Grado en Educación Primaria 16/17

Análisis de los conocimientos previos de estudiantes de sexto de Educación Primaria sobre Geometría.

Departamento de didáctica de las matemáticas

Realizado por:

Patricia otero Recuna

Tutelado por:

Dra. María del Mar Liñán García

D. /Dña.: Patricia Otero Recuna N.I.F: 77421173-E

Estudiante del Grado de Educación Primaria de la Universidad de Sevilla, curso 2017-2018 como autor/a de este documento académico, titulado:

Análisis de los conocimientos previos de estudiantes de sexto de Educación Primaria sobre Geometría.

Y presentado como Trabajo de Fin de Grado, para la obtención del título correspondiente,

DECLARO QUE,

Es fruto de mi trabajo personal, que no copio, que no utilizo ideas, formulaciones, citas integrales e ilustraciones diversas, sacadas de cualquier obra, artículo, memoria, etc. (en versión impresa o electrónica), sin mencionar de forma clara y estricta su origen, tanto en el cuerpo del texto como en la bibliografía.

Por ello, soy plenamente consciente de que le hecho de no respetar esos extremos es objeto de sanciones de índole académico y/o de otro orden.

En Sevilla, a 20 de Junio de 2018.

Fdo. Patricia Otero Recuna

Agradecimientos.

Después de un intenso periodo de trabajo, hoy es el día. Escribo este apartado de agradecimientos para finalizar mi Trabajo de Fin de Grado. Ha sido un ciclo de aprendizaje muy significativo, tanto a nivel académico como a nivel personal. Realizar esta labor ha tenido un gran impacto para mí, y por este motivo me gustaría agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado durante este proceso, desde mi familia, a mis compañeros y amigos y, por supuesto, a mis profesores, sin olvidar el colegio en el que pude poner en práctica este proyecto.

A mi familia, pilar fundamental en mi andadura académica, le debo un agradecimiento especial. A mis compañeros y amigos les agradezco el apoyo constante y la ayuda prestada.

Al colegio C.E.I.P Olivar de Quintos, de la localidad de Dos Hermanas (Sevilla), le agradezco el haberme dado la oportunidad de llevar a cabo este proyecto; a los padres de los alumnos por haberme concedido el permiso de trabajar con sus hijos; y a la tutora del grupo-clase por haberme proporcionado parte de su tiempo lectivo.

Por último, este Trabajo Fin de Grado no existiría ni habría cobrado cuerpo sino fuera por mi tutora Mar Liñán, que me ha brindado la confianza y la motivación para su realización. Por ello me gustaría dedicarle las siguientes palabras:

Contigo he vuelto a creer que enseñar matemáticas es más que hablar de fórmulas.
Eres el ejemplo que cualquier futuro docente querría tener como referencia.

“La esencia de las matemáticas está en su libertad”

(George Cantor)

Resumen.

El motivo principal que me ha empujado a llevar a cabo este trabajo, es la falta de preocupación por parte del colectivo docente sobre los conocimientos previos que tiene el alumnado, y que por lo tanto no cubren las necesidades de los mismos, no permitiéndoles un correcto proceso de aprendizaje en el área de las matemáticas, donde es imprescindible un aprendizaje progresivo.

Este plan se basa en una teoría tan relevante, conocida y básica en el campo de las matemáticas, como son los niveles de reconocimiento de la teoría del modelo de Van Hiele (1957), que tienen como objetivo principal, reconocer en qué nivel de los cinco que nos proporciona este modelo se encuentran cuatro niños de entre diez y once años. Para ello, hemos elaborado una serie de herramientas que constan de cuatro actividades donde la orientación y las relaciones interfigurales serán el cuerpo central de las mismas. A través de ellas, podremos obtener los datos que nos interesan y encuadrar a cada alumno en el nivel correspondiente.

Los resultados obtenidos nos siguen dando la razón de la importancia que tiene un buen método de enseñanza y una buena motivación para un correcto proceso de enseñanza-aprendizaje en el área de las matemáticas, ya que sigue siendo en líneas generales la asignatura marginada por los estudiantes.

Palabras clave.

Observación, análisis, matemáticas, enseñanza, ideas previas, aprendizaje, figuras planas.

Abstract.

The main reason that has impelled me to carry out this work, is the lack of concern on the part of the teaching staff about the previous knowledge that the students have, and that therefore they do not cover the needs of the same, not allowing them a correct learning process in the area of mathematics, where a progressive learning is essential.

This plan is based on a theory that is so relevant, known and basic in the field of mathematics, such as the levels of recognition of the model theory of Van Hiele (1957), whose main objective is to recognize at what level of the five that this model provides us with are four children between ten and eleven years old. To do this, we have developed a series of tools that consist of four activities where orientation and interfigural relationships will be the central body of them. Through them, we can obtain the data that interests us and frame each student at the corresponding level.

The obtained results continue giving us the reason of the importance that has a good teaching method and a good motivation for a correct process of teaching-learning in the area of mathematics, since it remains in general lines the subject marginalized by the students.

Key words.

Observation, analysis, mathematics, teaching, previous ideas, learning, flat shapes.

Las matemáticas las descubrió el hombre,

Y por lo tanto están al alcance de todos.

(Rychard Feyman)

Índice

1. Introducción.

La geometría es una de las ciencias más antiguas. En el Antiguo Egipto estaba muy desarrollada, según los textos de Heródoto, Estrabón y Diodoro Sículo (Serres, 2002). Euclides, en el siglo III a. C. configuró la geometría en forma axiomática, tratamiento que estableció una norma a seguir durante muchos siglos: la geometría euclidiana descrita en *Los Elementos*[1].

El estudio de la astronomía y la cartografía, tratando de determinar las posiciones de estrellas y planetas en la esfera celeste, sirvió como importante fuente de resolución de problemas geométricos durante más de un milenio. Descartes desarrolló simultáneamente el álgebra y la geometría, marcando una nueva etapa, donde las figuras geométricas, tales como las curvas planas, podrían ser representadas con funciones y ecuaciones (Álvarez, Martínez, 2002). La geometría se enriquece gracias a nuevos entes como Euler y Gauss (B. Boyer, 2007).

Siempre ha existido un lenguaje realmente universal desde los tiempos más remotos: el lenguaje gráfico. La idea de comunicar los pensamientos de una persona a otra por medio de figuras existió desde la antigüedad. Los hombres primitivos registraban sus ideas por medio de figuras hechas sobre pieles, piedras, paredes de cavernas, etc. Las formas más antiguas de escritura se realizaron con figuras, como los jeroglíficos egipcios. Más adelante, estas figuras transformadas en los símbolos abstractos que dieron origen a la escritura actual.

De las ruinas de antiguos edificios, acueductos, puentes, y otras estructuras de buena construcción se deduce que no pudieron haberse levantado sin la previa elaboración de dibujos cuidadosamente preparados que sirvieran de guía a sus constructores.

[1] *Los Elementos* (1482) de Euclides es un tratado matemático y geométrico que se compone de trece libros. Del primer libro al cuarto trata la geometría plana. Del quinto al décimo, las razones y las proporciones y los tres últimos hablan sobre la geometría de los cuerpos sólidos.

2. Justificación.

De todo el contenido que ofrece la asignatura de Matemáticas en Educación Primaria, me quedo[2] con el campo de la Geometría para la realización de este Trabajo de Fin de Grado. Es muy común que el estudiante tenga la impresión de que el trabajo en una mesa de dibujo no vaya a ser una actividad importante en su vida profesional, y que, por lo tanto, no tendrá sentido dedicar tiempo y esfuerzo en una rutina como puede ser la elaboración de dibujos.

No obstante, se logra definir gráficamente cualquier objeto mediante el uso de sus elementos más simples como son las líneas, los ángulos, las superficies... Es por lo tanto necesario que el estudiante de Geometría domine y exprese estos conceptos de forma correcta.

Como alumna de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Sevilla, me afirmo y reafirmo en el interés que suscita el campo de Didáctica de las Matemáticas, sobre todo después de haber realizado las prácticas docentes I, donde he podido observar toda la amplia gama de posibilidades que podríamos ofrecer a los alumnos[3] para una mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y poder hacer de ella una asignatura para disfrutar y que les resulte útil, y no una asignatura que cause miedo o rechazo.

Otro motivo de esta elección es la importancia que actualmente damos a lo tangible, a lo demostrable y a la realidad que nos rodea; hoy en día resulta difícil encontrar contextos donde la geometría no esté presente de forma directa o indirecta. Nosotros mismos, cuando tenemos que explicar o describir algo mediante gestos, realizamos figuras geométricas con las manos. Eso solo es uno de los muchos ejemplos que no somos capaces de ver, y que por lo tanto, no nos damos cuenta de que la Geometría se encuentra mucho más cerca de nuestra realidad de lo que nosotros pensamos.

[2] Dependiendo de la situación, quiero aclarar que haré uso de la *primera persona del singular* cuando hable de mis preferencias, motivaciones u opiniones personales. Cuando me refiera a aspectos objetos objetivos, teóricos, o que van a ser observables voy hacer uso de la *primera persona del plural*. La forma impersonal estará a lo largo de todo el trabajo ya que le otorga la seriedad que requiere un trabajo como este.

[3] Siempre que pueda haré uso de sustantivos colectivos, sin embargo será necesario el empleo de sustantivos que impliquen género para evitar repeticiones. Cogemos como referencia el reglamento de la RAE, que sostiene el uso del género masculino para referirse a ambos sexos, como el término genérico, sin pretensiones de discriminación.

Las prácticas docentes y la reflexión posterior sobre las mismas, han sido otro punto importante para que haya elegido llevar a cabo este este trabajo, sobre todo, cuando como docente en prácticas fui la encargada de elaborar y poner en práctica la asignatura de matemáticas. Ahí empezó mi temor, aquel que llevaba como mochila a la espalda desde la Educación Primaria, cuando conseguir un *progresa adecuadamente* en la asignatura se convertía en un motivo de festejo, cosa que no ocurría con el resto de las asignaturas ¿Por qué será?

Quizás por siempre me han enseñado las matemáticas como algo abstracto, distante de la realidad, no objetivo, no útil. Por ello, no encontraba en su aprendizaje utilidad alguna, porque así me lo hacían creer. Era totalmente consciente de que de entre todas las asignaturas, la de matemáticas era la oveja negra del rebaño y que aprobarlas suponía un martirio. Tal y como afirma el creador del método Jump Math[4] "las matemáticas son más fáciles de lo que gente cree; el problema con las matemáticas no es de los niños, sino de cómo se enseña".

Cuando tuve que enfrentarme al grupo-clase, en mi cabeza solo reinaba la preocupación. No quería que los estudiantes vivieran la misma situación desagradable que yo en mi etapa como estudiante de matemáticas en la Educación Primaria, y para ello puse en práctica todo lo aprendido en la asignatura de Didáctica de las Matemáticas. Hice uso de recursos materiales concretos, como el tangram…o materiales muy cercanos a su realidad como un cubo de rubik. Además, elaboré actividades dinámicas donde se mezclaban las matemáticas y el deporte, teniendo como referencia una experiencia sobre la relación entre el ángulo de tiro y la entrada del balón en una canasta de baloncesto, algo que ha resultado ser muy interesante (Abánades, 2018).

Me parece curioso para abordar en el campo de la geometría el tema sensitivo, ya que las personas estamos acostumbradas a dejarnos guiar por los sentidos. Con la geometría se puede aprender a manipular las cosas mentalmente sin necesidad de hacer uso de ninguno de ellos. Nos ofrece formas de pensamiento avanzado, donde solamente con nuestra mente podemos moldear los objetos y desmontar las figuras para convertirlas en otras, por lo que ejerceremos un desarrollo mental mucho más amplio que si solo nos dedicamos a realizarlo de manera tangible, favoreciendo una mayor rapidez mental.

[4] Jump Math es un programa de enseñanza-aprendizaje de matemáticas en el ámbito escolar que cubre educación infantil (a partir de los cinco años), los seis cursos de Educación Primaria y los dos primeros cursos de la E.S.O. Se define como un programa que aplica recursos probados, convirtiendo a todos los docentes en enseñantes.

De una manera más personal, siempre he tenido la necesidad de romper los esquemas en cualquier ámbito. ¿Por qué no también con la forma de enseñanza en el área de las matemáticas? Partiendo de esa base, me parece muy importante saber de qué conocimientos partimos con nuestros estudiantes y convertirlos a partir de sus conocimientos previos en ciudadanos críticos y con capacidad de reflexión. Cuando creamos alumnos con esa capacidad de reflexión y de crítica, es cuando les damos alas para poder crear ideas nuevas y salir de los límites establecidos tal y como hizo en su día Isaac Newton en el siglo XVII cuando estableció la ley de gravitación universal, entre otros muchos.

Reconozco que nunca me imaginé terminar esta etapa de mi vida hablando sobre algo relacionado con las matemáticas, por el simple hecho de que siempre me he considerado mejor estudiante en aquellas asignaturas que nada tenían que ver con los números. Cuando en primero de carrera supe que me tenía que volver a enfrentar a las matemáticas, empecé a asimilar que seguramente iba a ser mi asignatura pendiente; yo me sentía muy triste y agobiada, tanto que no me presenté al examen. Me decidí a intentarlo, y pedí ayuda. Me enseñaron a entenderlas, y esa fue la clave, entenderlas.

Empecé a creer en mi misma, a entender que las matemáticas no nos gustan porque no las entendemos o porque no nos las han explicado bien, pero si le dedicas tiempo y reflexionas sobre ellas, te das cuenta de que son un mundo diferente, capaz de aportarte cosas diferentes. A día de hoy puedo decir que gracias a los profesores de matemáticas de la Universidad de Sevilla, guardo buenos recuerdos estudiando esta asignatura.

Este trabajo tendrá como base una línea de investigación que consistirá en la elaboración y la puesta en práctica de una secuencia de actividades de las cuales podremos sacar la información necesaria que nos será de gran utilidad para poder completar nuestros objetivos. En nuestro caso, se trata de obtener los conocimientos previos de los estudiantes con los que vamos a trabajar, con el fin de conocer en qué nivel de reconocimiento, siguiendo el modelo de Van Hiele (1957) se encuentran. Para ello haremos uso de actividades relacionadas con la orientación y la geometría interfigural referente a las figuras planas.

Ello consta de dos grandes partes bien diferenciadas. La primera parte, y la que va ser desarrollada en este trabajo, corresponde, como he mencionado anteriormente, a la elaboración y la puesta en práctica de una secuencia de actividades en una clase de sexto de Educación Primaria dentro del bloque de Geometría. Para ello, es necesario tener presentes tres cuestiones muy importantes.

La primera de esas cuestiones es tener en cuenta el currículum vigente en el momento de realizar esta investigación, ya que es necesario cuando tenemos que comprobar qué se exige para la enseñanza de las matemáticas; en este caso concreto, en el bloque de geometría de Tercer Ciclo. Debemos tener en cuenta también la opinión de los expertos internacionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para ello consultaremos los Principios y Estándares para la Educación Matemática (NCTM, 2003), de donde obtendremos los estándares en geometría que corresponden, según dichos expertos en la materia, al curso con el que vamos a trabajar. Y finalmente, tendremos en cuenta el enfoque constructivista de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas aplicado a la geometría. Una vez que podamos poner en práctica nuestra secuencia de actividades con la ayuda de estos tres elementos, vamos a analizar los resultados que hemos obtenido a partir de la realización de las mismas y daremos paso a concretar con las conclusiones correspondientes.

Para la segunda parte de este trabajo de investigación, que se pretende elaborar en un futuro, se va a desarrollar el análisis del trabajo del conocimiento de un profesor novel en el ámbito de geometría en sexto de Educación primaria. Es decir, se trataría de realizar un análisis crítico de mi manera de enseñar geometría. Puesto que el tiempo para este TFG es limitado, no se puede abordar en esta fase del trabajo.

3. Marco teórico.

En este apartado del trabajo podremos observar las bases teóricas sobre las que se sustenta esta línea de investigación. Ya conocemos que el cuerpo principal de estudio es la puesta en práctica de cuatro actividades a un número reducido de alumnos. En nuestro caso, cuatro: dos niños y dos niñas. Trabajarán los contenidos de geometría interfigural y orientación en el espacio. A su vez, también trabajaremos una geometría dinámica frente a una geometría estática (Castelnuovo, D'Amore, 2012). Una geometría caracterizada por los grupos de invariantes (topológicos, proyectivos o métricos) que eran considerados de antemano sin prerelación alguna en las secuencias didácticas.

Posiblemente la base fundamental sobre la que se sustenta este trabajo de observación de las ideas previas de los alumnos, sobre el campo de la geometría interfigural y su capacidad de orientación en el espacio, es el modelo de Van Hiele (1957), que junto con otro gran experto como Hoffer (1981) nos ofrecen información sobre los distintos niveles de desarrollo mental en geometría y las estrategias básicas de la geometría respectivamente. Hoffer (1981), era consciente de lo poco que le gustaba a los niños[5] la geometría, algo de los que nosotros actualmente somos igual de conscientes. Ello se debe, al alto grado de memorización y no de comprensión sobre esta área. Este autor nos proporciona cinco estrategias para hacer el proceso de enseñanza de la geometría más efectiva. Las cinco estrategias que Hoffer (1981) enumera son: visuales, verbales, de dibujo, de lógicas y aplicadas.

- **Visuales.** Las habilidades visuales son las más importantes para el estudio del espacio. "En relación con la enseñanza de las matemática define la visualización como la actividad de razonamiento o proceso cognitivo basada en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, utilizados para resolver problemas o probar propiedades" (Gutiérrez, 1996).
- **Lenguaje.** Implica que el alumno sepa leer, interpretar, entender, y explicar de forma oral y escrita en este caso la geometría, utilizando el vocabulario y lenguaje matemático adecuado. Según Van Hiele (1957) (1970, citado por Bressan, Bogisic y Crego, 2000), los distintos niveles de razonamiento geométrico "no sólo se reflejan en la

[5] En medida de lo posible se hará uso de sustantivos colectivos; sin embargo, será necesario el empleo de sustantivos que impliquen género, con el fin de evitar repeticiones y errores tanto sintácticos como de concordancia. Es por ello, por lo que nos ceñiremos al reglamento de la RAE, el cual sostiene que se emplea el género masculino para referirse a ambos sexos, es decir, como término genérico, sin ánimo de discriminación alguna.

forma de solucionar problemas sino en la forma de expresarse y en el significado que se le da a determinado vocabulario”.

- **De dibujo.** Hacen alusión a representaciones externas, símbolos, dibujos…que pueden tener relación con las matemáticas. Esas representaciones que se hacen los niños no tienen en la mayoría de las ocasiones nada que ver con las matemáticas, pero nos aportan información acerca de sus esquemas mentales y sus habilidades cuando representan esas ideas. A partir de sus dibujos, debemos promover el uso de materiales didáctica como la regla como recurso para la enseñanza de la geometría.
- **Lógica.** Cuando hablamos de matemáticas, hablamos de razonamientos lógicos. Para que los estudiantes entiendan el concepto de lógica, es mejor empezar a tratarlo desde otro punto que no sean las matemáticas, para luego introducirle poco a poco en que consiste en este ámbito. La lógica engloba la abstracción, la justificación, la formulación… pero a pesar de ello, no se deben de dejar de lado las habilidades de creación.
- **De aplicación.** Se espera que los alumnos sean capaces de aplicar lo aprendido, y no solo en el ámbito matemático, sino también en el ámbito cotidiano. Tishman, Perkins y Jay (1995) sostienen que si no existe una transferencia rica y plena de lo que los alumnos aprenden, la educación no cumple su deber.

Por otro lado, el modelo de Van Hiele (1957) ofrece un marco para considerar los niveles de aprendizaje de los contenidos geométricos en los que se encuentran los alumnos con los que hemos trabajado, y por lo tanto nos ayudará para mejorar su aprendizaje sabiendo de dónde partir. Para ello, lo primero que necesitaremos saber es en que consiste cada uno de los apartados que queremos trabajar.

La geometría intrafigural es aquella que da cuenta de las relaciones en el interior de una figura determinada, es decir, la relación que tiene un cuerpo o una figura y sus componentes (vértices, lados, secciones, aristas, ángulos…). La geometría interfigural es aquella que tienen en cuenta las relaciones que se establecen entre distintos cuerpos o figuras estableciendo diferencias, semejanzas… y la transfigural es aquella relacionada con la interpretación, con el aspecto, donde podemos encontrar tres enfoques geométricos: topológico, proyectivo y euclideo.

El enfoque proyectivo es un tipo de representación, donde las transformaciones que sufre una figura original son muy profundas. En la figura pueden verse alterados los ángulos, las longitudes, las retas, las áreas, los volúmenes, los puntos y las proporciones. Lo que permanece invariable son las relaciones dentro/fuera, cerrado/abierto, continuidad/discontinuidad y el orden a lo largo de la trayectoria.

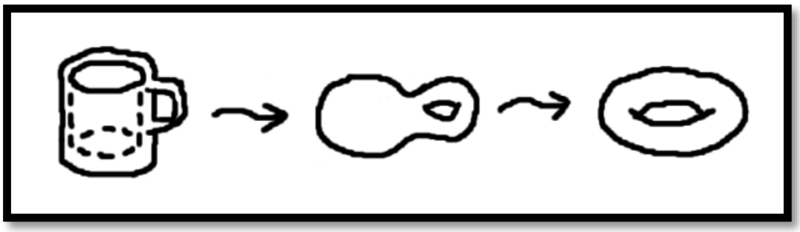


Imagen 1: *Enfoque topológico*

El enfoque proyectivo es aquel que comprende la representación de transformaciones en los cuales las longitudes y los ángulos experimentan cambios que dependen de la posición relativa entre el objeto representado y la fuente que lo plasma. Se busca que el objeto sea lo más parecido a lo real. En este caso, permanecen invariables la proporcionalidad entre las líneas, la representación de puntos, líneas y ángulos y la rectitud de las líneas. Lo único que cambia es la longitud de las líneas y la magnitud de los ángulos.

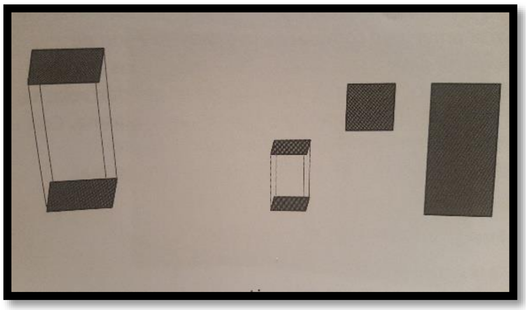


Imagen 2: *Enfoque proyectivo*

El enfoque euclídeo se basa en el estudio y la representación de las longitudes, ángulos, áreas y volúmenes como propiedades que permanecen constantes, cuando las figuras representadas son sometidas a transformaciones rígidas, como ocurre con la simetría, las traslaciones o los giros. No cambia ni la medida de los segmentos, superficies o volúmenes; ni la medida de los ángulos ni la forma.

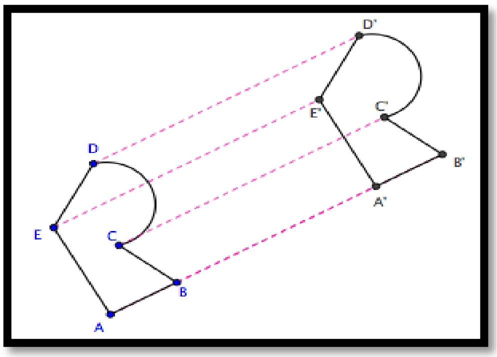


Imagen 3: *Enfoque euclideo. Representación de una traslación.*

El modelo de Van Hiele (1957) se trata de una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Se encasilla dentro de la didáctica de la matemática y específicamente en la didáctica de la geometría. Tiene su origen en 1957, en las disertaciones doctorales de Dina Van Hiele-Geldof y Pierre Van Hiele en la Universidad de Utrecht, Holanda.

El modelo abarca dos aspectos:

- **Descriptivo:** mediante el cual se identifican diferentes formas de razonamiento geométrico de los individuos y se puede valorar el progreso de estos.
- **Instructivo:** marca unas pautas a seguir por los profesores para favorecer el avance de los estudiantes en su nivel de razonamiento geométrico.

Como indica su nombre, esta teoría de aprendizaje describe las maneras o formas de razonamiento de los alumnos de Geometría.

El modelo de Van Hiele (1957) defiende los siguientes enunciados:

- Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas.
- Un estudiante solo podrá comprender realmente aquellas partes de las matemáticas que el profesor le presente de manera adecuada a su nivel de razonamiento.
- Si una relación matemática no puede ser expresada en el nivel actual de razonamiento de los estudiantes, será necesario esperar a que estos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.
- No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

En la descripción existente se pueden encontrar listas completas con características de los distintos niveles de Van Hiele (1957) en las cuales se usan 2 numeraciones de los cinco niveles, pudiendo empezar en 0 y pudiendo empezar en 1, pero siempre teniendo en consideración los cinco niveles.

Propiedades más importantes que permiten caracterizar con claridad cada nivel y diferenciarlo de sus adyacentes: Nivel 0: Visualización o Reconocimiento Nivel 1: Análisis Nivel 2: Ordenación o clasificación Nivel 3: Deducción Formal Nivel 4: Rigor

- Nivel 0: en este nivel los objetos se perciben en su totalidad como un todo, no diferenciando sus características y propiedades. Las descripciones son visuales y tendientes a asemejarlas con elementos familiares.

Ejemplo: identifica paralelogramos en un conjunto de figuras. Identifica ángulos y triángulos en diferentes posiciones en imágenes.

- Nivel 1: se perciben propiedades de los objetos geométricos. Pueden describir objetos a través de sus propiedades (ya no solo visualmente). Pero no puede relacionar las propiedades unas con otras.

Ejemplo: un cuadrado tiene lados iguales. Un cuadrado tiene ángulos iguales

- Nivel 2: describen los objetos y figuras de manera formal. Entienden los significados de las definiciones. Reconocen como algunas propiedades derivan de otras. Establecen relaciones entre propiedades y sus consecuencias. Los estudiantes son capaces de seguir demostraciones. Aunque no las entienden como un todo, ya que, con su razonamiento lógico solo son capaces de seguir pasos individuales.

Ejemplo: en un paralelogramo, lados opuestos iguales implican lados opuestos paralelos. Lados opuestos paralelos implican lados opuestos iguales.

- Nivel 3: en este nivel se realizan deducciones y demostraciones. Se entiende la naturaleza axiomática y se comprende las propiedades y se formalizan en sistemas axiomáticos. Van Hiele (1957) llama a este nivel la esencia de la matemática

Ejemplo: demuestra de forma sintética o analítica que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

- Nivel 4: se trabaja la geometría sin necesidad de objetos geométricos concretos. Se conoce la existencia de diferentes sistemas axiomáticos y se puede analizar y comparar. Se aceptará una demostración contraria a la intuición y al sentido común si el argumento es válido.

Diversas investigaciones señalan que los estudiantes no universitarios, como mucho, alcanzan los tres primeros niveles. Es importante señalar que, un estudiante puede estar, según el contenido trabajado, en un nivel u otro distinto.

Además de dar luz sobre el pensamiento que es específico en cada nivel, identifican algunas generalidades que caracterizan el modelo. Estas propiedades son particularmente significativas para los educadores, porque dan una guía para tomar decisiones instructivas.

1. Secuencial. Como en la mayoría de las teorías del desarrollo, una persona debe pasar por los niveles en un orden. Para funcionar con éxito en un nivel particular, un estudiante debe haber adquirido las estrategias del nivel precedente.

2. Progresivo. El progreso (o su falta) de un nivel a otro depende más del contenido y método de instrucción recibido que de la edad: ningún método de instrucción permite a un estudiante saltarse un nivel; algunos métodos favorecen el progreso, mientras otros lo retrasan o bloquean el movimiento entre niveles.

Van Hiele (1957) señala que es posible enseñar "a un estudiante diestro habilidades por encima de su nivel actual, igual que se puede entrenar a los niños en la aritmética o las fracciones sin decirles qué es lo que significan las fracciones, o a alumnos mayores a derivar e integrar, aunque no sepan qué son las derivadas e integrales”. El modelo de Van Hiele (1957) engloba una serie de propiedades, que describimos a continuación:

- **Intrínseco y extrínseco.** Los objetos inherentes a un nivel se convierten en los objetos de estudio del nivel siguiente. Por ejemplo, en el nivel 0 solo se percibe la forma de una figura. La figura es determinada por sus propiedades, pero no es hasta el nivel-1 que se analiza y se descubren sus componentes y propiedades.

- **Lingüístico.** Cada nivel tiene sus propios símbolos lingüísticos y un sistema propio de relaciones que conectan estos símbolos. Una relación que es "correcta" en un cierto nivel se puede modificar en otro. Por ejemplo, una figura puede tener más de un nombre (inclusión de clases)- un cuadrado es también un rectángulo (¡y un paralelogramo!). Un estudiante en el nivel-1 no conceptualiza que este tipo de inclusiones se pueda dar. Este tipo de nociones y el lenguaje que viene acompañado, no obstante, es fundamental en el nivel-2.

- **Emparejamiento.** Si el estudiante está en un nivel y la instrucción en otro diferente, puede que no se dé el aprendizaje deseado y el progreso. En particular, si el profesor, los materiales, el contenido, el vocabulario, y todo lo demás, están en un nivel superior al del alumno, el estudiante no será capaz de seguir el proceso de pensamiento utilizado.

Para completar la descripción del modelo es necesario conocer los pasos que debe seguir un profesor para ayudar a sus alumnos a subir al siguiente nivel de razonamiento.

Las "fases de aprendizaje" son etapas en la graduación y organización de las actividades que debe realizar un estudiante para adquirir las experiencias que le lleven al nivel superior de razonamiento. Es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etc.) con los que tendrán que trabajar, para despúes centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos. Las fases de aprendizaje propuestas por Van Hiele (1957) son cinco:

- **1**. **Información:** se trata de una fase de toma de contacto: el profesor debe informar a los estudiantes sobre el campo de estudio en el que van a trabajar, qué tipo de problemas se van a plantear, qué materiales van a utilizar, etc. Así mismo, los alumnos aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho. Esta fase sirve para dirigir la atención de los estudiantes y permitirles que sepan qué tipo de trabajo van a hacer, y para que el profesor descubra qué nivel de razonamiento tienen sus alumnos en el nuevo tema y qué saben del mismo.
- **2**. **Orientación dirigida:** en esta fase los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en el material que les ha sido proporcionado. El objetivo principal de esta fase es conseguir que los estudiantes descubran, comprendan y aprendan cuáles son los conceptos, propiedades, figuras, etc. principales en el área de la geometría que están estudiando. Las actividades que se les propongan deben estar convenientemente dirigidas hacia los conceptos, propiedades, etc. que deben estudiar. El trabajo que vayan a hacer estará seleccionado de tal forma que los conceptos y estructuras característicos se les presenten de forma progresiva.
- **3**. **Explicitación**: entre las finalidades principales de esta fase es hacer que los estudiantes intercambien sus experiencias, que comenten las regularidades que

han observado, que expliquen cómo han resuelto las actividades, todo ello dentro de un contexto de diálogo en el grupo. Es interesante que surjan puntos de vista divergentes, ya que el intento de cada estudiante por justificar su opinión hará que tenga que analizar con cuidado sus ideas (o las de su compañero), que ordenarlas y que expresarlas con claridad.

- **4**. **Orientación libre:** en este momento los alumnos deberán aplicar los conocimientos y lenguaje que acaban de adquirir a otras investigaciones diferentes de las anteriores. El profesor debe plantear problemas que, preferiblemente, puedan desarrollarse de diversas formas o que puedan llevar a diferentes soluciones, para de esta forma perfeccionar los conocimientos que los estudiantes poseen sobre el campo de estudio. En estos problemas se colocarán indicios que muestren el camino a seguir, pero de forma que el estudiante tenga que combinarlos adecuadamente, aplicando los conocimientos y la forma de razonar que ha adquirido en las fases anteriores.
- **5**. **Integración:** en esta fase los estudiantes deben adquirir una visión general de los contenidos y métodos que tienen a su disposición, relacionando los nuevos conocimientos con otros campos que hayan estudiado anteriormente; se trata de condensar en un todo el dominio que ha explorado su pensamiento. En esta fase el profesor puede fomentar este trabajo proporcionando comprensiones globales, pero es importante que estas comprensiones no le aporten ningún concepto o propiedad nuevos al estudiante: Solamente deben ser una acumulación, comparación y combinación de cosas que ya conoce.

En su trabajos los Van Hiele (1957) enfatizan en la idea que "el paso de un nivel a otro depende más de la enseñanza recibida que de la edad o madurez" (Fouz, 2000), es decir, dan una gran importancia a la organización del proceso de enseñanza-aprendizaje así como a las actividades diseñadas y los materiales utilizados.

Otra de las bases de este trabajo es la "*Orden de 17 de Mayo de 2015, que desarrolla el currículum de la Educación Primaria en Andalucía"* y "*Los principios y estándares para la Educación en el ámbito de las matemáticas" (*NTCM, SAEM Thales 2003). Gracias a estas dos fuentes de información podré saber cuáles son los contenidos que debo trabajar, en este caso, en un sexto de primaria. Estos dos documentos son dos elementos diferentes al nombrado anteriormente, como es la teoría de Van Hiele (1957), pero que nos servirán como ayuda y complementación a esta, ya que siempre es importante tener en cuenta la normativa vigente y los contenidos que la ley nos marca para alcanzar unos objetivos con respecto al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Como hemos mencionado, vamos a tener en cuenta el currículum de Educación Primaria. *La orden de 17 de Marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la educación primaria en Andalucía,* contiene diversas áreas. Nosotros nos vamos a enfocar en el área de las matemáticas. Dentro de esta área, vamos a diferenciar cinco bloques de contenidos:

Bloque 1. “Procesos, métodos y actitudes matemáticas”.

Bloque 2. “Números”.

Bloque 3. “Medida”.

Bloque 4. “Geometría”.

Bloque 5. “Estadística y probabilidad”.

Dentro del currículum, nos centramos en el bloque 5, relacionado con la geometría, donde nuestros alumnos deberán conocer, clasificar, analizar y relacionar figuras geométricas, además de tener la capacidad de situarse y orientarse en el espacio. La orientación espacial, puede parecer que no tiene nada que ver con el bloque de geometría, pero es un contenido que también se encuentra dentro de este bloque, ya que la perspectiva y el espacio tienen relación con la capacidad de visualizar figuras geométricas y sus distintas perspectivas, sobre todo, cuando más adelante, los alumnos se enfrenten a la bidimensionalidad y trimensionalidad.

Para este trabajo, se necesitan además de contenidos generalistas, unos contenidos más específicos, que también nos aporta el currículum y que ya son más particulares del tercer ciclo, en especial en este caso, sexto de primaria. Si observamos la orden, los contenidos están separados por bloques y ciclos. Los contenidos del tercer ciclo, en este caso, del bloque 4 (p. 405, 406) correspondiente al bloque de geometría son los siguientes:

4.1 La situación en el plano y en el espacio.
4.2 Posiciones relativas de rectas y circunferencias.
4.3. Ángulos en distintas posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice.
4.4. Sistema de coordenadas cartesianas.
4.5. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros...

4.6. La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas.
4.7. Figuras planas: elementos, relaciones y clasificación.
4.8. Concavidad y convexidad de figuras planas.
4.9. Identificación y denominación de polígonos atendiendo al número de lados.
4.10. Perímetro y área. Cálculo de perímetros y áreas.
4.11. La circunferencia y el círculo.
4.12. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular
4.13. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
4.14. Cuerpos geométricos: elementos, relaciones y clasificación. Poliedros. Elementos básicos: vértices, caras y aristas. Tipos de poliedros.
4.15. Cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera.
4.16. Regularidades y simetrías: reconocimiento de regularidades.
4.17. Reconocimiento de simetrías en figuras y objetos.
4.18. Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un elemento dado.
4.19. Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.
4.20. Utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para la construcción y exploración de formas geométricas.
4.21. Interés por la precisión en la descripción y representación de formas geométricas.
4.22. Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones ante situaciones de incertidumbre relacionadas con la organización y utilización del espacio.
4.23. Confianza en las propias posibilidades para utilizar las construcciones geométricas, los objetos y las relaciones espaciales para resolver problemas en situaciones reales.
4.24. Interés por la presentación clara y ordenada de los trabajos geométricos.

Después de analizar los contenidos del bloque de geometría, tema central de nuestro trabajo, destacamos los siguientes, ya que son los que hemos destacado por tener especial relación con lo que vamos a llevar a cabo:

- 4.1. La situación en el plano y en el espacio.
- 4.7. Figuras planas: elementos, relaciones y clasificación.
- 4.9. Identificación y denominación de polígonos atendiendo al número de lados.
- 4.10. Perímetro y área. Cálculo de perímetros y áreas.

- 4.13. Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
- 4.22. Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones ante situaciones de incertidumbre relacionadas con la organización y utilización del espacio.
- 4.23. Confianza en las propias posibilidades para utilizar las construcciones geométricas, los objetos y las relaciones espaciales para resolver problemas en situaciones reales.

Una vez mencionado el currículum, también hemos hecho alusión a los principios y estándares para la educación matemática marcada por la NCTM (SAEM, Thales, 2003). Los principios orientan más a la acción educativa y forman parte de las grandes decisiones en relación al currículo y están implicados en ámbitos sociales, políticos y económicos. El NCTM propone una serie de principios curriculares que nada tiene que ver con el contenido matemático, pero que estamos obligados a tratar cuando impartamos la asignatura de matemáticas. Esos principios son los siguientes:

1. **Igualdad.** Defiende que todas las personas son aptas para aprender el contenido matemático.
2. **Currículo.** Es importante seleccionar bien los contenidos y que estos estén relacionados y acordes al nivel de madurez del alumno.
3. **Enseñanza.** Es importante que los alumnos aprendan matemáticas partiendo de la experiencia y de su conocimiento previo.
4. **Evaluación.** La evaluación debe ser siempre constructivista, ya que es necesario que esa evaluación apoye tanto al profesor como al alumno, y le ayude a sacar información importante para una mejora del proceso entre ambos.
5. **Tecnología.** La tecnología de usarse como modo de refuerzo del aprendizaje, ya que la ciencia avanza y es algo que está en la vida cotidiana de las personas.

Los estándares curriculares tratan de dar respuesta a la pregunta: ¿qué contenidos y procesos matemáticos deberían los estudiantes aprender a conocer y a ser capaces de usar cuando avancen en su educación? Los cinco estándares de contenidos se organizan sobre la base de áreas del contenido matemático, y son: Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y probabilidad. Los otros cinco estándares son de procesos y mediante ellos se presentan modos destacados de adquirir y usar el conocimiento: resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representación.

La etapa 3-5 es la que correspondería con la edad 10-11 años de sexto de EPO del sistema de enseñanza español. En esta etapa, la destreza en el razonamiento aumenta, por lo que les permite investigar problemas de mayor complejidad y estudiar propiedades geométricas. A medida que van pasando del nivel 3 al 5, deben de ir adquiriendo claridad y precisión para describir figuras geométricas y clasificarlos en las distintas categorías como rectángulos, triángulos, pirámides o prismas. Deben desarrollar conocimientos acerca de las relaciones que pueden tener las figuras entre sí, y explorar la localización y la orientación. Cuando los estudiantes clasifican, construyen, dibujan, modelizan y localizan, se logra desarrollar la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Los estándares que se prevén para esta etapa son los siguientes:

a) Analizar las características y propiedades de figuras geométricas de dos o tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas (p.236).

El alumnado debe ser capaz de utilizar el vocabulario adecuado para describir las figuras, clasificar esas figuras atendiendo a sus propiedades y las características que las definen.

b) Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación (p.236).

Con eso se trata de dibujar figuras geométricas en el plano y poder observar sus relaciones de otra forma, comprobando por donde pasan sus diagonales, rectas paralelas…

c) Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas (p.236).

Entender que una figura sufra cambios es importante en esta etapa, y que sus conocimientos les lleven a anticiparse a lo que ocurrirá con esa figura, nos aporta muchos datos acerca de su nivel de conocimiento de una figura geométrica.

d) Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas (p.236).

Este estándar está bastante relacionado con el trabajo que estamos realizando. Es primordial que el alumno sepa dibujar y construir objetos geométricos, así como crear y describir las imágenes mentales. Además, reconocer ideas y relaciones geométricas y aplicarlas a otras disciplinas y a problemas que le surjan en la vida diaria es muy útil e importante para los estudiantes.

Nosotros nos encontramos ante un sexto de primaria, una etapa prácticamente de cambio donde los estudiantes van a continuar sus estudios de secundaria en unos pocos meses. Por ello, se considera muy importante el pensamiento geométrico, ya que van a necesitar de ese aprendizaje para nuevos contenidos a los que se tendrán que enfrentar en su nueva etapa.

4. Metodología.

A continuación, vamos a poder observar una descripción detallada de la metodología, bajo el mando de una serie de elementos como son la descripción del entorno escolar, qué vamos hacer, los objetivos, cómo lo vamos a hacer, cómo vamos a llevar a cabo las actividades y qué material necesitamos.

- **Descripción del entorno escolar.**

En primer lugar, tenemos que tener en cuenta el contexto escolar del centro. El colegio de Educación Primaria que me ha dado la oportunidad de llevar a cabo este trabajo es un colegio público, y pertenece al ayuntamiento de Dos Hermanas. Cuenta con tres líneas desde Educación Infantil hasta la finalización de la Educación Primaria. Cada familia tiene mínimo dos de sus hijos estudiando en el mismo centro.

Actualmente el centro se encuentra en el segundo núcleo más importante del Ayuntamiento, y es una zona prácticamente nueva en construcción, por la que discurría una vía romana. En este momento, es uno de los ligares más reclamados por las familias para vivir, debido al gran crecimiento de la zona y sus alrededores, los parques, zonas verdes, clubs y numerosas actividades y centros sociales a los que los alumnos y las familias pueden acudir.

En cuanto al contexto socio económico de los estudiantes del centro, es bastante alto, ya que muchas de estas familias, tanto los padres como las madres se dedican a trabajar en el área financiera, en el área de la educación y en el área de las ciencias de la salud. Sabemos que ambos padres trabajan fuera de casa, porque el 80% del alumnado come en el comedor, y de eso se tienen que hacer cargo los padres aparte, no es algo que proporcione el centro educativo.

Aunque sea un centro público, ofrecen la posibilidad de que los alumnos lleven uniforme, y muchos padres lo consideran acertado por el hecho de que así no tienen que pensar en la ropa que les ponen a sus hijos. La mayoría lleva uniforme, y también es un gasto aparte que los padres deben de hacerse cargo. Otra cosa que me llama la atención es que los materiales apartes de los libros, que los presta el centro, también son pagados por los padres al inicio de curso, tienen como una cooperativa donde ponen un dinero al mes y compran material para los alumnos. Solo podrá recibir material de ese tipo el alumno cuyo padre pague la cuota mensual del material. El nivel de vida de estos alumnos es bastante alto. Y en muchas ocasiones pensé que para ser un centro público, muchas cosas parecen funcionar como en un colegio privado.

El curso con el que voy a realizar las actividades es sexto de Educación Primaria, es decir, con niños de 10 y 11 años. El grupo está muy bien compensando en cuanto al género, ya que hay tantas niñas como niños. El rendimiento de la clase es muy bueno, lo que se puede observar en los numerosos premios que han ganado algunos de los alumnos de esta clase en literatura o pintura entre otras cosas. Sabemos a ciencia cierta que hay una niña con altas capacidades y dos niños que tienen problemas de aprendizaje debido a su falta de atención. El curso es impecable, y todos los profesores del centro son conscientes de que este curso puede llegar muy lejos.

- **¿Qué vamos a hacer?**

La secuencia de actividades se va a llevar a cabo, como hemos dicho anteriormente, con cuatro alumnos[6] de los 25 de la clase, en este caso con dos niños y dos niñas, que en principio, entre ellos tienen conocimientos muy diferentes en la rama de las matemáticas, asegurándonos así de obtener respuestas variadas, y sacar conclusiones ricas. Los alumnos los ha escogido la tutora de esta clase en concreto, aunque yo también conocía la clase porque es donde he realizado las prácticas en este año. Las notas de estos cuatro alumnos son dispares, teniendo uno de ellos un gran nivel, y otro de ellos un aprobado muy justo. Los otros dos se encuentran en un nivel medio.

Con las actividades que llevemos a cabo pretendemos obtener las ideas previas de estos cuatro estudiantes y conocer así conocer en qué nivel de reconocimiento se encuentran siguiendo el modelo de Van Hiele (1957), además de observar también otros datos referentes a la orientación espacial como inicio de trabajo para el área de geometría.

[6] Contamos con todos los permisos necesarios, tanto por parte del centro como por parte de los padres para llevar a cabo la propuesta de actividades con los estudiantes.

- **Objetivos**

Los objetivos principales que se pretendemos alcanzar mediante la secuencia de actividades son los siguientes:

- Conocer los conocimientos previos de los alumnos en relación a la orientación en el espacio.
- Conocer los conocimientos previos de los alumnos en relación a las relaciones interfigurales.
- Conocer en qué nivel se encuentran estos estudiantes siguiendo el modelo matemático de Van Hiele (1957) (1957).

El primer objetivo presentado vamos a poder analizarlo mejor en las dos primeras actividades, ya que trabajan la perspectiva y la orientación en el espacio. El segundo objetivo ya está más presente en la tercera y cuarta actividad, donde los alumnos van a tener que reconocer y visualizar figuras dentro de otras. Y mediante el análisis de las cuatro actividades, en algunas se podrá observar en mayor medida que en otras, vamos a poder obtener información sobre el eje principal de este trabajo: conocer en qué nivel de la geometría matemática se encuentran estos alumnos, haciendo referencia como hemos mencionado al modelo de Van Hiele (1957).

Una vez que tenemos los objetivos principales desarrollados, hay otro tipo de objetivos más secundarios que me gustaría alcanzar:

- Conocer si los estudiantes siguen los mismos pasos para resolver los problemas que se le presentan.
- Observar si los estudiantes hacen uso de la lógica.
- Comprobar si una manera diferente de trabajar con las matemáticas tiene para ellos un punto más motivacional.

- **¿Cómo lo vamos hacer?**

En todas las actividades es complicado evidenciar todo lo que pretendemos, pero una vez que hayamos hecho la puesta en práctica de la secuencia de actividades, vamos a proceder a la recogida de las respuestas y analizarlas profundamente, junto con los distintos vídeos que hemos hecho mientras poníamos en práctica las actividades con el fin de que no se nos escapase ningún detalle importante. La evaluación y el análisis serán de forma individual, teniendo en cuenta lo que podamos observar en los vídeos, las respuestas que ellos mismos han escrito debajo de las actividades propuestas y también usando las tablas de observación que hemos realizado para poder coger datos de una manera rápida y eficaz durante el proceso.

Una vez que tengamos todo eso, vamos a finalizar desarrollando una conclusión del trabajo en general, de cada uno de los puntos que he considerado importantes, valorando sobre todo si los objetivos se han cumplido en mayor o menos medida, así como si realizar este trabajo era lo que me esperaba, es decir, que si las expectativas las he visto cumplidas, ampliadas o si no era lo que yo me esperaba.

- **¿Cómo vamos a llevar a cabo las actividades?**

La secuencia de las cuatro actividades que vamos a implantar se realizará en el mismo día a los cuatro niños juntos, en concreto en la biblioteca del centro, porque no han dado permiso para disponer de un aula. Considero que no son actividades que requieran de más de una sesión normal de aula, pero he tenido que adaptarme al tiempo que me ha limitado la tutora de los cuatro alumnos.

Para las actividades, primero he realizado una recopilación de todas aquellas actividades que me parecían interesantes para cumplimentar mis objetivos, haciendo uso libros y páginas webs que me han sido útiles a la hora de buscar información. Luego, he escogido aquellas que creo que me pueden dar más datos e información más concreta para evaluar lo que este trabajo tiene como objetivo final, y con ello que me pueda aportar más datos de los estudiantes con lo que vamos a trabajar.

Para que no consideraran ni sintieran rechazo a la hora de realizar este trabajo, simplemente una vez que la tutora me dio permiso y me dijo la hora de la que disponía, fui a recoger a esos alumnos y una forma totalmente natural los llevé a la biblioteca y les dije que íbamos hacer un pequeño experimento sobre matemáticas con ellos, pero que en ningún caso iban a ser evaluados.

Para que no sintieran que le estábamos robando su tiempo, negocié con su tutora para que tuvieran un poco más de tiempo libre en la pista descubierta, de esta forma también darle un poco de motivación extra.

- **¿Qué vamos a necesitar?**

En primer lugar para que se pueda llevar a cabo nuestra secuencia de actividades, es un espacio donde poder realizarlas. En ese caso, nos han permitido hacer uso de la biblioteca del centro, porque lo que esa necesidad ya la tenemos cubierta.

Por otro lado, necesitamos los materiales con los que los niños van a trabajar, que vienen siendo folios por si quieres escribir en sucio, las fichas con las actividades preparadas donde tienen que contestar, recortables preparados con las distintas figuras geométricas y material de escritura y pintura. Todo el material se lo voy a proporcionar yo misma.

Con el fin de realizar una evaluación más detallada, rápida y eficaz del proceso, hemos creado una tabla de evaluación procesual, que iremos completando durante la realización de las actividades y al finalizar las mismas. Cada alumno será evaluado mediante su tabla correspondiente.

No he tomado de referencia ninguna tabla de evaluación del alumnado. Simplemente he puesto una serie de ítems que he considerado necesarios para la evaluación del alumno, haciendo uso de la respuestas “si”, “no”, “a veces” en cualquier caso (anexo 1). De esta forma, vamos a poder observar datos de los estudiantes a primera vista de una manera rápida y concisa. Además de ello, este formato tan visual, nos permite que podamos ver muchos datos de forma directa y ya sepamos más o menos donde está situado cada alumno.

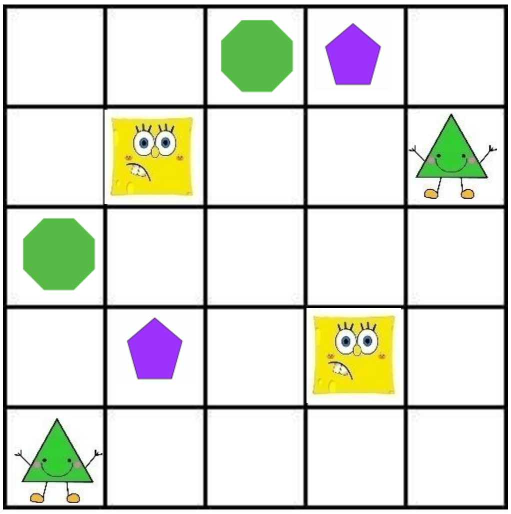
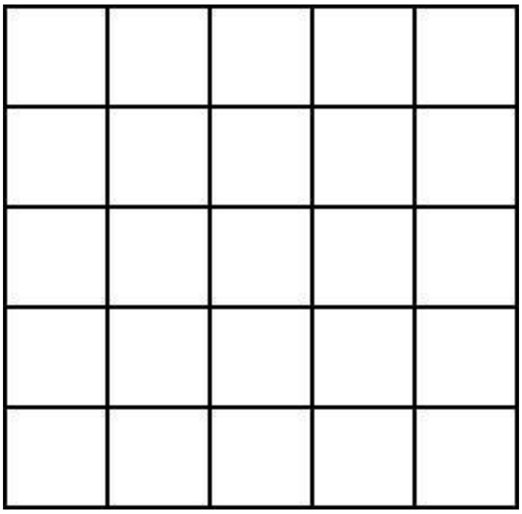
5. Descripción de las actividades.

A continuación, se podrá observar la secuencia de actividades que será posteriormente llevada al aula y analizada para obtener nuestras conclusiones y comprobar si los objetivos de los que se partía en principio han podido completarse o, por el contrario, la información nos aporta otro tipo de datos finales. Dentro de la propia actividad encontraremos cuál es el objetivo que se pretende con ella, así como también las posibilidades que nos da la actividad con los estudiantes.

Actividad 1.

La primera actividad que vamos a realizar con el grupo seleccionado de alumnos, es una actividad propuesta por Mª Carmen Chamorro (Chamorro, 2003), solo que adaptada a un nivel de sexto de Educación Primaria. Se la presentamos a los alumnos de la siguiente manera:

Dentro del aula, en el suelo, encontrareis una cuadrado de gran tamaño formado por 25 cuadrículas en blanco. En mi mesa, vais a tener una serie de cuadrados más pequeños con algunas de sus cuadrículas rellenas con polígonos de papel. Vuestra misión es coger un ejemplo de los que tendréis en mi mesa y, con lápices de colores, debéis de elaborar una lista en un papel en blanco con todas las figuras que habéis podido observar en la plantilla. Una vez que tengáis la lista gráfica elaborada, vendréis a junto e mí, y yo os proporcionaré lo que necesitéis para poder completar las cuadrículas. El modelo de cuadrícula se quedará en la mesa del profesor, y a medida que vosotros me pidáis lo que necesitéis para hacer el ejercicio, yo os lo iré dando para que lo completéis. Lo vais a realizar uno detrás del otro, de forma consecutiva.

(Chamorro, (2003) defiende en numerosas ocasiones que los conocimientos que se imparten en contenidos geométricos en la escuela, sirven de muy poca ayuda para los estudiantes en la vida cotidiana. De ahí que con esta actividad podamos abordar y mejorar todos esos problemas que los estudiantes tienen cuando se sienten en una situación de confrontación con el espacio, y que les permita conseguir una mayor rapidez y eficacia a la hora de moverse con soltura por el espacio que le rodea, ya sea leer un mapa cuando están perdidos o leer el mapa del metro, entre otros ejemplos.

El objetivo principal de la actividad es observar los conocimientos previos de los estudiantes en relación a la orientación espacial en este caso, en una cuadricula. De este modo, podremos también empezar a encuadrar a cada estudiante en un nivel u otro según el modelo de Van Hiele (1957).

¿Qué es lo que nos podremos encontrar en la siguiente actividad? Como ya son niños de sexto Educación Primaria, para que no realicen el ejercicio de manera memorística, lo que hay que hacer es utilizar variedad de colores y formas, que aunque lo intentarán hacer de memoria, en ocasiones no serán capaces, por lo que deberán de elaborar otro esquema mental que les permita una mejor ejecución del ejercicio. Una parte positiva del ejercicio, es que ellos mismos pueden comprobar si lo han realizado correctamente o la estrategia utilizada para poner las figuras no ha sido la más adecuada, porque pueden faltar o sobrar pegatinas, o no haber pedido las pegatinas correctas.

Las variables didácticas de la actividad son: el número de viajes que podrán hacer y el número de cuadros que tendrá la cuadrícula; así, se irá limitando el número de viajes y la complejidad de la cuadrícula irá en aumento.

Mi papel como maestra es meramente motivador de la actividad, ya que no ejercería ningún tipo de corrección sobre ella, sino que ellos mismos se irán dando cuenta de sus propios errores.

Cuando tengamos las plantillas de los alumnos podremos analizarlas y sacar nuestras conclusiones, evaluando tanto las estrategias utilizadas para la cumplimentación de las cuadrículas como la visualización de las mismas.

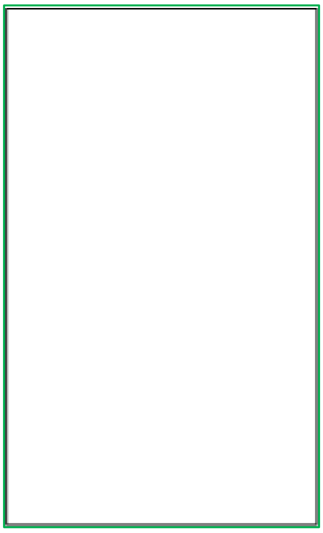
Actividad 2.

Siguiendo con el tema de la perspectiva espacial, vamos a continuar con otro ejercicio muy básico pero que nos puede aportar muchos datos acerca del nivel en el que se encuentran los alumnos. La actividad se la vamos a explicar a los estudiantes de esta forma:

En la pizarra tenéis dos figuras, una representada con la letra A, y otra representada con la parte B. Una vez que visualicéis las imágenes, tenéis que contestar a las siguientes preguntas:

- *¿Cuál de las dos figuras es un rectángulo? ¿Por qué?*
- *¿Cuántos lados tiene cada figura? ¿Y ángulos?*
- *Medir las dos figuras con una regla ¿Miden lo mismo?*
- *Enumerar del 1 al 4 los lados de cada figura. ¿Se apoyan las figuras sobre alguno de sus lados? ¿Eso significa que el lado sobre el que está apoyado es la base?*
- *¿Qué es la base de una figura?*

Una vez que los alumnos contesten a esas preguntas, vamos a coger un objeto real que tengan la misma forma que la figura de las imágenes, como puede ser un libro de texto, por ejemplo. Entonces vamos a intentar mediante un proceso de guía, que ellos vean que en ese caso el libro de texto no se apoya sobre un lado, sino que se apoya sobre la base rectangular. Podemos hacerles entender que la base es donde recae todo el peso, y que dependiendo de la posición de la figura, la perspectiva cambia, y la base no siempre es la misma.

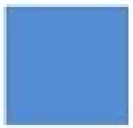
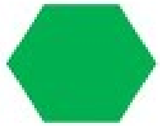
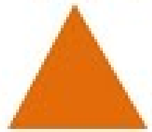


Actividad 3.

Tras realizar una actividad para tratar el tema del espacio usando diferentes figuras geométricas vamos a pasar a la tercera actividad, que tiene como objetivo comprobar los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre la relación que puede darse entre distintas figuras geométricas. Para ello la actividad será explicada de la siguiente manera:

A continuación debéis de dibujar un cuadrado, un rectángulo, un triángulo, un trapecio, un hexágono y un rombo. Una vez que tengáis dibujados las figuras siguientes, vais a completar de forma individual una tabla. Una vez que la tabla sea completada, vais a destacar aquellas características que tengan en común las distintas figuras. No todas tienen que coincidir. A medida que vayáis encontrado similitudes, las vais escribiendo debajo de la tabla. Cuando terminéis la actividad al completo, tenéis que responder a la siguiente pregunta.

- *Una vez que habéis completado la tabla, ¿podemos llegar a alguna conclusión con respecto a las distintas figuras que acabamos de analizar?*

Características						
Número de lados						
Número de ángulos						
Número de vértices						
Lados paralelos						
Perpendicularidad de las diagonales						

Mi papel en este caso solamente es importante a la hora de evaluar los resultados, ya que podremos comprobar de una manera más exhaustiva en que niveles de reconocimiento se encuentran estos estudiantes y si tienen conocimiento de que las figuras pueden tener relación entre sí, o las ven como figuras individuales, en las que cada una tiene unas características concretas que no se pueden relacionar con ninguna otra figura.

En esta actividad nos podremos encontrar diferentes resultados, ya sea que completen muy bien la tabla pero no sepan sacar una conclusión, que completen mal la tabla y eso nos lleve a reflexionar por qué no tienen conocimientos tan básicos como esos, que lo completen mal y no tengan conocimiento acerca del tema o que simplemente concluyan diciendo las características que tiene cada figura de forma individual y no hablen de las relaciones entre ellas. Todo ello, será evaluado póstumamente.

Actividad 4.

A raíz de todos esos problemas que tienen los estudiantes en cuanto al tipo de geometría no solo interfigural, sino también intrafigural y transfigural nace la siguiente actividad que tiene como objetivo desmontar la existencia de un hexágono de 5 cm de lado y 3 de apotema mediante el teorema de Pitágoras. El ejercicio se lo vamos a explicar a los estudiantes de la siguiente manera:

Para esta actividad, primero vais a dibujar un triángulo isósceles que tenga de base la mitad de 5cm y su apotema sea de 3cm. Una vez que tengáis esos datos, calcular el área de ese triángulo siguiendo el teorema de Pitágoras, que habéis estado estudiando en la clase.

Ahora vais a dibujar al lado del triángulo un hexágono regular. ¿Dentro de ese hexágono podemos ver otras figuras? ¿Cuáles? Si no veis ninguna otra figura, dividirlo en partes iguales, a ver si os sirve de ayuda para ver algo más. (Los alumnos verán el triángulo equilátero). *¿Solo vemos el triángulo equilátero? ¿No está presente ningún otro tipo de triángulo? Si tenemos en cuenta el triángulo isósceles, ¿sabríais decirme cuanto mide el lado del hexágono y cuál es su apotema? Eso significa que ¿podemos saber el área del hexágono solamente con saber la del triángulo que hemos hecho antes? ¿Por qué? Entonces si realizamos el área del hexágono con su fórmula propia ¿debería de darnos* *el mismo resultado no? ¿Podéis comprobarlo? ¿Qué observáis en los dos resultados? ¿A qué conclusión podéis llegar? ¿Existe realmente un hexágono de 5cm de lado y 3 de apotema?*

A través de toda esa batería de preguntas, guiaremos al estudiante hacia el objetivo, y dependiendo de las conclusiones que saquen y del proceso que realicen vamos a poder seguir observando detalles que nos ayudaran a evaluar al alumno para saber en qué fase del conocimiento geométrico se encuentra.

Podemos encontrarnos que el alumno no sepa las fórmulas, que no distinga las figuras, que no sepa diferenciar los triángulos, que no relacione que dentro del hexágono haya triángulos, que no relacione que no relacione el triángulo con el hexágono para responder las preguntas, etc…entre muchas cosas que podremos evaluar al finalizar la actividad.

Es una actividad bastante compleja, porque ellos están acostumbrados a realizar un ejercicio muy tradicional como es el de calcular el área de un hexágono con 5cm de lado y 3 de apotema, ya que sale en todos los libros de matemáticas, y que en un momento le podamos desmontar que ese hexágono existe puede causar un poco de trastorno en los alumno.

6. Análisis de los resultados.

Alumno 1.

La cara del estudiante número 1 cuando le explico que vamos a hacer una serie de actividades sobre geometría me sorprende, porque estoy acostumbrada a ver como los niños empiezan a hacer gestos de que no les gusta nada ese tema; y para mi agrado, en este caso la alumna ha reaccionado con gusto. Asentía con la cabeza cuando yo nombraba los nombres de las figuras geométricas que podían aparecer en la actividad, lo que nos muestra que se hace una imagen mental de todas ellas y que las conoce. Cuando yo aún no tenía descrita la actividad del todo, ella me hizo la pregunta de ¿"tenemos que formar…?"

Eso nos puede dar la información de que ella es consciente de que se pueden formar figuras geométricas a través de material manipulativo, ya sea dibujando, creando…porque nosotros lo único que teníamos eran colores y folios. Cuando yo cogí como ejemplo un triángulo verde y lo puse en la cuadrícula grande, me coloqué yo en el lado que quise, sin aportar ningún dato sobre perspectiva y orientación en el espacio. No le dio importancia a mi colocación a la hora de poner la figura geométrica de la plantilla pequeña en la cuadrícula donde tenían que hacer la prueba. Eso nos aporta que ella no le iba a dar importancia a su colocación a la hora de colocar las figuras geométricas en la cuadrícula del suelo, al menos la primera vez.

Cuando yo dije que tenían que escribir en un folio una lista con todas las figuras geométricas que necesitaban para poder completar la cuadrícula del suelo, esta alumna fue la que tomó la iniciativa de coger el bolígrafo y escribir todas las figuras que iban a necesitar.

Esto nos sigue dando datos acerca de que conoce las figuras planas, y que se siente segura a la hora de llevar el mando, ya que en este ejercicio solo iba a trabajar con figuras planas como son el triángulo, rectángulo, cuadrado, pentágono, hexágono y octógono. Esta niña se colocó como yo me puse para dar el ejemplo, y fue cuando uno de los compañeros dijo "es que yo lo estoy viendo desde aquí", cuando rápidamente dijo "aquí algo pasa". Hasta ese momento, ella no se percataba de lo que pasaba con el orden de las figuras en la cuadrícula. No se daba cuenta del motivo por el cual no lo estaban haciendo bien por un motivo meramente posicional. Cuando yo le pregunto a ella “¿Qué ocurre si ahora tú te pones ahí y él se pone en tu sitio?” entonces ella me contesta que se ve diferente.

Dimos paso a la siguiente plantilla, más compleja, y como pudimos observar se posiciona del mismo lado que los demás, solo que esta vez solamente se centra en eso, en posicionarse bien y se le olvida en que cuadrícula debe colocar la figura que tiene entre manos. De esta forma, podemos predecir que a la hora de enfrentarse con soltura en un espacio real, donde se encuentra rodeada de varios factores, ya sean formas, colores…o en cuando tenga que leer un mapa o guiarse por el plano de un metro, va a tener dificultades de reaccionar con fluidez ante una situación así. Ya que cuando se le ha puesto enfrente una plantilla donde además de figuras más complejas que en la primera, se mezclaban otras nuevas, con otras formas y otros colores, el bloqueo era bastante visible en esta alumna.

En la segunda actividad, cuando se encuentra con dos rectángulos colocados de distinta forma, uno en horizontal y otro en vertical, esta alumna conoce tal y como podemos observar en su respuesta que aunque estén colocados de manera distinta, sigue siendo la misma figura (anexo 2). Con ello, podemos conocer que esta alumna utiliza un razonamiento efectivo y que si las figuras son iguales, tienen el mismo número de lados, el mismo número de ángulos y miden lo mismo, es decir, son iguales aunque estén colocadas de distinta forma. Conoce que el número de lados es el mismo que el número de ángulos. En este ejercicio le falla el concepto de “base”. Asocia que la base de una figura solo puede ser uno de sus lados. Cuando le pongo el ejemplo de un libro de texto apoyado sobre la mesa, y le hago la pregunta de “¿está apoyado por alguno de sus lados?”, entonces empieza a reaccionar y le explico que la base de una figura no es siempre uno de sus lados, sino que existen otro tipo de bases, en caso del libro de texto una base rectangular, sobre el que recae todo el peso del libro.

Ya en la actividad 3, donde se enfrentaba a la tabla con las distintas figuras, observamos que esta alumna conoce perfectamente el concepto de lado, ángulo y vértice porque sus respuestas son acertadas en todas las figuras. En cambio, cuando le preguntamos por lados paralelos, se confunde y cree que los lados paralelos son lo mismo que el número de lados. Tiene una breve noción de lo que son lados paralelos porque me preguntó “¿los lados paralelos son los que están unos enfrente de otro?”. A pesar de ello, luego me contesta que tienen los mismos lados paralelos que número de lados. Con la figura del trapecio, ocurre que ella dice que los cuatro lados son paralelos, en vez de decir que son solamente dos. Una vez que tiene todos los datos puestos, me llama mucho la atención la respuesta que da a la pregunta "¿Ves algún tipo de relación entre ellas observando sus datos?"; la respuesta es meramente superficial, se ha fijado en los números, en las respuestas numéricas, pero no en la relación que hay entre esas respuestas, porque responde diciendo "que todos tienen en los datos números pares menos el triángulo que tampoco tiene diagonales". Y que lo único que ve en común es que "tienen lados, ángulos y vértices". Los datos que podemos observar a través de la cumplimentación de esta tabla, es que en primer lugar no sabe diferenciar algunos conceptos básicos que se deben ya de tener en el último curso de tercer ciclo como son la perpendicularidad y las diagonales, que las confunden respectivamente. Es más, el concepto de perpendicularidad ni lo conoce, ya que deja ese apartado en blanco, pero tampoco al inicio de la actividad lo pregunta (anexo 3).

No habla de las relaciones entre figuras, habla de meros datos, por lo que el conocimiento interfigural brilla por su ausencia. Sabe que todas las figuras poseen lados, ángulos y vértices pero no relaciona cuales de ellas tienen el mismo número de elementos entre sí. Con eso nos hace ver, que ve cada figura como algo individual con sus respectivas características, donde ninguna figura puede tener relación con la otra.

Pasamos a analizar la última actividad. Lo primero que tenían que realizar era calcular el área de un hexágono de 6 cm de lado y 3 cm de lado. Lo realiza perfectamente, eso nos da entender que conoce el área del hexágono y conoce la figura. A continuación tienen que dividir el hexágono en partes iguales; en este caso podemos comprobar que ella divide el hexágono bien, pero escribe que las figuras en las que divide el hexágono son trapecios equiláteros. Quizás haya sido una mera equivocación porque luego ha puesto bien el tipo de triangulo, y contestó de forma oral que se trataba de un triángulo equilátero. Luego, le he mandado dibujar un trapecio para comprobar si conocía las dos figuras, y efectivamente supo hacerlo. Solamente por comprobar le hice dibujarlo, por lo que pude realmente saber que se ha equivocado sin querer en la respuesta. Además, ella al comienzo en la actividad 1 conocía todas las figuras y no tuvo problema en reconocerlas. Sabía que el triángulo que tiene un ángulo de 90º se llama triángulo rectángulo y supo dibujarlo sin problemas, de dos maneras diferentes además.

A pesar de saber que el hexágono estaba formado por 6 triángulos equiláteros, ella seguía considerando que podía hacer el teorema de Pitágoras con los triángulos equiláteros del hexágono. Partió el triángulo, supo que la base era la mitad de 5 cm, y sabía que la apotema era 3 cm. Le pregunte, “si el triángulo es equilátero y la base mide 5 cm, ¿cuánto medirán el resto de sus lados?”. Supo decir que todos sus lados median lo mismo, entonces le propuse que realizara el teorema sin pensar que tenían la medida de la hipotenusa. Se dio cuenta de que el resultado no era lo mismo, entonces le propuse la siguiente pregunta: “¿Con qué tipo de triángulo dijimos se realizaba el teorema de Pitágoras?”. Ella supo que se realizaba con el triángulo que tuviera un ángulo de 90 grados, y fuera un triángulo rectángulo y este no lo era. Entonces se dio cuenta de que no podía realizarlo, porque el triángulo que estaba presente en el hexágono era equilátero, entonces me dijo que el hexágono en realidad no es un hexágono, que es un conjunto de triángulos equiláteros, que le deberíamos de llamar de otra forma, porque si el hexágono está formado por triángulos ya no es un hexágono.

Esta última respuesta, nos aporta que ella es capaz de asociar la existencia o no de un hexágono de este tipo, pero también nos sigue aportando datos, sobre que ella si ve un triángulo dentro de la figura del hexágono, la sigue viendo como una figura individual, como que el triángulo es un triángulo y un hexágono es un hexágono, por lo que uno no puede estar dentro de otro. Seguimos observando que le cuesta mucho ver la relación entre las figuras (anexo 4).

Una vez que tenemos todos estos datos, podemos concluir que este estudiante se encuentra en el nivel 2 de razonamiento según el modelo de Van Hiele (1957). Reconoce las figuras geométricas y sus características (sus lados, sus ángulos, etc.). Es capaz de explicar lo que caracteriza a cada figura, así como representarla mediante un dibujo. Conoce el lenguaje básico que necesita para describir las figuras, como lado o vértice. Conocía el nombre de cada figura geométrica. Reconoce y analiza las figuras, pero no relaciona ni clasifica a las figuras teniendo en cuenta las características que tienen en común.

Alumno 2.

El estudiante número 2, nos muestra cara de indiferencia ante lo que estamos proponiéndole. Nos hace saber que las matemáticas no son producto de su devoción, ni su asignatura favorita, pero que tampoco la que más le disgusta, ya que se muestra proactivo aunque no muy entusiasmado. Cuando estaba nombrando las figuras geométricas con las que íbamos a trabajar, algunas de ellas las conocía porque asentía mirándome, y otra de ellas no, porque miraba hacia su compañera preguntándole: "¿esa cual era?". Conocía perfectamente las tres figuras comunes como son el cuadrado, triangulo, rectángulo… y ponía cara rara cuando hablábamos de trapecios u octógono. A pesar de no conocer algunas de esas figuras, ella no me ha preguntado en ningún caso de que figuraba se trataba, sino que decidió hacer las actividades sin preguntar en ningún caso. Estaba algo nerviosa, porque ella era consciente de que había figuras que no se acordaba cuáles eran, y jugaba mucho con el lápiz. Le preguntaba "¿necesitas ayuda?", y siempre me contestaba que no. No dudé en que sonar le tenían que sonar las figuras pero poco más.

Cuando yo cogí como ejemplo un triángulo verde y lo puse en la cuadrícula grande, me coloqué yo en el lado que quise, sin aportar ningún dato sobre perspectiva y orientación en el espacio. No le dio importancia, al igual que su anterior compañera, a mi colocación a la hora de poner la figura geométrica, al igual que la anterior compañera, asique de igual forma ella se colocaría en cualquier lado para realizar la actividad, y así fue. Cuando yo dije que tenían que escribir en un folio una lista con todas las figuras geométricas que necesitaban para poder completar la cuadrícula del suelo, esta alumna dio un pasito atrás, y le dio el bolígrafo a su compañera. Aquí fue donde pudimos ver claramente que ella no se sentía segura a la hora de conocer las figuras geométricas con las que íbamos a trabajar a continuación.

La estudiante solamente se centraba en las figuras planas más conocidas, como las que hemos mencionado anteriormente (cuadrado, triángulo…), lo que nos da a entender que no tiene mucho conocimiento acerca de las demás que podía observar en las plantillas. Esta alumna se mantuvo un poco al margen de la actividad, y dejó que la otra compañera llevara la iniciativa. Lo que pudimos observar es que ella quería ser la primera en venir a la mesa a pedir lo que necesitaba, ya que solamente se dedicaba a pedir cuadrados y triángulos. Por lo que seguimos en la misma teoría que antes, quizás reconozca la imagen de la figura, pero no conocía/recordaba sus nombres.

A medida que se realizaba la actividad, ella no era consciente de que ocurría, seguía pensando como colocar todas las figuras iguales, sin pensar en su propia colocación. Luego cuando los compañeros empezaron a debatir que pasaba, ella empezó a darse cuenta, pero se dedicaba a buscar la manera de poner todas las figuras en orden sin pensar en la colocación, o estar más pendiente de sus compañeros intentando participar poco. En este caso, podemos comprobar como ella tampoco pensaba que la orientación en el espacio era importante para este ejercicio. Al igual que su compañera, solamente cuando yo le hago preguntas como "¿si te colocas en este lado, donde pondrías la figura?", o "¿si te colocas en este lado, colocarías la figura en otra cuadrícula diferente?". Solamente de esa manera, podemos arrancarle alguna respuesta que se relacione con la posición, pero es verdad que se ha delimitado a responder "si" o "no", como que le cuesta mucho entender el porqué de si se coloca en otra posición, la figura ya no la pondría en el mismo lugar.

Si continuamos sacando datos, vemos como que a la hora de enfrentarse con soltura en un espacio real, le va costar bastante cambar la perspectiva de ver las cosas, no solo referente a las matemáticas, sino que esto también se puede enfocar en las cosas de la vida cotidiana, y las matemáticas como hemos dicho al comienzo del trabajo, era algo que estaba muy presente en nuestra vida cotidiana también.

Le va costar leer un plano, o un mapa, ya que le cuesta reconocer las figuras y sus nombres, y tampoco describirlas, por lo que si no conoce algo, tampoco es que tenga la capacidad de dar una descripción acerca de lo que ve. He podido observar como también si ella me pedía la figura no se acordaba del color, y si se acordaba del color no se acordaba de la figura. Trabaja sobre todo, el tema memorístico, como un juego, donde lo único importante es completar un puzle.

Cuando le hemos puesto enfrente una plantilla más completa, ha dado un paso atrás y se ha dedicado más a observar que a participar. Y cuando yo le decía que cogiera una figura, ella se reía y no hacía nada. Quizás por miedo a equivocarse. La alumna se encontraba bastante confusa y vergonzosa.

En la segunda actividad, cuando se encuentran con dos rectángulos colocados de distinta forma, uno en horizontal y otro en vertical, tal y como podemos observar en su respuesta, asocia a que el rectángulo es aquel que se encuentra en posición horizontal, y no en vertical. Piensa que el rectángulo que se encuentra en posición vertical no es un rectángulo porque es más largo que el otro. Nos está diciendo que la longitud de los lados de la figura altera si es un rectángulo. Esto nos recuerda a la teoría del vaso largo lleno de la misma cantidad de agua que el vaso ancho, y que siempre todos nosotros hemos asociado a que el vaso largo llevaba más agua que el vaso ancho, simplemente porque era más alto. Es curioso que no asocie que las dos figuras son iguales, que son el mismo rectángulo, cuando pone que tienen el mismo número de lados y el mismo número de ángulos, al igual que la misma medida. A continuación, vemos una pequeña contradicción, ya que responde que la figura se apoya sobre uno de sus lados, y que el lado sobre que el que se apoya se llama base. Pero luego me define la base como la parte que sujeta la figura, es decir, que no tiene por qué ser especialmente el lado la base de la figura. La conclusión que puedo sacar de esta parte, es que no tiene claro el concepto de base, aunque sabe que la base puede ser tanto un lado como un soporte sobre el que algo se apoya (anexo 5).

Ya en la actividad 3, responde perfectamente a los números de lados, ángulos y vértices de todas las figuras que se encuentra. Al igual que hemos visto en el anterior estudiante, no sabe lo que es una perpendicular, y deja los huecos en blanco, y tampoco conoce el concepto de paralelismo. Solo pone que tienen lados paralelos el cuadrado y el rectángulo, y dice que tienen 4 lados paralelos, en vez de dos. Esta alumna no relaciona ninguna figura, ni los lados, ni los ángulos ni los vértices que tienen en común las distintas figuras, sino que a la pregunta de "¿Puede observar algún tipo de relación entre las figuras?". Ella contesta "que algunas son perpendiculares y otras diagonales". Ella no entiende esos dos conceptos, en cambio, los utiliza como modo de relacionar las figuras (anexo 6).

Para estar segura de que realmente no conocía esos dos conceptos, se lo pregunte de forma oral, y efectivamente no supo contestarme. En cambio, cuando le preguntamos por lados paralelos, se confunde y cree que lados paralelos es lo mismo que número de lados, tiene una breve noción de lo que son lados paralelos porque me dice "¿los lados paralelos son los que están unos enfrente de otro?". Pero luego me contesta que tienen los mismos lados paralelos que número de lados, por lo que nos encontramos que esta alumna tiene el mismo problema que la anterior; no distingue ciertos conceptos. No se fija en las respuestas, no se preocupa de relacionar los datos que tienen en común las distintas figuras, y contesta a la pregunta al azar. Por lo que, nos encontramos con una estudiante que tampoco se presta a relacionar unas figuras con otras, que cada una tienen sus características, y que nada tienen en común.

Pasamos a analizar la última actividad. Realiza el hexágono sin problema ninguno, conoce el lado y la apotema. Ahora nos encontramos con el primer error que comete. Hace el área del hexágono calculando simplemente el perímetro entre dos. Por lo que el resultado no es correcto. Me llama la atención, que sea la única de los cuatro que no se sepa el área del hexágono, siendo un día después de realizar esta secuencia de actividades, el examen de matemáticas sobre áreas de las figuras planas. Después, divide bien el hexágono en partes iguales, y conoce que las figuras en las que se divide el hexágono son triángulos equiláteros. Cuando cortan el triángulo equilátero por la mitad, ella dibuja un triángulo rectángulo y pone el nombre por lo que la figura la conoce. Cuando planteamos el tema de Pitágoras, ella asentía con la cabeza, porque había hecho varios ejercicios con ese tipo de triángulos para calcular la hipotenusa, pero todo automático, pensando que Pitágoras se podía hacer también con otro tipo de triángulos. Nuevamente, se le dijo que hiciera Pitágoras con el triángulo rectángulo que partía del hexágono, y sin pensárselo lo hizo. Me puse a su lado, y le dije, si es triángulo equilátero, ¿por qué no miden lo mismo?

Realiza bien la fórmula del teorema de Pitágoras, pero es meramente automático, no se para ni a pensar para qué, o porqué se lo he mandado realizar.

En ese momento ya no sabía que contestar, entonces lo vuelve a hacer como pensando que se había equivocado en alguna cuenta. Luego, me sorprende que responda que lo que ocurre con el hexágono es que si lo haces bajo el teorema de Pitágoras, la base cambia y el resultado claramente no es el mismo. Lo achaca a que son figuras diferentes si queremos usar por un lado los triángulos y por el otro el hexágono en sí. Es decir, ella no se plantea que ocurre con el hexágono, sino que dependiendo como lo hagas, la base cambia o no cambia, el resultado cambia o no cambia, es decir, por mucho que los datos no coincidan eso se debe a que hay un cambio en la figura. No relaciona más allá de lo que ve, no se para a pensar en que está ocurriendo con la figura, si se plantea su existencia o no (anexo 7).

Podemos concluir que el estudiante número 2 se encuentra entre el nivel 1 y el nivel 2 de razonamiento. No reconoce todas las figuras geométricas, solo las tres básicas como son cuadrado, rectángulo y triangulo. Las que conoce es capaz de representarlas, y decir las características que tienen esa figura. Ella describe las figuras por como las ve, como si fuera un dibujo en vez de describir la figura usando el lenguaje matemático. No establece ningún tipo de relación entre las figuras y necesita de comparaciones con la realidad para poder visualizar que es lo que se le está explicando.

Alumno 3.

Nos encontramos ante el tercer estudiante, predispuesto a hacer las actividades sin ningún tipo de rechazo. Le he preguntado si le gustaban las matemáticas, y me dijo que sí. Este alumno conocía todas las figuras geométricas, por lo que se veía preocupado. No le importaba ser el primero, o no tenían problema en contestar a las preguntas. Cuando pregunté, "¿qué figuras planas que conozcáis podremos ver en las plantillas?" este supo decirme figuras más allá de un cuadrado y un triángulo. Cuando la compañera pregunto una duda, el mismo se la supo responder, porque ya sabía de qué trataba la primera actividad. Es más, este fue quien les dijo a todos, que debían de ponerse en un mismo lado para poder ver la cuadricula grande todos de la misma forma. El si se dio cuenta antes que nadie, de que las figuras no cuadraban todas de la misma forma porque tenían que orientarse bien. Le daba igual escoger figura el último, porque estaba seguro que se sabía el nombre de todas, por lo que le daba igual pedir un cuadrado que un octógono, porque las conoce.

Cuando estaban haciendo el ejercicio, se podía decir que él era el que llevaba la voz cantante, y él que decía lo que faltaba, lo que estaba mal en la cuadricula. Además, no se atoraba por muchos colores y formas que tuvieran las figuras. El primero analizaba, como que iba poco a poco, asociando la forma con el color y con el hueco… y luego todas las colocaba bien. No le importaba tardar más, pero se realizaba su propio esquema mental. Esto nos hace analizar que a este niño le resultará más fácil que a sus compañeros orientarse con un mapa, u cualquier otro tipo de documento orientativo ya que observa cada detalle con cuidado para poder tener un buen resultado.

Al principio, al igual que todos, se colocó donde quiso, pero al momento se dio cuenta de lo que ocurría. Este alumno era el que más figuras geométricas nombraba a la hora de hacer la lista con todas las que necesitaban para realizar la actividad.

Conocía las figuras planas con las que íbamos a trabajar, y en las primeras plantillas es verdad que todo lo hizo rápido. Solamente le costó un poco más la última, pero también es verdad que era la más compleja ya que se tenía que enfrentar a distintas formas de las figuras, colores, números de figuras y diferentes tamaños. En un espacio real, se va encontrar con multitud de variedad de todo eso, y seguramente pueda defenderse aunque se vea rodeado de muchos factores que puedan causarle desorientación.

En la segunda actividad, se enfrenta con la misma seguridad que la primera. Contesta perfectamente que las dos figuras tienen forma de rectángulo, por lo que la forma a él no le condiciona para no conocer que una figura puede ser la misma aun cuando esté colocada de una manera diferente. Conoce que las dos tienen los mismos lados, que las dos miden lo mismo, que las dos tienen los mismos ángulos, y por lo tanto son figuras iguales. Este alumno tiene algo más claro la diferencia entre lado y base, porque es consciente de que dependiendo de cómo pongas el rectángulo la base puede ser un lado, o como el responde "donde se apoyan es la base", y no menta que la parte donde se tiene que apoyar la figura exclusivamente tenga que ser un lado. Cuando le realicé el ejercicio del libro de texto a la compañera, el niño asintió, afirmando que eso podía ser así (anexo 8).

Ya en la actividad 3, donde se enfrentaba a la tabla con las distintas figuras, observamos que distingue perfectamente el número de lados, ángulos, vértices y lados paralelos. Podemos observar como en la tabla pone que el cuadrado, el rectángulo o el rombo tienen lados paralelos. Conoce el concepto de diagonal porque lo realiza con dibujos en las figuras, pero no si esas diagonales son perpendiculares. Podemos también pensar, que ha acertado al azar poniendo que tienen lados paralelos 2 a 2 esas figuras, porque me dice que el triángulo tiene 3 lados paralelos. Seguramente haya escuchado muchas veces esa frase de "el cuadrado y el rectángulo tienen lados paralelos 2 a 2", porque él completó la tabla bastante rápido. Quizás sepa que eso es así, pero no sabe en realidad que significa porque también me dice que el hexágono tiene 3 lados paralelos.

Ella era consciente de que trazar diagonales en un hexágono era más complejo que trazarlas en un cuadrado, y quizás por ello no lo hizo. Pero podemos observar, gracias a las marcas del lápiz que las diagonales que trazó antes de borrarlas eran correctas. Ella conoce que lo que tiene que unir son los vértices, pero le parecían tantas que no estaba segura de hacerlo así.

Es el único que contesta que ve relación entre el cuadrado, el rectángulo y trapecio. Aunque sea solamente por el número de lados, ya nos dice que al menos se ha preocupado por comparar los datos y ver que figuras tenían algo en común. Eso no significa que sea capaz de ver la relación que existe de manera profunda entre las figuras, pero si al menos que puede existir y relacionarlas de alguna manera, aunque sea por algo tan sencillo como el número de lados (anexo 9).

Pasamos a analizar la última actividad. Lo primero que tenían que realizar era calcular el área de un hexágono de 6 cm de lado y 3 cm de lado. Lo realiza perfectamente, eso nos da entender que conoce el área del hexágono y conoce la figura. A continuación tienen que dividir el hexágono en partes iguales; en este caso podemos comprobar que ella divide el hexágono bien, pero escribe que las figuras en las que divide el hexágono son trapecios equiláteros. Quizás haya sido una mera equivocación porque si ha puesto bien el tipo de triangulo y ha puesto trapecio y lo ha dibujado perfectamente y conoce la figura es porque ha sido un fallo de concentración, no de que no sepa lo que es un triángulo, porque ella ha sido la única en la primera actividad que se ha lanzado a pedir las figuras geométricas y conocía todos sus nombres. Sabía que el triángulo que tiene un ángulo de 90º se llama triángulo rectángulo y supo dibujarlo sin problemas, de dos maneras diferentes además. A pesar de saber que el hexágono estaba formado por 6 triángulos equiláteros, ella seguía considerando que podía hacer el teorema de Pitágoras con los triángulos equiláteros del hexágono. Partió el triángulo, supo que la base era la mitad de 5 cm, y sabía que la apotema era 3 cm. Le pregunte, “si el triángulo es equilátero y la base mide 5 cm, ¿cuánto medirán el resto de sus lados?”. Supo decir que todos sus lados median lo mismo, entonces le propuse que realizara el teorema sin pensar que la hipotenusa era 5. Se dio cuenta de que el resultado no era lo mismo, entonces propuse la siguiente pregunta: “¿Con qué tipo de triángulo dijimos se realizaba el teorema de Pitágoras?”. Ella supo que se realizaba con el triángulo que tuviera un ángulo de 90 grados, y fuera un triángulo rectángulo y este no lo era.

A raíz de eso, se dio cuenta de que no podía realizarlo, porque el triángulo que estaba presente en el hexágono era equilátero, entonces me dijo que el hexágono en realidad no es un hexágono, que es un conjunto de triángulos equiláteros, que le deberíamos de llamar de otra forma, porque si el hexágono está formado por triángulos ya no es un hexágono. Esta última respuesta, nos aporta que ella es capaz de asociar la existencia o no de un hexágono de este tipo, pero también nos sigue aportando datos, sobre que ella si ve in triángulo dentro de la figura del hexágono, la sigue viendo como una figura individual, como que el triángulo es un triángulo y un hexágono es un hexágono, por lo que uno no puede estar dentro de otro. Seguimos observando que le cuesta mucho ver la relación entre las figuras.

La cuarta actividad le supone bastante dificultad. La primera parte no, porque sabe lo que es un hexágono, el perímetro y la apotema, y lo formula tal y como le han enseñado. Sabe que cuando dividimos el hexágono en partes iguales, se transforman en 6 triángulos equiláteros, aunque se equivoca y pone de nombre trapecio. El niño supo contestarme bien a todas las preguntas referidas a eso, y puedo suponer que se ha confundido de nombre, porque luego cuando lo tuvo que volver a poner, ya escribió "triángulo equilátero". Cuando le preguntamos por Pitágoras, él contestó que necesitábamos un triángulo, y para ello dibujo un triángulo rectángulo. Se dio cuenta de que realizando de la misma manera que el resto de sus compañeros las cuentas, no salían los mismos resultados. Él contestó lo siguiente: "Si hacemos Pitágoras, se rompen los lados". Él me dijo que con eso quería decir, que si lo realizamos de esa forma, ya no puede ser, porque el resultado del lado ya no es el mismo, por lo tanto ya no estaríamos ante el mismo hexágono, sino que el interpreta que puede haber varios tipos de hexágonos, y que no todos tienen que dar el mismo resultado. Que el niño saque y hable de sus reflexiones está muy bien, porque eso significa que él está pensando acerca de lo que sucede en la actividad, pero no se da cuenta, al igual que los demás, que ante un triángulo equilátero no se puede hacer el teorema de Pitágoras (anexo 10).

Podemos decir que el estudiante número 3 se encuentra el nivel 2 avanzado. Reconoce y analiza las partes y propiedades de las figuras geométricas y las reconoce a través de ellas. Establece relaciones entre algunas figuras, aunque sean relaciones básicas como lados que tienen en común. Pero al menos relaciona algunas figuras con otras. No necesita de la manipulación o de un dibujo para describir las figuras, las conoce y las describe bajo un lenguaje matemática acorde a su edad y a lo que ha aprendido.

Alumno 4.

Nos encontramos ante el último estudiante con el que hemos trabajado. Este alumno no quería ni hacer las actividades, no le gustan las matemáticas y lo que quería era acabar cuanto antes. Le he tenido que decir que iba a tener más recreo que el resto para que hiciera este trabajo. Todo ello, se ha podido comprobar analizando las actividades. En la primera actividad, confundía todas las figuras geométricas, no acertaba ni la figura ni el color, y solamente acertó en colocar una de las figuras de la primera plantilla, que tenía todo el mismo el color y las figuras planas básicas, que en alguna ocasión no supo ni decir el nombre. Cuando tenían que completar la lista, y le propuse que le dijera alguna figura geométrica, se quedó callado, y prefería no participar.

A pesar de ello, se dispone a hacerlo sin pensar que quizás pueda sacar buenos resultados, daba por hecho que las matemáticas no eran lo suyo, y que le daba igual si hacerlo bien o mal. Ello, también nos aporta datos de que es un alumno que necesita más confianza y que se pongan expectativas y atención más altas en él, por el motivo que sea.

El mismo decía, "yo no lo que figuras son ninguna ¿eh seño?" El niño se mostraba en todo momento pasota, y cuando le decía que se animara que seguro que al final le acaban gustando, se reía sin más, y se colocaba en la silla con una postura típica de todo alumno que no le gusta estudiar, ni estar en clase y que todo le importa poco. Sinceramente, yo pensé que estos alumnos son los típicos, que te pueden dar una sorpresa, cuando se encuentran en estos casos que no tienen presión de ningún tipo, y de hecho, en algunos aspectos no me equivoqué.

Con respeto a la actividad 1, le causó simpatía escoger las figuras de mesa y trasladarlas a la cuadrícula, pero ciertamente me decía "¿me puedes dar esa figura que tiene un lado corto y otro lago debajo?". Luego si es cierto, que quizás como no se preocupaba del nombre de las figuras pues tenía mejor sentido de la orientación, porque no se centraba en tantos aspectos como el resto de sus compañeros, solo le hacía simpatía colocar aquellas figuras que tenían el mismo color. A mí me hace pensar, que quizás el escogiendo siempre las mismas figuras del mismo color, iba a tener más certeza de hacerlo bien. Es una forma de auto-motivarse. Él también se dio cuenta de que lo que ocurría con la posición de las figuras dependía de nuestra propia posición, no tardó mucho en entenderlo y darle perspectiva para realizarlo bien la segunda vez. Al final lo ha hecho al mismo nivel que sus compañeros, con el hándicap de que escogían las figuras más fáciles y del mismo color. Lo veía más como un juego sin sentido y se divertía.

Eso sí, al comienzo de la actividad, él ya dijo que no se iba a encargar de escribir el nombre de las figuras en ningún papel, que no se acordaba de cómo se llamaban. Y pude dar fe de ello, cuando en esta actividad vino a la mesa para que le diera un cilindro al principio, cuando sabía que solo estábamos trabajando con figuras planas. Entonces, ya piensas que este alumno tiene lagunas hasta de la propia definición de figura plana, por lo tanto normal que no distinga cuáles son y cuáles no.

A medida que cambiábamos de plantilla, el seguía realizando lo mismo, figuras del mismo color. No cambiaba de dinámica, y si en algún caso, veía que uno de sus compañeros se le adelantaba le decía que por favor se la cambiara. Él estaba realizando un juego individual de color figuras de colores, sin escuchar a los compañeros ni interesarse por la función que cumplía esa actividad.

Este alumno, obviamente, no podrá interpretar un mapa, ni sabrá leer cualquier leyenda que se le ponga por delante ahora mismo, porque no tiene paciencia para observar los elementos, los detalles, y la información que puedan darle sobre algo. La fluidez y rapidez en este alumno son muy deficientes.

En la segunda actividad, cuando se encuentran con dos rectángulos colocados de distinta forma, uno en horizontal y otro en vertical, este estudiante conoce el rectángulo, tal y como podemos observar en su respuesta, como aquella figura que está colocada de forma horizontal. Es decir, no considera que a pesar de tener los mismos lados, ángulos y medidas sea la misma figura.

Entonces, se ha fijado en los lados tal y como vemos en su respuesta, también en los vértices y en los ángulos. Cuando hablamos con esta alumna del concepto de base, dice que la base del rectángulo es el lado de abajo, es decir, la recta sobre la que apoya dicho rectángulo. En ese caso, es porque solamente ve el rectángulo con el lado apoyado, no lo ve como que ese rectángulo tiene la misma forma que el libro de texto, y la base ya sería otra. Cuando al igual que a su compañero, le ponemos como ejemplo el libro de texto, y le hablamos de su base y de su lado ya es capaz de diferenciar mejor que el lado y la base no siempre tienen que ser lo mismo. Seguimos observando como este alumno tiene muchas lagunas no subsanadas de cursos anteriores y que no se le ha dado mucho importancia para arreglarlo (anexo 11).

En la penúltima actividad, donde se enfrentaba a la tabla con las distintas figuras, observamos que este alumno conoce lo que viene siendo el lado, el ángulo y el vértice, o al menos eso lo demuestra en la tabla poniéndolos datos correctos en esas tres primeras tablas. Cuando le preguntamos por lados paralelos, contesta bien a que el cuadrado y rectángulo tienen dos lados paralelos, en cambio del trapecio dice que tienen un lado paralelo, porque no ve los cuatro lados rectos, sino que dos de sus lados están más inclinados, y del rombo dice que no tiene lados paralelos. Ello nos hace ver, que no encuadra la figura del rombo dentro del campo de los paralelogramos, y que por ello no tienen lados paralelos. Otra cosa que podemos observar, es que no tiene claro que figuras pertenecen o no al campo de los paralelogramos, porque dice que el hexágono sí tiene lados paralelos, porque sus lados están unos enfrente de otros, entonces asocia a que todas las figuras que tengan sus lados uno enfrente de otro son paralelos. Lo que no sabe es que solamente los paralelogramos son cuadriláteros.

Siguiendo con este mismo estudiante, observamos deja en blanco, al igual que el resto prácticamente, el último apartado referente a la perpendicularidad de las figuras. No se preocupa ni de intentarlo, es más, el mismo dice que no sabe lo que significa.

Es un alumno que responde que lo único que ve en común son sus lados, ángulos y vértices, y se va fijando a ver si hay algún número que coincida más, pero no se fija si puede haber formas que se parezcan un poco, ni en ver las figuras desde otro lado girando el folio, detalles, que al menos hagan que pueda tener un punto de referencia. Este alumno tiene un nivel muy bajo de motivación, y eso le penaliza a la hora de seguir creciendo (anexo 12).

En la última actividad, empieza bien dibujando el hexágono bien, con sus seis lados, pero bastante sucio y doblado, parecido a lo que puede dibujar un niño de primero de primaria. Lo divide en partes iguales y responde que en lo que se divide el hexágono son triángulos equiláteros. Hasta ahí bien, parecía que mejor a lo que anteriormente visto. Le pido que realice mediante la fórmula del hexágono, y realiza el área del triángulo, no sé cómo ni donde, pero él pone la respuesta que ha creído conveniente, obviamente mal. Le dije que reflexionara unos minutos, pero el decidió escribir esa respuesta y dejarla tal y como estaba. Esto ya nos dice que no sabe el área del hexágono, así de primeras. Por lo que al final acabé diciéndole como era, por eso lo tiene apuntada en la hoja, porque en un principio no sabía cuál era.

Cuando le hablamos del teorema de Pitágoras, puso de cara de “¿quién es Pitágoras?”. Y mira que antes de empezar, lo habían repasado conmigo, porque puede ser que no lo tuvieran muy fresco. Dibujó un triángulo rectángulo, porque habíamos dicho que Pitágoras trabajaba sobre esa base, y ahí se quedó. Puso un resultado que lo sacó de la manga, y cuando tuvo que responder las preguntas que se le plantearon, pues simplemente supo contestar que si usábamos Pitágoras hablábamos de trabajar con triángulos, y si hablábamos de hexágono que los triángulos no existían. De esta actividad con este alumno, obviamente podemos concluir, que si no sabe ni lo que es una figura plana, que si tiene motivación alguna, que tampoco atiende cuando se le explican las cosas, que si no distingue ni las figuras, ni las relaciones, y que tampoco se le trata de corregir todos esos fallos que viene arrastrando, estaba claro que iba a ser imposible que se enfrentara a una actividad como esta última (anexo 13).

En muchas ocasiones, se ha hablado de empezar en el nivel 1 de razonamiento, pero sinceramente, este alumno lo encuadraría entre el 0-1 porque la idea es ninguna acerca del tema. Este alumno no reconoce las figuras geométricas, conoce lo que son los lados, los vértices, pero no usa el lenguaje para denominarlo. Habla de picos en vez de vértices, por ejemplo. En vez de nombrar la figura, la describe según lo que considera que es, es decir, ve las figuras como meras imágenes visuales en las cuales no encuentra relación alguna. No es capaz siquiera de quedarse con las imágenes de la figuras en la mente, no tiene esquemas de ellas, cuando se empiezan a ver y a manipular ya en primero de primaria.

7. Conclusiones.

Cuando entré en la carrera, nunca me imaginé tener curiosidad sobre el área de geometría, y mucho menos poder hacer un trabajo sobre este tema, pero a medida que avanzaban mis estudios en la universidad me iba gustando la manera de romper esquemas y como la geometría me ha hecho cambiar no solo la perspectiva de los objetos, sino también me ha hecho reflexionar más sobre las cosas y verlas desde otro punto de vista diferente.

Debo reconocer que nunca había leído tanto sobre matemáticas, y que no tenía la información suficiente acerca de lo que el currículo nos pide, así como tampoco conocimiento acerca de la NCTM. Creí que leer tanto sobre el mismo tema pudiera causar de nuevo rechazo en mí, no obstante no ha sido el caso. Con la puesta en práctica de las actividades, me dan ganas de continuar con ello, y poder alcanzar los objetivos que pretendía al principio.

La realización de este trabajo sabía que tendría como parámetro principal analizar los conocimientos previos de los alumnos en el campo de la geometría relacionada con la orientación y las relaciones interfigurales, conociendo así en qué nivel de razonamiento se encontraban los alumnos con los que hemos trabajado según el modelo de Van Hiele (1957). Para ello partimos de actividades relacionadas con la orientación y actividades donde tuviesen que establecer relaciones entre las figuras planas. Van Hiele (1957) es nuestro principal motor de trabajo, por lo que basarme en él era primordial, siempre teniendo en cuenta los principios de la NCTM y la orden.

Aunque nuestra base principal de estudio haya sido Van Hiele (1957), he visto útil basarme también en Hoffer (1981), porque este trabajo tienen como uno de los objetivos de conocer las ideas previas, saber cómo comenzar el proceso de enseñanza-aprendizaje con esos respectivos alumnos, y por ello este autor nos aporta estrategias que considero útiles para este trabajo.

Analizar esta parte conllevaría también tener en cuenta como partiendo todos los estudiantes de la misma base y del mismo centro y del mismo método de enseñanza, existen tantas diferencias entre ellos. Quizás en futuros análisis pueda centrarme también en ello, en observar si son problemas intrínsecos o extrínsecos, de la facilidad de adaptación que tienen los alumnos dependiendo cual sea el modelo de enseñanza, o si es meramente psicológico.

Considero que lo desarrollado en el marco teórico era lo que necesitaba para este trabajo, ya que pretendía analizar algo muy concreto como partir de las ideas previas de los estudiantes para conocer en qué nivel de razonamiento de Van Hiele (1957) se encontraban, teniendo en mente como seguiría el proceso de enseñanza a partir de ahí.

Cuando yo le plantee a la profesora de matemáticas de 4º de Primaria si podía realizar este trabajo con cuatro de sus alumnos, me dijo "te vas a llevar a cuatro de diferentes niveles y así tienes más información que poner en tu trabajo". Además de ello, seguidamente me dijo "verás tú este". Ella misma me daba a entender como que uno de ellos no llevaba muy bien las matemáticas y ella se quitaba culpa de eso, ya que si el estudiante no sabía matemáticas pues ella no tenía culpa de eso. Ella misma me etiquetó a sus estudiantes con el de justificarse en que si no entendían nada era problema de ellos y que ya vería yo como ella tenían razón en eso. Me dijo que ocupara la hora de tutoría y la media hora del recreo, que era el único momento en el que podía trabajar con ellos, que no podía perder el resto de las clases, ya que estaban en exámenes.

Gracias a la tabla de observación pude sacar datos muy útiles y fáciles de ver, que me han ayudado para completar un análisis sobre cada uno de forma más favorable, ya que en muchas ocasiones son detalles que observando te pueden dar datos más concretos. Por lo que en cuanto a la tabla de evaluación estoy muy contenta de haberla hecho, porque ha sido un instrumento muy útil y rápido para sacar datos, desde una visión general y desde una visión más individualizada.

Con las actividades tuve yo un dilema bastante importante, porque me resultaba difícil establecer una línea de unión entre todas ellas. Primeramente tenían mil ideas en mente, que en una primera tutoría pude resolver eliminando todas aquellas que no me iban aportar datos relevantes y concretos sobre lo que yo quería trabajar. Reconozco que he hecho la propuesta de actividades en muy poco tiempo, y ahora creo que podría haber cambiado ciertas cosas, como quizás la última actividad podría haberlo enfocado de otra manera porque resultó bastante difícil para ello, y no guiarlos me resultaba muy difícil. Además, quizás hubiera hecho lo siguiente de forma individual, porque así mediante preguntas le hubiera sacado mucha más información concreta, porque allí delante de sus compañeros también tenían vergüenza. Las tres primera actividades sí creo que he acertado con ellas, porque me han permitido ver lo que yo quería de este trabajo, y establecer una visión más crítica de la perspectiva de ver las cosas que tenemos, que aunque no parezca tener relación con el área de las matemáticas, es un paso que se trabaja antes de entrar en la geometría con mayor profundidad.

Considero que me he equivocado en la última actividad, porque debería de haberme informado antes sobre lo que los alumnos habían trabajado con Pitágoras, que me he dado cuenta de que poco mientras hacían la actividad porque eran muchas las preguntas; no entendía tampoco como niños de sexto podían saber tan poco sobre cómo hacer un ejercicio simple con el teorema de Pitágoras, cuando eso se trata de manera bastante importante en el tema de la geometría, pero ellos mimos me dijeron que la profesora no lo iba a poner en el examen, porque lo consideraba muy complicado para niños de su edad. Entonces, tuve que adaptar un poco la actividad, hacer una breve explicación sobre el teorema para que pudieran recordarlo mejor.

Sobre el análisis de los estudiantes, podemos decir que todos están entre el nivel 1 y 2 de razonamiento, aunque las diferencia entre algunos de ellos son bastante grandes, hasta el punto de no conocer alguno de ellos el nombres de las figuras geométricas. Podemos observar en algunos casos que resuelven cosas y que tienen pequeñas nociones de las cosas, pero no de forma segura, ni conocen el porqué de que las cosas son así, sino que tienen algo memorizado y lo utilizan para resolverlo. Solamente alguno de ellos en algún caso, hace uso de la lógica y utilizado otros esquemas que no sean memorísticos para realizar alguna de las actividades, o contestar alguna de las preguntas que yo planteaba. En general, todos siguen el mismo patrón a la hora de realizar los ejercicios, basándose en unas estrategias anteriormente dadas y con las que se supone que tiene que solucionar todo tipo de problemas relacionados con la geometría. A veces, hemos podido concluir que no pueden ni llegar a esos casos, porque se le plantea un enunciado diferente al que quizás están a acostumbrados a leer, y ya se encuentran descolocados y necesitan conocer primero lo que significa el anunciado.

Otra conclusión a la que he podido llegar es que la motivación era la misma haciendo con ellos ejercicios más dinámicos que realizando con ellos ejercicios del libro. Eso se debe a que tienen una falta de motivación muy grande con la asignatura en general, que independientemente de los ejercicios que realicemos con ellos, la falta de motivación que tienen hacia las matemáticas es bastante apreciable.

De forma personal, estoy contenta con la información que he podido obtener de los alumnos, porque tengo los datos que quiero si tuviera que empezar ahora con ellos a trabajar desde ese punto. Sabría de qué forma tengo que trabajar con cada uno de ellos, y no es de la misma, y sabría desde que punto partir con respecto al tema de la geometría, que en algún caso, viene siendo desde el comienzo, teniendo que observar y reconocer figuras planas, porque se ha podido observar en alguno de los casos que no se había llegado ni a ese punto. Ello puedo decir, que es porque influye bastante las expectativas que tiene la tutora en sus casos, en cómo se comporta con ellos y eso lo he podido observar yo cuando se estaba despidiendo de sus alumnos que se venían conmigo, la profesora le dijo a uno de sus estudiantes “esto lo controlas”, a diferencia de otra fase que fue “haz lo que puedas”. Entonces, partiendo de esa base, es normal, que los alumnos se sientan mejor o peor en esta área porque las expectativas que nosotros mismos creamos hacia los estudiantes, tenemos que tener en cuenta que les afecta.

Tengo que decir, que es en estos casos, cuando me encuentro con alumnos poco motivados, aburridos a la hora de estudiar, a la hora de hacer geometría, que considero que es uno de los temas más bonitos y entretenidos, cuando mis ganas de enseñar aumentan, sobre todo por la extra-motivación que tengo yo misma, y que estoy segura que sería capaz de transmitirles a ellos. De hacer ver que esto puede ser interesante, curiosos y bonito. De ver cómo avanzan, y sobre todo de observar cómo puedo hacer de mis futuros alumnos, personas con voz propia y voz crítica.

Me hubiese gustado disfrutar de mucho más tiempo, porque sé que el provecho que se le puede sacar a un trabajo como este es muy amplio, pero estoy de todas formas satisfecha con lo que he podido conseguir realizando este trabajo, no solo por hacerlo, sino por todo lo que he aprendido leyendo acerca de ello y como me ha permitido verme en la que es mi futura profesión. Ahora toca seguir formándose y que todo eso que pretendo se pueda hacer realidad.

8. Proyección de futuro.

Al comienzo de este trabajo, hemos hecho referencia a que por falta de tiempo, no ha podido ser todo lo completo que me gustaría, y que por ello lo íbamos a dividir en dos partes bien diferenciadas: la primera que es la que hemos llevado a cabo y descrito a lo largo de todo el trabajo, y la segunda parte que es esa idea de analizarme como profesora novel en el área de las matemáticas. Esa sería la segunda parte, la cual me gustaría poder llevar a cabo en otra etapa de mi carrera profesional, como puede ser la realización de un máster universitario en la Universidad de Huelva titulado *Máster Oficial en Investigación de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas.*

Considero, que una vez que empiezas a investigar y a trabajar sobre algo, es importante acabarlo. Y que si me voy a dedicar a la enseñanza de las matemáticas, entre otras cosas, es importante analizarse a uno mismo y establecer auto-crítica, porque al final lo que pretendemos con este trabajo es mejorar la enseñanza y que el proceso de aprendizaje de nuestros alumnos sea más motivador, sencillo y real de lo que nosotros hemos vivido a raíz de la enseñanza tradicional. Y que el pensamiento de los alumnos acerca de esta asignatura cambie, y deje de ser marginada y odiada para pasar a ser curiosa y sobre todo una asignatura que todos puedan entender.

A medida que iba realizando este trabajo y poniéndolo en práctica, me he ido concienciando cada vez más de la importancia que es tener en cuenta todas las necesidades y los conocimientos previos de los alumnos, ya que en muchas ocasiones, consideramos que por tener la misma edad, todos tienen que ir al mismo ritmo y que todos deben saber y entender lo mismo, y que si no es así, es problema del alumno y no nuestro. Estas actividades las puesto utilizar yo perfectamente en sexto de primaria antes de comenzar el contenido de geometría y comprobar de donde partimos, así como también a elaborar otras herramientas, y hacer lo mismo con todos los temas, porque las ideas previas son incluso más importantes que el nuevo contenido, ya que si los conceptos anteriores no están del todo afianzados, no será posible que los nuevos sean entendidos.

Con este trabajo podría seguir investigando, si de verdad las matemáticas se plantean de otra manera, o es solo humo lo que se vende en las escuelas. Hablan de los maestros jóvenes como las nuevas generaciones de maestros que tenemos el deber de cambiar la enseñanza, pero ¿cuántos son en realidad los que quieren que cambie de verdad? ¿Cuántos son aquellos que una vez que entran en un colegio se acomodan y siguen el método tradicional? ¿Cuántos son aquellos que se preocupan por las ideas previas de los alumnos y parten de ellas para generar nuevos conceptos? ¿Cuántos son aquellos que después de defender durante cuatro años de carrera una enseñanza basada el método constructivista e innovador luego cambian de idea? Estas preguntas que me hago, me resultarían útiles para continuar investigando que ocurre en el campo de las matemáticas si es cierto.

En cuanto a la proyección futura de este trabajo, además de que me pueda servir como base de investigaciones futuras o para ser implantado en el aula, no descarto la posibilidad de que una vez terminado, pueda ser publicado en un monografía o en revistas especializadas para que de ese modo sea útil a otros docentes o investigadores en este campo.

Por otro lado, la realización de este trabajo, me ha suscitado interés para ser miembro de un Grupo de Investigación sobre este tema, ya que de esta manera podría compartir conocimientos, dudas e inquietudes con especialistas en esta materia para de este modo avanzar en el desarrollo de la metodología y las técnicas que abordan el estudio de esta disciplina.

9. Referencias bibliográficas.

i. Jaime, A.P. y Gutiérrez, A.R., *Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele (1957)*, Práctica en Educación Matemática. Ediciones Alfar, Sevilla, 1990.

ii. DI PIETRO, Donato. GEOMETRÍA. LIBRERÍA Y EDITORIAL ALSINA.- Buenos Aires - 1.962.

iii. IZQUIERDO A., F. EJERCICIOS DE GEOMETRÍA. EDITORIAL DOSSAT, S.A.- Madrid - 1.977, 6ª edición.

iv. OSERS, Harry ESTUDIO DE GEOMETRÍA. TOMO I. TALLERES RUÁN, S.A.- Madrid - 1.979, 7ª edición.

v. PARRAMÓN, José Mª COMO DIBUJAR EN PERSPECTIVA. PARRAMÓN EDICIONES, S. A.- Barcelona - 1.983, 16ª edición.

vi. RANELLETTI, C. GEOMETRÍA DESCRIPTIVA. EDITORIAL GUSTAVO GILI, S.A.- Barcelona - 1.953, 4ª edición.

vii. SÁNCHEZ, S, Manuel GEOMETRÍA. ARTES GRÁFICAS GRIJELMO.- Bilbao - 1.983.

viii. SERRES, M. *Los orígenes de la geometría*, México, Siglo XXI editores, 1996.

ix. Álvárez, Carlos y Martínez, Rafael (coord.), *Descartes y la ciencia del siglo XVII*, Siglo XXI editores, 2000.

x. Fouz, Fernando, “Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría”, Raul Ibañez, Marta Macho (eds.), *Un paseo por la geometría*, Bilbao, Kopiak, 2000, pp. 67-82 , p.70.

xi. Abánades Joglar, Irene, 2018, Abril 15, *Baloncesto, deporte o Ciencia*, *https://www.youtube.com/watch?time_continue=288&v=Zx5iWySV_wo*.

xii. España. Ley Orgánica 8/2013, de 9 de Diciembre, para la mejora de calidad educativa. Boletín Oficial del Estado, 10 de Diciembre de 2013, núm. 295, pp. 12-15.

xiii. España. Decreto 97/2015, de 3 de Marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 13 de Marzo de 2015, núm. 50, pp. 11-22.

xiv. España. Orden de 17 de Marzo de 2015, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria de Andalucía. Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 27 de Marzo de 2015, núm. 60, pp. 9-142.

10. Anexos.

Anexo 1.

Preguntas	**Alumno 1**	**Alumno 2**	**Alumno 3**	**Alumno 4**
¿Hace preguntas sobre el enunciado de la actividad?	NO	NO	NO	SI
Hace preguntas de vocabulario	NO	NO	A VECES	SI
Reconoce las figuras geométricas expuestas en las actividades.	SI	A VECES	SI	NO
Identifica las características de los cuerpos geométricos	A VECES	A VECES	SI	NO
Es capaz de relacionar figuras entre sí.	A VECES	NO	A VECES	NO
Coloca las figuras en el espacio correctamente.	NO	NO	NO	NO
Utiliza razonamientos matemáticos para resolver el problema.	NO	NO	A VECES	NO

Anexo 2.

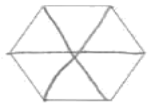
Nombre:

Actividad 2.

1. *¿Cuál de las dos figuras es un rectángulo? ¿Por qué?*
   Las dos. Porque son iguales pero están colocados diferente.
2. *¿Cuántos lados tiene cada figura? ¿Y ángulos?*
   4. 4.
3. *Medir las dos figuras con una regla ¿Miden lo mismo?*
   No.
4. *Enumerar del 1 al 4 los lados de cada figura. ¿Se apoyan las figuras sobre alguno de sus lados? ¿Eso significa que el lado sobre el que está apoyado es la base?* Sí. Sí.
5. *¿Qué es la base de una figura?*
   El lado en el que está apoyado.

Anexo 3.

Nombre:

Características	cuadrado 	rectángulo 	hexágono 	trapecio 	romboide 	triángulo 
Número de lados	4	4	6	4	4	3
Número de ángulos	4	4	6	4	4	3
Número de vértices	4	4	6	4	4	3
Lados paralelos	4	4	6	0	4	0
Perpendicularidad de las diagonales						

¿Viendo todos los datos, que conclusión sacamos, existe algún tipo de relación entre las figuras? Que todos tienen en los datos numeros pares menos el triángulo que tampoco tiene diagonales. Que tienen lados, ángulos y vértices.

Anexo 4

Nombre:

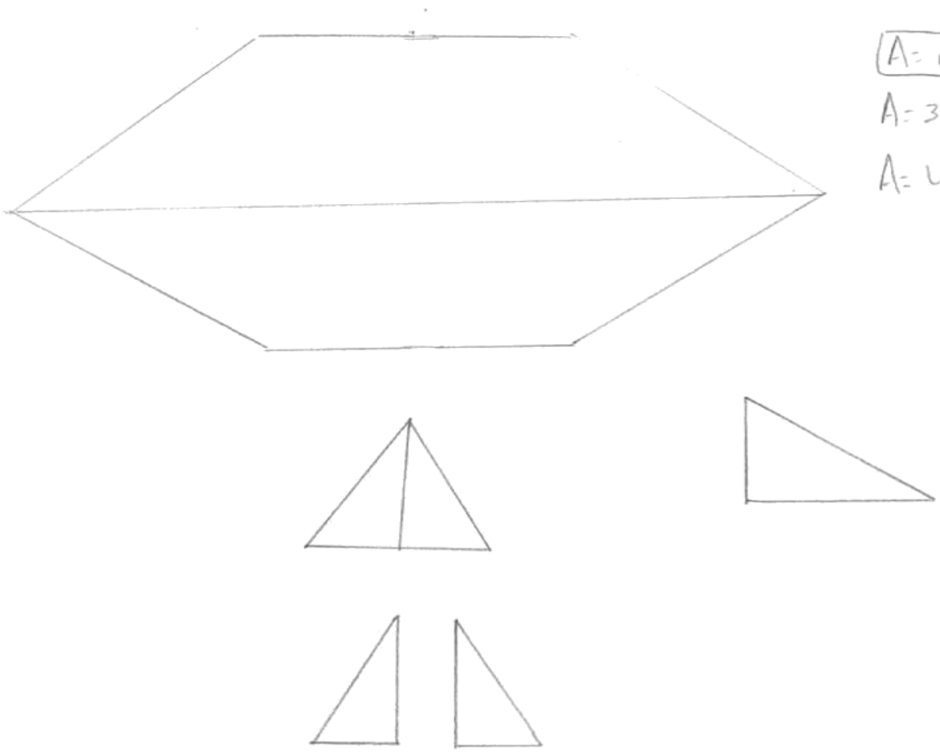
Actividad 4.

1. **Realiza la siguiente actividad siguiendo las instrucciones que damos a continuación:**

- Dibuja un hexágono que mida 5 cm de lado y 3 cm de apotema.
- Haz el área del hexágono.
- ¿Cuál es tu resultado? 45 cm² .
- Divide el hexágono en partes iguales. ¿Podemos observar otras figuras geométricas en su interior? ¿Cuáles? Sí. Trapecios .
- Dibuja un triángulo. ¿Qué tipo de triángulo es? Equilátero .
- Sabemos por el hexágono que la base mide 5 cm. Pitágoras dice que si tenemos un triángulo rectángulo con un ángulo de 90 grados y los datos de la base y la apotema podemos calcular el resto de los lados. ¿Podemos convertir nuestro triángulo equilátero en rectángulo? ¿Cómo?
- Una vez que lo tengas, sabiendo la base y la apotema intenta calcular el lado.
- Volviendo al triángulo, si sabemos cuánto mide la base, y sabemos las características del triángulo equilátero ¿sabemos cuánto miden los demás lados? _______________.

Conclusiones.

- **¿Qué ocurre si aplicamos al triángulo que forma el hexágono? ¿Coinciden los resultados? ¿Qué podemos sacar como conclusión viendo estos resultados?**



$\boxed{A = p \times ap : 2}$

$A = 30 \times 3 : 2$

$A = 45\ cm^2$

¿Qué ocurre si aplicamos Pitágoras al hexágono? ¿Cambian los resultados? ¿Podríamos decir que el hexágono no existe?

Cambia el resultado. No existe porque es un conjunto de triangulos.

Anexo 5.

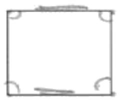
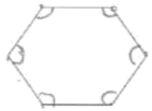
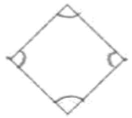
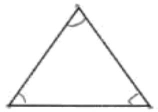
Nombre:

Actividad 2.

1. *¿Cuál de las dos figuras es un rectángulo? ¿Por qué?*
   La A hacia arriba. Porque el lado B es mas gran
2. *¿Cuántos lados tiene cada figura? ¿Y ángulos?*
   Tiene 4
3. *Medir las dos figuras con una regla ¿Miden lo mismo?*
   No
4. *Enumerar del 1 al 4 los lados de cada figura. ¿Se apoyan las figuras sobre alguno de sus lados? ¿Eso significa que el lado sobre el que* Si *está apoyado es la base?* Si
5. *¿Qué es la base de una figura?*
   La base es la parte que sujeta la figura

Anexo 6

Nombre:

	Cuadrado	Rectángulo	Hexagono	Trapecio	Rombo	Triángulo Equilátero
Características						
Número de lados	4	4	6	4	4	3
Número de ángulos	4	4	6	4	4	3
Número de vértices	4	4	6	4	4	3
Lados paralelos	4	4				
Perpendicularidad de las diagonales						

¿Viendo todos los datos, que conclusión sacamos? ¿Existen algún tipo de relación entre las figuras?

Que algunas son perpendiculares y otras diagonales

Anexo 7

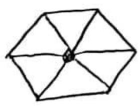
Actividad 4.

1. Realiza la siguiente actividad siguiendo las instrucciones que damos a continuación:

- Dibuja un hexágono que mida 5 cm de lado y 3 cm de apotema.
- Haz el área del hexágono.
- ¿Cuál es tu resultado? ________________.
- Divide el hexágono en partes iguales. ¿Podemos observar otras figuras geométricas en su interior? ¿Cuáles? triangulos.
- Dibuja un triángulo. ¿Qué tipo de triángulo es? equilateros.
- Sabemos por el hexágono que la base mide 5 cm. Pitágoras dice que si tenemos un triángulo rectángulo con un ángulo de 90 grados y los datos de la base y la apotema podemos calcular el resto de los lados. ¿Podemos convertir nuestro triángulo equilátero en rectángulo? ¿Cómo?
- Una vez que lo tengas, sabiendo la base y la apotema intenta calcular el lado.
- Volviendo al triángulo, si sabemos cuánto mide la base, y sabemos las características del triángulo equilátero ¿sabemos cuánto miden los demás lados? Si.

Conclusiones.

- **¿Qué ocurre si aplicamos al triángulo que forma el hexágono? ¿Coinciden los resultados? ¿Qué podemos sacar como conclusión viendo estos resultados?** ~~$5 \times 5 = 25$~~



$$\frac{p \times a}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

$$2'5^2 + 5^2 = 6'25 + 25 = \frac{31.25}{2} = 15'6$$

El resultado cambia y no vale
San figuras diferentes

Anexo 8

Actividad 2.

1. *¿Cuál de las dos figuras es un rectángulo? ¿Por qué?*
2. *¿Cuántos lados tiene cada figura? ¿Y ángulos?*
3. *Medir las dos figuras con una regla ¿Miden lo mismo?*
4. *Enumerar del 1 al 4 los lados de cada figura. ¿Se apoyan las figuras sobre alguno de sus lados? ¿Eso significa que el lado sobre el que está apoyado es la base?*
5. *¿Qué es la base de una figura?*

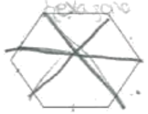
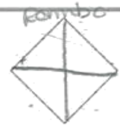
1 Son igules

2 4

4 La base es la de abajo o el lado

Anexo 9

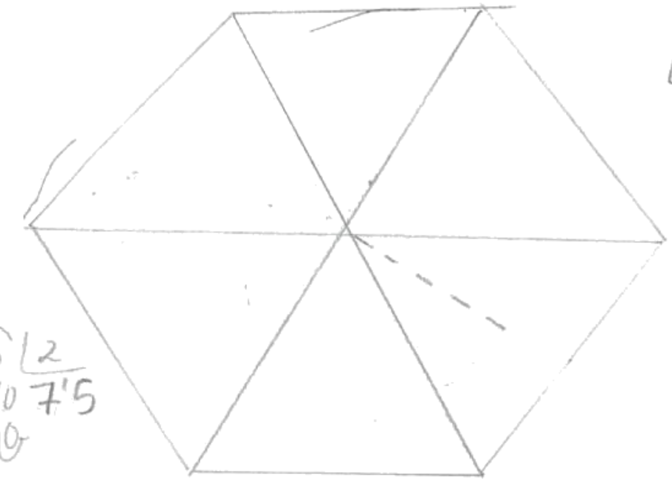
Nombre :

Características	Cuadrado 	Retángulo 	hexágono 	trapecio 	Rombo 	triángulo 
Número de lados	4	4	6	4	4	3
Número de ángulos	4	4	6	4	4	3
Número de vértices	4	4	6	4	4	3
Lados paralelos	[illegible]	2	[illegible]	2	2	3
Perpendicularidad de las diagonales						

¿Viendo todos los datos, que conclusión existen un tipo de relación entre las figuras?

Cuadrado, rectángulo y trapecio

Anexo 10



15 | 2
10 7'5
0

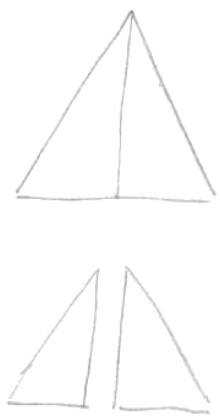
$\boxed{A = p \times apot : 2}$

A= 5 x 3 : 2

A: 15 : 2

A 7'5 cm²

9+ 6'25



Triangua rectangular

  6'25
+ 9
15'25

¿Qué ocurre si aplicamos Pitágoras al hexágono? ¿Cambian los resultados? ¿Podríamos decir que el hexágono no existe? No existe porque el base cambia.

que no existiría

Anexo 11

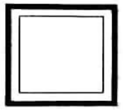
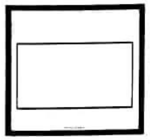
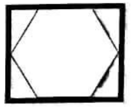
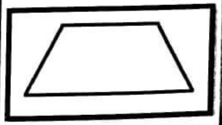
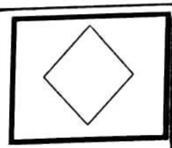
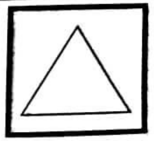
Nombre:

Actividad 2.

1. *¿Cuál de las dos figuras es un rectángulo? ¿Por qué?*
2. *¿Cuántos lados tiene cada figura? ¿Y ángulos?*
3. *Medir las dos figuras con una regla ¿Miden lo mismo?*
4. *Enumerar del 1 al 4 los lados de cada figura. ¿Se apoyan las figuras sobre alguno de sus lados? ¿Eso significa que el lado sobre el que está apoyado es la base?*
5. *¿Qué es la base de una figura?*

1. Porque tiene forma de Rectángulo
2. 4 lados tiene cada una y 4 ángulos
3. Mide una 14'5 y la otra 14
4. Si se apoyan en la base.
5. La parte recta de la figura

Anexo 12

Características						
Número de lados	4	4	6	4	4	3
Número de ángulos	4	4	6	4	4	3
Número de vértices	4	4	6	4	4	3
Lados paralelos	2	2	2	1	0	
Perpendicularidad de las diagonales						

Todos tienen lados, vertices y angulos

Anexo 13

Nombre :

Actividad 4.

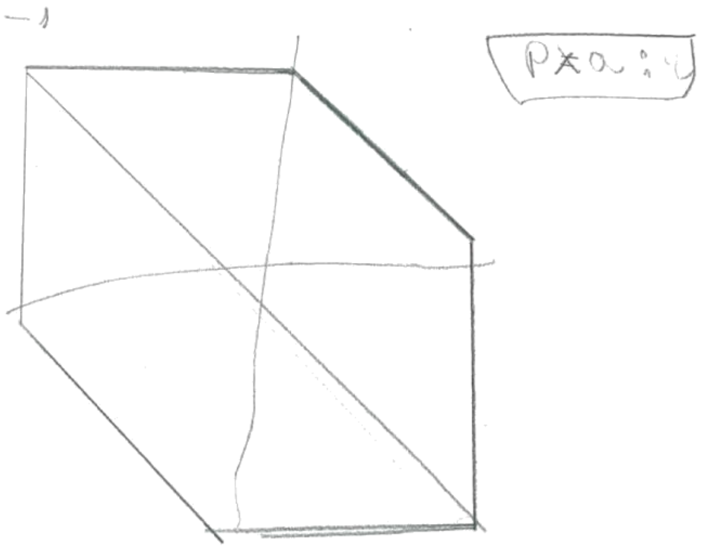
1. **Realiza la siguiente actividad siguiendo las instrucciones que damos a continuación:**

- Dibuja un hexágono que mida 5 cm de lado y 3 cm de apotema.
- Haz el área del hexágono.
- ¿Cuál es tu resultado? Pxa : 2 ______________.
- Divide el hexágono en partes iguales. ¿Podemos observar otras figuras geométricas en su interior? ¿Cuáles? sì , trapecio ______________.
- Dibuja un triángulo. ¿Qué tipo de triángulo es? equilatero ______________.
- Sabemos por el hexágono que la base mide 5 cm. Pitágoras dice que si tenemos un triángulo rectángulo con un ángulo de 90 grados y los datos de la base y la apotema podemos calcular el resto de los lados. ¿Podemos convertir nuestro triángulo equilátero en rectángulo? ¿Cómo?
- Una vez que lo tengas, sabiendo la base y la apotema intenta calcular el lado.
- Volviendo al triángulo, si sabemos cuánto mide la base, y sabemos las características del triángulo equilátero ¿sabemos cuánto miden los demás lados? ______________.

Conclusiones.

- **¿Qué ocurre si aplicamos al triángulo que forma el hexágono? ¿Coinciden los resultados? ¿Qué podemos sacar como conclusión viendo estos resultados?**

Que ocurre si aplicamos



15'25

¿Que ocurre si aplicamos pictagoras en el hexagono?

que nos sale triangulos.

¿Podriamos decir que el triángulo no existe?

No existe

Porque se rompe sus lados

Los encantos de esta ciencia sublime,

Las matemáticas, solo se le revelan

A aquellos que tienen el valor

De profundizar en ella.

(Carl Friedrich Gauss)