derivata da un sistema di unità (che non sia però limitato alla unità assoluta) per mezzo di numeri che chiamo *numeri di derivazione* [Ableitungszahlen] delle unità per quella grandezza; ad esempio il polinomio

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots,$$

oppure

$$\sum \alpha e \quad \text{oppure} \quad \sum \alpha_r e_r,$$

ove α_1, $\alpha_2, \dots$ sono numeri reali e $e_1, e_2, \dots$ formano un sistema di unità, è una grandezza estensiva, e precisamente la grandezza derivata dalle unità $e_1, e_2, \dots$ per mezzo dei numeri α_1, $\alpha_2, \dots$. Se il sistema consiste solo dell'unità assoluta, le grandezza derivata non è una grandezza *estensiva* ma una grandezza numerica [Zahlgrösse]. Manterrò l'espressione *grandezza* in generale [Grösse überhaupt] solo per questi due generi di grandezze. Quando la grandezza estensiva può essere derivata dalle *unità originarie*, la chiamo una grandezza estensiva di primo livello [erster Stufe].

[...]

[G-6]. *Definizione. Addizionare* [addiren] due grandezze estensive che sono derivate dallo stesso sistema di unità significa addizionare i numeri di derivazione che appartengono alle stesse unità, cioè:

$$\sum \alpha e + \sum \beta e = \sum (\alpha + \beta) e.$$

[G-7]. *Definizione. Sottrarre* [subtrahiren] una grandezza estensiva da un'altra derivata dallo stesso sistema di unità significa sottrarre i numeri di derivazione appartenenti alla stessa unità della prima da quelli della seconda, cioè:

$$\sum \alpha e - \sum \beta e = \sum (\alpha - \beta) e.$$

[...]

[G-8]. [*Teorema*] Per le grandezze estensive a, b, c valgono le seguenti formule fondamentali:
1) $a + b = b + a$,
2) $a + (b + c) = a + b + c$,
3) $a + b - b = a$,
4) $a - b + b = a$.

[G-9]. [*Teorema*] Per le grandezze estensive valgono tutte le leggi dell'addizione e della sottrazione algebrica.

[G-10]. *Definizione. Moltiplicare* [multipliciren] una grandezza estensiva per un numero significa moltiplicare tutti i suoi numeri di derivazione per quel numero, cioè:

$$\sum \alpha e . \beta = \beta . \sum \alpha e = \sum (\alpha\beta) e.$$

[G-11]. *Definizione. Dividere* [multipliciren] una grandezza estensiva per un numero diverso da zero significa dividere tutti i suoi numeri di derivazione per quel numero, cioè:

$$\sum \alpha e : \beta = \sum \frac{\alpha}{\beta} e.$$

[G-12]. [*Teorema*] Per la moltiplicazione e la divisione di grandezze estensive (a, b) per i numeri (β, γ) valgono le formule fondamentali:
1) $a\beta = \beta a$,

2) $a\beta\gamma = a(\beta\gamma)$,
3) $(a+b)\gamma = a\gamma + b\gamma$,
4) $a(\beta+\gamma) = a\beta + a\gamma$,
5) $a.1 = a$,
6) $a\beta = 0$ se o $a = 0$ o $\beta = 0$,
7) $a : \beta = a\frac{1}{\beta}$ se $\beta \neq 0$.

[G-13]. [*Teorema*] Per la moltiplicazione e la divisione di grandezze estensive per numeri valgono le leggi algebriche della moltiplicazione e della divisione.

§ 2. Nesso tra le grandezze derivabili da un sistema di unità.[58]

[G-14]. *Definizione.* Chiamo la totalità delle grandezze numericamente derivabili da una serie di grandezze $a_1, a_2, \ldots, a_n$ il *dominio* [Gebiet] derivabile da quelle grandezze (il dominio delle grandezze $a_1, a_2, \ldots, a_n$) e in particolare lo chiamo un *dominio di livello n* [n-ter Stufe] se quelle grandezze sono di primo livello (cioè derivabili numericamente da n unità originarie) e *se il dominio non può essere derivato da meno di n tali grandezze.* Un dominio che non contiene alcuna grandezza oltre allo zero lo chiamo dominio di livello nullo.

[...]

[G-15]. *Definizione.* Due domini si dicono *identici* [identisch] se ciascuna grandezza del primo dominio è insieme una grandezza del secondo e viceversa. Se ogni grandezza di un dominio (A) è anche grandezza di un dominio (B) (senza che il contrario abbia necessariamente luogo), allora chiamo i due domini *incidenti* [incident] e dico anche che il primo dominio (A) è *subordinato* [untergeordnet] al secondo e che il secondo è *sovraordinato* [übergeordnet] al primo. La totalità delle grandezze che appartengono contemporaneamente a due o più domini si chiama il loro dominio *comune* [gemeinschaftliches Gebiet] e la totalità delle grandezze che si lasciano derivare dalle grandezze di due o più domini si chiama il loro dominio *congiunto* [verbindendes Gebiet].

Annotazione. Se ad esempio il dominio A è derivato dalle unità e_1, e_2, e_3 e il dominio B dalle unità e_2, e_3, e_4, il dominio comune ad A e a B è quello derivato dalle unità e_2, e_3, mentre il dominio congiunto di A e di B è il dominio derivato dalle unità e_1, e_2, e_3, e_4.

[58]Cfr. *Ausdehnungslehre* 1862, in Graßmann (1862), pp. 16-23.

[G-16]. [*Teorema*] Tra le grandezze $a_1, \ldots, a_n$ si ha una relazione numerica se e soltanto se si dà l'uguaglianza

$$\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$$

in cui i numeri $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ non sono tutti nulli.

[G-17]. [*Teorema*] Se n grandezze stanno in relazione numerica reciproca, e non sono tutte nulle, allora da esse si può separare una riunione di meno di n grandezze che non stanno in relazione numerica reciproca e dalle quali sono derivabili numericamente le restanti grandezze.

[G-18]. [*Teorema*] Se in una riunione di grandezze $a_1, \ldots, a_n$ la prima grandezza a_1 non è nulla, e nessuna delle seguenti si può derivare numericamente dalle precedenti, allora la riunione non soggiace ad alcuna relazione numerica.

[G-19]. [*Teorema*] Se una grandezza a_1 è numericamente derivabile da n grandezze $b_1, b_2, \ldots, b_n$ e il numero di derivazione di b_1 è diverso da zero, allora il dominio derivabile dalle n grandezze $b_1, b_2, \ldots, b_n$ è identico a quello derivabile dalle n grandezze $a_1, b_2, \ldots, b_n$.

[G-20]. [*Teorema*] Se m grandezze $a_1, \ldots, a_m$ che non stanno in relazione numerica reciproca sono derivabili numericamente da n grandezze $b_1, \ldots, b_n$, allora alle m grandezze $a_1, \ldots, a_m$ si possono sempre aggiungere $(n-m)$ grandezze $a_{m+1}, \ldots, a_n$ in modo che anche le grandezze $b_1, \ldots, b_n$ siano derivabili numericamente da $a_1, \ldots, a_n$ e allora il dominio delle grandezze $a_1, \ldots, a_n$ è identico al dominio delle grandezze $b_1, \ldots, b_n$; si possono anche sottrarre le $(n-m)$ grandezze dalle grandezze $b_1, \ldots, b_n$.

[G-21]. [*Teorema*] Se le grandezze $(a_1, \ldots, a_n)$ che non stanno in relazione numerica reciproca sono numericamente derivabili da n altre grandezze $(b_1, \ldots, b_n)$, allora il dominio della prima serie di grandezze è identico al dominio della seconda serie di grandezze.

[G-22]. [*Teorema*] Se n grandezze $(a_1, \ldots, a_n)$ sono numericamente derivabili da meno di n grandezze $(b_1, \ldots, b_m)$, allora quelle n grandezze stanno sempre in relazione numerica reciproca.

[G-23]. [*Teorema*] Se un dominio di livello n è derivabile da n grandezze di primo livello, allora queste grandezze non stanno in relazione numerica reciproca e viceversa: se n grandezze di primo livello non stanno in relazione numerica reciproca, allora il dominio derivabile da esse è un dominio di livello n.

[G-24]. [*Teorema*] Ogni dominio di livello n può essere derivato da n grandezze che gli appartengono e che non stanno in relazione numerica reciproca e precisamente da n grandezze qualsiasi (di tal tipo e appartenenti al dominio).

[G-25]. [*Teorema*] La somma dei numeri dei livelli di due domini è grande quanto la somma dei numeri dei livelli del loro dominio comune e del loro dominio congiunto, cioè, se m e n sono i numeri dei livelli dei domini dati, r il numero del livello del dominio comune e v il numero del livello del dominio congiunto, allora

$$m + n = r + v.$$

[G-26]. [*Teorema*] Due domini (A e B) che sono rispettivamente di livello α e β e che giacciono in un dominio di livello n, hanno, se $\alpha + \beta > n$, un dominio comune che ha almeno livello $(\alpha + \beta - n)$.

[...]

Annotazione. Le proposizioni sviluppate sino a qui si trovano già, anche se perlopiù in altre forme, nella mia prima elaborazione della Teoria dell'estensione del 1844, e precisamente le proposizioni 19 e 24 sono contenute proprio nella forma corrispondente nel § 20 di quell'opera, la proposizione 25 nel § 126 e anche l'idea della dimostrazione per queste proposizioni è la stessa in quest'opera e in quella del 1862.

7.10 G. Peano *Calcolo geometrico*

Nel seguito riportiamo alcuni passi della introduzione e la parte iniziale del Capitolo IX dell'opera di Giuseppe Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann*, Bocca, Torino, 1888.

Prefazione[59]

Il calcolo geometrico, in generale, consiste in un sistema di operazioni a eseguirsi su enti geometrici, analoghe a quelle che l'algebra fa sopra i numeri. [. . .] Il calcolo geometrico presenta analogia colla geometria analitica; ne differisce in ciò, che, mentre nella geometria analitica i calcoli si fanno sui numeri che determinano gli enti geometrici, in questa nuova scienza i calcoli si fanno sugli enti stessi.

Un primo tentativo di calcolo geometrico è dovuto alla vasta mente del Leibniz (1679)[a]; nel corrente secolo poi furono proposti e sviluppati varii metodi di calcolo, aventi utilità pratica, fra cui meritano menzione speciale il Calcolo baricentrico di Möbius (1827)[b], quello delle Equipollenze di Bellavitis (1832)[c], i Quaternioni di Hamilton (1853)[d] e le applicazioni alla geometria dell'Ausdehungslehre di Hermann Grassmann (1844)[e].

[a]Leibnizens, Math. Schriften, Berlin, 1849, tomo II, pag. 17, e tomo V, pag. 133. Vedasi anche, a questo proposito, Grassmann, *Geometrische Analyse*, Leipzig, 1847, pag. 4. Le proposizioni che si possono esprimere colle notazioni di Leibniz si esprimono pure facilmente con quelle introdotte nel presente libro.

[b]Möbius, *Der barycentrische Calcul*, Leipzig, 1827. Le notazioni adoperate dal Möbius, in questo, e in altri scritti posteriori, sono tutte riprodotte, senza alterazione, nel presente libro.

[c]La teoria e le più notevoli applicazioni del calcolo delle equipollenze trovansi nella recente opera: Laisant, *Théorie et applications des équipollences*, Paris, 1887. I concetti fondamentali del calcolo delle equipollenze compaiono pure nel calcolo che segue, ma le notazioni sono alquanto differenti.

[d]Il calcolo dei quaternioni ha già una vasta letteratura, che qui è inutile citare (v. Laisant, *Introduction à la méthode des quaternions*, Paris, 1881). I quaternioni di Hamilton non compaiono nel calcolo sviluppato nel presente opuscolo, non essendo essi né formazioni geometriche, né segni d'alcuna delle operazioni introdotte sulle formazioni. Un ente qui considerato, avente qualche proprietà dei quaternioni, è la trasformazione dei vettori nello spazio, indicata col segno $m + |(I*)$, ove m è un numero, I un vettore (N. 86, 2.; V. pure N. 83, 14.) I fatti geometrici che si possono esprimere coi quaternioni, si esprimono pure, e in generale con maggior semplicità, colle notazioni di Grassmann sviluppate nel presento libro. Vedi: E.W. Hyde, "Calculus of direction and position", *American Journal of Math.*, vol. VI, pag. 1, ove sono messi in confronto alcuni calcoli fatti coll'uno e coll'altro metodo.

[e][. . .]

[59]Cfr. Peano (1888), pp. v-ix.

Di questi varii metodi l'ultimo citato comprende in gran parte gli altri, e li supera nella potenza del calcolo, e nella semplicità delle formule. Ma i concetti troppo elevati ed astrusi contenuti nell'*Ausdehnungslehre* impedirono la diffusione di questa scienza; e quindi anche le sue applicazioni alla geometria sono ancora pochissimo note ai matematici.

[...]

I concetti di linea, bivettore, formazione di seconda specie corrispondono esattamente alle espressioni forza, coppia, sistema di forze applicate ad un corpo rigido, della meccanica. [...] Le formazioni di 1^a specie, quelle di 2^a prodotti di due formazione di 1^a specie, e le formazioni di 3^a specie corrispondono pure, a meno d'un fattore numerico, a ciò che in geometria proiettiva chiamasi punto, retta, piano; il vettore, bivettore e trivettore corrispondono al punto, retta e piano all'infinito.

Le formulazioni geometriche e le operazioni su esse qui esposte sono tutte contenute nell'*Ausdehnungslehre*. Però credo del tutto nuove le definizioni qui date, il modo di trattazione, e molte formule.

L'ultimo capitolo tratta sommariamente delle trasformazioni dei sistemi lineari in generale e delle formazioni geometriche in particolare. Lo sviluppo ulteriore delle questioni accennate in questi due capitoli mi avrebbe fatto varcare i limiti propostimi. [...]

Sarei lieto delle mie fatiche nello scrivere questo libro (e questa sarà l'unica ricompensa ch'io ne aspetti), se esso servirà a divulgare fra i matematici alcune delle idee del Grassmann. È però mia opinione che, fra non molto tempo, questo calcolo geometrico, o qualche cosa di analogo, si sostituirà a metodi attualmente in uso nell'insegnamento superiore. È ben vero che lo studio di questo calcolo, come di ogni altra scienza richiede un tempo; ma non credo che esso superi quello necessario allo studio, p. e., dei fondamenti della geometria analitica; e allora lo studioso si troverà in possesso d'un metodo che comprende quello della geometria analitica come caso particolare, che ne è assai più potente, e che si presta in modo meraviglioso allo studio della applicazioni geometriche dell'analisi infinitesimale, della meccanica a e della statica grafica; anzi alcune parti di tali scienze sarebbero già note a chi fosse in possesso di questo calcolo. [...]

Capitolo IX. Trasformazioni di sistemi lineari.[60]

72. Esistono dei sistemi di enti sui quali sono dati le seguenti definizioni:

[P-1.] È definita l'*eguaglianza* di due enti a e b del sistema, cioè è definita una proposizione, indicata con $a = b$, la quale esprime una condizione fra due enti del sistema, soddisfatta da certe coppie di enti, e non da altre, e la quale soddisfa alle equazioni logiche:

$$(a = b) = (b = a), \quad (a = b) \cap (b = c) < (a = c).$$

[P-2.] È definita la *somma* di due enti a e b, vale a dire è definito un ente, indicato con $a + b$, che appartiene pure al sistema dato, e che soddisfa alle condizioni:

$$(a = b) < (a + c = b + c), \quad a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c,$$

e il valor comune dei due membri dell'ultima eguaglianza si indicherà con $a + b + c$.

[P-3.] Essendo a un ente del sistema, ed m un numero intero e positivo, colla scrittura ma intenderemo la somma di m enti eguali ad a. È facile riconoscere, essendo $a, b, \ldots$ enti del sistema, $m, n, \ldots$ numeri interi e positivi, che
$(a = b) < (ma = mb)$; $m(a + b) = ma + mb$; $(m + n)a = ma + na$; $m(na) = (mn)a$; $1a = a$.

Noi supporremo che sia attribuito un significato alla scrittura ma, qualunque sia il numero reale m, in guisa che siano ancora soddisfatte le equazioni precedenti. L'ente ma si dirà *prodotto* del numero (reale) m per l'ente a.

[P-4.] Infine supporremo che esista un ente del sistema, che diremo *ente nullo*, e che indicheremo con 0, tale che, qualunque sia l'ente a, il prodotto del numero 0 per l'ente a dia sempre l'ente 0, ossia

$$0a = 0.$$

Se alla scrittura $a - b$ si attribuisce il significato $a + (-1)b$, si deduce:

$$a - a = 0, \quad a + 0 = a.$$

[60]Cfr. Peano (1888), pp. 141-4.

[P-5] DEF. *I sistemi di enti per cui sono date le definizioni 1, 2, 3, 4, in guisa da soddisfare alle condizioni imposte, diconsi* sistemi lineari.

Si deduce che se $a, b, c, \ldots$ sono enti d'uno stesso sistema lineare, $m, n, p, \ldots$ numeri reali ogni funzione lineare omogenea della forma $ma + nb + pc + \ldots$ rappresenta un ente dello stesso sistema.

Costituiscono sistemi lineari i numeri reali e le formazioni della stessa specie nello spazio.

Costituiscono pure sistemi lineari le formazioni di prima specie su d'una retta, o nel piano, i vettori nel piano o nello spazio, e così via. Ma i punti dello spazio non costituiscono un sistema lineare, perché le loro somme, secondo le definizioni date, non sono più punti, ma formazioni qualunque di prima specie.

73. [P-6.] DEF. *Più enti $a_1 a_2 \ldots a_n$ d'un sistema lineare diconsi fra loro dipendenti, se si possono determinare n numeri $m_1 m_2 \ldots m_n 4$, non tutti nulli, in guisa che risulti*

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n = 0.$$

In questo caso un qualunque degli enti, il cui coefficiente non sia nullo, si può esprimere qual funzione lineare omogenea dei rimanenti.

Se gli enti $a_1 \ldots a_n$ sono fra loro indipendenti, e se fra essi passa una relazione $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_n a_n = 0$, si deduce $m_1 = 0; \ldots, m_n = 0$.

Essendo $A, B, \ldots$ formazioni di prima specie nello spazio, le equazioni $AB = 0, ABC = 0, ABCD = 0$ esprimono la dipendenza fra 2 o 3 o 4 formazioni. 5 formazioni di prima specie nello spazio sono sempre fra loro dipendenti.

[P-7.] DEF. *Numero delle dimensioni d'un sistema lineare è il massimo numero di enti fra loro indipendenti che si possono prendere nel sistema.*

Ad esempio le formazioni di prima specie su d'una retta, o nel piano, o nello spazio, formano sistemi lineari rispettivamente a 2, 3 e 4 dimensioni; i vettori nel piano o nello spazio formano sistemi a 2 e 3 dimensioni; le formazioni di seconda specie nello spazio formano un sistema a 6 dimensioni. I numeri reali formano un sistema lineare ad una dimensione; i numeri immaginarii o complessi ordinarii formano un sistema a due dimensioni. Un sistema lineare può anche avere infinite dimensioni.

[P-8.] TEOR. *Se il sistema A è ad n dimensioni, presi nel sistema n enti indipendenti $a_1 \ldots a_n$, e dato un nuovo ente a, si possono sempre determinare* *n numeri* $x_1 \dots x_n$, *in guisa che risulti*

1) $$a = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n$$

Inoltre essi sono determinati univocamente, ossia

2) $$(x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = x\prime_1 a_1 + \ldots + x\prime_n a_n) = (x_1 = x\prime_1) \cap \ldots \cap (x_n = x\prime_n).$$

Infatti, poiché il sistema a è ad n dimensioni, fra gli $n+1$ enti $a, a_1, \ldots, a_n$ passerà una relazione della forma della definizione 1^a; in questa relazione il coefficiente di a non è nullo, perché altrimenti passerebbe una relazione fra $a_1, \ldots, a_n$, cosa contraria all'ipotesi; risolta quindi questa relazione rispetto ad a si ha la formula a dimostrarsi.

Se poi fosse $x_1 a_1 + \ldots = x\prime_1 a_1 + \ldots$, si deduce $(x_1 - x\prime_1) a_1 + \ldots = 0$; e quindi, poiché $a_1 \ldots$ sono indipendenti, $x_1 = x\prime_1; x_2 = x\prime_2, \ldots$

[P-9.] DEF. *Essendo* $a_1, \ldots, a_n$ *n enti indipendenti d'un sistema ad n dimensioni, i numeri* $x_1, \ldots, x_n$ *che soddisfano alla relazione (1) diconsi le coordinate di a rispetto agli enti di riferimento* $a_1, \ldots, a_n$.

Le formule

(3) $(x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n) + (y_1 a_1 + \ldots + y_n a_n) = (x_1 + y_1) a_1 + \ldots + (x_n + y_n) a_n$,

(4) $m(x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n) = m x_1 a_1 + \ldots + m x_n a_n$,

danno le coordinate della somma di due enti, e del prodotto d'un numero m per un ente in funzione delle coordinate di questi enti. Le coordinate dell'ente 0 sono tutte nulle.

La definizione precedente coincide colle definizioni date ai N. 34, 38, 46, 50, 60 per le formazioni di prima specie su d'una retta, pei vettori nel piano, per le formazioni di prima e seconda specie nel piano, ecc.

Se $x_1, \ldots, x_n$ sono le coordinate di a rispetto agli enti di riferimento $a_1, \ldots, a_n$, ossia

$$a = x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n,$$

e si conoscono le coordinate di $a_1, \ldots, a_n$ rispetto ad un altro gruppo di enti di riferimento $b_1, \ldots, b_n$, ossia

$$a_1 = m_{11} b_1 + \ldots + m_{1n} b_n, \ldots, a_n = m_{n1} a_1 + \ldots + m_{nn} a_n,$$

sostituendo si deduce:

$$a = (m_{11} x_1 + \ldots + m_{n1} x_n) b_1 + \ldots + (m_{1n} x_1 + \ldots + m_{nn} x_n) b_n.$$

Si hanno in tal modo calcolate le coordinate di a rispetto a $b_1 \ldots b_n$; esse sono funzioni lineari ed omogenee delle coordinate di a rispetto ad $a_1 \ldots a_n$; i coefficienti di queste funzioni sono le coordinate di $a_1 \ldots a_n$ rispetto a $b_1 \ldots b_n$.

Bibliografia

Abbri F. (1998). "La rivoluzione chimica". In Rossi (1988), vol. I.2, cap. XXV, pp. 701-740.

Abraham M. (1901). "Geometrische Grundbegriffe". In *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Einwendungen*, Teubner, Leipzig, IV.3, pp. 3-47.

Agazzi E. e Darvas G., editori (1997). *Philosophy of Mathematics Today*. Kluwer, Dordrecht.

Agazzi E. e Palladino D. (1978). *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*. Mondadori, Milano.

Albertazzi L., editore (1999). *Shapes of Forms. From Gestalt Psychology and Phenomenology to Ontology and Mathematics*. Kluwer, Dordrecht-Boston-London.

Ampère A. (1834). *Essais sur la philosophie des sciences ou exposition analytique d'une classification naturelle de toutes les connaissances humaines*. Bachelier, Paris. 1834-38. Rist. anastatica Culture e Civilisation, Bruxelles, 1966.

Ampère A. (1969). *Opere*. A cura di M. Bertolini, UTET, Torino.

Angelelli I. (1965). "Leibniz's Misunderstanding of Nizolius' Notion of *multitudo*". *Notre-Dame Journal of Formal Logic*, **6**, 319–322.

Apostol T. M. (1969). *Calculus. 2. Geometry*. Wiley & Sons, New York. Tr. it. *Calcolo. 2. Geometria*, Bollati Boringhieri, Torino, 1977.

Aristotele (1984). *Opere*. Laterza, Roma-Bari. Vol. 1.

Aristotele (1995). *Fisica*. A cura di L. Ruggiu, Rusconi, Milano.

Aristotele (2000). *Etica nicomachea*. Bompiani, Milano.

Aristotele (2002). *Metafisica*. A cura di G. Reale, Laterza, Roma-Bari.

Arndt A. (1986). *Einleitung zur Schleiermachers Dialektik.* In Schleiermacher (1839a), pp. ix-lxxxiv.

Bacon F. (1605). *The Advancement of Learning.* London. Ed. ampl. e riel. con il titolo *De dignitate et augmentis scientiarum*, 1623.

Bacon F. (1620). *Novum organum sive indicia vera de interpretatione naturae.* London. Ed. it. con testo a fronte a cura di Michele Marchetto, *Nuovo Organo*, Rusconi, Milano, 1998.

Barnabei M., Brini A., e Rota G.-C. (1985). "On the Exterior Calculus of Invariant Theory". *Journal of Algebra*, **96**, 120–160.

Barone F. (1951). *Logica formale e logica trascendentale.* Edizioni di filosofia, Torino. 2 voll. 1951-65. I. Da Leibniz a Kant. II. L'algebra della logica, rist. Unicopli, Milano, 2 voll. 1999-2000.

Barone F. (1989). "Matematica e logica nel pensiero di Leibniz". *Nuova Civiltà delle Macchine*, **7**(2), 74–82.

Basso P. (1999). *Filosofia e geometria. Lambert interprete di Euclide.* La Nuova Italia, Firenze.

Baum R. J. (1973). *Philosophy and Mathematics. From Plato to the Present.* Freeman, Cooper & and Co., San Francisco.

Bellavitis G. (1835). "Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di geometria analitica (Calcolo delle equipollenze)". *Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto*, **5**, 244–259.

Bellone E. (1988). "Isaac Newton". In Rossi (1988), vol. II.2, cap. XV, pp. 419-447.

Bergmann H. (1909). *Das philosophische Werk Bernard Bolzanos.* Niemeyer, Halle.

Bernoulli J. (1713). *Ars Conjectandi.* Basilea. In *Opera omnia*, Lousanne-Genève, 4 voll.

Berti E. (1979). *Profilo di Aristotele.* Nuova Universale Studium, Roma.

Bettazzi R. (1890). *Teoria delle grandezze.* Pisa. rist. in *Annali delle Università Toscane*, Scienze cosmologiche, **19** (2), 1893, 1-180.

Beutelspacher A. (1996). "A Survey of Grassman's Ausdehnungslehre". In Schubring (1996a), pp. 3-6.

Birkhoff G. e MacLane S. (1967). *Algebra.* Macmillan, New York.

Bôcher M. (1904). “The Fundamental Conceptions and Methods of Mathematics”. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **10**, 115–135.

Boi L. (1995). *Le problème mathématique de l’espace: une quête de l’intelligible.* Springer, Berlin.

Boi L., Flament D., e Salanskis J., editori (1992). *1830-1930 : a Century of Geometry.* Springer, Berlin-Heidelberg.

Bolzano B. (1804). *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie.* Barth, Prag. Rist. in *Oeuvres*, Praha, 1948, vol. 5, pp. 9-49.

Bolzano B. (1810). *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik.* Prag. Rist. anast. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1974.

Bolzano B. (1837). *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und grössentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherigen Bearbeiter.* Sulzbach. 4 voll. Rist. in Bolzano (1969), I. Schriften, voll. 11-14, 1985-.

Bolzano B. (1843). “Aufsatz, worin ein von Hrn. Exner in seiner Abhandlung: ‘Über den Nominalismus und Realismus’ angeregte logische Frage beantwortet wird”. *Abh. Königl. Böhm. Ges. Wiss.* 5a serie, 2, Berichte, 1-78, in Bolzano (1969), I. Schriften, vol. 18, pp. 67-76.

Bolzano B. (1851). *Paradoxien des Unendlichen.* Leipzig. Rist. Meiner, Hamburg, 1975. Tr. it. *Paradossi dell’infinito*, a cura di F. Voltaggio, Feltrinelli, Milano, 1965.

Bolzano B. (1969). *Gesamtausgabe.* A cura di E. Winter, J. Berg, F. Kambartel, J. Louzil, B. Rootselar, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt, 1969–.

Bolzano B. (1975a). *Einleitung zur Grössenlehre und Erste Begriffe der allgemeinen Grössenlehre.* In Bolzano (1969), II.A, Nachgelassene Schriften, vol. 7.

Bolzano B. (1975b). *Von der mathematischen Lehrart.* Pubbl. post. in Bolzano (1975a). Rist. Frommann-Holzboog, Stuttgart-BadCannstatt, 1981. Tr. it. *Del metodo matematico*, a cura di C. Cellucci, Bollati Boringhieri, Torino, 1985.

Boole G. (1847). *The Mathematical Analysis of Logic. Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning.* Hamilton & Barcley, Cambridge. Rist. Basil Blackwell, Oxford, 1951. Tr. it. a cura di M. Mugnai, *L’analisi matematica della logica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1993.

Boole G. (1854). *An Investigation of the Laws of Thought, on which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Walton & Maberly, London. Rist. Dover, New York, 1958. Tr. it. a cura di M. Trinchero, *Indagine sulle leggi del pensiero su cui sono fondate le teorie matematiche della logica e della probabilitá*, Einaudi, Torinio, 1976.

Borga M., Freguglia P., e Palladino D. (1985). *I contributi fondazionali della scuola di Peano.* Angeli, Milano.

Bos H. (2001). *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* Springer, New York.

Bottazzini U. (1981). *Il calcolo sublime: storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass.* Bollati Boringhieri, Torino.

Bottazzini U. (1990). *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea.* UTET, Torino.

Bottazzini U. (1998). "La 'grande arte': l'algebra nel Rinascimento". In Rossi (1988), II.1, cap. XXV, pp. 59-84.

Bottazzini U., Freguglia P., e Toti Rigatelli L. (1992). *Fonti per la storia della matematica: aritmetica, geometria, algebra, analisi infinitesimale, calcolo delle probabilità, logica e fondamenti.* Sansoni, Firenze.

Bourbaki N. (1947). *Éleménts des mathématiques. 2. Algèbre.* Hermann, Paris.

Boyer C. (1968). *A History of Mathematics.* Wiley & Sons. Tr. it. *Storia della matematica*, Milano, Mondadori, 1980.

Braunss G. (1996). "The Grassmann Product in Physics". In Schubring (1996a), pp. 297-302.

Briccoli Bati S. (1992). "Il calcolo geometrico in F. A. Möbius e in H. G. Graßmann". Appendice a Freguglia (1992), pp. 135-181.

Brigaglia A. (1994). "Giuseppe Veronese e la geometria iperspaziale in Italia". In *Le scienze matematiche nel Veneto dell'Ottocento.* Atti del Terzo Seminario di Storia delle Scienze e delle Tecniche nell'Ottocento Veneto, Venezia, Istituto Veneto, pp. 231-61.

Brigaglia A. (1996). "The Influence of Grassmann on Italian Projective n-dimensional Geometry". In Schubring (1996a), pp. 155-164.

Brini A. e Teolis G.-B. (1996). "Grassmann Progressive and Regressive Products and CG-Algebras". In Schubring (1996a), pp. 231-242.

Brunschvicg L. (1912). *Les étapes de la philosophie mathématique.* Alcan, Paris. Rist. Blanchard, Paris, 1981.

Burali-Forti C. (1893). "Sulla teoria delle grandezze". *Rivista di matematica*, **3**, 76–101.

Burali-Forti C. (1896). "Il metodo del Grassmann nella geometria proiettiva". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **10**, 177–195.

Burali-Forti C. (1897). *Introduction à la géométrie différentielle selon la méthode de H. Grassmann.* Gauthiers-Villars, Paris.

Burali-Forti C. e Marcolongo R. (1907). "Per l'unificazione delle notazioni vettoriali". *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* **23**, 324-8; **24**, 65-80, 318-32; **25**, 352-75; **26**, 369-77.

Burali-Forti C. e Marcolongo R. (1909). *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla Fisica-Matematica.* Zanichelli, Bologna.

Cambiano (1971). *Platone e le tecniche.* Einaudi, Torino.

Cantù P. (1999). *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria.* Unicopli, Milano.

Cantor M. (1883). "Grundlagen einer Mannigfaltigkeitslehre". *Mathematische Annalen*, **21**, 545–586. Tr. it. in *La formazione della teoria degli insiemi*, a cura di G. Rigamonti, Firenze, Sansoni, 1992, pp. 77-134.

Cantor M. (1887). "Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten". *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, **91/92**, 81–125, 240–265. Rist. in Cantor (1966), pp. 378-439.

Cantor M. (1895). "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre". *Mathematische Annalen.* **46**, 481-512; **49**, 207-246. Rist. in Cantor (1966), pp. 282-356.

Cantor M. (1900). *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Teubner, Leipzig. 3 voll. 1900-1908. Rist. Teubner, Stuttgart, 1965.

Cantor M. (1966). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Olms, Hildesheim.

Carnap R. (1931). "Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft". *Erkenntnis*, **10**, 432–465.

Carnap R. (1936). "Ueber die Einheitsprache der Wissenschaft. Logische Bemerkungen zum Projekt einer Enzyklopädie". In *Actes du Congrés International de Philosophie Scientifique 1935*, Sorbonne, Paris, vol. II. Unité de la Science, Hermann, Paris, pp. 60-70.

Carnap R. (1937). "Einheit der Wissenschaft durch Einheit der Sprache". In *Travaux du IXe Congrès International de Philosophie. Congrès Descartes*, IV. L'Unité de la Science: la Méthode et les méthodes, a cura di R. Bayer, I, Hermann, Paris, pp. 51-7.

Cartan E. (1908). "Nombres complexes". Exposé, d'après l'article allemand de E. Study. In *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliqués. Edition Française*, vol. I.1, Gauthier-Villars, Paris, 1908, pp. 329-468.

Cassirer E. (1910). *Substanzbegriff und Funktionbegriff.* Cassirer Verlag, Berlin. Tr. it. a cura di G. Preti, *Sostanza e funzione*, Firenze, La Nuova Italia, 1973.

Cauchy A. (1853). "Sur les Clefs algébriques". *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **36**, 70–75, 129–136.

Cayley A. (1895). "Coordinates versus Quaternions". *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **20**, 271–75.

Cellucci C. (2002). *Filosofia della matematica.* Laterza, Roma-Bari.

Chambers E. (1728). *Cyclopaedia, or General Dictionary of Arts and Sciences.* London.

Châtelet G. (1992). "La capture de l'extension comme dialectique géométrique: dimension et puissance selon l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann (1844)". In Boi *et al.* (1992), pp. 222-244.

Châtelet G. (2000). *Figuring Space.* Kluwer, Dordrecht.

Clifford W. K. (1878). "Applications of Grassmann's Extensive Algebra". In *Mathematical Papers*, a cura di R. Tucker, Macmillan & Co., London, 1882.

Clifford W. K. (1885). *The Common Sense of the Exact Sciences.* Pubbl. postumo. Rist. Dover, New York, 1955.

Cohn P. M. (1965). *Universal Algebra.* Harper & Row, New York-Evanston-London.

Collins J. V. (1899). "An Elementary Exposition of Grassman's Ausdehnungslehre". *American Mathematical Monthly*, **6/7**, 193–198, 261–266, 297–301; **31/35**, 163–166, 207–214, 253–258.

Comte A. (1830). *Cours de philosophie positive*. Paris. 5a ed. 1892, rist. in *Oeuvres*, I, Anthropos, Paris, 1968-69.

Coolidge J. L. (1940). *A History of Geometrical Methods*. Oxford University Press, Oxford.

Corry L. (1992). "Nicolas Bourbaki and the Concept of Mathematical Structure". *Synthese*, **92**(3), 315–348.

Corry L. (1996). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhäuser Verlag, Basel.

Cournot A.-A. (1847). *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*. In *Oeuvres complètes*, vol. 6.2, Vrin, Paris, 1989.

Couturat L. (1901). *La logique de Leibniz d'après des documents inédits*. Alcan, Paris.

Crapulli G. (1969). *Mathesis universalis. Genesi di un'idea nel XVI secolo*. Edizioni dell'Ateneo, Roma.

Crowe M. J. (1967). *A History of Vector Analysis, The Evolution of the Idea of a Vectorial System*. Dover Publications, New York. 2a ed. 1985.

De Michele L. e Palleschi M. (1989). *Algebra lineare*. Masson, Milano.

Dedekind R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Vieweg & Sohn, Braunschweig. In Dedekind (1932), vol. III, pp. 315-334. Tr. it. a cura di T. Gana in *Scritti sui fondamenti della matematica*, Bibliopolis, Napoli, 1982, pp. 63-78.

Dedekind R. (1888). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Vieweg & Sohn, Braunschweig. In *Gesammelte mathematische Werke*, vol. III, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1932, pp. 335-391. Tr. it. a cura di T. Gana in *Scritti sui fondamenti della matematica*, Napoli, Bibliopolis, 1982, pp. 79-128.

Dedekind R. (1932). *Gesammelte mathematische Werke*. Vieweg & Sohn, Braunschweig. 3 voll.

Delbrück B. (1877). "Hermann Grassmann". *Beilage zur Allgemeinen Zeitung*, **291**, 4371.

Descartes R. (1619). *Lettere (24 gennaio 1619 - 29 aprile 1619)*. In *Opere filosofiche*, a cura di E. Lojacono, vol. I, UTET, Torino, 1994.

Descartes R. (1637a). *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Leyden. Tr. it. a cura di M. Garin, *Discorso sul metodo* in *Opere filosofiche*, vol. 1, Laterza, Roma-Bari, 1994.

Descartes R. (1637b). *La géométrie*. Leiden. Appendice al *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*. Ora in *Oeuvres*, a cura di C. Adam e P. Tannery, vol. VI, Vrin, Paris, 1982.

Descartes R. (1701). *Regulae ad directionem ingenii*. In Descartes, *Opuscula postuma, physica et mathematica*, Blaeu, Amsterdam. Tr. it. in Cartesio, *Opere filosofiche*, vol. 1, Laterza, Roma-Bari, 1994, pp. 15-94.

Diderot D. e d'Alembert J.-B. (1751). *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des Sciences, des Arts et des Métiers*. Paris. 10 voll.

Dieudonné J. (1970). "The Work of Nicholas Bourbaki". *Amer. Math. Monthly*, **77**, 134–145.

Dieudonné J. (1979). "The Tragedy of Grassmann". *Linear and Multilinear Algebra*, **8**(1), 1–14.

Dorier J.-L. (1995). "A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory". *Historia Mathematica*, **22**, 227–261.

Dorier J.-L. (1996). "Basis and Dimension - from Grassmann to van der Waerden". In Schubring (1996a), pp. 175-196.

Echeverría J. (1979). "L'Analyse Géométrique de GRASSMANN et ses rapports avec la Caractéristique Géométrique de Leibniz". *Studia Leibnitiana*, **11**(2), 223–273.

Echeverría J., Morman T., e Ibana E., editori (1990). *International Symposion Structures in Mathematical Theories. Proceedings of the Conference at San Sebastian, September 1990*, de Gruyter, Berlin and New York.

Ehrlich P., editore (1994). *Real Numbers, Generalisation of the Reals and Theories of Continua*. Kluwer, Dordrecht.

Eisenhardt P. (1994). "Dynamik, Emergenz und Mathematik". In Heuser-Keßler e Jacobs (1994), pp. 39-54.

Elfering K. (1995). "Über die sprachwissenschaftlichen Forschungen und das Aspiratengesetz von Hermann Günther Grassmann". In Schreiber (1995), pp. 33-36.

Engel F. (1909). "Review of: H. Grassmann. Projektive Geometrie der Ebene unter Benutzung der Punktrechnung dargestellt. Erster Band: Binäres", Leipzig und Berlin, 1909. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, **40**, 589–90.

Engel F. (1911). *Graßmanns Leben*. In Graßmann (1894), vol. III.2.

Enriques F. (1910). "Prinzipien der Geometrie". In *Enzykl. Math. Wiss.*, III AB 1, pp. 1-129.

Enriques F. (1922). *Per la storia della logica.* Zanichelli, Bologna.

Euclide (1970). *Elementi.* UTET, Torino. 2a ed. 1996.

Euler L. (1768). *Lettre à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de Physique et de Philosophie.* Académie impériale des Sciences, St. Petersburg. Rist. in *Opera omnia*, III, vol. 11, Füssli, Zürich, 1960. Tr. it. a cura di G. Cantelli, *Lettere a una principessa tedesca*, Boringhieri, Torino, 1958.

Euler L. (1771). *Vollständige Anleitung zur Algebra mit den Zusätzen von J.L.Lagrange.* Kayserlichen Akademie der Wissenschaften, St. Peterburg. In *Leonhardi Euleri Opera omnia*, Teubner, Leipzig-Berlin, I. Opera mathematica, vol. 1, 1911.

Ewald B. (1996). *From Kant to Hilbert.* Clarendon Press, Oxford. 2 voll.

Favaro A. (1878). "Della vita e degli scritti fisico-matematici di Ermanno Grassmann". *Bullettino di Bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, **11**.

Fearnley-Sander D. (1979). "Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra". *Amer. Math. Monthly*, **86**(10), 809–817.

Fearnley-Sander D. (1981). "Grassmann's Theory of Dimension". In *Proceedings of the First Australian Conference on the History of Mathematics, Clayton*, Monash University, Melbourne, pp. 52-82.

Fearnley-Sander D. (1982). "Hermann Grassmann and the Prehistory of Universal Algebra". *Amer. Math. Monthly*, **89**, 161–166.

Fehr H. (1899). *Application de la méthode vectorielle de Grassmann a la géométrie infinitesimale.* Carré et Naud, Paris.

Flament D. (1992). "La lineale Ausdehungslehre (1844) de Hermann Günther Grassmann". In Boi *et al.* (1992), pp. 205-221.

Flament D. (1994). "Préface. Hermann Günther Grassmann: L'homme et l'oeuvre". In Graßmann (1994), pp. 7-50.

Forder H. G. (1941). *The Calculus of Extension.* Cambridge University Press, Cambridge.

Frank M. (2001). "Einleitung zur Schleiermachers Dialektik". In Schleiermacher (2001), pp. 10-136.

Franksen O. I. (1996). “Array-Based Logic”. In Schubring (1996a), pp. 302-336.

Frege G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Koebner, Breslau. Rist. a cura di Ch. Thiel, Meiner, Hamburg, 1986. Tr. it. *Fondamenti dell'aritmetica. Una ricerca logico-matematica sul concetto di numero* a cura di L. Geymonat e C. Mangione, in *Logica e aritmetica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1965.

Freguglia P. (1985). “Il calcolo geometrico e i fondamenti della geometria”. In Borga *et al.* (1985), pp. 174-236.

Freguglia P. (1988). *Ars Analytica. Matematica e methodus nella seconda metà del Cinquecento.* Bramante, Busto Arsizio.

Freguglia P. (1989). “Algebra e geometria in Viète”. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, **9**(1), 49–90.

Freguglia P. (1992). *Dalle equipollenze ai sistemi lineari.* QuattroVenti, Urbino.

Freguglia P. (1999). Sul principio di omogeneità dimensionale tra Cinquecento e Seicento. *Bollettino U.M.I.*, **8**. 2-B.

Freudenthal H. (1954). “Leibniz und die Analysis Situs”. In *Homeaje a Millàs-Vallicrosa*, C.S.I.C., Barcelona, vol. 1, pp. 611-621. Rist. in *Studia Leibniziana*, 1972, **4**, 61-69.

Fries J. (1811). *System der Logik.* Mohr und Zimmer, Heidelberg. Rist. in *Sämtliche Schriften*, vol. 7, Scientia Verlag, Aalen, 1971.

Fries J. (1822). *Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet.* In *Sämtliche Schriften*, a cura di G. König e L. Geldsetzer, Scientia Verlag, Aalen, vol. 13. Schriften zur angewandten Philosophie, 2. Naturphilosophie und Naturwissenschaft, 1979.

Galilei G. (1623). *Il Saggiatore nel quale con bilancia esquisita e giusta si ponderano le cose contenute nella libra astronomica e filosofica di Lotario Sarsi Sigensano, scritto in forma di lettera all'illustrissimo e reverendissimo Monsignore D. Virginio Cesarini.* Roma. Ed. a cura di L. Sosio, Feltrinelli, Milano, 1965.

Galuzzi M. (1980). “Geometria algebrica e Logica tra Otto e Novecento”. In Micheli G., editore (1980). *Scienza e tecnica nella cultura e nella società dal Rinascimento ad oggi*, Annali della Storia d'Italia, Einaudi, Torino, pp. 1001-1105.

Gauss C. F. (1800). “Zur Metaphysik der Mathematik”. In Gauss (1863), vol. 12. Varia, §13, pp. 57-61.

Gauss C. F. (1862). *Briefwechsel zwischen C.F. Gauss und H.C. Schumacher.* A cura di C.A.F. Peters, Altona.

Gauss C. F. (1863). *Werke.* Hrsg. von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Göttingen, 12 voll., 1863-1929. Rist. anast. Olms, Hildesheim, 1981.

Geymonat L., editore (1970). *Storia del pensiero filosofico e scientifico.* Garzanti, Milano. 6 voll. 1970-72.

Gibbs J. W. (1961). *The Scientific Papers of J. W. Gibbs.* Dover, New York. 2 voll.

Giedymin J. (1982). *Science and Convention. Essays on Henri Poincaré's Philosophy of Science and the Conventionalist Tradition.* Pergamon Press, Oxford.

Gordienko N. (1990). "The Concept of *Fraction* in H. Grassmann's *Die Ausdehnungslehre* and Its Connection with Contemporary Linear Algebra". *Istor.-Mat. Issled.*, **32-33**, 181–199.

Graßmann H. (1839). *"Ableitung der Krystallgestalten aus dem allgemeinen Gesetze der Kristallbildung", Program der Ottoschule Stettin 1839.* In Graßmann (1902), pp. 115-146.

Graßmann H. (1840). *Theorie der Ebbe und Flut.* Prüfungsarbeit, pubbl. in Graßmann (1911).

Graßmann H. (1842). "Theorie der Centralen". *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle)*, **24**(3-4), 262–282, 372–380. Rist. in Graßmann (1904), pp. 3-32.

Graßmann H. (1844). *Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre, eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendungen erläutert. I. Teil. Die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre von Magnetismus und die Krystallonomie erläutert.* Verlag von Otto Wigand, Leipzig. Rist. *Die Ausdehnungslehre von 1844 nach der Ausgabe von 1878* in Graßmann (1894), vol. I.1.

Graßmann H. (1845). "Kurze Uebersicht über das Wesen der Ausdehnungslehre". Vol. I.1, pp. 297-312. Rist. in Graßmann (1894), I.1. Tr. ingl. di W. W. Beman, "A Brief Account of the Essential Features of Grassmann's Extensive Algebra", *Analyst*, 1881, **8**, 96-7 e 114-124. Tr. it di A. Favaro in Favaro (1878), pp. 17-31.

Graßmann H. (1847). *Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik*. Gekrönte Preisschrift von H. Graßmann. Mit einer erläuternden Abhandlung von A.F. Moebius, Weidmannsche Buchhandlung, Leipzig. Rist. in Graßmann (1894), vol. I.1, pp. 320-398.

Graßmann H. (1854). "Sur les différents genres de multiplication". In *Crelles Journal*, 1855, **49**, (1), 47-65. Rist. in Graßmann (1894), vol. II.1, pp. 199-217. Tr. ingl. "On the Various Types of Multiplication", in Graßmann (1995), pp. 451-468.

Graßmann H. (1861). *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. Erster Teil: Arithmetik. Zweiter Teil: Trigonometrie*. Enslin, Berlin. 1861-65.

Graßmann H. (1862). *Die Ausdehnungslehre von 1862*. Leipzig. Rist. in Graßmann (1894), vol I.2, 1896.

Graßmann H. (1877). "Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre". *Mathematische Annalen*, **12**(3), 375–86. In Graßmann (1904), pp. 268-82.

Graßmann H. (1894). *Gesammelte mathematische und physikalische Werke*. A cura di F. Engel, 3 voll., Teubner, Leipzig, 1894-1911.

Graßmann H. (1902). *Die Abhandlungen zur analytischen Mechanik nach Stücken aus dem Nachlasse. Die Abhandlungen zur mathematischen Physik*. In Graßmann (1894), vol. II.2.

Graßmann H. (1904). *Die Abhandlungen zur Geometrie und Analysis. Stücke aus den Lehrbüchern der Arithmetik und der Trigonometrie*. In Graßmann (1894), vol. II.1.

Graßmann H. (1911). *Abhandlungen zur mathematischen Physik aus dem Nachlasse*. Rist. in Graßmann (1894), vol. III.1.

Graßmann H. (1947). *Teoria de la Extensión. Nueva disciplina matemática expuesta y aclarada mediante aplicaciones*. Tr. spagnola di Emilio Oscar Roxin. Espasa-Calpe Argentina, Buenos Aires.

Graßmann H. (1994). *La science de la grandeur extensive*. Tr. fr. di D. Flament e B. Bekemeier, Blanchard, Paris.

Graßmann H. (1995). *A New Branch of Mathematics. The Ausdehnungslehre of 1844, and Other Works*. Tr. ingl. di Lloyd C. Kannenberg, Open Court, Chicago and La Salle, Illinois.

Graßmann J. (1824). *Raumlehre fur die untern Klassen der Gymnasien und fur Völkschulen*. Reimer, Berlin. 2. Ebene räumliche Grössenlehre.

Graßmann J. (1827). *Über den Begriff und Umfang der reinen Zahlenlehre*. Stettin. Beilage zu dem Programm für Michaelis 1827 bei dem Gymnasio zu Stettin.

Graßmann J. (1829). *Zur physischen Krystallonomie und geometrischen Combinationslehre*. Friedr. Heinr. Morin, Stettin.

Graßmann J. (1835). *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*. Reimer, Berlin.

Graßmann R. (1872). *Die Formenlehre oder Mathematik*. Stettin. Rist. Georg Olms, Hildesheim, 1966.

Graßmann R. (1881). *Das Weltleben oder die Metaphysik*. Stettin.

Graßmann R. (1890). *Das Gebäude des Wissens*. Vol. 1: *Die Wissenslehre oder die Philosophie* (= *Die Denklehre*), pt. 1: *Das Verstandeswissen oder das formale Wissen, umfassend die auf die Philosophie vorbereitenden Wissenschaften*, Stettin, 1890.

Grattan-Guinness I. (1993). "Structure-similarity: between Mathematics and Philosophy". In Czermak, J., editore, *Philosophie der Mathematik. Akten des 15. Internationalen Wittgenstein-Symposium, 1992*, Teil. 1, Hölder-Pichler-Temsky, 1993, pp. 317-333.

Grattan-Guinness I., editore (1994). *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*. Routledge, London. 2 voll.

Grattan-Guinness I. (1996). "Where Does Grassmann Fit in the History of Logic?". In Schubring (1996a), pp. 211-216.

Grattan-Guinness I. (1999). "Forms in Algebras and their Interpretations: Some Historical and Philosophical Features". In Albertazzi (1999), pp. 177-190.

Gray J. (1980). "The History of the Concept of a Finite-Dimensional Vector Space". *Historia Mathematica*, **7**, 65–70.

Hamilton W. (1866). *Elements of Quaternions*. Longmans, Green & Co., London. Rist. 2 voll. 1899-1901.

Hamilton W. R. (1846). "On Quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra". *Philosophical Magazine*, **29**, 26–31.

Hamilton W. R. (1853). *Lectures on Quaternions*. Hodges & Smith, Dublin.

Hankel H. (1867). *Theorie der complexen Zahlensysteme insbesondere der gemeinen imaginären Zahlen und der Hamilton'schen Quaternionen nebst ihrer geometrischen Darstellung. I. Vorlesungen über die Complexen Zahlen.* Voss, Leipzig. 2 voll.

Hankel H. (1874). *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter*. Teubner, Leipzig.

Hartshorne R. (2001). *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer, New York.

Heath A. E. (1917a). "Hermann Grassmann. 1809-1877". *The Monist*, **27**(1), 1–21.

Heath A. E. (1917b). "The Geometrical Analysis of Grassmann and Its Connection with Leibniz's Characteristic". *The Monist*, **27**, 36–56.

Heath A. E. (1917c). "The Neglect of the Work of H. Grassmann". *The Monist*, **27**(1), 22–35.

Heath T. (1921). *A History of Greek Mathematics*. Clarendon Press, Oxford. 2 voll.

Heath T. L. (1949). *Mathematics in Aristotle*. Clarendon Press, Oxford. Rist. Oxford University Press, Oxford, 1979.

Hegel G. W. F. (1812). *Wissenschaft der Logik*. Nürnberg. 2 voll. 1812-16. Tr. it. di A. Moni, *Scienza della logica*, Laterza, Roma-Bari, 1988, 2 voll.

Helmholtz H. v. (1870). "Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome". Vortrag gehalten im Docentenverein zu Heidelberg, Rist. in *Über Geometrie*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1968, pp. 1-31.

Helmholtz H. v. (1876). "The Origin and Meaning of Geometrical Axioms". *Mind*, **1**, 301–321. Rist. in Ewald (1996), pp. 663-685.

Helmholtz H. v. (1878). *Die Tatsachen in der Wahrnehmung*. Rede gehalten zur Stiftungsfeier der Friedrich-Wilhelms-Univ. zu Berlin am 3. August 1878, stampato con aggiunte e correzioni, Hirschwald, Berlin, 1879. Rist. in Helmholtz, *Vorträge und Reden*, Braunschweig, 1884, pp. 213-247.

Helmholtz H. v. (1887). "Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet". In *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*, Fues, Leipzig, pp. 11-52.

Herzberger M. (1966). *Ideen von Grassmann und Hamilton*. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München.

Hestenes D. (1996). "Grassmann's Vision". In Schubring (1996a), pp. 243-254.

Heuser-Keßler M.-L. (1994). "Schelling und die Selbstorganisation. Darstellung der jüngsten Rezeptionsgeschichte und neuer Forschungstrends". In Heuser-Keßler e Jacobs (1994), pp. 231-255.

Heuser-Keßler M.-L. (1996). "Geometrical Product - Exponentiation - Evolution. Justus Günther Grassmann and Dynamist Naturphilosophie". In Schubring (1996a), pp. 47-58.

Heuser-Keßler M.-L. e Jacobs W. G., editori (1994). *Schelling und die Selbstorganisation. Neue Forschungsperspektiven.* Duncker & Humblot, Berlin. Jahrbuch für Komplexität in den Natur-, Sozial- und Geisteswissenschaften. **5**.

Hilbert D. (1899). *Grundlagen der Geometrie.* Teubner, Stuttgart. Tr. it. a cura di P. Canetta, *Fondamenti della geometria*, Feltrinelli, Milano, 1970.

Hodge W. e Pedoe D. (1968). *Methods of Algebraic Geometry.* Cambridge University Press, Cambridge. I: Algebraic preliminaires, II: projective space, III: General theory of algebraic varieties in projective space, IV: Quadrics and Grassmann varieties.

Hölder O. (1901). "Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass". *Berichten der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.* 1-64.

Hume D. (1740). *A Treatise of Human Nature: Being an Attempt to Introduce the Experimental Method of Reasoning into Moral Subjects.* London.

Hume D. (1748). *An Enquiry Concerning Human Understanding.* London.

Husserl E. (1891). *Philosophie der Arithmetik.* Rist. in *Gesammelte Werke (Husserliana)*, vol. XII, a cura di L. Eley, Nijhoff, Den Haag,1970.

Husserl E. (1900). *Logische Untersuchungen.* vol. 1, Prolegomena zur reinen Logik, Rist. in *Gesammelte Werke (Husserliana)*, vol. XVIII, a cura di E. Hornstein, Nijhoff, Den Haag, 1975. Tr. it. a cura di G. Piana, *Ricerche logiche*, vol. 1, il Saggiatore, Milano, 2001.

Husserl E. (1929). *Formale und traszendentale Logik.* Halle. Tr. it. *Logica formale e trascendentale*, Laterza, Bari, 1966.

Huygens C. (1657). *De ratiociniis in ludo aleae.* Rist. in *Oeuvres Complètes*, vol. 14, La Hague, 1888-1967.

Hyde E. W. (1890). *The directional calculus: based upon the methods of Hermann Grassmann.* Ginn & Company, Boston.

Hyde E. W. (1906). *Grassmann's Space Analysis.* London.

Isnardi Parente M. (1966). *Techne. Momenti del pensiero greco da Platone a Epicuro.* La Nuova Italia, Firenze.

Jahnke H. N., Knoche N., e Otte M., editori (1996). *History of Mathematics and Education : Ideas and Experiences*. Vandenhoeck & Ruprecht, Gottingen.

Janhke E. (1905). *Vorlesungen über die Vektorenrechnung mit Anwendungen auf die Geometrie, Mechanik und mathematische Physik*. Teubner, Leipzig.

Junghans F. (1877). "Hermann Grassmann. Stettin, 16. November". *Neue Stettiner Zeitung*, **538**, 1.

Kant I. (1786). *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. Riga. Tr. it. *Primi principi metafisici della scienza della natura*, Piovan, Abano Terme, 1989.

Kant I. (1787). *Kritik der reinen Vernunft*. Tr. it. di G. Gentile e G. Lombardo-Radice, *Critica della ragion pura*, Laterza, Roma-Bari, 1991.

Kant I. (1821). *Vorlesungen über die Metaphysik (Pölitz)*. Erfurt.

Kant I. (1900). *Kants gesammelte Schriften*. Reimer, Berlin. A cura della Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften, 1900-55.

Kästner A. (1796). *Geschichte der Mathematik*. Göttingen. 4 voll. 1796-1800.

Kattsoff L. (1948). *A Philosophy of Mathematics*. Iowa State University Press, Iowa. rist. Books for Libraries Press, Freeport, New York, 1969.

Kempe A. (1886). "A Memoir on the Theory of Mathematical Form". *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **177**, 1–70.

Kempe A. (1887). "Note to a Memoir on the Theory of Mathematical Form". *Proceedings of the Royal Society*, **42**, 193–196.

Kempe A. (1890a). "On the Relation between the Logical Theory of Classes and the Geometrical Theory of Points". *Proceedings of the London Mathematical Society*, **21**, 147–182.

Kempe A. (1890b). "The Subject-Matter of Exact Thought". *Nature*, **43**, 156–162.

Kempe A. (1894). "Mathematics". *Proceedings of the London Mathematical Society*, **26**, 5–15.

Klein F. (1872). *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Programm zur Antritt in die philosophische Fakultät und den Senat der Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen*. Deichert, Erlangen. Rivisto e pubblicato in *Mathematische Annalen*, 1893, **43** 63-100. Ora in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin, Springer, 1921-23, vol. I, pp. 460-497. Tr. it. a cura di G. Fano, "Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti", *Annali di matematica pura ed applicata*, 1880, 2, **17**, 1-37.

Klein F. (1926). *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Springer, Berlin. 2 voll. 1926-27. Tr. ingl. *Development of Mathematics in the 19th Century*, vol. 1, Math. Sci. Press., Brookline Mass., 1979.

Klein J. (1934). "Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra". *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik.* Abt. B. *Studien*, 1934-36, **3** (1), 18-105 e **3** (2), 122-235. Tr. ingl. *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, M.I.T Press, Cambridge, Massachusetts, 1968.

Kline M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* Tr. it. a cura di A. Conte, *Storia del pensiero matematico*, 2 voll., Einaudi, Torino, 1962 (1996).

Klingenberg W. (1996). "Grassmannian Manifolds in Geometry". In Schubring (1996a), pp. 281-84.

Kluegel G. (1803). *Mathematisches Wörterbuch.* Leipzig. 7 voll., 1803-36.

Kneale W. e Kneale M. (1962). *The Development of Logic.* Clarendon Press, Oxford. Tr. it. *Storia della logica*, Einaudi, Torino, 1972.

Knott C. G. (1911). *Life and Scientific Work of Peter Guthrie Tait.* Cambridge.

Krämer S. (1991). *Berechenbare Vernunft. Kalkül und Rationalismus im 17. Jahrhundert.* De Gruyter, Berlin.

Kreiser L. (2001). *Gottlob Frege. Leben - Werk - Zeit.* Meiner, Hamburg.

Krömer R. (2000). *Zur Geschichte des axiomatischen Vektorraumbegriffs.* Diplomarbeit, Universität des Saarlandes.

Kronecker L. (1887). "Über den Zahlbegriff". In *Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*, Fues, Leipzig, pp. 261-274.

La Vergata A. (1988a). "La morfologia: anatomia comparata ed embriologia dal primo Seicento alla metà dell'Ottocento". In Rossi (1988), vol. II.1, cap. XIII, pp. 343-378.

La Vergata A. (1988b). "La storia naturale e le classificazioni". In Rossi (1988), vol. I.2, cap. XXXVIII, pp. 779-841.

Lang S. (1966). *Linear Algebra.* Addison-Wesley Pub. Company, Reading (Mass.). Tr. it. *Algebra lineare*, Torino, Bollati Boringhieri, 1970, rist. 2000.

Lange F. A. (1866). *Geschichte des Materialismus und Kritik seiner Bedeutung in der Gegenwart*. Iserlohn. Tr. it. *Storia critica del materialismo*, Milano, Monanni, 1932, 2 voll.

Lauter J. (1953). *Die Prinzipien und Methoden der Geometrie bei Leibniz*. Tesi di dottorato, Aachen Universität.

Lawvere W. F. (1996). "Grassmann's Dialectics and Category Theory". In Schubring (1996a), pp. 255-64.

Leibniz G. W. (1703). *Nouveaux essais sur l'entendement humain*. 1703-04. Rist. in Leibniz (1923), VI, 6, pp. 43-527. Tr. it. a cura di M. Mugnai, *Nuovi saggi sull'intelletto umano*, Editori Riuniti, Roma, 1982 (1993).

Leibniz G. W. (1765). *Oeuvres philosophiques Latines et Françoises*. A cura di R.E. Raspe, Amsterdam-Leipzig.

Leibniz G. W. (1849). *Mathematische Schriften*. A cura di C. I. Gerhardt, 7 voll., Berlin e Halle, 1849-63.

Leibniz G. W. (1875). *Die Philosophische Schriften*. Weidemann, Berlin. A cura di C.I. Gerhardt, 7 voll. 1875-90.

Leibniz G. W. (1879). *Lettera a Ch. Huygens*. Originariamente pubblicata in *Christian Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae*, Uylenbroek, 2 voll., Hagae comitum, 1833, vol. I, pp. 7-22 e vol. II, pp. 6-13. Rist. in "Studies in a Geometry of Situation with a letter to Christian Huygens", in Leibniz, *Philosophical Papers and Letters*, a cura di L.E. Loemker, vol. I, Chicago, 1956, pp. 381-396. Tr. it. in Leibniz, *Scritti di logica*, a cura di F. Barone, Laterza, Roma-Bari, 1992, vol. II, pp. 454-470.

Leibniz G. W. (1899). *Briefwechsel von G.W. Leibniz mit Mathematikern*. Berlin.

Leibniz G. W. (1903). *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*. Alcan. A cura di L. Couturat, Alcan, Paris.

Leibniz G. W. (1923). *Sämtliche Schriften und Briefe*. Akademie Verlag, Berlin.

Leibniz G. W. (1968). *Scritti di logica*. A cura di F. Barone, Zanichelli, Bologna, 2a ed. riv. Laterza, Roma-Bari, 2 voll. 1992.

Leibniz G. W. (1997). *Monadologia*. Testo francese, tedesco e latino a fronte, a cura di S. Cariati, Rusconi, Milano.

Leibniz G. W. (1999). *Discorso di Metafisica*. Testo francese a fronte, a cura di S. Cariati, Rusconi, Milano.

Leibniz G. W. (2000). *Scritti filosofici.* A cura di M. Mugnai e di E. Pasini, UTET, Torino.

Lewis A. (1995). "Hermann Grassmann and the Algebraization of Arithmetic". In Schreiber (1995), pp. 47-58.

Lewis A. C. (1975). *An Historical Analysis of Grassman's Ausdehungslehre of 1844.* Tesi di dottorato, University of Texas, Austin.

Lewis A. C. (1977). "H. Grassmann's Ausdehnungslehre and Schleiermacher's Dialektik". *Annals of Science*, **34**, 103–162.

Lewis A. C. (1981). "Justus Grassmann's School Programs as Mathematical Antecedents of Hermann Grassmann's 1844 Ausdehnungslehre". In *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, a cura di H.N. Jahnke e M. Otte, Reidel, Dordrecht, pp. 255-67.

Lewis A. C. (1996a). "Some Influences of Hermann Graßmann's Program on Modern Logic". In Angelelli and I., Cerezo, M. editori, *Studies on the History of Logic: Proceedings of the III. Symposium on the History of Logic*, de Gruyter, Berlin-New York, pp. 377-82.

Lewis A. C. (1996b). "The Influence of Justus Grassmann's Theory of Tides on the Ausdehnungslehre". In Schubring (1996a), pp. 29-36.

Lewis C. I. (1918). *A Survey of Symbolic Logic.* Univesity of California Press, California.

Lie S. (1888). *Theorie der Transformationsgruppe.* Leipzig. 3 voll.

Loria G. (1893). *Le scienze esatte nell' antica Grecia.* Antica Tipografia Soliani, Modena. 5 voll.

Lotze A. (1923). "Systeme Geometrischer Analyse II". In *Enzykl. Math. Wiss.*, vol. 1, III AB 11, pp. 1425-1550.

Lounesto P. (1997). *Clifford Algebras and Spinors.* Cambridge University Press, Cambridge.

Lowe V. (1975). "A. N. Whitehead on His Mathematical Goals: a Letter of 1912". *Annals of science*, **32**, 85–101.

Macfarlane A. (1904). *Bibliography of Quaternions and Allied Systems of Mathematics.* Dublin.

MacLane S. (1981). "History of Abstract Algebra: Origin, Rise and Declin of a Movement". *American Mathematical Heritage: Algebra and Applied Mathematics*, **13**, 3–35.

MacLane S. (1986). *Mathematics, Form and Function.* Springer, Berlin.

MacLane S. (1996). "Structure in Mathematics". *Philosophia Mathematica*, **4**(2), 174–183.

Magnani L. (1990). *Filosofia e geometria. Temi teorici e storici.* Guerini e Associati, Milano.

Magnani L., editore (1991a). *Conoscenza e matematica.* Marcos Y Marcos, Milano.

Magnani L. (1991b). "Filosofia e geometria: fra Kant e Poincaré". In Magnani (1991a), pp. 185-222.

Maier A. (1951). *Zwei Grundprobleme der scholastischen Naturphilosophie: das Problem der intensiven Grössen, die Impetustheorie.* Edizioni di Storia e Letteratura, Roma.

Malykhina G. (1981). "Grassmann's 'Forms of Rigorous Science' and Their Relation to Natural Language". *Vestnik Beloruss. Gos. Univ. Ser.*, **1**(1), 72–73.

Mangione C. e Bozzi S. (1993). *Storia della logica. Da Boole ai nostri giorni.* Garzanti, Milano.

Marcolongo R. (1909). "Per l'unificazione delle notazioni vettoriali". In *Atti del IV Congresso Internazionale dei matematici. Roma (1908)*, vol. III, Roma, pp. 191-7.

Maxwell J. C. (1871). "On the Mathematical Classification of Physical Quantities". *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**, 224–32. In Maxwell (1965), vol. 2, pp. 257-66.

Maxwell J. C. (1873a). "Quaternions". *Nature*, **9**, 137–8. Recensione a "Kelland e Tait, *Introduction to Quaternions*, 1873" non firmata ma attribuita a Maxwell in Knott (1911), in Macfarlane (1904) e in Crowe (1967).

Maxwell J. C. (1873b). *Treatise on Electricity and Magnetism.* Oxford. 2 voll. (ed. 1891).

Maxwell J. C. (1965). *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell.* Niven, New York. 2 voll.

Mehrtens H. (1979). *Entstehung der Verbandstheorie.* Gerstenberg, Hildesheim.

Mill J. S. (1973). *A System of Logic Ratiocinative and Inductive, being a Connected View of the Principles of Evidence and the Methods of Scientific Investigation.* University of Toronto Press, Toronto. A cura di J.M. Robson, 2 voll. 1973-74. Tr. it. a cura di M. Trinchero, *Sistema di logica deduttiva e induttiva*, UTET, Torino, 1988, 2 voll.

Möbius A. F. (1827). *Der Barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt und insbesondere auf die Bildung neuer Classen von Aufgaben und die Entwickelung mehrerer Eigenschaften der Kegelschnitte*. Barth, Leipzig. Rist. in *Gesammelte Werke*. A cura di R. Baltzer, 4 voll. Hirtzel K G, Leipzig, 1915. Rist. Sändig, Wiesbaden, 1967.

Moiso F. (1994). "Formbildung, Zufall und Notwendigkeit. Schelling und die Naturwissenschfaten um 1800". In Heuser-Keßler e Jacobs (1994), pp. 73-112.

Montucla J. E. (1758). *Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours*. Jombert, Paris. 2 voll.

Moore G. H. (1995). "The Axiomatization of Linear Algebra: 1875-1940". *Historia Mathematica*, **22**, 262–303.

Moretto A. (1995). "La rilevanza matematica della discussione sui concetti di continuo e di funzione nella filosofia tedesca dell'età dell'Illuminismo. Grandezza estensiva, continua e intensiva in Leibniz, Wolff, Baumgarten e Kant". *Fenomenologia e società*, **2-3**, 109–153.

Muenzenmayer H. P. (1979). "Der Calculus Situs und die Grundlagen der Geometrie bei Leibniz". *Studia Leibnitiana*, **11**(2), 274–300.

Mugnai M. (1982). *La logica da Leibniz a Frege*. Loescher, Torino.

Mugnai M. (1992). *Leibniz' Theory of Relations*. Steiner, Stuttgart.

Mugnai M. (2001). *Introduzione alla filosofia di Leibniz*. Einaudi, Torino.

Nàdenik Z. (1996). "Reception of Grassmann's ideas in Bohemia". In Schubring (1996a), pp. 147-154.

Neurath O. (1936). "Une Encyclopédie internationale de la science unitaire". In *Actes du Congrés International de Philosophie Scientifique*, Sorbonne, Paris, 1935, vol. II. Unité de la Science, Hermann, Paris, pp. 54-9.

Newton I. (1707). *Arithmetica Universalis; sive De Compositione et Resolutione Arithmetica Liber. Cui accessit Halleiana Aequationum Radices Arithmeticae inveniendi methodus. In Usum Juventutis Academicae*. Cambridge. Tr. ingl. della 2a ed. lat. riv., *Universal Arithmetick: or, a Treatise of Arithmetical Composition and Resolution*. A cura di Ralphson e Cunn, Senex, London, 1728.

Novy L. (1973). *Origins of Modern Algebra*. Noordhoff/Academia, Leyden-Prag.

Olivieri Tonelli G. (1974). "Per una storia della classificazione delle scienze: Ephraim Chambers". *Filosofia*, **25**, 345–372.

Otte M., editore (1974). *Mathematiker über die Mathematik*. Springer, Berlin.

Otte M. (1989). "The Ideas of Hermann Grassmann in the Context of the Mathematical and Philosophical Tradition since Leibniz". *Historia Mathematica*, **16**, 1–35.

Otte M. (1990). "Gleichheit und Gegenständlichkeit in der Begründung der Mathematik im 19. Jahrhundert - dargestellt am Beispiel der Auffassungen von H. Grassmann, B. Bolzano und G. Frege". In *Konzepte des mathematischen Unendlichen im 19. Jahrhundert*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, pp. 219-253.

Otte M. (1993). "Kontinuitätsprinzip und Prinzip der Identität des Ununterscheidbaren". *Studia Leibnitiana*, **25**(1), 70–89.

Otte M. e Panza M., editori (1997). *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.

Palladino D. (1995). *Elementi di algebra. Numeri e strutture - Calcolo combinatorio - Matrici e determinanti - Sistemi lineari.* Editrice La Scuola, Brescia.

Pasch M. (1884). *Vorlesungen über die neuere Geometrie*. Leipzig. Rist. Springer, Berlin, 1976.

Peano G. (1887). *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale*. Bocca, Torino.

Peano G. (1888). *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann*. Bocca, Torino.

Peano G. (1894). "Recensione: Hermann Grassmann's Gesammelte mathematische und physikalische Werke". *Rivista di matematica*, **4**, 167–169.

Peano G. (1899). *Arithmetices Principia*. Bocca, Torino. Rist. in *Arithmetices Principia. Principi di geometria e di logica*, Aragno, Torino, 2001, pp. 37-81.

Peckhaus V. (1990). *Hilbertprogramm und kritische Philosophie: das Göttinger Modell interdisziplinarer Zusammenarbeit zwischen Mathematik und Philosophie*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Peckhaus V. (1996). "The influence of Hermann Günther Grassmann and Robert Grassmann on Ernst Schröder's Algebra of Logic". In Schubring (1996a), pp. 217-27.

Peckhaus V. (1997). *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft. Leibniz und die Wiederentdeckung der formalen Logik im 19. Jahrhundert.* Akademie Verlag, Berlin.

Peirce C. S. (1877). "Note on Grassmann's Calculus of Extension". *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, **13**, 115–6. Rist. in Peirce (1960a), vol. 2. *Elements of Logic*, pp. 102-3.

Peirce C. S. (1960a). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce.* Harvard University Press, Cambridge (Mass.). 8 voll.

Peirce C. S. (1960b). "The Internal Multiplication and the Addition of Logic". § 1 di *Algebra of Logic* , II. The Logic of Non-Relative Terms, in *Collected Papers*, pp. 125-133.

Petsche H.-J. (1979a). *Leben und Wirken Hermann Günther Graßmanns.* Potsdam. Päd. Hochschule Hist. Phil. Fak., Diss. A, 2 voll.

Petsche H.-J. (1979b). "Leben und Wirken Hermann Günther Graßmanns". *Wiss. Z. d. Päd. Hochschule Potsdam*, **23**(4), 626–29.

Petsche H.-J. (1980a). "Hermann G. Graßmanns 1844er 'Ausdehnungslehre' und die Begründungsproblematik der Mathematik". *Wiss. Z. 2d. Päd. Hochschule Güstrow*, **18**(2), 219–235.

Petsche H.-J. (1980b). "Einige Bemerkungen zur Bedeutung des mathematischen Lebenswerkes von Hermann Günther Graßmann (1809-1877) für die Mathematikgeschichte". *Wiss. Z. d. Päd. Hochschule Köthen*, **7**(1), 83–86.

Petsche H.-J. (1987). "Der Einfluss der romantischen Naturphilosophie auf die Revolutionierung der Mathematik- und Geometrieauffassung durch Hermann Graßmann (1809-1877)". *Wissenschaftliche Beiträge der Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald. Greifswalder Philosophische Hefte*, **5**, 81–87.

Pfalzgraf J. (1996). "An Application of Grassmann Geometry to a Problem in Robotics". In Schubring (1996a), pp. 337-43.

Platone (1991). *Tutti gli scritti.* A cura di G. Reale, Rusconi, Milano.

Poggi S. (2000). *Il genio e l'unità della natura. La scienza della Germania romantica (1790-1830).* il Mulino, Bologna.

Poncelet J. V. (1865). *Traité des proprietés projectives des figures.* Gauthier-Villars, Paris.

Proclo (1533). *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii.* Tr. it. condotta sull'edizione del Friedlein (Lipsiae, 1873) *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Giardini Editore, Pisa, 1978.

Pycior H. (1997). *Symbols, Impossible Numbers and Geometric Entanglements. British Algebra through the Commentaries on Newton 'Universal Arithmetick'.* Cambridge University Press, Cambridge-New York.

Radbruch K. (1994). "Was kann die heutige Mathematik von Schelling lernen?". In Heuser-Keßler e Jacobs (1994), pp. 55-72.

Radu M. (2000). "Justus Grassmann's Contributions to the Foundations of Mathematics: Mathematical and Philosophical Aspects". *Historia Mathematica*, **27**, 4–35.

Reed D. (1995). *Figures of Thought. Mathematics and Mathematical Texts.* Routledge, London-New York.

Reich K. (1995). "Über die Ehrenpromotion Hermann Grassmanns an der Universität Tübingen im Jahre 1876". In Schreiber (1995), pp. 59-63.

Reich K. (1996). "Emergence of Vector Calculus in Physics: the Early Decades". In Schubring (1996a), pp. 197-210.

Reinhardt F. e Soeder H. (1974). *Atlas zur Mathematik.* Deutscher Taschenbuch Verlag, München. 7a ed. Tr. it. *Atlante di matematica*, Hoepli, Milano, 1993.

Riemann B. (1854). *"Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen".* Rist. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1867. Tr. it. a cura di R. Pettoello in *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti scientifici e filosofici*, Boringhieri, Torino, 1994, pp. 3-20.

Ritter J., editore (1971). *Historisches Wörterbuch der Philosophie.* Schwabe, Basel and Stuttgart. 11 voll., 1971-2001.

Robin L. (1937). "La classification des sciences chez Plato". In *Travaux du IXe Congrès International de Philosophie. Congrès Descartes*, IV. L'Unité de la Science: la Méthode et les méthodes, a cura di R. Bayer, I, Hermann, Paris, pp. 83-8.

Robin L. (1968). *Platon.* Presses Universitaires de France, Paris. Tr. it. di F. Calabi, *Platone*, Cisalpino, Milano, 1988.

Rossi P. (1960). *Clavis universalis. Arti della memoria e logica combinatoria da Lullo a Leibniz.* Ricciardi, Milano-Napoli. Rist. il Mulino, Bologna, 1983.

Rossi P., editore (1988). *Storia della scienza moderna e contemporanea.* UTET, Torino. Rist. TEA, Milano, 2000. 3 voll. I. Dalla rivoluzione scientifica all'età dei lumi. II. Dall'età romantica alla società industriale. III. Il secolo ventesimo.

Rothe H. (1916). "Systeme Geometrischer Analyse I". In *Enzykl. Math. Wiss.*, vol. 1, III AB 11, pp. 1283-4.

Röwe D. (1996). "The reception of Grassmann's Work in Germany during the 1870s". In Schubring (1996a), pp. 131-146.

Russell B. (1897). *An Essay on the Foundations of Geometry.* Cambridge University Press, Cambridge. Rist. Dover, New York, 1956.

Saint-Venant A. B. (1845). "Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur leur usage pour simplifier la mécanique". *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, **21**, 620–25.

Sandkuhler H. J., editore (1999). *Enzyklopädie Philosophie.* Meiner, Hamburg. 2 voll.

Sandküjler H. J. (1995). *Interaktionen zwischen Philosophie und empirischen Wissenschaften.* Lang, Frankfurt am Main.

Sarton G. (1945). "Grassmann - 1844". *Isis*, **35**(4), 326–330.

Schelling F. W. J. (1800). "Allgemeine Deduktion des dynamischen Processes oder der Kategorien der Physik". In Schelling (1856), vol. IV, pp. 1-78.

Schelling F. W. J. (1802). "Über die Konstruktion in der Philosophie". *Kritisches Journal.* Rist. in Schelling (1856), vol. V.

Schelling F. W. J. (1856). *Sämmtliche Werke.* A cura di A. Schelling, Cotta, Stuttgart, voll. I.1-10, 1856-61 (II.1-4).

Schenk G. (1973). *Zur Geschichte der logischen Form. I. Einige Entwicklungstendenzen von der Antike bis zum Ausgang des Mittelalters.* DVW, Berlin.

Schilpp A. (1963). *The Philosophy of Rudolf Carnap.* Tr. it. *La filosofia di Rudolf Carnap*, il Saggiatore, Milano, 1974, 2 voll.

Schlegel V. (1875). *System der Raumlehre, nach den Prinzipien der Grassmannschen Ausdehnungslehre und als Einleitung in dieselbe dargestellt. Zweiter Teil: Die Elemente der modernen Geometrie und Algebra.* Teubner, Leipzig.

Schlegel V. (1878). *Hermann Grassmann. Sein Leben und seine Werke.* Brockhaus, Leipzig.

Schleiermacher F. (2001). *Friedrich Schleiermacher Dialektik.* A cura di M. Frank, 2 voll., Suhrkamp, Frankfurt am Main.

Schleiermacher F. D. (1802). *Grundlinien einer Kritik der bisherigen Sittenlehre*. In Schleiermacher (1839b), vol. III.1.

Schleiermacher F. D. (1839a). *Dialektik (1811)*. Reimer, Berlin. Pubbl. postumo. Rist. Meiner, Hamburg, 1986.

Schleiermacher F. D. (1839b). *Friedrich Schleiermacher's sämmtliche Werke*. Reimer, Berlin.

Schlote K. (1985). "H. Graßmanns Beitrag zur Algebrentheorie". *Janus*, **72**, 225–55.

Schlote K.-H. (1996). "Hermann Günther Grassmann and the Theory of Hypercomplex Number Systems". In Schubring (1996a), pp. 165-74.

Scholz E. (1980). *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*. Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart.

Scholz E. (1984). "Hermann Grassmanns Analysis in Vektorräumen". *Math. Semesterber.*, **31**(2), 177–194.

Scholz E., editore (1990). *Geschichte der Algebra. Eine Einführung*. Wissenschaftsverlag, Mannheim.

Scholz E. (1994). "Schelling und die dynamistische Kristallographie im 19. Jahrhundert". In Heuser-Keßler e Jacobs (1994), pp. 219-230.

Scholz E. (1996). "The Influence of Justus Grassmann's Crystallographic Works on Hermann Grassmann". In Schubring (1996a), pp. 37-46.

Schreiber P., editore (1995). *Hermann Grassmann: Werk und Wirkung. Proceedings of the International Conference on the Occasion of the One Hundred and Fiftieth Anniversary of the First Publication of the* Lineale Ausdehnungslehre. Ernst-Moritz-Arndt-Universität, Greifswald.

Schröder E. (1890). *Vorlesungen über die Algebra der Logik*. Teubner, Leipzig. 3 voll.

Schubring G., editore (1996a). *Hermann Günther Grassmann (1809-1877): Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar: Papers from a Sesquicentennial Conference*. Kluwer, Dordrecht.

Schubring G. (1996b). "Reflexions on the Complex History of Grassmann's Reception". Introduzione a Schubring (1996a), pp. vii-xxix.

Schubring G. (1996c). "Remark on the Fate of Graßmann's Nachlaß". In Schubring (1996a), pp. 19-25.

Schubring G. (1996d). “The Cooperation between Hermann and Robert Grassmann on the Foundations of Mathematics”. In Schubring (1996a), pp. 59-70.

Schur F. (1898). *Lehrbuch der analytischen Geometrie*. Veit, Leipzig.

Schwartze H. (1996). “On Graßmann’s Life and His Work as a Mathematics Teacher”. In Schubring (1996a), pp. 7-18.

Sebestik J. (1992). *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*. Vrin, Paris.

Sernesi E. (1989). *Geometria*. Bollati Boringhieri, Torino. 2a ediz. riv. e ampl. 2000.

Snapper E. e Troyer R. J. (1971). *Metric Affine Geometry*. Academic Press, New York. Rist. Dover, New York, 1989.

Spencer H. (1893). *Classification des sciences*. Alcan, Paris. Titolo originale: *The Classification of Sciences*, 1864, terza edizione del 1871.

Stein H. (1990). “Eudoxos and Dedekind: on the Ancient Greek Theory of Ratios and Its Relations to Modern Mathematics”. *Synthese*, **84**, 163–211.

Steinitz E. (1910). “Algebraische Theorie der Körper”. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **137**, 167–302.

Stevin S. (1585). *L’Arithmétique*. Plantin, Leyde. In *The Principal Works of Simon Stevin*, vol. 2. Mathematics, a cura di D. J. Struik, Swtes & Zeitlinger, Amsterdam, 1958, pp. 488-507.

Stolz O. (1885). *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*. Teubner, Leipzig. 2 voll. 1885-86. I. Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen, II. Arithmetik der Complexen Zahlen.

Sturm R., Schröder E., e Sohncke L. (1878). “Hermann Grassmann. Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten” (Mit einem Verzeichnisse sämmtlicher Schriften Grassmann’s). *Mathematische Annalen*, **14**(1), 1–45.

Suppes P. e Zinnes J. (1963). “Basic Measurement Theory”. In *Handbook of Mathematical Psychology*, a cura di R.D. Luce, R.R. Bush e E. Galanter, Wiley & Sons, New York-London-Sydney, cap. 1, pp. 1-76.

Swimmer A. (1996). “The Completion of Graßmann’s naturwissenschaftliche Methode”. In Schubring (1996a), pp. 265-80.

Tait P. G. (1867). *Elementary Treatise on Quaternions*. Oxford. 2a ed. Oxford, 1873.

Thiel C. (1995). *Philosophie und Mathematik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Timerding H. E. (1902). *Geometrische Grundlegung der Mechanik eins starren Körpers.* Leipzig.

Toebies R. (1996). "The Reception of Graßmann's Mathematical Achievements by A. Clebsch and His School". In Schubring (1996a), pp. 117-130.

Toepell M. (1995). "Zum Einfluss Grassmanns auf die Grundlagen der Geometrie". In Schreiber (1995), pp. 71-86.

Torretti R. (1978). *Philosophy of Geometry From Riemann to Poincaré.* Reidel, Dordrecht.

Trivero C. (1899). *Classificazione delle scienze.* Hoepli, Milano.

Turner S. R. (1996). "The Origins of Colorimetry: What Did Helmholtz and Maxwell Learn from Graßmann?". In Schubring (1996a), pp. 71-86.

Vailati G. (1900). Recensione di "J.P. Durand De Gros: Aperçus de taxonomie générale, Paris, Alcan, 1899". *Rivista di scienze biologiche*, **1-2**.

Van der Waerden B. L. (1930). *Moderne Algebra.* Springer, Berlin.

Van der Waerden B. L. (1985). *A History of Algebra.* Springer, Berlin-Heidelberg.

Veronese G. (1889). "Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede". *Memorie della Reale Accademia dei Lincei.* Atti della classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali, **4** (6), 603-24.

Veronese G. (1891). *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Lezioni per la scuola di Magistero di Padova.* Tipografia del Seminario, Padova.

Veronese G. (1905). "La geometria non-Archimedea. Una questione di priorità". *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, **14**(5), 347–351.

Veronese G. (1908). "La geometria non archimedea". In *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*, Roma, 1908, vol. I, pp. 197-208. Tr. fr. in *Bulletin des sciences mathematiques*, 1909, **33**, 2, 186-204.

Verra V. (1979). "Costruzione, scienza e filosofia in Schelling". In *Romanticismo, Esistenzialismo, Ontologia della libertà*, Mursia, Milano, 1979, pp. 120-36.

Viète F. (1591). *In artem analyticen Isagoge.* In *Opera mathematica, recognita Francisci à Schooten*, Leyden, 1646, rist. Olms, Hildesheim-New York, 1970, pp. 1-12.

Vuillemin J. (1962). *La philosophie de l'algèbre. I. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'Algèbre moderne.* PUF, Paris.

Wallis J. (1657). *Mathesis universalis.* In *Opera*, vol. I, Theatro Sheldoniano, Oxonii, 1695.

Wang H. (1957). "The Axiomatization of Arithmetic". *The Journal of Symbolic Logic*, **22**(2), 145–58.

Weber H. (1895). *Lehrbuch der Algebra.* Vieweg, Braunschweig. 2 voll. I: 1895, II: 1896.

Whitehead A. N. (1898). *A Treatise on Universal Algebra, with Applications.* Cambridge University Press, Cambridge. rist. Hafner, New York, 1960.

Wieleitner H. (1911). *Geschichte der Mathematik.* Leipzig. 2 voll. 1911-1921.

Wolff C. (1716). *Mathematisches Lexicon.* Gleditsch, Leipzig. rist. anast. in *Gesammelte Werke*, Olms, Hildesheim, 1977.

Wolff C. (1730). *Philosophia prima sive Ontologia.* Francofurti et Lipsiae. 2a ed. 1736, rist. in *Gesammelte Werke*, II. vol. 4, Olms, Hildesheim, 1977.

Wundt W. (1899). *System der Philosophie.* Kröner, Leipzig. IV ed. 1919.

Wussing H. (1969). *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Yaglom I. M. e Sossinsky S. (1988). *Felix Klein and Sophus Lie : Evolution of the Idea of Symmetry in the Nineteenth Century* . Birkhäuser Verlag, Boston.

Zaddach A. (1994). *Grassmanns Algebra in der Geometrie.* Wissenschaft-Verlag, Mannheim.

Zaddach A. (1996). "Regressive Products and Bourbaki". In Schubring (1996a), pp. 285-296.

Zeuthen H. (1903). *Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert.* Teubner, Leipzig.

Ziwet A. (1885). "A Brief Account of H. Grassmann's Geometrical Theories". *Annals of Math.*, **2**, 1–11, 25–34.

Indice analitico