

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



**ESQUEMA DE TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN NO
ORTOGONAL MEDIANTE TRANSFORMADAS
TAYLOR-FOURIER Y LEGENDRE-FOURIER**

POR
ING. VIDAL ALFREDO TREJO ROCHA

COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA
CON ORIENTACIÓN EN TELECOMUNICACIONES

NOVIEMBRE 2016

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



TESIS

**ESQUEMA DE TRANSMISIÓN DE INFORMACIÓN NO
ORTOGONAL MEDIANTE TRANSFORMADAS
TAYLOR-FOURIER Y LEGENDRE-FOURIER**

**POR
ING. VIDAL ALFREDO TREJO ROCHA**

**COMO REQUISITO PARCIAL PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INGENIERÍA ELÉCTRICA
CON ORIENTACIÓN EN TELECOMUNICACIONES**

NOVIEMBRE 2016

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Subdirección de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la Tesis «Esquema de transmisión de información no ortogonal mediante transformadas Taylor-Fourier y Legendre-Fourier.», realizada por el alumno Ing. Vidal Alfredo Trejo Rocha, con número de matrícula 1417045, sea aceptada para su defensa como requisito parcial para obtener el grado de Maestría en Ciencias de la Ingeniería Eléctrica con orientación en telecomunicaciones.

El Comité de Tesis



Dr. José Antonio de la O Serna

Asesor



Dr. José Ramón Rodríguez Cruz

Revisor

Dr. César Vargas Rosales

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Simón Martínez Martínez

Subdirección de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, Nuevo León, noviembre 2016

*Dejalo todo y busca
el tesoro oculto
entre las dunas.*

*La propia búsqueda
es ya un encuentro.
El tesoro era viento.*

Lêdo Ivo

Agradecimientos

Quiero dar mis sinceros agradecimientos a las personas y actores que contribuyeron al desarrollo de la presente tesis.

A mi director de tesis, el **Dr. José Antonio de la O Serna**, por compartirme su entusiasmo y firme espíritu crítico, por brindarme apoyo y asesoría, sin los cuales este proyecto no hubiera sido posible. Al **Dr. José Ramón Rodríguez Cruz** y al **Dr. César Vargas Rosales** por sus valiosos comentarios y críticas al presente trabajo.

Al profesor **M.C. Rodolfo Rubén Treviño Martínez**, por ser una constante influencia positiva en mi formación académica y profesional.

A mi familia: mis padres **Laura Rocha Calderón** y **Vidal de Jesús Trejo Mendonza** (Q.E.P.D.) y mi hermana **Laura Verónica Trejo Rocha**, por toda su paciencia e incondicional apoyo.

A todos los maestros y alumnos del **Posgrado en Ingeniería Eléctrica** de la **FIME**, el cual es un espacio vivo de discusión e intercambio de ideas, y del que me enorgullezco de haber pertenecido.

Finalmente, al **Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT)** por otorgarme la beca para realización de mis estudios de posgrado.

Vidal Alfredo Trejo Rocha

Noviembre 2016

RESUMEN

Publicación No. _____

Vidal Alfredo Trejo Rocha, M.C. en Ingeniería Eléctrica

Universidad Autónoma de Nuevo León, 2016

Profesor asesor: Dr. José Antonio de la O Serna

Las señales ortogonales son ampliamente utilizadas en los modems (Modulator-Demodulador) de los sistemas de comunicaciones digitales para la generación y descomposición formas de onda portadoras de información. Particularmente, el esquema OFDM (Ortogonal Frequency Division Multiplexing) se basa en la modulación en paralelo de un conjunto de subportadoras sinusoidales ortogonales las cuales subdividen el canal de comunicaciones en un conjunto de subcanales independientes de banda angosta. Esta división permite la implementación eficiente del modem OFDM con procesamiento puramente digital mediante algoritmos DFT (Digital Fourier Transform), reduciendo así la complejidad inherente al uso de bancos de osciladores analógicos tanto en el transmisor y como en el receptor.

La idea objetivo del presente trabajo es modelado, simulación computacional, evaluación de un esquema de modulación con funciones base no-ortogonales. Tales funciones corresponden a los elementos de los modelos de señal de las transformadas TF (Taylor-Fourier) y LF (Legendre-Fourier), utilizados para análisis de señales de SEP (Sistemas Eléctricos de Potencia). Este par de modelos puede potencialmente expandir la base de señalización OFDM y permitir un incremento en la cantidad de información binaria transmitida dado que los modelos LF y TF pueden ser vistos como expansiones de la base DFT por medio un conjunto de funciones polinómicas (Términos Taylor o Polinomios de Legendre) a costa de una mayor sensibilidad al ruido.

En la presente tesis se discuten primero los fundamentos de las expansiones en bases no orto-

gonales mediante el concepto de pares biortogonales. Esto incluyendo su implementación discreta por medio de la matriz pseudoinversa y resaltado el papel de la matriz gramiana en el problema de dependencia lineal y sensibilidad al ruido de la base no ortogonal. Luego son expuestos el par de modelos de señal TF & LF junto con sus características temporales y frecuenciales, así como la dependencia de su matriz gramiana con los parametros de diseño del par de modelos. Por último son evaluados los criterios de probabilidad de error en condiciones de ruido blanco, ancho espectral y magnitud de las variaciones de amplitud.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Descripción del problema	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Metodología	3
1.4. Descripción de la tesis	4
2. Expansiones lineales de vectores	5
2.1. Expansión de vectores en bases ortogonales y no ortogonales	6
2.1.1. Relación entre coeficientes de síntesis	8
2.1.2. Matriz de Gram	9
2.1.3. Proyección ortogonal	10
2.2. Aproximación de la expansión de señales en TC y TD	11
2.2.1. Caso TD y Método de pseudoinversa	12
2.3. Expansión del ruido mediante par biortogonal	13
2.4. Conclusiones	14
3. Transformadas en tiempo discreto Taylor Fourier y Legendre Fourier	15
3.1. Modelo de señal en Tiempo Continuo	16
3.1.1. Base vectorial LF y TF	17
3.1.2. Construcción por combinación lineal	21
3.2. Discretización e implementación por pseudoinversa	22
3.3. Análisis de la matriz de gramiana	23

3.3.1. Base LF	24
3.3.2. Base TF	24
3.4. Efectos de los parámetros de diseño P y K	25
3.4.1. Condición de independencia lineal	26
3.4.2. Sensibilidad al ruido blanco	27
3.5. Conclusiones	28
4. Esquema OFDM extendido mediante transformadas LF y TF	29
4.1. introducción	29
4.1.1. Fundamentos de OFDM	30
4.2. Esquema propuesto	31
4.3. Pruebas en canal AWGN	34
4.4. Evaluación de la Relación PAPR	37
4.5. PSD de los esquemas LF y TF	40
4.6. Conclusiones	42
5. Conclusiones y trabajo futuro	43
5.1. Conclusiones	43
5.2. Recomendaciones	44
5.3. Trabajo futuro	45
A. Términos de Taylor y Polinomios de Legendre	49
A.1. Términos de Taylor	49
A.2. Polinomios de Legendre	50

Índice de figuras

2.1. Representación de un vector x en un espacio X mediante pares biortogonales S_ϕ y \tilde{S}_ϕ	7
2.2. Ilustración del método de pseudoinversa	13
3.1. Diagrama Simplificado del espectro de frecuencias del modelo pasabanda	16
3.2. Ilustración conceptual de las bases LF y TF . Funciones armónicas y términos polinómicos en colores negro y gris respectivamente	17
3.3. Parte real de las señales de la base TF con $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$	18
3.4. Parte real de las señales de la base LF con $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$	19
3.5. PSD de las señales de la base TF con $K = 4$, $M = 4$	20
3.6. PSD de las señales de la base LF con $K = 4$, $M = 4$	21
3.7. Magnitud normalizada de los elementos de \mathbf{G} para base LF . a) $P = 1$. b) $P = 2$. c) $P = 4$. d) $P = 8$	25
3.8. Magnitud normalizada de los elementos de \mathbf{G} para base TF . a) $P = 1$. b) $P = 2$. c) $P = 4$. d) $P = 8$	25
3.9. Número de condición de las matriz gramiana. $M = 4$ y como función de K y P	26
3.10. Varianza Máxima de los coeficientes de expansión como función de P y K . Variables de $M = 4$ fija.	28
4.1. Diagrama a bloques del transmisor y receptor OFDM pasabajas.	31
4.2. Diagrama a bloques del transmisor y receptor OFDM mediante DFT.	31
4.3. Diagrama a bloques modelo de canal AWGN.	32
4.4. Tasa de error binario.	35

4.5. Diagramas de constelación QAM. Base: LF , subportadora: $m = 2$, polinomio $k = 2$. Canal AWGN con $\frac{E_b}{N_0} = 7dB$	36
4.6. Diagramas de constelación QAM. Base: TF , subportadora: $m = 2$, polinomio $k = 2$. Canal AWGN con $\frac{E_b}{N_0} = 7dB$	36
4.7. Ejemplar del símbolo .Variables de diseño $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$	38
4.8. Símbolo de máxima PAPR. variables de diseño $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$	39
4.9. PSD nomalizada analitica y calculada con 700 realizaciones.Variables de diseño $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$	41
A.1. 6 Términos de Taylor normalizados en energía	50
A.2. 6 Polinomios de Legendre normalizados en energía	51

Nomenclatura

$x(t)$	Señal de tiempo continuo.
$x[n]$	Señal de tiempo discreto.
$\delta(t)$	Función delta de Dirac.
$\delta_{i,j}$	Función delta de Kronecker.
$l_k(t)$	k -ésimo polinomio de Legendre
\mathcal{N}	Proceso de ruido blanco gaussiano

Espacios y regiones

\mathbb{Z}	Espacio de números enteros.
\mathbb{R}	Espacio de números reales.
\mathbb{C}	Espacio de números complejos.
$\mathcal{M}^{M \times N}$	Espacio de las matrices con M renglones y N columnas.
$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$	Espacio de Hilbert de señales cuadráticamente integrables.
$\ell^2(\mathbb{Z})$	Espacio de Hilbert de secuencias cuadráticamente sumables.

Expansiones biortogonales

$\phi_j, \tilde{\phi}_j$	j -ésimo elemento de la base de síntesis y análisis.
$\Phi, \tilde{\Phi}$	Operador matricial de la base de síntesis y análisis.
$\alpha_j, \tilde{\alpha}_j$	j -ésimo coeficiente de la expansión de síntesis y análisis.
$\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}$	Vector de coeficientes de la expansión de síntesis y análisis.
$\mathbf{G}, \tilde{\mathbf{G}}$	Matriz gramiana del conjunto de análisis y síntesis.

Parámetros de transformada

K	Número de polinomios.
M	Número de portadoras.

P	Número de ciclos de primera portadora dentro el intervalo del polinómico.
Q	Factor entero entre frecuencia muestreo y primera portadora.
$\phi_{m,k}$	Elemento de la base en m -ésima portadora, k -ésimo polinomio.

Matrices

\mathbf{B}^T	Transpuesta de la matriz \mathbf{B} .
\mathbf{B}^H	Hermitiana de la matriz \mathbf{B} .
\mathbf{B}^{-1}	Inversa de la matriz \mathbf{B} .
\mathbf{B}^\dagger	Pseudoinversa de la matriz \mathbf{B} .
\mathbf{I}_N	Matriz identidad de $N \times N$ dimensiones.
$\Sigma(\mathbf{n})$	Matriz de covarianzas del vector aleatorio \mathbf{n} .

Sistema de comunicaciones

R_{sym}, R_b	Razón simbólica y binaria.
$\varepsilon_s, \varepsilon_b$	Energía simbólica y de bit.

Terminología

LS	Mínimos cuadrados.
TX	Transmisor.
RX	Receptor.
QAM	Quadrature Amplitude Modulation.
$ODFM$	Orthogonal Frequency Division Multiplexing.
FFT	Fast Fourier Transform.
DFT	Digital Fourier Transform.
$CTFT$	Countinous Time Fourier Transform.
$DTFT$	Discrete Time Fourier Transform.
LF	Legendre-Fourier.
TF	Taylor-Fourier.
TC	Tiempo Continuo
TD	Tiempo Discretro

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de los sistemas de comunicaciones digitales es transportar la mayor cantidad de información binaria de un punto a otro a través de un medio de transmisión físico, sea alámbrico o inalámbrico. Para alcanzar este objetivo, en el transmisor el modulador representa la información binaria con un conjunto finito de formas de onda, llamados símbolos, los cuales están sujetos a restricciones energéticas y en ancho de banda, además de presentar resistencia a los impedimentos del medio de transmisión.

Los símbolos en los esquemas de modulación lineal son representados mediante la combinación lineal de un conjunto de funciones ortogonales. Por ejemplo en los esquemas QAM (Quadrature Amplitude Modulation) y PSK (Phase Shift Keying) la información es codificada en cambios discretos de amplitud en par de portadoras ortogonales (en cuadratura) de igual frecuencia. OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) utiliza un conjunto de subportadoras ortogonales con una separación frecuencial mínima.

La propiedad de ortogonalidad permite la implementación del demodulador mediante bancos de filtros correladores cuyas respuestas impulsionales coinciden con las formas de onda del conjunto ortogonal. De manera particular, en OFDM este principio permite la realización de su Modem (Modulator Demodulator) con procesamiento puramente digital mediante pares de transformadas DFT (Digital Fourier Transform).

Cabe mencionar que el uso de ortogonalidad en el contexto de sistemas de comunicaciones no es exclusivo al proceso de modulación. La técnica de acceso múltiple TDMA (Time Division Multiple Access) separa la información de distintos usuarios asignándola en ventanas temporales disjuntas o "slots" donde una ortogonalidad es generada por la finitud y separación temporal de las ventanas. Similarmente, en CDMA (Code Division Multiple Access) la asignación de usuarios se realiza mediante el uso de códigos ortogonales.

1.1. Descripción del problema

El propósito del presente trabajo es analizar los efectos y compromisos de diseño ligados al uso de bases no-ortogonales en los esquemas de modulación multiportadora. Particularmente, son considerados los esquemas Taylor-Fourier (TF) y Legendre-Fourier (LF) cuya no-ortogonalidad es producida por la combinación de un grupo de subportadoras con un conjunto finito de funciones ventana. La importancia de este problema surge del interés de evaluar la posibilidad de un incremento en tasa de transmisión al relajar la condición de ortogonalidad a independencia lineal.

La no-optimalidad de la probabilidad de error del receptor en canales de ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN) es la principal razón por la cual la no-ortogonalidad no es tan ampliamente utilizada en modulación como la ortogonalidad [1]. Por lo que su desempeño de tasa de error binario (BER) en dichos canales es investigado. De manera similar, es considerado el principal detrimento de los sistemas multiportadora actuales: Los picos de amplitud producidos por la combinación lineal de señales, traducidos en una relación de potencia pico a promedio (PAPR) grande, que ocasiona una distorsión no-lineal de las señales posteriormente a su amplificación en la etapa de RF.

No es considerado el efecto de las señales moduladas LF y TF en la sincronización de portadora y de trama. Tampoco lo son los modelos de canal desvanecientes y selectivos en frecuencia propios de ambientes inalámbricos.

En contraste con los trabajos realizados en [1] y [2] en el presente trabajo la no-ortogonalidad es explorada con objetivo de una incremento en la tasa binaria y no la corrección de las distorsiones producidas por las respuesta no-ideal del canal de comunicaciones.

1.2. Objetivos

El objetivo principal perseguido en la presente tesis es desarrollar y evaluar con simulación computacional los esquemas de modulación no-ortogonal multiportadora TF & LF definiendo claramente sus variables de diseño, para posteriormente determinar la dependencia entre dichas variables con su desempeño. Los criterios de desempeño evaluados son la razón BER en condiciones de canal AWGN, relación PAPR y ancho de banda. De manera complementaria al desempeño BER, es buscada una relación general entre el efecto de la selección de la base con su sensibilidad a perturbaciones AWGN. Esto permitirá comprender el compromiso entre uso de la no-ortogonalidad y la probabilidad de error.

1.3. Metodología

- Modificar el modelo de señal pasabanda TF propuesto en [3] para ajustarse al modelo de generación en bandabase. Posteriormente, aplicar un muestreo adecuado a los elementos base y con ellos construir la matriz de antitransformada y transformada mediante el método de pseudoinversa.
- Derivar con ayuda del concepto de par biortogonal la dependencia entre la matriz de covarianzas de los coeficientes de expansión de un proceso de ruido blanco y la matriz gramiana de la base de expansión.
- Utilizar los operadores de antitransformada y transformada para simular los bloques de modulación y demodulación respectivamente. De esta manera evaluar los criterios de desempeño de BER en un canal AWGN ideal, PSD (Power Spectral Density) y relación PAPR.

1.4. Descripción de la tesis

La tesis se organiza de la siguiente manera:

El **Capítulo 2** presenta los fundamentos de expansiones de en bases vectoriales ortogonales y no ortogonales resaltando el papel del conjunto biortogonal y la matrix gramiana. Son discutidos los efectos de la aproximación entre los casos en tiempo continuo y discreto e implementación del caso discreto mediante el método de pseudoinversa. Se concluye con la derivación de la dependencia entre las matrices Gramiana y de covarianzas.

El **Capítulo 3** introduce los modelos LF y TF en tiempo continuo y discreto con sus variables de diseño. Son mostrados las características temporales y espectrales de los elementos base, la dependencia entre las variables de diseño con la condición independencia lineal y la sensibilidad al ruido blanco.

El **Capítulo 4** expone los fundamentos de la modulación OFDM. Luego, son utilizados los modelos LF y TF como esquema de modulación para la generación de símbolos en banda base. Su principal objetivo es presentar los resultados del desempeño BER, PSD y PAPR de los esquemas propuestos comparandolos entre sí y con OFDM.

Finalmente, el **Capítulo 5** expone las conclusiones finales de la investigación y se presentan sugerencias para trabajos futuros.

Capítulo 2

Expansiones lineales de vectores

La expansión lineal de señales es un procedimiento importante en muchas aplicaciones de procesamiento digital de señales y consiste en la idea de descomponer una señal en la combinación lineal $x(t) = \sum_i \alpha_i \phi_i(t)$ de un conjunto base $\phi_i(t)$ el cual constituye un *modelo de señal* apropiado para reflejar cualidades útiles de la señal analizada. Las bases pueden ser ortogonales o no ortogonales. Normalmente la ortogonalidad es preferida sobre la no ortogonalidad pues permite calcular los coeficientes de expansión sencillamente con el producto punto con cada elemento ϕ_j y por producir componentes estadísticamente descorrelacionados. Sin embargo el conjunto no ortogonal es preferido cuando presenta alguna propiedad en particular que puede ser alterada por la ortogonalización [4], como una forma de onda temporal y/o un contenido espectral deseable.

Para el caso de expansiones en conjuntos no ortogonales, el caso de la presente tesis, pueden utilizarse 2 metodologías: 1) ortogonalización del conjunto mediante el procedimiento *Gram Schmidt* [5]. 2) Cálculo de un conjunto biortogonal. Dado que el cálculo analítico del conjunto biortogonal [6] puede llegar a ser matemáticamente complicado de resolver y numéricamente difícil de implementar en el presente trabajo se optó por el método numérico de pseudoinversa [7] [8].

El capítulo está organizado como sigue: En la sección 2.1 se brinda una breve introducción a la expansión de señales en bases vectoriales no ortogonales utilizando el concepto del par biortogo-

nal, resaltado el papel de la matriz gramiana en el cumplimiento de la condición de independencia lineal de la base. En la sección 2.2 se aborda la implementación de la expansión lineal mediante el método de pseudoinversa y las consecuencias del error de aproximación entre los casos de tiempo continuo (TC) y discreto (TD). Y por último en la sección 2.3 se deriva una relación entre la selección de la base y su sensibilidad ante los efectos del ruido blanco aditivo gaussiano (AWGN) por medio de la matriz gramiana.

2.1. Expansión de vectores en bases ortogonales y no ortogonales

El concepto de biortogonalidad es una generalización de la ortogonalidad en donde a un grupo de vectores seleccionado le corresponde un segundo conjunto de vectores ortogonales. Dado un conjunto finito linealmente independiente de vectores $S_\phi = \{\phi_j\}_{j=1}^{N_{dim}}$, existe un conjunto $\tilde{S}_\phi = \{\tilde{\phi}_j\}_{j=1}^{N_{dim}}$ cuyos elementos cumplen con la condición

$$\langle \phi_i, \tilde{\phi}_j \rangle = \delta_{i,j} \quad 1 \leq i, j \leq N_{dim} \quad (2.1)$$

siendo $\langle \bullet, \bullet \rangle$ la operación de producto punto y N_{dim} el número de elementos y se dice que \tilde{S}_ϕ es el *conjunto biortonormal* a S_ϕ y que ambos conjuntos (S_ϕ, \tilde{S}_ϕ) conforman un *par de bases biortonormales*. Mientras que los conjuntos *ortonormales* son aquellos que son su propio conjunto biortogonal $S_\phi = \tilde{S}_\phi$ por lo que cumplen con la condición

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{i,j} \quad 1 \leq i, j \leq N_{dim} \quad (2.2)$$

En el caso biortogonal, los conjuntos (S_ϕ, \tilde{S}_ϕ) son ambos son una base para un mismo espacio de Hilbert finito dimensional X [4] [9], por lo que cualquier vector $x \in X$ puede ser representado

por las *ecuaciones de síntesis* como:

$$x = \sum_{j=1}^{N_{dim}} \alpha_j \phi_j \quad (2.3a)$$

$$x = \sum_{j=1}^{N_{dim}} \tilde{\alpha}_j \tilde{\phi}_j \quad (2.3b)$$

mediante los coeficientes de expansión $\alpha_j, \tilde{\alpha}_j \in \mathbb{C}$. Por otro lado, en el caso ortonormal se tiene que ambos coeficientes conciden $\alpha_j = \tilde{\alpha}_j$. Ambos casos son ilustrados en la fig. 2.1. Bajo una interpretación geométrica los coeficientes pueden ser considerados como un conjunto de coordenadas con respecto a un sistema de ejes definidos por los elementos de la base seleccionada, por ejemplo α_j es la coordenada en el eje ϕ_j del conjunto S_ϕ . Esta interpretación es usada en el diagrama de espacio de señales de los sistemas de comunicaciones digitales [10] y permite la representar por medio de vectores las formas de onda generadas por los esquemas de modulación lineales.

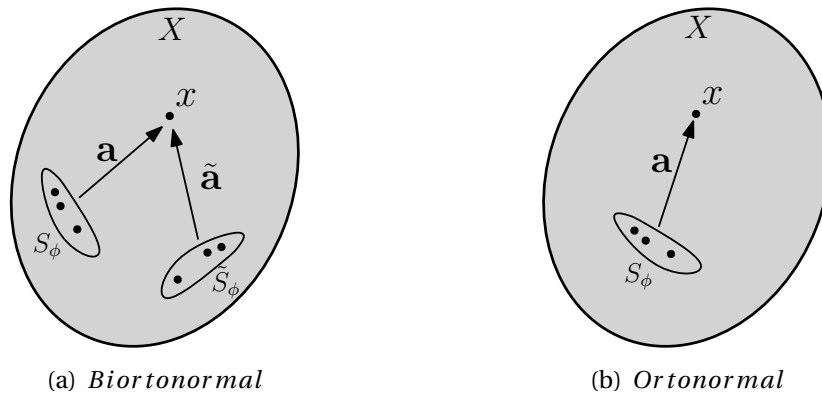


Figura 2.1: Representación de un vector x en un espacio X mediante pares biortogonales S_ϕ y \tilde{S}_ϕ

Gracias a la definición de biortonormalidad y la linealidad del producto punto los coeficientes de la expansiones en la ec. 2.3 pueden ser obtenidos mediante la operación de producto punto en

la ecuaciones de análisis como:

$$\langle x, \tilde{\phi}_j \rangle = \left\langle \sum_i^{N_{dim}} \alpha_i \phi_i, \tilde{\phi}_j \right\rangle = \sum_i^{N_{dim}} \alpha_i \langle \phi_i, \tilde{\phi}_j \rangle = \alpha_j \quad (2.4a)$$

$$\langle x, \phi_j \rangle = \left\langle \sum_i^{N_{dim}} \tilde{\alpha}_i \tilde{\phi}_i, \phi_j \right\rangle = \sum_i^{N_{dim}} \tilde{\alpha}_i \langle \tilde{\phi}_i, \phi_j \rangle = \tilde{\alpha}_j \quad (2.4b)$$

mostrando una dualidad en la que los coeficientes de la expansión de una de las bases resultan del producto punto con elementos de la otra base. Por otro lado en el caso ortogonal cada coeficiente puede ser calculado directamente como $\alpha_j = \langle x, \phi_j \rangle$.

2.1.1. Relación entre coeficientes de síntesis

El par de ecuaciones anteriores pueden ser también expresadas como:

$$\alpha_j = \sum_i^{N_{dim}} \tilde{\alpha}_i \langle \tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_j \rangle \quad (2.5a)$$

$$\tilde{\alpha}_j = \sum_i^{N_{dim}} \alpha_i \langle \phi_i, \phi_j \rangle \quad (2.5b)$$

mostrando que el par de coeficientes $\alpha_j, \tilde{\alpha}_j$ poseen una relación dada por combinaciones lineales ponderadas con los términos $\langle \phi_i, \phi_j \rangle$ y $\langle \tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_j \rangle$ es decir el producto punto entre los elementos de ambas bases. Estos términos en el caso de una base ortogonal son funciones delta, sin embargo lo mismo no es válido para el caso no ortogonal. Utilizando notación matricial ec. (2.5b) puede ser expresada como:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{N_{dim}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_1 \rangle & \langle \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_1 \rangle & \cdots & \langle \tilde{\phi}_{N_{dim}}, \tilde{\phi}_1 \rangle \\ \langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 \rangle & \langle \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_2 \rangle & \cdots & \langle \tilde{\phi}_{N_{dim}}, \tilde{\phi}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_{N_{dim}} \rangle & \langle \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_{N_{dim}} \rangle & \cdots & \langle \tilde{\phi}_{N_{dim}}, \tilde{\phi}_{N_{dim}} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_1 \\ \tilde{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_{N_{dim}} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

o ambas ecuaciones de manera compacta

$$\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{a}} \qquad \tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{G}\mathbf{a} \qquad (2.7)$$

donde $\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}} \in \mathcal{M}^{N_{dim} \times 1}$ son vectores columna cuyos elementos son los de coeficientes de expansión y $\mathbf{G}, \tilde{\mathbf{G}} \in \mathcal{M}^{N_{dim} \times N_{dim}}$ las matrices gramianas de las bases de síntesis. Así el par gramianas pueden ser vistas como operadores de cambio de coordenadas entre los sistemas de síntesis. Asumiendo que \mathbf{G} es no singular, este último par de ecuaciones implica que:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G}^{-1}. \qquad (2.8)$$

Posteriormente se encontro que la anterior relación fue previamente reportada en [11].

2.1.2. Matriz de Gram

La gramiana es una figura recurrente en el proceso de la solución del problema de mínimos cuadrados (LS) por medio de las ecuaciones normales. Para el conjunto de vectores $\{\phi_j\}_{j=1}^{N_{dim}}$ se define como:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \cdots & \langle \phi_{N_{dim}}, \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_{N_{dim}}, \phi_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \phi_1, \phi_{N_{dim}} \rangle & \langle \phi_2, \phi_{N_{dim}} \rangle & \cdots & \langle \phi_{N_{dim}}, \phi_{N_{dim}} \rangle \end{bmatrix}, \qquad (2.9a)$$

$$g_{i,j} = \langle \phi_j, \phi_i \rangle, \qquad (2.9b)$$

y tiene las siguientes propiedades:

1. \mathbf{G} es Hermitiana simétrica [9].
2. El conjunto S_ϕ es linealmente independiente si y solo si \mathbf{G} es no singular[12].

La propiedad (2) y su contrapositiva son de gran importancia práctica pues relaciona la condición de independencia lineal del conjunto con la invertibilidad de su gramiana, la cual es una condi-

ción necesaria para su función como base de un espacio.

La gramiana también brinda una manera de organizar la información del producto entre los elementos de la base: en su diagonal principal se encuentran autocorrelaciones y fuera de ella correlaciones cruzadas determinísticas. En el caso de vectores normalizados ($\|\phi_j\| = 1$), todos sus elementos se encuentran acotados $|g_{i,j}| \leq 1$, debido a la desigualdad Cauchy-Schwartz, con la igualdad en las posiciones de la diagonal $|g_{j,j}| = 1$ y la magnitud fuera de ella dependerá del nivel de correlación entre los vectores ϕ_j y ϕ_i . El anterior acotamiento en \mathbf{G} , sin embargo, no es válido para $\tilde{\mathbf{G}}$ dada su relación inversa con \mathbf{G} mostrada en la ec. (2.8). Por último para un conjunto ortonormal se tiene $\mathbf{G} = \mathbf{I}$.

2.1.3. Proyección ortogonal

En el caso de que el vector x no pertenezca al subespacio abarcado por las bases ¹ X , la ecuación de análisis realiza la siguiente descomposición:

$$x = \hat{x} + e, \quad (2.10)$$

donde la aproximación $\hat{x} \in X$ es la proyección ortogonal al plano X y el error $e \perp X$ la componente ortogonal al mismo. Por lo anterior el cuadrado de la norma de x cumple con el teorema pitagórico:

$$\|x\|^2 = \|\hat{x}\|^2 + \|e\|^2. \quad (2.11)$$

Dada la ortogonalidad del error de aproximación al plano del modelo se tiene también que el error es ortogonal a todos los elementos de las bases $e \perp S_\phi$ y $e \perp \tilde{S}_\phi$, y por tanto los productos punto:

$$\langle e, \phi_j \rangle = 0 \quad 1 \leq j \leq N_{dim}, \quad (2.12a)$$

$$\langle e, \tilde{\phi}_j \rangle = 0 \quad 1 \leq j \leq N_{dim}, \quad (2.12b)$$

¹Ya sean ortogonales o no ortogonales

Por otra parte la componente en el plano puede ser expandida en la base de síntesis como:

$$\hat{x} = \sum_i^{N_{dim}} \alpha_i \phi_i \quad (2.13)$$

y cumple con la propiedad de ser la solución al problema de mínimos cuadrados (LS) en el sentido que el vector $\hat{x} \in X$ minimiza la norma del error $\|x - \hat{x}\|^2$.

2.2. Aproximación de la expansión de señales en TC y TD

En la tabla 2.1 se muestra la operación de producto punto estándar, y las ecuaciones de análisis y síntesis por medio de una base vectorial para señales tiempo continuo y tiempo discreto. En TC es considerado un intervalo temporal finito $[a, b]$ y en TD una cantidad finita de muestras N_{sam} . Comúnmente el caso TD es usado como un aproximación al caso TC para la estimación de los coeficientes α_j bajo la condición de muestreo grande basada en la cercanía de la integral continua con una sencilla formula de integración numérica [13].

$$\int_a^b f(t) dt \approx T_s \sum_{n=1}^{N_{sam}} f(t_n) \quad (2.14)$$

con $T_s = \frac{(b-a)}{N_{sam}}$ y las muestras $f(t_n)$ correspondiendo a un muestreo uniforme cuando $T_s \rightarrow 0$. Reemplazando al integrando con $f(t) = \phi_j(t)\phi_i(t)$ la aproximación de los productos punto TC y TD es tomada en cuenta escalando las bases discretizadas

$$\phi_j[n] = \sqrt{T_s} \phi_j(t_n) \quad 1 \leq j \leq N_{dim} \quad 1 \leq n \leq N_{sam} \quad (2.15)$$

Dado que no es posible considerar un número de muestras infinito, la frecuencia de muestreo debe ser finita pero razonablemente grande. Esto produce una diferencia en la aproximación de la ec. (2.14) y en las funciones ortogonales en TC una posible y ligera pérdida de ortogonalidad posterior a su muestreo. Lo cual no es el caso para la base DFT la cual preserva su ortogonalidad tanto en TC como TD. Las reglas de integración trapezoidal y de Simpson [13] [14] ofrecen una alternativa para mejorar la aproximación entre los productos punto mediante la ponderación de

	Tiempo continuo $\mathcal{L}^2 [a, b]$	Tiempo discreto $\ell^2 [1, N_{sam}]$
Producto punto	$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y^*(t)dt$	$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{N_{sam}} x[n]y^*[n]$
Ecuación de análisis	$\alpha_j = \int_a^b x(t)\tilde{\phi}_j^*(t)dt$	$\alpha_j = \sum_{n=1}^{N_{sam}} x[n]\tilde{\phi}_j^*[n]$
Ecuación de síntesis	$x(t) = \sum_{j=1}^{N_{dim}} \alpha_j \phi_j(t)$	$x[n] = \sum_{j=1}^{N_{dim}} \alpha_j \phi_j[n]$

Tabla 2.1: Operaciones básicas para expansión de señales.

las muestras de $f(t_n)$ de la ecuación, sin embargo, con la intención de expresar la expansión en términos de productos punto estandar, tales opciones no son utilizadas en el presente trabajo.

2.2.1. Caso TD y Método de pseudoinversa

En el caso discreto, el cálculo del conjunto del conjunto biortogonal $\tilde{\phi}_j[n]$ y los coeficientes de expansión es posible mediante el método de pseudoinversa ilustrado en la fig. 2.2. Construyendo una matriz $\Phi \in \mathcal{M}^{N_{sam} \times N_{dim}}$ cuyas columnas son las N_{sam} muestras de las N_{dim} señales base entonces la ecuación de síntesis en TD puede ser escrita como

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{a} \quad (2.16)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathcal{M}^{N_{sam} \times 1}$ contiene las muestras de señal en la forma de un vector columna y la ecuación de análisis como:

$$\mathbf{a} = \Phi^\dagger \mathbf{x} \quad (2.17)$$

donde $\Phi^\dagger = (\Phi^H \Phi)^{-1} \Phi^H$ es la matriz pseudoinversa izquierda. La matriz gramiana está asociada con el término $\mathbf{G} = \Phi^H \Phi$ y su invertibilidad asegura la existencia del par biortogonal dado por $\tilde{\Phi} = (\Phi^\dagger)^H = \Phi \mathbf{G}^{-1}$ i.e el conjunto biortogonal es una combinación lineal de la base ponderada por la inversa de la gramiana.

Por último, con la finalidad de que la solución por el método de la pseudoinversa sea válido, el sistema de ecuaciones representado en la ec. (2.16) debe ser *sobredeterminado*, lo cual se cumple

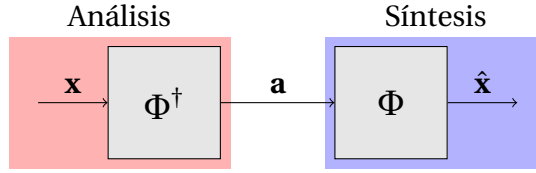


Figura 2.2: Ilustración del método de pseudoinversa

si se respeta la condición

$$N_{sam} \geq N_{dim}. \quad (2.18)$$

2.3. Expansión del ruido mediante par biortogonal

En capítulo 4 se considera la expansión de señales generadas por la combinación lineal base de los vectores de la base seleccionada con una perturbación AWGN perteneciente proceso de ruido blanco de tiempo continuo $\mathcal{N}(t)$ de media nula y varianza σ^2 .

En el caso TC, la salida de un par de filtros correladores de respuesta impulsional puramente real $\psi_j(t)$ y $\psi_i(t)$ tiene una media $E[\langle \mathcal{N}, \psi_j \rangle] = 0$ y una covarianza $cov(\langle \mathcal{N}, \psi_j \rangle, \langle \mathcal{N}, \psi_i \rangle) = \sigma^2 \langle \psi_j, \psi_i \rangle$ [15]. En el caso de una expansión mediante un par biortogonal con $n_j = \langle \mathcal{N}, \tilde{\phi}_j \rangle$, un vector de coeficientes de expansión $\mathbf{n} = [n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_{N_{dim}}]$, y considerando señales complejas, la covarianza viene dada por

$$\begin{aligned} cov(n_i, n_j) &= E[n_i n_j^*] \\ &= E\left[\left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(t) \tilde{\phi}_i^*(t) dt\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(s) \tilde{\phi}_j^*(s) ds\right)^*\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} E[\mathcal{N}(t) \mathcal{N}^*(s)] \tilde{\phi}_j(s) \tilde{\phi}_i^*(t) dt ds \\ &\stackrel{a)}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \sigma^2 \delta(t-s) \tilde{\phi}_j(s) \tilde{\phi}_i^*(t) dt ds \\ &= \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}_j(t) \tilde{\phi}_i^*(t) dt \\ &\stackrel{b)}{=} \sigma^2 \langle \tilde{\phi}_j, \tilde{\phi}_i \rangle \end{aligned}$$

donde se ha utilizado a) la propiedad de autocorrelación del proceso de ruido blanco $E[\mathcal{N}(t)\mathcal{N}^*(s)] = \sigma^2$ si $t = s$ b) y la definición de producto punto en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. De esta manera la matriz de covarianzas del vector de expansion del ruido

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{n}) &= E[\mathbf{nn}^H] \\ &= E \begin{bmatrix} n_1 n_1^* & n_1 n_2^* & \cdots & n_1 n_N^* \\ n_2 n_1^* & n_2 n_2^* & \cdots & n_2 n_N^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n_N n_1^* & n_N n_2^* & \cdots & n_N n_N^* \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_1 \rangle & \langle \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_1 \rangle & \cdots & \langle \tilde{\phi}_N, \tilde{\phi}_1 \rangle \\ \langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 \rangle & \langle \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_2 \rangle & \cdots & \langle \tilde{\phi}_N, \tilde{\phi}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_N \rangle & \langle \tilde{\phi}_2, \tilde{\phi}_N \rangle & \cdots & \langle \tilde{\phi}_N, \tilde{\phi}_N \rangle \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y por tanto:

$$\Sigma(\mathbf{n}) = \sigma^2 \tilde{\mathbf{G}} = \sigma^2 \mathbf{G}^{-1} \quad (2.19)$$

Este resultado expone el efecto de la selección de la base oblicua en las estadísticas del vector de ruido y la sensibilidad en las estimaciones de los coeficientes de ponderación cuando las señales analizadas son perturbadas por ruido blanco. La relación anterior concuerda con la obtenida en [21].

2.4. Conclusiones

Se mostro que la expansión en bases no ortogonales es posible utilizando el concepto biortogonalidad y que es implementable en TD mediante el producto punto con la matriz pseudoinversa. Sin embargo, el método se basa en la independencia lineal de la base de expansión, la cual puede ser garantizada por la invertibilidad de su gramiana, que asegura la existencia del par biortogonal. También fue observado que existe cierta imprecisión inherente a la aproximación entre los productos punto en TC y TD debido a la finitud de la frecuencia de muestreo utilizada.

Ademas, se demostró que las bases no ortogonales tienen el inconveniente de que el efecto del ruido blanco entre sus componentes es correlacionado, y que el nivel exacto de correlación dependerá del contenido de la inversa de la gramiana.

Capítulo 3

Transformadas en tiempo discreto Taylor Fourier y Legendre Fourier

Como fue visto en el capítulo anterior el concepto del par biortogonal implementado por el método de pseudoinversa permite la expansión de señales en bases no ortogonales. Este es el principio de implementación de la TFT (Taylor Fourier Transform) utilizada para la estimación del fasor en señales de los Sistemas Eléctricos de Potencia (SEP's) [8]. El modelo de señal TFT, referido por razones de brevedad como modelo TF (Taylor Fourier), consiste en una expansión de la base Fourier $\{e^{j2\pi m f_1 t}\}_{m=-M}^M$ por medio del producto cartesiano con los términos Taylor $\{t^k\}_{k=0}^{K-1}$ [3], los cuales son no ortogonales. Este modelo permite considerar fluctuaciones temporales de banda limitada en cada armónica en intervalos temporales disjuntos, logrando errores de reconstrucción bajos y una reducción de la interferencia interarmónica.

Como posteriormente será visto, debido a la no ortogonalidad de los términos Taylor se caracteriza por: 1) un número de condición elevado, el cual produce errores en cálculo de la pseudoinversa mediante SVD (Singular Value Decomposition)[16] y 2) una alta sensibilidad al ruido, la cual es una característica crítica en los sistemas de comunicaciones. Por lo anterior, se propone un remplazo de los términos Taylor por polinomios de Legendre $l_k(t)$, los cuales son ortogonales en el dominio de tiempo continuo y generan el mismo subespacio de señal [9], construyendo de

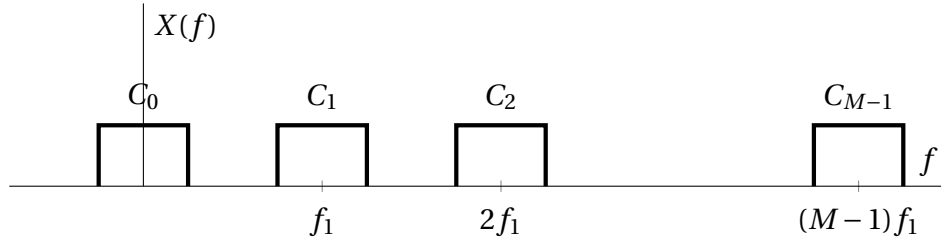


Figura 3.1: Diagrama Simplificado del espectro de frecuencias del modelo pasabanda

esta manera el modelo LF (Legendre Fourier).

El capítulo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la sección 3.1 son introducidos los modelos de señal TF y LF e ilustradas y comparadas sus características temporales y frecuenciales; posteriormente, en la sección 3.2, se procede a la discretización de ambos modelos. En la sección 3.3 será analizado el contenido de la matriz gramiana, y por medio de ella, en la sección 3.4, se evaluará el efecto de los parámetros de diseño en la condición de independencia lineal y en la sensibilidad a los efectos del ruido AWGN.

3.1. Modelo de señal en Tiempo Continuo

Una versión pasabajas del modelo de señal pasabanda propuesto en [3], e ilustrado en la fig. 3.1, es dado por:

$$x(t) = \sum_{m=0}^{M-1} c_m(t) e^{j2\pi m f_1 t} \quad -1 \leq t < 1, \quad (3.1)$$

donde f_1 representa la frecuencia de la primera armónica distinta de cero, M el número de armónicas incluidas en el modelo y $c_m(t)$ una envolvente compleja centrada en la armónica m . El término $c_m(t)$, considerado limitado en banda, permite considerar a cada envolvente como una función temporal dentro del intervalo de observación $[-1, 1]$. Luego, cada envolvente compleja a su vez puede ser construida mediante combinación lineal de un conjunto de K funciones $p_k(t)$ como:

$$c_m(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_{m,k} p_k(t) \quad -1 \leq t < 1. \quad (3.2)$$

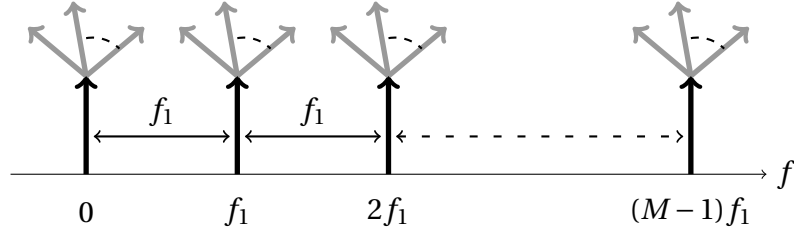


Figura 3.2: Ilustración conceptual de las bases LF y TF . Funciones armónicas y términos polinómicos en colores negro y gris respectivamente

Para generar señales equivalentes pasabajas [17] el modelo fue modificado para incluir solo los índices de frecuencias no negativas $m \geq 0$, por lo que solo es adecuado puede generar y analizar señales complejas, lo cual es el caso para la aplicación de sistema de comunicaciones: el objetivo del presente del trabajo. Sin embargo el modelo puede ser expandido para considerar señales puramente reales modificando el límite inferior del sumatorio a $-(M-1)$. También con la finalidad de mantener la ortogonalidad del término exponencial en la ec. (3.1) en el intervalo temporal $[-1, 1]$ f_1 se ha seleccionado para incluir P oscilaciones completas de primera armónica en este intervalo, así $f_1 = \frac{2}{P}$.

3.1.1. Base vectorial LF y TF

La expresión matemática de los elementos de las bases de los modelos Taylor Fourier y Legendre Fourier $\phi_{m,k}(t)$ con $0 \leq k \leq M-1$ y $0 \leq m \leq K-1$ son mostradas en la tabla 3.1. Los modelos difieren por la elección entre el conjunto de los términos Taylor t^k o los polinomios de Legendre $l_k(t)$ para la función $p_k(t)$ (referido como *término polinómico* para facilidad de explicación) utilizada para expandir la envolvente compleja. En ambos casos la energía esta dada por $\varepsilon_k = \frac{2}{2k+1}$ y se tiene un total de $N_{dim} = MK$ elementos base con doble subíndice: m el índice armónico y k el índice polinómico.

	Taylor Fourier TF	Legendre Fourier LF
$\phi_{m,k}(t)$	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} t^k e^{j2\pi m f_1 t}$	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} l_k(t) e^{j2\pi m f_1 t}$

Tabla 3.1: Bases de expansión en $\mathcal{L}^2[-1, 1]$

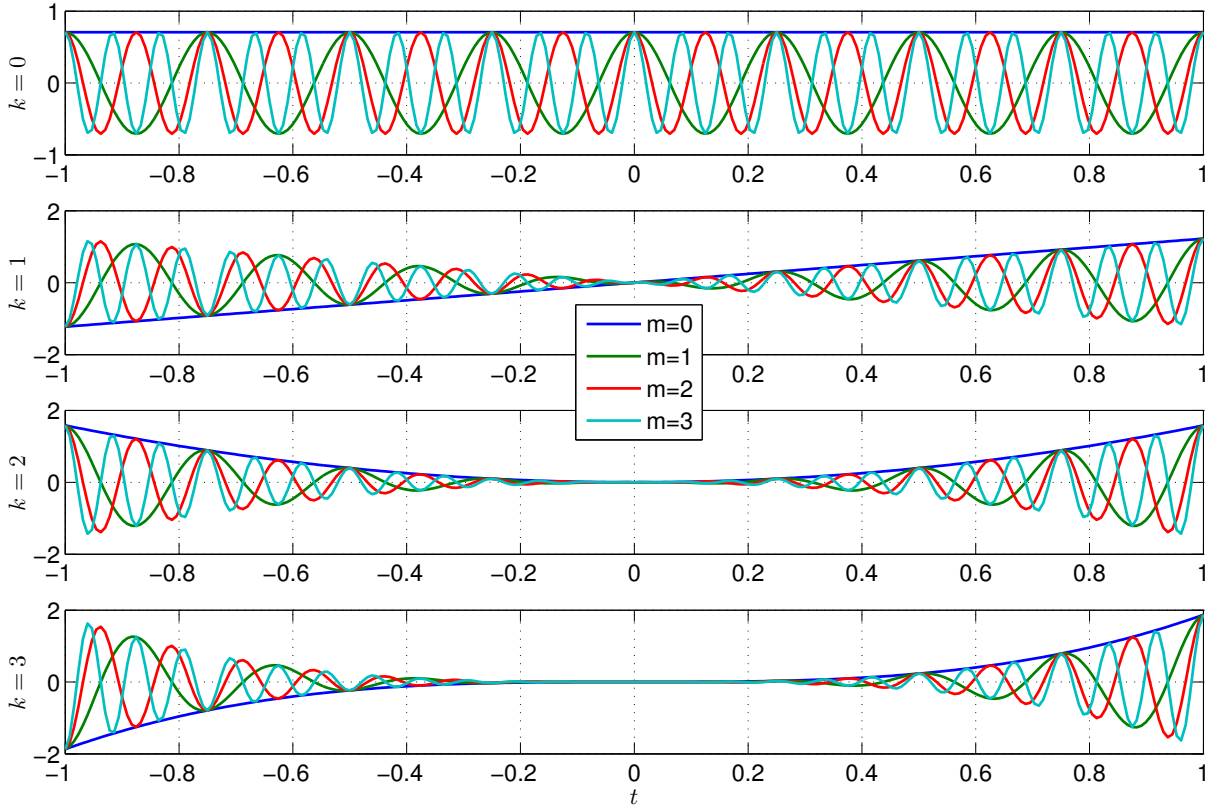


Figura 3.3: Parte real de las señales de la base TF con $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$.

Como es ilustrado en la fig. 3.2, ambos modelos son el resultado de la translación frecuencial de los K términos polinómicos a cada una de las M armónicas, donde f_1 es la separación interarmónica. Las tres variables K , M , y P conforman los parámetros de diseño de los modelos LF y TF en tiempo continuo. Debido a la multitud de posibles combinaciones de parámetros en el presente trabajo se ha seleccionado al caso con $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$ como el principal caso de visualización de ambos modelos.

Características temporales

Los elementos base del modelo TF y LF pueden ser observados en las fig. 3.3 y 3.4 respectivamente. Dado que el primer par de términos de Taylor y Legendre coinciden (i.e $l_0(t) = 1$ y $l_1(t) = t$) las formas de onda TF y LF con $k = 0, 1$ son idénticas. Para ambos modelos la máxima amplitud instantanea en todas sus señales se presenta en los extremos del intervalo $t = -1, 1$, de-

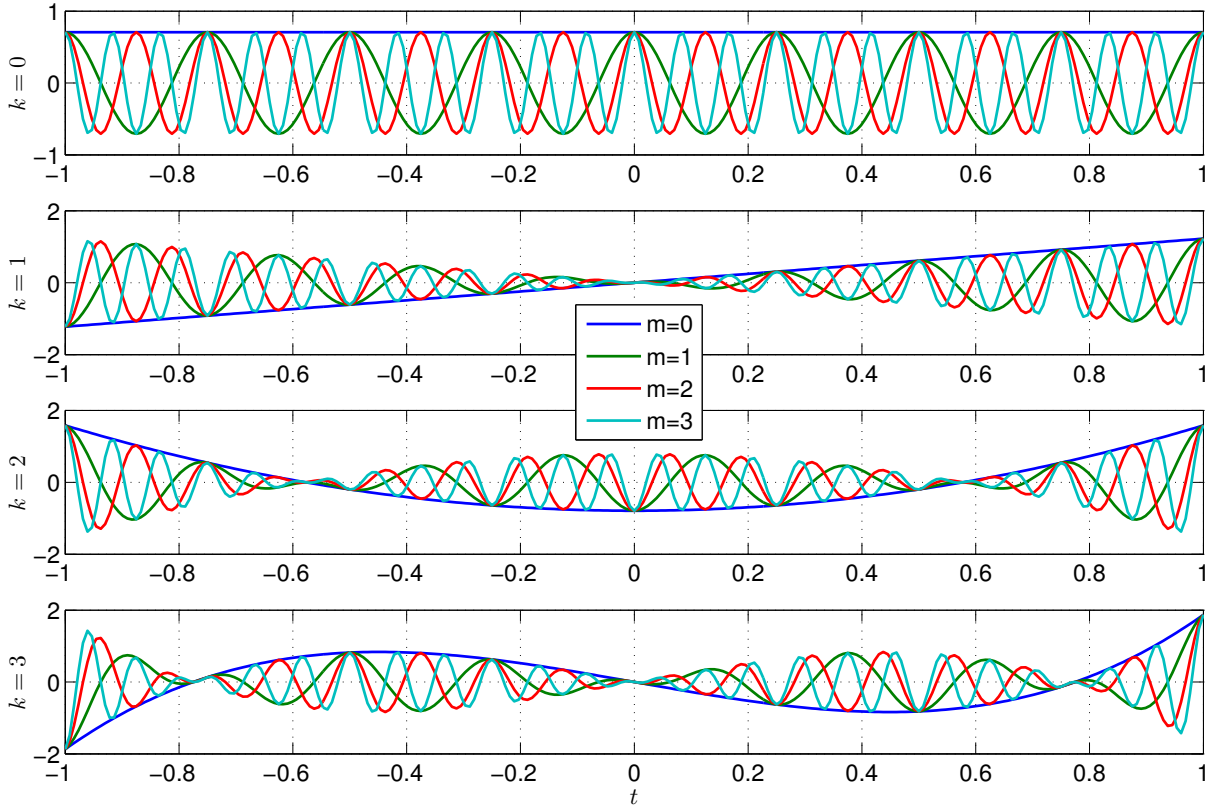


Figura 3.4: Parte real de las señales de la base LF con $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$.

bido al factor de normalización de energía $\sqrt{\frac{2k+1}{2}}$ el cual crece de manera monótona con k . Por otra parte, las formas de onda presentan diferencias: En el modelo TF, dado que los términos t^k tienden a aplanarse alrededor del centro del intervalo $t = 0$ la envolvente de cada armónica también tiende a aplanarse en ese punto, mientras que en el LF los cruces por cero del polinomio $l_k(t)$ genera k cambios de fase en las envolventes.

Características espectrales

En la fig. 3.5 y 3.6 es mostrada la densidad espectral de potencia (PSD) de las bases TF y LF respectivamente con el primer par de parámetros fijos en el caso de estudio ($M = 4$, $K = 4$) y variando el tercero ($P = 2, 4, 8$). De manera general puede ser observado que los espectros consisten en el contenido frecuencial de cada polinomio centrado sobre cada frecuencia armónica $m f_1$. Dado que el incremento del parámetro P aumenta la frecuencia fundamental también incrementa

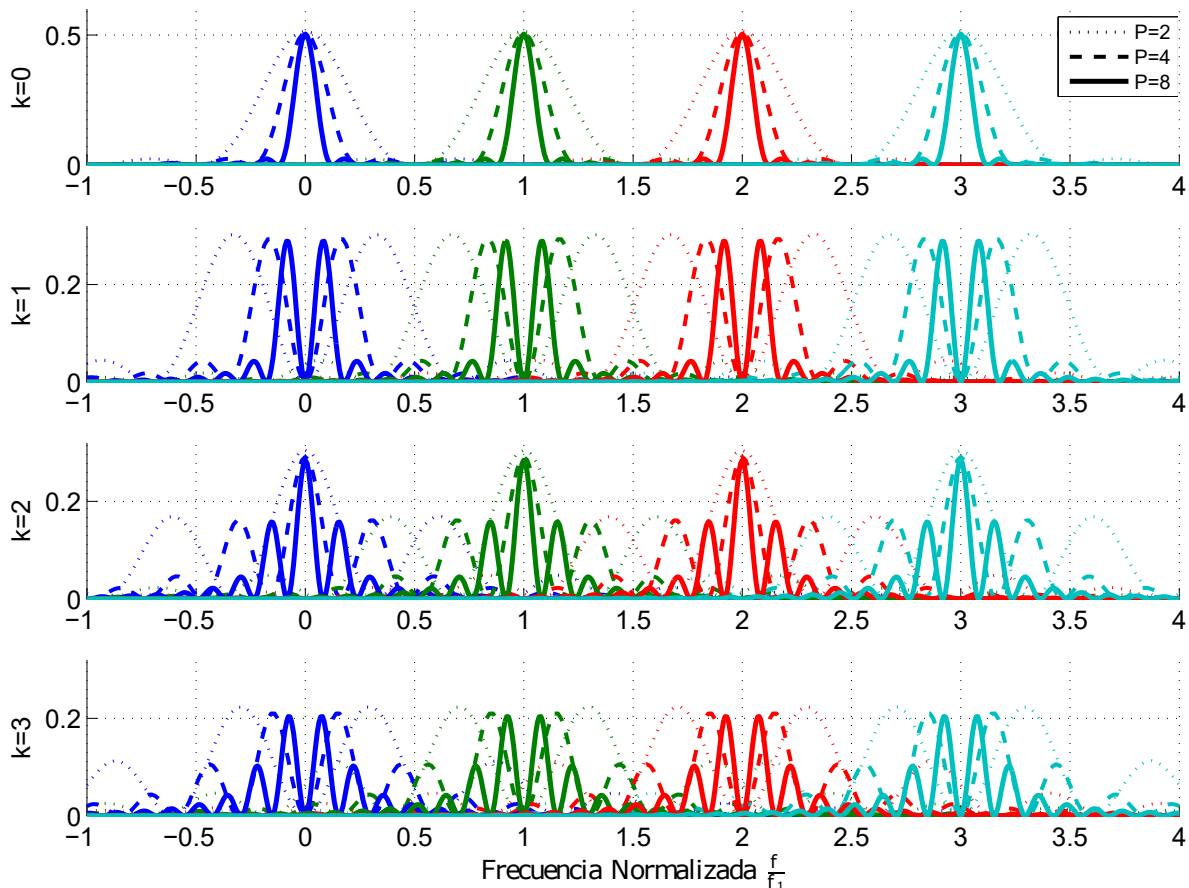


Figura 3.5: PSD de las señales de la base TF con $K = 4$, $M = 4$.

la distancia entre armónicas y su efecto en la gráfica PSD con eje de frecuencia normalizado es comprimir todos los espectros alrededor de su frecuencia central. Es importante mencionar que el incremento de P va de la mano con un incremento en el ancho de banda de las formas de onda de la base.

En la base TF, debido a la propiedad de derivación frecuencial de la Transformada de Fourier en tiempo continuo $\mathcal{F}[t^k f(t)] = \left(-\frac{j}{2\pi}\right)^k \frac{d^k}{df^k} X(f)$ [18] el espectro del k -ésimo término de Taylor corresponde a la k -ésima derivada de la función seno cardinal $X(f) = \text{sinc}(f)$ i.e la transformada de la ventana temporal rectangular t^0 y como puede ser visto en la fig. 3.5 presentan formas de onda parecidas a la función sinc. Mientras que para LF, dado la relación entre los términos Taylor y Legendre, el espectro de los términos Legendre corresponde a combinaciones lineales de las

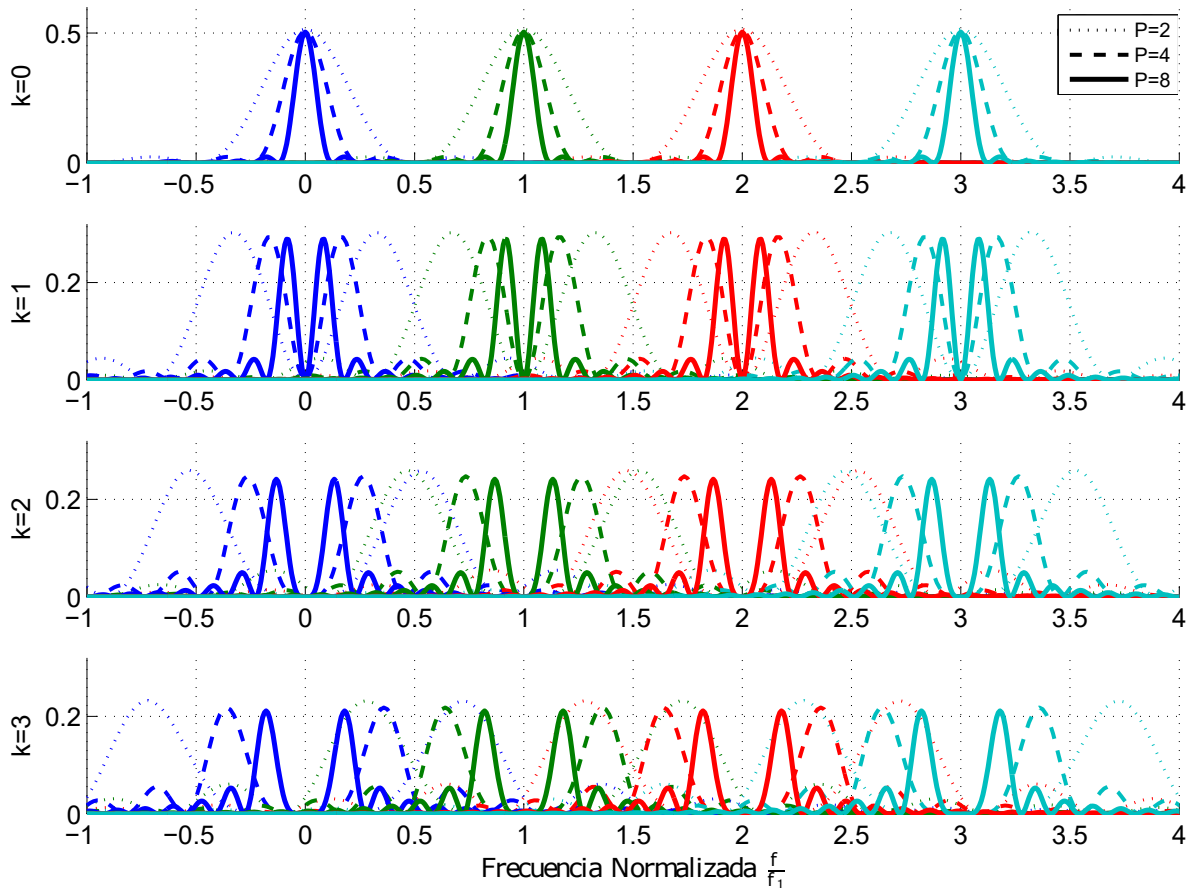


Figura 3.6: PSD de las señales de la base LF con $K = 4$, $M = 4$.

derivadas de la función $\text{sinc}(f)$. Los espectros con $k > 1$ presentan un par de lóbulos laterales prominentes al lado de la frecuencia central y una región plana entre ellos. La distancia entre los lóbulos y el ancho del intervalo nulo aumenta con k . Lo anterior resulta en que los espectros de los polinomios de alto orden generan un traslape frecuencial mayor con los polinomios centrados en armónicas aledañas.

3.1.2. Construcción por combinación lineal

Suponiendo provisionalmente que los N_{dim} elementos de la base son linealmente independientes ¹ se tiene que cualquier señal $\hat{x}(t)$ que pertenece al espacio TF o LF puede ser expresada

¹Esta suposición se examinará a detalle en la sección 3.4.1

mediante una combinación lineal:

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_{m,k} \phi_{m,k}(t) \quad t \in [-1, 1], \quad (3.3)$$

donde $\alpha_{m,k}$ es el coeficiente de ponderación para la armónica m y el polinomio k . En el caso de que la señal analizada no pertenezca al subespacio de las bases entonces $\hat{x}(t)$ representa la mejor aproximación bajo el criterio *LS* en el plano del modelo. Los elementos de la base con doble índice son organizados en un operador matricial $\Phi(t)$ de la siguiente manera:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_0(t) & \phi_1(t) & \cdots & \phi_{M-1}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.4a)$$

$$\phi_m(t) = \begin{bmatrix} \phi_{m,0}(t) & \phi_{m,1}(t) & \cdots & \phi_{m,K-1}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.4b)$$

donde ϕ_m reúne el conjunto de K polinomios centrados en la m -ésima armónica. De esta manera la ec. (3.3) puede ser escrita sencillamente como $\hat{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{a}$. El orden seleccionado para los elementos de $\Phi(t)$ no altera la condición de independencia lineal del conjunto y permite expresar la matriz gramiana en términos de una matriz particionada la cual es más sencilla de analizar.

3.2. Discretización e implementación por pseudoinversa

Seleccionando una frecuencia de muestreo f_s como un múltiplo entero Q de la primera armónica $f_s = Qf_1$, las señales discretizadas para las bases TF y LF se expresan como en la tabla 3.2 con $N_{sam} = PQ$ muestras dentro del intervalo $[-1, 1)$ sin incluir la muestra del instante $t = 1$. Con el fin evitar el aliasing de las señales centradas en la armónica más alta del modelo f_{M-1} el factor de muestreo debe cumplir la condición:

$$Q > 2(M-1). \quad (3.5)$$

El factor de normalización en tiempo discreto $\sqrt{\frac{2}{N_{sam}}}$ fue agregado para utilizar la aproximación entre los productos punto TC y TD discutida en la sección (2.2).

Construyendo una matriz $\mathbf{P} \in \mathcal{M}^{N_{sam} \times K}$ cuyas columnas son las muestras de los K términos

	Taylor Fourier TF	Legendre Fourier LF
$\phi_{m,k}[n]$	$\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_k N_{sam}}} \left(\frac{2}{N_{sam}} n\right)^k e^{j\frac{2\pi}{Q} mn}$	$\sqrt{\frac{2}{\varepsilon_k N_{sam}}} l_k \left(\frac{2}{N_{sam}} n\right) e^{j\frac{2\pi}{Q} mn}$

Tabla 3.2: Bases de expansión en $\ell^2 \left[-\frac{N_{sam}}{2}, \frac{N_{sam}}{2} - 1\right]$.

polinómicos normalizados (términos de Taylor o polinomios de Legendre) y una matriz diagonal $\mathbf{W}_m = \text{diag}(e^{j\frac{2\pi}{Q} mn})$ con las muestras del término exponencial, la matriz de síntesis puede ser construido como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \mathbf{P} & \mathbf{W}_1 \mathbf{P} & \cdots & \mathbf{W}_{(M-1)} \mathbf{P} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

y la matriz de análisis mediante la pseudoinversa $\Phi^\dagger = (\Phi^H \Phi)^{-1} \Phi$. El par Φ^\dagger, Φ conforman los operadores de transformada y antitransformada de los modelos TF o LF. Por último la condición de sobredeterminación se cumple si las variables de diseño siguen la relación:

$$N_{sam} = PQ \geq MK = N_{dim}. \quad (3.7)$$

3.3. Análisis de la matriz de gramiana

Las entradas de la matriz gramiana corresponden al producto punto de los elementos de la base y por los casos LF y TF el producto punto en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ entre un par de elementos $\phi_{m_1, k_1}(t)$ y $\phi_{m_2, k_2}(t)$ corresponde a la transformada de fourier de la multiplicación del par de términos polinómicos:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{m_1, k_1}, \phi_{m_2, k_2} \rangle &= \int_1^{-1} p_{k_1}(t) p_{k_2}(t) e^{-j2\pi \Delta m f_1} dt \\ &= \mathcal{F}[p_{k_1}(t) p_{k_2}(t)] \Big|_{f=\Delta m f_1} \end{aligned} \quad (3.8)$$

con $\Delta m = m_2 - m_1$ la diferencia entre los índice armónicos y la cantidad $\Delta m f_1$ su separación interarmónica en la cual la transformada es evaluada. En $\Delta m = 0$ es equivalente al producto entre los polinomios en ausencia del término exponencial.

La ecuación anterior expresa la magnitud de cada elemento de \mathbf{G} , sin embargo la presencia de los 2 pares índices m_1, m_2 y k_1, k_2 hace complicada su interpretación. Utilizando el operador Φ la gramiana de los modelos LF y TF se expresa como una matriz particionada en M^2 bloques de K^2 elementos ²:

$$\mathbf{G} = \Phi^H \Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_{-1} & \mathbf{G}_{-2} & \cdots & \mathbf{G}_{-M+1} \\ \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_{-1} & \cdots & \mathbf{G}_{-M+2} \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}_0 & \cdots & \mathbf{G}_{-M+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{G}_{M-1} & \mathbf{G}_{M-2} & \mathbf{G}_{M-3} & \cdots & \mathbf{G}_0 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

donde los bloques de subgramiana estan dados por $\mathbf{G}_{\Delta m} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}_{\Delta m} \mathbf{P}$ y por la propiedad de simetría hermitiana $\mathbf{G}_{(-\Delta m)} = \mathbf{G}_{\Delta m}^H$ y se caracteriza por tener bandas de bloques donde Δm define la distancia con los bloques en la diagonal \mathbf{G}_0 . Los bloques \mathbf{G}_0 corresponden a la gramiana de la base polinómica $p_k(t)$, $0 \leq k \leq K-1$ y $\mathbf{G}_{\Delta m}$ a la mezcla polinomio-armónica. En particular para el caso de estudio con $M = 4$ y $K = 4$, se tiene $(MK)^2 = 16^2$ elementos y 4^2 bloques de 4^2 elementos.

3.3.1. Base LF

Dado que los polinomios de Legendre son ortogonales $\mathbf{G}_0 = \mathbf{I}_K$ y como puede observarse en la fig. 3.7 los bloques $\Delta m = 1$ tienen mayor correlación que los $\Delta m > 1$. El incremento de distancia interarmónica, controlado mediante el párametro P , produce un decremento en la magitud de los elementos de los bloques $\mathbf{G}_{\Delta m}$ con $|\Delta m| \geq 1$ y se relaciona con la evaluación de la transformada Fourier de la ec. 3.8 en una frecuencia más elevada. Esto permite una aproximación casi ortogonal $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{I}_{MK}$ con $P \rightarrow \infty$ de la base LF.

3.3.2. Base TF

Similarmente para la Gramiana de la base TF, ilustrado en la fig. 3.8, se tiene un decremento de la magnitud de los bloques $|\Delta m| \geq 1$ con el incremento de P . Sin embargo dado que los términos Taylor no son ortogonales $\mathbf{G}_0 \neq \mathbf{I}_K$, los elementos de la base TF no pueden ser ortogonalizados

²Siendo una aproximacion al caso TC

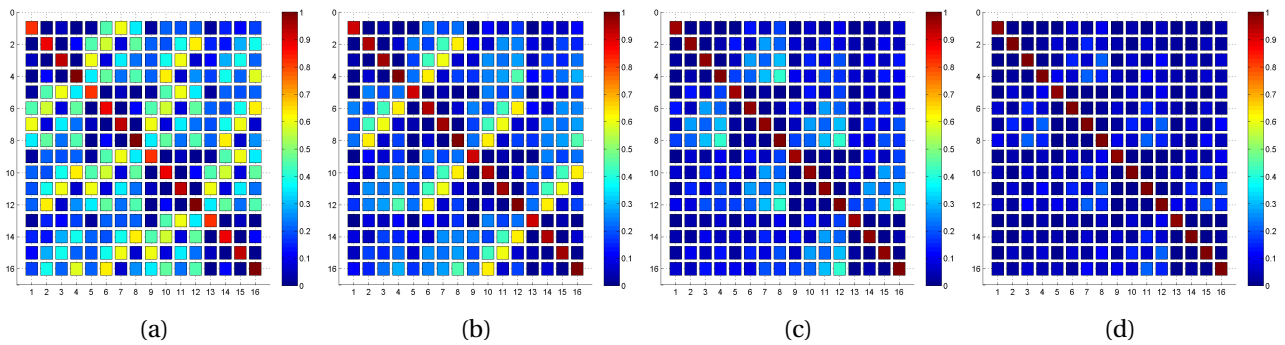


Figura 3.7: Magnitud normalizada de los elementos de \mathbf{G} para base LF . a) $P = 1$. b) $P = 2$. c) $P = 4$. d) $P = 8$

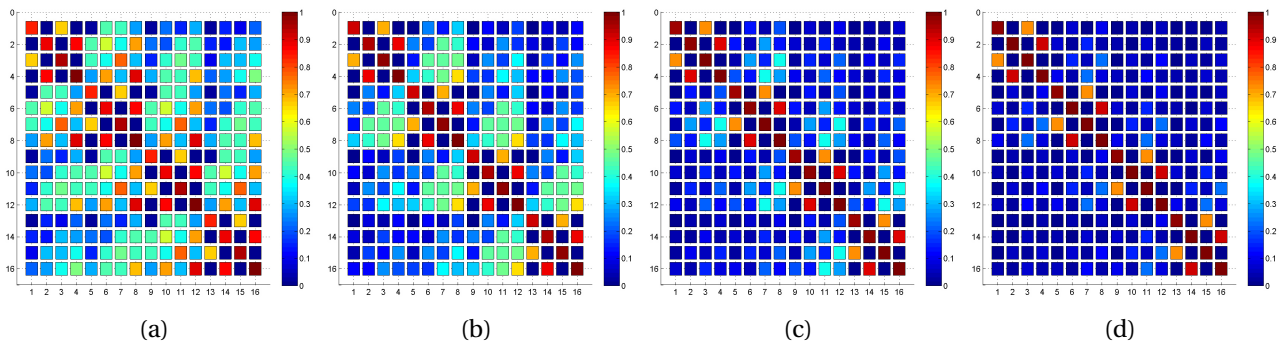


Figura 3.8: Magnitud normalizada de los elementos de \mathbf{G} para base TF . a) $P = 1$. b) $P = 2$. c) $P = 4$. d) $P = 8$

mediante el incremento de la separación interarmónica.

3.4. Efectos de los parámetros de diseño P y K

Como fue observado en la sección anterior la matriz gramiana varía de contenido y dimensiones con el cambio de los parámetros de diseño K , M y P , por lo que alteran tanto condición de dependencia lineal de la base y como su sensibilidad al ruido blanco. Estos puntos son analizados a continuación.

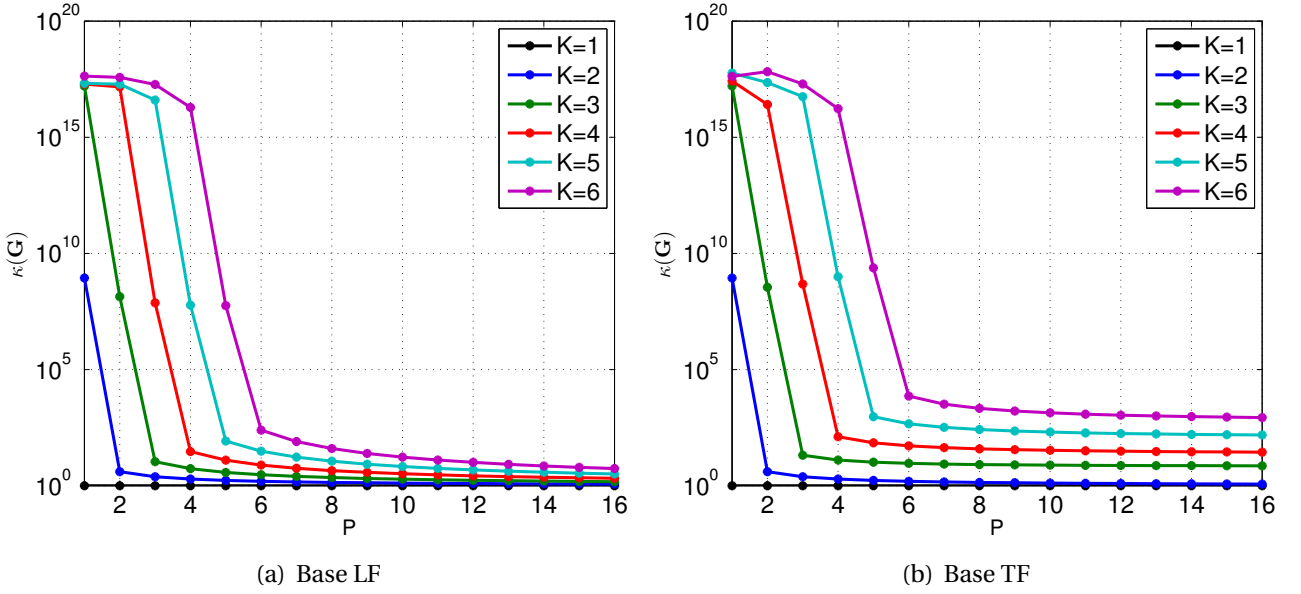


Figura 3.9: Número de condición de las matriz gramiana. $M = 4$ y como función de K y P .

3.4.1. Condición de independencia lineal

El número de condición $k(\mathbf{G})$ usando la norma l^2 , definido como la razón entre los valores singulares de mayor y menor magnitud de la matriz de \mathbf{G} [19], se encuentra acotado en el intervalo semicerrado $[1, \infty)$ presentandose estos casos cuando [20]:

$$\kappa(\mathbf{G}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{G} \text{ es identidad} \\ \infty, & \text{si } \mathbf{G} \text{ es singular} \end{cases}. \quad (3.10)$$

El primer caso coincide con el de una base ortonormal y el segundo, con una linealmente dependiente, por lo que un número de condición elevado puede ser asociado a una cercanía a la dependencia lineal.

La fig. 3.9 muestra la variación de $\kappa(\mathbf{G})$ para las bases LF y TF con distintos parámetros de diseño P y K y manteniendo al número de portadoras fijo $M = 4$. Para ambas casos se tienen las siguientes características:

1. El incremento de la separación interarmónica provoca un decremento en el número de condición.
2. La inclusión de polinomios en general aumenta el número de condición.

La característica 1 es producida por la aproximación de las submatrices $\mathbf{G}_{\Delta m} \rightarrow \mathbf{0}$, que en el caso LF permite que $\kappa(\mathbf{G})$ converja a 1 para toda cantidad de polinomios incluidos, mientras que en el caso TF converge a un valor mayor a 1 dependiendo del número de polinomios K incluidos en el modelo. La característica 2 es producida por el incremento en las dimensiones de la gramiana.

Por último es observado que para solo un polinomio incluido $K = 1$ (ventana temporal rectangular en ambas bases) la varianza permanece unitaria para todo valor P pues los elementos base coinciden la base Fourier, la cual es ortogonal. Por otro lado los casos de separación distancia interarmónica mínima $P = 1$ con $K > 1$ son siempre los casos de mayor dependencia lineal.

3.4.2. Sensibilidad al ruido blanco

Dada la relación inversa entre la matriz de covarianzas y la gramiana, derivada en el capítulo anterior, la varianza en cada uno de los MK coeficientes de expansión se obtiene como:

$$\sigma_j = \text{var}(\alpha_j) = \sigma^2 \tilde{g}_{j,j} \quad 1 \leq j \leq MK \quad (3.11)$$

donde $\tilde{g}_{j,j}$ son las entradas en la diagonal de \mathbf{G}^{-1} . Por lo que la varianza del ruido inducida en los coeficientes por el proceso AWGN puede ser incrementada dependiendo del contenido de la gramiana. Las gráficas de máxima varianza como función de los parámetros de diseño y la selección del modelo, mostrada en la fig. 3.10, tiene un comportamiento muy similar a las del número de condición en la fig. 3.9: Los casos de máxima varianza ($P = 1$) son los de mayor dependencia lineal, la inclusión de los polinomios ($K > 1$) eleva las varianzas y las varianzas decrecen con el incremento del parámetro P .

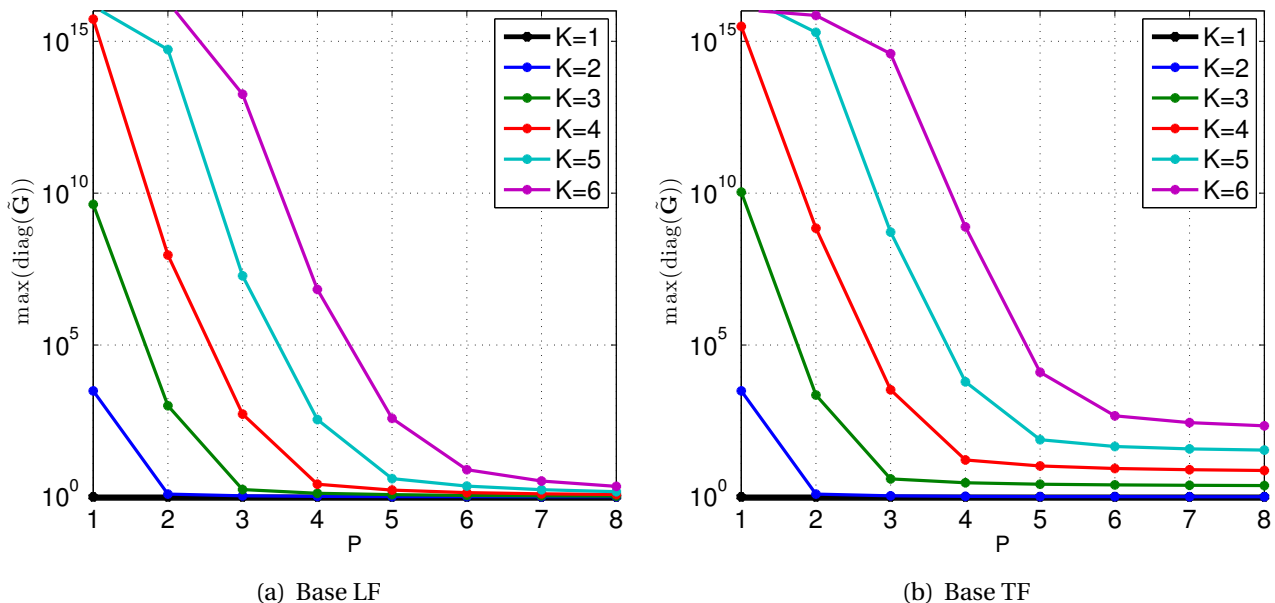


Figura 3.10: Varianza Máxima de los coeficientes de expansión como función de P y K . Variables de $M = 4$ fija.

3.5. Conclusiones

Fueron expuestos los modelos de expansión pasabanda TF y LF con normalización en energía y restricción de armónicas solo positivas. Fueron fijadas sus variables de diseño M , K y P y observado su efecto tanto en la formas de onda temporales, contenido espectral de los elementos base y en el contenido de su matriz gramiana.

La oblicuidad de la base TF se debe a la no ortogonalidad de los términos polinómicos y de la combinación polinomio-armónica, mientras que en la base LF, solo por la de la combinación polinomio-armónica. En ambos casos la inclusión de los términos polinómicos incrementa tanto el número de condición como su sensibilidad al ruido. Tales deficiencias pueden ser disminuidas mediante el incremento de la distancia interarmónica P . Sin embargo, solo en la base LF es posible llegar a una varianza unitaria para un valor P grande dado que solo en este caso la gramiana de la base polinómica \mathbf{G}_0 es identidad.

Capítulo 4

Esquema OFDM extendido mediante transformadas LF y TF

4.1. introducción

Los esquemas de modulación digitales lineales codifican información binaria mediante una colección de señales analógicas simbólicas las cuales son transmitidas por el canal de comunicaciones analógico. En el modulador los símbolos portadores de información son sintetizados mediante la combinación lineal de un conjunto de funciones ortonormales $\{\phi_i(t)\}$, lo que permite en el receptor realizar la estimación de la i -ésima amplitud simbólica con producto punto del símbolo con elemento i del conjunto. En esta idea se basa la implementación práctica de los receptores mediante estructuras de bancos de filtros acoplados y correladores.

El sistema OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing), propuesto inicialmente por en 1966 [22], se basa en la modulación en paralelo de un conjunto de subportadoras ortogonales las cuales permiten subdividir el canal de comunicaciones un conjunto de subcanales de banda angosta, independientes, de baja tasa y respuesta a la frecuencia plana. Esta división tiene la virtud de simplificar los procesos de ecualización, que bajo ciertas condiciones puede ser realizada por un filtro de un solo coeficiente para cada subcanal [23]. Por otra parte, el modem OFDM es im-

plementado eficientemente con técnicas puramente digitales mediante pares de Transformadas DFT (Digital Fourier Transform) [24], reduciendo la complejidad inherente al uso de bancos de osciladores sinusoidales analógicos tanto en el transmisor como en el receptor.

4.1.1. Fundamentos de OFDM

El modulador OFDM, ilustrado en la parte izquierda de la fig 4.1, divide y distribuye un stream de datos de alta velocidad en M substreams paralelos, por medio de un convertidor Serie-Paralelo (S/P), que modulan un conjunto M subportadoras. Las subportadoras $\phi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T_{sym}}} e^{j2\pi f_m t}$ armónicamente relacionadas con la frecuencia simbólica $f_m = m f_{sym}$ conforman el conjunto ortogonal (base Fourier) en el periodo simbólico T_{sym} . Considerando el caso sin portadora, los símbolos OFDM se expresan como:

$$s(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m \phi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m e^{j2\pi m f_{sym} t} \quad (4.1)$$

con α_m la amplitud simbólica, que pertenece a una constelación QAM o PSK, de la subportadora m . Luego, en el receptor, a la derecha de la fig 4.1, las amplitudes son estimadas mediante por un banco de M filtros correladores y luego reorganizadas por medio de un convertidor Paralelo-Serie (P/S) para su posterior decodificación.

Utilizando una frecuencia de muestreo $f_s = Q f_{sym}$, con $Q > 2M$, el símbolo discretizado $s[n]$ se expresa como:

$$s[n] = s(nT_s) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \sum_{m=0}^{Q-1} \alpha_m e^{j\frac{2\pi}{Q} mn} \quad 0 \leq n \leq Q-1 \quad (4.2)$$

que corresponde a la transformada inversa de Fourier $s[n] = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \text{IDFT}[\alpha_m]$ de Q puntos. Y así la estimación de las amplitudes puede ser realizada mediante la transformada de Fourier de las muestras de la señal recibida $\tilde{\alpha}_m = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \text{DFT}[r[n]]$. Las primeras M muestras del vector α_m corresponden a las amplitudes simbólicas y las restantes $Q - M$ a un relleno de ceros. En la implementación del modem con pares de transformadas DFT, ilustrado la fig. 4.2, se agrega un convertidor P/S a la

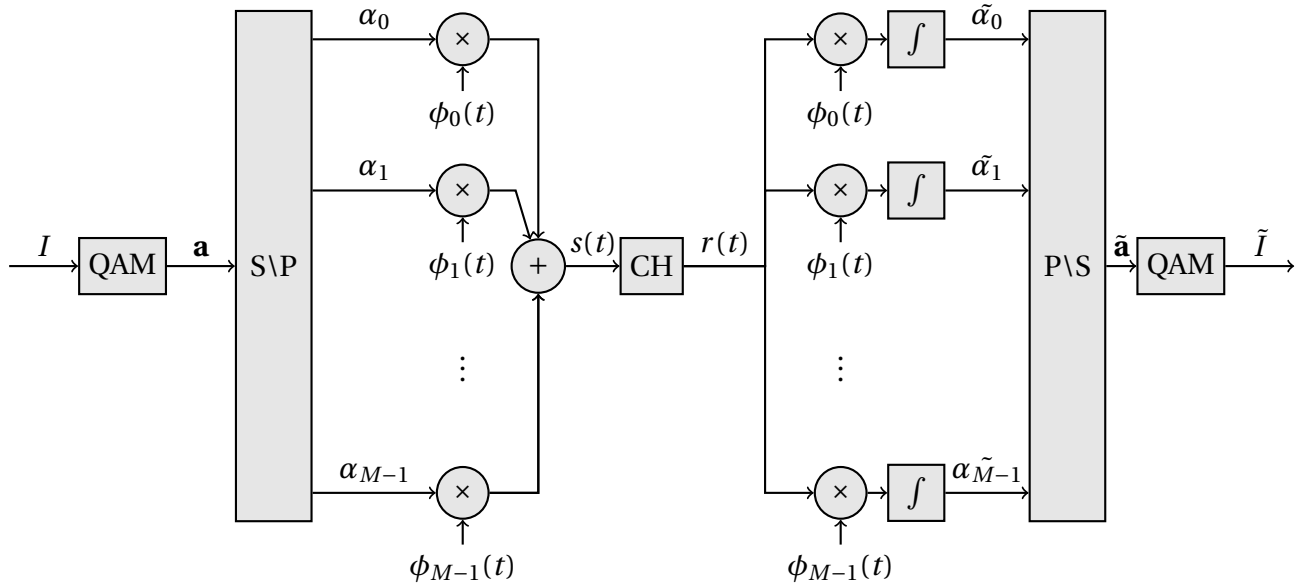


Figura 4.1: Diagrama a bloques del transmisor y receptor OFDM pasabajas.

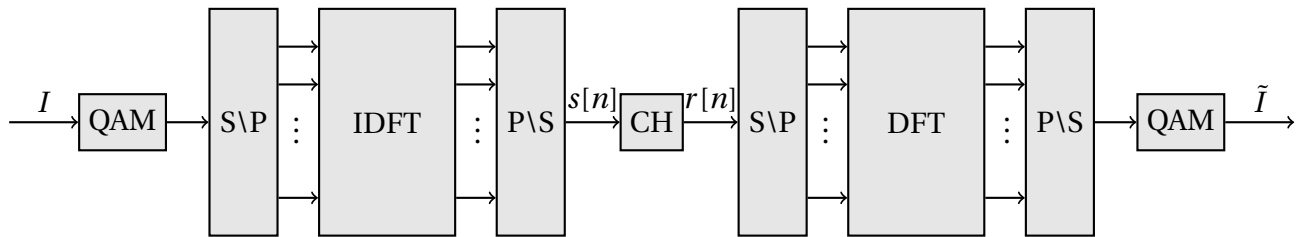


Figura 4.2: Diagrama a bloques del transmisor y receptor OFDM mediante DFT.

salida del bloque IDFT para reorganizar las muestras del símbolo y un convertidor S/P para reorganizar las muestras del símbolo recibido para procesamiento por la DFT.

4.2. Esquema propuesto

El esquema FFT-OFDM y sus variantes DWT-OFDM (Discrete Wavelet Transform)[25] resaltan la relación estrecha entre los procesos descomposición-reconstrucción de señales de los algoritmos DSP y el proceso de modulación-demodulación de los sistemas de comunicaciones digitales lineales. La idea principal del presente trabajo es la construcción de un sistema de transmisión de información por medio de las formas de onda generadas por las bases TF y LF realizando su

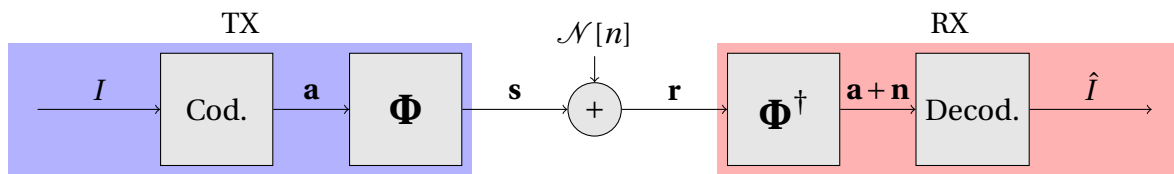


Figura 4.3: Diagrama a bloques modelo de canal AWGN.

implementación discreta mediante sus operadores de antitransformada y transformada, como es ilustrado en la fig.4.3, de manera similar al esquemas FFT-OFDM y DWT-OFDM

En el lado del transmisor de la fig. 4.3 una secuencia I de MK bits alimenta a un codificador BPSK produciendo un vector de MK amplitudes simbólicas \mathbf{a} . Luego las muestras del símbolo \mathbf{a} son generadas con la multiplicación del operador $\Phi\mathbf{a}$. En el receptor, una versión del símbolo corrompida \mathbf{r} por el ruido AWGN $\mathcal{N}[n]$ es multiplicada por la pseudoinversa generando la estimación de $\mathbf{a} + \mathbf{n}$, donde el término \mathbf{n} esta relacionado con la infiltración del proceso de ruido en las columnas de Φ . Luego el decodificador BPSK estima los coeficientes \mathbf{a} por la polaridad $(-, +)$ de sus elementos, para luego extraer la información binaria \hat{I} con una probabilidad de error dependiente de las estadísticas del vector \mathbf{n} .

Cabe mencionar que la estimación de \mathbf{a} en el receptor mediante la expansión sobre las columnas Φ^\dagger concuerda con la implementación del receptor por medio de bancos de correladores o filtros acoplados [17] con respuestas impulsionales discretizadas, con la particularidad de que las formas de onda de recepción son biortogonales a las formas de onda de transmisión. En el presente trabajo se analiza el caso en que el conjunto biortogonal a la base LF o TF es empleado en el receptor, sin embargo dado que el papel de conjunto biortogonal es intercambiable, conceptualmente las formas de onda de transmisión y de recepción pueden también ser intercambiadas.

Razón Binaria

Usando codificadores QAM de q puntos, los esquemas TF y LF codifican $MK \log_2(q)$ bits de información por forma onda, mientras que el esquema ODFM $M \log_2(q)$ bits, considerando el

caso de un mismo número de portadoras sin tonos piloto. De esta manera para los esquemas LF y TF se tiene una razón binaria:

$$R_b = MK(\log_2 q)R_{sym} \quad (4.3)$$

y para el OFDM:

$$R_b = M(\log_2 q)R_{sym} \quad (4.4)$$

donde en ambos casos R_{sym} es la tasa simbólica.

Energía simbólica y de bit

La energía de una señal producida por la combinación lineal de una base $s(t) = \Phi(t)\mathbf{a}$ puede ser expresada sin necesidad de la integración de $s^2(t)$ promedio de la forma cuadrática: $\|s(t)\|_2^2 = \mathbf{a}^H \mathbf{G} \mathbf{a}$ [9]. Sin embargo en los casos LF y TF es necesario el cálculo de la expresión anterior q^{MK} veces para determinar la energía simbólica promedio. Una relación sencilla es obtenida directamente mediante el operador de valor esperado

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s,avg} &= E[\|s(t)\|_2^2] \\ &= E\left[\int s(t)s^*(t)dt\right] \\ &= \int E\left[\sum_{i=1}^{MK} \alpha_i \phi_i(t) \sum_{j=1}^{MK} \alpha_j^* \phi_j^*(t)\right] dt \\ &= \int \sum_{i=1}^{MK} \sum_{j=1}^{MK} E[\alpha_i \alpha_j^*] \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt \\ &\stackrel{a)}{=} \int \sum_{i=1}^{MK} \sum_{j=1}^{MK} \delta_{i,j} \phi_i(t) \phi_j^*(t) dt \\ &\stackrel{b)}{=} \sum_{j=1}^{MK} \int |\phi_j(t)|^2 dt \\ &\stackrel{c)}{=} \sum_{j=1}^{MK} \|\phi_j(t)\|_2^2 \\ &= MK, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde a) se deduce dado que las amplitudes simbólicas son no correlacionadas con $E[\alpha_j^2] = 1$ para el caso BPSK, b) por la propiedad de muestreo de la función delta de Kronecker y c) a la normalización de las bases. De esta manera la energía promedio es solo dependiente del número de elementos de la base.

Por otra parte, la energía de bit promedio se obtiene dividiendo la energía simbólica promedio entre la cantidad de bits por símbolo como:

$$\varepsilon_{b,avg} = \frac{\varepsilon_{s,avg}}{MK \log_2 q}, \quad (4.6)$$

y utilizando de la ec. (4.5) en el caso BPSK $q = 2$ tenemos que:

$$\varepsilon_{b,avg} = 1. \quad (4.7)$$

Esta relación simplifica en gran medida las simulaciones del esquema ahorrando el paso del cálculo de energía promedio de bit para cada selección de base (TF o LF) y de sus parámetros de diseño (M , P y K). Además permite expresar la relación $\frac{E_b}{N_0}$, utilizada en las gráficas de tasas de error binario, solo en términos de la potencia del ruido N_0 .

4.3. Pruebas en canal AWGN

Las pruebas fueron simuladas en un canal modelo de canal AWGN con un respuesta a la frecuencia plana y no limitada en banda. Para simplicidad de la simulaciones, los vectores \mathbf{a} fueron organizados en una matriz $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_R]$ donde R es el número de realizaciones y así los símbolos son calculados con la multiplicación $\mathbf{S} = \Phi \mathbf{A}$ con las columnas \mathbf{S} contiendo las muestras de los símbolos de cada realización. De manera similar, gracias a la ausencia de interferencia simbólica (ISI), la estimación de los coeficientes se realiza como $\hat{\mathbf{A}} = \Phi^\dagger \mathbf{R}$ donde \mathbf{R} es la matriz con los símbolos modificadas por el canal AWGN.

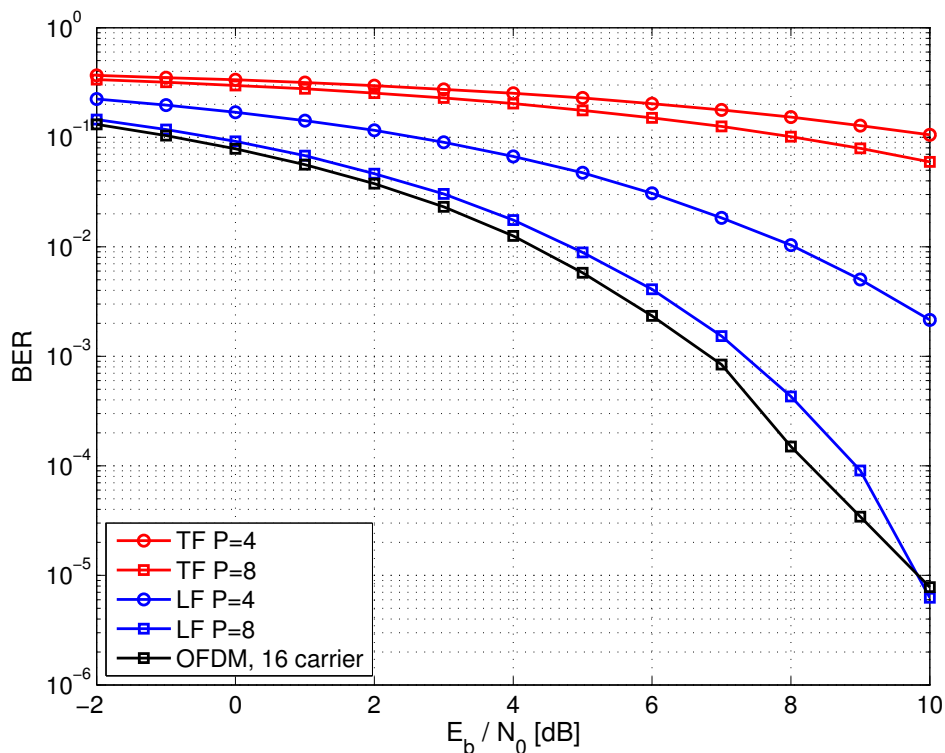


Figura 4.4: Tasa de error binario.

En la fig. 4.4 se muestra y compara el desempeño BER de los esquemas propuestos TF y LF con parámetros de diseño del caso de estudio ($M = 4$ y $K = 4$) contra un OFDM de 16 subportadoras (para considerar igualdad de bits de información por forma de onda) con $R = 40000$ realizaciones y de ella puede ser observado:

1. El desempeño de LF es superior al TF dado que tienen una probabilidad de error menor en las mismas condiciones de energía de ruido y mismos parámetros de diseño. Por ejemplo, una relación $\frac{E_b}{N_0} = 6dB$ y con $P = 8$ la BER del esquema LF es 4.094×10^{-3} , mientras que para TF es 0.1504. Es decir, una diferencia en un factor de 36 aproximadamente .
2. El incremento de la distancia frecuencial disminuye la probabilidad de error. En la relación $\frac{E_b}{N_0} = 6dB$, para la base LF se tiene una diferencia en un factor de 7.509 entre los parámetros $P = 4$ y $P = 8$. Mientras que en la base TF una diferencia de 1.35.

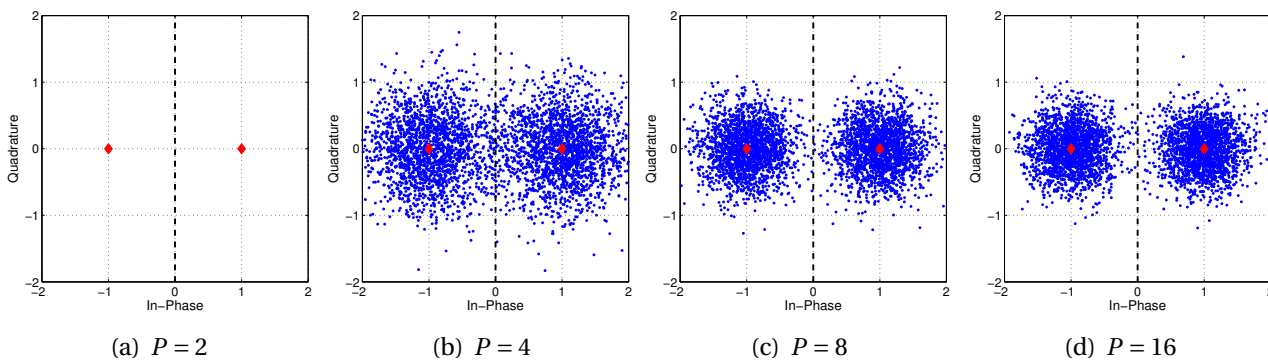


Figura 4.5: Diagramas de constelación QAM. Base: LF , subportadora: $m = 2$, polinomio $k = 2$. Canal AWGN con $\frac{E_b}{N_0} = 7dB$.

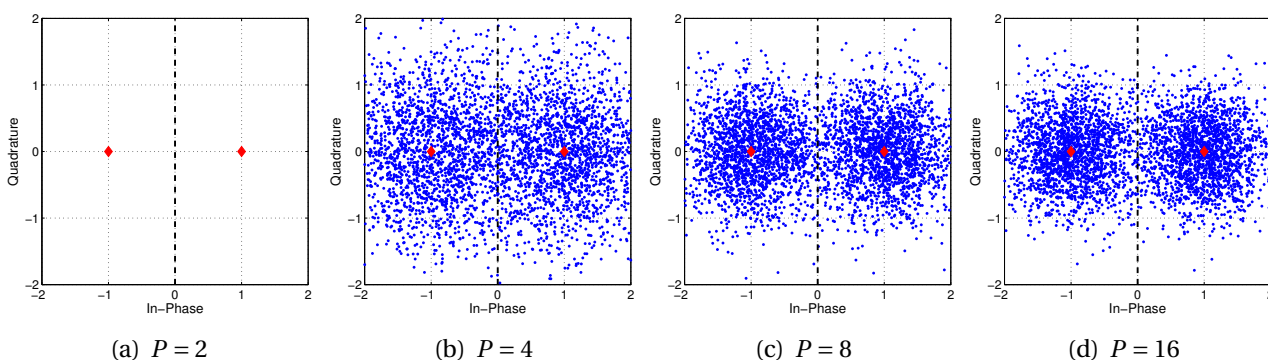


Figura 4.6: Diagramas de constelación QAM. Base: TF , subportadora: $m = 2$, polinomio $k = 2$. Canal AWGN con $\frac{E_b}{N_0} = 7dB$.

3. El desempeño de LF es cercano pero no superior a esquema OFDM cuando la distancia interarmónica incrementa.

El efecto del ruido decrece con el incremento del parámetro P para ambas bases, tal y como observado en la dispersión de las constelaciones QAM, en la fig. 4.5 y 4.6, y la variación de ruido en ambos casos la variación se estabiliza para un valor P grande. Sin embargo, dado que este parámetro define la distancia interarmónica existe un compromiso entre la sensibilidad al ruido blanco y el ancho de banda. Para $P = 2$ para ambas bases, el ruido perturba las estimaciones de las amplitudes simbólicas a tal grado que las desplaza fuera de la ventana de observación. Por esta misma razón, el caso distancia interportadora mínima ($P = 1$) no es considerado. Las observacio-

nes anteriores pueden ser explicadas con los resultado de la sección anterior donde es derivada la varianza máxima del ruido expandido en la base.

4.4. Evaluación de la Relación PAPR

Comúnmente, los amplificadores de alta potencia (HPA's) son utilizados en los sistemas de radio para asegurar una potencia de transmisión adecuada. Sin embargo, para mayor eficiencia de la potencia de salida, los HPA's requieren trabajar cerca de su región de saturación, haciéndolos sensibles a variaciones en la amplitud de la señal [28]. Los picos grandes de amplitud conducen a distorsiones no lineales posterior a la amplificación, produciendo ruido en el ancho de banda de transmisión y en canales adyacentes [27]. Por otra parte, el modulador, normalmente implementado con un procesador digital de señales (DSP), necesita de convertidores digital-analógico (DAC's) de mayor precisión (y costo) conforme mayor sea el rango dinámico requerido [28]. Por lo que es necesario controlar las variaciones bruscas de amplitud del modulador.

El anterior problema es común en los sistemas multiportadora y constituye uno de sus principales detrimentos. Para resolver tal situación, muchos métodos tienen por objetivo la minimizar la relación PAPR (Peak to average Power Ratio), que para señales de duración finita $-1 \leq t \leq 1$ se define como[28]:

$$\text{PAPR} = \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} [|s(t)|^2]}{E[||s(t)||_2^2]}, \quad (4.8)$$

es decir, la razón entre el máximo pico de energía dentro del intervalo simbólico y su energía promedio. Existen muchas técnicas en el contexto de OFDM para disminuir la relación PAPR [28], sin embargo en el presente trabajo se ha limitado a su cálculo analítico sin aplicar dichas técnicas.

En la fig. 4.7 se muestra un ejemplar de la envolvente compleja generada por el esquema LF con de diseño variables del caso de estudio y correspondiente a un vector de amplitudes simbólicas:

$$\mathbf{a} = [1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, 1, -1].$$

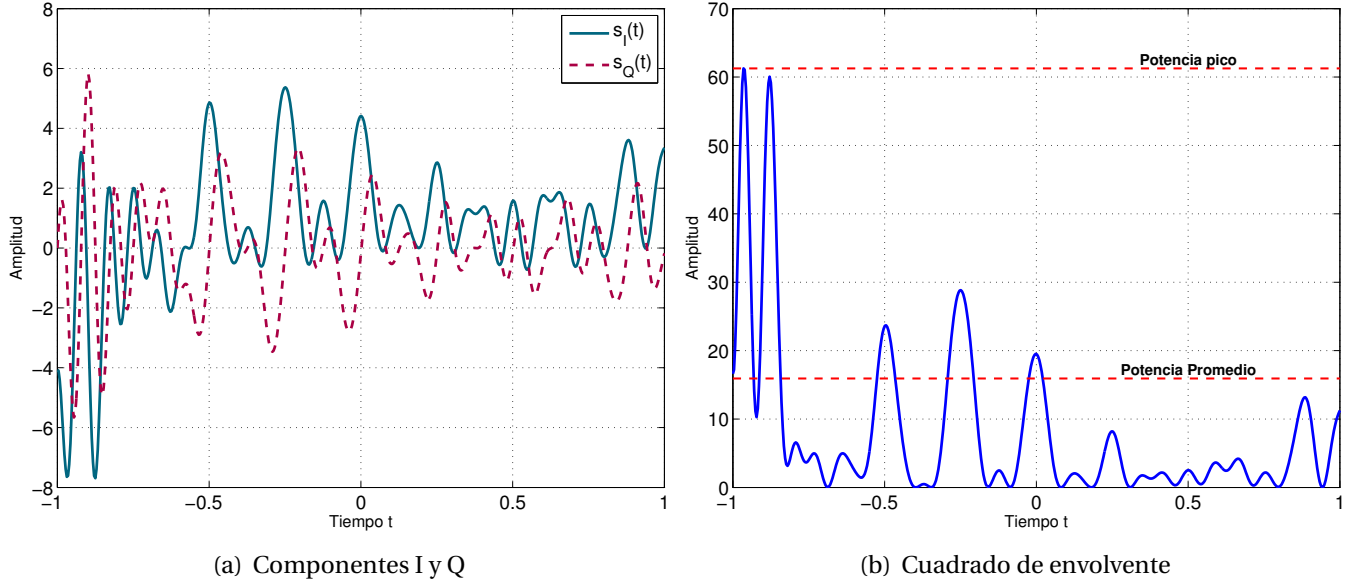


Figura 4.7: Ejemplar del símbolo. Variables de diseño $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$.

Se observa que las componentes en fase $s_I(t)$ y en cuadratura $s_Q(t)$ poseen amplitudes grandes al inicio del intervalo, lo cual es consecuencia de la amplitud de los polinomios Legendre en el instante $t = -1$. De manera similar, la energía instantánea $s^2(t) = s_I^2(t) + s_Q^2(t)$ [26], mostrada en fig. (4.7(b)), presenta picos de energía cerca del inicio del intervalo.

El cálculo analítico del PAPR se realiza utilizando energía simbólica promedio $E[||s(t)||_2^2] = MK$, derivada en la ec. (4.5). Por otro lado, el máximo pico de energía entre todas las realizaciones:

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} [|s(t)|^2] = \max_{\substack{-1 \leq t \leq 1 \\ \alpha_j \in \{-1, 1\}}} \left[\left(\sum_{j=1}^{MK} \alpha_j \phi_j(t) \right)^2 \right],$$

es derivado mediante análisis de la forma de onda temporal de las bases LF o TF. En el caso de BPSK con un número de polinomios K par, existen dos posibles máximos de igual magnitud: a) En $t = 1$ con $\alpha_j = 1$ y b) en $t = -1$ con $\alpha_j = (-1)^{j+1}$. En el primer caso la amplitud de la exponencial es 1 y la del término polinómico es el factor $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_k}}$ y por lo tanto:

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} [|s(t)|^2] = M^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{K-1}}} \right)^2. \quad (4.9)$$

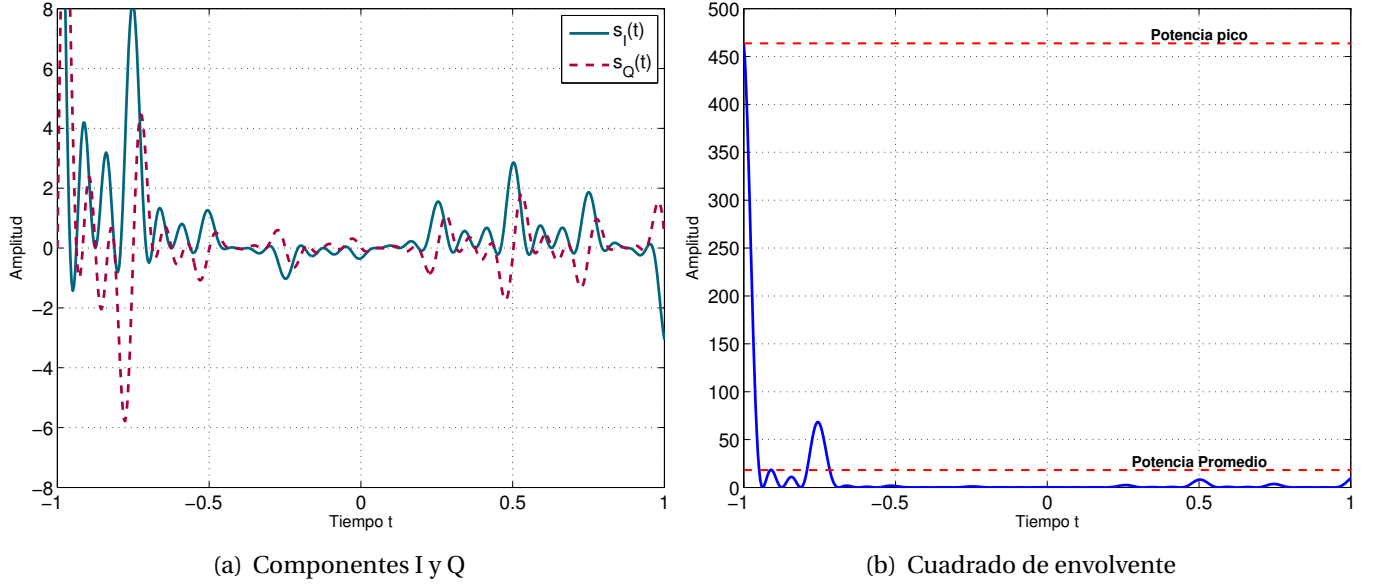


Figura 4.8: Símbolo de máxima PAPR. variables de diseño $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$.

Entonces la PAPR para los esquemas base LF y TF se expresa como:

$$PAPR_{LF} = \frac{M}{K} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{K-1}}} \right)^2 \quad (4.10)$$

Mientras que en un OFDM de M subportadoras se tiene que $PAPR_{OFDM} = M$ [29].

El caso de máxima energía instantánea en $t = -1$, mostrado en la fig. 4.8, tiene un pico de energía de $s^2(t = -1) = 463.7681$ y promedio de $E[|s(t)|_2^2] = 16$ lo cual corresponde a una PAPR de

$$PAPR_{LF} = \frac{4}{4} \left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{7}{2}} \right)^2 = 28.9855 \quad (4.11)$$

o bien 14.62 dB. Por otro lado para un OFDM de 16 subportadoras se $PAPR_{OFDM} = 12$ dB, por lo que los esquemas propuestos tienen una degradación del PAPR por 2.62 dB. Esto quiere decir que un sistema OFDM con igual cantidad de bits por símbolo tendrá una PAPR menor que el esquema LF en un factor 1.8281 aproximadamente.

El incremento del PAPR se debe principalmente a los factores de normalización ε_k de los tér-

minos Taylor y Legendre. La amplitud de ambos términos se encuentra acotada entre -1 y 1 , sin embargo la normalización en energía hace que los términos de alto orden k incrementen su amplitud, resultando en señales de gran amplitud al ser sumadas y como fue visto anteriormente esta suma es crítica en los extremos del intervalo. Posibles soluciones a este problema pueden ser limitar el términos polinómicos o reescalar los términos de mayor amplitud.

4.5. PSD de los esquemas LF y TF

Considerando que la secuencia de bits proporcionados al codificador BPSK es aleatoria, se tiene que la señal generada en cada intervalo simbólico también es aleatoria, por lo que la señal modulada total $s(t)$ $t \in \mathbb{R}$ es un proceso aleatorio expresado como

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{u \in \mathbb{Z}} s_u(t - uT_{sym}) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^N a_i[u] \phi_i(t - uT_{sym}). \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde la función $a_i[u]$ representa la amplitud simbólica para la base i en el intervalo u y la cual es modelada como un proceso aleatorio discreto estacionario. Específicamente $s(t)$ es un proceso aleatorio cicloestacionario con periodo T_{sym} del tipo PAM N -dimensional cuya PSD $R_S(f)$ viene dada por [30]:

$$\begin{aligned} R_S(f) &= \frac{1}{T_{sym}} \begin{pmatrix} \Phi_1(f) & \dots & \Phi_N(f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{a_1, a_1}(T_{sym}f) & \dots & R_{a_1, a_N}(T_{sym}f) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ R_{a_N, a_1}(T_{sym}f) & \dots & R_{a_N, a_N}(T_{sym}f) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^*(f) \\ \vdots \\ \Phi_N^*(f) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{T_{sym}} \mathbf{\Phi}(f) \mathbf{R}(f) \mathbf{\Phi}^H(f) \end{aligned} \quad (4.13)$$

donde $R_{a_i, a_l}(f)$ es la DTFT de $r_{a_i, a_l}[v] = E[a_i[u] a_l^*[u+v]]$ la funciones de correlación cruzada entre las secuencias i, l y $\Phi_i(f)$ la CTFT del elemento base i ¹. La expresión anterior es generalizada pues incluye el efecto de autocorrelación y correlación cruzada entre todos los pares de secuen-

¹El calculo analítico de la PSD realizado en [30] ha sido incluido en la sección apéndices de la tesis

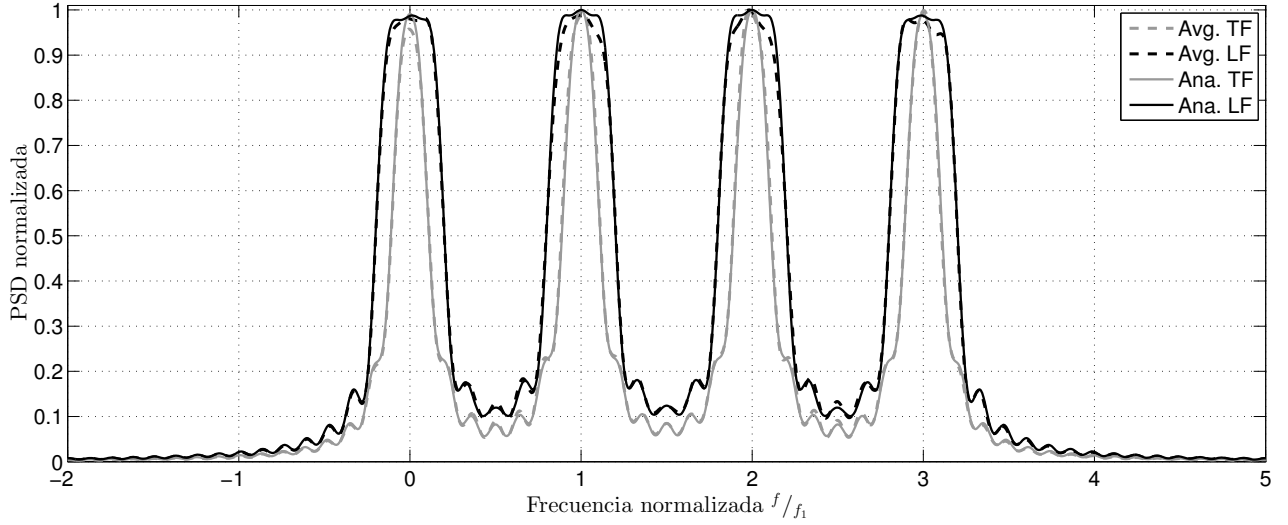


Figura 4.9: PSD normalizada analítica y calculada con 700 realizaciones. Variables de diseño $M = 4$, $K = 4$ y $P = 8$.

cias de amplitudes simbólicas en la matriz de espectros cruzados $\mathbf{R}(f)$.

Simplificaciones a la ec. (4.13) pueden ser realizadas gracias a que los procesos $a_i[u]$ son secuencias de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas y de media nula. Primero, los procesos de las distintas bases son ortogonales i.e. $r_{a_i, a_l}[v] = 0 \quad \forall i \neq l \quad \forall v \in \mathbb{Z}$ y por tanto los elementos fuera de la diagonal de $\mathbf{R}(f)$ son nulos. Y segundo, la secuencia de amplitudes de cualquier base en particular es descorrelacionada con $r_{a_i, a_i}[v] = \delta[v]$, por lo que los elementos en la diagonal son espectros constantes de magnitud unitaria. De esta manera la matriz espectros cruzados se reduce a $\mathbf{R}(f) = \mathbf{I}_N(f)$ y la PSD del proceso, a la suma de la PSD de los elementos de la base

$$R_S(f) = \frac{1}{T_{sym}} \sum_{i=1}^N |\Phi_i(f)|^2. \quad (4.14)$$

En la fig. 4.9 es comparada la PSD de los esquemas LF y TF calculada analíticamente con la ec.(4.14) y la calculada con el promedio de la PSD de 700 realizaciones de $s_\nu(t)$. Como puede ser visto la forma de onda del espectro del caso analítico difiere poco del caso promedio. En TF el contenido espectral está más concentrado sobre las subportadora a comparación del LF, en el cual se tiene lobulos más anchos sobre las subportadoras. Lo anterior se debe a que las PSDs de

los elementos base $|\Phi_i(f)|^2$ en TF tienen formas parecidas a senos cartenales y cuya suma tiene una mayor contribución en el centro de cada subportadora. Por otro lado en LF el par de lóbulos móviles de las PSDs mantienen una contribución distribuida alrededor de las subportadoras. La PSD de los elementos bases TF y LF fue mostrada en la fig. 3.5 y fig 3.6.

4.6. Conclusiones

La base LF necesita de un incremento de la distancia interarmónica $P > 1$ para tener un desempeño equiparable al esquema OFDM en igualdad de condiciones de información binaria transmitida y tasa señal a ruido. El compromiso para asegurar este desempeño es una mayor utilización de ancho espectral, a diferencia de la base Fourier que es ortogonal con sus subportadoras mínimamente distanciadas $P = 1$. Como fue visto en el capítulo anterior, este aumento de la sensibilidad al ruido es consecuencia de la inclusión del término polinómico $K > 1$ en las bases TF y LF.

La inclusión de los polinomios también aumenta la potencia instantánea pico de las señales generadas, particularmente en los extremos del intervalo simbólico, agravando la relación PAPR. De manera general mientras más polinomios son incluidos mayor será el valor PAPR. En el caso BPSK con amplitudes simbólicas descorrelacionadas, la relación PAPR puede ser calculada directamente con la formula proporcionada en ec. (4.10).

Por último, la PSD de los esquemas propuestos depende solo de la suma de las PSDs de las señales base si se asume que las amplitudes simbólicas son independientes e idénticamente distribuidas.

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo futuro

5.1. Conclusiones

En la presente tesis fueron desarrollados un par de esquemas de modulación no-ortogonales construidos con las formas de onda de los modelos LF y TF. Ambos modelos consisten en la extensión del modelo de Fourier, consistente en funciones armónicamente relacionadas, mediante un conjunto de polinomios limitados en tiempo y centrados en cada armónica. La motivación de considerar la no-ortogonalidad fue explorar la posibilidad del incremento de la tasa de binaria con la relajación de la condición de ortogonalidad a independencia lineal. Sin embargo como fue visto a lo largo del presente trabajo, la no-ortogonalidad de ambos modelos conlleva un fuerte compromiso entre la eficiencia espectral y la probabilidad de error.

El efecto de ruido en las estimaciones de la base de expansión varía con los parámetros de diseño (M , K y P). Las distintas combinaciones de parámetros tienen distinta sensibilidad. Sin embargo, en general la inclusión de los polinomios al modelo de Fourier aumenta la sensibilidad al ruido. Entre las combinaciones de mayor sensibilidad se encuentran las del caso de mínima separación frecuencial e inclusión de polinomios ($P = 1$ y $K > 1$). Por lo anterior dicho caso tuvo que ser desechado para la aplicación del sistema de modulación.

Por otra parte, el comportamiento de la sensibilidad al ruido depende del contenido fuera de la diagonal de la matriz gramiana. Tal contenido fue dividido en la contribución de la no-ortogonalidad de los polinomios y de la combinación polinomio-armónica. La sensibilidad al ruido puede ser disminuida mediante: 1) la limitación de la cantidad de polinomios incluidos en cada subportadora y 2) el incremento de la separación interarmónica. Lo cual es la causa del compromiso entre la eficiencia espectral y la probabilidad de error de los esquemas propuestos. Sin embargo, para alcanzar un desempeño comparable al del esquema OFDM es necesaria una gran separación interarmónica.

La energía simbólica de cada señal producida por la base depende de la gramiana, la cual puede ser asociada a la configuración geométrica de los elementos de la base. Sin embargo, su promedio depende solo de la energía individual de cada elemento base y de la correlación cruzada. De manera similar, la PSD promedio depende del espectro de cada elemento y de las autocorrelaciones y las correlaciones cruzadas.

Finalmente, otro compromiso asociado con la inclusión de los polinomios es el incremento de la relación PAPR causado por los picos de amplitud de los polinomios en los extremos de su intervalo temporal. Fue derivado analíticamente su valor en su caso más crítico para los parámetros de diseño del caso de estudio.

5.2. Recomendaciones

- El control del parámetro $P \in \mathbb{Z}^+$ en los modelos de señal LF y TF en el presente trabajo se obtiene manteniendo fija la duración los términos polinómicos y variando la separación interarmónica en un factor P . Sin embargo el mismo valor P puede obtenerse fijando la separación interarmónica y alargando la duración de los términos polinómicos para incluir P oscilaciones de la primera portadora. Es decir un intercambio entre la separación frecuencial por el escalamiento del intervalo temporal de los polinomios.

- La distribución probabilística del vector de ruido $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_{dim}}$, además de brindar información importante sobre la sensibilidad al ruido, también tiene una ventaja algorítmica en la simulación de los esquemas. Un modelo vectorial del canal equivalente al modelo de forma de ondas puede permitir cambiar la suma de las muestras del proceso de ruido blanco con sumas de vectores de ruido generados para corresponder a la distribución derivada por el método de la gramiana.

5.3. Trabajo futuro

- Utilizar métodos de *pulse shaping* para una mejora de la eficiencia espectral, tomando en cuenta que con ello se espera una alteración de la condición de ortogonalidad.
- Probar otros conjuntos de funciones ortogonales en el modelo TF y LF tratando de reducir la no-ortogonalidad de la combinación polinomio-armónica para una menor sensibilidad a ruido.
- Explorar compatibilidades entre los modelos transformados TF y LF con FFT, de manera que las estimaciones FFT puedan ser utilizadas para el cálculo de las estimaciones TF y LF.
- Explorar la posibilidad de usar las estimaciones LF y TF como un método de estimación o ecualización de canal compatible con el algoritmo FFT de OFDM. Quizá incluyendo polinomios solo en las frecuencias que representan tonos pilotos de OFDM.

Bibliografía

- [1] W. Kozek, A. Molisch. "Nonorthogonal pulshapes for multicarrier communications in doubly dispersive channels," *IEEE J. on Selected Areas in Commun.*, Vol. 16 No. 8, pp. 1579-1589, 1998.
- [2] Z. Cvetković, "OFDM with biorthogonal demultiplexing," *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Digital Signal Processing, ICASSP*, Vol. 5, pp. 2517-2520, 2000.
- [3] M. A. Platas-Graza, *Una extensión a la transformada de Fourier, transformada Taylor-Fourier*, tesis doctoral, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, N.L. 2011.
- [4] J. R. Higgins, *Completeness and basis properties of sets of special functions*, Cambridge: Cambridge University Press, 1977.
- [5] S. Orfanidis, *Optimum signal processing, 2nd edition*, New York: McGraw-Hill, 2007.
- [6] M. J. Bastiaans, "Gabor's expansions of a signal into gaussian elementary signals" *Proceedings of the IEEE*, Vol. 68, pp. 538-539, 1980.
- [7] T. Ebrahimi, *et al.*, "Video coding using a pyramidal Gabor expansion" *SPIE Visual Communications and Image Processing, Proceedings*, Vol. 1360, pp. 489-505, 1990.
- [8] J. A. de la O Serna, "Dynamic phasor estimates for power system oscillations," *IEEE Trans. on Instrum. and Meas.*, Vol. 56 No. 5, pp. 1648-1657, 2007.
- [9] M. Vetterli, *et al.*, *Foundations of signal processing*, Cambridge: Cambridge University Press, 2014.

- [10] J. M. Wozencraft, I. M. Jacobs *Principles of communication engineering* 1st ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1965
- [11] L. E. Franks, *Signal theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1969, reimpression, Stroudsburg, PA: Dowden & Culver, Inc., 1981.
- [12] L. L. Scharf, *Statistical signal processing, detection estimation and time series analysis*. Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1991
- [13] K. E. Atkinson, *An introduction to numerical analysis, 2nd edition*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1989.
- [14] E. Isaacson, H. B. Keller, *Analysis of numerical methods*. New York: Dover Publications Inc., 1994.
- [15] U. Madhow, *Fundamentals of digital communication*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- [16] C. Qian, *et al.* "Synchrophasor estimation algorithm using Legendre polynomials," *IEEE Power & Energy Society General Meeting, PES*, pp. 1-5, 2014.
- [17] J. G. Proakis, M. Salehi, *Digital communications, 5th edition*. New York: McGraw-Hill, 2007.
- [18] M. J. Roberts, *Signals and systems: Analysis using transform methods and MATLAB, 2nd edition*. New York, McGraw-Hill, 2012.
- [19] L. Hogben, *Handbook of linear algebra*. Florida: Chapman & Hall/CRC, 2013.
- [20] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix analysis*. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [21] S. M. Kay *"Fundamentals of statistical signal processing, Vol I: Estimation theory"*. New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- [22] R. W. Chang, "Synthesis of band-limited orthogonal signals for multichannel data transmission," *Bell Systems Technical Journal*, vol. 45, no. 10, pp. 1775-1796, 1966.

- [23] N. Benvenuto, G. Cherubini, *Algorithms for communications systems and their applications*. West Sussex: John Wiley & Sons Inc., 2002.
- [24] S. B. Weinstein, P. M. Ebert, "Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete fourier transform," *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. COM-19, no. 5, pp. 628-634, 1971
- [25] M. K. Gupta, S. Tiwari, "Performance evaluation of conventional and wavelet based OFDM system", *International Journal of Electronics and Communications, (AEÜ)*, Vol. 67 pp. 348-354, 2013.
- [26] S. Thompson, *et al.* "Constant envelope binary OFDM phase modulation," *IEEE Military Communications Conference, MILCOM*, vol. 1, no. 1, pp. 2-7, 2003.
- [27] C. P. Liang, *et all*, "Nonlinear amplifier effects in communications systems," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 8, pp. 1461-1466, 1999.
- [28] T. Jiang, Y. Wu, "An overview: peak-to-average power ratio reduction techniques for OFDM signals" *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 54, no. 2, pp. 257-268, 2008.
- [29] Nutaq, "Understanding papr in ofdm systems," <http://www.nutaq.com/blog/understanding-papr-ofdm-systems>.
- [30] M. Oloffson, "Power spectral density of digital modulation schemes," <http://www.commsys.isy.liu.se/TSKS01/lectures/6/F6-HT09.pdf>.
- [31] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis, 2nd edition*. Barcelona: Reverté, 1976.

Apéndice A

Términos de Taylor y Polinomios de Legendre

A.1. Términos de Taylor

Los términos de Taylor son un conjunto de funciones de la forma t^k con $0 \leq k \leq K-1$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Su norma o energía esta dada por

$$\varepsilon_k = \int_{-1}^1 t^k t^k dt = \frac{1}{2k+1} [1 + (-1)^{2k}] = \frac{2}{2k+1} \quad (\text{A.1})$$

por lo que una versión normalizada en energía de los mismos puede ser obtenida dividiendo cada término con la raíz de su energía $\frac{t^k}{\sqrt{\varepsilon_k}}$. El producto punto entre un par de sus elementos viene dado por:

$$\langle t^{k_1}, t^{k_2} \rangle = \int_{-1}^1 t^{k_1} t^{k_2} dt = \frac{1}{k_1 + k_2 + 1} [1 + (-1)^{k_1 + k_2}] \quad (\text{A.2})$$

La ec.A.2 es positiva y diferente de 0 cuando la suma $k_1 + k_2$ es impar y no solo para los índices $k_1 = k_1$, por lo que el conjunto es no de términos de Taylor es no ortogonal.

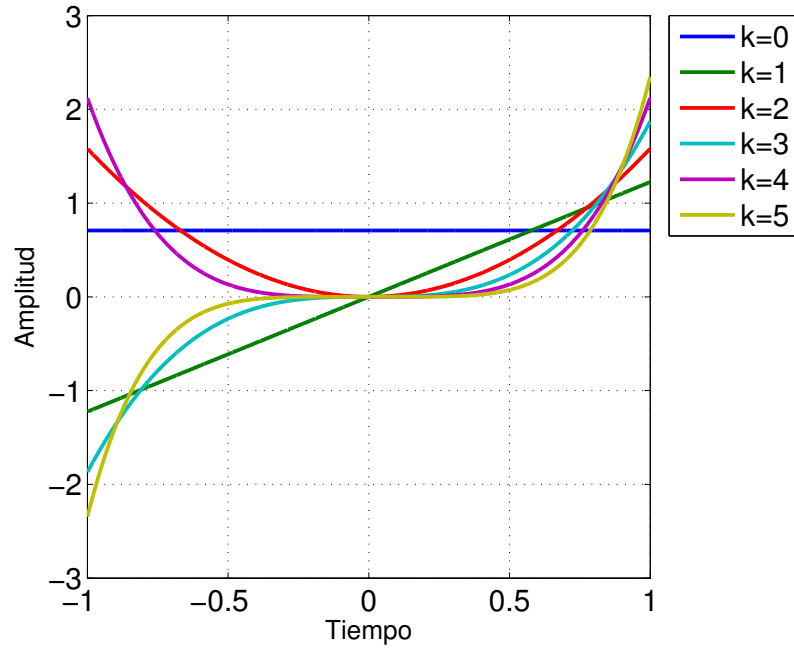


Figura A.1: 6 Términos de Taylor normalizados en energía

A.2. Polinomios de Legendre

Los *Polinomios de Legendre* $l_k(t)$ conforman un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $t \in [-1, 1]$, y son resultado del proceso de ortogonalización Gramm Schimdt sobre los términos de Taylor.

$$l_0(t) = 1$$

$$l_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

$$l_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3)$$

$$\vdots$$

$$l_1(t) = t$$

$$l_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t)$$

$$l_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t)$$

$$\vdots$$

La energía del k -ésimo polinomio de Legendre al igual que los términos Taylor como $\varepsilon_k = \frac{2}{2k+1}$.

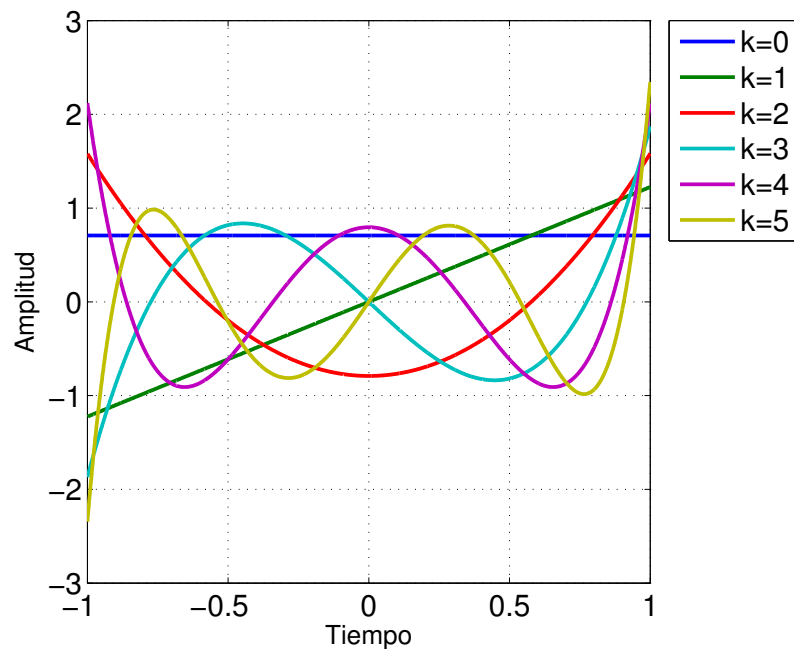


Figura A.2: 6 Polinomios de Legendre normalizados en energía

Cálculo de los Polinomios de Legendre

Los polinomios de Legendre pueden ser obtenidos mediante la combinación lineal de los términos Taylor y de manera equivalente por medio de una operación de multiplicación matricial. Denotando la base de los términos de Taylor $T(t) = [1 \ t \ t^2 \ \dots \ t^{K-1}]$ y la base de los polinomios de Legendre $L(t) = [l_0(t) \ l_1(t) \ l_2(t) \ \dots \ l_{K-1}(t)]$ entonces

$$L(t) = T(t)\mathbf{P}_{T \rightarrow L}, \quad (\text{A.3})$$

donde $\mathbf{P}_{T \rightarrow L}$ es la matriz de base de la base Legendre con respecto a la base Taylor. Sea \mathbf{p}_k la k -ésima columna de la matriz $\mathbf{P}_{T \rightarrow L}$, de esta manera

$$\mathbf{P}_{T \rightarrow L} = [\mathbf{p}_0 \ \mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_{K-1}]. \quad (\text{A.4})$$

Dado que el primer par de términos Taylor y Legendre coincide, i.e. $l_0(t) = 1$, $l_1(t) = t$, así que las primeras columnas de la matriz son $\mathbf{p}_0^T = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$ y $\mathbf{p}_1^T = [0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]$ y de la fórmula

recursiva [31]

$$l_{k+1}(t) = \frac{1}{k+1} ((2k+1)l_k(t)t - kl_{k-1}(t)), \quad (\text{A.5})$$

las siguientes columnas pueden ser construidas como

$$\mathbf{p}_{k+1} = \frac{1}{k+1} \left((2k+1) \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{p}_k \end{bmatrix} - k\mathbf{p}_{k-1} \right) \quad (\text{A.6})$$

de esta manera para el calculo del K polinomios Legendre es necesario K términos de Taylor y la multiplicación con la matriz de cambio de base. Debe notarse que se uso multiplicación matricial por la derecha para la compatibilidad con la posterior discretización de las bases en las cuales sus muestras seran organizadas en en columnas. La normalización puede realizarse mediante la multiplicación de una matriz diagonal cuyos elementos corresponden con los factores de normalizacion de cada polinomio $\mathbf{D} = \text{diag}(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}})$.

$$L_{norm}(t) = L(t)\mathbf{D} \quad (\text{A.7})$$

A continuación se muestran los valores para la matriz de cambio de base para el cálculo de 5 polinomio de Legendre.

$$\begin{bmatrix} l_0(t) & l_1(t) & l_2(t) & l_3(t) & l_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 & t^4 & t^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Dado que para el cálculo del término de Legendre $L_{k_1}(t)$ es necesario una combinación lineal de los términos Taylor de orden $0 \leq k \leq k_1$, la matriz $\mathbf{P}_{T \rightarrow L}$ es triangular superior y es invertible dado que los elementos de la diagonal son distintos de cero. La inversa $\mathbf{P}_{L \rightarrow T} = (\mathbf{P}_{T \rightarrow L})^{-1}$ define la matriz de la base Taylor con respecto a la base Legendre.

Appendix A

Power Spectral Density of Digital Modulation Schemes

Mikael Olofsson — 2008 & 2009

We would like to determine the power spectral density of digital modulation. We are interested both in a general expression of the PSD and in explicit expressions for the standard signal constellations that we have considered. To determine an expression of the PSD of digital modulation, we need to consider not just one signal interval as we have done so far. Instead we consider the input to be an infinite sequence $A[n]$ of symbols. For the explicit expressions for standard signal constellations, we will for simplicity assume that those symbols are independent and identically distributed (i.i.d.).

A.1 Multi-Dimensional Pulse-Amplitude Modulation

Consider a wide sense stationary information process which is an infinite sequence $A[n]$ of symbols from the symbol alphabet used. We will refer to this process as the information process. This sequence is first mapped onto an infinite sequence $\bar{S}[n]$ of N -dimensional signal vectors. Each dimension in this vector sequence is a real valued time-discrete stochastic process $S_i[n]$ of its own, which we will refer to as a component process. Since the information process is wide sense stationary, then the component processes are jointly stationary in the wide sense. These vectors are then modulated using the N basis functions. For the n -th vector in that sequence, we use the time-shifted (real-valued) basis functions $\{\phi_i(t - nT - \Psi)\}_{i=1}^N$. Here Ψ is a random delay, independent of $A[n]$ for all n , and uniformly distributed over the signalling interval $[0, T)$. This random delay is as usual intended to maintain the wide sense stationarity. The resulting signal is then

$$S(t) = \sum_n \sum_{i=1}^N S_i[n] \phi_i(t - nT - \Psi)$$

i.e. the component processes $S_i[n]$ are pulse-amplitude modulated using their basis functions as pulse shapes and added. Note that we are using the same Ψ in all dimensions to maintain orthogonality among the basis functions.

A.1.1 General expression

We can write the ACF of the resulting signal $S(t)$ as

$$\begin{aligned} r_S(\tau) &= \mathbb{E}\{S(t)S(t+\tau)\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\sum_n \sum_{i=1}^N S_i[n]\phi_i(t-nT-\Psi) \sum_m \sum_{l=1}^N S_l[m]\phi_l(t+\tau-mT-\Psi)\right\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\sum_n \sum_m \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N S_i[n]S_l[m]\phi_i(t-nT-\Psi)\phi_l(t+\tau-mT-\Psi)\right\}. \end{aligned}$$

We use the linearity of the expectation to rewrite that as

$$r_S(\tau) = \sum_n \sum_m \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbb{E}\{S_i[n]S_l[m]\phi_i(t-nT-\Psi)\phi_l(t+\tau-mT-\Psi)\}.$$

From the assumption that the random delay Ψ and the symbol sequence $M[n]$ are independent we find that also the signals $S_i[n]$ are independent of the delay. Then we get

$$r_S(\tau) = \sum_n \sum_m \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \mathbb{E}\{S_i[n]S_l[m]\} \mathbb{E}\{\phi_i(t-nT-\Psi)\phi_l(t+\tau-mT-\Psi)\}$$

We identify the first expectation as the cross correlation of two component processes. Recall that the component processes are jointly stationary in the wide sense. Thus, this cross correlation is a function of $n-m$. The second expectation is the expectation of a function of Ψ . Since Ψ is uniformly distributed over $[0, T)$, its probability density is $1/T$ in that interval, and zero elsewhere. These observations give us

$$r_S(\tau) = \sum_n \sum_m \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N r_{S_i, S_l}[n-m] \int_0^T \phi_i(t-nT-\psi)\phi_l(t+\tau-mT-\psi) \frac{1}{T} d\psi$$

We introduce the new variables $k = n-m$ and $u = t-nT-\psi$. Then we get

$$\begin{aligned} r_S(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_k \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N r_{S_i, S_l}[k] \sum_n \int_{t-nT-T}^{t-nT} \phi_i(u)\phi_l(u+\tau+kT) du \\ &= \frac{1}{T} \sum_k \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N r_{S_i, S_l}[k] \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(u)\phi_l(u+\tau+kT) du \end{aligned}$$

Next, the power spectral density of $S(t)$ is the Fourier transform of $r_S(\tau)$. We get

$$R_S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \sum_k \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N r_{S_i, S_l}[k] \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(u) \phi_l(u + \tau + kT) du e^{-j2\pi\tau f} d\tau.$$

Now, in the inner integral, let $v = u + \tau + kT$. Then we have

$$\begin{aligned} R_S(f) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N r_{S_i, S_l}[k] \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(u) \phi_l(v) e^{-j2\pi(v-u-kT)f} du dv \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_k r_{S_i, S_l}[k] e^{j2\pi kfT} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_i(u) e^{j2\pi uf} du \int_{-\infty}^{\infty} \phi_l(v) e^{-j2\pi vf} dv. \end{aligned}$$

We identify the two integrals in the last expressions as Fourier transforms of $\phi_i(-t)$ and $\phi_l(t)$, and the innermost sum as the Fourier transform of $r_{S_i, S_l}[-k]$. I.e. we have

$$R_S(f) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N R_{S_i, S_l}^*[fT] \Phi_i^*(f) \Phi_l(f) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^N R_{S_l, S_i}[fT] \Phi_i^*(f) \Phi_l(f),$$

where we have used the relation $r_{S_i, S_l}[-k] = r_{S_l, S_i}[k]$, which in the spectral domain corresponds to $R_{S_i, S_l}^*[\theta] = R_{S_l, S_i}[\theta]$. Totally, we can express this formula as the quadratic form

$$R_S(f) = \frac{1}{T} \left(\Phi_1^*(f), \dots, \Phi_N^*(f) \right) \begin{pmatrix} R_{S_1, S_1}[fT] & \cdots & R_{S_N, S_1}[fT] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{S_1, S_N}[fT] & \cdots & R_{S_N, S_N}[fT] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1(f) \\ \vdots \\ \Phi_N(f) \end{pmatrix}$$

This expression does not hold only for digital modulation. It is a general expression for simultaneous pulse-amplitude modulation of several stochastic processes using possibly different pulse shapes for each process. We note that the orthonormal property of the basis functions is not at all used above.

We can notice that since the resulting power-spectral density has to be real, then all imaginary parts of the terms $R_{S_l, S_i}[fT] \Phi_i^*(f) \Phi_l(f)$ have to cancel out. Actually, they cancel out in pairs, which can be realized by observing that

$$\Phi_i^*(f) \Phi_l(f) = \left(\Phi_l^*(f) \Phi_i(f) \right)^*$$

holds. As we have noted, we have $R_{S_i, S_l}[\theta] = R_{S_l, S_i}^*[\theta]$. Therefore, the imaginary part of the mixed term $R_{S_l, S_i}[fT] \Phi_i^*(f) \Phi_l(f)$ cancels out the imaginary part of $R_{S_i, S_l}[fT] \Phi_l^*(f) \Phi_i(f)$. This observation will have implications further on.