Ecuaciones y gráficos: el rol de los coeficientes

Fecha de recepción: Junio, 1998

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN

Educación Matemática
Vol. 13 No. 1 abril 2001
pp.81-93

Ismenia Guzmán, Lidia Consigliere
Universidad Católica de Valparaíso
iguzman@ucv.cl; lconsigl@ucv.cl

Resumen: *Este estudio contempla el análisis de una encuesta dirigida a estudiantes universitarios de primer año de carreras de ingeniería sobre la puesta en relación de las ecuaciones de algunas curvas típicas y sus respectivos gráficos cartesianos. Más precisamente se trata del estudio de los roles de los coeficientes de las ecuaciones y sus efectos en los gráficos respectivos.*

El análisis se ha hecho desde el enfoque cognitivo de R. Duval que se refiere a la distinción de los diferentes registros de representación en juego y la coordinación entre ellos. Esta ultima vista como una condición necesaria al proceso de comprensión.

En general en la práctica pedagógica tradicional no se han considerado problemas que den cabida a la confrontación de registros de representación y expresión diferentes, no obstante que la matemática frecuentemente pone en juego y coordina diferentes registros de representación.

Los estudiantes encuestados han mostrado poco éxito en la coordinación de los registros que exigían los problemas planteados. La distinción de índices propios de una representación no encuentra fácilmente sus correspondientes en la otra representación. Los registros considerados en la encuesta son: el algebraico, escritura de las ecuaciones, el gráfico cartesiano y el lenguaje natural.

Abstract: *This paper deals with the analysis of a survey administered to Engineering-major freshmen college students on the subject of the relationship between the equations of certain typical curves and their respective Cartesian graphs. More precisely, it studies the perception of the roles of the coefficients of the equations and their effect in the corresponding graphs.*

The analysis is based on the cognitive approach of R. Duval that refers to the distinction between the different registers of representation in use and the coordination among them, this being considered as a necessary condition to the comprehension process.

Usually traditional pedagogical practice does not provide problems that allow the confrontation of different registers for expression and representation, although Mathematics frequently does and also coordinates different registers of representations. The surveyed students have shown little success in the coordination of registers that the posed problems given in the required. The distinction of proper indexes in a representation does not predict the distinction of the indexes in other representations. The registers referred to are: algebraic register, equation writing, Cartesian graphics and natural language.

I. Introducción

El presente trabajo da cuenta de los resultados de una encuesta que hemos elaborado con el objeto de investigar el grado de familiarización que tienen estudiantes (de primer año de universidad) con el rol de los coeficientes de ecuaciones de rectas y parábolas y sus efectos en las representaciones gráficas de las funciones asociadas.

Nos hemos apoyado en los trabajos de Raymond Duval sobre los registros de representación semiótica, (registro en este marco, es un sistema de signos). En esta perspectiva la matemática constituye un cuerpo de conocimiento en el cual la movilización de una pluralidad de registros de representación semiótica es visible y necesaria. R. Duval afirma:

Las representaciones semióticas son representaciones en las cuales la producción no puede hacerse sin la movilización de un sistema semiótico: así las representaciones semióticas pueden ser producciones discursivas (en lenguaje natural, en lenguaje formal) o no discursivas (figuras, gráficos, esquemas...)[1].

En nuestra encuesta consideramos los sistemas semióticos o registros: gráfico, algebraico y lenguaje natural y se pretende coordinarlos o articularlos con el objeto de que las nociones matemáticas en juego: rectas, circunferencias, parábolas y sus ecuaciones adquieran para los estudiantes una completa significación y así puedan ellos apropiarse de los conocimientos matemáticos involucrados.

Este enfoque cognitivo R. Duval[2] lo describe en cuatro puntos como sigue:

1.- Funcionamiento cognitivo de los matemáticos el cual comprende dos condiciones:
   - el hecho de disponer de varios sistemas de signos que van a funcionar como registros de representación para funciones cognitivas de tratamiento y de objetivación,
   - la necesaria coordinación de estos registros. Esto es básico para que pueda haber diferenciación entre las representaciones y los objetos representados.

2.- Análisis del funcionamiento cognitivo, que distingue:
   - las transformaciones de representación que son tratamientos (en el mismo registro),
   - las transformaciones que son conversiones (cambio de registro).

3.- Puntos claves para el aprendizaje desde un punto de vista cognitivo: son la diferenciación de ciertos registros de representación desde el punto de vista funcional y la coordinación de registros.

4.- Tareas propuestas: en ellas es necesario distinguir por una parte, la tarea propiamente matemática y la tarea cognitiva y por otra parte hacerse cargo de la implicación real de una tarea matemática en la tarea cognitiva

II. Antecedentes

En trabajos anteriores (Guzmán y Consigliere, 1992 y 1993) hemos encontrado que los estudiantes muestran una gran dificultad para articular registros, dificultad que también ha

[1](Cf. [6], pg, 200). "Les représentations miotiques sont des représentations dont la production ne peut pas se faire sans la mobilisation d'un système sèmiotique: ainsi les reprèsentations sèmiotiques peuvent etre des productions discursives (en langue naturelle, en langue formelle), ou non discursives (figures, graphiques, schèmas...)."

[2] (cf. [6], pg, 210)

sido constatada en otras investigaciones (Dreyfus et al.) 1984, Markovits et al. 1986, Hitt 1989), pero en otros términos.

Los estudios de respuestas nos ha mostrado que los estudiantes no utilizan en sus desarrollos las informaciones que les proporciona la lectura y/o la interpretación de gráficos. El hecho que los estudiantes ignoren las informaciones gráficas o no las consideren, podría ser una consecuencia de la enseñanza recibida, en la cual el registro gráfico ha tenido poca importancia y valoración en el tratamiento de las materias, hecho constatado también por Artigue en su estudio sobre las ecuaciones diferenciales; sin embargo la interpretación de gráficos es una exigencia en problemas y pruebas. Esto significa que se exige la articulación del registro gráfico con el algebraico, es decir, se exige un conocimiento que se supone adquirido.

III. Estructura de la encuesta

La encuesta contiene situaciones que ponen en juego gráficos de rectas, parábolas y circunferencias, contemplando pasajes del registro gráfico al algebraico y viceversa. En las actividades propuestas se trata de descubrir el rol que juegan los coeficientes según la posición relativa de las rectas, circunferencias o parábolas dadas.

Nuestro objetivo es estudiar las consecuencias que se producen en las representaciones gráficas cuando se varía uno o varios coeficientes en las ecuaciones respectivas; y a la inversa, interpretar algebraicamente datos expresados gráficamente. Pretendemos así, ver o constatar como los estudiantes acceden a articular los registros gráfico, algebraico y el lenguaje natural.

Este tipo de situaciones, no es tomado en cuenta en los esquemas de enseñanza, pues al parecer se supone que es automático, o que es un objetivo ya logrado.

La encuesta se compone de tres situaciones, las dos primeras tienen una misma estructura: **actividades preliminares** de familiarización y **planteo de un problema** con las nociones involucradas para que el estudiante pueda descubrir las relaciones que le ayudarán a articular los registros (gráfico y algebraico).

En **la primera situación** se espera que el alumno grafique rectas dada su ecuación ($y = ax + b$), descubra los significados gráficos que tiene la variación de los coeficientes reales a y b. también se espera que al dibujar las rectas, una de las estrategias sea el identificar las coordenadas de dos puntos, poniendo en acción el axioma, "dos puntos definen una recta", como también que el estudiante recurra a poner en juego el coeficiente director o la pendiente de la recta.

Más adelante se plantea **el problema A** (problema A, [16]) que propone ordenar los coeficientes directores y de posición de cinco rectas dibujadas. El estudiante podrá aplicar el significado que ha encontrado de los coeficientes a, b para ordenarlos (Cf. anexo).

La **segunda situación**, presenta una actividad preliminar que trata de circunferencias y sus ecuaciones. Se propone dibujar una circunferencia dada su ecuación y se pide precisar las coordenadas del centro y la longitud del radio; a la inversa, se dan las coordenadas del centro y el radio de una circunferencia y se pide encontrar su ecuación.

Sigue el **problema B** (problema B, [16]) en el que se espera que la variación de cada coeficiente de la ecuación de la circunferencia cobre para los estudiantes su sentido en el gráfico y puedan justificar el ordenamiento que se les pide (Cf. anexo).

La **tercera situación** contempla como actividades, un estudio de la ecuación de la parábola, $y = ax^2 + bx + c$, de modo que se descubra el rol de los coeficientes a, b y c, y se trate de asociar a cada parábola dibujadas la ecuación correspondiente. Estas actividades permiten a los estudiantes familiarizarce con los significados (gráficos) de la variación de cada coeficiente a, b, c de la ecuación. En las representaciones gráficas se espera que utilicen otras estrategias diferentes a las de dibujar parábolas por puntos: que recurran a determinar las coordenadas del vértice, precisar eje, puntos simétricos, determinar si la apertura de la parábola es hacia arriba o hacia abajo... también se espera que a cada parábola dibujada puedan asociarle la ecuación que le corresponde, a partir de las informaciones dadas por los gráficos (cf. anexo).

IV. Puesta en práctica de la encuesta y observaciones

La experiencia la efectuamos en cuatro sesiones de 90 minutos cada una con 25 alumnos al inicio de un curso de cálculo, en forma independiente al curso mismo. El desarrollo se hizo en grupos de 2 o 3 alumnos.

El análisis posterior de las respuestas obtenidas lo realizamos apoyándonos exclusivamente en las producciones textuales de los estudiantes.

A continuación exponemos algunas respuestas textuales de estudiantes con breves comentarios. Haremos referencia a cada situación con un subtítulo que la identifica.

• *Ecuaciones y Rectas*

En referencia al **problema A**, (Cf. anexo) la respuesta esperada respecto a los $\mathbf{a}_i$ en orden creciente es $a_3 < a_2 < a_1 < a_5 < a_4$.

José: *" $a_3 < a_2 < a_1 < a_5 < a_4$ se ordenan decrecientes y crecientes y luego dentro de esta clasificación se ordenan según el ángulo de inclinación respecto al eje x"*

José expresa su criterio, apoyándose en el ángulo de inclinación de las rectas respecto al eje x y su relación con los coeficientes, lo que parece ser para él, un fundamento teórico.

Luis: *" $a_3 < a_2 < a_1 < a_5 < a_4$ se determina por medio de la posición de la recta al eje x, mientras más paralela al eje x, menor es su pendiente, Se acerca a cero."*

Luis tiene un criterio intuitivo-visual, y la expresión "mientras más paralela al eje x" aunque ingenua le permite responder con éxito.

Fernando: *" $a_3 < a_2 < a_1 < a_5 < a_4$. El problema resulta engorroso ya que no tiene números por los cuales poder guiarse. Pero se podrá obtener solo observando el grado de nivelación de las distintas rectas. Si van del 4° al 2° (o viceversa) o si van del 1° al 3° (o viceversa), se puede observar que los $\mathbf{a}_i$, los $\mathbf{b}_i$ son distintos y he aquí donde se observa el grado."*

Fernando separa las rectas de coeficientes directores positivos y negativos según una lectura del gráfico de acuerdo a un criterio visual, que relaciona la posición de las rectas con los coeficientes de las rectas, escribe "rectas que van del 4º al 2º cuadrante o que van del 1º al 3º cuadrante" y no explica después como "se observa el grado", suponemos que se refiere a la inclinación de las rectas respecto del eje x.

Pablo: *" $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$ son de pendiente negativa. Pero la que está mas cerca del eje x es $\mathbf{a}_2$, por lo cual es la menor, o sea, $\mathbf{a}_2$ está mas cerca de ser paralela al eje x; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_5$ y $\mathbf{a}_4$ son* *pendientes positivas. Pero la que está más cerca del eje x es* $\boldsymbol{a_1}$ *entre las pendientes positivas, luego* $\boldsymbol{a_5}$ *y* $\boldsymbol{a_4}$ "

Pablo identifica las pendientes o coeficientes directores con las rectas. Su criterio intuitivo visual, le funciona sólo para los coeficientes positivos.

Con respecto a ordenar los $\mathbf{b_i}$.

La respuesta esperada es: $b_4 < b_1 < b_3 < b_2 = b_5$.

Guillermo: " $b_5 = b_2 > b_3 > b_1 > b_4$. *Cuando corta al eje y desde positivo hasta negativo.*"

Guillermo ordenó según su criterio visual en forma decreciente, se pedía en orden creciente.

Miguel: " $b_4 < b_1 < b_3 < b_5 = b_2$. *En general* ***b*** *es el coeficiente que indica el punto de coordenadas (0,b).* "

Esta respuesta muestra un hecho frecuente entre los alumnos confundir la ordenada del punto con el punto mismo.

• *Ecuaciones y circunferencias*

Veamos algunas respuestas al **problema B** relativo a circunferencias.

La respuesta esperada es: $a_2 < a_1 < a_3$; $b_1 < b_2 < b_3$; $r_3 < r_1 < r_2$.

Miguel: " *En la forma de la ecuación el punto de* a_i *nos da el centro de la circunferencia y* R_i *es la longitud del radio. Entonces* $a_2 < a_1 < a_3$, $b_1 < b_2 < b_3$ *y* $r_3 < r_1 < r_2$."

Miguel, llama punto a_i la abscisa del centro de la circunferencia y no se pronuncia sobre la ordenada del centro, sin embargo ordena correctamente, pero no explica su criterio.

Angel: " *Los* a_i *y* b_i *son los puntos h y k.*"

Acompaña esta respuesta con un dibujo en el que se observa que el estudiante lee las a_i en el eje x y las b_i en el eje y. Ordena: " $a2 < a1 < a3$, $b1 < b2 < b3$ y $r3 < r1 < r2$ "

Angel en la primera frase: " los a_i y b_i son los puntos h y k" identifica los números a_i, b_i , h y k, con puntos, pero ellos son abscisas u ordenadas del centro de la circunferencia. Este es un error frecuente entre los estudiantes, el confundir números con puntos, tal vez proviene de abusos de lenguaje de sus profesores, quienes al no distinguir los registros, no enfatizan los signos de expresión de uno y de otro y no son estrictos en el vocabulario. Nos parece que debe enfatizarse que la relación de orden se define entre números y no está definida para objetos geométricos: rectas, puntos. Por otra parte, esta respuesta nos muestra que Angel vuelve a la expresión tradicional de la circunferencia en que el centro tiene coordenadas (h,k), el no acepta con comodidad (a_i, b_i) .

Luis S: *En el gráfico dado marca los centros de las circunferencias y sus respectivas coordenadas y escribe:* " *El centro de la* C_1 *está dado por un número positivo y otro negativo* (a_1, $-b_1$), *en* C_2 *el centro es* ($-a_2$, b_2) *y en* C_3 *el centro es* (a_3, b_3) *y* $a_3 > a_1 > a_2$, $b_3 > b_2 > b_1$ *y* $r_3 > r_1 > r_3$ "

Para Luis, los a_i y b_i representan números positivos. Aquí se pone en evidencia otra dificultad de los alumnos que puede tener origen en sus primeros cursos de álgebra, cuando se considera en una expresión algebraica como positivo el primer término que no tiene signo.

Christian: *En el gráfico dado marca los centros y sus coordenadas respectivas y escribe: "$a_2 < a_1 < a_3$, $b_1 < b_2 < b_3$ y $r_3 < r_1 < r_2$ "* Esta respuesta es intuitivo-visual.

Christian L: *En el gráfico dado marca los centros y sus coordenadas y escribe: " (-,+) C_2; (+,-) C_1 ; (+,+) C_3 y a_3, a_1, a_2, b_3, b_2, b_1 y R_3, R_1, R_2."*

Christian L. no responde con claridad lo que se pide; la redacción no permite deducir el orden que da a los coeficientes.

• *Ecuaciones y parábolas*

Veamos algunas respuestas de la actividad 1 de la ficha 3, aquí se trata de representar parábolas dadas su ecuación e interpretar el significado del coeficiente **a**:

Guillermo: " *Observamos que al trazar las parábolas P_1 y P_2 basta dibujar dos puntos y sus simétricos. El coeficiente **a** representa dos cosas: Si es positivo o negativo la parábola es hacia arriba o hacia abajo. También entre mayor es el **a**, es menor el ángulo que da la parábola* ".

El dibuja puntos simétricos y marca el vértice (0,0) de las parábolas, dando una representación aceptable. Es decir, su trazado es por puntos. No hace lo mismo para las parábolas P_3 y P_4 pues ellas, tienen una ecuación en la cual las coordenadas de sus vértices no son evidentes. Calcula las coordenadas de los vértices, (aplicando fórmulas) teniendo éxito con el de P_4, pero se equivoca con P_3 y P_4.Considerando solo el vértice y su apertura. Interpreta el coeficiente a en forma aceptable y a la apertura de la parábola la llama *ángulo de la parábola*.

V. Análisis de resultados

En la actividad preliminar, que pedía dibujar rectas dadas su ecuación, encontramos que:

Al dibujar una recta por puntos (de 25 alumnos)

No distinguen puntos de intersección: 5	Usan dos puntos: 13	Usan 3 o más: 11

Coeficientes y paralelismo

Reconocen paralelismo en referencia Al coeficiente director: 2	Lo reconocen sin referencias: 11

Rol de los coeficientes a y b.

Explican el rol del coeficiente a: 2	Explican el rol del coeficiente b: 3	Describen el gráfico: 4	No dan explicaciones: 13

- Respecto al trabajo del trazado de rectas queda de manifiesto que solamente para el 50% de los estudiantes es claro que dos puntos determinan una recta. Sin embargo 11 saben hallar las coordenadas de puntos a partir de la ecuación y necesitan mas de tres puntos para dibujarla y una tabla de valores.

- Respecto al paralelismo: 11 alumnos se apoyan en sus dibujos para afirmar que las rectas dadas son paralelas, sin preocuparse de una justificación más sólida del hecho. Esta es una evidencia de que los estudiantes no ven ninguna relación entre las rectas y las ecuaciones respectivas y muchas veces confunden las rectas con los coeficientes directores o pendientes, cuando hablan de "*rectas mayores o menores que otras.*"

Respecto al problema A de las rectas:

- 13 estudiantes (de 25) se dan cuenta que hay rectas con coeficientes directores positivos y negativos. Su estrategia es separarlas y las llaman "*rectas positivas*" y "*rectas negativas*".

Para ordenar los coeficientes hacen referencia a la distancia de la recta al eje x: escriben "*mas cerca del eje x, disminuye el a, o más paralela al eje x, disminuye el a*". Suponemos que como la pendiente del eje x es cero, toman este dato como referencia para la afirmación "*mas cerca del eje x, disminuye el a,*" Aunque estas afirmaciones son de alguna ambigüedad ellas manifiestan que los alumnos establecen una relación entre el gráfico y la noción de perpendicularidad.

Muy pocos alumnos hacen referencia al ángulo de inclinación, también en relación con la pendiente, es decir, una relación entre êndices visuales (ángulo) y algebraicos (coeficientes).

- Respecto al orden de los a_i: 10 estudiantes ordenan los $\mathbf{a}_i$ y explican porqué, otros 3 alumnos los ordenan, pero no dan justificaciones aceptables y el resto (12), omite las respuestas. Este problema ha resultado difícil para los estudiantes, exigía un pasaje no habitual del registro gráfico al algebraico, pues a partir de las 5 rectas dibujadas, había que extraer información para ordenar los coeficientes directores.

- Respecto al orden de los b_i: 11 (de 25) estudiantes ordenan bien los coeficientes b_i y dan explicaciones aceptables; 6 los ordenan correctamente sin dar explicaciones. El criterio mas utilizado lo encontramos en la expresión: " *corta al eje y desde positivos a negativos* "

En la situación de las circunferencias, problema B:

- 17 estudiantes comprenden el texto dado, como puede apreciarse en las respuestas que mostramos en el párrafo anterior.

- Logran expresar el significado de a_i, b_i, 5 estudiantes y 4 el significado de r_i; omiten explicaciones al respecto 16 estudiantes.

- Ordenan correctamente los a_i y b_i, 20 estudiantes, 2 incorrectos y 3 omiten.

- Ordenan correctamente los r_i, 20 estudiantes, 5 omiten la respuesta.

Ya señalamos que las respuestas dadas a este problema, son descripciones visuales en la mayor parte de ellas, el gráfico no juega un rol de registro de expresión con signos propios, sino que es considerado como una imagen fotográfica de la cual por ejemplo, las relaciones de orden surgen directamente de la percepción visual; los alumnos no ven la necesidad de justificar el hecho observado considerando los signos pertinentes y propios del registro.

Constatamos que la comprensión del problema B, resulta rápida para los estudiantes pues los objetos en juego tienen un significado que ellos necesitan dar explicaciones apoyándose en conocimientos que no son de tipo gráfico o visual sino conceptuales y que se leen en otro registro (algebraico o lenguaje natural), lo que requiere la articulación de ambos registros. Por ejemplo, en el caso de ordenar las abscisas y las ordenadas de los centros deben explicar apoyándose en la comparación de números reales asociados a medidas de segmentos.

Lo gráfico o visual tiene que ir coordinado con otro registro para que cumpla su rol de apoyo al aprendizaje.

En la situación de las parábolas:

En la actividad que pide representar ocho parábolas tenemos que:

- 6 estudiantes encuentran el vértice completando cuadrados, 10 lo determinan utilizando fórmula y 9 dibujan dos puntos y sus simétricos y utilizan concavidad.
- 3 de 25 logran dibujar las ocho parábolas, 8 alcanzan a dibujar mas de cuatro y 12 dibujan menos de cuatro.

Este análisis, nos confirma en general lo que habíamos adelantado: que el registro gráfico es débilmente utilizado por los alumnos, lo que parece ser una consecuencia de la enseñanza recibida pues, es sabido que la enseñanza tradicional favorece lo algebraico en desmedro de lo gráfico. Además existen estudios recientes como los de Bosch y Espinoza (cf. [3] y [7]) que muestran la influencia que tiene el quehacer del profesor sobre el quehacer del alumno. Entonces, se explica la poca familiaridad que tienen los alumnos para trabajar en el registro gráfico, de donde el hecho que los estudiantes no consideren las informaciones gráficas como datos a verificar; sino como evidencias visuales. Lo que se revela en expresiones tales como "mientras más paralela al eje de las x...", "rectas que van del cuarto al segundo cuadrante", "mas lejos o más cerca del eje x.."

Todas estas actividades se apoyan en representaciones gráficas en las que hay êndices gráficos que tienen significaciones las que tienen que identificar para relacionarlas con el registro algebraico y verificarlos. Tarea que escapa a los estudiantes, pues no es espontánea y es por eso que necesita ser familiarizado con ella.

A nuestro juicio, este comportamiento de los estudiantes es una consecuencia de los tratamientos dados a las materias, ya que un conocimiento no se apoya con otro, pues se trata independientemente, así las relaciones y síntesis quedan implícitas y a cargo de los alumnos. Por otra parte, al no distinguir los signos de expresión de cada registro que se pretende coordinar surgen confusiones. Por ejemplo, cuando se habla de rectas positivas se las está identificando con su pendiente o cuando se dice el punto $x = 3$, en realidad se está haciendo referencia a la abscisa del punto.

Estos abusos de lenguaje, seguramente para el profesor no tienen importancia, pero para los estudiantes son un foco de ambiguedades que dificultan el aprendizaje. Para que haya comprensión es necesario que las representaciones que los estudiantes se hacen de los objetos matemáticos en los distintos registros se conecten y se interrelacionen de modo de enriquecer la noción estudiada tomando en cuenta los elementos significativos de los distintos registros de expresión y de representación. Los estudiantes al no articular, en este caso, los registros gráficos y algebraicos, pierden solidez en sus afirmaciones ya que sus consideraciones son parciales e incompletas respecto a la noción matemática en cuestión.

VII. Conclusiones

La encuesta sobre "Ecuaciones y Gráficos: el rol de los coeficientes", pone en juego los registros de expresión algebraico, gráfico y lenguaje natural conjuntamente. Del estudio de las respuestas se desprende —la necesidad de familiarizar al alumno con problemas cuyo objetivo sea la articulación de estos registros, de modo que el estudiante pueda hacer jugar los distintos elementos significativos pertenecientes a cada registro de expresión y ponerlos en correspondencia—. Insistimos que esta tarea no es espontánea, pero es necesaria para la comprensión de las nociones en juego. La coordinación de registros distintos refuerza los aprendizajes y es una condición necesaria en el proceso de comprensión de las nociones matemáticas en juego.

En consecuencia, sugerimos a los profesores de Matemáticas, cualquiera sea el nivel, tengan en cuenta que la matemática en su práctica se apoya en expresiones diferentes, recurre a esquemas, gráficos, escrituras algebraicas, nociones geométricas, símbolos funcionales... según sea su necesidad.

Sin embargo, la enseñanza de la Matemática en general, privilegia las escrituras algebraicas y no considera lo suficiente otras formas de expresión; lo que por una parte no va en la misma dinámica de la Matemática y por otra parte, este hecho no favorece los aprendizajes ya que al no sensibilizar a los estudiantes en confrontar diferentes formas de expresión, no se favorece la comprensión. Animamos a los profesores a establecer escenarios que favorezcan la presencia de diversos registros de expresión.

Los alumnos deben interpretar la información dada por el gráfico y conectarla a sus conocimientos previos de modo que puedan expresarla en términos algebraicos o en lenguaje natural para justificar las preguntas que se le formulan. Para lo cual necesitan, comprender lo que representan los signos o símbolos matemáticos y su relación con el objeto matemático representado. Pero, como ya expresamos, esta tarea equivocadamente se supone adquirida, los profesores no se detienen en ella y se sorprenden grandemente ante las fallas de los alumnos. Pensamos que existe una necesidad de elaborar situaciones con el mismo objetivo a los que planteamos en nuestra encuesta.

Nos parece que enfrentar a los estudiantes con este tipo de situaciones sencillas les permitirá llegar fácilmente a coordinar los registros (gráficos y algebraicos) en juego. Hoy en día se dispone de computadores, calculadoras gráficas, además del papel y lápiz para el diseño de actividades de este tipo. Consideramos que este logro por parte de los estudiantes les hará adquirir un saber que no tienen y que se les exige conocer, ya que se trata de un conocimiento básico y necesario para enfrentar conocimientos nuevos que lo requieren como apoyo. Dominar esta tarea, dar solidez a sus conocimientos, podrá, por ejemplo con solo leer el gráfico escribir la expresión algebraica de una parábola haciendo pocos cálculos y de la ecuación de una parábola leyendo los coeficientes u otros signos podrán darles sus respectivos significados gráficos.

REFERENCIAS

[1] Artigues M, (1988), "Ing nierie Didactique". Recherches en Didactique de Math matiques, Vol. N¼3 p. 281-308. París.

[2] Artigues M, et Rogalsky, M. (1990). Enseigner autrement les équations diff rentielles en DEUG. En enseigner autrement les math matiques en DEUG SSM premi re ann e, 113-128, IREM de Lyon.

[3] Bosch M, (1994). "La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad." Tesis de doctorado. Universitat autónoma de Barcelona.

[4] Dreyfus T. et Einsenberg E.P (1984), Intuitions of Functions. The Journal of Experimental Education 1984. 52(2). 75-85.

[5] Duval R. (1988). "Graphiques et équations: líarticulation de deux registres". Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, Vol.I (p.235-253), I. IREM de Strasbourg.

[6] Duval R. (1995). "Quel cognitif retenir en didactique des math matiques? " Actes de la VIII me Ecole díEté, Saint-Sauves DíAuvergne. Ed. IREM de Clermont-Ferrand.

[7] Espinoza L. (1998). "Organizaciones matemáticas y didácticas entorno al objeto "Límite de función". Tesis de doctorado. Universittat Autónoma de Barcelona.

[8] Guzmán I. (1989). "Registres mis en jeu par la notion de fonction". Annales de Didactique et de Science Cognitives. Vol.II (p.230-260), I. IREM de Strasbourg .

[9] Guzmán, I. (1990). "Le role des représentations dans líappropiation de la notion de fonction". Tesis de doctorado. U.L. Pasteur de Strasbourg.

[10] Guzmán I. Consigliere L. (1991). "Análisis implicativo de respuestas de estudiantes con respecto a rectas y parábolas". Actas VIII CIAEM, Miami .

[11] Guzmán I. Consigliere L. (1992) "Algunas dificultades de aprendizaje detectadas en alumnos de Calculo Diferencial". Revista de educación Matemática Vol.4 nº 1. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

[12] Guzmán, I. Consigliere, L. "Respuestas de estudiantes a preguntas que involucran propiedades fundamentales de las funciones". Actas VII Jornadas de educación Matemática U. Austral de Valdivia.

[13] Guzmán, I. Consigliere, L. (1993): "Análisis de una muestra de respuestas en torno a funciones reales elementales". Revista "Epsilon" de la S.A.E.M. "Thales" . N¼25. pág 15-30. España.

[14] Hitt F. (1989). Construction of Functions, contradiction and Proof. Actes de la 13e Conférence Internationale de P.M.E. Vol II. (P, 107-114). París 1989.

[15] Markovits Z. Eylon B et Bruckhimer M. (1986). Fonctions today and yesterday. For the learning of Mathematics 6(2), 18-24.

[16] Rogalski, M. y otros: (1991/1992): Fiches Pédagogiques DEUG A premi re année. U. des Sciences et Techniques de Lille Flandres Artois. U.F.R. de Mathématiques Pures et Appliquées.

ANEXO

FICHA1: Ecuaciones y rectas

> Recuerda que:
>
> Una ecuación del tipo $y = ax+b$, con a y b números reales y a distinto de cero, corresponde a una recta, es decir, la recta es el conjunto de puntos del plano de coordenadas reales (x, y) que satisfacen la ecuación anterior. Simbólicamente se escribe:
>
> $D = \{(x, y) \in R \times R \,/\, y = ax + b,\ \ a, b \in R,\ \ a \neq= 0\}$

Actividad Preliminar

Las siguientes ecuaciones:
d_1: $y = 2x + 1/2$; d_2 : $y = 1/2x + 1/2$; d_3 : $y = -2x + 1/2$ son las ecuaciones de tres rectas. Dibújalas en un mismo gráfico y comenta la posición relativa de ellas.

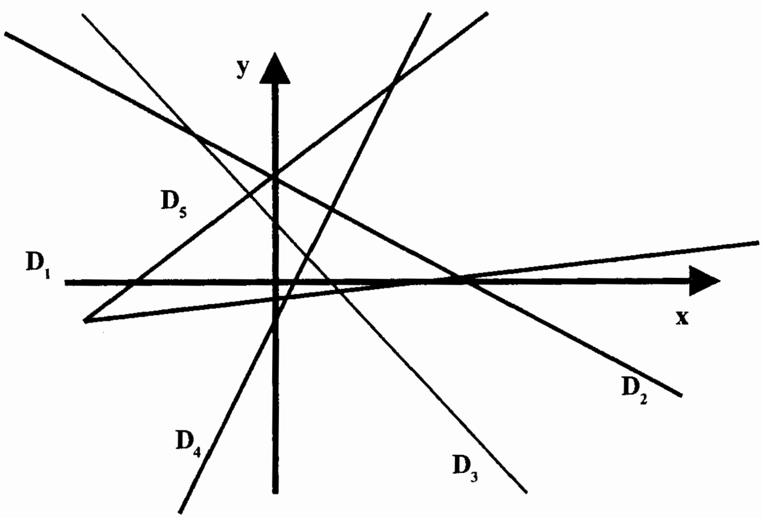
A continuación, considera las ecuaciones de otras tres rectas.
d_4: $y = -2x + 1/2$; d_5 : $y = -2x - 2$; d_6 : $y = -2x$. Dibújalas en un mismo gráfico y comenta la posición relativa de ellas.

A partir de los dos gráficos ya obtenidos. ¿Qué puedes decir del rol de los coeficientes en los dos casos?

PROBLEMA A: Las rectas D_1, D_2, D_3, D_4 y D_5 en la figura tienen por Ecuación:

$$\mathbf{y = a_1x + b_1,\ \ y = a_2x + b_2,\ y = a_3x + b_3,}$$
$$\mathbf{y = a_4x + b_4,\ \ y = a_5x + b_5}$$

donde los a_i, b_i $\sum$ R, para i= 1, 2, 3, 4, 5

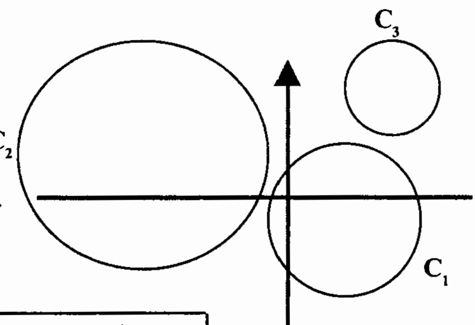


Ordena en forma creciente los nº $\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4}$ y $\mathbf{a_5}$
Ordena en forma creciente los nº $\mathbf{b_1, b_2, b_3, b_4}$ y $\mathbf{b_5}$

FICHA 2. Ecuaciones y circunferencias

Actividad Preliminar

- Dibuja la circunferencia de ecuación: $\mathbf{(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4}$. Precisa las coordenadas del centro y la longitud del radio.
- Dada una circunferencia de centro en C(2,3) y radio 4, encuentra su ecuación.



PROBLEMA B Cada una de las circunferencias tiene por ecuación $(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 - r_i^2 = 0$, donde los a_i, b_i, r_i están en **R**, para i= 1, 2, 3.

Escribe los $\mathbf{a_i}$, los $\mathbf{b_i}$ y los $\mathbf{r_i}$ respectivamente en orden creciente.

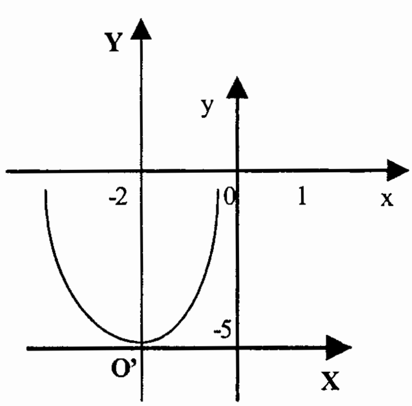
FECHA 3. Ecuaciones y Parábolas

Actividades

La parábola es el conjunto de puntos del plano de coordenadas (x, y) con respecto a un sistema de coordenadas (O, x, y) que satisfacen la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ (1), donde los números a, b, c, x e y son reales y el coeficiente a distinto de cero.
Simbólicamente se escribe:

$$D = \{(x, y) \in R \times R \,/\, y = ax^2 + bx + c\,;\ a, b, c \in R,\ a \neq 0\}$$

Conociendo la representación de la parábola de ecuación $y = ax^2$ (2) para representar la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ (1), se la transforma en una ecuación del tipo (2) mediante un cambio de sistema de referencia.
Por ejemplo para representar la parábola de ecuación $y = x^2 + 4x - 1$, en un sistema de referencia (O; x, y) transformamos su ecuación en otra del tipo $\mathbf{Y = X^2}$, con otro sistema de referencia
(O'; X, Y).
Completando cuadrados: $y = x^2 + 4x - 1$ (sumando 1); $y + 1 = x^2 + 4x$ (sumando 4);
$y + 5 = x^2 + 4x + 4$
luego: $y+5 = (x+2)^2$. Hagamos $\mathbf{X = x+2}$ e $\mathbf{Y = y+5}$

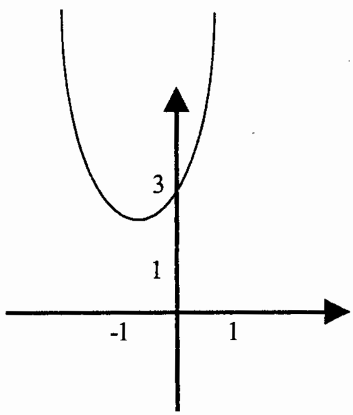


Así la ecuación dada es equivalente a una de la forma **$Y = X^2$** respecto al nuevo sistema **(O'; X, Y).**

Observaciones:

1) Para el sistema de referencia **(O'; X, Y)** el vértice de la parábola es (0, 0) y respecto a (O; x, y) es (-2, 5).

2) Se puede verificar fácilmente que el vértice de la parábola P de ecuación $y = a x^2 + b x + c$, con respecto al sistema de referencia (O; x, y) es el punto de coordenadas $(-b/2a,\ c-(b^2/2a)$



Nota

Las observaciones 1 y 2 anteriores son muy útiles
Para tener una representación aproximada y rápida de una parábola
Dada su ecuación. Por ejemplo:

Sea Q una parábola de Ecuación $y= 2x^2+2x+3$
Las coordenadas del vértice son (-1/2, 5/2)
(verificar COMPLETANDO EL CUADRADO).
Tomando el punto de la parábola
De coordenadas (0,3), podemos
calcular rápidamente su punto
simétrico que es (-1,3) (con respecto,
al eje de la parábola Q).
Ahora dibujamos y obtenemos la representación aproximada de la parábola Q.

Actividad 1

En un mismo gráfico representa las parábolas $\mathbf{p_i}$ dadas por sus ecuaciones con respecto a un sistema de referencia (O, x, y):

$\mathbf{p_1}$: $y = 2x^2$; $\mathbf{p_2}$: $y=-4x^2$ $\mathbf{p_3}$: $y = -x^2+2x+1$ $\mathbf{p_4}$: $y=x^2-4x+3$.

dar alguna interpretación gráfica al coeficiente **a**, (de la x^2). Explica y precisa además las coordenadas del vértice de cada parábola p_i.

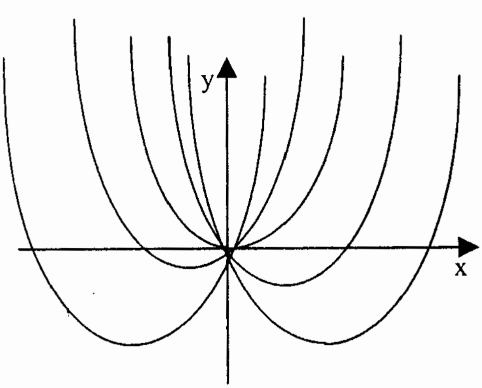
En otro gráfico, representa las parábolas p_i dadas por sus ecuaciones (con respecto a un sistema de referencia (O, x, y):

$\mathbf{p_5}$: $y = 2x^2 + 6x$ $\mathbf{p_6}$: $y=2x^2+10x$ $\mathbf{p_7}$: $y = 2x^2-6x$ $\mathbf{p_8}$: $y = x^2-10x$

Representa las parábolas de ecuación:

$\mathbf{p_9}$: $y=-x^2+2x-10$; $\mathbf{p_{10}}$: $y=-x^2+2x-5$; $\mathbf{p_{11}}$: $y=-x^2+2x+10$; $\mathbf{p_{12}}$: $y=-x^2+2x+5$

Dar una interpretación en términos gráficos al coeficiente **c**



Actividad 2

Asocia cada ecuación dada con la parábola dibujada que le corresponde.

$\mathbf{P_1}$: $y = x^2$; $\mathbf{P_2}$: $y = x^2+x$; $\mathbf{P_3}$: $y = x^2-x$;
$\mathbf{P_4}$: $y = x^2-3x$; $\mathbf{P_5}$: $y = x^2+3x$

¿Qué significado gráfico tiene el hecho que los $c_i = 0$ para todo y?

Marca sobre cada parábola los puntos cuyas abscisas son 1 y -1