

# Subsídios para uma teoria estatística do problema da classificação

por

JOÃO TIAGO PRAÇA NUNES MEXIA

Engenheiro Silvicultor

## 1. *Introdução*

As contribuições da estatística referentes ao problema da classificação têm sido limitadas à separação dos indivíduos duma população, em grupos previamente definidos, por meio de critérios estatísticos ou à separação de grupos mais homogêneos a partir de uma dada população. No que se segue vamos procurar estudar o ajustamento duma classificação a uma população classificada de acordo com ela. Limitar-nos-emos ao caso em que os elementos da população são definíveis a partir dum número finito de propriedades numéricas pois este é o caso a que a teoria actual da estatística é mais facilmente aplicável, e nos parece de momento de maior interesse para um primeiro estudo.

Quando se classificam os indivíduos duma população em  $M$  grupos procede-se dessa forma por se reconhecer que existem nessa população  $M$  grupos naturais. No caso em que nos encontrarmos esses grupos naturais caracterizar-se-ão por uma certa «agregação» dos valores das propriedades dos indivíduos do grupo. Observe-se que dado um grupo em que os indivíduos são definíveis a partir do valor de duas características os valores duma característica podem apresentar uma maior agregação que os valores da segunda característica.

Portanto, começaremos por definir agregação dos valores duma característica num grupo e só depois é que definiremos agregação dos valores de  $N$  características.

Em geral dado um grupo natural, no sentido atrás indicado, existem  $N$  propriedades numéricas, funcionalmente independentes, tais que o sabermos se estão definidas ou não para um dado individuo conjuntamente com o seu valor, no caso de estarem definidas, nos permite concluir se o individuo pertence ou não ao grupo. A um conjunto de propriedades nestas condições dá-se o nome de conjunto definidor.

Para um mesmo grupo pode haver mais dum conjunto definidor. Observe-se que é a ciência que estuda os elementos do grupo natural que indica quais são os conjuntos definidores.

Num dado momento para um dado grupo natural há um número finito de conjuntos definidores. Tomaremos o maior valor da agregação dum grupo em relação aos conjuntos definidores como medida da agregação do grupo. Estamos agora em condições de procurar obter uma medida da agregação duma população classificada para o que teremos de entrar em linha de conta não só com a agregação dos grupos da última ordem, em que a classificação dividiu a população, mas também com a sua importância relativa. Uma medida conveniente desta última é a probabilidade dum individuo tirado ao acaso da população pertencer a cada um dos grupos de última ordem em que esta se encontra dividida.

Se medirmos a complexidade duma população classificada pelo número de grupos de última ordem em que a classificação dividiu a população podemos então estudar o ajustamento da classificação à população.

A uma classificação corresponde uma estrutura simples se apenas considera grupos duma única ordem, múltipla se considera grupos de várias ordens.

Neste último caso a estrutura da população classificada corresponde a uma hierarquia entre grupos de diferentes ordens.

Consideremos uma população classificada de acordo uma classificação de estrutura múltipla. Os individuos dessa população encontrar-se-ão agrupados nos grupos de diferentes ordens considerados na classificação.

Interessa-nos saber se se justifica a existência, na população, desses grupos individualizados e se os grupos de uma dada ordem se encontram correctamente agrupados nos da ordem acima.

Temos em seguida os problemas: 1 — de saber se se deve classi-

ficar uma população de acordo com um dado critério; 2 — de dada uma população classificada saber se devemos ou não dividir os seus grupos da última ordem segundo critérios especificados; 3 — de qual de  $N$  classificações mais se ajusta, *a*) a uma mesma população, *b*) ou mais geralmente a  $n$  populações diferentes. É fácil de ver que estes últimos problemas consistem em comparar soluções dadas a problemas de classificação.

## 2. Propriedades da distância média

No que se segue teremos de utilizar a distância média de Gini pelo que começaremos por uma discussão das propriedades deste estatístico. —

Seja  $V$  o espaço das funções de distribuição simples.

Vamos começar por procurar encontrar uma fórmula que nos dê o valor da distância média para os elementos de  $\bar{V}$ .

A distância média  $D [F]$  para a função de distribuição  $F (X)$  define-se por:

$$(1) \quad D [F] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_1 - X_2| dF (X_1) dF (X_2) \geq 0.$$

Observemos que podemos dar sempre um valor ao integral que figura no segundo membro de (1), com efeito trata-se de um integral R-S duma função não negativa em ordem a uma medida positiva pelo que ou tem valor finito ou valor  $+\infty$ .

Seja:

$$F (X) = \sum_{i=1}^n p_i H_{a_i} (X) \text{ com } \sum_{i=1}^n p_i = 1,$$

onde

$$H_{a_i} (x) \text{ é tal que } \begin{cases} x < a_i \rightarrow H_{a_i} (x) = 0 \\ x > a_i \rightarrow H_{a_i} (x) = 1 \end{cases}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} D [F] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_1 - X_2| d \left( \sum_{i=1}^n p_i H_{n,i} (X_1) \right) d \left( \sum_{j=1}^n p_j H_{n,j} (X_2) \right) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^n |a_i - X_2| p_i d \left( \sum_{j=1}^n p_j H_{n,j} (X_2) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| p_i p_j, \\ \therefore (2) \quad F (X) = \sum_{i=1}^n p_i H_{n,i} (X) \quad \longrightarrow \quad D [F] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_i - a_j| p_i p_j. \end{aligned}$$

*Teorema 1:*

$$(3) \quad \dots \quad D [F] = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F (X) (1 - F (X)) dX.$$

D: Seja  $F (X)$  uma função não decrescente no intervalo  $[a, b]$  e tal que a sua variação total nesse intervalo é  $C$ .

Ponhamos:

$$\begin{cases} V = \int_a^b x dF (x), \\ G (x) = \int_a^x F (x_1) dx_1. \end{cases}$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b |x_1 - x_2| dF (x_1) dF (x_2) &= \int_a^b \left( \int_a^{x_2} (x_2 - x_1) dF (x_1) + \right. \\ &+ \left. \int_{x_2}^b (x_1 - x_2) dF (x_1) \right) dF (x_2) = \int_a^b \left[ \left( x_2 F (x_2) - x_2 F (a) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \int_a^{x_2} x_1 dF (x_1) + \right. \\ &+ \left. \int_{x_2}^b x_1 dF (x_1) - x_2 (C - F (x_2) + F (a)) \right] dF (x_2) = \\ &= \int_a^b \left( 2 x_2 F (x_2) - 2 x_2 F (a) + \right. \\ &+ \left. \int_a^{x_2} x_1 dF (x_1) - 2 \int_a^{x_2} x_1 dF (x_1) - C x_2 \right) dF (x_2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -C \int_a^b x_2 dF(x_2) + \int_a^b V dF(x_2) + \\
&+ 2 \int_a^b \left( x_2 F(x_2) - x_2 F(a) - \int_a^{x_2} x_1 dF(x_1) \right) dF(x_2) = \\
&= 2 \int_a^b \left( x_2 F(x_2) - x_2 F(a) - x_2 F(x_2) + x_2 F(a) + G(x_2) \right) dF(x_2) = \\
&= 2 \int_a^b G(x) dF(x) = 2 \left[ G(x) F(x) \right]_a^b - 2 \int_a^b F^2(x) dx = 2 G(b) - \\
&- 2 \int_a^b F^2(x) dx = 2 \int_a^b F(x) dx - 2 \int_a^b F^2(x) dx = \\
&= 2 \int_a^b F(x) (1 - F(x)) dx, \\
\therefore D[F] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1 - x_2| dF(x_1) dF(x_2) = \lim_{\substack{a_n \rightarrow -\infty \\ b_n \rightarrow +\infty}} \int_{a_n}^{b_n} \\
\int_{a_n}^{b_n} |x_1 - x_2| dF(x_1) dF(x_2) &= \lim_{\substack{a_n \rightarrow -\infty \\ b_n \rightarrow +\infty}} \int_{a_n}^{b_n} 2F(x) (1 - F(x)) dx = \\
&= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) (1 - F(x)) dx \quad \text{q. e. d.}
\end{aligned}$$

Este teorema tem duas consequências importantes.

Analisemos a primeira:

Seja  $V_{[a, b]}$  o conjunto das funções de distribuição de suporte contido em  $[a, b]$ .

Como se tem  $F(X) (1 - F(X)) \leq \frac{1}{4}$  tem-se:

$$(4) \quad F(X) \in V_{[a, b]} \longrightarrow D[F] \leq \frac{b-a}{2}$$

ora devido a (2) tem-se:

$$(5) \quad D \left[ \frac{H_a(X) + H_b(X)}{2} \right] = \frac{b-a}{2},$$

pelo que:

$$(6) \quad F(X) \in V_{[a, b]} \longrightarrow D[F] \leq D \left[ \frac{H_n(X) + H_b(X)}{2} \right]$$

Analiseemos agora a segunda consequência de (3)

$$(7) \quad F(X) \in V_{[a, b]} \longrightarrow D[F] = 2 \int_a^b F(X) (1 - F(X)) dX,$$

como o integral de Riemann é contínuo para a convergência compacta, (a convergência compacta é a convergência uniforme nos conjuntos compactos), vê-se que o mesmo se passa com  $D[F]$ .

Consideremos uma sucessão  $\{F_n(x)\}$  de elementos de  $V_{[a, b]}$  que converge uniformemente para a função de distribuição  $F(x)$ . Vê-se que:  $(x > b \longrightarrow F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 1) \cap (x < a \longrightarrow F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0)$ ,

$$(8) \quad F(x) \in V_{[a, b]}$$

$$(9) \quad [n \rightarrow F_n(X) \in V_{[a, b]} \cap F_n(X) \xrightarrow{u} F(X)] \rightarrow D[F_n] \rightarrow D[F].$$

Vamos agora apresentar um contra-exemplo para mostrar que  $D[F]$  não é um funcional contínuo para a topologia da convergência uniforme.

Seja  $V$  o espaço das funções de distribuição e  $\{F_n(X)\}$  uma sucessão de elementos de  $V$  definidos por:

$$F_n(X) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) H_0(X) + \frac{1}{\sqrt{n}} H_n(X),$$

tem-se devido a (2):

$$D[F_n] = 2(\sqrt{n} - 1),$$

$$e \quad |F_n(X) - H_0(X)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\dots \quad D[F_n] \rightarrow +\infty \cap F_n(X) \xrightarrow{u} H_0(X).$$

Logo  $D[F]$  não é um funcional contínuo em  $V$  para a topologia da convergência uniforme.

Vamos agora ver como se comporta o funcional  $D[F]$  em relação às translações e às homotetias.

Seja:

$$F_1(X) = F(X-d),$$

$$D[F_1] = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(X) (1 - F_1(X)) dX = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(X + d) (1 - F_1(X + d)) dX = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F(X) (1 - F(X)) dX = D[F],$$

$$\dots (10) \quad F_1(X) = F(X - d) \longrightarrow D[F_1] = D[F].$$

Seja:

$$F_1(X) = F\left(\frac{X}{K}\right),$$

$$\begin{aligned} D[F_1] &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(X) (1 - F_1(X)) dX = \\ &= 2K \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(KX) (1 - F_1(KX)) dX = \\ &= 2K \int_{-\infty}^{+\infty} F(X) (1 - F(X)) dX = KD[F], \end{aligned}$$

$$\dots (11) \quad F_1(X) = F\left(\frac{X}{K}\right) \longrightarrow D[F_1] = KD[F].$$

Vamos agora introduzir a noção de tipo de função de distribuição.

Duas funções de distribuição  $F_1(X)$  e  $F_2(X)$  dizem-se do mesmo tipo se e só se for  $F_1(KX + d) = F_2(X)$ .

Combinando (10) e (11) obtém-se:

$$(12) \quad F_1(KX) = F_2(X + d) \longrightarrow D[F_1] = KD[F_2].$$

*Teorema 2:*

Condição necessária e suficiente para que se tenha:

$$(13) \quad D[F] < +\infty,$$

é que  $F(X)$  tenha valor médio finito, isto é o integral L. S. :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) \text{ exista e seja finito.}$$

D: começaremos por provar a condição suficiente.

Se existe:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} X dF(X) \text{ tal que } |\mu| < +\infty,$$

tem-se necessariamente; devido à propriedade do integral L. S. que diz que uma função tem integral L. S. em relação a outra se e só se o seu módulo o tiver:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} |X| dF(X) < +\infty.$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_1 - X_2| dF(X_1) dF(X_2) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (|X_1| + \\ &+ |X_2|) dF_1(X_1) dF(X_2) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |X| dF(X), \end{aligned}$$

$$\therefore D[F] \leq 2A < +\infty.$$

Provemos agora a condição necessária.

Seja:

$$\psi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X - a| dF(X),$$

tem-se:

$$D[F] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |X_1 - X_2| dF(X_1) dF(X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(a) dF(a).$$

Ora se  $D[F]$  for finito  $\psi(a)$  é «quase por toda a parte» finita, tal como vem provado em Loève [4].



Por «quase toda a parte» traduzimos o «almost everywhere» dos autores de língua inglesa e o «presque partout» dos autores franceses.

Seja «a» um ponto tal que  $\psi(a)$  seja finita. Tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} |X| dF(X) = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} |X - a + a| dF(X) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (|X - a| + |a|) dF(X) = \\ & = \psi(a) + |a| < +\infty. \end{aligned}$$

Logo, como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X| dF(X) < +\infty$$

tem-se:

$$|\mu| < +\infty. \quad \text{q. e. d.}$$

Seja:

$$\mu[F] = \int_{-\infty}^{+\infty} X dF(X),$$

então se:

$$F_1(X) = F\left(\frac{X-d}{K}\right),$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \mu[F_1] &= \int_{-\infty}^{+\infty} X dF(X) = K \int_{-\infty}^{+\infty} X dF_1(KX) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(X + \frac{d}{K}\right) dF_1\left[K\left(X + \frac{d}{K}\right)\right] = \\ &= K \int_{-\infty}^{+\infty} X dF_1(KX + d) + d \int_{-\infty}^{+\infty} dF_1(KX + d) = \\ &= K \int_{-\infty}^{+\infty} X dF(X) + d = K \mu[F] + d, \end{aligned}$$

$$\therefore (14) \quad F_1(X) = F\left(\frac{X-d}{K}\right) \longrightarrow \mu[F_1] = K \mu[F] + d.$$

Logo se uma função dum tipo não tiver valor médio finito nenhuma outra função do tipo terá valor médio finito. Representaremos por  $T_{00}$  os tipos de funções de distribuição constituídos por funções de distribuição que não têm valor médio finito.

Temos portanto:

$$(15) \quad D[F] = +\infty \quad \dots \quad F(X) \in T_{00}.$$

É fácil ver que o conjunto das funções de Heaviside constitui um tipo. Representá-lo-emos por  $T_0$ .

*Teorema 3:*

Condição necessária e suficiente para que  $D[F] = 0$  é que:

$$F(X) \in T_0,$$

isto é:

$$(16) \quad D[F] = 0 \quad \dots \quad F \in T_0.$$

D: a condição suficiente resulta imediatamente de (2).

Provemos agora a condição necessária.

Seja:

$$F(X) \text{ tal que } D[F] = 0,$$

ora:

$$D[F] = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (F(X) (1 - F(X))) dX,$$

portanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(X) (1 - F(X))) dX = 0.$$

Mas como o integral dum função não negativa só se anula se esta função for não nula apenas num conjunto de medida nula, vê-se que o interior da envolvente convexa do suporte  $F(X)$  tem medida nula.

Ora, as únicas funções de distribuições para as quais isto se verifica são os elementos de  $T$ .

q. e. d.

### 3. Funções associadas a populações finitas

Definamos como função associada a um grupo para uma dada característica e uma dada escala a função de distribuição dos valores dessa característica no grupo quando medidos nessa escala. Neste momento estamos interessados em caracterizar o espaço  $V^*$  formado pelos elementos de  $V$  - espaço das funções de distribuição — que podem ser funções associadas a um grupo finito para uma característica medida numa escala.

#### Teorema 4

Para que  $F(X) \in V$  seja elemento de  $V^*$  é necessário e suficiente que  $F(X)$  seja uma função simples e de saltos racionais:

D: Começemos por provar a condição suficiente:

Seja:

$$F(X) = \sum_{i=1}^n p_i H_{(a_i)}(X),$$

com:

$$p_i = \frac{a_i}{b_i}$$

onde:

$$i = 1 \dots N \longrightarrow a_i, b_i \in \mathbb{N}^+.$$

Consideremos um grupo  $G$  com  $B$  elementos tal que para uma dada característica  $m_i = B p_i$  elementos têm o valor « $a_i$ »  $F(X)$  é a função associada a esse grupo para essa característica.

Passemos agora à condição necessária:

Seja  $G$  um grupo com  $N$  elementos. Para uma característica definida para todos os elementos do grupo, há  $M \leq N$  valores distintos,

os quais têm probabilidades racionais. Pelo que a função associada ao grupo para essa característica será necessariamente simples e de saltos racionais

q. e. d.

*Teorema 5*

$V^*$  é denso para a topologia da convergência uniforme, em  $V$ .

D: Como  $\bar{V}$  é denso em  $V$ , para essa topologia, basta provar que para a mesma topologia  $V^*$  é denso em  $\bar{V}$ . Para isso basta mostrar que:

$$\forall \epsilon > 0 \cap \bar{F}(X) \in \bar{V} \longrightarrow \exists \check{F}_1(x) \in V^* : : |F(x) - F_1(x)| < \epsilon.$$

Dado um elemento  $F(x)$  de  $\bar{V}$  podemos sempre arranjar um elemento  $F_1(X)$  de  $V^*$  que tenha os mesmos pontos de descontinuidade que  $F(x)$

Tem-se como é fácil de ver:

$$(16) \quad |F(X) - F_1(X)| < \sum_{i=1}^n |s_i - s'_i|,$$

onde  $\{s_i\}$  é conjunto dos saltos de  $F(X)$  e  $\{s'_i\}$  é o conjunto dos saltos de  $F_1(X)$ .

Como  $A_1 = (Rac \cap ]0,1])^N$  é denso em  $(]0,1])^N = A_2$  tem-se, que qualquer que seja  $\epsilon$  maior que zero e qualquer que seja  $P_2 \in A_2$ :

$$(\check{P}_1 \in A_1 : : d(P_1, P_2) < \frac{\epsilon}{2N}),$$

logo a diferença numa coordenada de « $P_1$ » para a coordenada homóloga de « $P_2$ » é  $< \frac{\epsilon}{2N}$ . A soma dos módulos das diferenças das coordena-

das homólogas de  $P_2$  e  $P_1$  está contida no intervalo  $]0, \frac{\epsilon}{2}[$ . Logo

$\check{P}_1 \in A_1 : : a$  soma das suas coordenadas seja 1 e nenhuma delas defira, em módulo, da coordenada homóloga de « $P_1$ » por mais de  $\frac{\epsilon}{2n}$ . A

soma dos módulos das diferenças das coordenadas de « $P_2$ » e « $P_3$ » é, portanto, inferior a  $\epsilon$ .

Seja  $F_1(X)$  um elemento de  $V^x$  com os mesmos pontos de descontinuidade que  $F(X)$  e tal que em cada ponto de descontinuidade o seu salto seja a coordenada de  $P_1$  homóloga da coordenada de  $P_2$  correspondente a esse ponto. Devido a (16) tem-se:

$$| F(X) - F_1(X) | < \varepsilon.$$

q. e. d.

#### 4. Dimensões admissíveis de grupo

Definamos como dimensão dum grupo o número dos seus elementos, e por função associada para uma dada característica e para uma dada escala a função de distribuição dos valores dessa característica quando medidos nessa escala.

Vamos agora procurar determinar que dimensões pode ter um grupo finito que tenha  $F(X) \in V^x$  por função associada em relação a uma característica, e a uma escala  $E$ .

Seja:

$$F(X) = \sum_{i=1}^N p_i H_{a_i}(X),$$

com:

$$p_i = \frac{a_i}{b_i},$$

onde:

$$i = 1 \dots N \longrightarrow [a_i, b_i \in N' \cap \text{m.d.c.}(a_i, b_i) = 1].$$

Seja:

$$b = \text{m.m.c.}(b_1 \dots b_N).$$

Seja «m» dimensão dum grupo  $G$  que tenha  $F(X)$  por função associada, vamos mostrar que se tem:

$$m = k b, \text{ com } k \in N'.$$

Seja:

$$m_i = m p_i,$$

tem-se:

$$\frac{m_i}{m} = \frac{a_i}{b_i}$$

Como:

$$(17) \frac{c}{d} \cdot e \in N' \longrightarrow \left( \frac{c}{d} \in N' \cup \left( \bigcup_{j \in N'} : (cj = d \wedge \frac{e}{j} \in N') \right) \right)$$

seja

$$k_i = \frac{m_i}{a_i} = \frac{m}{b_i}$$

tem-se:

$$m_i = k_i a_i \quad \wedge \quad m = k_i b_i$$

e como m.d.c.  $(a_i, b_i) = 1$  tem-se devido a (17)  $k_i \in \mathbb{N}$ .

Sejam:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_i = \frac{b m_i}{m} = \frac{b a_i}{b_i} \\ k = \frac{m}{b} = \frac{m_i}{c_i} \end{array} \right.$$

tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i = k c_i = k \frac{b a_i}{b_i} = k_i a_i \quad \text{pois: } c_i = \frac{b a_i}{b_i} \quad \wedge \quad m = k b \quad \wedge \quad m = k_i b_i \\ m = k b = \frac{k b}{b_i} b_i = k_i b_i \end{array} \right.$$

$\therefore$  como m.d.c.  $(a_i, b_i) = 1$  tem-se:

$$\frac{k b}{b_i} \in \mathbb{N}$$

Seja:

$$g_i = \frac{b}{b_i}$$

vê-se que:

$$\text{m.d.c. } (g_1, \dots, g_N) = 1$$

porque se pusermos  $l = \text{m.d.c. } (g_1, \dots, g_n)$ ,  $z = \frac{b}{l}$  é ainda um múltiplo de todos os  $b_i$  pelo que se « $l$ » fosse maior que « $1$ », « $b$ » não era o menor múltiplo comum de  $(b_1 \dots b_n)$ . Ora como  $b = \text{m.m.c.}(b_1 \dots b_n)$  tem-se necessariamente  $1 = l = \text{m.d.c. } (g_1 \dots g_n)$ .

$\hat{i} \mid \longrightarrow k g_i \in N$ , ponhamos  $k = \frac{l}{m}$  então:

$$\hat{i} \mid \longrightarrow [(l = m') \cup (\check{c} :: l c = m \cap \frac{g_i}{c} \in N)]$$

pois:

$$\hat{i} \mid \longrightarrow k g_i \in N$$

a segunda alternativa como  $\text{m.d.c. } (g_1 \dots g_n) = 1 \mid \longrightarrow c = 1$

$\dots l = m$ , isto é reduz-se à primeira  $\dots l = m'$ .

Então tem-se  $k \in N$ .

Pomos:

$b = N[F]$  e o conjunto dos múltiplos de  $N[F]$  passa a ser representado por  $\hat{N}[F]$ . É fácil de ver que tanto  $N[F]$  como  $\hat{N}[F]$  são os mesmos para todas as funções do mesmo tipo.

Dados « $k$ » elementos de  $V^N$  podemos sempre arranjar « $k$ » grupos finitos, todos da mesma dimensão, cada um dos quais com uma dessas funções por função associada.

A dimensão destes grupos é um múltiplo do m.m.c. dos  $N[F_i]$ . Com efeito a dimensão comum aos « $k$ » grupos tem de ser um múltiplo dos « $k$ »  $N[F]$ .

Por outro lado consideremos um grupo em que se encontram definidas várias características. Se o grupo for finito a sua dimensão tem de ser um múltiplo do m.m.c. dos  $N[F]$  correspondentes às funções associadas para as várias características, como é fácil de ver. Representaremos o conjunto dos múltiplos comuns aos  $N[F_1] \dots N[F_k]$  por:

$$N [F_1 \dots F_k]$$

### 5. *Propriedades numéricas sua comparação*

As propriedades numéricas dum ser resultam da sua comparação no todo ou em parte com um padrão.

Temos dois tipos fundamentais de propriedades numéricas: aquelas cujo valor é influenciado pela «dimensão» do ser e aquelas cujo valor não é influenciado. Por exemplo o peso pertence ao primeiro tipo e a densidade ao segundo.

Para que as medidas de agregação de diferentes propriedades em diferentes grupos sejam comparáveis convém que os valores das propriedades do primeiro tipo sejam corrigidos.

Para se conseguir isto medem-se os valores dessas propriedades em escalas reduzidas, que anulam o efeito da «dimensão» dos indivíduos. Na construção da escala reduzida para uma dada propriedade do primeiro tipo convém que intervenha um especialista da disciplina a cujos dados se está a aplicar este instrumento estatístico. Com efeito a técnica da construção da escala reduzida depende em cada caso da definição da propriedade.

### 6. *Agregação dum característica numa população finita*

Não podemos tratar simultaneamente do caso finito e do caso infinito pois no primeiro temos de entrar em linha de conta com a dimensão do grupo. No que se segue vamos procurar encontrar uma medida para a agregação dos valores dum propriedade em populações finitas. A nossa medida da agregação pretende ser um indicador da intensidade das «relações de vizinhança» dos indivíduos do grupo em relação aos valores dessa propriedade. Consideramos que as propriedades se encontram medidas nas respectivas escalas reduzidas.

Dados dois grupos com a mesma dimensão e a mesma função associada é intuitivo considerar que têm a mesma agregação, vemos que esta nos é dada por um funcional  $\Gamma' (F, M)$  definido no espaço. É formado pelos pares ordenados em que o primeiro termo é  $F (X) \in V'$  e o segundo termo é  $M \in N [F]$ .

Para determinarmos este funcional vamos exigir que verifique os seguintes postulados:

*Postulado 1:*

$$\Gamma' (F, M) = F^x (D[F], M),$$



onde  $F^x$  é uma função unívoca e tal que:

a) tem por domínio o espaço  $E'$  formado pelos pares ordenados que têm por primeiro termo  $D[F]$  e por segundo termo  $M \in \hat{N}[F]$  com  $F \in V$ .

b) tem o contra domínio contido em  $R^+$ . Para definirmos  $R^+$  partimos do espaço  $\bar{R}$  definido por H. Loève [4]. Trata-se do resultado da compactação do espaço  $R$  tomando para pontos no infinito os pontos «+oo» e «-oo». Em  $\bar{R}$  encontram-se definidas as seguintes regras operatórias:

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} -\infty < x < +\infty \\ \pm \infty = (\pm \infty) + x = x + (\pm \infty) \text{ se } -\infty < x < +\infty \\ \frac{x}{\pm \infty} = 0 \text{ se } -\infty < x < +\infty \\ x (\pm \infty) = (\pm \infty) x = \begin{cases} \pm \infty & \text{se } 0 < x \leq +\infty \\ 0 & \text{se } 0 = x \\ \mp \infty & \text{se } 0 > x \geq -\infty. \end{cases} \end{array} \right.$$

Então:

$$(\bar{R}^+ \subset \bar{R}) \cap (\bar{R}^+ = R^+ \cup \{+\infty\} \cup 0).$$

$$c) [(D[F_1] = K D[F_2]) \cap (M \in \hat{N}[F_2] \cap M \in \hat{N}[F_1])]$$

$$\longrightarrow \Gamma'(F_1, M) = \frac{1}{K} \Gamma'(F_2, M).$$

d)  $F^x(D[F], M)$  é uma função crescente em  $M$  quando  $D[F] > 0$ .

Postulado 2:

$$\Gamma'(F, 1) = 0.$$

Com efeito num grupo que se reduza a um único elemento não existem relações de vizinhança entre elementos pelo que a potência destas relações é nula.

*Postulado 3:*

$$\left[ (\hat{n} \rightarrow M_n, \hat{\epsilon} \hat{N}[F] \cap M_n, \hat{\epsilon} \hat{N}[F] \cap M_n, \hat{\epsilon} \hat{N}[F] \cap M_n, \hat{\epsilon} \hat{N}[F] \cap M_n, \hat{\epsilon} \hat{N}[F] \cap M_n, \hat{\epsilon} \hat{N}[F] \cap M_n, \hat{\epsilon} \hat{N}[F] \cap M_n, \hat{\epsilon} \hat{N}[F] \cap M_n, \hat{\epsilon} \hat{N}[F] \cap M_n) \cap (M_n \rightarrow +\infty) \cap (F \in \mathcal{T}_n) \right] \longrightarrow \\ \longrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \Gamma'(F, M_n) - \Gamma'(F, M_{n-1}) \right) = 0.$$

*Postulado 4:*

$$(M \geq 2 \cap F \in \mathcal{T}_n \cap F_1 \in \mathcal{T}_n) \longrightarrow \Gamma'(F, M) < \Gamma'(F_1, M).$$

*Teorema 6*

Condição necessária e suficiente para que se verifiquem estes postulados é que se tenha

$$(19) \quad \Gamma'(F, M) = \left( \frac{1}{D[F]} \right) G(M).$$

onde  $G(M)$  é uma função crescente em  $M$  que verifica  $G(1) = 0$  e:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} G(M) = K \quad \text{com } K \in \mathbb{R}^+.$$

$D$ : Representaremos os tipos usuais por  $\mathcal{T}_n$  e como a condição suficiente é evidente passamos a demonstrar a condição necessária.

Devido a  $\underline{P}_1$  tem-se:

$$F(X) \in \mathcal{T}_n \longrightarrow \Gamma'(F, M) D[F] = G(M), \text{ com } G(M) \in \overline{\mathbb{R}^+} = \{0\}.$$

Pois dados dois tipos usuais  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  podemos sempre encontrar  $F_1 \in \mathcal{T}_1$  e  $F_2 \in \mathcal{T}_2$  tais que  $D[F_1] = D[F_2]$  e com  $M \in \hat{N}[F_1] \cap \hat{N}[F_2]$  donde tem-se devido a  $\underline{P}_1$ :

$$\begin{aligned} \Gamma'(F_1, M) &= \Gamma'(F_2, M), \\ \Gamma'(F_1, M) D[F_1] &= \Gamma'(F_2, M) D[F_2] = G(M). \end{aligned}$$

Devido a  $\underline{P}_3$  tem-se:

$$G(M) \in \mathbb{R}^+$$

$$(F \in T_n \cap M \in \hat{N}[F]) \longrightarrow \Gamma'(F, M) = \left( \frac{1}{D[F]} \right) G(M).$$

Devido a  $\underline{P}_4$  e ao facto de  $D[F]$  poder ser arbitrariamente pequeno tem-se:

$$(F \in T_n \cap M \geq 2) \longrightarrow \Gamma'(F, M) = +\infty,$$

$$\therefore (M \in N[F] \cap F \in V^A) \longrightarrow \Gamma'(F, M) = G(M) \left( \frac{1}{D[F]} \right).$$

Para o caso  $M = 1$  tem-se devido a  $\underline{P}_2$  e a (18):

$$G(M) = 0,$$

$$\therefore (F \in V^A \cap M \in N[F]) \longrightarrow \Gamma'(F, M) = G(M) \left( \frac{1}{D[F]} \right).$$

Devido a  $\underline{P}_1$ ,  $G(M)$  tem de ser uma função crescente.

E devido a  $\underline{P}_3$ :

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} G(M) = K \quad \text{com } K \in \mathbb{R}^+$$

Com efeito  $G(M)$  é função crescente, logo ela tem limite finito ou + infinito quando  $M \longrightarrow +\infty$ . Logo para que o  $\underline{P}_3$  se verifique  $G(M)$  tem de ter limite finito. q.e.d.

*Corolário 1:*

$$(20) \quad \dots \quad \Gamma'(F, M) = +\infty \quad \dots \quad (F \in T_n \cap M \geq 2).$$

D: Resulta imediatamente de (19) e do teorema 2.

Corolário 2:

$$(21) \dots \left( M \in \hat{N} [F_1] \cap F_1 (kX+d) = F_2(X) \right) \longrightarrow \Gamma' (F_1, M) = \\ = \frac{1}{k} (F_2, M).$$

D: Resulta imediatamente de (13) e de (12).

Corolário 3:

$$(22) \dots \left( F(X) \in V_{[a, b]} \cap F(X) = \frac{H_a(X) + H_b(X)}{2} \cap M = 2 \right) \\ \longrightarrow \Gamma' (F, M) \geq \Gamma' \left( \frac{H_a(X) + H_b(X)}{2}, M \right).$$

D: Resulta imediatamente de (19) e de (6).

### 6.1. Independência dos postulados

Vamos mostrar a independência dos postulados por meio de contra-exemplos. Assim apresentaremos uma série de funcionais em que o funcional de ordem «i» verifica todos os postulados menos P i.

$$\Gamma'_1 (F, M) = G(M) L[F] \left( \frac{1}{D[F]} \right).$$

Onde  $L[F]$  é uma consoante de tipo que toma o valor «2» se  $F(X)$  for do mesmo tipo que  $\frac{H_a(X) + H_b(X)}{2}$  e o valor «1» se não pertencer a esse tipo.

$$\Gamma'_2 (F, M) = \left( \frac{1}{2} + \frac{M-1}{2M} \right) \left( \frac{1}{D[F]} \right).$$

$$\Gamma'_3 (F, M) = (M-1) \left( \frac{1}{D[F]} \right).$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma'_4(F, M) = \left( \frac{1}{D[F]} \right) G(M) \longleftarrow | F \sim \epsilon T_0 \\ \Gamma'_4(F, M) = 0 \quad \longleftarrow | F \in T_0. \end{array} \right.$$

### 6.2. Escolha da função $G(M)$

Tomamos:

$$(23) \quad : \quad G(M) = \frac{M-1}{M}.$$

Devido à sua simplicidade, por ter limite 1, e por a sua taxa de convergência para o limite nos parecer conveniente.

### 6.3. Um contra-exemplo

Do conhecido argumento de Cauchy (Anexo 1) deduz-se a lei do número segundo a qual as colecções concretas de seres reais serão sempre finitas. No entanto quando os grupos de que estamos tratando forem muito grandes é mais simples tratá-los como se fossem infinitos. No caso presente necessitamos duma medida de agregação de variáveis aleatórias unidimensionais em populações infinitas. O caminho mais simples seria tentar obter um funcional  $\Gamma(F)$  fazendo tender:

$$\begin{array}{l} F_n \xrightarrow{u} F \\ M_n \longrightarrow +\infty \end{array}$$

Vamos agora mostrar que este prolongamento por continuidade não é válido.

Seja:

$$F_n(X) = \frac{n-1}{n} H_n(X) + \frac{1}{n} H_n^2(X),$$

é fácil de ver que:

$$\begin{aligned} F_n(X) &\xrightarrow{u} H_0(X) \\ n &\longrightarrow +\infty, \\ \Gamma'(F_n, n) &\longrightarrow 0 \\ n &\longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Seja:

$$\begin{aligned} F_n^x &= H_0(X), \\ n \geq 2 &\longrightarrow \Gamma'(F_n^x, n) = +\infty, \\ \dots & \\ \Gamma'(F_n^x, n) &\longrightarrow +\infty \\ n &\longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

O que prova a nossa afirmação.

Temos portanto de construir independentemente do caso finito a teoria para o caso infinito.

### 7. Postulados para o caso infinito

Dadas duas populações infinitas (não necessariamente numeráveis) com a mesma função de distribuição para uma dada característica é intuitivo admitir que essa característica se encontra igualmente agregada nas duas populações. Esta observação mostra-nos que a agregação no caso infinito é-nos dada por um funcional que se encontra definido no espaço  $V$  das funções de distribuição.

Seja  $\Gamma(F)$  este funcional para o determinar exigimos que verifique os postulados seguintes:

#### Postulado 1

$$\Gamma(F) = F^x(D[F]).$$

Onde  $F^x$  é uma função unívoca tal que:

a) Tem  $\bar{R}^+$  por domínio e contra-domínio contido em  $\bar{R}^+$ .

$$b) \quad D[F_1] = K D[F_2] \quad \text{---} \rightarrow \quad \Gamma(F_1) = \frac{1}{K} \Gamma(F_2).$$

Postulado 2

$$(F_1 \sim \varepsilon T_{\infty} \cap F \in T_{\infty}) \quad \text{---} \rightarrow \quad \Gamma[F_1] < \Gamma[F].$$

Postulado 3

$$(F_1 \sim \varepsilon T_0 \cap F \in T_0) \quad \text{---} \rightarrow \quad \Gamma[F_1] < \Gamma[F].$$

Teorema 7:

Para que se verifiquem estes postulados é condição necessária e suficiente que se tenha:

$$(24) \quad \Gamma(F) = \frac{K}{D[F]}, \quad \text{com } K \in \mathbb{R}^+.$$

D: A condição suficiente é evidente pelo que passamos a demonstrar a condição necessária.

Devido a  $\underline{P}_1$  tem-se:

$$F \in T_u \quad \text{---} \rightarrow \quad \Gamma(F) D[F] = G \quad \text{com } G \in \overline{\mathbb{R}}^+.$$

Devido a  $\underline{P}_2$  tem-se:

$$G < +\infty.$$

Devido a  $\underline{P}_3$  tem-se:

$$G > 0,$$

$$\dots \quad G \in \mathbb{R}^+,$$

$$\dots \quad F \in T_u \quad \text{---} \rightarrow \quad \Gamma(F) = \frac{G}{D[F]}.$$

Devido a  $P_2$  tem-se que como  $D[F]$  pode ser arbitrariamente grande com  $F \in T_u$  tem-se:

$$F \in T_{\infty} \mid \longrightarrow \Gamma(F) = 0.$$

Devido a  $P_3$  tem-se como  $D[F]$  pode ser arbitrariamente pequena com  $F \in T_u$  tem-se:

$$F \in T_u \mid \longrightarrow \Gamma(F) = +\infty,$$

$$F \in V \mid \longrightarrow \Gamma(F) = \frac{G}{D[F]}.$$

Como  $G$  é constante tem-se:

$$\Gamma(F) = \frac{K}{D[F]} \text{ com } K \in \mathbb{R}^+.$$

q.e.d.

Por comodidade tomo:

$$K = 1.$$

### Corolário 1

Tem-se:

$$(25) \quad \Gamma(F) = 0 \quad \dots \quad F \in T_{\infty}.$$

D: Resulta imediatamente de (24) e do *teorema 1*.

### Corolário 2

Tem-se:

$$(26) \quad \Gamma(F) = +\infty \quad \dots \quad F \in T_u.$$

D: Resulta imediatamente de (24) e do *teorema 2*.



*Corolário 3*

Tem-se:

$$(27) \quad F_1(KX+d) = F_2(X) \quad | \longrightarrow \quad \Gamma(F_1) = \frac{1}{K} \Gamma(F_2).$$

D: Resulta imediatamente de (24) e de (12).

*Corolário 4*

Tem-se:

$$(28) \quad |(\widehat{n} | \longrightarrow F_n(X) \in V_{[a, b]}) \cap F_n \xrightarrow{u} F | \longrightarrow \\ | \longrightarrow \left( \Gamma(F_n) \longrightarrow \Gamma(F) \right)$$

D: Resulta imediatamente de (24) e de (9).

*Corolário 5*

Tem-se:

$$(29) \quad \left[ F(X) \in V_{[a, b]} - F(X) = \frac{H_a(X) + H_b(X)}{2} \right] | \longrightarrow \\ | \longrightarrow \Gamma[F] \geq \Gamma \left[ \frac{H_a(X) + H_b(X)}{2} \right].$$

D: Resulta imediatamente de (24) e de (6).

*7.1. Independência dos postulados*

Vamos igualmente provar a independência dos postulados por meio de contra-exemplos. Mantemos a convenção atrás usada:

$$\Gamma_1(F) = L(F) \frac{1}{D[F]}.$$

mantendo a definição de  $L(F)$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_2(F) = \frac{1}{D[F]} \\ \Gamma_2(F) = +\infty \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \longleftarrow | F \sim \in T_{\infty} \\ \longleftarrow | F \in T_{\infty} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_3(F) = \frac{1}{D[F]} \\ \Gamma_3(F) = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \longleftarrow | F \sim \in T_0 \\ \longleftarrow | F \in T_0 \end{array} \right.$$

## 8. Agregação de $N$ características num grupo

### 8.1. Caso finito

Para determinarmos um funcional que nos dará a agregação de  $N$  propriedade numa população finita vamos exigir que verifique os seguintes postulados:

#### Postulado 1

$$\Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_n, M) = F^x(D[F_1], \dots, D[F_n], M),$$

onde  $F^x$  é função unívoca tal que:

- tem por domínio o espaço  $E^N$  dos sistemas ordenados, de ordem  $N + 1$  em que os  $N$  primeiros termos são os valores das  $D[F_i]$  com  $i = 1 \dots N$ , e o último é um múltiplo de: m.m.c. ( $N[F_1], \dots, N[F_N]$ ).
- tem contra-domínio contido em  $\bar{R}^+$ .
- $(D[F^1_i] = k D[F^2_i] \cap j \neq i \longrightarrow D[F^1_j] = D[F^2_j]) \longrightarrow$   
 $\longrightarrow \Gamma^{(N)}(F^1_1 \dots F^1_N, M) = \frac{1}{k} \Gamma^{(N)}(F^2_1 \dots F^2_N, M).$
- $F^x$  é função crescente em  $M$ .

#### Postulado 2

$$\Gamma^{(N)}(F_1 \dots F_N, 1) = 0.$$

*Postulado 3*

$$\left[ (\hat{n} \longrightarrow M^1_n, M^2_n \in N [F_1 \dots F_N]) \cap (\sim \checkmark :: F_i \in T_0) \cap (M^1_n < M^2_n) \cap \left( \begin{matrix} M^1_n \longrightarrow +\infty \\ n \longrightarrow +\infty \end{matrix} \right) \right] \longrightarrow \longrightarrow \left( \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_n, M^2_n) - \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_n, M^1_n) \right) \xrightarrow[n \longrightarrow +\infty]{0}$$

*Postulado 4*

$$(\sim \checkmark :: F^1_i \in T_n \cap \checkmark :: F^2_i \in T_n) \longrightarrow \longrightarrow \Gamma'(F^1_1, \dots, F^1_N, M) < \Gamma'(F^2_1, \dots, F^2_N, M).$$

*Teorema 8*

Condição necessária e suficiente para que se verifiquem estes postulados é que se tenha:

$$(30) \dots \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N, M) = \left( \frac{1}{\prod_{i=1}^N D(F_i)} \right) G(M) = G(M) \prod_{i=1}^N \Gamma(F_i),$$

onde  $G(M)$  é uma função crescente que verifica  $G(1) = 0$  e:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} G(M) = K \quad \text{com} \quad K \in \mathbb{R}^+.$$

D): Sejam:

$$i = 1 \dots N \longrightarrow D[F^1_i] = k_i D[F^2_i],$$

devido a  $P_1$  tem-se:

$$\Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N, M) = \frac{1}{k_1} \Gamma^{(N)}(F^2_1, F^1_2, \dots, F^1_N, M).$$

Ponhamos por hipótese com  $P < M$ :

$$\Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N, M) = \frac{1}{\prod_{i=1}^P k_i} \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_P, F^1_{P+1}, \dots, F^1_N, M),$$

donde como:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_P, F^1_{P+1}, \dots, F^1_N, M) &= \frac{1}{k_{P+1}} \\ \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_{P+1}, F^1_{P+2}, \dots, F^1_N, M) & \\ \therefore \Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N, M) &= \\ = \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_{P+1}, F^1_{P+2}, \dots, F^1_N, M) &\frac{1}{\prod_{i=1}^{P+1} k_i}. \end{aligned}$$

Pelo que provamos por indução que com:

$$L \leq N$$

se tem:

$$\Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N, M) = \frac{1}{\prod_{i=1}^L k_i} \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_L, F^1_{L+1}, \dots, F^1_N, M).$$

Pondo  $L = N$  vem:

$$\Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_1, \dots, F^1_N, M) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N k_i} \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_N, M),$$

donde:

$$(i = 1, \dots, N \rightarrow D[F_i] = k_i, D[F^2_i]) \rightarrow G^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_N, M) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_N, M) \frac{N}{\prod_{i=1}^N D[F^2_i]} = \\
 &= \Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N, M) \frac{N}{\prod_{i=1}^N D[F^1_i]} = G^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N, M).
 \end{aligned}$$

E como dadas duas colecções  $T^1_1 \dots T^1_N$   $T^2_1 \dots T^2_N$  de  $N$  tipos usuais se podem arranjar duas colecções de elementos de  $V$  tais que:

$$i = 1 \dots N \longrightarrow [(F^1_i \in T^1_i \cap F^2_i \in T^2_i) \cap D[F^1_i] = D[F^2_i]]$$

vê-se que devido a  $(P_1)$  e a esta observação:

$$G^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_N, M) = \Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N, M) \frac{N}{\prod_{i=1}^N D[F^2_i]},$$

tem o mesmo valor  $G(M)$  para todas as colecções de elementos de  $V^N$  pertencentes a tipos usuais para os quais se encontra definida, donde:

$$(i = 1 \dots N \longrightarrow F_i \in T_i) \longrightarrow \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N, M) = \left( \frac{1}{N \prod_{i=1}^N D[F_i]} \right) G(M).$$

Quando uma das funções pertence ao tipo  $T_0$  e  $M \geq 2$  tem-se devido a  $P_1$  e ao facto das  $D[F_i]$  de elementos de tipos usuais que pertençam a  $V^N$  poderem ser arbitrariamente pequenas:

$$\Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N, M) = +\infty,$$

$$M \geq 2 \longrightarrow \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N, M) = G(M) \left( \frac{1}{N \prod_{i=1}^N D[F_i]} \right).$$

Resta-nos o caso  $M = 1$  no entanto se pusermos  $G(1) = o$  vemos que podemos escrever sempre

$$\Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N, M) = G(M) \left( \frac{1}{N \prod_{i=1}^N D[F_i]} \right)$$

$G(1) = o$  é exigido por  $P_2$  e  $P_1$  exige que seja função crescente.

Finalmente repetindo o raciocínio que fizemos na demonstração do teorema 5 vemos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(n) = k \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{R}^+ . \quad \text{q.e.d.}$$

*Corolário 1*

$$(31) \quad \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N, M) = +\infty \quad \dots \quad (i :: F_i \in T_{\sigma} \cap M \geq 2).$$

D: Resulta imediatamente de (30) e do teorema 2.

*Corolário 2*

$$(32) \quad \left( i = 1, \dots, N \longrightarrow F_i(k_i X + d) = F_i^2(X) \right) \longmapsto \\ \longmapsto \Gamma^{(N)}(F_1^1, \dots, F_N^1, M) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N k_i} \Gamma^{(N)}(F_1^2, \dots, F_N^2, M).$$

D: Resulta imediatamente de (12) e do ponto provado durante a demonstração do teorema de que

$$(i = 1, \dots, N \longrightarrow D[F_i^1] = k_i D[F_i^2]) \longmapsto \Gamma^{(N)}(F_1^1, \dots, F_N^1, M) = \\ = \frac{1}{\prod_{i=1}^N k_i} \Gamma^{(N)}(F_1^2, \dots, F_N^2, M). \quad \text{q.e.d.}$$

*Corolário 3*

$$(33) \quad \left[ (i = 1, \dots, N \longrightarrow F_i(X) \in V_{[a_i, b_i]} \cap F_i(X) \stackrel{H_{a_i}(X) + H_{b_i}(X)}{=} \frac{H_{a_i}(X) + H_{b_i}(X)}{2}) \cap \right. \\ \left. \cap M = 2p \right] \longmapsto \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N, M) >$$

$$> \Gamma^{(N)} \left( \frac{H_{a_1} + H_{b_1}(X)}{2}, \dots, \frac{H_{a_n} + H_{b_n}(X)}{2}, M \right).$$

D: Resulta imediatamente de (30) e de (6).

Tomamos:

$$(34) \quad G(M) = \frac{M-1}{M},$$

pelas mesmas razões que no caso unidimensional.

### 8.2. Independência dos postulados

Mantemos a mesma convenção usual e além disso os funcionais  $\Gamma'_i(F, M)$  são os atrás introduzidos.

$$\Gamma'^{(N)}_1(F_1, \dots, F_N, M) = \prod_{i=1}^N \Gamma'_i(F_i, M).$$

$$\Gamma'^{(N)}_2(F_1, \dots, F_N, M) = \prod_{i=1}^N \Gamma'_2(F_i, M).$$

$$\Gamma'^{(N)}_3(F_1, \dots, F_N, M) = \prod_{i=1}^N \Gamma'_3(F_i, M).$$

$$\Gamma'^{(N)}_4(F_1, \dots, F_N, M) = \prod_{i=1}^N \Gamma'_4(F_i, M).$$

### 8.3. Caso infinito

Os postulados neste caso são os seguintes:

#### Postulado 1

$$\Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N) = F^x(D[F_1], \dots, D[F_N]),$$

onde  $F^N$  é uma função unívoca tal que:

a) tem por domínio  $\bar{R}^+{}^N$ .

b) tem por contradomínio  $\bar{R}^+$ .

c)  $(D[F^1_i] = kD[F^2_i] \cap j \neq i \longrightarrow D[F^1_j] = kD[F^2_j]) \longrightarrow$   
 $\longrightarrow \Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N) = \frac{1}{k} \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_N).$

*Postulado 2*

$[(\checkmark :: F^1_i \in T_o \cap \sim j :: F^1_j \in T_m) \cap (\sim \checkmark :: F^2_i \in T_o)] \longrightarrow$   
 $\longrightarrow \Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N) > \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_N).$

*Postulado 3*

$[(\checkmark :: F^1_i \in T_m \cap \sim \checkmark :: F^1_i \in T_m)] \longrightarrow \Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N) <$   
 $< \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_N).$

*Teorema 9*

Condição necessária e suficiente para que se verifiquem estes postulados é que se tenha:

$$(35) \quad \Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N) = k \prod_{i=1}^N \Gamma(F_i) \quad \text{com} \quad k \in R^+.$$

D: A condição suficiente é evidente pelo que passamos a demonstrar a condição necessária.

*Repetindo* o raciocínio feito na demonstração do *teorema 7* verifica-se que:

$$G^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N) = \prod_{i=1}^N D[F_i] \Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N),$$

toma o mesmo valor  $k$  para as colecções de elementos de tipos usuais.



Devido a  $\underline{P}_1$  tem-se  $k \in \bar{\mathbb{R}}^+$ . Devido a  $\underline{P}_2$  tem-se  $k > 0$  e devido a  $\underline{P}_3$  tem-se  $k < +\infty$ .

$$\therefore (i = 1, \dots, N \mid \rightarrow F_i \in T_n) \mid \rightarrow \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N) = k \prod_{i=1}^N \Gamma(F_i)$$

Devido a  $\underline{P}_2$  e ao facto dos valores de  $\Gamma(F)$  poderem ser arbitrariamente pequenos para os elementos dos tipos usuais tem-se:

$$\check{i} :: F_i \in T_{oo} \mid \rightarrow \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N) = 0.$$

Pelo outro lado  $\underline{P}_3$  e o facto dos valores de  $\Gamma(F)$  poderem ser arbitrariamente grandes para os elementos dos tipos usuais tem-se:

$$(\check{i} :: F_i \in T_n \cap \sim \check{j} :: F_j \in T_{oo}) \mid \rightarrow \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N) = +\infty.$$

Logo pode escrever-se sempre:

$$\Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N) = k \prod_{i=1}^N \Gamma(F_i) \quad \text{com} \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

q.e.d.

Por comodidade tomo

$$k = 1.$$

*Corolário 1*

Tem-se:

$$(36) \quad \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N) = 0 \quad \dots \check{i} :: F_i \in T_{oo}.$$

D: Resulta imediatamente de (35) e do *corolário 1* do *teorema 6* e de (18).

*Corolário 2*

Tem-se:

$$(37) \quad \Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N) = \infty \quad \dots (\check{i} :: F_i \in T_n \check{j} :: F_j \in T_{oo}).$$

D: Resulta imediatamente de (35) do *corolário 2* do *teorema 6* e de (18).

*Corolário 3*

Tem-se:

$$(38) \quad [ (i = 1, \dots, N \mid \longrightarrow F^1_i (k_i X + d_i) = F^2_i (X) ) \mid \longrightarrow \\ \mid \longrightarrow \Gamma^{(N)}(F^1_1, \dots, F^1_N) = \frac{1}{\prod_{i=1}^N k_i} \Gamma^{(N)}(F^2_1, \dots, F^2_N).$$

D: Resulta imediatamente de (35) e do *corolário 3* do *teorema 6*.

*Corolário 4*

$\Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_N)$  é um funcional contínuo para a convergência compacta.

D: Resulta imediatamente de (35) e do *corolário 4* do *teorema 6*.

*Corolário 5*

Tem-se:

$$(39) \quad \left[ i = 1, \dots, N \mid \longrightarrow F_i (X) \in V_{[a_i, b_i]} \cap F_i (X) \neq \right. \\ \left. \neq \frac{H_{a_i} (X) + H_{b_i} (X)}{2} \right] \mid \longrightarrow \Gamma^{(N)} [F_1, \dots, F_N] > \\ > \Gamma^{(N)} \left[ \frac{H_{a_1} (X) + H_{b_1} (X)}{2}, \dots, \frac{H_{a_n} (X) + H_{b_n} (X)}{2} \right]$$

D: Resulta imediatamente de (35) e do *corolário 5* do *teorema 6*.

#### 8.4. *Independência dos postulados*

Mantemos a convenção usual e além disso os funcionais  $\Gamma_i(F)$  são os atrás introduzidos:

$$\Gamma_1^N(F_1, \dots, F_N) = \prod_{i=1}^N \Gamma_1(F_i).$$

$$\Gamma_2^N(F_1, \dots, F_N) = \prod_{i=1}^N \Gamma_2(F_i).$$

$$\Gamma_3^N(F_1, \dots, F_N) = \prod_{i=1}^N \Gamma_3(F_i).$$

$$\Gamma_4^N(F_1, \dots, F_N) = \prod_{i=1}^N \Gamma_4(F_i).$$

#### 9. *Agregação dum grupo*

No começo deste trabalho introduzimos a noção de conjunto determinante de características para um dado grupo como um conjunto de características tais que o facto de se apresentar ou não num indivíduo juntamente com o seu valor no caso de se apresentarem chegar para determinar se o indivíduo pertence ou não ao grupo. É útil lembrar que é a ciência que estuda os indivíduos componentes do grupo que indica quais os conjuntos determinantes.

Uma observação que há a fazer é a seguinte:

Por vezes nas classificações feitas em certas ciências que ainda não atingiram uma fase de maturidade absoluta as características determinantes dum grupo não se apresentam em todos os indivíduos do grupo. É o caso da pedologia em que se considerarmos como propriedades os valores das características (pH, teor em bases) nos vários horizontes, o número de horizontes não é o mesmo em todos os solos do mesmo grupo. Estas ciências seguem, em geral, o seguinte critério: consideram como características determinantes de um grupo um certo número de propriedades, simplesmente não se exige que para um indivíduo pertencer a um certo grupo ele possua propriedades todas, apenas quando as possui os valores das mesmas têm de estar num certo intervalo.

Na introdução definimos como agregação dum grupo o máximo valor da sua agregação em relação a um conjunto determinante de características. A aplicação desta definição no caso em que as características do conjunto determinante se apresentam definidas para todos os elementos do grupo não apresenta dificuldades.

No outro caso teremos de a adaptar considerando que apenas contam para a medida da agregação em relação a uma característica os indivíduos para os quais essa característica se encontra definida. Esta adaptação que fazemos tem a justificação de se basear na maneira de definir grupos usada nessas classificações.

Representaremos a agregação de grupo por  $\Gamma^o$

#### 10. Agregação de populações classificadas

A nossa medida de agregação duma população classificada tem de entrar em linha de conta com a agregação dos grupos de última ordem e com a importância relativa destes. Utilizamos apenas os grupos de última ordem (aqueles que não se encontram subdivididos) pois é nestes que a população se encontra agrupada.

Vamos procurar encontrar um funcional que nos dê esta medida. Como medida da importância relativa dos grupos de última ordem é lógico tomar-se a probabilidade dum indivíduo tomado ao acaso da população pertencer a cada um deles.

Os postulados a que vamos recorrer neste caso são os seguintes:

##### Postulado 1

$$\begin{aligned} |i = j| &\longrightarrow \Gamma_{i,1}^o = \Gamma_{i,2}^o \cap \widehat{i} \longrightarrow P_{i,1} = P_{i,2} | \longrightarrow \\ &\longrightarrow \Gamma^x (\Gamma_{1,1}^o \dots \Gamma_{N,1}^o, P_{1,1} \dots P_{N,1}) - \\ &\quad - \Gamma^x (\Gamma_{1,2}^o \dots \Gamma_{N,2}^o, P_{1,2} \dots P_{N,2}) = \\ &= K (\Gamma_{j,1}^o - \Gamma_{j,2}^o) P_j; \text{ com } K \in \mathbb{R}^+ \text{ e independente de } \langle j \rangle. \end{aligned}$$

##### Postulado 2

$$(\widehat{i} \longrightarrow \Gamma_i^o = 0 \longrightarrow \Gamma^x = 0.$$

*Teorema 10*

Condição necessária e suficiente para que se verifiquem estes postulados é que se tenha:

$$(40) \quad \Gamma^x = k \sum_{i=1}^N p_i \Gamma_i^o,$$

com  $k \in \mathbb{R}^+$ .

D: A condição suficiente é evidente pelo que passamos a considerar a condição necessária:

Devido a  $P_1$  temos

$$\Gamma^x (\Gamma_1^o \dots \Gamma_N^o, p_1, \dots, p_N) = \Gamma^x (O, \Gamma_2^o \dots \Gamma_N^o, p_1, \dots, p_N) + K \Gamma_1^o p_1.$$

Ponhamos, por hipótese, com  $M < N$ :

$$\Gamma^x (\Gamma_1^o \dots \Gamma_N^o, p_1, \dots, p_N) = \Gamma^x (O \dots O, \Gamma_M^o, \dots, \Gamma_N^o, p_1 \dots p_N) + \sum_{i=1}^{M-1} K \Gamma_i^o p_i,$$

então devido a  $P_1$

$$\begin{aligned} & \Gamma^x (O \dots O, \Gamma_M^o \dots \Gamma_N^o, \dots, p_1 \dots p_N) = \\ & = \Gamma^x (O \dots O, \Gamma_{M+1}^o \dots \Gamma_N^o, \dots, p_1 \dots p_N) + K \Gamma_M^o p_M \\ \Gamma^x (\Gamma_1^o \dots \Gamma_N^o, p_1 \dots p_N) & = \Gamma^x (O \dots O, \Gamma_{M+1}^o \dots \Gamma_M^o, p_1 \dots p_N) + \\ & + K \sum_{i=1}^M \Gamma_i^o p_i \end{aligned}$$

Provamos portanto por indução que com  $L < N$  se tem:

$$\begin{aligned} & \Gamma^x (\Gamma_1^o \dots \Gamma_N^o, p_1 \dots p_N) = \\ & \Gamma^x (O \dots O, \Gamma_{L+1}^o \dots \Gamma_N^o, p_1 \dots p_N) + K \sum_{i=1}^L \Gamma_i^o p_i. \end{aligned}$$

pondo  $L = N$  vem devido a  $P_2$ :

$$\Gamma^x (\Gamma_N^o, p_1 \dots p_N) = K \sum_{i=1}^N \Gamma_i^o \cdot p_i \cdot q. e. d.$$

### 10.1. *Independência dos postulados*

Mantemos a convenção usual:

$$\Gamma_1^x = \sum_{i=1}^N \Gamma_i^o.$$

$$\Gamma_2^x = \sum_{i=1}^N p_i \Gamma_i^o + K, \quad \text{com } K \in \mathbb{R}^+.$$

#### *Nota*

Há que reparar que se construiu a teoria da agregação duma população independentemente da agregação de grupo. Se de futuro se adoptasse um outro processo para medir a agregação do grupo a fórmula (40) continuaria válida.

### 11. *Populações classificadas, sua estrutura*

Como dissemos na introdução, quando uma classificação considera grupos de várias ordens observa-se numa população classificada de acordo com ela uma hierarquia de grupos.

Vamos agora procurar estabelecer critérios estatísticos para averiguar se se justifica a existência desses grupos como entidades definidas e distintas e se o agrupamento dos grupos de uma ordem nos grupos de ordem superior é correcto ou não.

Consideraremos a estrutura de uma população classificada correcta se e só se verificar as seguintes condições:

1 — Todos os grupos duma dada ordem devem ter agregação superior a um certo número fixado «à priori» de modo que se justifique a sua existência como entidades definidas.

2 — Da reunião de dois grupos da mesma ordem deve resultar um grupo cuja agregação seja inferior à mínima agregação verificada para os 2 grupos donde se partiu, para que se justifique a sua exis-

tência como grupos separados. Observe-se que os conjuntos determinantes para o grupo reunião são formados a partir dos conjuntos determinantes para os grupos de onde se partiu.

3 — Consideremos um grupo de ordem « $i + 1$ » contido num grupo de ordem  $i$ . Então o 2.º grupo deve ter uma agregação superior à do primeiro para se justificar a sua individualização no seio do primeiro.

4 — A reunião de dois grupos de ordem « $i + 1$ » contidos num mesmo grupo de ordem « $i$ » deve ter sempre uma agregação maior do que a agregação correspondente à reunião de qualquer um desses grupos com outro grupo de ordem « $i + 1$ » pertencente a outro grupo de ordem « $i$ » de modo a que se justifique que os dois primeiros grupos de ordem « $i + 1$ » estejam agrupados no mesmo grupo de ordem « $i$ ».

## 12. *Classificação: sua comparação*

### 12.1. *Estatístico R de comparação*

Com este estatístico vamos procurar medir o valor duma solução dada a um problema de classificação.

Mediremos a «complexidade» das populações classificadas por  $N$  — número de grupos de última ordem em que a classificação as dividiu.

*Postulado 1*  $R$  é função crescente de  $\Gamma^x$  e decrescente de  $N$ . Tem por contra-domínio  $\bar{R}^+$ .

*Postulado 2*  $R$  é directamente proporcional a  $\Gamma^x$  e inversamente proporcional a  $N$ . Isto é:

$$\begin{cases} N_1 = N_2 \cap \Gamma_1^x = k \Gamma_2^x \longrightarrow R_1 = kR_2 \\ N_1 = N_2 \cdot 1/k \cap \Gamma_1^x = \Gamma_2^x \longrightarrow R_1 = kR_2. \end{cases}$$

### *Teorema 11*

Condição necessária e suficiente para que se verifiquem estes postulados é que se tenha:

$$(41) \dots \quad R = K \frac{\Gamma^x}{N}, \text{ com } K \in \mathbb{R}^+.$$

D: A condição suficiente é evidente pelo que passamos a considerar a condição necessária.

Devido a  $P_2$  tem-se, como é fácil de ver

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{R}{\Gamma^x} = F_1(N) \\ RN = F_2(\Gamma^x), \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{o contradomínio de } F_1(N) \text{ e } F_2(\Gamma^x) \text{ é } \mathbb{R}^+ \\ \text{devido a } P_1 \end{array}$$

$$\dots \quad \frac{R F_2(\Gamma^x)}{\Gamma^x} = R N F_1(N),$$

$$\dots \quad \frac{F_2(\Gamma^x)}{\Gamma^x} = F_1(N) N = K, \quad \text{com } K \in \mathbb{R}^+$$

$$\dots \quad F_1(N) = \frac{K}{N},$$

$$\dots \quad \frac{R}{\Gamma^x} = \frac{K}{N},$$

$$\dots \quad R = \frac{K \Gamma^x}{N} \quad \text{q.e.d.}$$

Por comodidade tomamos  $K = 1$ .

### 125.2. — *Independência dos postulados*

Mantemos a convenção usual. Temos:

$$R_1 = +\infty.$$

$$R_2 = \frac{\Gamma^x}{N^2}.$$

### 12.3. *Aplicações*

Para compararmos  $N$  soluções dadas a  $N$  problemas de classificação, não necessariamente diferentes uns dos outros, basta compararmos os respectivos valores de  $R$ .



A única observação a fazer é que quando uma das alternativas é deixar um grupo indiviso se deve tomar:

$$\Gamma^x = \Gamma^0.$$

### 13. Problemas de estimação

Até aqui temos definido e estudado os estatísticos de que nos utilizamos para resolver alguns problemas ligados ao ajustamento duma classificação a uma população. Vamos agora estudar a maneira de estimar esses estatísticos a partir de amostras casuais das populações. Todos os estatísticos que introduzimos são funções algébricas de distâncias médias, das importâncias relativas de grupos e das dimensões de grupos. Observe-se que a dimensão dum grupo obtém-se multiplicando a sua importância relativa pela dimensão da população.

Vamos apresentar um teorema que reduz o problema de estimar esses estatísticos aos da estimação de valores de  $D[F]$  e da dimensão da população. Na demonstração deste teorema seguiremos a técnica introduzida por Tiago de Oliveira [5].

#### Teorema 12

Seja:

a)  $Y = F(X_1, \dots, X_M)$  uma função contínua em  $X_1, \dots, X_M$ .

b)  $i = 1, \dots, M \longrightarrow X_i = p \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}_i^n$ .

Isto é  $\hat{x}_i$  é um estimador consistente de  $X_i$  obtido a partir de  $n$  observações.

Então:

$$Y = p \lim \hat{Y}^n, \quad \text{com:} \quad \hat{Y}^n = F(\hat{x}_1^n, \dots, \hat{x}_M^n).$$

D: Como:

$$P_r \left( \bigcap_{i=1}^M A_i \right) = 1 - P_r \left( \bigcup_{i=1}^M A_i^c \right) \geq 1 - \sum_{i=1}^M P_r (A_i^c)$$

$$P_r \left( \hat{i} \longrightarrow |\hat{x}_i^n - x_i| < \epsilon \right) \geq 1 - \sum_{i=1}^M P_r \left( |\hat{x}_i^n - x_i| \geq \epsilon \right)$$

Devido a (b) as probabilidades que figuram no segundo membro da última desigualdade tendem para zero pelo que:

$$P_r (\hat{i} \mid \longrightarrow | \hat{x}_1^n - x_1 | < \epsilon) \mid \longrightarrow 1$$

$n \rightarrow \infty$

Ora como «F» é uma função contínua:

$$\hat{\eta} > 0 \mid \longrightarrow \check{\epsilon} > 0 :: (\hat{i} \mid \longrightarrow | x_1^n - x_1 | < \epsilon) \mid \longrightarrow$$

$$\mid \longrightarrow ( | F(x_1 \dots x_M) - F(\hat{x}_1^n \dots \hat{x}_M^n) | < \eta)$$

... como: (A  $\mid \longrightarrow$  B)  $\mid \longrightarrow$  (P<sub>r</sub> A  $\leq$  P<sub>r</sub> B) tem-se:

$$\hat{\eta} < 0 \mid \longrightarrow \Pr ( | F(x_1 \dots x_M) - F(\hat{x}_1^n \dots \hat{x}_M^n) | < M) \longrightarrow 1$$

$n \rightarrow \infty$

q. e. d.

Ora Gini mostrou que:

$$(42) \quad \hat{D}[F] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_i - a_j|,$$

onde os «a<sub>i</sub>» e «a<sub>j</sub>» eram os valores observados, era um estimador consistente de D[F]. Em [1] vem provado que  $\hat{D}[F]$  se encontra assintoticamente normalmente distribuído. Quanto à dimensão da população ou esta é pequena e é fácil de conhecer ou é grande e é possível estimá-la ou o erro que se comete tomando-a como infinita é desprezível.

Para estimarmos a importância relativa dos diferentes grupos de última ordem basta tomar uma amostra casual da população e ver que fracção cai em cada um dos grupos.

## RESUMO

Ao classificarmos os indivíduos duma população procuramos agrupá-los nos grupos naturais que reconhecemos nessa população. Num dado momento existem vários esquemas de classificação, para podermos escolher o mais conveniente é-nos útil podermos medir o ajustamento de cada um deles à população em questão. O objectivo do presente trabalho é resolver esse problema no caso de para cada um desses

grupos haver pelo menos um conjunto de propriedades expressáveis numericamente, funcionalmente independentes, tais que o sabermos se se encontram ou não definidas para um indivíduo juntamente com o seu valor no caso de se encontrarem definidas nos permite afirmar se o indivíduo pertence ou não ao grupo. A um conjunto de propriedades nestas condições dá-se o nome de conjunto definidor para esse grupo natural.

Introduzamos agora o conceito de agregação dum grupo para uma ou  $N$  propriedades como, a medida da potência das relações de vizinhança entre os valores de uma ou  $N$  propriedades nos indivíduos do grupo.

Foi possível mostrar que uma expressão conveniente para a agregação dum grupo em relação a uma propriedade era  $G(M) = \frac{1}{D[F]}$

onde:  $D[F]$  era a diferença média para valores dessa propriedade no grupo e  $G(M)$  era uma função da dimensão do grupo tal que:

$$G(M) = 1 \quad \text{se o grupo era infinito}$$

$$G(M) = \frac{M-1}{M} \quad \text{se o grupo tinha } M \text{ elementos.}$$

Igualmente encontrou-se como medida conveniente para a agregação relativa a  $N$  propriedades:

$$\Gamma^{(N)}(F_1, \dots, F_{N, M}) = G_{(M)} \frac{N}{\prod_{i=1}^N} \frac{1}{D[F_i]}$$

Onde os  $D[F_i]$  eram as distâncias médias para os valores das  $N$  propriedades no grupo.

Num dado momento para um dado grupo natural há um número finito de conjuntos definidores. Tomou-se como medida da agregação dum grupo o maior valor, da agregação do grupo em relação aos conjuntos definidores como medida da agregação do grupo.

Finalmente mostrou-se que uma medida conveniente do ajustamento duma classificação a uma população era o quociente da média pesada das agregações dos seus grupos de última ordem (aqueles que não se encontravam divididos), sendo os pesos as importâncias relativas dos mesmos, pelo número de grupos de última ordem.

Finalmente tratou-se brevemente o problema da estimação assintótica por estimadores não paramétricos.

O presente trabalho representa um primeiro estudo que o autor espera completar com outros que incidam sobre a teoria estatística do problema.

#### ANEXO 1: O argumento de Cauchy

Se o conjunto  $N'$  dos números naturais tivesse existência actual a cada número poderia fazer-se corresponder o seu dobro e obter-se-ia, assim, um segundo conjunto  $C$ . Por construção  $C$  tem tantos elementos quantos  $N'$ . No entanto, por outro lado,  $N'$  tem todos os elementos de  $C$  e ainda os números ímpares. Chegámos, portanto, a uma contra-dição.

#### SIMBOLOGIA

Neste trabalho foram utilizados os símbolos seguintes, que não são absolutamente usuais:

$N'$	—	Conjunto dos números naturais
$Rac$	—	Conjunto dos racionais
$Rac^+$	—	Conjunto dos racionais positivos
$R$	—	Conjunto dos números reais
$R^+$	—	Conjunto dos números reais positivos
$\{ o \}$	—	Conjunto formado pelo ponto «o»
$\{ +oo \}$	—	Conjunto formado pelo ponto «+oo»
$A \supset B$	—	«A» contém «B»
$A \cup B$	—	Reunião de «A» e de «B» e disjunção lógica
$A \cap B$	—	Intersecção de «A» com «B» e conjunção lógica
$A^N$	—	Potência cartesiana de ordem «N» de «A»
$\emptyset$	—	Conjunto vazio

$\bar{X}$	—	Qualquer que seja «X»
$\bar{Y}$	—	Existe pelo menos um «Y»
$\sim$	—	Não
$\longrightarrow$	—	Sinal de implicação lógica
$\rightarrow$	—	Tende para
$\xrightarrow{u}$	—	Tende uniformemente para
$\dots$	—	Se e só se
$\dots$	—	Donde
$::$	—	Tal que
$:::$	—	Tais que
$N_\epsilon$	—	Não é elemento de

*Nota* — Utilizou-se o símbolo  $N_\epsilon$  em vez do símbolo usual por a tipografia o não possuir.

## BIBLIOGRAFIA

1. FRAZER, D. A. S. — *Non Parametric Methods in Statistics* — J. Wiley & Sons — Nova York. 1957.
2. KELLEY, J. L. — *General Topology* — Van Nostrand Company Inc. — Nova York, 1955.
3. KENDALL M. G. and STUART A. — *The advanced theory of statistics* — Griffin — Londres, 1961.
4. LOEVE, M. — *Probability theory* — Van Nostrand Company Inc. — Nova York, 1960.
5. TIAGO DE OLIVEIRA, J. — *Estimação assintótica de parâmetros quase lineares* — Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, Lisboa, 1950.