revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REALIZAR CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA: A CONTRIBUIÇÃO DO AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA PARA O FUTURO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Idelmar André Zanella[1]
Valdeni Soliani Franco[2]
Ana Paula Canavarro[3]

Resumo: O presente estudo foi realizado no contexto da formação inicial de professores de Matemática em uma instituição pública de ensino superior localizada ao norte do Estado do Paraná no transcorrer de uma disciplina de Geometria Euclidiana. O objetivo foi identificar as contribuições do GeoGebra para a apreensão dos objetos geométricos por futuros professores de Matemática a partir da resolução de uma tarefa centrada na realização de construções geométricas. A abordagem do estudo foi qualitativa e seguiu a perspectiva do paradigma interpretativo. A modalidade de pesquisa foi o estudo de caso, em que o caso foi uma turma de oito estudantes da referida disciplina. Os dados recolhidos foram analisados à luz da teoria dos registros de representação semiótica e incluem as produções matemáticas dos participantes. Os resultados do estudo mostram que o GeoGebra promove a elaboração e estruturação de conjecturas, potencializa a percepção das propriedades dos objetos estudados e permite celeridade no processo de investigação das relações existentes entre diferentes objetos matemáticos quando relacionado a um modo fenomenológico estático de produção de representações figurais.
Palavras-chave: Geometria Euclidiana. GeoGebra. Representações semióticas. Futuros professores.

MAKING GEOMETRIC CONSTRUCTIONS WITH THE GEOGEBRA: THE CONTRIBUTION OF THE DYNAMIC GEOMETRY ENVIRONMENT TO THE FUTURE MATHEMATICS TEACHER

Abstract: This study was carried out in the context of the initial formation of Mathematics teachers during a discipline of Euclidean Geometry in a public institution of higher education located in the north of Paraná State. The objective was to identify the contributions of GeoGebra to the apprehension of geometric objects by future Mathematics teachers from the resolution of a task centered in the accomplishment of geometric constructions. The study approach was qualitative and followed the perspective of the interpretive paradigm. The research modality was the case study, whose case consisted of a group of eight students of this discipline. The collected data were analyzed in the light of the *registers* of *semiotic representation* theory and the mathematical productions of the participants were included. The results of the study show that GeoGebra promotes the elaboration and structuring of conjectures, enhances the perception of the object properties studied and allows celerity to investigate the existing relations between different mathematical objects, when related to a static phenomenological mode of production of figure representations.
Keywords: Euclidean Geometry. GeoGebra. Semiotic representations. Future teachers.

[1] Doutor em Educação para a Ciência e a Matemática. Professor da Educação Básica do Estado do Paraná – SEED/PR. E-mail: andrezanel@yahoo.com.br
[2] Doutor em Matemática. Professor do Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática da Universidade Estadual de Maringá – PCM/UEM. E-mail: vsfranco@gmail.com
[3] Doutora em Educação Matemática. Professora do Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora – UE. E-mail: apc@uevora.pt

Introdução

Segundo Rodrigues e Bernardo (2011), a Geometria é uma área carente de investigação nos mais diversos níveis de ensino, especialmente na formação inicial de professores de Matemática. De acordo com Battista (2007), os estudantes revelam dificuldades de diversas ordens em Geometria e, por isso, se justifica a pertinência da realização de estudos que incidem sobre ela. Dessa forma, "os resultados de estudos empíricos podem, e devem, imperiosamente, ser acolhidos, no sentido de uma compreensão mais aprofundada da forma como se desenvolve o pensamento geométrico dos alunos" (RODRIGUES; BERNARDO, 2011, p.339).

Gravina (1996; 2015) destaca que as principais dificuldades reveladas por futuros professores de Matemática, no que tange a aprendizagem da Geometria, estão vinculadas às representações semióticas figurais estáticas. Além disso, as representações semióticas "são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas próprias limitações de significado e de funcionamento" (DUVAL, 1993, p.39).

Segundo Jones e Tzekaki (2016), os estudos que envolvem o conhecimento geométrico de futuros professores de Matemática apontam para a necessidade de olhar o desenvolvimento da apreensão de objetos geométricos n-dimensionais, promovendo para isto a utilização da tecnologia computacional, em particular, os ambientes de Geometria Dinâmica.

Desta forma, este estudo se insere no contexto da formação inicial de professores de Matemática, o qual foi desenvolvido no transcorrer de uma disciplina de Geometria Euclidiana, componente curricular de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade localizada ao norte do Estado do Paraná, a qual foi realizada por meio de tarefas e com o auxílio do *software* GeoGebra. Assim, o objetivo deste estudo foi identificar as contribuições do GeoGebra para a apreensão dos objetos geométricos por futuros professores de Matemática a partir da resolução de uma tarefa centrada na realização de construções geométricas.

A teoria dos registros de representação semiótica

A fundamentação teórica para análise dos dados recolhidos neste estudo está assentada na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, que é uma teoria cognitivista com estreita relação com a prática matemática. Essa teoria não é uma teoria geral e fechada, visto que é uma ferramenta para analisar: o modo de pensar e trabalhar em Matemática, as atividades e problemas desenvolvidos para o ensino e as produções dos estudantes independentemente dos conceitos matemáticos utilizados nos diferentes campos da Matemática (Geometria, Álgebra, Análise, Estatística etc.) (DUVAL, 2014).

Destaca-se que a atividade matemática é um tipo de atividade que engloba a universalidade cultural, tem caráter especificamente intelectual e supõe uma forma de pensar que não é nada espontânea para a maior parte dos estudantes que nela se envolvem (DUVAL, 2004b). Essa atividade demanda modos de funcionamento cognitivos que necessitam da mobilização e coordenação de sistemas específicos de representação, isto é, de registros de representação semiótica (DUVAL, 2004b).

Neste sentido, um registro de representação semiótica é “um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que permite efetuar” (DUVAL, 2011, p.70). Além disso, os registros de representação semiótica permitem gerar novos conhecimentos, pois “são sistemas cognitivamente produtores, ou mesmo criadores, de representações sempre novas” (DUVAL, 2011, p.72).

Salienta-se que um sistema semiótico para ser um registro de representação semiótica deve permitir transformar uma representação semiótica em outra nova representação, podendo esta última pertencer ou não ao registro que foi formada inicialmente (DUVAL, 2004a; 2006).

De acordo com Duval (2004b) a atividade matemática mobiliza simultânea ou alternativamente diferentes registros de representação, alguns relacionados com o funcionamento cognitivo comum (língua natural) e outros (figural, simbólico, gráfico etc.) criados pelas necessidades próprias do desenvolvimento da atividade matemática. Este autor destaca que cada registro tem um funcionamento diferente, ou seja, nem todos os registros têm as mesmas regras, uma vez que existem registros mais exigentes do que outros.

Os registros de representação semiótica "constituem os graus de liberdade que um sujeito pode dispor para objetivar a si próprio uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar informações ou simplesmente para poder comunicá-las a um interlocutor" (DUVAL, 2009, p.37) e, ainda, "são as ferramentas que permitem analisar todas as produções matemáticas, e em primeiro lugar aquelas construídas com objetivo de ensino ou aprendizagem" (DUVAL, 2011, p.104).

Nessa perspectiva, o conhecimento matemático emerge das transformações de representações semióticas, pois "essas transformações são as operações semióticas e um registro se caracteriza pelas operações semióticas que lhe são específicas" (DUVAL, 2011, p.73).

Para Flores (2006), a representação é o meio pelo qual um objeto do conhecimento (objeto matemático) se torna visível e transparente ao indivíduo, de modo que permite a ordenação desses objetos. Segundo Woleck (2001), as representações são ferramentas que possibilitam articular, clarificar, justificar e comunicar raciocínios matemáticos decorrentes do estudo de seus objetos. De acordo com D'Amore e Godino (2006), os objetos matemáticos devem ser considerados como símbolos de unidades culturais, emergentes de um sistema de usos ligados à atividade matemática que grupos de pessoas realizam e que evoluem com o passar do tempo.

Enfim, as representações semióticas são utilizadas para comunicar ações, bem como para desenvolver toda atividade matemática. Além disso,

> A especificidade das representações semióticas consiste em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, mas podendo tomar **significações** diferentes para o sujeito que as utiliza. A noção de representação semiótica pressupõe, então, a consideração de sistemas semióticos diferentes e de uma operação cognitiva de conversão das representações de um sistema semiótico para outro. Essa operação tem sido primeiramente descrita como uma "mudança de forma" (DUVAL, 2009, p.32, grifo do autor).

O número "*sete*", por exemplo, é representado normalmente pelo signo "7" no sistema de numeração decimal. Entretanto, este signo *não* é o número sete, ou seja, se refere simplesmente a uma das diferentes maneiras de representá-lo, uma vez que outras representações semióticas podem ser mobilizadas e coordenadas para representar tal objeto matemático, conforme exemplificado no Quadro 1.

Quadro 1: Diferentes representações para o objeto numérico “sete”.

□□□□□□□	$111_{(2)}$	|||||||	SEVEN	VII	

Fonte: Elaborado pelos autores.

Para Duval (2004a), há uma gama de representações semióticas possíveis de ser mobilizadas em diferentes registros como, por exemplo, figuras geométricas, esquemas, diagramas, gráficos, expressões simbólicas (numéricas e algébricas), expressões linguísticas (enunciados, frases e textos) entre outras.

Nesse sentido, a atividade matemática não pode ser limitada simplesmente à utilização de um único registro, ou seja, “em matemática, não pensamos jamais em um único registro, mas em vários ao mesmo tempo, mesmo se as produções vão privilegiar um único registro” (DUVAL, 2011, p.116), pois a ausência de coordenação de diferentes registros de representação semiótica potencializa o déficit de apreensão dos objetos matemáticos (DUVAL, 2004a).

De acordo com Duval (2004a; 2004b; 2011), os registros de representação semiótica devem permitir que se cumpram três atividades cognitivas intrínsecas a toda representação, a saber: formar, tratar e converter.

Para este autor, a primeira atividade cognitiva consiste em **formar** uma marca ou um conjunto de marcas perceptíveis de modo que se tornem identificáveis como uma representação de alguma coisa em um dado registro de representação semiótica.

A segunda atividade cognitiva se refere a **tratar** as representações produzidas em um registro de representação semiótica conforme as regras (operações) particulares e as possibilidades de funcionamento do próprio registro de modo a se obter outras representações internas ao mesmo registro, com o intuito de potencializar o conhecimento matemático em relação às representações iniciais.

A terceira atividade cognitiva diz respeito a **converter** as representações produzidas em um determinado registro de representação semiótica em um registro diferente do inicial, de modo que as representações nesse último registro possam apontar outros significados relativos ao objeto matemático representado.

Em relação ao estudo da Geometria Euclidiana, Duval (2004a) enfatiza que a atividade matemática desenvolvida nesse contexto se realiza por meio da sinergia entre o registro das figuras geométricas e os registros discursivos que compreendem especialmente a língua natural, a linguagem matemática e o simbólico. De acordo com este autor o registro das figuras geométricas é mobilizado para designar as figuras e, também, para reproduzir formas, marcas, contrastes e contornos percebidos. Já os registros discursivos são mobilizados para enunciar axiomas, definições, teoremas, hipóteses etc., bem como para empregar símbolos para designar objetos e estabelecer expressões linguísticas ou simbólicas.

Duval (2004a) destaca ainda que no ensino e na aprendizagem da Geometria devemos levar em consideração as diferentes apreensões as quais uma figura geométrica dá lugar. Essas apreensões podem ser: perceptiva, discursiva, operatória ou sequencial (DUVAL, 2012a; 2012b).

A apreensão perceptiva diz respeito ao reconhecimento visual das formas da figura geométrica e ocorre de maneira imediata e automática em ambientes bi ou tridimensionais como, por exemplo, os objetos (0D, 1D, 2D ou 3D) da Geometria Euclidiana representados na janela de visualização do GeoGebra são percebidos e reconhecidos em um ambiente 2D, ou seja, na tela de um computador, enquanto que esses objetos representados por meio de materiais manipuláveis, tais como barbantes, folhas de papel, caixas etc., são percebidos e reconhecidos em um ambiente 3D (DUVAL, 2012a; 2012b).

A apreensão discursiva está relacionada às hipóteses que a figura representa e ao fato de que as propriedades matemáticas representadas em uma figura não podem ser determinadas por meio da apreensão perceptiva, pois em qualquer representação geométrica, o reconhecimento perceptivo de propriedades geométricas deve ficar sob a gestão de afirmações verbais que envolvem, por exemplo, designar, denotar, denominar, definir, descrever, bem como entrar com comandos (em língua natural ou expressões algébricas) no campo de entrada do GeoGebra etc. (DUVAL, 2012a; 2012b).

A apreensão operatória se refere às modificações geométricas (física-instrumental ou mental) possíveis de uma figura inicial e as reorganizações possíveis dessas modificações, além de compreender diferentes possibilidades de modificar uma representação figural, entre elas: a mereológica, a ótica e a de posição. A possibilidade **mereológica** diz respeito a uma divisão de uma figura inicial em subfiguras, de modo que a combinação (reconfiguração) dessas subfiguras permite a formação de outra representação figural, e se faz em função da relação parte todo. A possibilidade **ótica** está relacionada a ampliar, reduzir ou deformar a representação figural dada e, a possibilidade **de posição** se refere à mudança de posição (rotação ou translação) da representação figural ou a sua variação de orientação (DUVAL, 2004a; 2012a; 2012b).

A apreensão sequencial trata especificamente da construção de uma figura ou da sua descrição, cujo objetivo é reproduzir uma figura por meio de instruções fornecidas. Esta apreensão é solicitada sempre que se deseja formar uma representação figural ou descrever como ocorreu sua formação (DUVAL, 2012a; 2012b).

Ambientes de Geometria Dinâmica e o *software* GeoGebra

Nos últimos anos, o desenvolvimento de materiais didáticos tem levado à evolução de novas ferramentas educacionais com o intuito de promover significativo impacto sobre os métodos de ensino e aprendizagem da Matemática em seus diferentes níveis de ensino (BELLEMAIN, 2002; SEDLÁČEK, 2009; STAHL, 2013).

Nesse prisma, os ambientes de Geometria Dinâmica podem ser utilizados (principalmente por meio de *softwares*) para potencializar a compreensão de conceitos, propriedades e relações sobre objetos geométricos (BELLEMAIN, 2002; SEDLÁČEK, 2009; STAHL, 2013; GRAVINA, 2015).

Segundo Sedláček (2009) um ambiente de Geometria Dinâmica pode ser caracterizado pelo uso de *software*, o qual oferece ao usuário a possibilidade de formar e manipular representações geométricas na tela de um computador.

Para Jones, Mackrell e Stevenson (2010), com um ambiente de Geometria Dinâmica, o usuário pode utilizar o *mouse* para compreender um elemento da figura construída na tela e arrastá-lo. À medida que esse arrastar ocorre, a representação na tela muda de modo que as relações geométricas explícitas (ou implícitas) em sua construção sejam mantidas. Tais ambientes digitais são chamados de dinâmicos por esse motivo.

Dessa forma, os ambientes de Geometria Dinâmica estão sendo desenvolvidos e aperfeiçoados para possibilitar aos usuários a construção de figuras geométricas com rótulos (legendas), bem como movimentar as representações construídas, de modo que as propriedades e características dos objetos geométricos envolvidos preservem suas formas, fato este que caracteriza a dependência da figura (STAHL, 2013).

Nesse aspecto, ressalta-se que:

> As representações têm um papel central na elaboração e evolução dos saberes e na construção dos conhecimentos pelo sujeito, o computador pode contribuir de forma significativa nesses processos com novos sistemas de representação. Os softwares de geometria dinâmica constituem exemplos do uso do computador na criação de novos sistemas de representação dos objetos da geometria (BELLEMAIN, 2002, p.55).

Nesse sentido, os *softwares* de Geometria Dinâmica apresentam duas características fundamentais, ou seja, uma diz respeito à disponibilização da representação semiótica e a segunda se refere à representação semiótica que informa a relação funcional entre objetos geométricos representados (GRAVINA, 2015). Além disso, as construções são dinâmicas, uma vez que podem ser modificadas em dimensão e posição sem a perda dos vínculos geométricos que as caracterizam (GERÔNIMO; BARROS; FRANCO, 2010).

Nóbriga (2015) destaca que ao realizar a construção de uma figura com o *software* de Geometria Dinâmica, o usuário tem a possibilidade de alterar as posições e estruturas dos objetos representados inicialmente, uma vez que o *software* redesenhará a construção, preservando as propriedades, os vínculos e as relações existentes inicialmente.

Dessa forma, um *software* de Geometria Dinâmica "possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes, o que seria praticamente impossível com régua e compasso" (ISOTANI; BRANDÃO, 2006, p.121).

Para Candeias e Ponte (2008), os *softwares* de Geometria Dinâmica possibilitam formar e movimentar representações de objetos geométricos, bem como explorar e investigar relações entre os diferentes objetos representados, uma vez que as construções realizadas são rigorosas.

Segundo Isotani e Brandão (2006, p.122), com os *softwares* de Geometria Dinâmica, o estudante tem a possibilidade de realizar testes e verificar hipóteses que ele próprio estabelece acerca de propriedades, características e conceitos dos objetos geométricos representados na tela do computador, o que é diferente de uma aula tradicional de Geometria, em que "o professor enuncia conceitos, definições e propriedades, assim o aluno apenas 'ouve' (e eventualmente 'vê' figuras estáticas)".

Nesse sentido, é fundamental a utilização de *softwares* de Geometria Dinâmica quando se pretende trabalhar com figuras geométricas, pois fornecem outro panorama sobre as figuras construídas, uma vez que a operação desses *softwares* proporciona agrupamentos simultâneos por justaposição e sobreposição, e tais agrupamentos não são possíveis de serem realizados simultaneamente quando a atividade envolve ferramentas físicas como, por exemplo, régua, compasso, lápis etc. (ALMOULOUD; SALAZAR, 2015). Além disso, os *softwares* de Geometria Dinâmica potencializam a percepção visual, a qual desempenha um importante papel no processo de resolução de tarefas (LABORDE, 1998).

Diversas pesquisas sobre ambientes de Geometria Dinâmica mostram que a interação com esses ambientes auxilia os estudantes a explorar, conjecturar, construir e explicar relações geométricas, bem como fornecer-lhes bases para construção de provas dedutivas (JONES, 2002).

Autores como Laborde (1998; 2000), Jones (2002; 2005), Jackiw e Sinclair (2007), Brunheira e Ponte (2016) e Jones e Tzekaki (2016) destacam a pertinência e as contribuições significativas de se trabalhar com ambientes de Geometria Dinâmica no sentido de promover a aprendizagem da Geometria desde a Educação Básica até o Ensino Superior.

Nesse sentido, adotou-se neste estudo o GeoGebra, que é um *software* educacional que integra Geometria Dinâmica com recursos numéricos, algébricos, gráficos e, também, planilhas. O objetivo do desenvolvimento desse *software* foi para dar apoio aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática em diferentes níveis de ensino (HOHENWARTER; HOHENWARTER; LAVICZA, 2008; PREINER, 2008; OROS; SANTOS; NÓBRIGA, 2014).

Nesse contexto, o GeoGebra é compreendido como uma multiplataforma, que integra diversas representações semióticas (figural, simbólica, língua natural etc.), e "permite construir diferentes representações num mesmo ambiente" (NÓBRIGA, 2015, p.79).

Segundo Abar (2011) e Abar e Alencar (2013), com o GeoGebra é possível trabalhar simultaneamente com diferentes representações semióticas acerca de um mesmo objeto matemático, e isso potencializa a compreensão em Matemática (DUVAL, 2004a; 2011).

De acordo com Lovis e Franco (2013), a realização de tarefas de Geometria com o apoio do GeoGebra permite construir figuras para representar diferentes objetos geométricos, perceber e verificar propriedades dos objetos envolvidos e, também, testar conjecturas e justificar raciocínios.

Nesta perspectiva, as pesquisas que incidem sobre o conhecimento geométrico de professores e futuros professores de Matemática sinalizam que é necessário um olhar para o desenvolvimento da compreensão de objetos geométricos de diferentes dimensões (pontos, retas, segmentos de reta, ângulos, polígonos, circunferências, regiões poligonais, círculos, poliedros e não poliedros etc.), promovendo para isso a utilização de tecnologias digitais, em especial os ambientes de Geometria Dinâmica (JONES; TZEKAKI, 2016).

Assim, a construção de figuras geométricas em ambientes de Geometria Dinâmica "pode ser uma fonte de explorações e de atitudes que concorrem para o desenvolvimento do conhecimento geométrico", em especial a apreensão de objetos da Geometria Euclidiana (GRAVINA, 2015, p.251).

Opções metodológicas

Este estudo se realizou por meio de uma abordagem qualitativa na perspectiva do paradigma interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994) e a modalidade de pesquisa adotada foi o estudo de caso (MERRIAM, 1988; PONTE, 2006; YIN, 2010).

Neste contexto, foi realizado um estudo de caso único, holístico, em virtude da singularidade da situação (YIN, 2010), pois se buscou estudar globalmente uma única turma de estudantes, futuros professores de Matemática, de uma disciplina de Geometria Euclidiana, do Curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática de uma universidade localizada ao norte do Estado do Paraná, em que estes estudantes resolveram tarefas de Geometria com o apoio do GeoGebra, durante o segundo semestre letivo de 2015.

Salienta-se que neste artigo é apresentada a análise e discussão de uma das tarefas realizadas, uma vez que cumpre com o objetivo delineado neste texto.

O ambiente natural do estudo e os participantes

Este estudo foi todo desenvolvido no laboratório de informática do Departamento de Matemática da Universidade, o qual era composto por trinta computadores com acesso a internet e ao *software* GeoGebra. Participaram do estudo oito estudantes que compunham a turma que constituiu o caso. No sentido de preservar a identidade dos participantes, eles foram nominados por *A1*, *A2*,..., *A8*.

O professor da disciplina propôs aos estudantes que se organizassem em equipes para resolver a tarefa proposta, cuja formação ocorreu por meio da relação interpessoal e de maneira natural. Por uma questão de dinâmica de sala de aula, neste estudo considera-se como equipe aquela constituída por apenas um único integrante, pois houve estudante que decidiu realizar a tarefa individualmente. Assim, para a realização da tarefa, ocorreu a composição de quatro equipes que foram denominadas por *E1*, *E2*, *E3* e *E4*.

A tarefa realizada

A tarefa desenvolvida para este estudo tratou sobre os diferentes tipos de triângulos (equilátero, isósceles e escaleno) quanto às medidas de seus lados. Seu objetivo foi formar representações de triângulos no GeoGebra a partir de segmentos de reta dados. A organização das equipes ocorreu da seguinte maneira: **E1**: A1, A2 e A7; **E2**: A3 e A5; **E3**: A4 e A6 e **E4**: A8. A resolução da tarefa teve duração de 40 minutos e foi norteada por instruções (Quadro 2) fornecidas pelo professor. De acordo com os pressupostos teóricos de Ponte (2005), essas instruções assentam em ações exploratória e investigativa.

Quadro 2: Instruções da tarefa sobre os tipos de triângulos quanto às medidas de seus lados.

i. Criar um segmento de reta AB na janela de visualização do GeoGebra.

ii. Construir um triângulo equilátero com lados de comprimento igual ao comprimento do segmento AB.

iii. Movimentar os pontos A e B do segmento AB e observar o vínculo existente entre o triângulo construído e o comprimento do segmento AB.

iv.	Criar um segmento FG de comprimento diferente do segmento AB.
v.	Construir o triângulo isósceles QRS com dois lados de comprimento igual ao do segmento AB e um lado de comprimento igual ao comprimento do segmento FG.
vi.	Movimentar os pontos A, B, F e G dos segmentos AB e FG, respectivamente, e observar o vínculo existente entre o triângulo construído e o comprimento desses segmentos.
vii.	Criar um terceiro segmento KL de comprimento diferente dos segmentos AB e FG.
viii.	Construir um triângulo escaleno MNP cujos lados tenham o comprimento dos três segmentos dados.
ix.	Movimentar os pontos A, B, F, G, K e L dos segmentos AB, FG e KL, respectivamente, e observar o vínculo existente entre o triângulo construído e o comprimento desses segmentos.

Fonte: Adaptado de Gerônimo, Barros e Franco (2010, p.86).

Destaca-se que a tarefa possibilitou aos estudantes, a partir da interação com as ferramentas do GeoGebra, formar e tratar representações figurais que seriam difíceis de explorá-las utilizando-se simplesmente recursos estáticos como, por exemplo, régua e compasso físicos.

Técnicas e procedimentos de recolha de dados

As técnicas de recolha de dados utilizadas neste estudo foram: a observação participante (ESTRELA, 1994) e a recolha documental (MERRIAN, 1988; YIN, 2010).

A observação participante permitiu registrar, em notas de campo, descrições verbais e outras ações pertinentes suscitadas pelos participantes do estudo durante a realização da tarefa. A recolha documental compreendeu arquivos digitais relativos às formações e transformações de representações figurais que as equipes realizaram na janela de visualização do GeoGebra, os quais foram enviados ao e-mail do primeiro autor deste artigo.

Categorias de análises das produções matemáticas da turma

Para analisar as produções matemáticas da turma estudada, buscou-se identificar e evidenciar os principais elementos apresentados na resolução da tarefa, bem como observar ocorrências significativas acerca das diferentes representações mobilizadas e coordenadas para os objetos geométricos presentes na tarefa.

Assim, foram delineadas três categorias de análise, as quais emergiram das interpretações da teoria dos registros de representação semiótica de Duval (2004a; 2011; 2012a; 2012b) e também da recolha de dados provenientes deste estudo, a saber: **(i) Coordenar diferentes registros**: a equipe coordenou diferentes registros de representação semiótica para o mesmo objeto geométrico; **(ii) Articular diferentes apreensões**: a equipe articulou as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial relacionadas a uma figura geométrica e **(iii) Apresentar dificuldades ou equívocos conceituais**: a equipe apresentou dificuldades ou equívocos conceituais ao utilizar representações figurais e da língua natural.

Destaca-se que a análise das produções matemáticas dos participantes deste estudo seguiu um processo transversal, em que todas as categorias foram consideradas simultaneamente na análise dos dados (FIORENTINI; LORENZATO, 2009).

Análise e discussão dos resultados

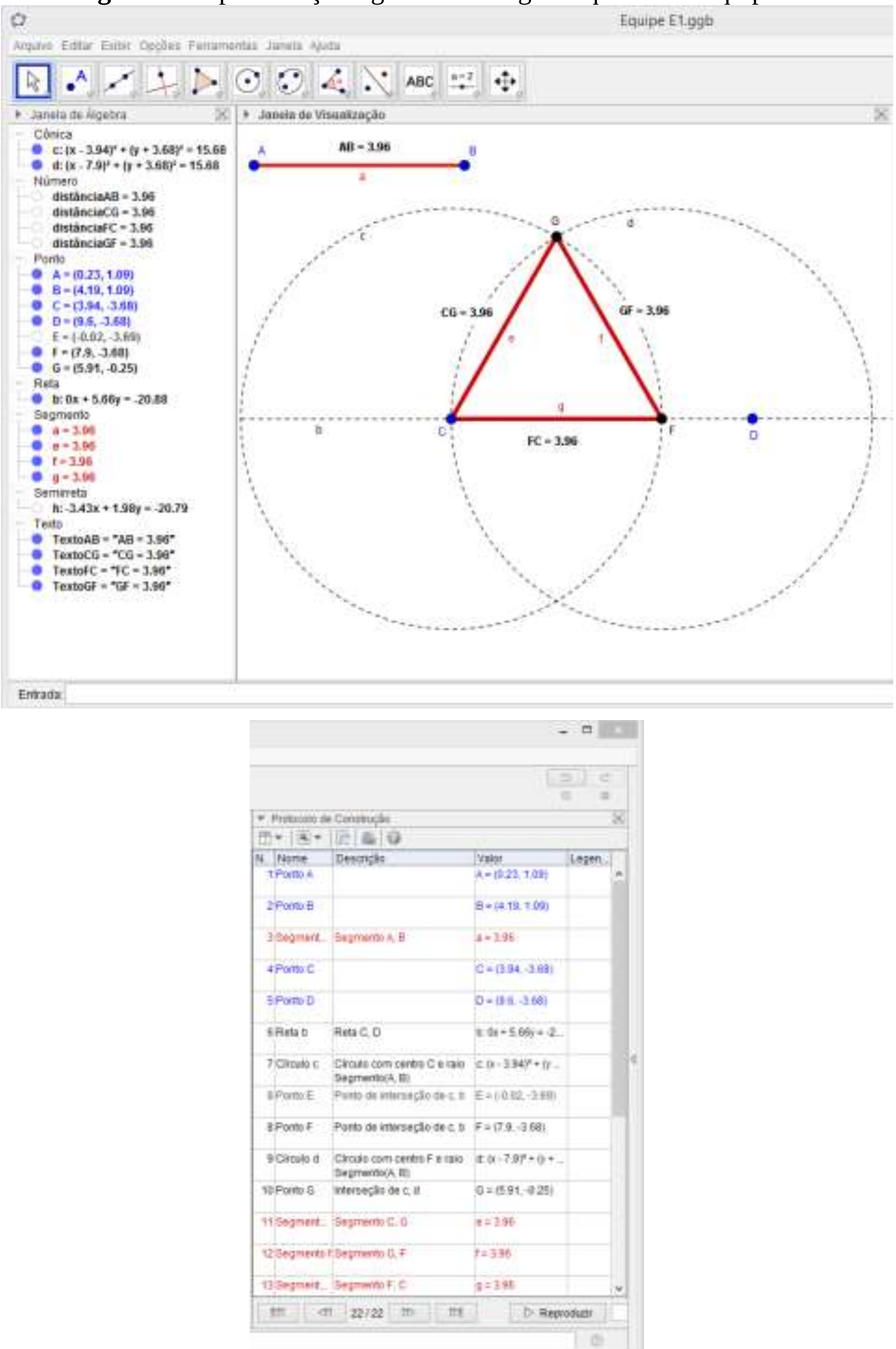
Os dados aqui apresentados se referem a uma tarefa (Quadro 2) de Geometria Euclidiana que foi resolvida no contexto do tema “construir”. Assim, se pretendia que os estudantes reproduzissem no GeoGebra construções de figuras sobre os tipos de triângulos quanto às medidas de seus lados, ou seja, triângulos equilátero, isósceles e escaleno. Essa tarefa se justifica, pois possibilitou aos futuros professores de Matemática, a partir da interação com as ferramentas e funcionalidades do GeoGebra, formar e transformar representações figurais em um ambiente de Geometria Dinâmica. Nesta perspectiva, este estudo corresponde aos destaques elencados à utilização dos ambientes de Geometria Dinâmica para o ensino e a aprendizagem da Geometria.

Ressalta-se que todas as equipes formaram as representações figurais dos triângulos solicitados na janela de visualização do GeoGebra durante a resolução da tarefa. Porém, por motivos desconhecidos, as equipes E1 e E2 enviaram ao e-mail simplesmente o arquivo da representação do triângulo equilátero. A equipe E3 enviou arquivos contendo as representações dos triângulos equilátero e isósceles, cuja formação da representação figural do triângulo equilátero ocorreu de maneira análoga à construção apresentada pela equipe E1 e, por essa razão, apresentamos somente a formação da representação figural do triângulo isósceles desta equipe. Já a equipe E4 enviou os arquivos das representações dos triângulos isósceles e escaleno, no entanto, a formação da representação figural do triângulo isósceles seguiu um processo análogo à construção realizada pela equipe E3 e, por esse motivo, apresentamos simplesmente a formação da representação figural do triângulo escaleno dessa equipe.

De acordo com Duval e Godin (2005) uma figura pode ser analisada em pelo menos de três formas diferentes. A primeira se refere à percepção, cuja análise centra-se nas formas ou nas unidades figurais (são as formas de base nas quais todas as figuras podem ser analisadas: pontos, retas, planos, segmentos de retas, semirretas, ângulos, curvas, circunferências, polígonos, vértices, poliedros, arestas, não poliedros etc.) que reconhecemos, e nas propriedades visuais dessas formas. As outras duas se referem ao que o ensino de Geometria busca desenvolver, a saber: (1) o conhecimento de propriedades geométricas que devem ser mobilizadas segundo as hipóteses dadas e (2) os instrumentos utilizados para reproduzir ou construir uma figura (DUVAL; GODIN, 2005).

Na Figura 1 tem-se a formação da representação figural do triângulo equilátero realizada pela equipe E1.

Figura 1: Representação figural do triângulo equilátero - equipe E1.



Fonte: Arquivo enviado pela equipe E1.

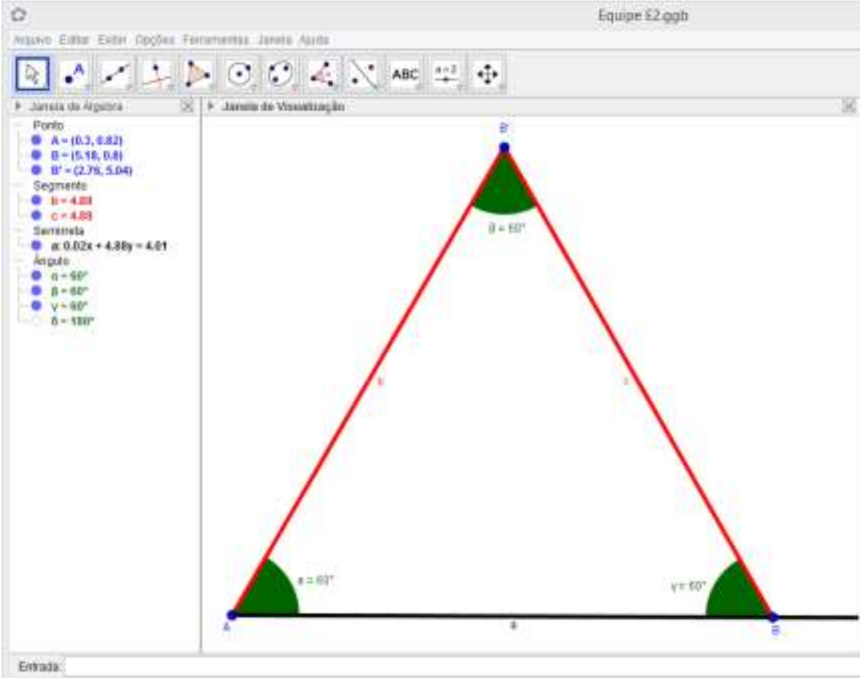
Inferimos que a representação do triângulo equilátero formada na janela de visualização do GeoGebra pela equipe E1 ocorreu a partir da coordenação dos registros da língua natural (instruções fornecidas na tarefa) e o figural (no *software*), bem como a articulação entre as apreensões **perceptiva**, que favoreceu o reconhecimento de formas, contornos, contrastes e marcas ilustrativas, e também as leis de organização da figura, pois a equipe E1 percebeu visualmente os vértices, nomes dos vértices, lados, medidas dos lados, reta suporte (reta b), circunferências "c" e "d", raios e o triângulo equilátero CGF; **sequencial**, que permitiu reproduzir uma figura geométrica, uma vez que a equipe fez a reprodução figural do triângulo equilátero conforme as instruções fornecidas; **operatória**, que possibilitou modificações na representação figural, pois a equipe transportou a medida do segmento AB, marcou um dos pontos de interseção (ponto G) das circunferências para obter um dos vértices do triângulo e arrastou os pontos A e B para observar o vínculo existente entre o triângulo CGF e o comprimento do segmento AB; e **discursiva**, que potencializou elencar hipóteses e propriedades matemáticas vinculadas à figura geométrica reproduzida, pois a equipe tomou como referência os lados congruentes do triângulo, os quais foram construídos a partir de circunferências com raios de mesma medida.

Além disso, sublinha-se que os conhecimentos geométricos mobilizados pela equipe E1 foram: (i) representar circunferências com raios de mesmo comprimento; (ii) determinar ponto de interseção entre circunferências e (iii) representar segmentos de reta tomando os centros das circunferências (pontos C e F) e o ponto G como os vértices do triângulo a ser representado.

Com base nos pressupostos teóricos de Duval (2004a), as unidades figurais elementares mobilizadas pela equipe E1, no processo de formação da representação do triângulo equilátero, foram: pontos, segmentos de reta, reta, circunferências e triângulo. Destaca-se ainda, que não há indicativos de ocorrência sobre interpretações equivocadas ou de dificuldades apresentadas por esta equipe acerca do triângulo representado na janela de visualização do *software*, fato este que potencializa a tomada de consciência sobre o que significa ser um triângulo equilátero, bem como seu reconhecimento por meio de diferentes representações semióticas em língua natural e figural (DUVAL, 2004a).

Na Figura 2 tem-se a formação da representação figural do triângulo equilátero realizada pela equipe E2.

Figura 2: Representação figural do triângulo equilátero - equipe E2.



Fonte: Arquivo enviado pela equipe E2.

A representação construída pela equipe E2 aconteceu por meio da coordenação dos registros da língua natural e figural, bem como pela articulação entre as diferentes apreensões, a saber: **perceptiva**, em que a equipe percebeu visualmente os vértices, nomes dos vértices, lados, medidas dos lados, semirreta, ângulos, medidas de ângulos e o triângulo equilátero ABB'; **sequencial**, quando a equipe reproduziu figuralmente o triângulo equilátero;

operatória, quando a equipe determinou o ponto B’ por meio da rotação do ponto B pelo ângulo de medida 60° e calculou as medidas dos ângulos $B\hat{A}B'$, $A\widehat{B'}B$ e $B'\hat{B}A$; e **discursiva**, em que a equipe reconheceu por meio de propriedades geométricas que os ângulos do triângulo representado têm a mesma medida.

Ressalta-se que a formação da representação figural do triângulo equilátero apresentada pela equipe E2 seguiu um caminho diferente das instruções fornecidas, pois o conhecimento geométrico mobilizado pela equipe foi sobre medidas dos ângulos internos do triângulo equilátero, ou seja, um triângulo que tem cada ângulo medindo 60°.

Conforme os pressupostos teóricos de Duval (2004a), o processo que a equipe E2 tomou para formar a representação figural do triângulo equilátero mobilizou as seguintes unidades figurais elementares: pontos, segmentos de reta, semirreta, ângulos e triângulo. Além disso, salienta-se que não há ocorrência de interpretações equivocadas ou de dificuldades apresentadas pela equipe acerca da representação construída na janela de visualização do GeoGebra, mesmo com a ausência da representação do segmento AB solicitado nas instruções, pois parece que sua apreensão perceptiva da semirreta representada, com origem no ponto A e passando pelo ponto B, permite “ver” a representação desse segmento e as propriedades visuais das diferentes formas exibidas na área de desenho do *software*.

Como os pontos A e B pertencem à mesma semirreta, esses pontos representam as extremidades do segmento AB, e como o ponto B’ foi criado por meio da rotação do ponto B pelo ângulo de medida 60°, a equipe construiu os segmentos AB’ (de media b) e BB’ (de medida c) obtendo o triângulo ABB’, em que evidenciou (na janela de visualização) as medidas de seus ângulos de 60° para representar o triângulo equilátero.

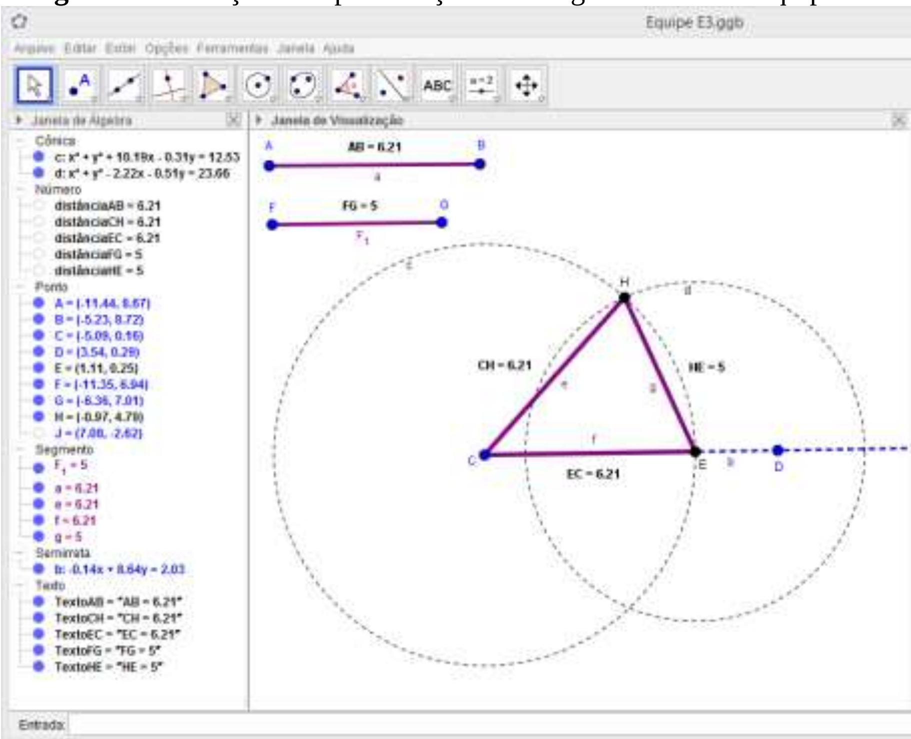
Nesse sentido, observa-se que a equipe E2 mobilizou e coordenou ideias geométricas e representações diferentes em relação àquelas da equipe E1 para representar figuralmente o triângulo equilátero, e isso favoreceu a tomada de consciência e o reconhecimento de um mesmo objeto geométrico por meio de suas diferentes representações semióticas (DUVAL, 2004a; 2011).

Evidencia-se que esta equipe tomou uma orientação diferente das demais equipes para representar figuralmente o triângulo equilátero, pois o representou a partir das medidas dos ângulos internos diferentemente das instruções fornecidas na tarefa. No entanto, este fato não revelou um desconhecimento da equipe sobre triângulo equilátero, uma vez que para sua representação figural na janela de visualização do GeoGebra a equipe considerou outros conceitos e resultados geométricos.

Assim, ao se formular e planejar uma tarefa de natureza exploratória e investigativa, tal como os pressupostos teóricos delineados por Ponte (2005), é comum que os estudantes realizem ações diferentes daquelas esperadas sobre conceitos e resultados envolvidos no contexto da tarefa.

Na Figura 3 tem-se a formação da representação figural do triângulo isósceles realizada pela equipe E3.

Figura 3: Formação da representação do triângulo isósceles - equipe E3.



revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Fonte: Arquivo enviado pela equipe E3.

A representação do triângulo isósceles formada, pela equipe E3, na janela de visualização do GeoGebra ocorreu por meio da coordenação dos registros da língua natural (instruções fornecidas na tarefa) e o figural (no *software*), bem como a articulação entre as apreensões perceptiva, sequencial, operatória e discursiva.

Além disso, sublinha-se que os conhecimentos geométricos mobilizados por esta equipe foram: (i) representar segmentos de reta de comprimentos distintos; (ii) representar circunferências com raios de comprimentos iguais aos comprimentos dos segmentos de retas; (iii) determinar o ponto de interseção entre circunferências e entre semirreta e circunferência e (iv) construir segmentos de reta tomando os centros das circunferências e um de seus pontos de interseção como sendo os vértices do triângulo a ser representado.

De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a), as unidades figurais elementares mobilizadas e coordenadas pela equipe E3, no processo de formação da representação figural do triângulo isósceles, foram: pontos, segmentos de reta, semirreta, circunferências e triângulo.

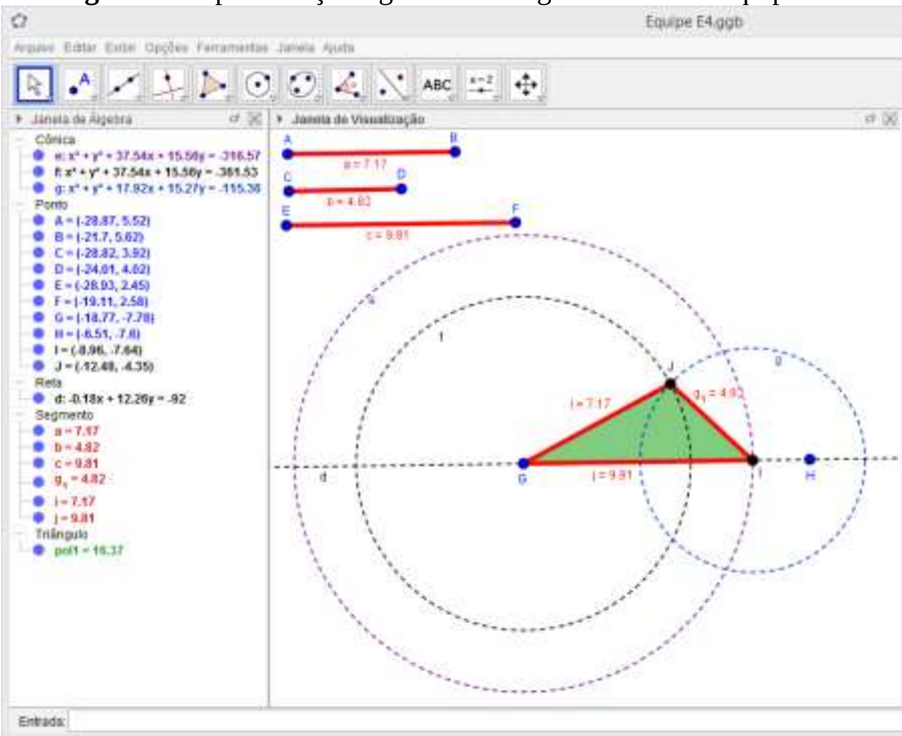
Sublinha-se que a equipe E3 exibiu diferentes legendas para os diferentes objetos geométricos representados na janela de visualização do GeoGebra, os quais reunidos constituem o triângulo isósceles. Duval (2004a) ressalta que é necessária uma manifestação verbal, em língua natural ou simbólica, para vincular a figura ao objeto matemático que se pretende representar e, isto, foi realizado por esta equipe.

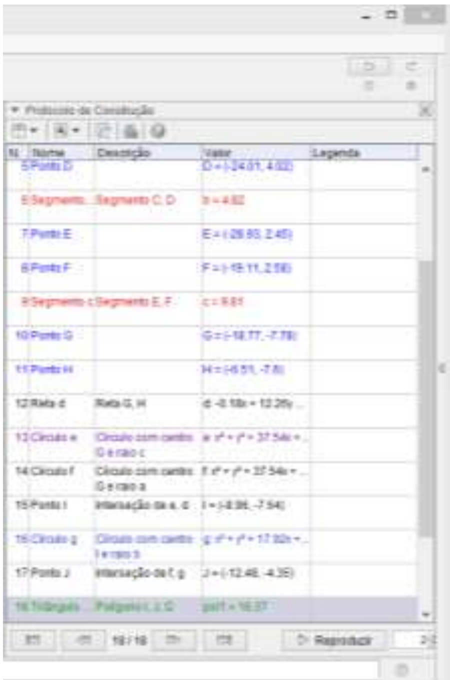
Destaca-se que as ações coordenadas pela equipe E3, para representar figuralmente o triângulo isósceles, têm conexões com: os registros da língua natural (instruções fornecidas) e o figural (janela de visualização do GeoGebra); as diferentes apreensões relativas a uma figura geométrica, ou seja, a **perceptiva**, quando a equipe percebeu visualmente os segmentos de reta, vértices, nomes dos vértices, lados, as medidas dos lados, a semirreta, as circunferências e o triângulo isósceles CEH, a **sequencial**, no momento em que a equipe fez a reprodução figural do triângulo isósceles no *software*, a **operatória**, quando a equipe transportou medidas de segmento, determinou interseção de circunferências e arrastou os pontos das extremidades dos segmentos AB e FG de modo a observar o vínculo existente entre o triângulo isósceles e o comprimento de cada segmento, e a **discursiva**, quando a equipe reconheceu, por meio de propriedades geométricas evidenciadas na representação figural, que o triângulo isósceles tem dois lados congruentes (segmentos CE e CH); as conversões exibidas simultaneamente na janela de álgebra do *software* (registro simbólico), após cada ação executada na janela de visualização e os conhecimentos geométricos mobilizados para obter a representação figural do triângulo isósceles.

Duval (2004a) destaca que a passagem de um registro de representação semiótica para outro, bem como as transformações realizadas nas representações neste último registro, fomentam a tomada de consciência do indivíduo sobre os objetos matemáticos estudados. Isto ficou evidente na formação da representação figural do triângulo isósceles, em que a equipe E3 reconheceu esse objeto geométrico por meio das representações semióticas produzidas nos registros figural, simbólico e da língua natural.

Na Figura 4 tem-se a formação da representação figural do triângulo escaleno realizada pela equipe E4.

Figura 4: Representação figural do triângulo escaleno - equipe E4.





Fonte: Arquivo enviado pela equipe E4.

Observa-se que a representação figural do triângulo escaleno formada pela equipe E4, se desenvolveu por meio da coordenação dos registros da língua natural (instruções fornecidas) e o figural (GeoGebra), pela articulação entre as apreensões **perceptiva**, quando a equipe levou em consideração a percepção visual dos segmentos de reta, dos vértices, dos nomes dos vértices, dos lados, das medidas dos lados, da reta suporte, das circunferências e do polígono (**pol1** - triângulo escaleno GIJ); **sequencial**, quando a equipe reproduziu figuralmente o triângulo escaleno na janela de visualização do GeoGebra; **operatória**, quando a equipe transportou as medidas dos segmentos AB e CD e EF representados inicialmente, determinou o ponto de interseção (ponto J) entre circunferências (circunferências "f" e "g") e arrastou as extremidades de cada um dos segmentos para observar o vínculo existente entre o triângulo escaleno GIJ representado e o comprimento desses segmentos; e **discursiva**, quando a equipe reconheceu por meio de propriedades geométricas evidenciadas nas representações produzidas na área de desenho do *software* que o triângulo representado tem três lados com medidas diferentes.

Salienta-se que as unidades figurais elementares utilizadas pela equipe E4 durante o processo de formação da representação figural do triângulo escaleno foram: pontos, segmentos de reta, reta, circunferências e triângulo.

De acordo com os pressupostos teóricos de Duval (2004a), a tomada de consciência do indivíduo emerge durante o processo de coordenação de diferentes registros de representação. Nesta perspectiva, infere-se que a significação do triângulo escaleno pela equipe E4 ocorreu com o reconhecimento desse objeto geométrico por meio de suas diferentes representações semióticas, entre elas as representações escritas em língua natural (instruções fornecidas), as representações simbólicas exibidas na janela de álgebra do GeoGebra (medidas dos lados) e as representações figurais, com suas respectivas legendas, formadas na janela de visualização do GeoGebra.

Além da tomada de consciência, evidencia-se que os conhecimentos geométricos articulados pela equipe E4 foram: (i) representar segmentos de reta com comprimentos distintos; (ii) representar circunferências de raios com medidas iguais às medidas dos segmentos de reta; (iii) representar reta e determinar as interseções entre circunferência e reta e entre circunferências de forma coordenada e específica e (iv) construir a representação figural de triângulo a partir dos pontos de interseção obtidos utilizando a ferramenta "polígono".

Portanto, em relação ao estudo realizado com esta turma de futuros professores de Matemática, observa-se que para cada uma das representações figurais solicitadas nesta tarefa, as equipes mobilizaram e coordenaram diferentes conhecimentos geométricos, bem como diferentes ferramentas do GeoGebra com o objetivo de exibir na sua janela de visualização os diferentes objetos geométricos compreendidos na tarefa proposta.

Evidencia-se também como o GeoGebra influencia as três atividades cognitivas relacionadas a qualquer representação semiótica, em que se destaca: (i) formar representações figurais de pontos, segmentos de reta, retas, semirretas, circunferências, ângulos e triângulos na janela de visualização e, de modo automático, suas respectivas correspondências na janela de álgebra, permitiu que as equipes articulassem simultaneamente as apreensões perceptiva e discursiva das formas, marcas, contrastes e contornos percebidos e associados a cada um dos objetos geométricos representado; (ii) tratar as representações figurais na janela de visualização favoreceu as equipes articular a apreensão operatória com as apreensões perceptiva e discursiva das figuras, uma vez que puderam transportar medidas de segmentos, determinar pontos de interseção entre reta e circunferência, entre semirreta e circunferência e entre circunferências de modo a obter os vértices dos triângulos e movimentar (alterar a posição) os pontos extremos dos segmentos (pontos livres), que permitiram a representação dos triângulos equilátero, isósceles e escaleno com intuito de perceber os vínculos existentes e (iii) converter as representações dos objetos geométricos elencados nas instruções para representações figurais na janela de visualização do *software*.

Além disso, com o ambiente de Geometria Dinâmica as equipes puderam perceber que o vínculo existente entre os triângulos representados e os segmentos de retas construídos inicialmente é de dependência, ou seja, a partir da ação de arrastar as extremidades desses segmentos pela janela de visualização do GeoGebra, os triângulos podem ou não existir, fato este que pode levar o indivíduo conjecturar um resultado geométrico conhecido como desigualdade triangular.

Conclusão

Constata-se neste estudo que as contribuições do GeoGebra, para o futuro professor de

Matemática, estão estritamente relacionadas às atividades cognitivas de formação, tratamento e conversão de representações figurais a partir da utilização de suas diferentes ferramentas e funcionalidades, tais como: arrastar (variar orientação, rotação e translação da representação), ampliar ou reduzir as representações figurais construídas na janela de visualização, bem como editar variáveis qualitativas relativas às representações (formas, nomes, cores, marcas, contornos, traços e espessuras de linhas etc.).

Outro aspecto relevante está no fato de que o GeoGebra dispõe de diferentes características e potencialidades. Dentre as principais características destaca-se a sua fácil utilização e seu acesso, o rigor e precisão das construções geométricas e o trabalho com conceitos formais da Geometria associados às suas ferramentas. No que diz respeito às suas potencialidades, evidencia-se a promoção da exploração, manipulação, simulação, criatividade e intuição, a elaboração e estruturação de conjecturas e justificativas, a percepção das propriedades dos objetos geométricos estudados, bem como a celeridade no processo de investigação das relações existentes entre diferentes objetos matemáticos (geométricos e numéricos) quando associado a um modo fenomenológico estático de produção de representações figurais.

Enfim, a contribuição deste estudo também se refere à relevância da realização de tarefas de Geometria de natureza exploratória e/ou investigativa com o apoio do GeoGebra, pois a utilização do *software* de Geometria Dinâmica potencializou, neste estudo, a apreensão de objetos geométricos a partir da expoente possibilidade de formação e transformação de representações semióticas e da interação com múltiplas representações dinâmicas. Além disso, o presente estudo evidenciou a tomada de consciência dos estudantes participantes acerca de sua própria aprendizagem em Geometria, o que pode ser um aporte significativo para o seu conhecimento didático-pedagógico.

Referências

ABAR, C. A. A. P. Educação Matemática na Era Digital. **Unión**: **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, San Cristobal de La Laguna, n. 27, p.13-28, out. 2011.

ABAR, C. A. A. P.; ALENCAR, S. V. A Gênese instrumental na interação com o GeoGebra: uma proposta para a formação continuada de professores de Matemática. **Bolema**, Rio Claro,

v. 27, n. 46, p.349-365, ago. 2013.

ALMOULOUD, S. A.; SALAZAR, J. V. F. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 17, n. 5, p.919-941, dez. 2015.

BATTISTA, M. T. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Reston: NCTM, 2007.

BELLEMAIN, F. O paradigma micromundo. **Anais do Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática**, Rio de Janeiro, v. 1, p.51-62, 2002.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BRUNHEIRA, L.; PONTE, J. P. Realizar construções geométricas com o GeoGebra: o contributo do AGD para a estruturação geométrica. In: CANAVARRO, A. P.; BORRALHO, A.; BROCARDO, J.; SANTOS, L. (Eds.). **Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática:** Recursos na Educação Matemática, Évora: Universidade de Évora, p.341-353, 2016.

CANDEIAS, N.; PONTE, J. P. Geometry learning: The role of tasks, working models, and dynamics geometry software. In: CZARNOCHA, B. (Ed.). **Handbook of mathematics teaching research**. Rzeszów: University of Rzeszów, 2008.

D'AMORE, B.; GODINO, J. D. Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. **La matematica e la sua didattica**, Bologna, v. 20, n. 1, p.9-38, 2006.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactiqueet de Sciences Cognitives**, IREM de Strasbourg, n. 5, p.37-65, 1993.

______. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Traducción Myriam Veja Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 2004a.

______. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y de las formas superiores eneldessarollo cognitivo**. Traducción Myriam Veja Restrepo. Cali: Universidad del Valle, 2004b.

______. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**. Dordrecht: Springer, v. 61, n. 1-2, p.103-131, 2006.

______. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009 (Fascículo I).

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

______. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p.118-138, 2012a.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução Méricles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p.266-297, 2012b.

______. Comment analyser le probleme crucial de la comprehension des matematiques? **Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, San Cristobal de La Laguna, n. 37, p.9-29, mar. 2014.

DUVAL, R.; GODIN, M. Les changements de regard nécessaires sur les figures. **Grand N**, IREM de Grenoble, n. 76, p.7-27, 2005.

ESTRELA, A. **Teoria e prática de observação de classes**: uma estratégia de formação de professores. Porto: Porto Editora, 1994.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2009.

FLORES, C. R. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, v. 19, n. 26, p.77-102, 2006.

GERÔNIMO, J. R.; BARROS, R. M. O.; FRANCO, V. S. **Geometria euclidiana plana**: Um estudo com o software GeoGebra. Maringá: EDUEM, 2010.

GRAVINA, M. A. Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, Belo Horizonte, 1996.

______. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **VIDYA**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p.237-253, jul./dez. 2015.

HOHENWARTER, J.; HOHENWARTER, M.; LAVICZA, Z. Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: the case of GeoGebra. **Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching**, Waynesville, v. 28, n. 2, p.135-146, 2008.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O. Como usar a geometria dinâmica? O papel do professor e do aluno frente às novas tecnologias. **Anais do Workshop de Informática na Escola**, Campo Grande: Sociedade Brasileira de Computação, p.120-128, jul. 2006.

JACKIW, N.; SINCLAIR, N. Dynamic geometry activity design for elementar school mathematics. In: HOYLES, C. et al. (Eds.). **Proccedings of the seventeenth ICMI study conference** "**Tecnology Revisited**". Paris: Hanoi Institute of Technology and Didirem University, 2007.

JONES, K. Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom. **MicroMath**, Derby, v. 18, n. 3, p.18-20, 2002.

______. The shaping of student knowledge: learning with dynamic geometry software. **Computer Assisted Learning Conference 2005** (**CAL05**), Bristol, p.4-6, apr. 2005.

JONES, K.; MACKRELL, K.; STEVENSON, I. Designing digital technologies and learning activities for different geometries. In: HOYLES, C.; LAGRANGE, J. B. (Eds.). **Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain**. Boston: Springer, New ICMI Study Series, v. 13, p.47-60, 2009.

JONES, K.; TZEKAKI, M. Research on the teaching and learning of geometry. In: GUTIÉRREZ, Á.; LEDER, G. C.; BOERO, P. (Eds.). **The second handbook of research on the psychology of mathematics education**. Rotterdam: Sense Publishers, 2016.

LABORDE, C. Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer-based environment. In: MAMMANA, C.; VILLANI, V. (Eds.). **Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century**: An ICMI study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers - Springer, 1998.

______. Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the comples activity of proving. **Educational Studies in Mathematics** (Special edition on proof in dynamics geometry environments). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers - Springer, v. 44, p.151-161, dez. 2000.

LOVIS, K. A.; FRANCO, V. S. Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o ensino de Geometria Euclidiana. **Informática na Educação**: **teoria e prática**, Porto Alegre, v. 16, n. 1, p.149-160, jan./jul. 2013.

MERRIAM, S. B. **Case study research in education**: a qualitative approach. São Francisco: Jossey-Bass Publishers, 1988.

NÓBRIGA, J. C. C. **GGBOOK**: uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica GeoGebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas. 2015. 246 f. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

OROS, V.; SANTOS, G. L.; NÓBRIGA, J. C. C. GeoGebra in Romanian: the challenges of localizing an educational software into a specific socio-cultural context. **GGIJRO: GeoGebra International Journal of Romania**, Galati, v. 4, n. 1, p.1-10, 2014.

PONTE, J. P. Gestão curricular em matemática. In: GTI (Ed.) **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005.

______. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 19, n. 25, p.105-132, 2006.

PREINER, J. **Introducing dynamic mathematics software to mathematics teachers**: the case of GeoGebra (Master's Thesis). University of Salzburg, Salzburg, 2008.

RODRIGUES, M.; BERNARDES, M. Ensino e aprendizagem da geometria. In: HENRIQUES, A. et al. (Eds.). **Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática**, Lisboa: APM, 2011.

SEDLÁČEK, L. A study of the influence of using dynamic geometric systems in mathematical education on the level of knowledge and skills of students. **Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics**, Bratislava, n. 9, p.81-108, 2009.

STAHL, G. **Translating Euclid:** designing a human-centered mathematics. Saint Raphael: Morgan & Claypool Publishers, 2013.

WOLECK, K. R. Listen to their Pictures: An Investigation of Children's Mathematical Drawings. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (Eds.). **Yearbook: The Roles of representation in school mathematics**. Reston: NCTM, 2001.

YIN, R. K. **Estudo de caso:** Planejamento e métodos. Tradução Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2010.

Recebido em: 25 de fevereiro de 2018
Aprovado em: 27 de maio de 2018