

Un modelo de un problema físico sencillo que conduce a la consideración de funciones polinómicas y exponenciales

Educación Matemática
Vol. 13 No. 2 agosto 2001
112-126

Fecha de recepción: Noviembre, 1998

Edgardo N. Güichal
Universidad Nacional del Sur
Departamento de Matemática, Argentina
eguichal@criba.edu.ar

Abstract: *It is well known that a cable (whose weight is supposed negligible) attached to two fixed points and supporting concentrated loads of the same weight, takes the shape of a polygonal whose vertices are located on a parabola. This model can be also used to study the shape of a cable carrying a load uniformly distributed along the horizontal. Cables of suspension bridges may be assumed loaded in this way, since the weight of the cable is small compared with the weight of the roadway. It is shown in this paper that if we choose appropriately the loads, the shape of the cable will coincide with the graph of a polynomial function of any chosen degree, or a sum of exponential functions.*

The study of this model seems appropriate as an example for an interdisciplinary work because it can be introduced as an interesting problem in Engineering, which can be solved using basic concepts of Physics (diagram of forces acting on a particle, equilibrium conditions) and Mathematics (vectors, functions, equations, trigonometry).

Some effort will be required to grasp the final calculations used to solve the equations appearing in the general case, but the teachers might select to present particular examples, according to the level of knowledge and interest of their students.

Resumen: *Es un hecho ya conocido que si se suspende un cable, cuyo peso se considera despreciable, fijando sus extremos a dos puntos fijos y sosteniendo cargas del mismo peso concentradas en algunos de sus puntos, el mismo tomará la forma de una poligonal cuyos vértices se ubican sobre el gráfico de una parábola. Este modelo puede ser usado también para el estudio de la forma que adquiere un cable que sostiene una carga distribuida uniformemente sobre una recta horizontal. Se puede suponer que los cables que sostienen puentes colgantes cumplen estas condiciones, pues el peso del cable es pequeño comparado con el peso que soporta. En este trabajo se muestra que el cable tomará la forma del gráfico de una función polinómica cuyo grado se elige arbitrariamente o de una función que es suma de funciones exponenciales, si se eligen apropiadamente las cargas.*

El estudio de este modelo es apropiado como ejemplo para un trabajo interdisciplinario ya que introduce un problema de interés en Ingeniería, que puede ser resuelto usando conceptos básicos de Física (diagramas de fuerzas que actúan sobre una partícula, condiciones de equilibrio de la misma) y Matemática (vectores, funciones, ecuaciones y trigonometría).

Aunque se requerirá algún esfuerzo para comprender los cálculos finales usados al resolver las ecuaciones correspondientes al caso general, los profesores podrán seleccionar la presentación de casos particulares, de acuerdo con el nivel de conocimientos y del interés de sus alumnos.

1. Introducción

En un artículo publicado en la Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina (Vol. 11, N° 3) [5], en colaboración con las profesoras G. Guala y V. Oscherov, analizamos la construcción de un modelo matemático para el problema de determinar la forma de la poligonal (polígono funicular) que tomaría un hilo del que se colgasen pesos de igual magnitud, de modo tal que sus proyecciones sobre una recta horizontal se encontraran igualmente espaciadas a una distancia h . En el mismo se ponía énfasis en la utilización del ejemplo como un modelo integrador entre distintas disciplinas (Física, Matemática, Ingeniería) y se destacaba la utilización de conceptos fundamentales, incluidos en los contenidos de los cursos de matemática y física de la escuela media. En tal sentido, puede ser de interés para el lector comparar con las técnicas más elaboradas usadas, por ejemplo, en [2] y [6], en los capítulos dedicados al estudio de cables con cargas concentradas.

En este trabajo se generaliza el problema allí estudiado, admitiendo que los pesos suspendidos del hilo, pueden tener magnitudes distintas, que denotamos con k_p , y se analizan los resultados que se obtienen cuando se dan distintos valores a k_p .

Veremos que el modelo continúa siendo de interés para un trabajo interdisciplinario, cuya resolución involucra la utilización de interesantes herramientas de diversas ramas de la matemática.

Todo el contenido de la Sección 2, así como los gráficos allí utilizados, son esencialmente similares a los que aparecen en el artículo mencionado y se repiten aquí para facilitar la lectura. Los resultados que aquí se obtienen permiten el tratamiento unificado de varios casos de interés que conducen a funciones polinómicas de grado arbitrario y a funciones exponenciales.

2. Planteo y solución del problema

Problema:

De un hilo cuya masa total es despreciable (en comparación con las masas "puntuales" que se cuelgan de él), y cuyos extremos han sido fijados en dos puntos que se encuentran a la misma altura del suelo, se cuelgan pesos distribuidos en forma simétrica alrededor de su punto medio y de modo tal que para cada par de puntos sucesivos sus proyecciones sobre una recta horizontal se encuentran separadas por la misma distancia h . El hilo toma entonces la forma una poligonal (polígono funicular). Se desea determinar la forma de la curva sobre la que se encuentran los vértices de dicha poligonal.

Solución:

Consideraremos el caso en que se suspende un número impar $n = 2m+1$ de pesos, de magnitudes distintas, pero cuyos valores coinciden para dos puntos que estén ubicados en forma simétrica con respecto al punto medio del hilo. Aceptando que todo el sistema se distribuye entonces sobre un plano y que adopta una forma simétrica alrededor de un eje

que pasa por el punto medio del hilo, trataremos de determinar las coordenadas de cada uno de esos puntos, respecto de un sistema de coordenadas apropiado.

Habr  un punto que denominaremos con P_0 , ubicado en el centro de la figura, que ocupa la posición más baja posible. Los restantes $2m$ puntos ocuparán posiciones simétricas alrededor de P_0 , por lo cual sólo consideraremos los puntos $P_1, P_2, P_3, \dots, P_m$, que se encuentran **a la derecha** de P_0 . Con P_{m+1} designaremos el extremo derecho del hilo, que es uno de los puntos de los que pende el sistema.

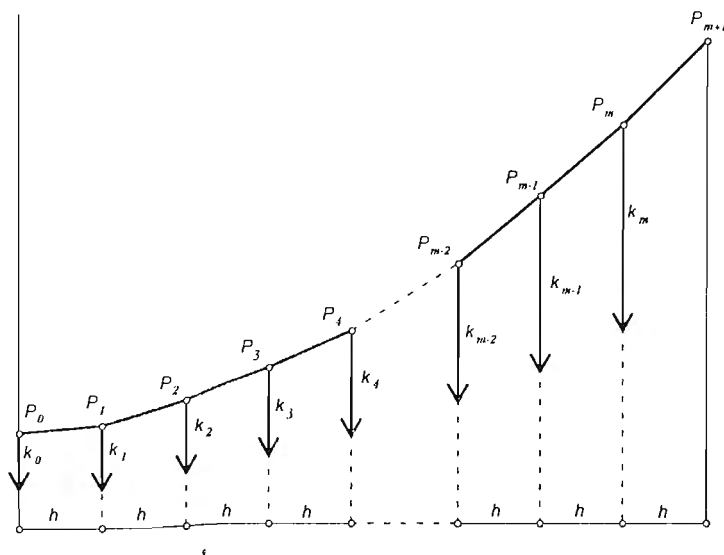


Figura 1

Sea k_j el peso suspendido en el punto P_j y llamemos h a la separación que existe entre las proyecciones de dos puntos consecutivos, sobre una recta horizontal. Si fijamos un sistema de coordenadas de modo que la abscisa de P_0 sea $x_0 = 0$ y designamos con (x_j, y_j) las coordenadas de P_j , para $j = 0, 1, \dots, m+1$, es claro que se tendrá que $x_j = j \cdot h$. Nos interesa determinar los valores de las ordenadas y_j .

Sobre cada uno de los puntos P_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) actúan tres fuerzas: el peso \vec{P}_j que en él se ha suspendido, cuya magnitud es k_j y que tiene dirección vertical y dirigida hacia abajo y dos fuerzas que designaremos con \vec{F}_j y \vec{G}_j , que representan las acciones sobre P_j , de las partes del sistema, que se encuentran a la izquierda y a la derecha del punto, respectivamente. Ellas tienen las direcciones que ha tomado el hilo, a la izquierda y a la derecha de P_j . Como el punto P_j se encuentra en equilibrio, la resultante de esas tres fuerzas debe ser nula, es decir:

$$\vec{F}_j + \vec{G}_j + \vec{P}_j = \vec{0} \quad (1)$$

Designaremos con α_j el ángulo que forma \vec{G}_j con la horizontal y trataremos de determinar la magnitud r_j de esta fuerza, que representa la tensión a la que est  sometido ese segmento del hilo. Por la simetría del gráfico completo, resulta que la magnitud de \vec{F}_0 es también r_0 y para que P_0 se encuentre en equilibrio, se debe verificar que $\vec{F}_0 + \vec{G}_0 = -\vec{P}_0$.

Si consideramos el triángulo $\Delta P_0 Q_0 R_0$ (Ver Figura 2) y aplicamos el teorema del coseno, resulta que:

$$k_0^2 = 2 \cdot r_0^2 - 2 \cdot r_0^2 \cdot \cos(2\alpha_0) = 2 \cdot r_0^2 \cdot [1 - \cos(2\alpha_0)] = 4 \cdot r_0^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha_0)$$

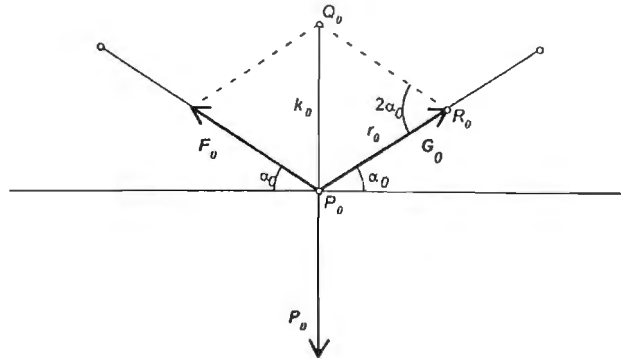


Figura 3

Por ser $k_0 > 0$, $r_0 > 0$ y $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, obtenemos el siguiente resultado:

$$k_0 = 2 \cdot r_0 \cdot \text{sen}(\alpha_0), \tag{2}$$

o bien:

$$r_0 = \frac{k_0}{2 \cdot \text{sen}(\alpha_0)} \tag{3}$$

→ Examinemos ahora lo que sucede en el punto P_j , si $j=1, 2, \dots, m$. Es claro aquí que $\vec{F}_j = -\vec{G}_{j-1}$, como consecuencia del principio de acción y reacción y del hecho que el hilo transmite hasta el otro extremo, la fuerza que se ejerce en uno de ellos, de modo que la situación es la que aparece en el siguiente esquema:

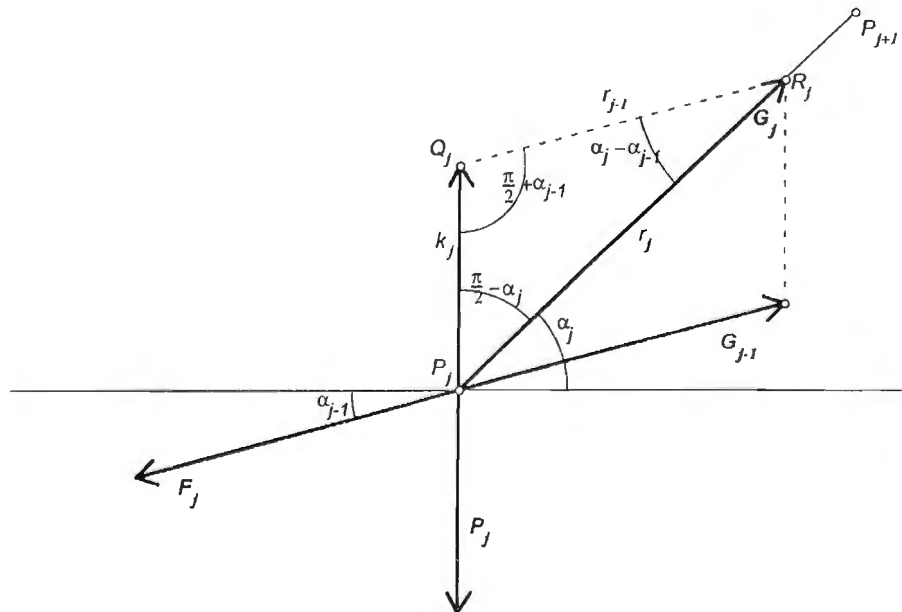


Figura 3

La condición (1) puede escribirse ahora en la forma: $\vec{G}_{j-1} - \vec{P}_j = \vec{G}_j$. Si consideramos ahora el triángulo $\Delta P_j Q_j R_j$ y aplicamos el teorema del seno, obtendremos:

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_j\right)}{r_{j-1}} = \frac{\text{sen}(\alpha_j - \alpha_{j-1})}{k_j} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_{j-1}\right)}{r_j}$$

que puede escribirse como sigue:

$$\frac{\cos(\alpha_j)}{r_{j-1}} = \frac{\text{sen}(\alpha_j - \alpha_{j-1})}{k_j} = \frac{\cos(\alpha_{j-1})}{r_j} \quad (4)$$

Del primero y del tercer miembros de (4) se deduce que, para $j = 1, 2, \dots, m$:

$$r_j \cdot \cos(\alpha_j) = r_{j-1} \cdot \cos(\alpha_{j-1}) \quad (5)$$

En particular, podemos afirmar entonces que para $j = 1, 2, \dots, m$:

$$r_j \cdot \cos(\alpha_j) = r_0 \cdot \cos(\alpha_0) \quad (6)$$

de donde resulta, usando (3), que para $j = 0, 1, 2, \dots, m$ vale que:

$$r_j \cdot \cos(\alpha_j) = \frac{k_0}{2 \cdot \text{sen}(\alpha_0)} \times \cos(\alpha_0) = \frac{k_0}{2 \cdot \text{tg}(\alpha_0)} \quad (7)$$

Es de interés señalar que que las expresiones (6) y (7) nos dicen **que la componente horizontal de \vec{G}_j** , que como ya indicamos antes, es el valor de la tensión a la que está sometido el segmento de hilo que se encuentra entre los puntos P_j y P_{j+1} , **es constante**.

Usando el primer y el segundo miembros de (4) obtenemos:

$$\cos(\alpha_j) = \frac{r_{j-1}}{k_j} \cdot \text{sen}(\alpha_j - \alpha_{j-1}),$$

es decir que:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_j) &= \frac{r_{j-1} \cdot \cos(\alpha_{j-1})}{k_j} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha_{j-1})} \text{sen}(\alpha_j - \alpha_{j-1}) = \\ &= \frac{r_0 \cdot \cos(\alpha_0)}{k_j} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha_{j-1})} \cdot [\text{sen}(\alpha_j) \cdot \cos(\alpha_{j-1}) - \cos(\alpha_j) \cdot \text{sen}(\alpha_{j-1})] = \\ &= \frac{k_0}{2 \cdot \text{tg}(\alpha_0)} \cdot \frac{1}{k_j} \cdot [\text{sen}(\alpha_j) - \cos(\alpha_j) \cdot \text{tg}(\alpha_{j-1})]. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que:

$$\cos(\alpha_j) \cdot \left(1 + \frac{k_0}{2 \cdot \text{tg}(\alpha_0)} \cdot \frac{\text{tg}(\alpha_{j-1})}{k_j}\right) = \frac{k_0}{2 \cdot \text{tg}(\alpha_0)} \cdot \frac{1}{k_j} \cdot \text{sen}(\alpha_j)$$

Luego, si $j = 1, 2, \dots, m$:

$$\text{tg}(\alpha_j) = 2 \cdot \frac{k_j}{k_0} \cdot \text{tg}(\alpha_0) + \text{tg}(\alpha_{j-1}), \quad (8)$$

de donde resulta que, para $j=1, 2, \dots, m$ vale la siguiente igualdad:

$$\operatorname{tg}(\alpha_j) = \left(1 + 2 \cdot \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_j}{k_0} \right) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0), \quad (9)$$

que podemos notar con

$$\operatorname{tg}(\alpha_j) = \eta_j \times \operatorname{tg}(\alpha_0), \quad j = 0, 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

donde

$$\eta_0 = 1 \quad \text{y} \quad \eta_j = 1 + 2 \cdot \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_j}{k_0} \quad \text{si} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

Resulta ahora muy fácil determinar el valor de la ordenada y_j del punto P_j , pues tendremos que

$$y_j - y_{j-1} = (x_j - x_{j-1}) \cdot \operatorname{tg}(\alpha_{j-1}) = h \cdot \eta_j \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0).$$

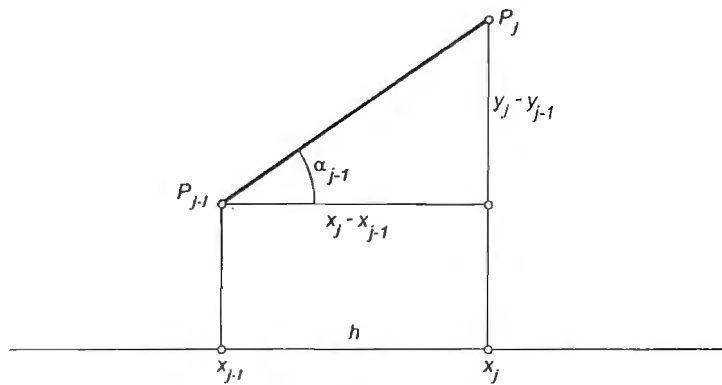


Figura 4

Es decir que si $j = 1, 2, \dots, m$:

$$y_j = y_{j-1} + h \cdot \eta_j \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0). \quad (12)$$

Reemplazando sucesivamente j por $1, 2, 3, \dots, p$ (donde $1 \leq p \leq m+1$) en (12), obtenemos

$$y_p = y_0 + h \cdot \sigma_p \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0), \quad (13)$$

donde

$$\sigma_p = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{p-1} \quad (14)$$

En particular, se tiene que $y_{m+1} = y_0 + h \cdot \sigma_{m+1} \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0)$, es decir que, si llamamos $H_m = y_{m+1} - y_0$ y a a la longitud de la proyección del hilo sobre el eje horizontal, tendremos que $\frac{a}{2} = (m+1) \cdot h$ y

$$\operatorname{tg}(\alpha_0) = \frac{H_m}{h \cdot \sigma_{m+1}} = \frac{2H_m}{a} \cdot \frac{m+1}{\sigma_{m+1}} \quad (15)$$

Antes de considerar algunos casos particulares que nos permitirán reconocer el tipo de curva que queda definida por las condiciones (13) y (14) calcularemos el valor de la tensión r_j y en particular su componente vertical $r_j \cdot \text{sen}(\alpha_j)$ y determinaremos alguna relación entre la longitud l del hilo, el valor de a y el valor de $\text{tg}(\alpha_0)$.

3. Cálculo de las tensiones

Si aplicamos el teorema del coseno al triángulo $\Delta P_{j-1}Q_jR_j$ obtendremos:

$$\begin{aligned} r_j^2 &= k_j^2 + r_{j-1}^2 - 2 \cdot k_j \cdot r_{j-1} \cdot \cos\left(\alpha_{j-1} + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= k_j^2 + r_{j-1}^2 + 2 \cdot k_j \cdot r_{j-1} \cdot \text{sen}(\alpha_{j-1}) \end{aligned}$$

Reemplazando sucesivamente j por $1, 2, 3, \dots, p$ (donde $m+1 \geq p \geq 1$) en la expresión anterior, obtenemos que:

$$\begin{aligned} r_p^2 &= (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_p^2) + r_0^2 + 2 \cdot [k_1 \cdot r_0 \cdot \text{sen}(\alpha_0) + k_2 \cdot r_1 \cdot \text{sen}(\alpha_1) + \dots + k_p \cdot r_{p-1} \cdot \text{sen}(\alpha_{p-1})] \\ &= r_0^2 + \sum_{j=1}^p k_j^2 + 2 \cdot [k_1 \cdot r_0 \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \text{tg}(\alpha_0) + k_2 \cdot r_1 \cdot \cos(\alpha_1) \cdot \text{tg}(\alpha_1) + \dots \\ &\quad + k_p \cdot r_{p-1} \cdot \cos(\alpha_{p-1}) \cdot \text{tg}(\alpha_{p-1})] = \\ &= r_0^2 + \sum_{j=1}^p k_j^2 + 2 \cdot r_0 \cdot \cos(\alpha_0) \cdot [k_1 \cdot \text{tg}(\alpha_0) + k_2 \cdot \text{tg}(\alpha_1) + \dots + k_p \cdot \text{tg}(\alpha_{p-1})] = \\ &= r_0^2 + \sum_{j=1}^p k_j^2 + 2 \cdot r_0 \cdot \text{sen}(\alpha_0) \cdot [k_1 + k_2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{k_1}{k_0}\right) + k_3 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{k_1 + k_2}{k_0}\right) + \dots \\ &\quad + k_p \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{k_1 + k_2 + \dots + k_{p-1}}{k_0}\right)] = \\ &= r_0^2 + \sum_{j=1}^p k_j^2 + k_0 \cdot \left(k_1 + k_2 + \dots + k_p + 2 \cdot \frac{k_2 \cdot k_1 + k_3 \cdot k_1 + k_3 \cdot k_2 + \dots + k_p \cdot k_{p-1}}{k_0}\right) = \\ &= r_0^2 + \sum_{j=1}^p k_j^2 + k_0 \cdot \sum_{j=1}^p k_j + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq p} k_i \cdot k_j = \\ &= r_0^2 + k_0 \cdot \sum_{j=1}^p k_j + \left(\sum_{j=1}^p k_j\right)^2 \end{aligned}$$

En resumen, si $p \geq 1$:

$$r_p^2 = r_0^2 + k_0 \cdot \sum_{j=1}^p k_j + \left(\sum_{j=1}^p k_j\right)^2 \quad (16)$$

Esto nos permitirá calcular fácilmente el valor de la componente vertical de cada tensión. En efecto:

$$\begin{aligned} r_p^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha_p) &= r_p^2 - r_p^2 \cdot \text{cos}^2(\alpha_p) = r_p^2 - r_0^2 \cdot \text{cos}^2(\alpha_0) = \\ &= r_0^2 + k_0 \cdot \sum_{j=1}^p k_j + \left(\sum_{j=1}^p k_j \right)^2 - r_0^2 \cdot \text{cos}^2(\alpha_0) = \\ &= r_0^2 \cdot \text{sen}^2(\alpha_0) + k_0 \cdot \sum_{j=1}^p k_j + \left(\sum_{j=1}^p k_j \right)^2 = \\ &= \frac{k_0^2}{4} + k_0 \cdot \sum_{j=1}^p k_j + \left(\sum_{j=1}^p k_j \right)^2 = \\ &= \left(\frac{k_0}{2} + \sum_{j=1}^p k_j \right)^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, tenemos que si $p \geq 1$:

$$r_p \cdot \text{sen}(\alpha_p) = \frac{k_0}{2} + \sum_{j=1}^p k_j \quad (17)$$

4. Relación entre l (longitud del hilo), a (longitud de su proyección sobre el eje horizontal) y el valor de $\text{tg}(\alpha_0)$.

Si llamamos l_{j-1} a la longitud del segmento que une los puntos P_{j-1} y P_j (Ver Figura 4), tendremos que

$$l_{j-1} = \sqrt{h^2 + h^2 \cdot \text{tg}^2(\alpha_{j-1})} = h \cdot \sqrt{1 + \text{tg}^2(\alpha_{j-1})} = h \cdot \sqrt{1 + \eta_{j-1}^2 \cdot \text{tg}^2(\alpha_0)}$$

Se tiene entonces que:

$$\frac{l}{2} = \sum_{j=0}^m l_j = h \cdot \sum_{j=0}^m \sqrt{1 + \eta_j^2 \cdot \text{tg}^2(\alpha_0)} \quad (18)$$

Es muy fácil verificar que para cualquier número positivo s se cumple que

$$\sqrt{1 + s^2} \leq 1 + s,$$

y si usamos esta desigualdad con cada uno de los términos que aparecen en (18), obtendremos:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &\leq h \cdot \sum_{j=0}^m [1 + \eta_j \cdot \text{tg}(\alpha_0)] = h \cdot \left(m + 1 + \text{tg}(\alpha_0) \cdot \sum_{j=0}^m \eta_j \right) = \\ &= h \cdot [m + 1 + \text{tg}(\alpha_0) \cdot \sigma_{m+1}] \end{aligned}$$

Si recordamos que, resulta $h = \frac{a}{2(m+1)}$

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_{m+1}}{m+1} \cdot \text{tg}(\alpha_0) \right) \quad (19)$$

de donde se deduce que

$$\frac{m+1}{\sigma_{m+1}} \cdot \left(\frac{l}{a} - 1 \right) \leq \operatorname{tg}(\alpha_0) \quad (20)$$

Se puede observar que la desigualdad (19) nos dice que el valor de $l/2$ es menor que la suma de las longitudes de las proyecciones del hilo sobre los ejes coordenados (ver Figura 5) si recordamos que $y_{m+1} - y_0 = \sigma_{m+1} \cdot h \cdot \operatorname{tg}(\alpha_0)$.

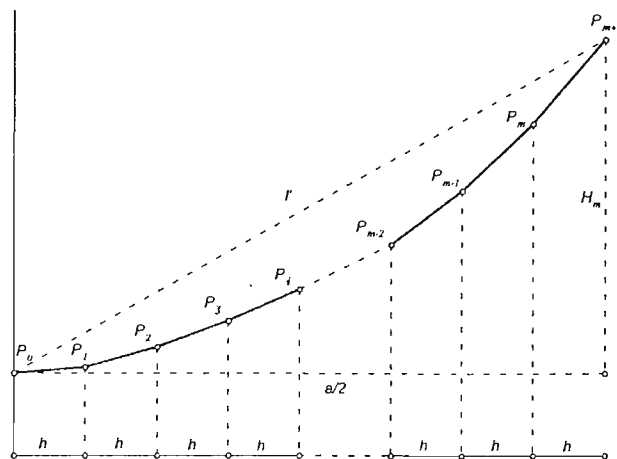


Figura 5

Por otra parte, si llamamos l' a la longitud del segmento que une los puntos P_0 y P_{m+1} y observamos el gráfico anterior, podemos asegurar que

$$\frac{l}{2} \geq l' = \sqrt{\frac{a^2}{4} + h^2 \cdot \sigma_{m+1}^2 \cdot \operatorname{tg}^2(\alpha_0)} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{\sigma_{m+1}^2}{(m+1)^2} \cdot \operatorname{tg}^2(\alpha_0)}$$

así que

$$\frac{l^2}{a^2} \geq 1 + \frac{\sigma_{m+1}^2}{(m+1)^2} \cdot \operatorname{tg}^2(\alpha_0)$$

es decir:

$$\frac{m+1}{\sigma_{m+1}} \cdot \sqrt{\frac{l^2}{a^2} - 1} \geq \operatorname{tg}(\alpha_0) \quad (21)$$

En resumen, (20) y (21) nos muestran que valen las siguientes desigualdades

$$\frac{m+1}{\sigma_{m+1}} \cdot \left(\frac{l}{a} - 1 \right) \leq \operatorname{tg}(\alpha_0) \leq \frac{m+1}{\sigma_{m+1}} \cdot \sqrt{\frac{l^2}{a^2} - 1} \quad (22)$$

Si usamos aquí la expresión (15) obtenemos la siguiente estimación para el valor de H_m :

$$\frac{1}{2} \cdot (l - a) \leq H_m \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{l^2 - a^2} \quad (23)$$

5. Estudio de algunos casos particulares

En esta sección, consideraremos los casos en que el peso k_j es un múltiplo de h_0 , esto es: $k_j = c_j \cdot k_0$, con distintas elecciones de los coeficientes c_j .

Tendremos aquí que

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{p-1} = \\ &= 1 + [2 \cdot c_1 + 1] + [2 \cdot (c_1 + c_2) + 1] + [2 \cdot (c_1 + c_2 + c_3) + 1] + \dots + [2 \cdot (c_1 + c_2 + \dots + c_{p-1}) + 1] = \\ &= p + 2 \cdot [c_1 + (c_1 + c_2) + (c_1 + c_2 + c_3) + \dots + (c_1 + c_2 + \dots + c_{p-1})] = \\ &= p + 2 \cdot [(p-1) \cdot c_1 + (p-2) \cdot c_2 + (p-3) \cdot c_3 + \dots + 2 \cdot c_{p-2} + c_{p-1}]\end{aligned}$$

Esto es:

$$\sigma_p = p + 2 \cdot \sum_{j=1}^{p-1} (p-j) \cdot c_j \quad (24)$$

Caso particular 1: $c_j = 1, j = 1, 2, 3, \dots, m+1$

$$\sigma_p = p + 2 \cdot \sum_{j=1}^{p-1} (p-j) = p + 2 \cdot \sum_{j=1}^{p-1} j = p + 2 \cdot \frac{(p-1) \cdot p}{2} = p^2$$

La fórmula (13) nos da, en este caso:

$$y_p = y_0 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0)}{h} \cdot (p \cdot h)^2 = y_0 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0)}{h} \cdot x_p^2$$

lo que nos asegura que los puntos P_j están ubicados sobre la parábola cuya ecuación es:

$$y = y_0 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0)}{h} \cdot x^2,$$

tal como habíamos determinado en el artículo mencionado en el comienzo de este trabajo.

Caso particular 2: $c_j = j, j = 1, 2, 3, \dots, m+1$

$$\begin{aligned}\sigma_p &= p + 2 \cdot \sum_{j=1}^{p-1} (p-j) \cdot j = p + 2 \cdot \left(p \cdot \sum_{j=1}^{p-1} j - \sum_{j=1}^{p-1} j^2 \right) = \\ &= p + 2 \cdot \left(p \cdot \frac{(p-1) \cdot p}{2} - \frac{(p-1) \cdot p \cdot (2p-1)}{6} \right) = \\ &= p \cdot \left(1 + p^2 - p - \frac{2 \cdot p^2 - 3 \cdot p + 1}{3} \right) = \\ &= \frac{p}{3} \cdot (p^2 + 2)\end{aligned}$$

En este caso la fórmula (13) nos da:

$$y_p = y_0 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0) \cdot h}{3} \cdot \left(\frac{x_p^3}{h^3} + 2 \cdot \frac{x_p}{h} \right) = y_0 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0)}{3 \cdot h^2} \cdot (x_p^3 + 2 \cdot h^2 \cdot x_p)$$

y esto nos asegura que los puntos P_j están ubicados sobre la curva que tiene por ecuación:

$$y = y_0 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0)}{3 \cdot h^2} \cdot (x^3 + 2 \cdot h^2 \cdot x)$$

Caso particular 3: $c_j = j^2, j = 1, 2, 3, \dots, m+1$

$$\begin{aligned} \sigma_p &= p + 2 \cdot \sum_{j=1}^{p-1} (p-j) \cdot j^2 = p + 2 \cdot \left(p \cdot \sum_{j=1}^{p-1} j^2 - \sum_{j=1}^{p-1} j^3 \right) = \\ &= p + 2 \cdot \left(p \cdot \frac{(p-1) \cdot p \cdot (2 \cdot p - 1)}{6} - \frac{p^2 \cdot (p-1)^2}{4} \right) = \\ &= p \cdot \left(1 + \frac{(p-1) \cdot p \cdot (2 \cdot p - 1)}{3} - \frac{p \cdot (p-1)^2}{2} \right) = \\ &= \frac{p}{6} \cdot (p^3 - p + 6) \end{aligned}$$

La fórmula (13) nos da ahora:

$$\begin{aligned} y_p &= y_0 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0) \cdot h}{6} \cdot \left(\frac{x_p^4}{h^4} - \frac{x_p^2}{h^2} + 6 \cdot \frac{x_p}{h} \right) = \\ &= y_0 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0)}{6 \cdot h^3} \cdot (x_p^4 - h^2 \cdot x_p^2 + 6 \cdot h^3 \cdot x_p) \end{aligned}$$

Nuevamente, podemos afirmar que esto nos asegura que los puntos P_j están ubicados sobre la curva cuya ecuación es:

$$y = y_0 + \frac{\operatorname{tg}(\alpha_0)}{6 \cdot h^3} \cdot (x^4 - h^2 \cdot x^2 + 6 \cdot h^3 \cdot x)$$

Como se puede observar, en los tres casos particulares estudiados, la clave estuvo en el hecho de poder obtener una fórmula para expresar el resultado de la suma $\Gamma_{m,r} = \sum_{j=1}^m j^r$, en los casos $r = 1, 2, 3$. El caso $r = 1$ corresponde a la fórmula de Gauss $1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m \cdot (m+1)}{2}$ y son conocidas (ver [8]) distintas técnicas que permiten calcular $\Gamma_{m,r}$ si se han determinado antes los valores de $\Gamma_{i,j}$ para $i < m, j < r$. En lo que sigue y para dar un tratamiento general al caso $c_j = j^{r-1}, r = 2, 3, 4, \dots$, usaremos la fórmula

$$\sum_{j=1}^{k-1} j^r = \frac{P_{r+1}(k) - P_{r+1}(0)}{r+1} \quad (25)$$

donde

$$P_r(t) = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \cdot B_i \cdot t^{r-i} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \cdot B_i \cdot t^{r-i} + B_r, \quad (26)$$

$B_i = B_i(0)$ es el i -ésimo número de Bernoulli, definido por las relaciones

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot B_k \quad \text{si } n = 2, 3, 4, \dots$$

y $\binom{r}{k}$ denota el número combinatorio $\binom{r}{k} = \frac{r!}{(r-k)!k!}$. (Ver [1], [3] y [7] en las referencias bibliográficas).

Usando la fórmula (26) podemos calcular σ_p de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= p + 2 \cdot \sum_{j=1}^{p-1} (p-j) \cdot j^{r-1} = \\ &= p + 2 \cdot \left[p \cdot \sum_{j=1}^{p-1} j^{r-1} - \sum_{j=1}^{p-1} j^r \right] = \\ &= p \cdot \left[1 + 2 \cdot \frac{P_r(p) - P_r(0)}{r} \right] - 2 \cdot \frac{P_{r+1}(p) - P_{r+1}(0)}{r+1} = \\ &= p \cdot \left[1 + \frac{2}{r} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \cdot B_i \cdot p^{r-i} \right] - \frac{2}{r+1} \cdot \sum_{i=0}^r \binom{r+1}{i} \cdot B_i \cdot p^{r+1-i} = \\ &= p \cdot \left[1 + \frac{2}{r} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} \cdot B_i \cdot p^{r-i} - \frac{2}{r+1} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r+1}{i} \cdot B_i \cdot p^{r-i} - \frac{2}{r+1} \cdot \binom{r+1}{r} \cdot B_r \right] = \\ &= p \cdot \left\{ 1 - 2 \cdot B_r + 2 \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \left[\frac{1}{r} \cdot \binom{r}{i} - \frac{1}{r+1} \cdot \binom{r+1}{i} \right] \cdot B_i \cdot p^{r-i} \right\} \end{aligned}$$

Estó nos dice que:

$$\sigma_p = p \cdot Q_r(p) \tag{27}$$

donde

$$Q_r(p) = (1 - 2 \cdot B_r) + 2 \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1-i}{(r+1-i) \cdot (r-i)} \cdot \binom{r-1}{i} \cdot B_i \cdot p^{r-i} \tag{28}$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} y_p &= y_0 + \text{tg}(\alpha_0) \cdot \sigma_p \cdot h = \\ &= y_0 + h \cdot \text{tg}(\alpha_0) \cdot p \cdot Q_r(p) \end{aligned}$$

Si recordamos que $x_p = p \cdot h$, es decir que se puede escribir $p = \frac{x_p}{h}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} y_p &= y_0 + \text{tg}(\alpha_0) \cdot x_p \cdot Q_r\left(\frac{x_p}{h}\right) = \\ &= y_0 + \frac{\text{tg}(\alpha_0)}{h^r} \cdot x_p \cdot Q_r^*(x_p) \end{aligned} \tag{29}$$

donde

$$\begin{aligned} Q_r^*(t) &= (1 - 2B_r) \cdot h^r + 2 \cdot \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1-i}{(r+1-i) \cdot (r-i)} \cdot \binom{r-1}{i} \cdot B_i \cdot h^i \cdot t^{r-i} = \\ &= \frac{2}{r \cdot (r+1)} \cdot t^r + \sum_{i=0}^{r-1} \xi_i(h) \cdot t^i \end{aligned} \tag{30}$$

y

$$\xi_0(h) = (1 - 2B_r) \cdot h^r$$

$$\xi_i(h) = 2 \cdot \frac{1-r+i}{i \cdot (i+1)} \cdot \binom{r-1}{i-1} \cdot B_{r-i} \cdot h^{r-i} \quad i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (31)$$

Todos estos resultados y en particular la fórmula (29), nos permiten hacer la siguiente afirmación final:

En el caso en que la distribución de las cargas suspendidas del hilo se haga según la ley: $k_j = j^{r-1} \cdot k_0$, el polígono funicular que queda así determinado tiene sus vértices ubicados sobre el gráfico de la función polinomial de grado $r + 1$ definida por

$$y = y_0 + \frac{tg(\alpha_0)}{h^r} \cdot x \cdot Q_r^*(x) \quad (32)$$

6. Otro caso especial

En esta sección, consideraremos otro caso particular de concentración de cargas sobre el hilo, cuyo tratamiento presenta marcadas diferencias con los que hemos visto en la sección anterior. Se trata aquí de tomar, es decir que el peso suspendido en el punto sea proporcional a la ordenada del punto, suponiendo que.

La situación planteada ahora se puede visualizar en el siguiente gráfico:

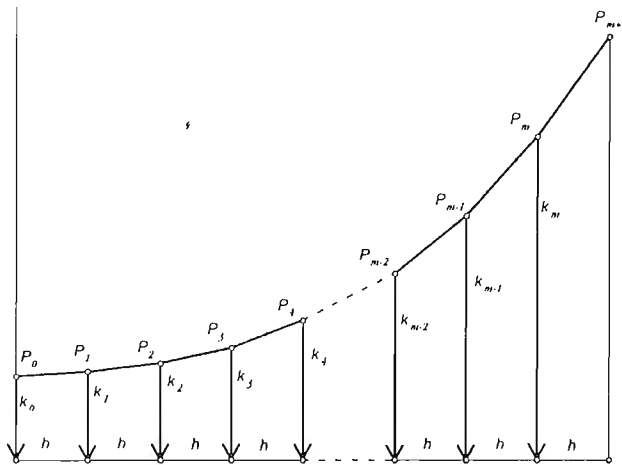


Figura 6

Resulta claro entonces el por qué de la diferencia con los casos ya vistos. En ellos, la carga que debía soportar el hilo en el punto P_j estaba bien determinada desde el inicio y a partir de esa información determinamos los valores de las coordenadas y_j de los puntos. En la situación actual, los valores de k_j y de y_j están directamente relacionados y eso nos conducirá a un sistema de ecuaciones que será necesario resolver. Lo haremos transformando el sistema en una ecuación en diferencias de segundo orden (ver [4]), con coeficientes constantes, cuya solución encontraremos por el método habitual.

En el presente caso, la fórmula (8) se puede escribir como:

$$tg(\alpha_j) = 2 \cdot \frac{y_j}{y_0} \cdot tg(\alpha_0) + tg(\alpha_{j-1})$$

Por otra parte, sabemos que

$$y_j = y_{j-1} + tg(\alpha_{j-1}) \cdot h$$

Si denotamos con $\lambda_0 = \frac{2 \cdot tg(\alpha_0)}{y_0}$ y $p_j = tg(\alpha_j)$, las dos fórmulas anteriores pueden escribirse

$$\begin{cases} y_j = y_{j-1} + h \cdot p_{j-1} \\ p_j = \lambda_0 \cdot y_j + p_{j-1} \end{cases} \quad (33)$$

o bien

$$\begin{cases} y_j = y_{j-1} + h \cdot p_{j-1} \\ p_j = \lambda_0 \cdot y_{j-1} + (1 + \lambda_0 \cdot h) \cdot p_{j-1} \end{cases}$$

De este último sistema se deduce que

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= y_{k+1} + h \cdot p_{k+1} = y_{k+1} + h \cdot [\lambda_0 \cdot y_k + (1 + \lambda_0 \cdot h) \cdot p_k] = \\ &= y_{k+1} + \lambda_0 \cdot h \cdot y_k + (1 + \lambda_0 \cdot h) \cdot h \cdot p_k = \\ &= y_{k+1} + \lambda_0 \cdot h \cdot y_k + (1 + \lambda_0 \cdot h) \cdot (y_{k+1} - y_k) = \\ &= (2 + \lambda_0 \cdot h) \cdot y_{k+1} - y_k \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$y_{k+2} - (2 + \lambda_0 \cdot h) \cdot y_{k+1} + y_k = 0 \quad (34)$$

La ecuación (34), junto con las condiciones iniciales:

$$y_0 \text{ dado, } y_1 = y_0 + h \cdot tg(\alpha_0) = y_0 \cdot \left(1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{2}\right)$$

puede ser resuelta buscando soluciones particulares de la forma $y_k = \mu^k$.

En efecto, si reemplazamos esta expresión en (34), tendremos que μ debe satisfacer la ecuación

$$\mu = \frac{2 + \lambda_0 \cdot h \pm \sqrt{(2 + \lambda_0 \cdot h)^2 - 4}}{2}$$

Se tiene entonces que

$$\mu_1 = 1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{2} + \sqrt{\lambda_0 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{4}\right)} \quad \text{y} \quad \mu_2 = 1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{2} - \sqrt{\lambda_0 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{4}\right)}$$

La solución general de (34) tendrá la forma

$$y_k = \lambda_1 \cdot \mu_1^k + \lambda_2 \cdot \mu_2^k$$

donde λ_1 y λ_2 son dos valores a determinar, a partir de las condiciones iniciales.

Haciendo $k = 0$ obtenemos

$$y_0 = \lambda_1 + \lambda_2$$

es decir que $\lambda_2 = y_0 - \lambda_1$

Haciendo $k = 1$ obtenemos

$$y_1 = \lambda_1 \cdot \mu_1 + \lambda_2 \cdot \mu_2 = \lambda_1 \cdot (\mu_1 - \mu_2) + y_0 \cdot \mu_2$$

de modo que

$$y_0 \cdot \left(1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{2}\right) = \lambda_1 \cdot 2 \cdot \sqrt{\lambda_0 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{4}\right)} + y_0 \cdot \left(1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{2} - \sqrt{\lambda_0 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{4}\right)}\right)$$

En consecuencia:

$$\lambda_1 \cdot 2 \cdot \sqrt{\lambda_0 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{4}\right)} = y_0 \cdot \sqrt{\lambda_0 \cdot h \cdot \left(1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{4}\right)}$$

de donde resulta que:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{y_0}{2}$$

y podemos afirmar que la solución de (34) está dada por

$$y_k = y_0 \cdot \frac{\mu_1^k + \mu_2^k}{2} \quad (35)$$

y, teniendo en cuenta que, según (22), es $p_k = \frac{1}{h} \cdot (y_{k+1} - y_k)$, se tiene que

$$p_k = \frac{y_0}{h} \cdot \left(\frac{\mu_1^{k+1} + \mu_2^{k+1}}{2} - \frac{\mu_1^k + \mu_2^k}{2} \right)$$

Si recordamos que $x_k = k \cdot h$, la ecuación (35) se puede escribir de la siguiente manera

$$y_k = y_0 \cdot \frac{\mu_1^{\frac{x_k}{h}} + \mu_2^{\frac{x_k}{h}}}{2}$$

lo que nos muestra que:

En el caso en que $k_j = c \cdot y_j$, los puntos P_k están ubicados sobre la curva definida por

$$y = y_0 \cdot \frac{(\phi(h) + \psi(h))^{\frac{x}{h}} + (\phi(h) - \psi(h))^{\frac{x}{h}}}{2}$$

donde

$$\phi(h) = 1 + \frac{\lambda_0 \cdot h}{2} \quad y \quad \psi(h) = p + 2 \cdot \left(p \cdot \frac{(p-1) \cdot p}{2} - \frac{(p-1) \cdot p \cdot (2p-1)}{6} \right)$$

REFERENCIAS

- [1] T. M. Apostol, (1960): *Análisis Matemático*. Ed. Reverté, p. 408, Ej 13.35.
- [2] F. P. Beer, E. R. Johnston, Jr. (1956): *Mechanics for Engineers. Statics*. Mc. Graw-Hill Book Co. Inc.
- [3] P. Biler, A. Witkowski, (1990): *Problems in Mathematical Analysis*. Marcel Dekker, Inc. N. Y. (Problem 1.54)
- [4] S. Goldberg, (1964): *Ecuaciones en Diferencias Finitas*. Marcombo, S.A., Barcelona.
- [5] G. Guala, E. Güichal, V. Oscherov, (1996): *Un problema integrador. Construcción de un modelo para la parábola*. Revista de Educación Matemática, UMA-Fa.M.A.F. Vol 11, N° 3, p. 2-10.
- [6] R. C. Hibbeler, (1984): *Mecánica para Ingenieros. Estática*. México, Continental.
- [7] The New Encyclopædia Britannica. Macropædia, (1981): Vol 13, pp. 358-359.
- [8] I. Niven, (1995): *Matemática de las Opciones*. Red Olímpica, Buenos Aires.