



Apreensão de objetos geométricos com o GeoGebra: um estudo com futuros professores de matemática

Idelmar André Zanella

Secretaria de Estado da Educação do Paraná

Valdeni Soliani Franco

Universidade Estadual de Maringá

Ana Paula Canavarro

Universidade de Évora

Resumo

Este estudo teve por objetivo compreender como futuros professores de Matemática fazem a apreensão de objetos geométricos a partir da produção de representações semióticas suscitadas durante a resolução de uma tarefa de Geometria Euclidiana com o apoio do GeoGebra. A abordagem do estudo foi qualitativa e seguiu a perspectiva do paradigma interpretativo. A modalidade de pesquisa foi o estudo de caso. Os dados recolhidos foram analisados à luz da teoria dos registros de representação semiótica e incluem as produções matemáticas dos participantes. Os resultados do estudo mostram que as apreensões dos objetos geométricos pelos estudantes ocorreram em virtude da articulação mútua entre a tomada de consciência (objetivação) e as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva relativas a uma figura geométrica, bem como pela coordenação de diferentes representações possibilitadas pelo GeoGebra.

Palavras-chave: Geometria Euclidiana. Representações semióticas. Futuros professores.

57

Apprehension of geometric objects with the GeoGebra: a study with undergraduate mathematics' teachers

Abstract

This study aimed to understand how future teachers of mathematics make the apprehension of geometric objects from the production of semiotic representations raised during the resolution of a task of Euclidean Geometry with the support of GeoGebra. The study approach was qualitative and followed the perspective of the interpretive paradigm. The research modality was the case study. The collected data were analyzed in light of the theory of semiotic representation registers and included the mathematical productions of the participants. The results of the study show that students' apprehensions of geometric objects occurred due to the mutual articulation between the awareness (objectivation) and the perceptive, sequential, operative and discursive apprehensions related to a geometrical figure, as well as the coordination of different representations made possible by GeoGebra.

Keywords: Euclidean geometry. Semiotics representations. Futures teachers.

Apreensão de objetos geométricos com o GeoGebra: um estudo com futuros professores de matemáticas

Resumen

Este estudio tuvo por objetivo comprender cómo futuros profesores de Matemáticas hacen la aprehensión de objetos geométricos a partir de la producción de representaciones semióticas suscitadas durante la resolución de una tarea de Geometría Euclidiana con el apoyo del GeoGebra. El enfoque del estudio fue cualitativo y siguió la perspectiva del paradigma interpretativo. La modalidad de investigación fue el estudio de caso. Los datos recogidos fueron analizados a la luz de la teoría de los registros de representación semiótica e incluyen las producciones matemáticas de los participantes. Los resultados del estudio muestran que las aprehensiones de los objetos geométricos por los estudiantes ocurrieron en virtud de la articulación mutua entre la toma de conciencia (objetivación) y las aprehensiones perceptiva, secuencial, operatoria y discursiva relativas a una figura geométrica, así como por la coordinación de diferentes representaciones que permite el GeoGebra.

Palabras clave: Geometría Euclidiana. Representaciones semióticas. Futuros profesores.

Introdução

58

Rodrigues e Bernardo (2011) apontam que o ensino e aprendizagem de geometria se revelam carentes de investigação nos mais diversos níveis de ensino. De acordo com Battista (2007), a geometria é uma área em que os estudantes revelam dificuldades de diversas ordens e, por isso, se justifica a pertinência da realização de estudos que incidem sobre ela.

[...] os resultados de estudos empíricos podem, e devem, imperiosamente, ser acolhidos, no sentido de uma compreensão mais aprofundada da forma como se desenvolve o pensamento geométrico dos alunos, desde os níveis mais básicos de escolaridade aos mais avançados, assim como das implicações didáticas emergentes (RODRIGUES, BERNARDO, 2011, p. 339).

Nesse prisma, o presente estudo busca contribuir com a Educação Matemática no intuito de analisar a formação em geometria do futuro professor de Matemática.

Segundo Gravina (1996; 2015), as principais dificuldades reveladas por estudantes de licenciatura em Matemática, acerca da aprendizagem da geometria, têm origem no aspecto estático das representações semióticas figurais.



As representações semióticas “[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas próprias limitações de significado e de funcionamento” (DUVAL, 1993, p. 39).

Neste sentido, uma representação de um objeto geométrico, que compreende componentes conceitual e figural, é apresentada a partir da representação figural, na qual os estudantes têm dificuldade em: (1) perceber na representação figural configurações simples dentro de configurações complexas e (2) diferenciar a representação do próprio objeto (GRAVINA, 1996, 2015).

Assim, este estudo se insere no contexto da formação inicial de professores de Matemática, e foi desenvolvido no decorrer de uma disciplina de Geometria Euclidiana, componente curricular de um curso de licenciatura e bacharelado em Matemática de uma universidade ao norte do Estado do Paraná. O estudo teve por objetivo compreender como futuros professores de Matemática fazem a apreensão de objetos geométricos com base na produção de representações semióticas suscitadas durante a resolução de uma tarefa de Geometria Euclidiana com o apoio do *software* GeoGebra.

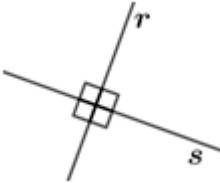
Principais ideias da teoria dos registros de representação semiótica

De acordo com Duval (2011), a aprendizagem em Matemática requer a utilização de sistemas de expressão e de representação, imagens e a língua natural, uma vez que a atividade matemática demanda modos de funcionamento cognitivos que necessitam da coordenação e mobilização de diferentes registros de representação semiótica. Neste sentido, a atividade matemática envolve especificamente operações semióticas, as quais estruturam a atividade mental, que compreende associações verbais, as formas de cálculos, as figuras geométricas, entre outros (DUVAL, 2004a).

Nesta perspectiva, “[...] as produções dos alunos em matemática são produções semióticas” (DUVAL, 2011, p. 149) compreendidas em um registro de representação semiótica que é “[...] um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza, essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que permite efetuar” (DUVAL, 2011, p. 70).

Além disso, os registros de representação semiótica permitem identificar variáveis inerentes à atividade cognitiva do sujeito e que auxiliam a compreensão em Matemática (DUVAL, 2011). Neste sentido, são apresentados, no Quadro 1, três diferentes representações semióticas para os objetos geométricos “retas perpendiculares”.

Quadro 1
Diferentes representações para “retas perpendiculares”

(representação no registro da língua natural)	(representação no registro simbólico)	(representação no registro figural)
r e s são retas perpendiculares	$r \perp s$	

Fonte: Elaborado pelos autores.

60

De acordo com Duval (2011), as produções dos estudantes em geometria devem ocorrer em, pelo menos, dois registros de representação semiótica; um deles é a língua natural, na sua modalidade oral ou escrita, e o outro é o figural. O primeiro registro é utilizado para enunciar definições, teoremas e conjecturas; o segundo para ilustrar figuras geométricas, suas propriedades e relações.

Nesta perspectiva, para potencializar a apreensão dos objetos geométricos, é necessário considerar quatro diferentes apreensões relativas a uma figura geométrica, a saber: apreensão perceptiva, apreensão discursiva, apreensão operatória e apreensão sequencial (DUVAL, 2004, 2012, 2012a).

A apreensão perceptiva diz respeito ao reconhecimento visual das formas, marcas e contornos que constituem figura. A discursiva está relacionada às hipóteses que a figura suscita. A apreensão operatória se refere às modificações geométricas possíveis de uma figura e nas reorganizações possíveis dessas modificações. A sequencial trata, especificamente, da construção da figura ou da descrição sobre a reprodução de uma figura (DUVAL, 2012, 2012a). De acordo com este autor:



[...] recorrer ao registro das figuras apresenta, em geometria, uma particularidade essencial: uma figura representa uma situação geométrica apenas na medida em que a significação de certas unidades figurais e de algumas de suas relações esteja explicitamente definida de entrada. Para fixar as propriedades do objeto que se deseja representar no desenho, não é suficiente o simples reconhecimento perceptivo das unidades figurais de dimensão 2 ou de relações entre unidades figurais de dimensão 1. Em geometria, não há desenho que represente por si mesmo, quer dizer, não há desenho sem legenda. Um mesmo desenho pode representar situações matemáticas muito diferentes. É necessário, pois uma indicação verbal para ancorar a figura como representação de tal objeto matemático (DUVAL, 2004, p. 168, tradução nossa).

Neste sentido, Duval (2011) argumenta que os registros de representação semiótica são ferramentas que permitem avaliar a pertinência cognitiva de seqüências de tarefas aplicadas aos alunos, ou seja:

[...] sua adequação às condições necessárias para desenvolver compreensão. Eles permitem definir o campo de trabalho cognitivo requerido para que os alunos possam atingir a compreensão dos conhecimentos matemáticos a adquirir. Eles permitem igualmente analisar suas produções e colocar em evidência seus pontos de bloqueio (DUVAL, 2011, p. 141).

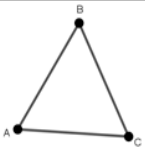

61

Dessa forma, os registros de representação semiótica devem permitir, segundo Duval (2004), que se cumpram três atividades cognitivas intrínsecas a toda representação.

A primeira diz respeito à *formação* de uma marca ou um conjunto de marcas perceptíveis de modo que se tornem identificáveis como uma representação de alguma coisa num certo registro de representação semiótica. De acordo com Duval (2004), os atos mais elementares de uma formação implicam designar nominalmente o objeto, reproduzir seu contorno (objeto geométrico) e reconhecê-lo perceptivelmente, codificar relações ou propriedades do objeto. No Quadro 2, apresenta-se um exemplo de formação de representação.

Quadro 2

Formação de uma representação

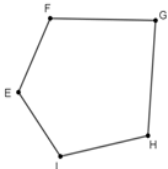
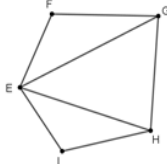
Registro figural (formação da representação figural de um triângulo)	Marcas perceptíveis e identificáveis da representação formada
	Pontos: ●; Caracteres: A, B e C Segmentos de reta: — Triângulo: 

Fonte: Elaborado pelos autores.

A segunda atividade cognitiva se refere ao tratamento de representações conforme regras particulares de um próprio sistema semiótico para obter outras representações (no próprio sistema) que possam favorecer a apreensão dos objetos matemáticos em relação às representações iniciais. O tratamento é uma transformação interna a um registro de representação (DUVAL, 2004). No Quadro 3, apresenta-se um exemplo de tratamento de uma representação.

Quadro 3

Tratamento de uma representação semiótica

Registro figural (inicial)	Registro figural (final)
	

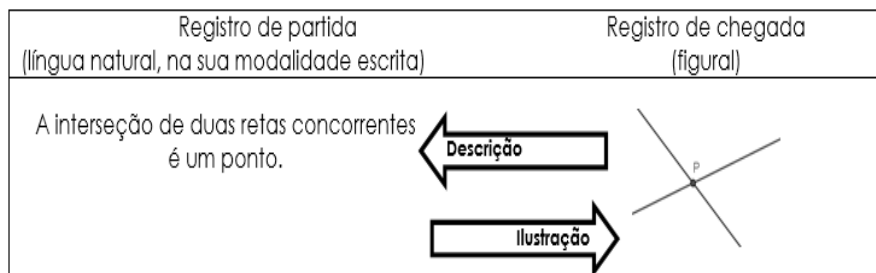
Fonte: Elaborado pelos autores.

Nesse exemplo, tem-se a representação do pentágono EFGHI formada no registro figural. Ao se traçar, por exemplo, as diagonais EG e EH do pentágono, diz-se que a representação inicial desse polígono recebeu um tratamento figural (uma reconfiguração) de modo que nossa apreensão perceptiva identifique, com base nesses segmentos, a representação dos triângulos EFG, EGH e EHI. Nesse caso, diz-se que pentágono ficou reconfigurado em três triângulos justapostos.



A terceira atividade cognitiva trata da *conversão* de registros de representações, em que se transforma a representação de um objeto produzida em um determinado sistema semiótico num outro sistema semiótico diferente, de modo que as representações de chegada possibilitem revelar outras significações relativas ao objeto matemático representado. A conversão é uma transformação externa em relação ao registro da representação de partida (DUVAL, 2004). No Quadro 4, apresenta-se um exemplo de conversão.

Quadro 4
Conversão de representações



Fonte: Elaborado pelos autores.

No exemplo do Quadro 4, se tem, no registro de partida (língua natural), a representação discursiva acerca dos objetos geométricos “retas concorrentes” e “ponto”, enquanto, no registro de chegada (figural), tem-se a representação de um ponto, denominado “P”, determinado pela interseção de duas retas concorrentes. De acordo com Duval (2004), a correspondência de uma representação discursiva (palavra, frase ou enunciado) com uma representação figural trata-se de uma ilustração, enquanto o processo inverso se refere a uma descrição.

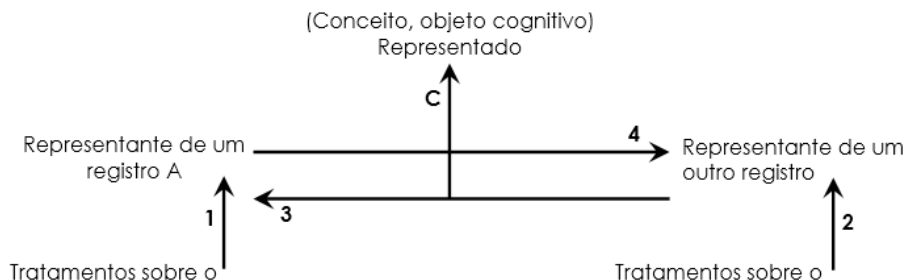
Ressalta-se, também, neste estudo, que a análise das produções dos estudantes está pautada no modelo cognitivo da representação sobre a função de objetivação, a qual “[...] corresponde à descoberta pelo próprio sujeito do que até então ele mesmo não supunha, mesmo se outros lhe houvessem explicado” (DUVAL, 2009, p. 41).

De acordo com Duval (2009), a função de objetivação compreende duas relações possíveis entre representante (signo utilizado para representar o objeto matemático) e representado (objeto matemático percebido, conceito e propriedades). A primeira relação se refere à atividade cognitiva de tratamento

do representante; a segunda refere-se à atividade cognitiva de conversão dos representantes, que é necessária à função de objetivação. A Figura 1 apresenta o modelo da representação pautado na função de objetivação.

Figura 1

Modelo da representação centrado sobre a função de objetivação



Fonte: Duval (2009, p. 89).

No modelo representado na Figura 1, Duval (2009) descreve que as flechas 1 e 2 referem-se às transformações internas a um registro, ou seja, tratamento, as flechas 3 e 4 referem-se às conversões que devem ser realizadas, enquanto a flecha C compreende a coordenação de dois registros. Segundo Duval (2004), é, durante o processo de coordenar diferentes registros de representação semiótica, que emerge a função de objetivação.

Ambientes de geometria dinâmica e o software GeoGebra

O avanço em tecnologias didáticas nos últimos anos, em especial, a computacional, tem levado à evolução de novas ferramentas educacionais (*softwares*) visando apresentar um significativo impacto sobre os métodos de ensino e aprendizagem da Matemática nas escolas em seus diversos níveis (BELLEMAIN, 2002; SEDLÁČEK, 2009; STAHL, 2013).

Nesse contexto, se enquadram os ambientes de geometria dinâmica, em que pesquisadores, professores e estudantes podem utilizá-los para fins de pesquisa, bem como para potencializar a compreensão de conceitos, características, propriedades e resultados sobre objetos geométricos representados



(BELLEMAIN, 2002; ISOTANI, BRANDÃO, 2006; SEDLÁCEK, 2009; STAHL, 2013; GRAVINA, 2015).

De acordo com Sedláček (2009), um ambiente de geometria dinâmica é caracterizado pelo uso de *softwares*, os quais oferecem ao sujeito a possibilidade de formar e manipular representações geométricas em um meio visual como, por exemplo, a tela de um computador.

Os ambientes de geometria dinâmica ganharam relevância com o potencial dos computadores pessoais, oferecendo interface gráfica a objetos, impulsionando o desenvolvimento de tecnologias para *softwares*, jogos e vídeos (STAHL, 2013). Nesta perspectiva, os ambientes de geometria dinâmica foram desenvolvidos para permitir aos usuários a construção de figuras geométricas com rótulos e movimentar as representações de objetos geométricos, de modo que as propriedades desses objetos preservem formas ou propriedades, o que caracteriza a dependência da figura. Além disso, em um ambiente de geometria dinâmica, é possível “[...] criar e experimentar diferentes representações dos objetos matemáticos” (NÓBRIGA, 2015, p. 69).

Segundo Goldin (2002), uma representação é uma configuração que pode representar algo, de alguma forma, visto que possibilita interpretar, conectar, corresponder, denotar, retratar, designar, descrever, codificar, significar, fazer referência ou simbolizar o representado (objeto). Complementando, as representações são ferramentas que possibilitam articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios matemáticos decorrentes do estudo de seus objetos (WOLECK, 2001). Nesse aspecto, ressalta-se que:

As representações têm um papel central na elaboração e evolução dos saberes e na construção dos conhecimentos pelo sujeito, o computador pode contribuir de forma significativa nesses processos com novos sistemas de representação. Os softwares de geometria dinâmica constituem exemplos do uso do computador na criação de novos sistemas de representação dos objetos da geometria (BELLEMAIN, 2002, p. 55).

Dessa forma, Gravina (2015) ressalta que os *softwares* de geometria dinâmica têm duas características fundamentais, a saber: (i) uma diz respeito à disponibilização da representação semiótica, ou seja, a figura dinâmica e (ii) a outra se refere à representação semiótica que informa a relação funcional entre objetos geométricos representados. Além disso, as construções são



dinâmicas, uma vez que podem ser modificadas em dimensão e posição sem a perda dos vínculos geométricos que as caracterizam (GERÔNIMO; BARROS; FRANCO, 2010).

Um *software* de geometria dinâmica “[...] possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes, o que seria praticamente impossível com régua e compasso” (ISOTANI; BRANDÃO, 2006, p. 121). Além disso, esses *softwares* fornecem um importante meio visual de situações geométricas, pois a capacidade de seus recursos em animar permite diversas maneiras de construção, movimentos, configurações rotativas e observações a partir de diferentes pontos de vista (OSTA, 1998).

Para Candeias e Ponte (2008), os *softwares* de geometria dinâmica permitem formar e movimentar as representações de objetos da Geometria Euclidiana, bem como explorar e investigar relações entre tais objetos. Esses autores enfatizam que as construções de figuras realizadas em ambientes de geometria dinâmica são rigorosas e, além do mais, é possível medir segmentos, ângulos, arcos, superfícies, volumes etc., bem como realizar cálculos com essas medidas.

66

“Em uma aula tradicional de geometria, o professor enuncia conceitos, definições e propriedades, assim o aluno apenas 'ouve' (e eventualmente 'vê' figuras estáticas)” (ISOTANI; BRANDÃO, 2006, p. 122). Entretanto, segundo esses autores, com os *softwares* de geometria dinâmica, o estudante tem a possibilidade de realizar testes e verificar hipóteses que ele próprio estabelece acerca de propriedades, características e conceitos dos objetos geométricos representados na tela do computador, pois, por meio da ação de arrastar e da manipulação direta, que compreende uma interação instantânea e reversível, o estudante pode refutar construções inconsistentes (ALMOULOUD; SALAZAR, 2015).

Desta forma, fica evidente que a geometria dinâmica apresenta três características, a saber: arrastar dinâmico, construção dinâmica e dependências dinâmicas. Arrastar pontos proporciona ao usuário formar figuras geométricas dinâmicas de modo a explorar essas figuras. E isso, não é possível de ser efetivado em meios fenomenológicos de produção de representações como, por exemplo, papiros, placas de argila, pergaminho, livros impressos, lápis, papel, giz e lousa, uma vez que não permitem variar tamanho e não são meios de comunicação interativos (STAHL, 2013).



De acordo com Almouloud e Salazar (2015), é fundamental o uso de *softwares* de geometria dinâmica quando se pretende trabalhar com figuras geométricas, uma vez que fornecem outra ótica sobre essas figuras, pois sua operação proporciona agrupamentos simultâneos por justaposição e sobreposição. Conforme esses autores, tais agrupamentos não são possíveis de ser realizados simultaneamente quando a atividade envolve ferramentas físicas como, por exemplo, régua, compasso, lápis etc.

Para Laborde (1998), os *softwares* de geometria dinâmica potencializam a percepção visual, a qual desempenha um importante papel no processo de resolução de tarefas. Nóbriga (2015) destaca que, ao realizar a construção de uma representação figural na área de desenho do *software*, o estudante tem a possibilidade de alterar as posições e estruturas dos objetos representados inicialmente, uma vez que o *software* redesenhará a construção, visando preservar as propriedades, os vínculos e as relações originais.

Nesse contexto, pesquisas sobre ambientes de geometria dinâmica mostram que a interação com esses ambientes potencializa ao estudante construir figuras geométricas de diferentes níveis de complexidade, explorar e explicar relações geométricas percebidas, conjecturar resultados e realizar provas dedutivas (JONES, 2002).

Enfim, autores, como Laborde (1998; 2000), Jones (2002; 2005), Jackiw e Sinclair (2007), Brunheira e Ponte (2016) e Jones e Tzekaki (2016), destacam a importância e as vantagens de trabalhar com ambientes de geometria dinâmica para promover a aprendizagem da geometria em diferentes níveis de ensino, especialmente na formação inicial de professores de Matemática.

Nesse sentido, foi adotado, neste estudo, o GeoGebra, que é um *software* educacional que integra um ambiente de geometria dinâmica com recursos numéricos, algébricos e gráficos. Esse *software* foi desenvolvido para dar apoio ao ensino e à aprendizagem da Matemática, tanto na educação básica quanto no ensino superior (HOHENWARTER, HOHENWARTER, LAVICZA, 2008; PREINER, 2008; OROS, SANTOS, NÓBRIGA, 2014).

Compreende-se o GeoGebra como uma multiplataforma, que integra uma diversidade de representações semióticas (figural, simbólica, língua natural etc.), e “[...] permite construir diferentes representações num mesmo ambiente” (NÓBRIGA, 2015, p. 79). Além disso, o *software* potencializa “[...] significativamente a estruturação geométrica, o que deriva de diferentes características e



potencialidades que reconhecemos [...]” no ambiente de geometria dinâmica (BRUNHEIRA; PONTE, 2016, p. 350).

Para Abar e Alencar (2013), uma das principais características do GeoGebra é a possibilidade de se trabalhar, simultaneamente, com diferentes representações semióticas sobre um mesmo objeto matemático. Isso favorece a compreensão em Matemática. Nesta ótica, Abar (2011) destaca que o aspecto dinâmico apresentado pelo GeoGebra permite ao professor e ao estudante propor conjecturas e testar hipóteses, além de possibilitar ao indivíduo mobilizar e coordenar diversas representações semióticas acerca de um mesmo objeto matemático.

De acordo com Lovis e Franco (2013), o desenvolvimento de tarefas de Geometria Euclidiana, por meio do uso do GeoGebra, possibilita formar figuras para representar diferentes objetos geométricos, como também estabelecer e verificar propriedades dos objetos e entre objetos, formar e testar conjecturas e justificar raciocínios.

Neste sentido, os estudos acerca do conhecimento geométrico de professores e futuros professores de Matemática apontam que é necessário um olhar para o desenvolvimento da compreensão de objetos geométricos n-dimensionais (dimensão 0, 1, 2 e 3), promovendo, para isso, o uso de tecnologia, em especial, os ambientes de geometria dinâmica (JONES; TZEKAKI, 2016).

Nesta perspectiva, a utilização de representações figurais em ambientes de geometria dinâmica “[...]” pode ser uma fonte de explorações e de atitudes que concorrem para o desenvolvimento do conhecimento geométrico “[...]”, em especial a apreensão de objetos da Geometria Euclidiana (GRAVINA, 2015, p. 251).

Opções metodológicas

Este estudo se desenvolveu por meio de uma abordagem qualitativa na perspectiva do paradigma interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), em que se adotou, como modalidade de pesquisa, o estudo de caso (MERRIAM, 1988; PONTE, 2006; YIN, 2010).

O estudo de caso compreende em detalhes o “como” e os “porquês” de uma entidade bem definida, a saber: uma pessoa, um grupo, uma



disciplina, um curso, um sistema educativo, uma instituição, uma política específica, um bairro, uma comunidade, uma empresa ou outra unidade social (MERRIAM, 1988; PONTE, 2006).

Nesta perspectiva, foi realizado um estudo de caso único holístico em virtude da singularidade da situação (YIN, 2010), uma vez que se buscou estudar globalmente uma única turma de estudantes de uma disciplina de Geometria Euclidiana, do Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática de uma universidade ao norte do Estado do Paraná, onde os participantes resolveram tarefas de geometria com o apoio do GeoGebra durante o segundo semestre letivo de 2015.

De acordo com Ponte (2006), um estudo de caso produz sempre um conhecimento do tipo particular, uma vez que se procura encontrar algo de universal no particular. Assim, neste artigo, é apresentada a análise de uma das tarefas realizadas, que cumpre com o objetivo destacado neste texto.

Ambiente do estudo e os participantes

Este estudo foi desenvolvido em um laboratório de informática do Departamento de Matemática da Universidade, o qual era composto por trinta computadores com acesso à internet e ao GeoGebra, um projetor multimídia, uma tela de projeção e um quadro branco, em que eram utilizados para formar e transformar representações semióticas (figurais, simbólicas e língua natural), e também para demonstrar resultados acerca dos objetos geométricos estudados.

Participaram deste estudo nove estudantes que compunham a turma que constituiu o caso estudado. Com o intuito de preservar a identidade dos participantes, eles foram denominados por A1, A2, ..., A9.

O professor da disciplina propôs aos estudantes que se organizassem em equipes, cuja formação ocorreu por meio da relação interpessoal e de forma espontânea. Assim, eles se organizaram em equipes com um, dois ou três integrantes.

Por uma questão de dinâmica de sala de aula, neste estudo, consideraram-se, também, equipes formadas por apenas um integrante, uma vez que alguns estudantes optaram por realizar a tarefa individualmente.

Enfim, foram formadas cinco equipes e denominadas por E1, E2, ..., E5. A formação de cada equipe ocorreu da seguinte maneira: equipe E1: A1, A2 e A8; equipe E2: A3; equipe E3: A4 e A7; equipe E4: A5 e A6 e equipe E5: A9.

A tarefa em análise

A tarefa, apresentada neste texto, versou sobre a classificação de triângulos quanto às medidas de seus lados, conforme descrito no Quadro 5.

Quadro 5

A Tarefa desenvolvida

Tarefa	Formação das equipes	Objetivos
Classificação de triângulos quanto às medidas dos lados e desigualdade triangular	E1: A1, A2, e A8 E2: A3 E3: A4 e A7 E4: A5 e A6 E5: A9	Formar representações de triângulos a partir de segmentos de reta, classificar triângulos quanto às medidas de seus lados, refletir sobre a condição de existência de triângulos e conjecturar o resultado conhecido como "desigualdade triangular".

Fonte: Elaborado pelos autores.

Essa tarefa possibilitou aos estudantes, com base na interação com as ferramentas do GeoGebra, formar e tratar representações figurais que seriam difíceis de ser exploradas utilizando-se, simplesmente, recursos estáticos, como também, coordenar diferentes representações semióticas, tais como a escrita, em língua natural, e a figural, no ambiente dinâmico. A resolução da tarefa teve duração de 40 minutos e foi norteadada por instruções fornecidas pelo professor e duas questões de natureza aberta, que, de acordo com os pressupostos de Ponte (2005), assentam em ações exploratória e investigativa. No Quadro 6, apresentam-se as instruções e as questões da tarefa proposta.



Quadro 6

Tarefa sobre classificação de triângulos quanto às medidas de seus lados

Passos e orientações para a formação de representações figurais no GeoGebra	
i.	Criar um segmento AB na área de desenho do GeoGebra.
ii.	Construir um triângulo equilátero com lados de comprimento igual ao comprimento do segmento AB.
iii.	Movimentar os pontos das extremidades do segmento AB e observar o vínculo existente entre o triângulo e o comprimento do segmento.
iv.	Criar um segmento FG de comprimento diferente do segmento AB.
v.	Construir o triângulo isósceles QRS com dois lados de comprimento igual ao do segmento AB e um lado de comprimento igual ao comprimento do segmento FG.
vi.	Movimentar os pontos das extremidades dos segmentos AB e FG e observar o vínculo existente entre o triângulo e o comprimento dos segmentos.
vii.	Criar um terceiro segmento KL de comprimento diferente dos segmentos AB e FG.
viii.	Construir um triângulo escaleno MNP cujos lados tenham o comprimento dos três segmentos dados.
ix.	Movimentar os pontos das extremidades dos segmentos AB, FG e KL e observar o vínculo existente entre o triângulo e o comprimento dos segmentos.
Questões	
1.	Os triângulos QRS e MNP sempre existem?
2.	Conjecture um resultado que reflita a resposta dada à primeira questão.

Fonte: Adaptado de Gerônimo, Barros e Franco (2010, p. 86).

71

Técnicas e procedimentos de recolha de dados

Como técnicas de recolha de dados, foi utilizada a observação participante (ESTRELA, 1994) e a recolha documental (MERRIAN, 1988; YIN, 2010). A partir da observação em sala, registraram-se, em notas de campo, descrições verbais e outras ações pertinentes e significativas dos participantes do estudo.

A recolha documental envolveu protocolos de registro que correspondem a folhas de papel, em que as equipes registraram anotações, esquemas, figuras e respostas acerca das questões norteadoras da tarefa, bem como

arquivos do GeoGebra. Observa-se que os elementos textuais correspondentes às respostas apresentadas pelas equipes à tarefa foram transcritos neste artigo, os quais estão apresentados na seção dos resultados.

Categorias de análises das produções matemáticas da turma

Para analisar e interpretar as produções matemáticas da turma estudada, procurou-se identificar e evidenciar os principais elementos apresentados na resolução da tarefa realizada visando a observar ocorrências significativas acerca das diferentes representações mobilizadas e coordenadas em relação aos objetos geométricos envolvidos na tarefa.

Neste sentido, para este estudo, foram delineadas quatro categorias de análise (Quadro 7), as quais emergiram das interpretações da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2004; 2004a; 2011; 2012; 2012a) e, também, da recolha de dados provenientes deste estudo.

Quadro 7

Categorias de análise para as produções matemáticas dos participantes

Categorias	Aspectos considerados nas produções matemáticas dos estudantes
Coordenar diferentes registros.	Coordenou diferentes registros de representação semiótica para o mesmo objeto geométrico.
Articular diferentes apreensões.	Articulou as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial relacionadas a uma figura geométrica.
Tomar consciência.	Mobilizou ideias geométricas para a tomada de consciência (objetivação).
Apresentar dificuldades ou equívocos conceituais.	Apresentou dificuldades ou equívocos conceituais ao utilizar representações discursivas e não discursivas.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Vale salientar que a análise das produções matemáticas dos participantes deste estudo seguiu um processo transversal, em que todas as categorias foram consideradas, simultaneamente, na análise dos dados (FIORENTINI; LORENZATO, 2009).



Análise e discussão dos resultados

Nesta seção, são apresentados e discutidos os dados recolhidos procedentes de uma tarefa sobre a classificação dos triângulos quanto às medidas de seus lados. Os dados dão evidências das respostas dos estudantes a partir das produções matemáticas registradas no *software* GeoGebra e nos protocolos de registro. Destaca-se também que os dados são apresentados por equipes e sintetizados depois para a turma toda, permitindo conhecer, globalmente, a turma em estudo e corresponder ao objetivo do estudo.

Para iniciar a tarefa, o professor apresentou uma definição à turma que abordou os tipos de triângulos quanto às medidas de seus lados.

Definição: Um triângulo cujos lados têm o mesmo comprimento é chamado triângulo equilátero. Se o triângulo contiver dois lados de mesmo comprimento, ele é chamado triângulo isósceles. Se o triângulo tem todos os lados de comprimentos distintos, ele é denominado triângulo escaleno.

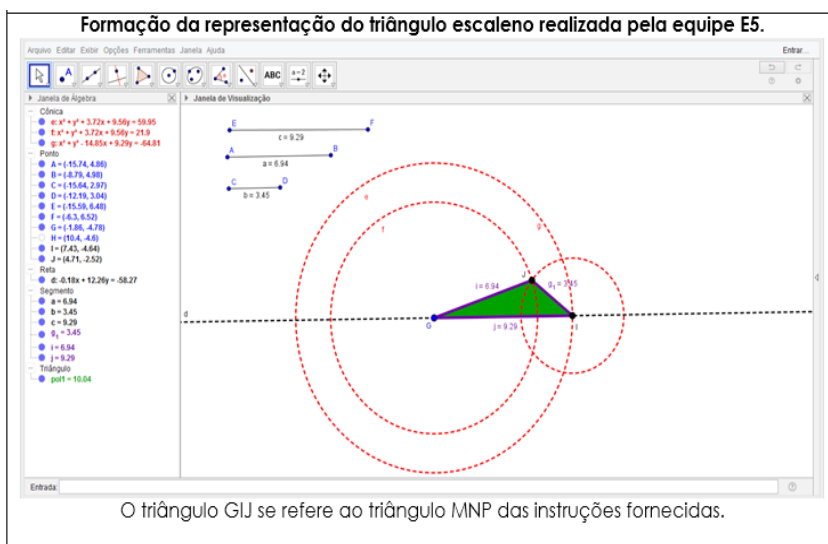
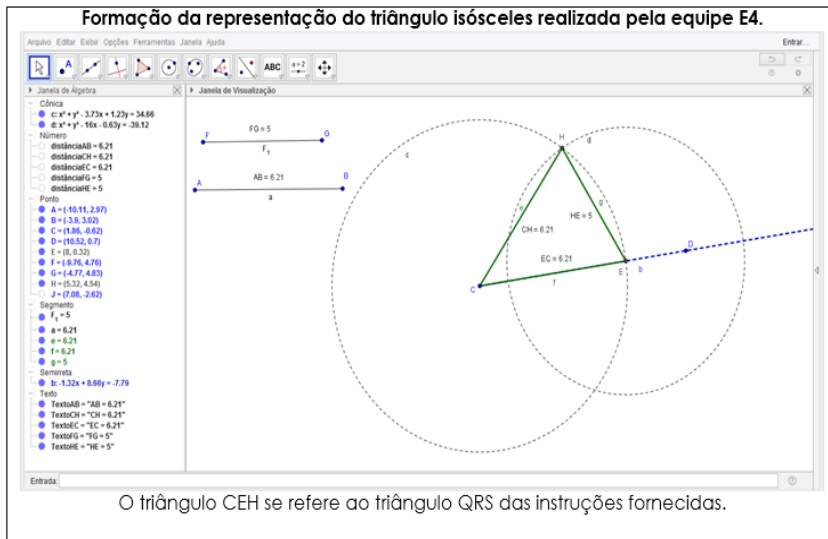
Com a leitura, discussão e interpretação do conteúdo dessa definição, as equipes foram orientadas pelo professor a formar, na janela de visualização do GeoGebra, as representações figurais de cada objeto geométrico, referido na definição.

Observou-se que todas as equipes formaram as representações figurais solicitadas pelo professor. Além disso, para cada uma das representações formadas no *software*, as equipes mobilizaram e coordenaram diferentes conhecimentos geométricos, bem como diferentes ferramentas do GeoGebra com o objetivo de exibir, na sua janela de visualização, os diferentes objetos geométricos compreendidos pela definição dada. Ao concluírem as formações das representações figurais dos triângulos, as equipes responderam às duas questões propostas na tarefa.

No Quadro 8, para exemplificar, são apresentadas as representações figurais formadas no GeoGebra no que diz respeito as respostas relativas à primeira questão (Os triângulos QRS e MNP sempre existem?), de duas equipes.

Quadro 8

Representações figurais dos triângulos isósceles e escaleno



Fonte: Arquivos do GeoGebra – equipes E4 e E5.

O Quadro 8 apresenta as representações figurais formadas, no GeoGebra, dos triângulos isósceles e escaleno das equipes E4 e E5, respectivamente. Essas representações foram obtidas durante a realização da tarefa.



Após as formações das representações figurais de cada tipo de triângulo, as respostas apresentadas pelas equipes para a primeira questão foram: Equipe E1: *“Sim, pois em um plano sempre é possível criar uma reta suporte e um segmento de reta, e assim determinar um triângulo”*.

Equipe E2: *“O triângulo QRS sempre poderá ser construído, pois poderemos modificar o ângulo formado entre os lados iguais de forma a obter os ângulos necessários (formados também pelo lado diferente) para construir o triângulo. O triângulo MNP nem sempre poderá ser construído, pois dependerá das medidas dos segmentos. Poderá acontecer um caso em que não existirá ponto de interseção entre as circunferências com raio igual às medidas dos segmentos”*.

Equipe E3: *“Não”*.

Equipe E4: *“Os triângulos nem sempre existem”*.

Equipe E5: *“Não, nem sempre”*.

Mesmo que, nessa questão, não tenha sido solicitado que as equipes justificassem suas repostas, as equipes E1 e E2 apresentaram seus argumentos sobre a possibilidade ou não de os triângulos isósceles (QRS) e escaleno (MNP) existirem. Salienta-se que, ao concluírem as representações figurais de cada um desses triângulos, as equipes foram instigadas a movimentar os pontos extremos dos segmentos de reta, que permitiram formar as representações de tais triângulos com o intuito de observar o vínculo existente entre os triângulos e os comprimentos dos segmentos.

As equipes E3, E4 e E5 não apresentaram, voluntariamente, uma justificativa, no entanto, a partir das respostas apresentadas por essas equipes, infere-se que realizaram operações figurais, ou seja, alteraram as posições dos pontos das extremidades dos segmentos representados, inicialmente, para poder perceber as transformações ocorridas nos triângulos isósceles e escaleno.

A resposta apresentada pela equipe E1 enfatizou que os triângulos isósceles e escaleno sempre existem, mesmo quando se movimentam os pontos extremos dos segmentos. Neste sentido, destaca-se que a exploração no *software* realizada pela equipe ao movimentar os pontos sugeridos nas orientações, não foi suficiente para que ela pudesse perceber a dependência de existência dos triângulos em relação às medidas dos segmentos. Além disso, a argumentação exteriorizada evidencia a dependência da apreensão

perceptiva da figura e das propriedades visuais das formas. Isso, segundo os pressupostos teóricos de Duval (2004), explicita que a compreensão da equipe ficou condicionada e limitada às formas da representação figural utilizada na janela de visualização do GeoGebra, uma vez que para ela, em um plano, sempre é possível formar uma reta e um segmento de reta e, a partir desses objetos geométricos, forma-se um triângulo. No entanto, essa constatação só é verdadeira para um triângulo equilátero.

A equipe E2 respondeu que o triângulo isósceles (QRS) “*sempre poderá ser construído*” e o triângulo escaleno (MNP) “*nem sempre poderá ser construído*”. A justificativa apresentada pela equipe E2 sobre a existência do triângulo isósceles está ancorada na medida do ângulo formado pelos lados congruentes do triângulo, ou seja, essa medida será alterada sempre que forem modificados os comprimentos dos segmentos AB e FG. Porém, parece que essa equipe não observou que, dependendo das medidas desses segmentos, o ângulo a que ela se referiu não é formado e, portanto, não há formação do triângulo isósceles.

76 Infere-se que essa justificativa está vinculada a duas possibilidades: uma exploração insuficiente dos comprimentos dos segmentos de reta construídos inicialmente, pois, dependendo do nível de mudança dos comprimentos de tais segmentos pode não haver a formação do triângulo isósceles, e isso se verifica quando a soma das medidas de dois lados for menor do que ou igual a medida do terceiro lado, ou a maneira que a equipe construiu o triângulo isósceles impediu a percepção desse fato.

Em relação ao triângulo escaleno, a justificativa exteriorizada pela equipe está correta, pois evidenciou, por meio da apreensão discursiva, que, dependendo do comprimento de um segmento (apreensão operatória) dado não há interseção entre duas das três circunferências (apreensão perceptiva). Isso implica a não formação do triângulo escaleno, o que revela a tomada de consciência da equipe sobre a condição de existência do triângulo MNP. Salienta-se, também, que as mudanças dos comprimentos dos segmentos de reta formados inicialmente ocorreram em virtude da operação que permitiu transladar (reconfigurar) os pontos das extremidades desses segmentos. De acordo com Duval (2004; 2012; 2012a), a reconfiguração é uma operação fundamental no âmbito das figuras geométricas, pois permite reorganizar uma figura tanto mental quanto material ou instrumentalmente.



Sublinha-se que o conteúdo das respostas apresentadas pelas equipes E3, E4 e E5 enfatiza que os triângulos isósceles (QRS) e escaleno (MNP) nem sempre existem, mesmo a equipe E3 relatando apenas “não”. Inere-se que as respostas dadas por essas equipes revelam que elas observaram que alterar o comprimento dos segmentos formados inicialmente, quando se arrasta os pontos de suas extremidades pela janela de visualização do GeoGebra, implica a formação ou não dos triângulos, ou seja, conforme for o comprimento de um dos segmentos existe ou não os triângulos. Nesta perspectiva, avalia-se que essas equipes tomaram consciência sobre a existência de triângulos (isósceles ou escaleno) vinculados aos comprimentos dos segmentos de reta dados.

As respostas apresentadas pelas equipes à segunda questão (Conjecture um resultado que reflita a resposta dada à primeira questão) foram:

Equipe E1: *“De maneira análoga a questão 1, dado um plano, um segmento de reta e uma reta suporte, esses dois pertencentes a sempre é possível construir um triângulo”.*

Equipe E2: *Não apresentou uma conjectura.*

Equipe E3: *“Quando a soma de dois lados de um triângulo é maior que a medida do lado que sobrou o triângulo não existe”.*

Equipe E4: *“Quando a medida de um lado do triângulo ultrapassa a soma das medidas dos outros dois lados do triângulo, ele deixa de existir. Um dos resultados é a desigualdade triangular”.*

Equipe E5: *“O triângulo existirá somente se a soma dos lados menores for maior que o lado maior, ou seja, para quaisquer lados a , b , c a soma $a+b$ deve ser maior que c . Corrigindo: a , b , c são segmentos e não lados”.*

Essa segunda questão teve por objetivo enunciar uma conjectura para o resultado conhecido como desigualdade triangular. Um enunciado para essa conjectura é: *“em todo triângulo, a soma dos comprimentos de dois lados é maior que o comprimento do terceiro lado”.* Observa-se que a desigualdade triangular fornece um resultado que impede a formação de triângulos com quaisquer medidas de lados.

A conjectura apresentada pela equipe E1 revela que, com um plano, uma reta e um segmento de reta, é possível formar um triângulo. Destaca-se que essa conjectura reflete a resposta dada na primeira questão, no entanto, é uma conjectura insuficiente, pois o significado de seu conteúdo permite apenas formar triângulos equiláteros, o que está correto, mas não possibilita a formação

de triângulos isósceles ou escalenos. Infere-se que essa equipe parece não ter refletido sobre os segmentos de reta dados nas instruções fornecidas na tarefa para representar figuradamente os triângulos isósceles e escaleno, uma vez que se esperava que a equipe observasse que a possibilidade de construção de tais triângulos estava vinculada às medidas dos segmentos representados na janela de visualização do GeoGebra.

A equipe E2 não apresentou uma conjectura mesmo respondendo na primeira questão que a formação do triângulo escaleno depende do comprimento dos segmentos construídos inicialmente. Tal fato representa uma lacuna para a análise e interpretação, pois uma questão sem resposta nada pode dizer o que a equipe compreendeu sobre os objetos geométricos envolvidos.

A equipe E3 apresentou uma conjectura textualmente equivocada, pois o conteúdo de sua representação discursiva, escrita em língua natural, evidencia que o *“triângulo não existe”* quando a soma das medidas de dois de seus lados é maior do que a medida do terceiro lado. Acredita-se que foi uma distração da equipe ao inserir a palavra *“não”*, pois procurou, em sua conjectura, relacionar as medidas dos segmentos representados inicialmente com a possibilidade de formação de triângulos. Destaca-se que, ao suprimir a palavra *“não”*, a ideia matemática da conjectura permanece correta, mesmo que a equipe tenha escrito *“soma de dois lados”*, pois a dificuldade em coordenar o registro em língua natural, na sua modalidade escrita, para designar os diferentes objetos matemáticos envolvidos pode ter suscitado tal equívoco.

A equipe E4 apresentou uma conjectura correta, pois o conteúdo de seu enunciado explicita que não há triângulo quando a medida de um dos lados do triângulo é maior do que a soma das medidas dos outros dois lados. Infere-se que essa equipe tomou consciência (objetivação) do vínculo existente entre os triângulos (dependentes) e o comprimento dos lados (independentes). No entanto, essa equipe poderia considerar ainda o caso em que a medida de um lado é igual à soma das medidas dos outros dois.

A conjectura apresentada pela equipe E5 está correta. Em sua resposta, revela, por meio da integração e coordenação simultânea dos registros em língua natural e simbólico, que o triângulo existe quando a soma das medidas de dois de seus lados é maior do que a medida do terceiro lado, registrado por *“ $a+b$ deve ser maior que c ”*. Inicialmente, a equipe particularizou sua conjectura ao fazer referência às medidas de lados menor e maior, e não usou a



expressão “medida”, no entanto, vale ressaltar que registrou, simbolicamente, “a”, “b” e “c” para referenciar as medidas de tais segmentos.

De modo geral, infere-se a ocorrência de objetivação por essa equipe sobre o significado da desigualdade triangular, pois, de acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004), a equipe coordenou diferentes registros de representação semiótica para evidenciar sua apreensão sobre a condição de existência de triângulos a partir de medidas de segmentos dados.

No Quadro 9, apresenta-se uma síntese da turma estudada acerca das atividades cognitivas, os registros mobilizados e coordenados e, também, as ações/ocorrências que foram identificados durante o processo de resolução da tarefa.

Quadro 9
Síntese da turma estudada

Atividades cognitivas		Registros mobilizados e co-ordenados	Ações/ocorrências
Formação de representações	Apreensões perceptiva e sequencial	Figural: GeoGebra	Reproduzir marcas, contrastes e contornos percebidos. pontos: A, B, B', C, E, F, G, I, J, ... retas: b e d segmentos: AB, FG, EF, CD, ... semirretas: a e b circunferências: c, d, e, f, g triângulos: CFG, ABC, ABB', CHE, GIJ
	Representação discursiva - Língua Natural e Simbólica: caracteres, símbolos algébricos, palavras, frases, expressões simbólicas.	Língua Natural: Protocolos de registro	Designar e descrever objetos nominalmente. plano, reta suporte, segmento de reta, triângulo, lados iguais, lados diferentes, ângulos, medidas dos segmentos, interseção entre circunferências, raios, soma das medidas, desigualdade triangular.
		Simbólico: GeoGebra e protocolos de registro	Empregar símbolos para designar objetos e estabelecer relações (letras, algarismos e símbolos matemáticos). pontos: A, B, C, ... retas: b e d segmentos: AB, FG, EF, CD, ... semirretas: a e b plano: π circunferências: c, d, e, f, g triângulos: GIJ = pol 1, CHE, ... medidas de segmentos: f = 6,21, g = 5, a = 6,94, b = 3,45, c = 9,29, ... desigualdade triangular: a+b maior que c .

Quadro 9

Síntese da turma estudada (Continuidade)

Atividades cognitivas		Registros mobilizados e co-ordenados	Ações/ocorrências
Transformação de representações	Apreensões perceptiva e operatória	Tratamento Conversão	Figural
	Apreensões perceptiva, operatória e discursiva	Conversão	Língua Natural para Figural
			Figural para Língua Natural – Simbólico

Fonte: Elaborado pelos autores.

Observa-se, com base nas informações do Quadro 9, que a apreensão perceptiva ocorreu em todos os momentos da tarefa, pois, de acordo com os pressupostos de Duval (2004; 2012; 2012a), as equipes puderam reconhecer, perceptivelmente, as variações dimensionais e qualitativas (formas, traços, contornos, contrastes, tamanhos, espessuras, nomes, cores etc.) das representações figurais de cada um dos objetos geométricos estudados na tarefa. A apreensão sequencial ocorreu no momento inicial da tarefa, uma vez que favoreceu a reprodução de figuras específicas para representar os objetos geométricos em estudo. As apreensões operatória e discursiva ocorreram em momentos simultâneos, pós-formação das figuras, visto que a primeira potencializou as modificações possíveis das figuras e a segunda permitiu tecer hipóteses e estabelecer relações e propriedades entre diferentes objetos matemáticos com base nas modificações realizadas nas representações figurais.

Os registros mobilizados e coordenados pela turma estudada foram o figural, o simbólico e o da língua natural, o que ficou evidenciado na reprodução de marcas, contrastes e contornos percebidos, na designação e descrição



de objetos nominalmente, no emprego de símbolos e nas diversas transformações (tratamentos e conversões) realizadas no processo de resolução da tarefa.

Conclusão

A principal contribuição deste estudo está voltada a conhecer a compreensão conceitual geométrica de estudantes de Matemática: Bacharelado e Licenciatura, ressaltando a utilização de ambientes de geometria dinâmica, em particular, o GeoGebra.

Do ponto de vista da aprendizagem da geometria, considera-se que as resoluções, apresentadas pelas equipes, evidenciaram a pertinência da tarefa de natureza exploratória e investigativa, a qual compreendeu construções geométricas relativas a tipos de triângulos quanto às medidas de seus lados, proporcionando, assim, a coordenação de múltiplas representações semióticas.

Sublinha-se que a apreensão dos objetos geométricos envolvidos nessa tarefa ocorreu, sinergicamente, em virtude da coordenação entre os registros da língua natural, figural e simbólico, da articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva relativas a uma figura geométrica, e também quando as equipes tomaram consciência (objetivação) das propriedades e relações entre os objetos matemáticos envolvidos com base nas diferentes representações mobilizadas e coordenadas.

Convém salientar que algumas conversões, realizadas do registro figural para o registro da língua natural, revelaram dificuldades dos participantes em reconhecer o vínculo existente entre as medidas dos segmentos de reta construídos inicialmente com a formação dos triângulos isósceles e escaleno.

Infere-se ainda a influência do GeoGebra para a apreensão dos objetos geométricos, uma vez que o *software* permitiu as equipes que cumprissem as três atividades cognitivas relacionadas a qualquer representação semiótica, ou seja, formar, tratar e converter representações, bem como trabalhar com conceitos formais da geometria associados às suas ferramentas.

Enfim, o fato de se ter diferentes representações integradas entre si contribuiu para a apreensão dos objetos geométricos abordados na tarefa desenvolvida, a qual assentou na exploração de ferramentas e funcionalidade do GeoGebra e, também, na investigação sobre quais hipóteses considerar



para formar representações figurais de triângulos com base em segmentos de reta dados e como estabelecer relações percebidas.

Referências

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira. Educação Matemática na Era Digital. **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, San Cristobal de La Laguna, n. 27, p.13-28, out. 2011.

ABAR, Celina Aparecida Almeida Pereira; ALENCAR, Sergio Vicente. A Gênese instrumental na interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 46, p.349-365, ago. 2013.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SALAZAR, Jesus Victoria Flores. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 5, p.919-941, dez. 2015.

BATTISTA, Michael T. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER, Frank K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, Reston, VA: NCTM, 2007.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BELLEMMAIN, Franck. O Paradigma Micromundo. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2002, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.

BRUNHEIRA, Lina; PONTE, João Pedro da. Realizar construções geométricas com o GeoGebra: o contributo do AGD para a estruturação geométrica. In: CANAVARRO, Ana Paula; BORRALHO, António; BROCARD, Joana; SANTOS, Leonor (Eds.). **Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática**: Recursos na Educação Matemática, Évora: Universidade de Évora, 2016.

CANDEIAS, Nuno; PONTE, João Pedro da. Geometry learning: The role of tasks, working models, and dynamics geometry software. In: CZARNOCHA, Bronisław (Ed.). **Handbook of mathematics teaching research**. Rzeszów: University of Rzeszów, 2008.

DUVAL, Raymond. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, n. 5, p.37-65, 1993.



_____. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción Myriam Veja Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 2004.

_____. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y de las formas superiores en el desarrollo cognitivo**. Traducción Myriam Veja Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 2004a.

_____. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009 (Fascículo I).

_____. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

_____. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

_____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012a.

DUVAL, Raymond; GODIN, Marc. Les changements de regard nécessaires sur les figures. **Grand N**, Grenoble, n. 76, p. 7-27, 2005.

ESTRELA, Albano. **Teoria e prática de observação de classes**: uma estratégia de formação de professores. Porto: Porto Editora, 1994.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2009.

GERÔNIMO, João Roberto; BARROS, Rui Marcos de Oliveira; FRANCO, Valdeni Soliani. **Geometria euclidiana plana**: um estudo com o software GeoGebra. Maringá: EDUEM, 2010.

GOLDIN, Gerald. Representation in mathematical learning and problem solving. In: ENGLISH, Lyn D. (Ed.). **Handbook of International research in mathematics education**. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2002.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: Simpósio Brasileiro de Informática na Educação; 7. 1996. Belo Horizonte **Anais...** Belo Horizonte, 1996.



_____. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **VIDYA**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p.237-253, jul./dez. 2015.

HOHENWARTER, Judith; HOHENWARTER, Markus; LAVICZA, Zsolt. Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: the case of GeoGebra. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, Waynesville, v. 28, n. 2, p.135-146, 2009.

ISOTANI, Seiji; BRANDÃO, Leônidas de Oliveira. Como usar a geometria dinâmica? O papel do professor e do aluno frente às novas tecnologias. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA ESCOLA, 12, 2006. Campo Grande. **Anais...** Campo Grande: Sociedade Brasileira de Computação, jul. 2006.

JACKIW, Nicholas; SINCLAIR, Nathalie. Dynamic geometry activity design for elementary school mathematics. In: HOYLES, Celia; LAGRANGE, Jean-Baptiste, SUN, Le Hung; SINCLAIR, Nathalie (Eds.). **Proceedings of the seventeenth ICMI study conference "Technology Revisited"**. Paris: Hanoi Institute of Technology and Didirem University, 2007.

JONES, Keith. Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom. **MicroMath**, Derby, v. 18, n. 3, p.18-20, 2002.

84 _____ . The shaping of student knowledge: learning with dynamic geometry software. **Computer Assisted Learning Conference 2005 (CAL05)**, Bristol, p.4-6 abril, 2005.

JONES, Keith; TZEKAKI, Marianna. Research on the teaching and learning of geometry. In: GUTIÉRREZ, Ángel; LEDER, Gilah Chaja; BOERO, Paolo (Eds.). **The second handbook of research on the psychology of mathematics education**, Rotterdam: Sense Publishers, 2016.

LABORDE, Colette. Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. In: MAMMANA, Carmelo; VILLANI, Vinicio (Eds.). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: An ICMI study**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers - Springer, 1998.

_____. Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. **Educational Studies in Mathematics** (Special edition on proof in dynamics geometry environments). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers - Springer, v. 44, p.151-161, dez. 2000.

LOVIS, Karla Aparecida; FRANCO, Valdeni Soliani. Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o ensino de Geometria Euclidiana. **Informática na Educação: teoria e prática**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, p.149-160, jan./jul. 2013.



MERRIAM, Sharan B. **Case study research in education**: a qualitative approach. São Francisco: Jossey-Bass Publishers, 1988.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. **GGBOOK**: uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica GeoGebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas. 2015. 246 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

OROS, Valentin; SANTOS, Gilberto Lacerda; NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa. GeoGebra in Romanian: the challenges of localising an educational software into a specific socio-cultural context. **GGIJRO**: GeoGebra International Journal of Romania, Galati, v. 4, n. 1, p.1-10, 2014.

OSTA, Iman. Computer technology and the teaching of geometry: introduction. In: MAMMANA, Carmelo; VILLANI, Vinicio (Eds.). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century**: an ICMI study, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers - Springer, 1998.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em matemática. In: GTI (Ed.) **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005.

_____. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 19, n. 25, p.105-132, 2006.

PREINER, Judith. **Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers**: the case of GeoGebra (Master's Thesis). University of Salzburg, Salzburg, 2008.

RODRIGUES, Margarida; BERNARDES, Marisa. Ensino e aprendizagem da geometria. In: HENRIQUES, Ana; NUNES, Cláudia; SILVESTRE, Ana; JACINTO, Hélia; PINTO, Hélia; CASEIRO, Ana; PONTE, João Pedro da. (Eds.). **Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, Lisboa: APM, 2011.

SEDLÁČEK, Lubomír. A study of the influence of using dynamic geometric systems in mathematical education on the level of knowledge and skills of students. **Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics**, Bratislava, n. 9, p.81-108, 2009.

STAHL, Gerry. **Translating Euclid**: designing a human-centered mathematics. Saint Raphael: Morgan & Claypool Publishers, 2013.

WOLECK, Kristine Reed. Listen to Their Pictures An Investigation of Children's Mathematical Drawings. **Roles of representation in school mathematics**. Virginia: National Council of Teachers of Mathematics, Yearbook, 2001.



YIN, Robert K. **Estudo de caso:** Planejamento e métodos. Tradução Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Prof. Dr. Idelmar André Zanella
Secretaria de Estado da Educação do Paraná
Núcleo Regional de Educação de Goioerê | Paraná
Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG | Universidade Estadual de
Maringá
E-mail | andrezanel@yahoo.com.br

Prof. Dr. Valdeni Soliani Franco
Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática
Coordenador do Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG | Universidade
Estadual de Maringá
E-mail | vsfranco@gmail.com

86

Profa. Dra. Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora | Portugal
Departamento de Pedagogia e Educação
Grupo de Pesquisa em Ensino de Geometria – GPEG | Universidade Estadual de
Maringá
E-mail | apc@uevora.pt

Recebido 12 mar. 2018

Aceito 14 abr. 2018