



Pedro Miguel Fernandes Alves Neiva da Cruz

Nº39584

**Modelação de microestruturas de material
periódico para estudo de concentração de
tensões**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor Pedro Coelho, Professor Auxiliar,
Universidade Nova de Lisboa

Júri

Presidente: Prof. Doutor Raquel Albuquerque Soares Brás de Almeida
Arguente: Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso
Vogal: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Modelação de microestruturas de material periódico para estudo de concentração de tensões

Copyright © Pedro Miguel Fernandes Alves Neiva da Cruz, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade NOVA de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade NOVA de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

AGRADECIMENTOS

Quero começar por agradecer ao meu orientador, Professor Doutor Pedro Coelho, por todo o conhecimento transmitido, ajuda e motivação dada.

Quero agradecer ao Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial da Faculdade de Ciências e Tecnologia pela formação que me foi dada e por disponibilizar as instalações e equipamentos necessários para o desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço à minha família, por me darem a possibilidade de estudar e pelo apoio incondicional que me foi dado.

RESUMO

Esta dissertação tem como principal foco a análise da concentração de tensões em materiais celulares.

São considerados dois materiais compósitos de microestrutura periódica neste trabalho: um material compósito com fases sólida e vazia; um material compósito com duas fases sólidas. Os materiais são representados por uma célula unitária.

Recorre-se à modelação por elementos finitos para modelar as células unitárias e para resolver os casos de carga trabalhados.

É feito um estudo de convergência de malha para duas células unitárias com foco na tensão na fronteira entre sólido e vazio. É realizado um estudo de efeito de escala para perceber como o meio celular afeta a concentração de tensões numa célula unitária. É realizado um estudo de concentração de tensões para uma célula unitária representativa de um arranjo hexagonal.

Os resultados mostram bons resultados de convergência e que o efeito de escala tem influência na concentração de tensões.

Palavras-chave: Microestrutura, Compósitos, Tensão, Concentração de tensão

ABSTRACT

This dissertation focuses on stress concentration in cellular materials.

Two periodic microstructure materials are considered: one composite material with solid and void phases and one composite material with two solid phases. Both materials are represented by a representative volume cell.

Finite elements are used to create the representative unit cells and calculating the stress fields.

A mesh convergence test is conducted for two representative unit cells that focuses on stress in the solid-void interface. A scale effect study is conducted with the aim of understanding how the cellular microstructure affects stress concentration on a single representative unit cell. A stress concentration study is conducted for an hexagonal array representative unit cell.

Results show good mesh convergence and that scale effect affects stress concentration.

Keywords: Microstructure, Composite, Stress, Stress concentration

ÍNDICE

Lista de Figuras	xiii
Lista de Tabelas	xvii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivo da dissertação	2
1.3 Estrutura da dissertação	2
2 Microestruturas de material periódico	5
2.1 Otimização Estrutural	5
2.2 Materiais compósitos	6
2.2.1 Micro-estruturas de Vigdergauz	11
3 Concentração de tensões	13
3.1 Concentração de tensões em placa infinita com furo circular	13
3.2 Concentração de tensões em placas infinitas com furo elíptico	17
3.3 Concentração de tensões em placas de largura finita	18
4 Modelo material e estudos realizados	23
4.1 Modelo material	23
4.2 Convergência de malha	24
4.2.1 Malha de elementos finitos	24
4.2.2 <i>h-method</i>	25
4.2.3 Estudo de convergência da malha	26
4.3 Estudo do efeito de escala	27
5 Resultados	31
5.1 Estudo de convergência de malha	31

5.1.1	Furo circular - Carregamento Uniaxial	33
5.1.2	Furo Circular - Carregamento de Corte	36
5.1.3	Furo circular - Carregamento Hidrostático	39
5.1.4	Furo Elíptico - Carregamento Uniaxial	42
5.1.5	Furo Elíptico - Carregamento de Corte	45
5.1.6	Furo Elíptico - Carregamento Biaxial	48
5.2	Estudo de efeito de escala	52
5.2.1	Furo circular - Carregamento Uniaxial	52
5.2.2	Furo circular - Carregamento de Corte	55
5.2.3	Furo circular - Carregamento Hidrostático	58
5.2.4	Furo elíptico - Carregamento Uniaxial	61
5.2.5	Furo elíptico - Carregamento de Corte	64
5.2.6	Furo elíptico - Carregamento Biaxial	67
5.3	Arranjo hexagonal	70
5.3.1	Carregamento Uniaxial	71
5.3.2	Carregamento Hidrostático	73
5.3.3	Carregamento de Corte	75
6	Conclusão e desenvolvimento futuro	77
7	Bibliografia	79

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diferentes tipos de otimização estrutural; (a) Otimização de dimensões; (b) Otimização de forma; (c) Otimização de topologia. (Adaptado de [1]) . . .	6
2.2	Exemplo de um material compósito com uma distribuição de fibras aleatória.	7
2.3	Relação entre dimensões do domínio macroscópico e do domínio microscópico.(Adaptado de [2])	8
2.4	Variação da microestrutura de um material no mesmo domínio macroscópico.(Adaptado de [2])	8
2.5	Arranjos celulares que podem ser usados para descrever a micro-estrutura de um material compósito: (a) arranjo de fibras perpendicular por camadas; (b) arranjo de fibras rômboico; (c) arranjo de fibras quadrado; (d) arranjo de fibras hexagonal.(Adaptado de [3])	9
2.6	(a) Meio periódico de arranjo quadrado (b) Células representativas do arranjo quadrado (c) Quadrante das células representativas(Adaptado de [3]) . . .	9
2.7	(a) Meio periódico de arranjo hexagonal (b) Células representativas do arranjo quadrado (c) Quadrante das células representativas(Adaptado de [3])	10
2.8	Empacotamento máximo das células unitárias : Em cima - arranjo quadrado; Em baixo - arranjo hexagonal.(Adaptado de [3])	10
2.9	Formas da inclusão numa micro-estrutura de Vigdergauz para crescentes frações volúmicas. Na figura mostra-se um quarto da célula unitária. A célula unitária é quadrada e está aplicado um carregamento hidrostático.(Adaptado de [4])	11
3.1	Placa infinita com um furo circular sujeita a um carregamento uniaxial.(Adaptado de [12])	14
3.2	Distribuição de tensão numa placa infinita com furo circular sujeita a um carregamento uniaxial.(Adaptado de [12])	15
3.3	Placa infinita com furo circular com condições de carregamento 2-D.	15

3.4	Placa infinita com um furo elíptico sujeita a um carregamento uniaxial perpendicular ao seu eixo maior.(Adaptado de [12])	17
3.5	Placa de largura finita sujeita a um carregamento uniaxial.	19
3.6	Curva de K_t obtida experimentalmente em função da relação diâmetro do furo e largura da placa.	20
3.7	Comparação da evolução da tensão máxima e do fator de concentração de tensões com o aumento do diâmetro do furo.	21
4.1	Células unitárias utilizadas na dissertação: (a) Arranjo quadrado - célula com furo circular (b)Arranjo quadrado - célula com furo elíptico (c) Arranjo hexagonal - célula com fibras	24
4.2	a) Malha original. b) Malha refinada pelo <i>h-method</i> . c) Malha refinada pelo <i>p-method</i> .(Adaptado de [9]).	25
4.3	Representação da geometria das células unitárias utilizadas na dissertação. À esquerda está representada a célula unitária com a menor discretização e à direita está representado um quarto da célula com a maior discretização utilizada para (a) célula unitária com furo circular (b) célula unitária com furo elíptico	27
4.4	Comparação das dimensões de una célula de uma microestrutura com 3 repetições (à esquerda) e com 7 repetições (à direita)	28
4.5	Microestrutura celular composta por 5 repetições da célula unitária do arranjo hexagonal.	29
4.6	Malha utilizada para descrever a célula unitária de arranjo hexagonal.	30
5.1	Representação da célula unitária com furo circular.	32
5.2	Representação da célula unitária com furo circular	33
5.3	Gráficos do estudo de convergência da malha para furo circular submetido a ensaio uniaxial (a) tensão máxima σ_y no ponto 1 (b) tensão mínima σ_x no ponto 2	35
5.4	Representação da célula unitária com furo circular	36
5.5	Gráficos do estudo de convergência da malha para furo circular submetido a ensaio de corte (a) tensão máxima σ_y no ponto 1 (b) tensão mínima σ_x no ponto 2.	38
5.6	Representação da célula unitária com furo circular	39
5.7	Gráficos do estudo de convergência da malha para furo circular submetido a ensaio hidrostático.	41

5.8	Representação da célula unitária com furo elíptico	42
5.9	Gráficos do estudo de convergência da malha para furo elíptico submetido a ensaio uniaxial (a) tensão máxima σ_y no ponto 1 (b) tensão mínima σ_x no ponto 2.	44
5.10	Representação da célula unitária com furo elíptico	45
5.11	Gráficos do estudo de convergência da malha para furo elíptico submetido a ensaio de corte (a) tensão máxima σ_y no ponto 1 (b) tensão mínima σ_x no ponto 2.	47
5.12	Representação da célula unitária com furo elíptico	48
5.13	Gráficos do estudo de convergência da malha para furo elíptico submetido a ensaio hidrostático.	50
5.14	Célula unitária com furo circular. No ponto 1 mede-se a tensão σ_y e no ponto 2 a tensão σ_x	52
5.15	Resultados do ensaio com carregamento uniaxial para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo circular:(a) Gráfico da tensão σ_y no ponto 1 (b) Gráfico da tensão σ_x no ponto 2 (c) Fator de concentração de tensões no ponto 1	53
5.16	Célula unitária com furo circular. No ponto 1 mede-se a tensão σ_y e no ponto 2 a tensão σ_x	55
5.17	Resultados do ensaio com carregamento de corte para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo circular:(a) Gráfico da tensão σ_y no ponto 1 (b) Gráfico da tensão σ_x no ponto 2 (c) Fator de concentração de tensões no ponto 1	56
5.18	Célula unitária com furo circular. No ponto 1 e 2 mede-se a tensão σ_{eq}	58
5.19	Resultados da tensão equivalente máxima do ensaio com carregamento hidrostático para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo circular.	59
5.20	Célula unitária com furo elíptico. No ponto 1 mede-se a tensão σ_y e no ponto 2 a tensão σ_x	61
5.21	Resultados do ensaio com carregamento de corte para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo elíptico:(a) Gráfico da tensão σ_y no ponto 1 (b) Gráfico da tensão σ_x no ponto 2 (c) Fator de concentração de tensões no ponto 1	62
5.22	Célula unitária com furo elíptico. No ponto 1 mede-se a tensão σ_y e no ponto 2 a tensão σ_x	64

5.23 Resultados do ensaio com carregamento de corte para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo elíptico:(a) Gráfico da tensão σ_y no ponto 1 (b) Gráfico da tensão σ_x no ponto 2 (c) Fator de concentração de tensões no ponto 1	65
5.24 Célula unitária com furo elíptico. No ponto 1 e 2 mede-se a tensão σ_{eq}	67
5.25 Resultados de tensão equivalente máxima do ensaio com carregamento biaxial para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo elíptico.	68
5.26 Resultado da tensão equivalente máxima para ensaio uniaxial da célula de arranjo hexagonal.	71
5.27 Resultado da tensão equivalente máxima para ensaio hidrostático da célula de arranjo hexagonal.	73
5.28 Resultado da tensão equivalente máxima para ensaio corte da célula de arranjo hexagonal.	75

LISTA DE TABELAS

3.1	Tensões obtidas nas bordas do furo numa placa infinita com furo circular para vários carregamentos.	16
3.2	Tensões obtidas nas bordas do furo numa placa infinita com furo elíptico de rácio $\frac{a}{b} = 2$ para vários carregamentos.	18
5.1	Carregamentos utilizados no estudo de convergência de malha.	32
5.2	Campos de tensão da célula com furo circular e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento uniaxial	34
5.3	Valores de tensão máxima σ_y no ponto 1 e de tensão mínima σ_x no ponto 2 e respetivos erros relativos para cada discretização de malha.	36
5.4	Campos de tensão da célula com furo circular e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento de corte.	37
5.5	Valores de tensão máxima σ_y no ponto 1 e de tensão mínima σ_x no ponto 2 e respetivos erros relativos para cada discretização de malha.	39
5.6	Campos de tensão da célula com furo circular e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento hidrostático.	40
5.7	Valores de tensão $\sigma_{e,q}$ máxima e respetivos erros relativos para cada discretização de malha.	42
5.8	Campos de tensão da célula com furo elíptico e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento uniaxial.	43
5.9	Valores de tensão máxima σ_y no ponto 1 e de tensão mínima σ_x no ponto 2 e respetivos erros relativos para cada discretização de malha.	45
5.10	Campos de tensão da célula com furo elíptico e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento de corte.	46
5.11	Valores de tensão máxima σ_y no ponto 1 e de tensão mínima σ_x no ponto 2 e respetivos erros relativos para cada discretização de malha.	48

5.12 Campos de tensão da célula com furo elíptico e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento bi-axial.	49
5.13 Valores de tensão σ_{eq} máxima e respetivos erros relativos para cada discretização de malha.	51
5.14 Campos de tensão σ_y da célula com furo circular quando submetida a um carregamento uniaxial.	54
5.15 Campos de tensão σ_y da célula com furo circular quando submetida a um carregamento de corte.	57
5.16 Campos de tensão σ_{eq} da célula com furo circular quando submetida a um carregamento hidrostático.	60
5.17 Campos de tensão σ_y da célula com furo elíptico quando submetida a um carregamento uniaxial.	63
5.18 Campos de tensão σ_y da célula com furo elíptico quando submetida a um carregamento de corte.	66
5.19 Campos de tensão σ_{eq} da célula com furo elíptico quando submetida a um carregamento biaxial.	69
5.20 Carregamentos utilizados no caso de estudo da célula de arranjo hexagonal.	70
5.21 Campos da tensão equivalente em carregamento uniaxial para diferentes frações volúmicas das fibras. As zonas a vermelho correspondem às zonas onde a tensão equivalente é máxima.	72
5.22 Campos da tensão equivalente em carregamento hidrostático para diferentes frações volúmicas das fibras. As zonas a vermelho correspondem às zonas onde a tensão equivalente é máxima.	74
5.23 Campos da tensão equivalente em carregamento de corte para diferentes frações volúmicas das fibras. As zonas a vermelho correspondem às zonas onde a tensão equivalente é máxima.	76

INTRODUÇÃO

A evolução da informática tem sido uma grande ajuda na área da engenharia estrutural. A capacidade de modelação de modelos computacionais permite reduzir o gasto de recursos materiais e prevenir erros que podem ser descobertos através da simulação das condições a que uma estrutura estará sujeita.

Uma das melhores ferramentas à disposição da engenharia estrutural é o método dos elementos finitos. Este método permite-nos analisar tensões e deformações para as mais variadas condições e produtos, seja para estruturas de grande escala ou para microestruturas de materiais compósitos, sendo que a tensão é um dos parâmetros mais importantes de um projeto.

Nesta dissertação é feito um estudo de convergência de malha de elementos finitos para microestruturas, bem como um estudo do efeito de escala para microestruturas de materiais compósitos.

1.1 Motivação

Os materiais compósitos são materiais criados através da combinação de dois ou mais materiais, muitas vezes com propriedades muito distintas, que quando combinados dão ao compósito propriedades únicas.

Os materiais compósitos podem ser encontrados na natureza, como é o caso da madeira ou dos nossos ossos, ou podem ser fabricados, como é o caso da fibra de vidro que hoje está presente em todo o tipo de aplicações como em automóveis ou artigos desportivos.

Em aplicações onde a segurança e fiabilidade é o aspeto mais importante, como por exemplo os aviões onde os compósitos já chegam a ter uma fração de 50% do peso (como é o caso do Boeing 787), é preciso saber qual o limite desses materiais de forma a evitar as suas falhas. A motivação desta dissertação é estudar a concentração de tensão em diversas microestruturas de materiais compósitos.

1.2 Objetivo da dissertação

O objetivo desta dissertação é contribuir para o conhecimento científico de micro-estruturas de materiais compósitos com especial foco na distribuição e concentração de tensões em vários tipos diferentes de microestruturas. Foi realizado um estudo de convergência de malha para duas micro-estruturas diferentes e em seguida um estudo sobre qual a influência do efeito de escala na concentração de tensões nas diferentes micro-estruturas. O estudo foi feito com recurso ao método numérico dos elementos finitos e todas as modelações e resultados foram obtidos através da utilização de um código *APDL* no programa comercial *ANSYS Mechanical APDL (Ansys Parametric Design Language)*.

1.3 Estrutura da dissertação

No primeiro capítulo, é feita uma introdução ao tema.

No segundo capítulo é feita uma revisão literária sobre arranjos de micro-estruturas de materiais compósitos e o método da homogenização.

No terceiro capítulo são apresentados os conhecimentos que existem sobre o fenómeno de concentração de tensões em placas infinitas e placas finitas.

No quarto capítulo é introduzido o modelo de material utilizado nesta dissertação e explicado como é feito o estudo de convergência de malha e de efeito de escala.

No quinto capítulo são apresentados os resultados do trabalho desenvolvido nesta dissertação.

No sexto capítulo são apresentadas as conclusões desta dissertação. Neste capítulo são também apresentados possíveis desenvolvimentos futuros de forma a dar continuidade ao trabalho realizado nesta dissertação.

MICROESTRUTURAS DE MATERIAL PERIÓDICO

2.1 Otimização Estrutural

A área da otimização estrutural tem beneficiado bastante nas últimas décadas do avanço tecnológico na área da tecnologia e computadores e do desenvolvimento de métodos analíticos e numéricos, como por exemplo o Método dos Elementos Finitos, o que permitiu a realização de análises estruturais muito complexas.

A otimização estrutural tem como objetivo a obtenção de uma estrutura ótima que satisfaça a minimização ou maximização de um parâmetro objetivo como a massa, rigidez ou flexibilidade quando sujeito a um conjunto de constrangimentos. A otimização estrutural pode ser dividida em três grandes categorias: otimização de dimensão; otimização de forma e otimização de topologia.

A otimização de dimensões tem como variáveis de projeto as dimensões dos membros de uma estrutura e os problemas deste tipo têm tipicamente uma natureza combinatoria e variáveis discretas ou contínuas.

Na otimização de forma o objetivo é encontrar a forma da fronteira Γ de um domínio Ω . As variáveis de projeto são contínuas e a solução final está fortemente dependente da topologia inicial usada, o que resulta algumas vezes numa solução sub-ótima.

A otimização de topologia tem como objetivo encontrar a distribuição de material mais eficiente num dado domínio. Pode ser usada em estruturas reticuladas ou meios

contínuos de duas e três dimensões.

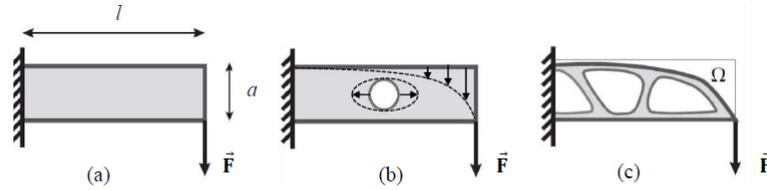


Figura 2.1: Diferentes tipos de otimização estrutural; (a) Otimização de dimensões; (b) Otimização de forma; (c) Otimização de topologia. (Adaptado de [1])

No caso de estruturas reticuladas o objetivo é perceber se um dado elemento da estrutura inicial, como uma barra, deve ou não fazer parte da estrutura final.

No caso dos meios contínuos, o problema é resolvido inicialmente pela discretização do domínio Ω numa malha de elementos finitos à qual é associada uma variável ρ que descreve a presença ou ausência de material em cada ponto da malha. A variável ρ é uma variável contínua que toma valores

$$\rho \in [0, 1]$$

em que 0 corresponde à ausência de material e 1 corresponde à presença de material. Como o objetivo de uma otimização é obter um domínio definido que permita ser fabricado, uma otimização desta natureza resultaria em valores de ρ diferentes de 0 e 1 que não têm significado físico.

Para resolver este problema, Bendsøe(1989) propôs o modelo SIMP(*Solid Isotropic Material with Penalization*), que relaciona as propriedades do material com a densidade em cada elemento através de uma lei de potência que penaliza as densidades intermédias e favorece uma topologia final de 0 e 1:

$$E_e = \rho(x)^p E_0 \quad (2.1)$$

2.2 Materiais compósitos

Os materiais compósitos já se encontram em uso em variadas indústrias como aeroespacial, automóvel e desportiva graças à possibilidade de combinar materiais constituintes na forma de matriz e reforço com diferentes propriedades mecânicas e químicas e obter um novo material com propriedades bastante diferentes.

Uma das formas mais comuns de combinar materiais constituintes é na forma de matriz-fibra. O reforço em forma de fibra fornece rigidez e consegue impedir a propagação de falhas.

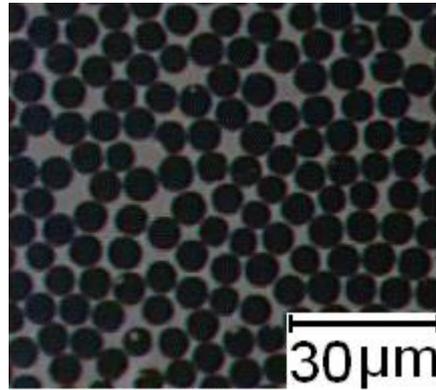


Figura 2.2: Exemplo de um material compósito com uma distribuição de fibras aleatória.

No entanto, graças à natureza anisotrópica e heterogênea dos materiais compósitos, é difícil avaliar as propriedades mecânicas dos compósitos reforçados com fibras.

Como a distribuição de fibras numa matriz é aleatória, um método eficaz de descrever um material compósito deste tipo é assumir que a mais pequena heterogeneidade do material pode ser descrita por uma célula unitária representativa com comportamento correspondente ao comportamento médio (homogeneizado) do material compósito, que se repete periodicamente no espaço. Isto pode ser feito com a aplicação do método da homogeneização.

O método da homogeneização tem como objetivo descrever um meio heterogêneo como um meio homogêneo com propriedades equivalentes que podem ser calculadas. Para poder ser aplicado, o método da homogeneização tem como condições obrigatórias:

- a descrição do meio heterogêneo como uma micro-estrutura em que as heterogeneidades são representadas por células unitárias repetidas periodicamente
- A célula unitária é de dimensões muito reduzidas quando comparada com o domínio macroscópico do material

As dimensões entre o domínio microscópico da célula, Y , e o domínio macroscópico do material, X , podem ser relacionadas da seguinte maneira:

$$\frac{Y}{X} = \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

Na figura 2.3 pode ser vista uma comparação entre os dois domínios:

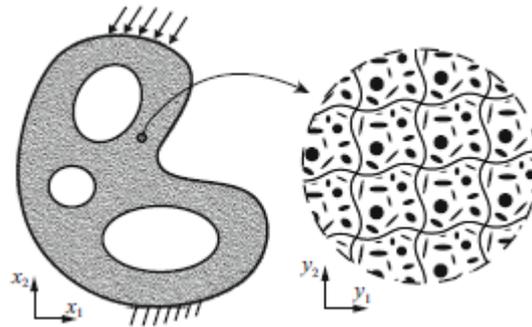


Figura 2.3: Relação entre dimensões do domínio macroscópico e do domínio microscópico (Adaptado de [2])

O domínio macroscópico pode ser composto por diferentes tipos de células unitárias desde que se garanta que as transições entre os diferentes tipos de célula sejam suaves e que as condições fronteira e periodicidade sejam respeitadas, como se mostra na figura 2.4.

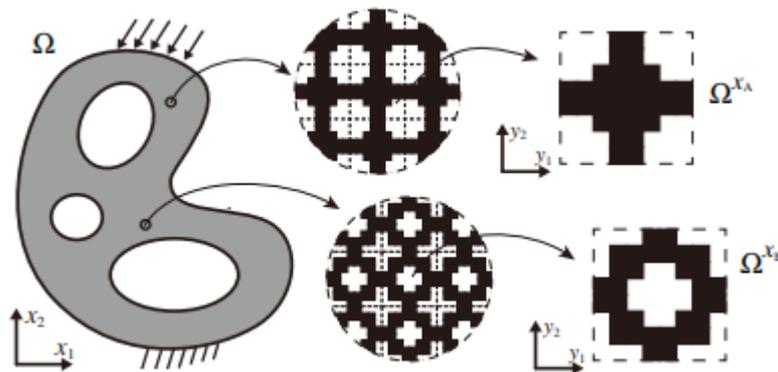


Figura 2.4: Variação da microestrutura de um material no mesmo domínio macroscópico. (Adaptado de [2])

Segundo Sun e Vadya[8], num meio homogêneo que esteja sobre carregamento uniforme, o estado de tensão e deformação vai ser uniforme, mas isso não é o caso em materiais heterogêneos. No entanto, num meio heterogêneo onde todas as células unitárias representativas são iguais, os campos de tensão e deformação devem ser periódicos a uma escala macroscópica exceto na proximidade da fronteira onde é aplicada a carga.

Na figura 2.5 mostram-se alguns arranjos de células unitárias que podem ser utilizados para descrever o meio heterogêneo de um material compósito.

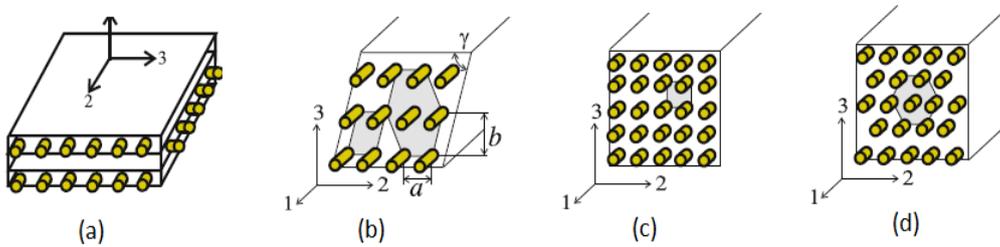


Figura 2.5: Arranjos celulares que podem ser usados para descrever a micro-estrutura de um material compósito: (a) arranjo de fibras perpendicular por camadas; (b) arranjo de fibras rômbo; (c) arranjo de fibras quadrado; (d) arranjo de fibras hexagonal. (Adaptado de [3])

Os arranjos mais utilizados para descrever um meio compósito são os quadrados e hexagonal, mas mesmo num dado arranjo de micro-estrutura, as células unitárias escolhidas para representar o compósito como um meio periódico podem ser várias, como se mostra na figura 2.6 para o arranjo de fibras quadrado:

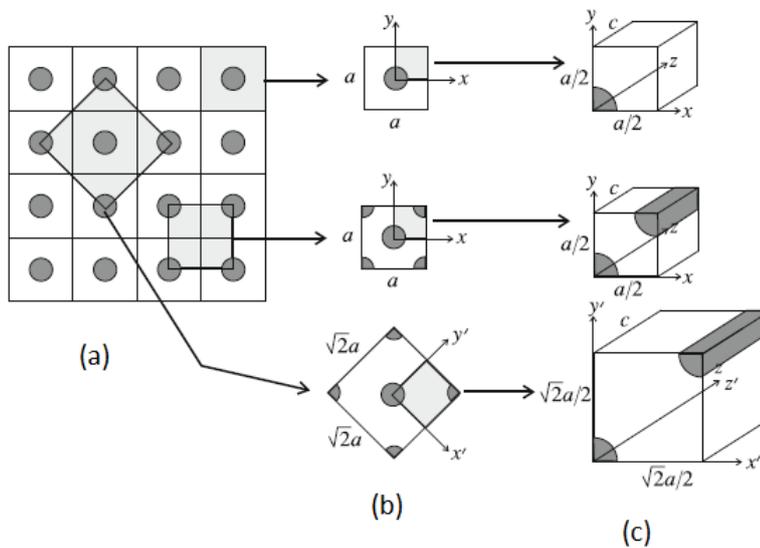


Figura 2.6: (a) Meio periódico de arranjo quadrado (b) Células representativas do arranjo quadrado (c) Quadrante das células representativas (Adaptado de [3])

e na figura 2.7 para o arranjo de fibras hexagonal:

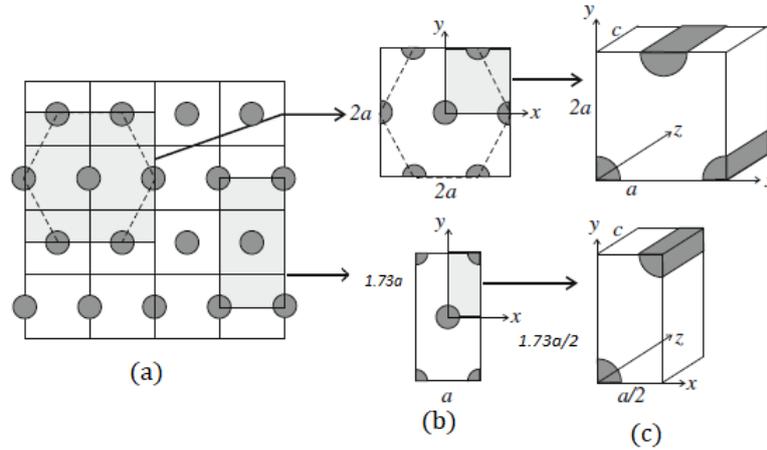


Figura 2.7: (a) Meio periódico de arranjo hexagonal (b) Células representativas do arranjo quadrado (c) Quadrante das células representativas (Adaptado de [3])

Diferentes arranjos celulares resultam em diferentes propriedades do meio homogenizado como por exemplo, o empacotamento máximo de fibras na matriz, uma propriedade onde o arranjo hexagonal consegue mais de 10% de empacotamento do que o arranjo quadrado, como se mostra na figura 2.8:

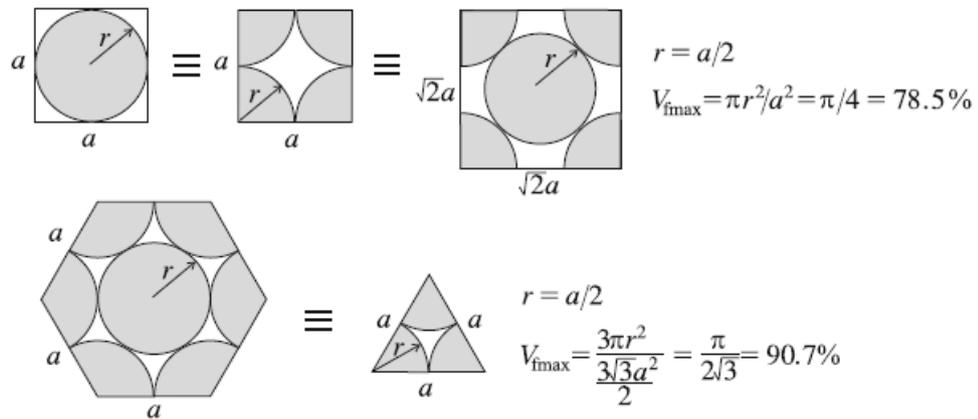


Figura 2.8: Empacotamento máximo das células unitárias : Em cima - arranjo quadrado; Em baixo - arranjo hexagonal. (Adaptado de [3])

2.2.1 Micro-estruturas de Vigdergauz

As micro-estruturas de Vigdergauz[6] são compósitos de arranjo periódico que têm a particularidade de conseguir uma distribuição da tensão equivalente de Von Mises máxima uniforme em redor de inclusão que exista no material.

O trabalho nesta área começa com o estudo de Eshelby sobre inclusões elipsoidais que tinham um campo de tensões uniforme e ausência de picos de tensão que reduzia a probabilidade da ocorrência de falhas no material. Avanços posteriores de Vigdergauz e de Grabovsky e Kohn deram uma fórmula explícita para a criação das micro-estruturas de Vigdergauz para qualquer fração volúmica da inclusão e carregamento que seja aplicada numa célula unitária.

A tensão máxima equivalente de Von Mises é sempre uniforme em redor da inclusão numa micro-estrutura de Vigdergauz e o seu valor é dado por:

$$\sigma_{EQ} = \frac{Tr[\sigma^0]}{V_f} \quad (2.3)$$

onde $Tr[\sigma^0]$ é o traço do tensor das tensões de um carregamento biaxial e V_f é a fração volúmica da matriz da célula unitária.

Na figura 2.9 pode ser vista a evolução da forma da inclusão com o aumento da fração volúmica da inclusão para um carregamento hidrostático. É possível ver que para baixas frações volúmicas a inclusão é circular mas à medida que a fração volúmica da inclusão aumenta ela toma a forma de uma elipse.:

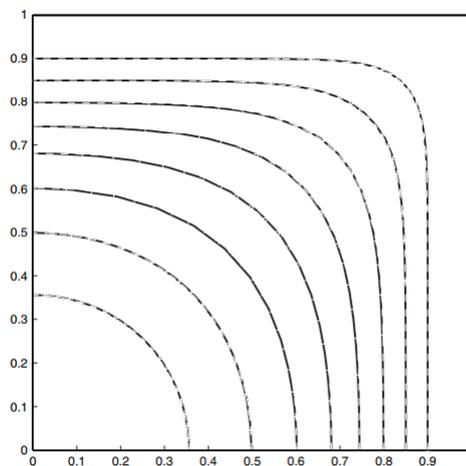


Figura 2.9: Formas da inclusão numa micro-estrutura de Vigdergauz para crescentes frações volúmicas. Na figura mostra-se um quarto da célula unitária. A célula unitária é quadrada e está aplicado um carregamento hidrostático.(Adaptado de [4])

CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES

Neste capítulo pretende dar-se a conhecer os resultados existentes sobre o fenómeno da concentração de tensões em placas infinitas com furos circulares e elípticos sobre carregamentos uniaxiais e biaxiais. É apresentada a definição de fator de concentração de tensões e tensão média para o caso de uma placa finita com furo circular sobre carregamento uniaxial.

3.1 Concentração de tensões em placa infinita com furo circular

A solução para a concentração de tensões numa placa infinita com um furo circular foi resolvida por Kirsch[13], que em 1898 desenvolveu as equações que descrevem o estado de tensão à volta de um furo numa placa infinita em carregamento uniaxial.

Kirsch descobriu que quando uma placa infinita com um furo circular se encontra sobre carregamento uniaxial, a tensão máxima no bordo do furo é 3 vezes superior ao valor da tensão aplicada no carregamento.

Considere-se o caso de uma placa infinita com um furo circular de raio a sujeita a um carregamento uniaxial apresentado na figura 3.1:

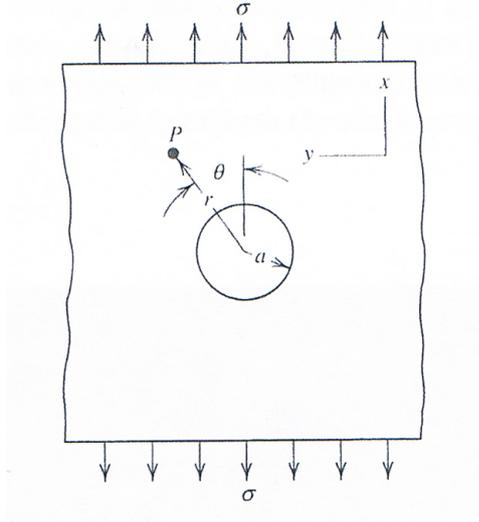


Figura 3.1: Placa infinita com um furo circular sujeita a um carregamento uniaxial.(Adaptado de [12])

As componentes de tensão num sistema de coordenadas polares são:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{3a^2}{r^2}\right)\cos(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2}\left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right)\cos(2\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{\sigma}{2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right)\sin(2\theta)\end{aligned}\quad (3.1)$$

Quando $r=a$ tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= 0 \\ \sigma_{\theta\theta} &= \sigma(1 - 2\cos(2\theta)) \\ \sigma_{r\theta} &= 0\end{aligned}\quad (3.2)$$

As componentes de tensão σ_{rr} e $\sigma_{r\theta}$ são nulas porque o furo é uma superfície livre.

A tensão $\sigma_{\theta\theta}$ é compressiva com o valor de $-\sigma$ para $\theta = 0$ e para $\theta = \frac{\pi}{2}$ é máxima com o valor de 3σ . Este é o valor do fator de concentração de tensões e à medida que

3.1. CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACA INFINITA COM FURO CIRCULAR

a distância ao furo, r , aumenta o valor de $\sigma_{\theta\theta}$ diminui rapidamente, mostrando que o fenómeno de concentração de tensões só se faz sentir nas imediações muito próximas do furo, como se mostra na figura 3.2:

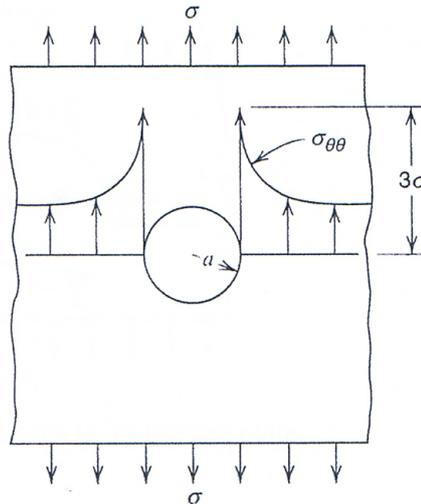


Figura 3.2: Distribuição de tensão numa placa infinita com furo circular sujeita a um carregamento uniaxial.(Adaptado de [12])

Para quaisquer condições de carregamento a 2-D, as tensões resultantes na placa podem ser calculadas usando o método da sobreposição linear. Na figura 3.3 está representada uma placa infinita sujeita a um carregamento 2-D generalizado:

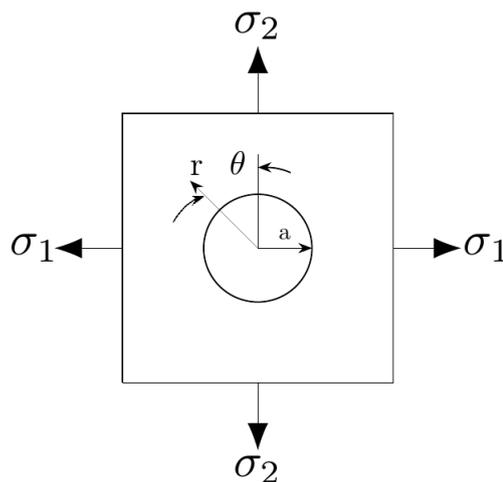


Figura 3.3: Placa infinita com furo circular com condições de carregamento 2-D.

Neste caso estão aplicadas tensões em ambas as direções e as equações resultantes são:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right) + \left(1 - 4\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \cos(2\theta) + \sigma_{12} \sin(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left(1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right) - \left(1 + 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \cos(2\theta) + \sigma_{12} \sin(2\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= \left(1 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^2 - 3\left(\frac{a}{r}\right)^4\right) \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \sin(2\theta) + \sigma_{12} \cos(2\theta)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Na tabela 3.1 mostram-se os resultados de concentração de tensões em placa infinita com furo circular para diversos casos de carregamento:

Carregamento	$\sigma_{\theta\theta}(\theta = 0)$	$\sigma_{\theta\theta}(\theta = \frac{\pi}{2})$
	$\sigma_{\theta\theta} = 2\sigma$	$\sigma_{\theta\theta} = 2\sigma$
	$\sigma_{\theta\theta} = -\sigma$	$\sigma_{\theta\theta} = 3\sigma$
	$\sigma_{\theta\theta} = -4\sigma$	$\sigma_{\theta\theta} = 4\sigma$

Tabela 3.1: Tensões obtidas nas bordas do furo numa placa infinita com furo circular para vários carregamentos.

3.2 Concentração de tensões em placas infinitas com furo elíptico

A solução para a concentração de tensões em placas infinitas com furo elíptico foi descoberta em 1913 por Inglis[14] e ao contrário da solução de Kirsch, Inglis conseguiu chegar a uma solução que pode ser aplicada a uma infinidade de casos com a mudança de relação entre os eixos da elipse.

Considere-se uma placa infinita com furo elíptico sujeito a um carregamento uniaxial perpendicular ao eixo maior da elipse como se mostra na figura 3.4:

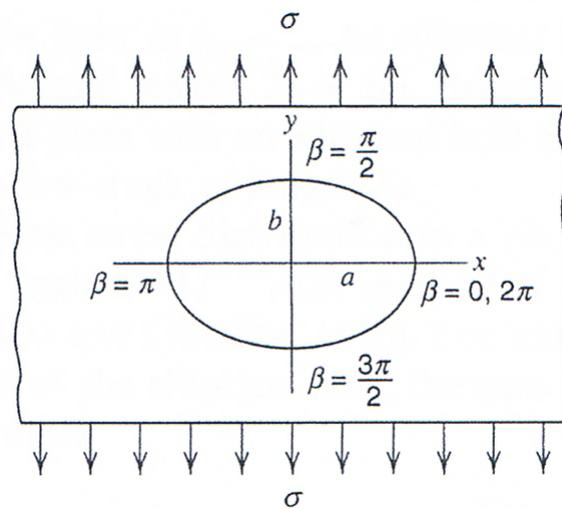


Figura 3.4: Placa infinita com um furo elíptico sujeita a um carregamento uniaxial perpendicular ao seu eixo maior.(Adaptado de [12])

Inglis chegou a uma solução que se aplica a todas as elipses existentes através do uso de um sistema referencial elíptico e do uso de números complexos e conclui que tensão máxima no bordo do furo acontece para $\beta = 0$ quando o carregamento uniaxial é perpendicular ao eixo maior da elipse e é dada por:

$$\sigma_{max} = \sigma \left(1 + 2\frac{a}{b}\right) \quad (3.4)$$

Com esta equação verifica-se o que já tinha sido apresentado anteriormente uma vez que quando $a = b$ o furo tem uma forma circular e a tensão máxima no bordo do furo é $\sigma_{max} = 3\sigma$. Esta equação também prevê o caso em que a elipse reduz em altura para formar uma falha ($b \rightarrow 0$) e a tensão máxima assume valores muito altos ($\sigma_{max} \rightarrow \infty$), resultando em propagação da falha.

Se a tensão aplicada for perpendicular ao eixo menor da elipse, a tensão máxima acontece para $\beta = \frac{\pi}{2}$ e é dada por:

$$\sigma_{max} = \sigma \left(1 + \frac{2b}{a}\right) \quad (3.5)$$

Na tabela seguinte encontram-se os resultados de tensão máxima numa placa infinita com furo elíptico de rácio $\frac{a}{b} = 2$ para vários casos de carregamento:

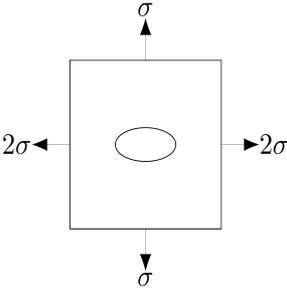
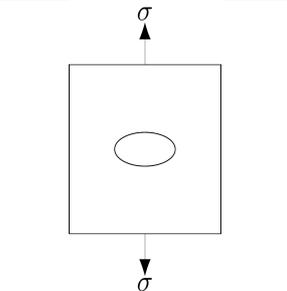
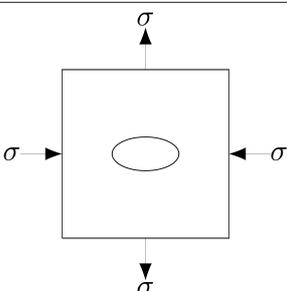
Carregamento	$\sigma_{\beta\beta}(\beta = 0; \frac{a}{b} = 2)$	$\sigma_{\beta\beta}(\beta = \frac{\pi}{2}; \frac{a}{b} = 2)$
	$\sigma_{\beta\beta} = 3\sigma$	$\sigma_{\beta\beta} = 3\sigma$
	$\sigma_{\beta\beta} = 5\sigma$	$\sigma_{\beta\beta} = -1\sigma$
	$\sigma_{\beta\beta} = 6\sigma$	$\sigma_{\beta\beta} = -3\sigma$

Tabela 3.2: Tensões obtidas nas bordas do furo numa placa infinita com furo elíptico de rácio $\frac{a}{b} = 2$ para vários carregamentos.

3.3 Concentração de tensões em placas de largura finita

Quando as dimensões de um furo circular são comparáveis às da placa onde se encontra o furo, as equações apresentadas anteriormente têm um erro considerável. Nestes casos, o fator de concentração de tensões tem que ser relacionado com a tensão normal

3.3. CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS DE LARGURA FINITA

média na área transversal da secção da placa onde existe o furo. Para dimensões do furo pequenas, o caso pode ser tratado como uma placa infinita mas quando o furo tem dimensões consideráveis a distribuição de tensões não tem o mesmo comportamento. Considere-se uma placa de largura finita com furo circular sujeita a um carregamento uniaxial como se mostra na figura 3.5:

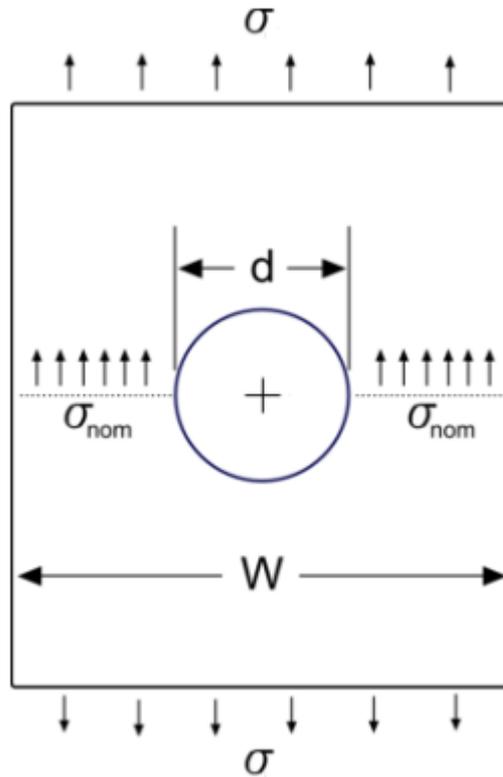


Figura 3.5: Placa de largura finita sujeita a um carregamento uniaxial.

A tensão média pode ser definida como:

$$\sigma_{nom} = \frac{W}{W-d} \sigma \quad (3.6)$$

em que W é a largura da placa e d é o diâmetro do furo.

O fator de concentração de tensões pode então ser definido como:

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (3.7)$$

A relação entre K_t e a medida adimensional $\frac{d}{W}$ foi determinada experimentalmente através de métodos fotoelásticos e é dada por:

$$K_t = 3 - 3.14 \frac{d}{W} + 3.667 \left(\frac{d}{W}\right)^2 - 1.527 \left(\frac{d}{W}\right)^3 \quad (3.8)$$

e na figura 3.6 está representado o gráfico da curva:

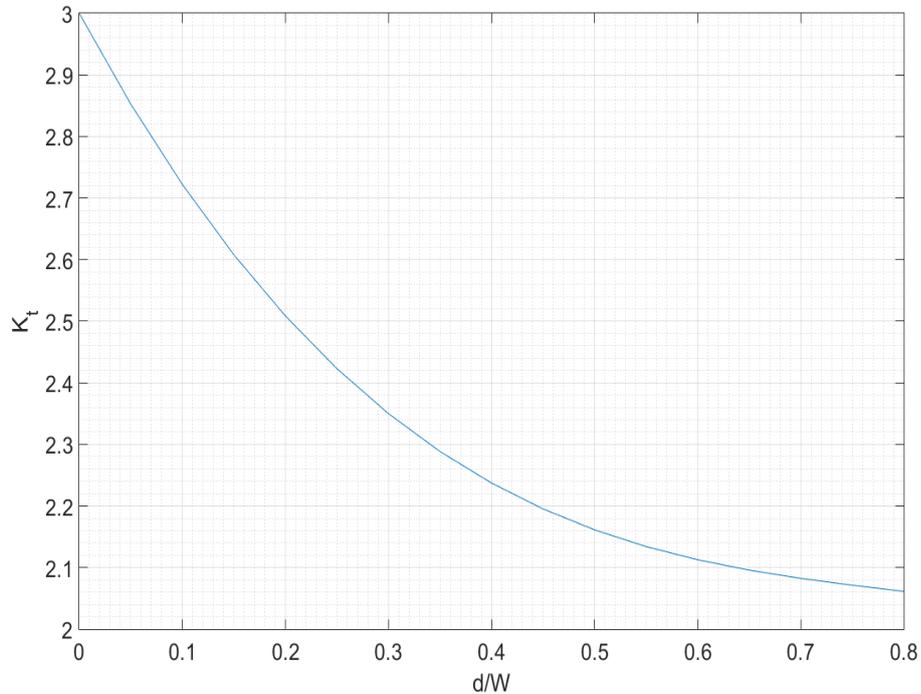


Figura 3.6: Curva de K_t obtida experimentalmente em função da relação diâmetro do furo e largura da placa.

A figura mostra que quando o furo é muito pequeno o fator de concentração de tensões tem o valor de 3, como se verifica no caso da placa infinita. O fator de concentração de tensões diminui à medida que $\frac{d}{W}$ aumenta, o que pode levar a concluir que a tensão máxima σ_{max} diminui, o que não é verdade. Isto pode ser visto se for traçada a curva da tensão máxima em função de $\frac{d}{W}$ como se mostra na figura 3.7:

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \left(\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}\right) \left(\frac{\sigma_{nom}}{\sigma}\right) = K_t \frac{W}{W-d} = K_t \frac{1}{1 - \left(\frac{d}{W}\right)} \quad (3.9)$$

Traçando essa curva tem-se:

3.3. CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS DE LARGURA FINITA

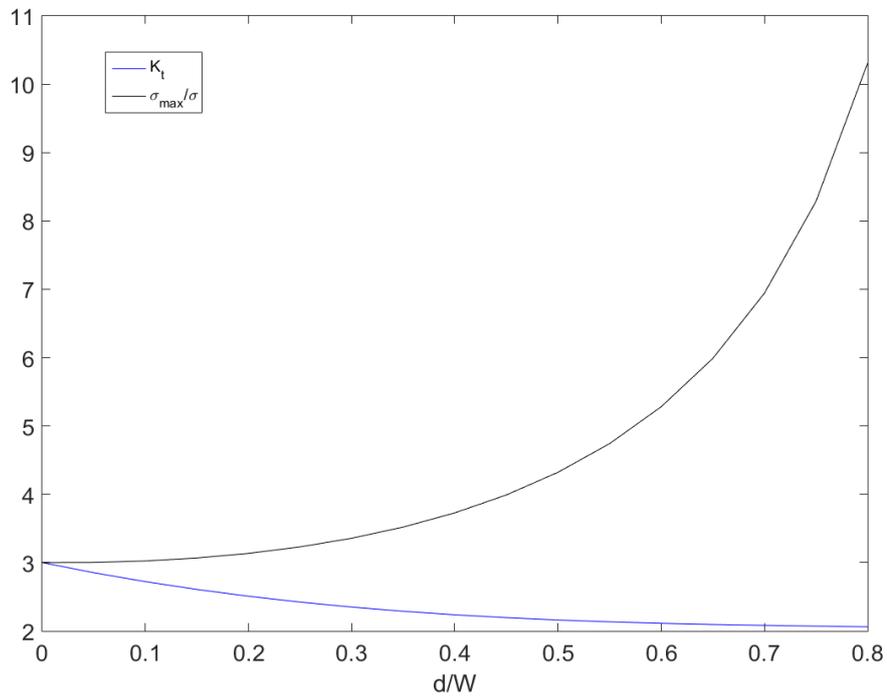


Figura 3.7: Comparação da evolução da tensão máxima e do fator de concentração de tensões com o aumento do diâmetro do furo.

O fator de concentração de tensões decresce com o aumento de $\frac{d}{W}$ porque, com a redução de área, a tensão média σ_{nom} tem um valor cada vez maior e aproxima-se do valor da tensão máxima, sendo que para furos grandes é metade do valor da tensão máxima.

MODELO MATERIAL E ESTUDOS REALIZADOS

4.1 Modelo material

O modelo do material considerado é um material celular de duas fases onde uma célula unitária representa a mais pequena heterogeneidade do meio é repetida periodicamente para formar um meio heterogéneo.

Nesta dissertação são estudados dois arranjos de célula unitária: quadrado e hexagonal. O arranjo quadrado é representado pelas seguintes células:

- Célula unitária quadrada com furo circular de fase vazia e fração volúmica da matriz a variar entre 40% e 99.5%.
- Célula unitária quadrada com furo elíptico de fase vazia com relação de eixos maior e menor

$$\frac{a}{b} = 2$$

e fração volúmica da matriz a variar entre 70% e 99.5%.

O arranjo hexagonal é representado pela seguinte célula:

- Célula unitária rectangular com relação altura-largura $h = 1.73 \times l$ com fibras de fase sólida e diferentes relações de módulos de rigidez da matriz e da fibra.

As células unitárias são discretizadas por elementos finitos hexaedros tri-dimensionais e de 8 nós.

Apesar de serem utilizados elementos tri-dimensionais, o objetivo do estudo é estudar a concentração de tensões na interface das duas fases que estão presentes em cada célula e, portanto, assume-se a uniformidade do *design* da célula na direção normal ao plano. Em trabalhos futuros pode ser utilizada a tri-dimensionalidade da célula para estudar casos de carga mais complexos ou alteração do design da célula na direção normal do plano.

As células unitárias utilizadas estão representadas na figura 4.1.

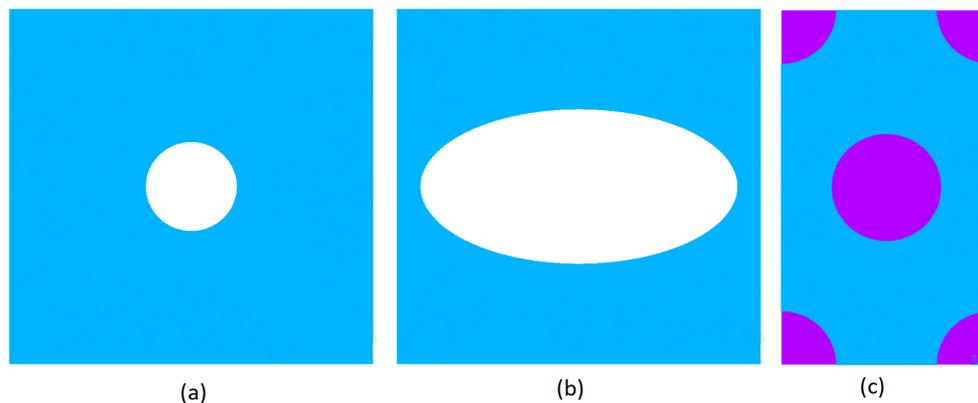


Figura 4.1: Células unitárias utilizadas na dissertação: (a) Arranjo quadrado - célula com furo circular (b) Arranjo quadrado - célula com furo elíptico (c) Arranjo hexagonal - célula com fibras

4.2 Convergência de malha

Um dos objetivos desta dissertação é o desenvolvimento de uma malha de elementos finitos para diferentes geometrias de células unitárias que tenham resultados de campos de tensão aproximados aos apresentados no capítulo 3. Com esse objetivo desenvolveu-se um estudo de convergência de malha de elementos finitos com um código APDL onde se procurou que os resultados de tensão seguissem uma tendência convergente. Para desenvolvimento de outras partes da dissertação, onde o objetivo é a utilização da malha de elementos finitos como a célula unitária representativa, é importante que os resultados de tensão da malha de elementos finitos sejam válidos.

4.2.1 Malha de elementos finitos

O método dos elementos finitos é um método numérico usado em engenharia para descrever um problema matemático como uma composição de problemas matemáticos

mais simples. Neste caso, procura-se dividir, ou discretizar, o domínio de material de uma célula unitária numa quantidade finita de elementos. A qualidade da solução depende portanto do número de elementos utilizados na malha e é expectável que se verifique uma convergência da solução com o aumento do número de elementos (refinamento da malha de elementos finitos).

Há várias técnicas utilizadas para fazer o refinamento de uma malha de elementos finitos para o estudo de convergência de malha. As duas mais populares são o *h-method* e o *p-method*.

O *h-method* procura melhorar os resultados aumentando o número de elementos iguais presentes na malha, ou seja, diminui a dimensão dos elementos através da divisão dos mesmos em 2 ou mais elementos do mesmo tipo.

O *p-method* procura melhorar os resultados mantendo o mesmo número de elementos mas aumentando a precisão do campo de deslocamentos da malha.

O método utilizado nesta dissertação foi o *h-method*.

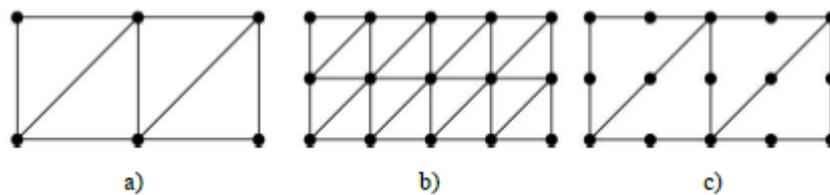


Figura 4.2: a) Malha original. b) Malha refinada pelo *h-method*. c) Malha refinada pelo *p-method*.(Adaptado de [9]).

4.2.2 *h-method*

Neste método de refinamento a melhoria de qualidade da solução é obtida através do aumento do número de elementos da malha. Se numa primeira análise o domínio for modelado por uma malha de elementos finitos muito grosseira então a distribuição de tensões no domínio vai ser pouco preciso. Para aumentar a precisão da distribuição de tensões divide-se os elementos existentes em 2 ou mais elementos, criando uma malha mais fina e obtendo uma solução de melhor qualidade numa segunda análise. Este procedimento é repetido até que as diferenças entre soluções consecutivas sejam muito baixas.

De notar que o aumento do número de elementos não serve para melhor descrever a geometria do domínio como, por exemplo, obter uma aproximação a um furo circular através do aumento do número de elementos quadrados. Nesta dissertação as geometrias

são iguais para qualquer que seja o número de elementos presentes na malha, uma vez que são utilizados elementos não-retangulares, portanto o aumento do número de elementos finitos na malha tem o propósito de melhorar a definição do campo de tensões e diminuir o erro associado ao valor da tensão máxima na borda do furo.

4.2.3 Estudo de convergência da malha

Para este estudo procurou-se replicar a situação em que uma placa infinita com um furo circular ou elíptico está sujeita a carregamentos uniaxiais, biaxiais e de corte.

Para esse efeito, o código APDL desenvolvido cria uma célula unitária com furo circular ou furo elíptico, onde os furos têm uma fração volúmica de 0.5% e discretiza a célula em elementos finitos. Com uma fração volúmica do furo desta ordem tem-se um modelo de elementos finitos que replica as condições da placa infinita e que posteriormente pode ser repetido de forma a modelar um meio celular.

Na figura 4.3 estão representadas as células unitárias com furo circular e furo elíptico com a discretização da malha utilizada na primeira análise bem como um quarto da célula com a discretização da malha utilizada na última análise.

Na figura 4.3, o furo tem uma fração volúmica de 5% para facilitar a representação da malha.

É possível ver que a concentração de elementos finitos é maior em redor do furo do que nas extremidades da célula unitária. Como o que se procura é replicar os resultados de concentração de tensão obtidos em placas infinitas com furo, a maior parte dos elementos está concentrada nas zonas de concentração de tensão. A concentração de tensão é um fenómeno localizado por isso é possível poupar poder computacional retirando elementos das extremidades da célula.

É também possível ver que a malha de elementos finitos da célula com furo elíptico tem uma discretização mais refinada do que a célula com furo circular. Isto acontece porque a concentração de tensões num furo elíptico é mais concentrada do que num furo circular e de forma a obter resultados válidos, a discretização tem que ser mais refinada à volta da elipse.

A primeira malha de elementos finitos utilizada para modelar a célula com furo circular tem 324 elementos e a última malha utilizada tem 7604 elementos. A primeira malha de elementos finitos utilizada para modelar a célula com furo elíptico tem 404 elementos e a última malha utilizada tem 10004 elementos.

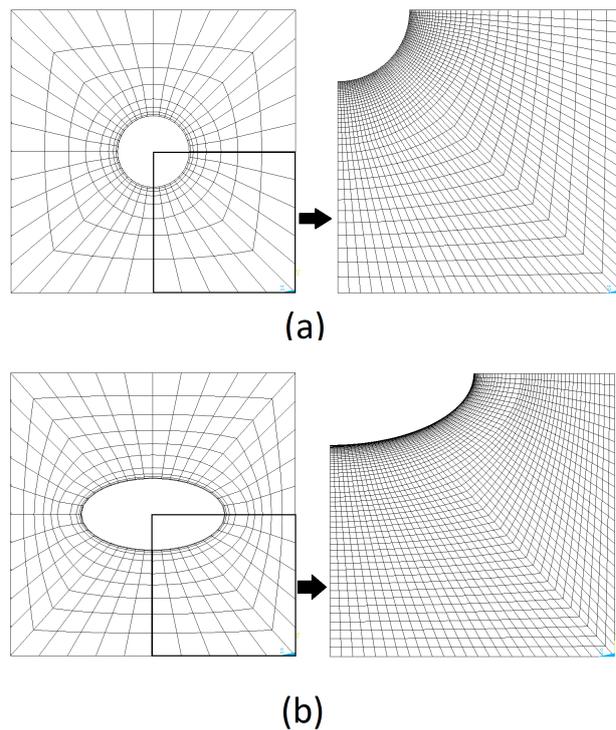


Figura 4.3: Representação da geometria das células unitárias utilizadas na dissertação. À esquerda está representada a célula unitária com a menor discretização e à direita está representado um quarto da célula com a maior discretização utilizada para (a) célula unitária com furo circular (b) célula unitária com furo elíptico

4.3 Estudo do efeito de escala

Outro dos principais objetivos desta dissertação é fazer um estudo sobre como o efeito de escala influencia a concentração de tensões no bordo dos furos presentes nas células unitárias para diferentes carregamentos.

O estudo é feito usando as malhas de elementos finitos com maior número de elementos que foram utilizadas no estudo de convergência de malha mas com frações volúmicas do furo variadas e é realizado da seguinte forma:

1. Geração da célula unitária com uma dada fração volúmica do furo
2. Repetição da célula unitária em duas direções um dado número de vezes (3x3, 5x5 e 7x7 foram as repetições usadas neste estudo)
3. Escolha do carregamento

4. Análise dos campos de tensão e cálculo do fator de concentração de tensões na célula central do meio celular

Como os diferentes tipos de célula unitária têm que ter geometrias diferentes quando são modeladas, há meios celulares em que se conseguem realizar mais ensaios do que outros. Por exemplo, como a célula com furo elíptico usada tem uma relação entre eixos maior e menor de 2 ($\frac{a}{b} = 2$), o furo aproxima-se da fronteira da célula para frações volúmicas muito mais baixas do que acontece com o furo circular. Desenvolvimentos futuros podem tornar o programa utilizado nesta dissertação mais robusto, de forma a que se possam realizar ensaios para frações volúmicas mais altas ou até mesmo modelar o caso de empacotamento máximo para cada arranjo utilizado.

Na figura 4.4 está representada uma comparação entre uma microestrutura com 3 repetições de células e uma microestrutura com 7 repetições de células para o caso da célula unitária com furo elíptico. A célula central está destacada e o furo tem uma fração volúmica de 10%.

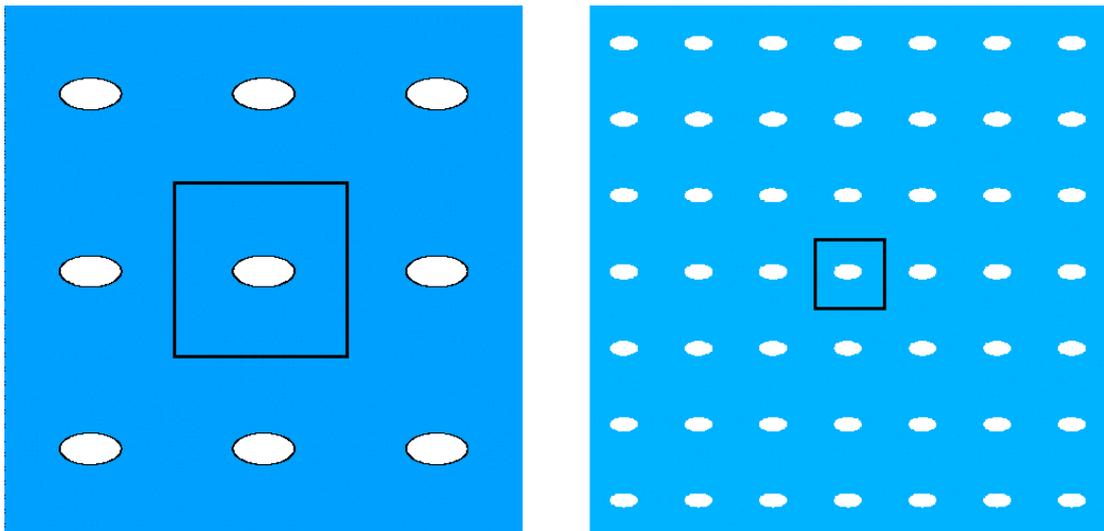


Figura 4.4: Comparação das dimensões de uma célula de uma microestrutura com 3 repetições (à esquerda) e com 7 repetições (à direita)

Para o caso da célula unitária que representa o arranjo hexagonal, o estudo feito foca-se nos efeitos da proximidade das fibras. Interessa perceber de que maneira a aproximação das fibras na matriz altera o campo de tensão equivalente e como a tensão equivalente aumenta com o aproximar das fibras na matriz.

Foram utilizadas 5 repetições da célula unitária para modelar o meio celular de modo a diminuir a proximidade da célula central à fronteira do meio celular. O meio celular do arranjo hexagonal está representado na figura 4.5.

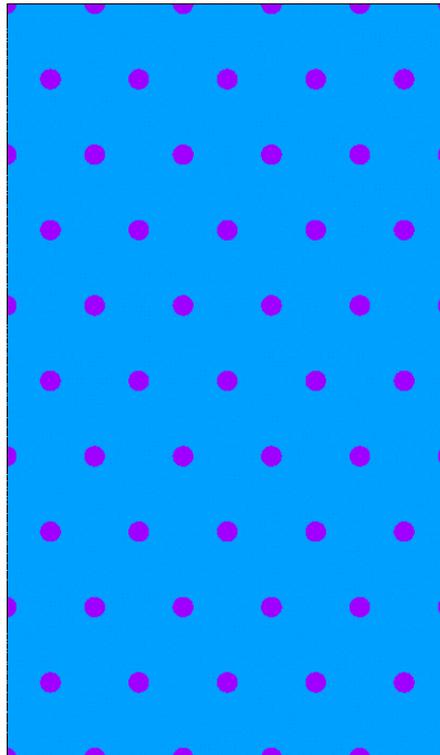


Figura 4.5: Microestrutura celular composta por 5 repetições da célula unitária do arranjo hexagonal.

Na figura 4.6 está representada a malha usada para descrever a célula unitária.

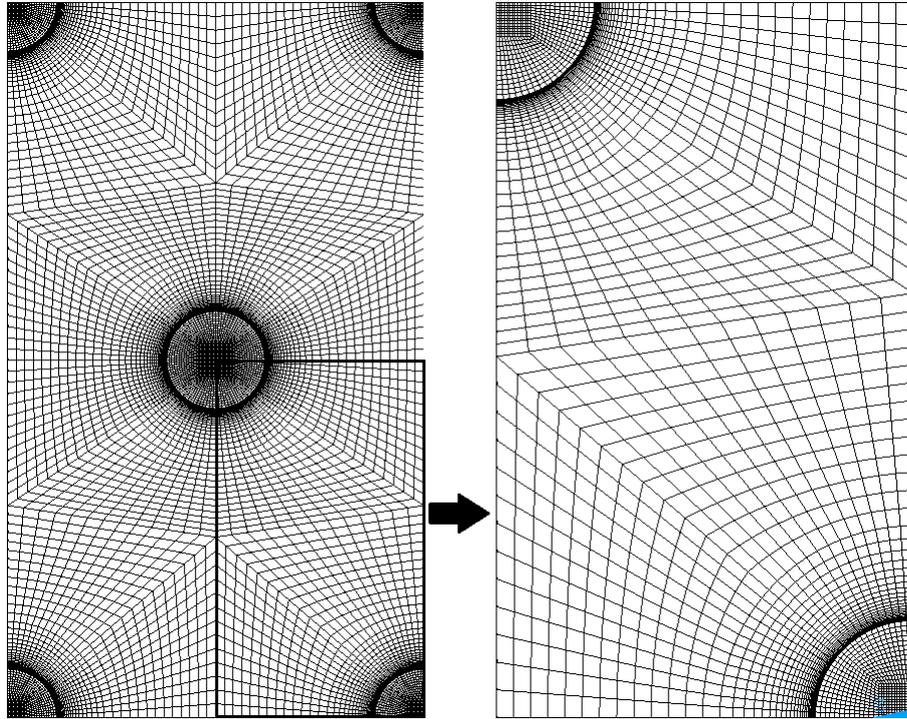


Figura 4.6: Malha utilizada para descrever a célula unitária de arranjo hexagonal.

RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados do estudo de convergência de malha e de efeito de escala.

5.1 Estudo de convergência de malha

Este estudo tem como especial atenção as tensões tangenciais $\sigma_{\theta\theta}$, na borda do furo quando $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 270^\circ$, respectivamente os pontos 2 e 1 representados na borda do furo na figura 5.1, segundo o referencial apresentado na figura. Como o furo tem um tamanho muito pequeno quando comparado com a célula unitária, todos os campos de tensão apresentados nos resultados do estudo do efeito de escala são um *zoom* do furo e da zona próxima do furo. Como para $\theta = 270^\circ$ a tensão tangencial na borda do furo é $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{yy}$ e para $\theta = 0^\circ$ é $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{xx}$, são apresentados os campos de tensão de σ_{yy} e de σ_{xx} .

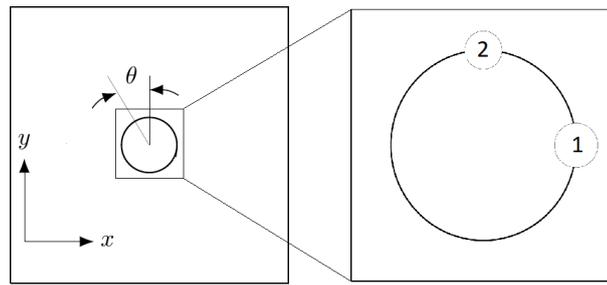


Figura 5.1: Representação da célula unitária com furo circular.

Os carregamentos utilizados são unitários e estão representados na tabela 5.1:

Carregamentos	Célula com furo circular	Célula com furo elíptico
Uniaxial		
Corte		
Biaxial		

Tabela 5.1: Carregamentos utilizados no estudo de convergência de malha.

Com este estudo procura-se que as tensões analisadas nos pontos 1 e 2 sigam um trajeto convergente e que com cada discretização sucessiva a diferença entre resultados

consecutivos seja menor. São também apresentados os erros relativos para cada discretização. Procura-se que os resultados de tensão obtidos com este programa APDL sejam o mais perto possível dos resultados apresentados nas tabelas 3.1 e 3.2 para o furo circular e elíptico respetivamente.

O erro relativo vai ser dado por:

$$\delta = \frac{|\sigma_t - \sigma_{APDL}|}{\sigma_t} \times 100 \quad (5.1)$$

onde σ_t é o resultado apresentado nas tabelas para cada caso de carregamento e σ_{APDL} é o resultado obtido com o programa APDL.

5.1.1 Furo circular - Carregamento Uniaxial

Os pontos onde a tensão é medida estão representados na figura 5.2. No ponto 1 foi medida a tensão máxima σ_y e no ponto 2 foi medida a tensão mínima σ_x .

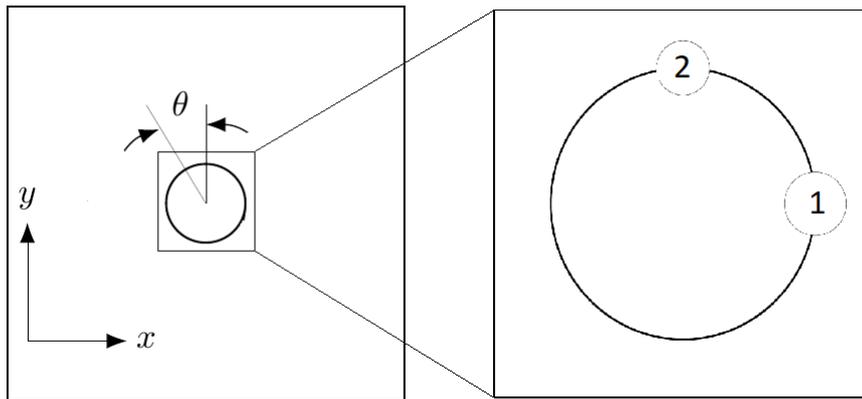


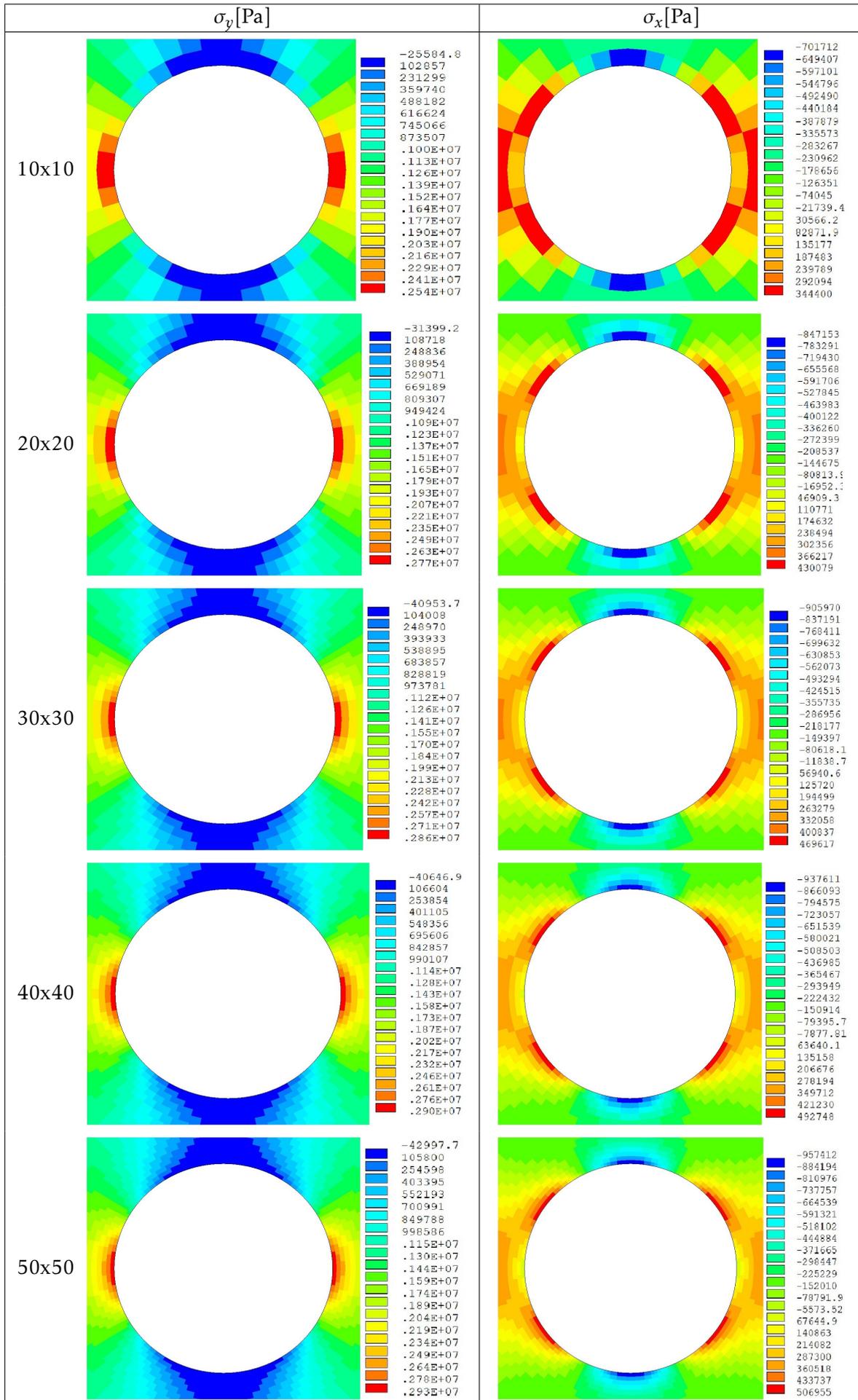
Figura 5.2: Representação da célula unitária com furo circular

Os campos de tensão da célula unitária e as suas discretizações são apresentados na tabela 5.2 e os gráficos do estudo de convergência da malha são apresentados na figura 5.3.

Na tabela 5.2 observa-se no ponto 1 que o aumento de discretização da malha resulta inicialmente na diminuição da área onde se faz sentir a concentração de tensões mas nas últimas discretizações a concentração de tensões tem um área constante.

No ponto 2 observa-se que a tensão σ_x é sempre compressiva e que a área onde a tensão σ_x é mínima é aproximadamente constante em todas as discretizações.

Tabela 5.2: Campos de tensão da célula com furo circular e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento uniaxial



5.1. ESTUDO DE CONVERGÊNCIA DE MALHA

Analisando o gráfico da figura 5.3(a) verifica-se uma convergência rápida da tensão máxima no ponto 1, sendo que os valores de tensão para as últimas duas discretizações são muito aproximados. Foi obtido um resultado final de tensão máxima que subestima o pretendido mas no entanto tem um erro relativo baixo de aproximadamente 3%.

No gráfico da figura 5.3(b) observa-se convergência da tensão mínima σ_x no ponto 2. No entanto, a convergência não é tão rápida como a da tensão máxima no ponto 1. O erro inicial da tensão mínima σ_x é duas vezes superior ao erro da tensão máxima σ_y , mas os erros para a última discretização são da mesma ordem.

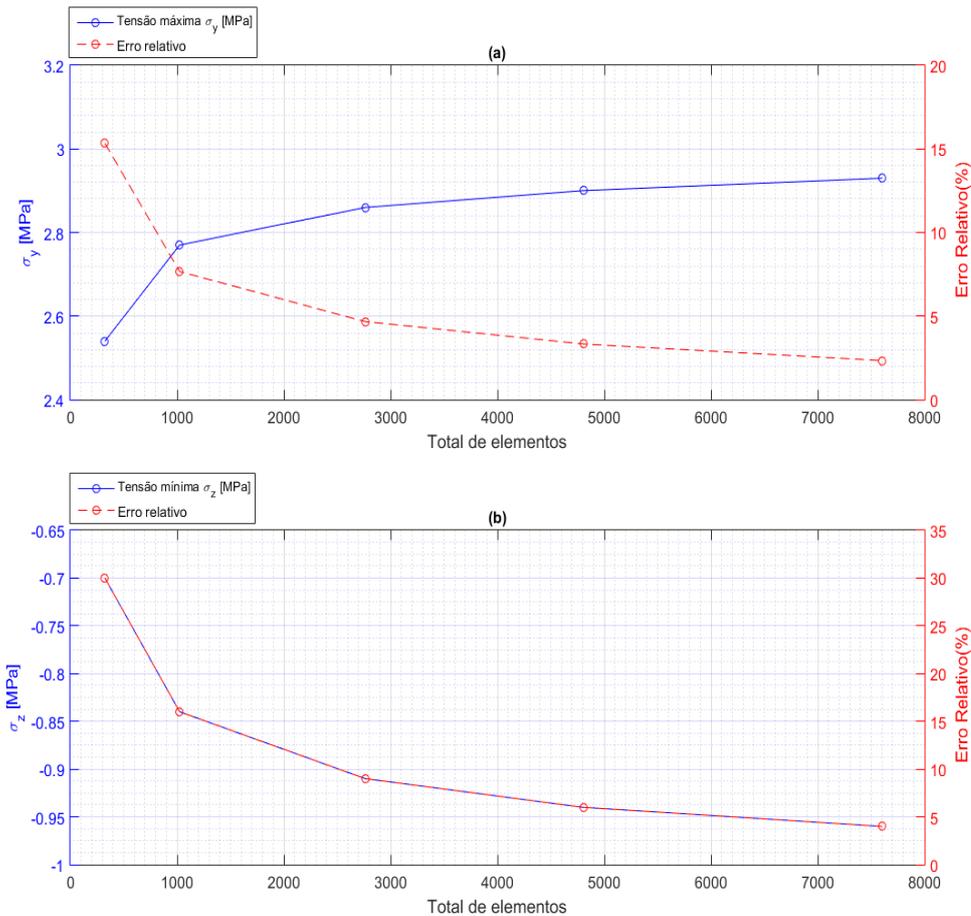


Figura 5.3: Gráficos do estudo de convergência da malha para furo circular submetido a ensaio uniaxial (a) tensão máxima σ_y no ponto 1 (b) tensão mínima σ_x no ponto 2

Na tabela 5.3 apresentam-se os resultados de tensão máxima e mínima nos pontos 1 e 2 respetivamente e o erro relativo associado.

Discretização	σ_y [MPa]	δ_1	σ_x [MPa]	δ_2
10x10	2.54	15.3%	-0.7	30.0%
20x20	2.77	7.7%	-0.84	16.0%
30x30	2.86	4.7%	-0.91	9.0%
40x40	2.90	3.3%	-0.94	6.0%
50x50	2.93	2.3%	-0.96	4.0%

Tabela 5.3: Valores de tensão máxima σ_y no ponto 1 e de tensão mínima σ_x no ponto 2 e respetivos erros relativos para cada discretização de malha.

5.1.2 Furo Circular - Carregamento de Corte

Os pontos onde a tensão é medida estão representados na figura 5.4. No ponto 1 foi medida a tensão máxima σ_y e no ponto 2 foi medida a tensão mínima σ_x .

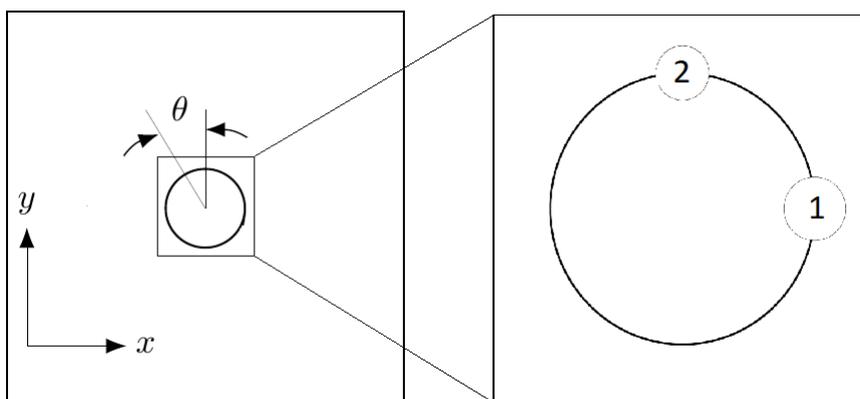
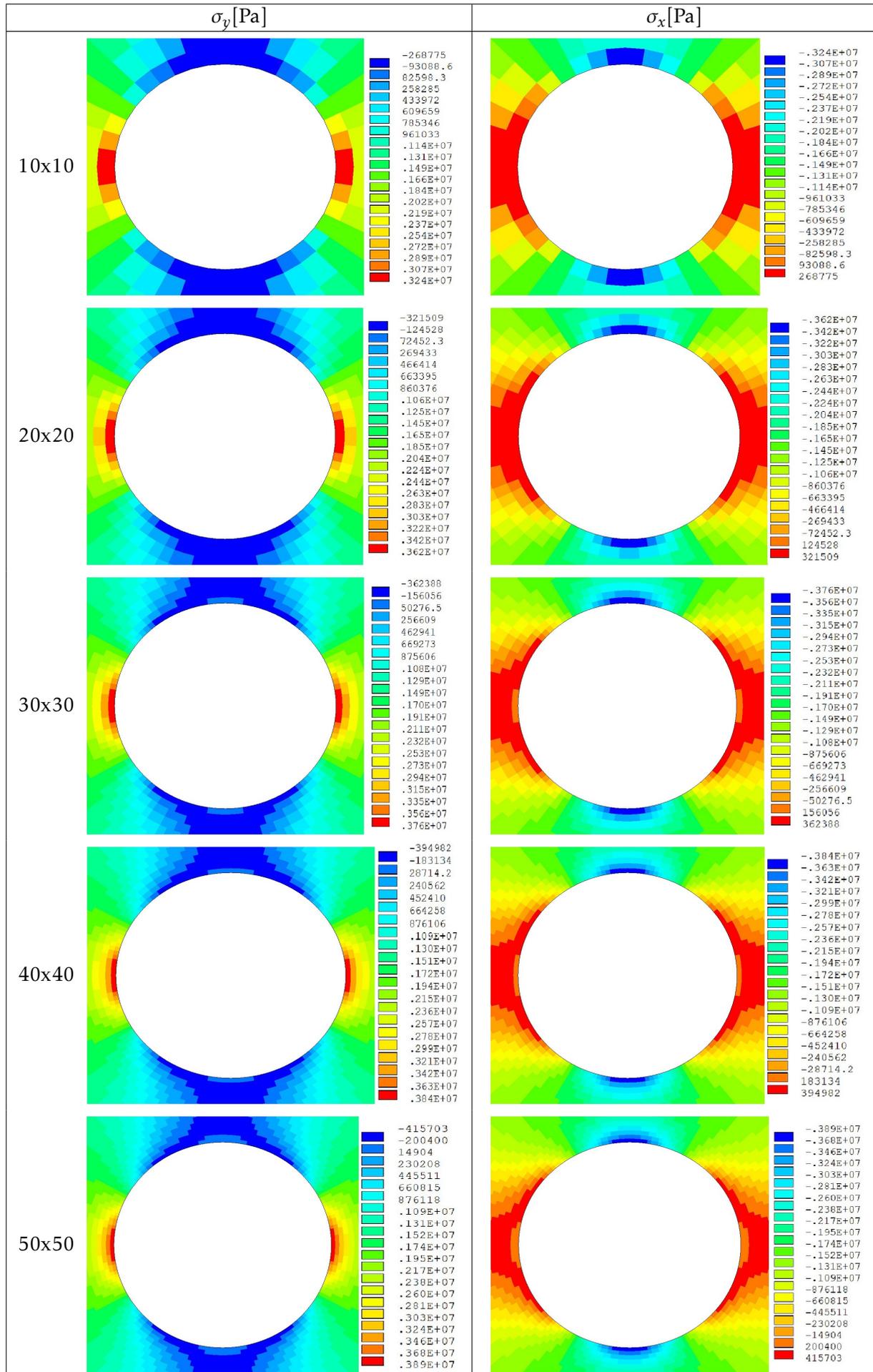


Figura 5.4: Representação da célula unitária com furo circular

Os campos de tensão da célula unitária e as suas discretizações são apresentados na tabela 5.4 e os gráficos do estudo de convergência da malha são apresentados na figura 5.5.

Ao contrário do caso de carregamento uniaxial, a área de concentração de tensões nas imediações do furo fica mais pequena à medida que se refina a malha. Como seria de esperar, os valores da tensão máxima σ_y e mínima σ_x têm o mesmo valor absoluto e isso verifica-se para todas as discretizações da malha.

Tabela 5.4: Campos de tensão da célula com furo circular e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento de corte.



Observando o gráfico da figura 5.4(a) observa-se que a tensão máxima σ_y no ponto 1 não converge tão rápido como para o caso uniaxial mas o erro relativo na discretização é da mesma ordem.

Como se observou na tabela 5.4, os valores da tensão máxima σ_y e tensão mínima σ_x têm o mesmo valor absoluto em todas as discretizações da malha e portanto têm o mesmo padrão de convergência e erros relativos.

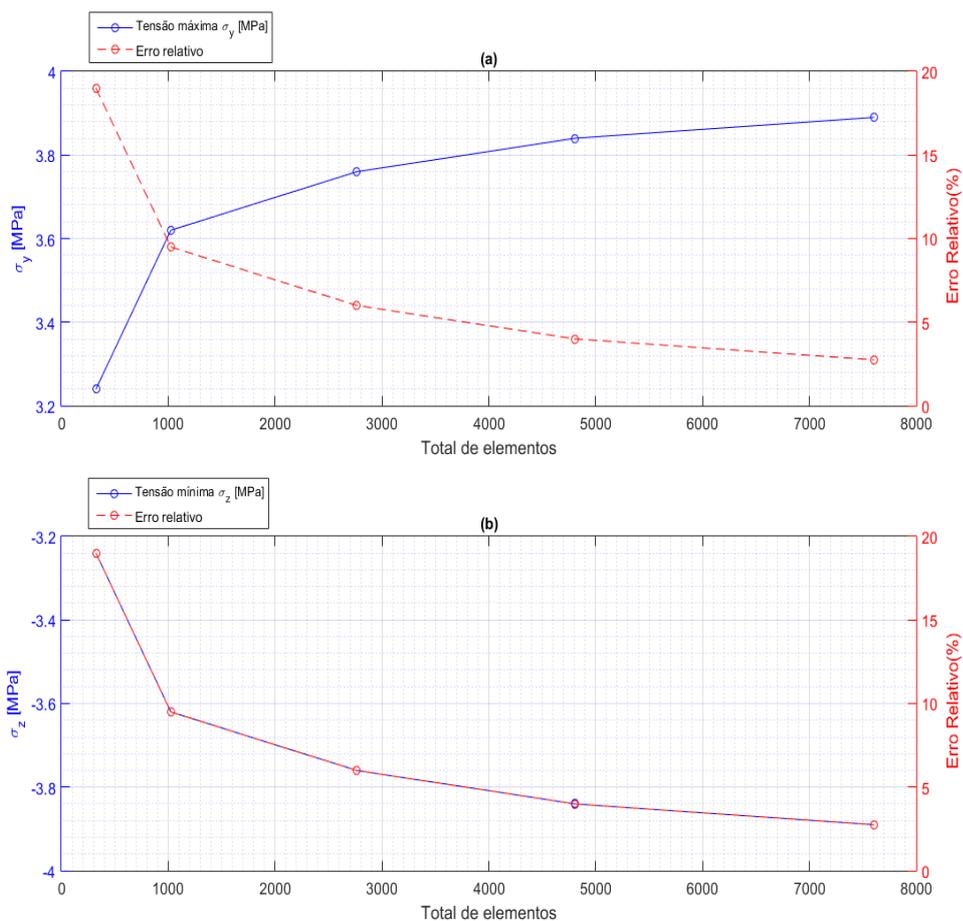


Figura 5.5: Gráficos do estudo de convergência da malha para furo circular submetido a ensaio de corte (a) tensão máxima σ_y no ponto 1 (b) tensão mínima σ_x no ponto 2.

Na tabela 5.5 apresentam-se os resultados de tensão máxima e mínima nos pontos 1 e 2 respetivamente e o erro relativo associado.

Discretização	σ_y [MPa]	δ_1	σ_x [MPa]	δ_2
10x10	3.24	16.0%	-3.24	16.0%
20x20	3.62	9.5%	-3.62	9.5%
30x30	3.76	6.0%	-3.76	6.0%
40x40	3.84	4.0%	-3.84	4.0%
50x50	3.89	2.8%	-3.89	2.8%

Tabela 5.5: Valores de tensão máxima σ_y no ponto 1 e de tensão mínima σ_x no ponto 2 e respectivos erros relativos para cada discretização de malha.

5.1.3 Furo circular - Carregamento Hidrostático

Os pontos onde a tensão é medida estão representados na figura 5.6.

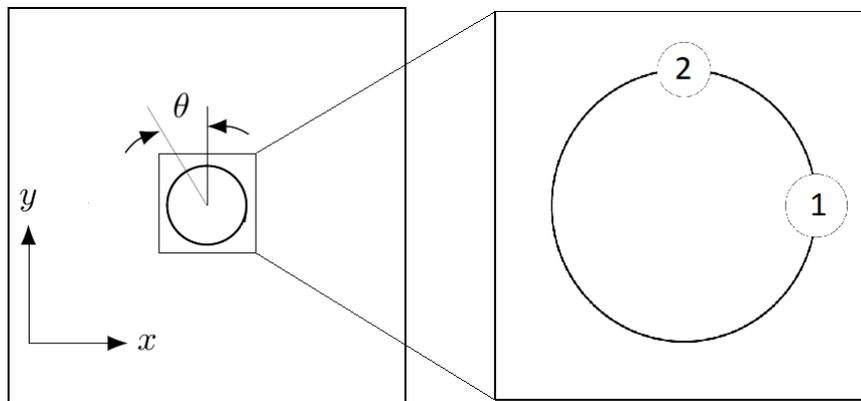


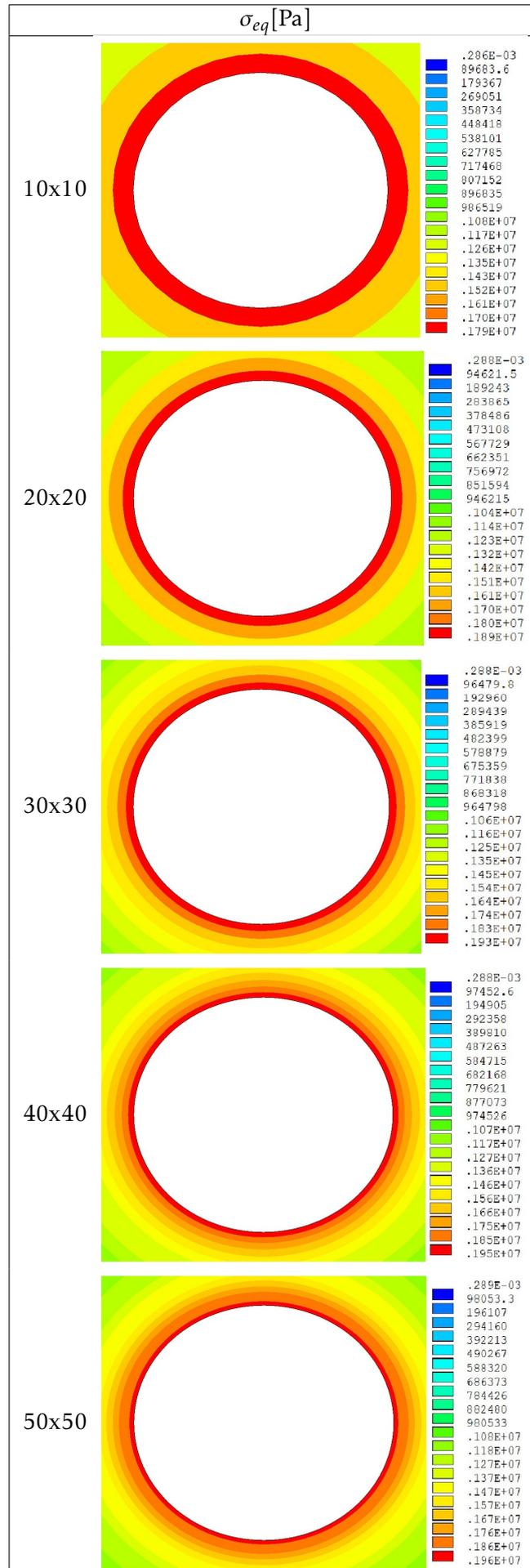
Figura 5.6: Representação da célula unitária com furo circular

Os campos de tensão da célula unitária e as suas discretizações são apresentados na tabela 5.6 e os gráficos do estudo de convergência da malha são apresentados na figura 5.7.

Ao contrário dos casos anteriores, neste carregamento não existe uma zona localizada onde há concentração de tensões. Neste caso procura-se obter uma área em volta do furo onde a tensão equivalente é máxima e constante à volta do furo.

Observando os campos de tensão apresentados na tabela 5.4 é possível identificar a área em que a tensão é constante à volta do furo em todas as discretizações e observa-se que com o aumento da discretização da malha essa área torna-se cada vez mais pequena. Observa-se também uma redução da tensão equivalente nos elementos mais afastados do furo com o aumento da discretização da malha e que as últimas discretizações apresentam mais áreas de tensão uniforme do que as primeiras.

Tabela 5.6: Campos de tensão da célula com furo circular e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento hidrostático.



Observando o gráfico da figura 5.7 verifica-se uma convergência rápida dos resultados de tensão e que para as 3 últimas discretizações a diferença entre os valores consecutivos da tensão equivalente máxima é muito baixa e isso pode ser visto também no erro relativo, onde a diferença da discretização de 30x30 para a 50x50 é sensivelmente de 1%. Este é o caso de carregamento de placa infinita com furo circular com melhor aproximação ao resultado pretendido.

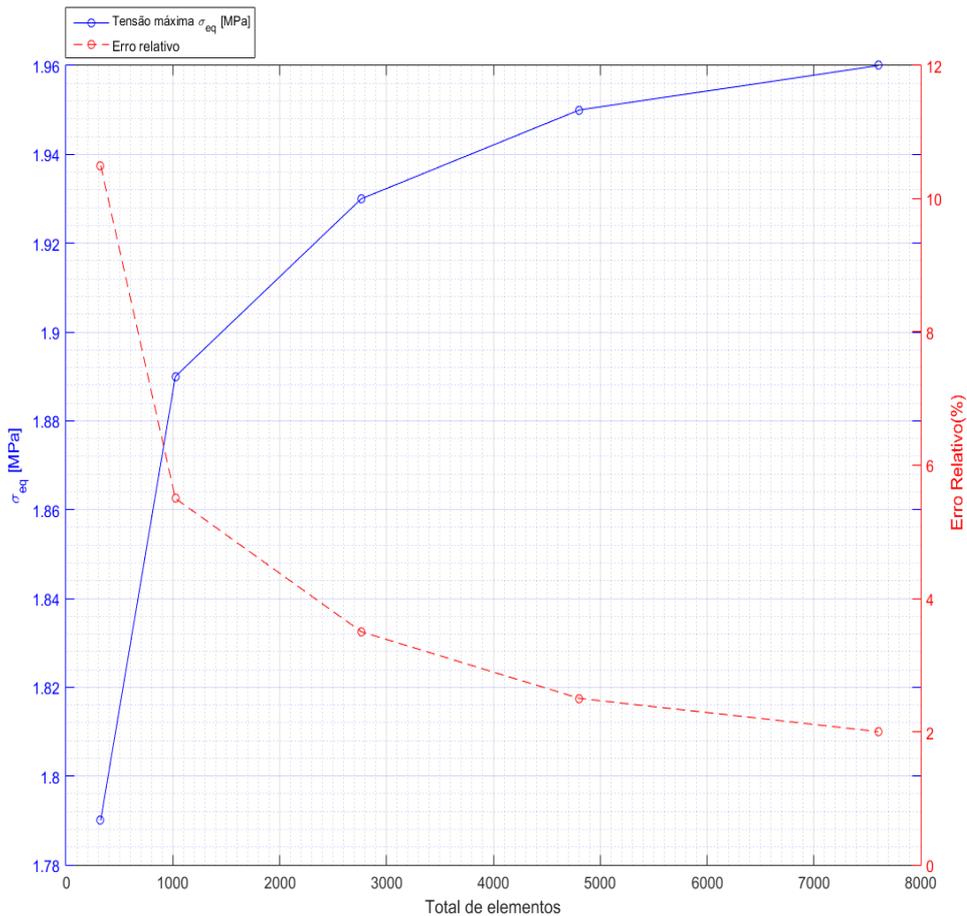


Figura 5.7: Gráficos do estudo de convergência da malha para furo circular submetido a ensaio hidrostático.

Na tabela 5.7 apresentam-se os resultados de tensão equivalente máxima e o erro relativo associado.

Discretização	σ_{eq} [MPa]	δ
10x10	1.79	10.5%
20x20	1.89	5.5%
30x30	1.93	3.5%
40x40	1.95	2.5%
50x50	1.96	2.0%

Tabela 5.7: Valores de tensão σ_{eq} máxima e respectivos erros relativos para cada discretização de malha.

5.1.4 Furo Elíptico - Carregamento Uniaxial

Os pontos onde a tensão é medida estão representados na figura 5.8. No ponto 1 foi medida a tensão máxima σ_y e no ponto 2 foi medida a tensão mínima σ_x .

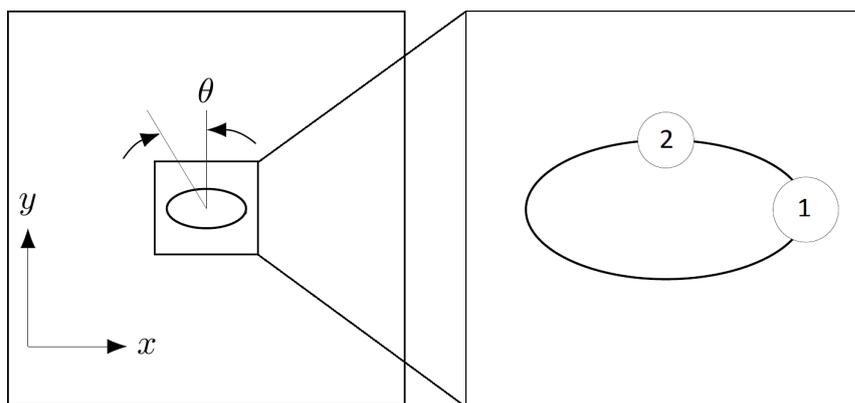
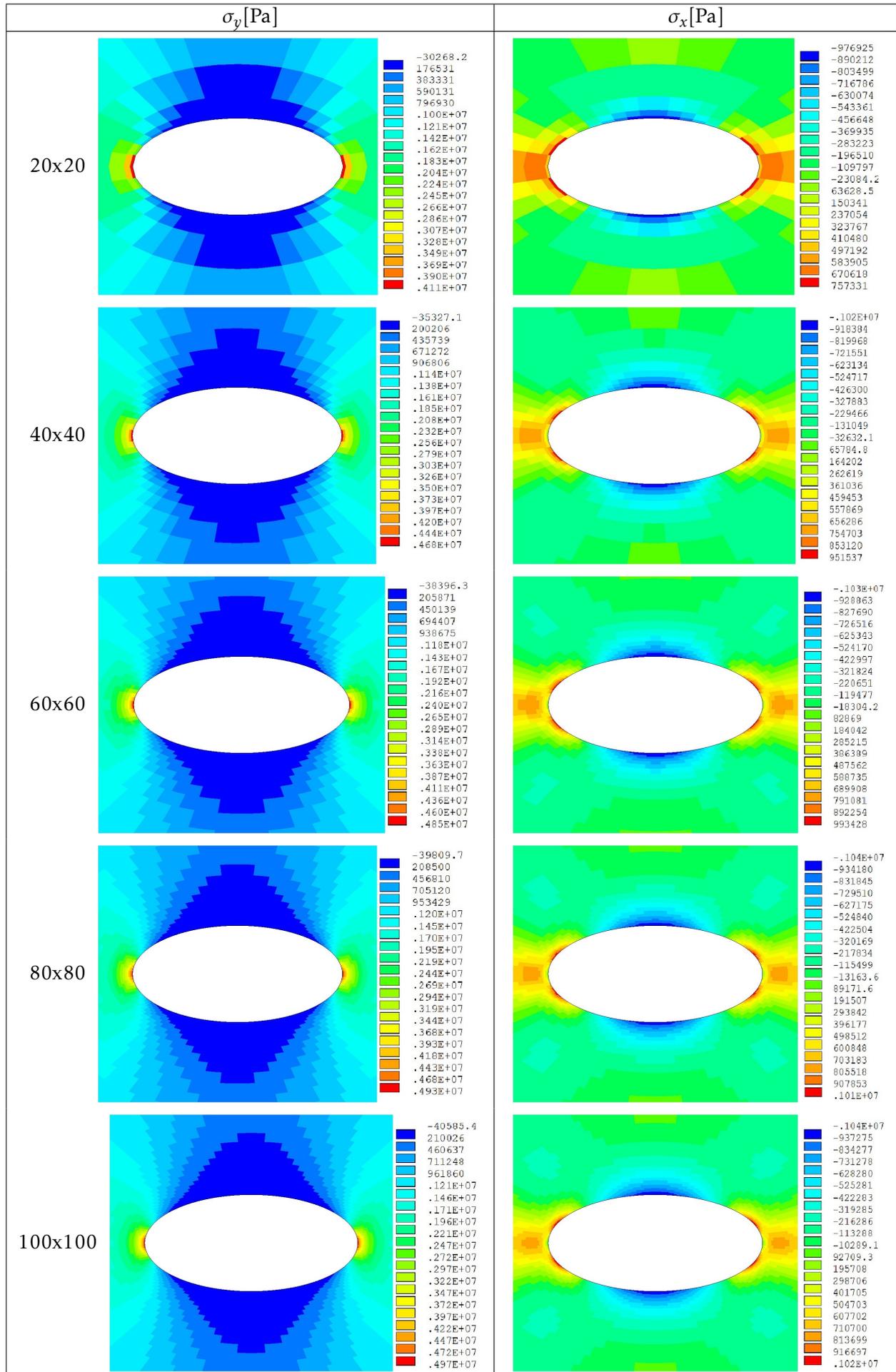


Figura 5.8: Representação da célula unitária com furo elíptico

Os campos de tensão da célula unitária e as suas discretizações são apresentados na tabela 5.8 e os gráficos do estudo de convergência da malha são apresentados na figura 5.9.

Na tabela 5.5 observa-se que nos campos de tensão σ_y , a zona de concentração de tensões nas imediações do furo é aproximadamente constante em todas as discretizações mas mais pequena que na célula com furo circular. Em sentido contrário, a zona de compressão nos campos de tensão σ_x aumenta de tamanho com o aumento da discretização e é maior do que na célula com furo circular. Como seria de esperar, a concentração de tensões tem maior intensidade num furo elíptico do que num furo circular.

Tabela 5.8: Campos de tensão da célula com furo elíptico e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento uniaxial.



Nos gráficos da figura 5.9(a) observa-se o porquê de utilizar mais elementos para modelar um furo elíptico em comparação com o furo circular. Cada discretização melhora significativamente os resultados de tensão e apesar da tensão não convergir tão rápido como converge num furo circular, a última discretização utilizada resulta num resultado muito bom com quase 0% de erro relativo. Na figura 5.9(b) observa-se que a tensão mínima no ponto 2 tem um aumento do erro relativo com o refinamento da malha, sendo que converge para um valor que sobrestima o resultado que se procura obter.

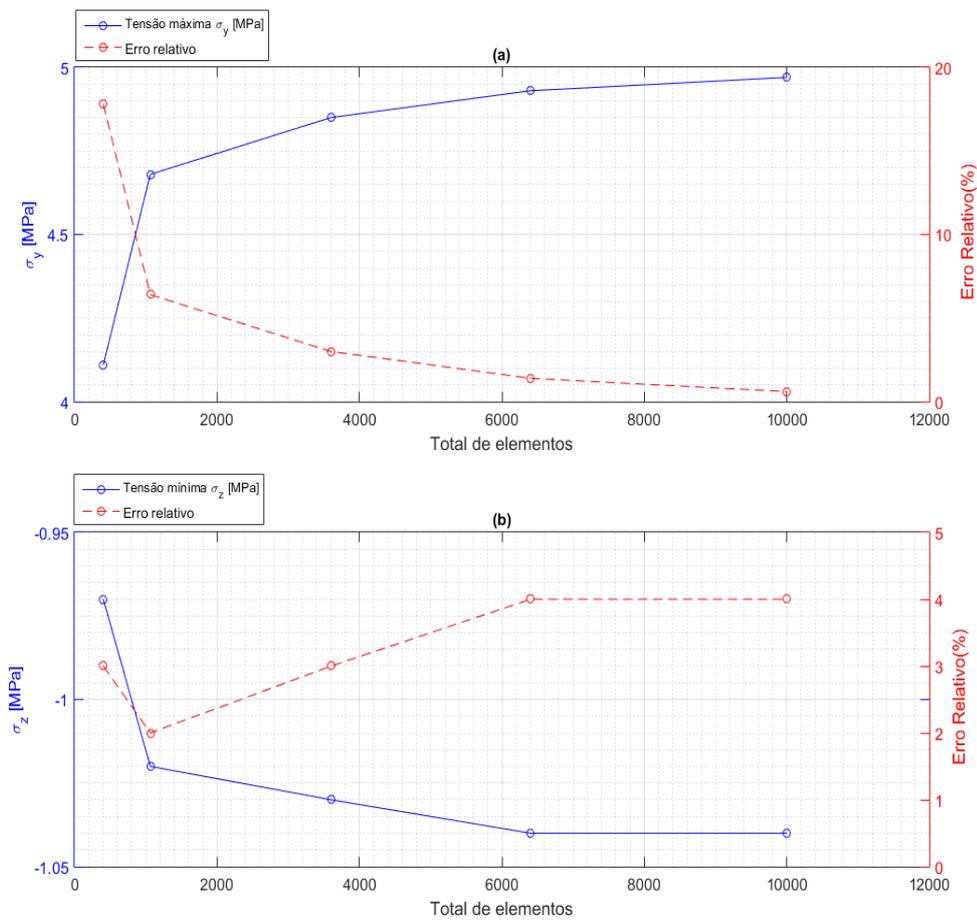


Figura 5.9: Gráficos do estudo de convergência da malha para furo elíptico submetido a ensaio uniaxial (a) tensão máxima σ_y no ponto 1 (b) tensão mínima σ_x no ponto 2.

Na tabela 5.9 apresentam-se os resultados de tensão máxima e mínima nos pontos 1 e 2 respetivamente e o erro relativo associado.

Discretização	σ_y [MPa]	δ_1	σ_x [MPa]	δ_2
20x20	4.11	17.8%	-0.97	3.0%
40x40	4.68	6.4%	-1.02	2.0%
60x60	4.85	3.0%	-1.03	3.0%
80x80	4.93	1.4%	-1.04	4.0%
100x100	4.97	0.6%	-1.04	4.0%

Tabela 5.9: Valores de tensão máxima σ_y no ponto 1 e de tensão mínima σ_x no ponto 2 e respetivos erros relativos para cada discretização de malha.

5.1.5 Furo Elíptico - Carregamento de Corte

Os pontos onde a tensão é medida estão representados na figura 5.10. No ponto 1 foi medida a tensão máxima σ_y e no ponto 2 foi medida a tensão mínima σ_x .

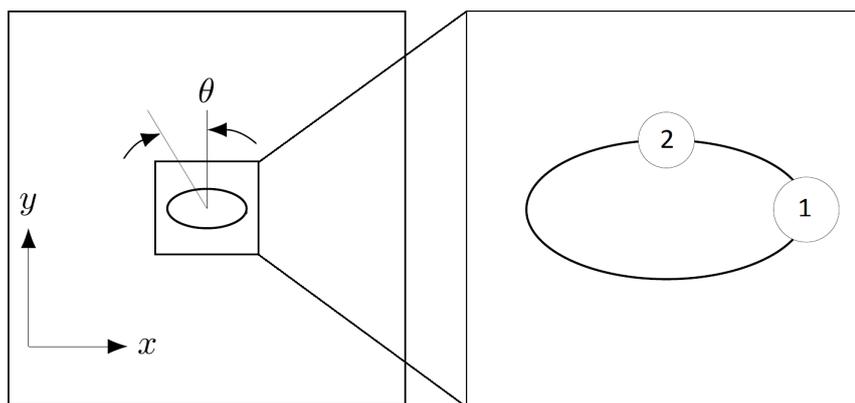
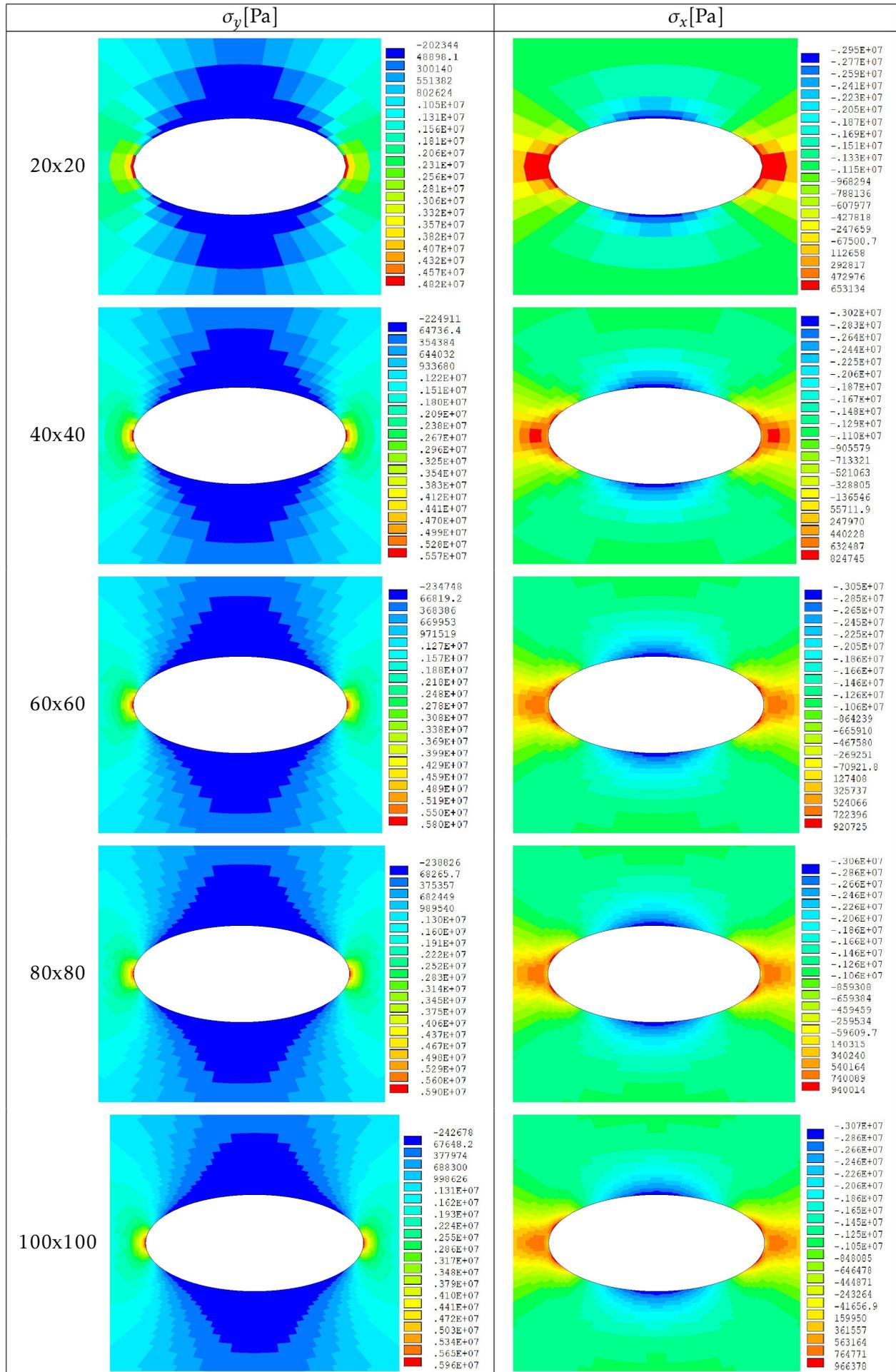


Figura 5.10: Representação da célula unitária com furo elíptico

Os campos de tensão da célula unitária e as suas discretizações são apresentados na tabela 5.10 e os gráficos do estudo de convergência da malha são apresentados na figura 5.11.

Pela tabela 5.9 observa-se nos campos de tensão σ_y uma redução da área de concentração de tensões no ponto 1, ao contrário do que acontece para o carregamento uniaxial. Nos campos de tensão σ_x , a área em que a tensão é compressiva é aproximadamente constante em todas as discretizações.

Tabela 5.10: Campos de tensão da célula com furo elíptico e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento de corte.



5.1. ESTUDO DE CONVERGÊNCIA DE MALHA

Pelos gráficos da figura 5.11(a) é possível verificar que as tensões no ponto 1 convergem mais rápido do que no carregamento uniaxial e que a última discretização é uma aproximação muito boa aos resultados teóricos uma vez que os erros relativos das tensões são muito próximos do 0.

Na figura 5.11(b) os resultados de tensão no ponto 2 sobrestimam o valor pretendido tal como aconteceu no carregamento uniaxial.

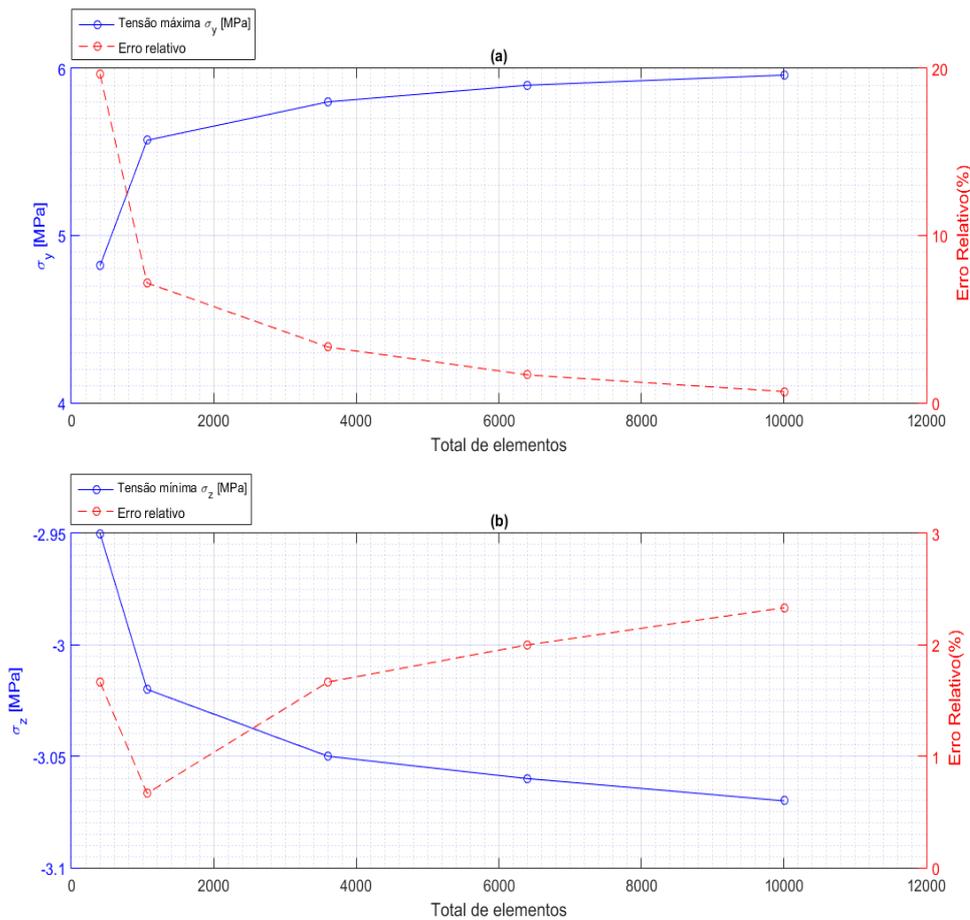


Figura 5.11: Gráficos do estudo de convergência da malha para furo elíptico submetido a ensaio de corte (a) tensão máxima σ_y no ponto 1 (b) tensão mínima σ_x no ponto 2.

Na tabela 5.11 apresentam-se os resultados de tensão máxima e mínima nos pontos 1 e 2 respetivamente e o erro relativo associado.

Discretização	σ_y [MPa]	δ_1	σ_x [MPa]	δ_2
20x20	4.82	19.7%	-2.95	1.7%
40x40	5.57	7.2%	-3.02	0.7%
60x60	5.80	3.3%	-3.05	1.7%
80x80	5.90	1.7%	-3.06	2%
100x100	5.96	0.7%	-3.07	2.3%

Tabela 5.11: Valores de tensão máxima σ_y no ponto 1 e de tensão mínima σ_x no ponto 2 e respectivos erros relativos para cada discretização de malha.

5.1.6 Furo Elíptico - Carregamento Biaxial

Os pontos onde a tensão é medida estão representados na figura 5.12.

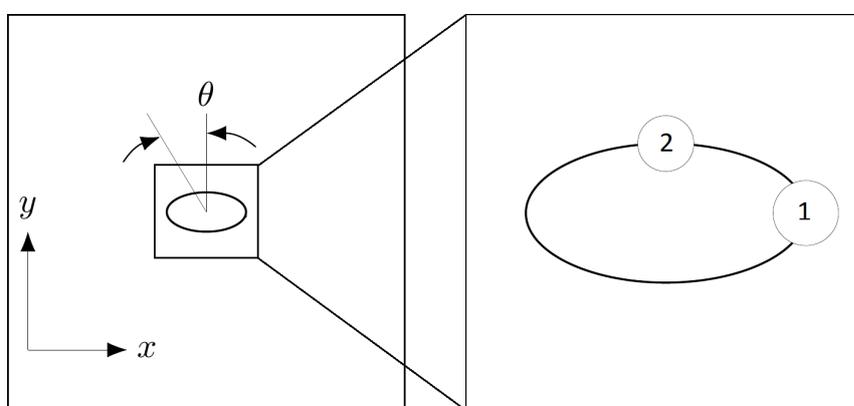


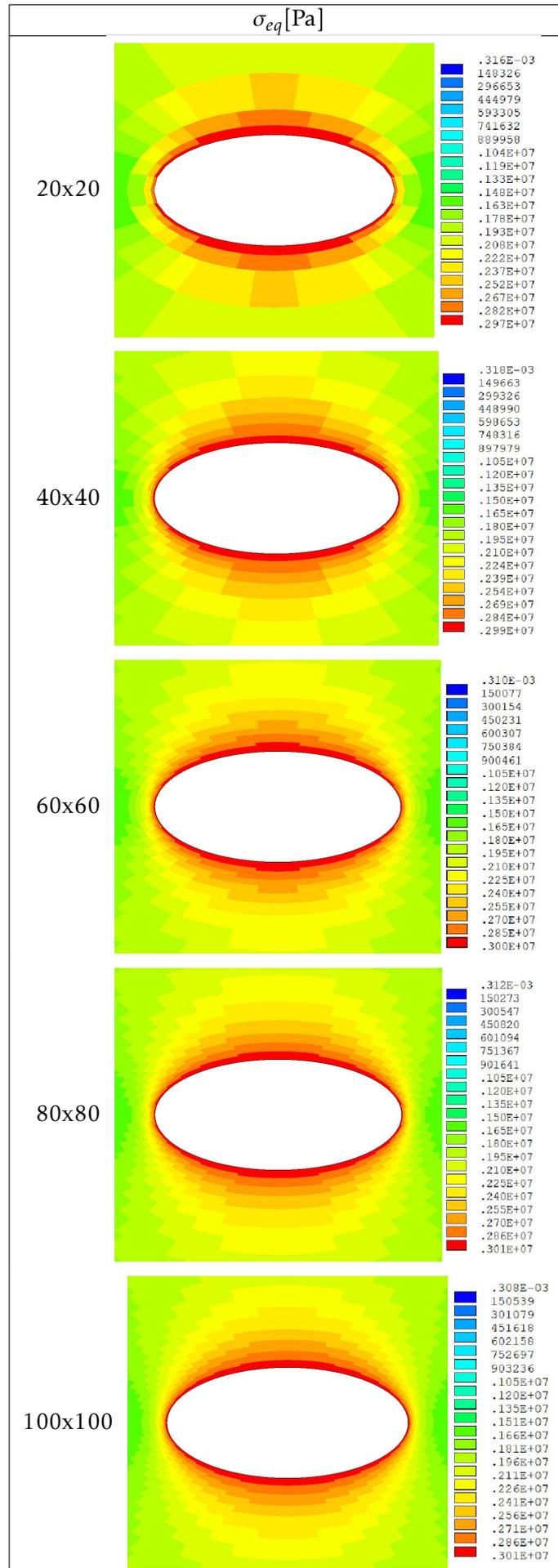
Figura 5.12: Representação da célula unitária com furo elíptico

Os campos de tensão da célula unitária e as suas discretizações são apresentados na tabela 5.12 e os gráficos do estudo de convergência da malha são apresentados na figura 5.13.

Com este carregamento procura-se replicar o comportamento do campo de tensão que foi obtido para o furo circular em carregamento hidrostático mas como o furo se trata de uma elipse com relação entre raio maior e menor igual a 2, a relação entre tensões aplicadas perpendicularmente aos eixos tem de ser igual.

Na tabela observa-se que à medida que se aumenta a discretização, a área onde a tensão equivalente máxima é constante fica mais definida e na última discretização essa área é paralela com o furo elíptico. Ao contrário do que se verifica com o furo circular, que diminuía de tamanho com o aumento da discretização, esta área tem sempre o mesmo tamanho mas as áreas de tensão equivalente uniforme não têm uma definição pior.

Tabela 5.12: Campos de tensão da célula com furo elíptico e fração volúmica de 0.5% quando submetida a um carregamento bi-axial.



Pelo gráfico da figura 5.13 observa-se que, ao contrário do que aconteceu no caso do furo circular, a tensão neste carregamento é sobrestimada nas duas últimas discretizações e que o erro relativo aumento com o refinamento da malha mas ainda assim tem um valor bastante baixo.

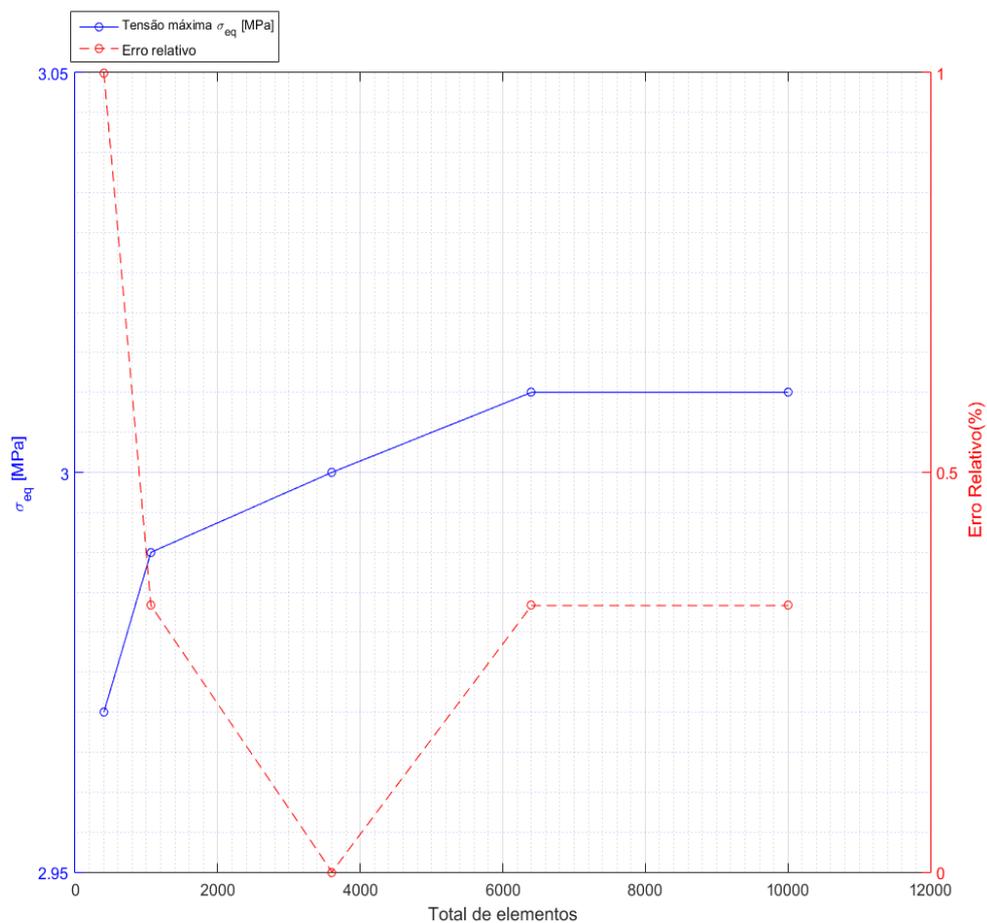


Figura 5.13: Gráficos do estudo de convergência da malha para furo elíptico submetido a ensaio hidrostático.

Na tabela 5.12 apresentam-se os resultados de tensão equivalente máxima e o erro relativo associado.

Discretização	σ_{eq} [MPa]	δ
10x10	2.97	1.0%
20x20	2.99	0.3%
30x30	3.00	0%
40x40	3.01	0.3%
50x50	3.01	0.3%

Tabela 5.13: Valores de tensão σ_{eq} máxima e respectivos erros relativos para cada discretização de malha.

5.2 Estudo de efeito de escala

5.2.1 Furo circular - Carregamento Uniaxial

Na figura 5.14 está representada a célula e os pontos onde são medidas as tensões.

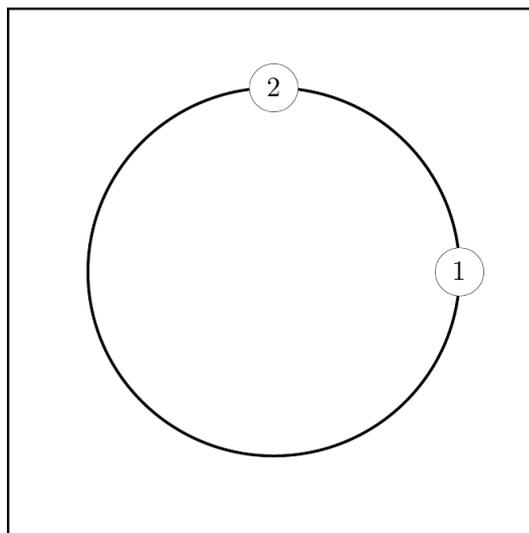


Figura 5.14: Célula unitária com furo circular. No ponto 1 mede-se a tensão σ_y e no ponto 2 a tensão σ_x

Nos gráficos da figura 5.15 são apresentadas as tensões obtidas no ponto 1 e 2 e o fator de concentração de tensão no ponto 1 para frações volúmicas do furo de 0.5% até 60% e para repetições de 3x3,5x5 e 7x7 células unitárias.

Observa-se que para frações volúmicas do furo baixas as tensões são idênticas independentemente do número de repetições da célula unitária. Para frações volúmicas do furo altas há uma diferença significativa nas tensões, podendo observar-se na figura 5.15(a) que a tensão σ_y máxima no ponto 1 é mais alta para 3 repetições da célula unitária, e na figura 5.15(b) que a tensão σ_x mínima é muito mais reduzida para 3 repetições, enquanto que para 5 e 7 repetições os resultados parecem convergir para os mesmos valores.

No que toca ao fator de concentração de tensões, para 3 repetições há um comportamento diferente ao que acontece para 5 e 7 repetições. À medida que o furo circular aumenta de tamanho e a tensão máxima e nominal têm valores mais aproximados, o fator de concentração de tensões converge para valores mais baixos. No entanto, quando o furo tem uma fração volúmica de 30%, a célula central começa uma intensificação da

tensão σ_y máxima devido à aproximação dos furos das células circundantes, resultando na divergência e posterior aumento do fator de concentração de tensões. É também possível observar que para frações volúmicas do furo altas, o fator de concentração de tensões para 5 repetições afasta-se do de 7 repetições, indicando que o fator de concentração de tensões também poderia vir a divergir para 5 repetições.

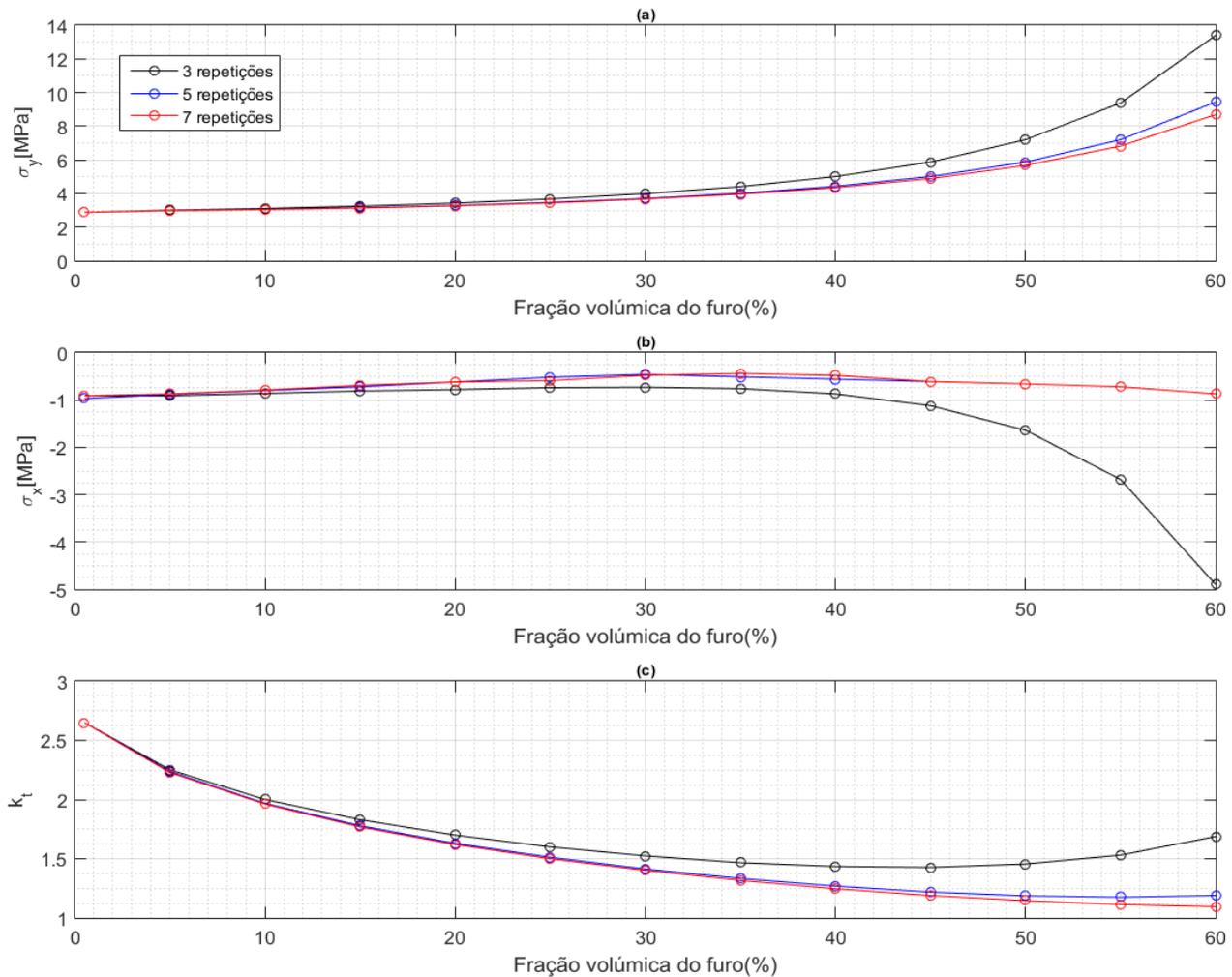


Figura 5.15: Resultados do ensaio com carregamento uniaxial para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo circular:(a) Gráfico da tensão σ_y no ponto 1 (b) Gráfico da tensão σ_x no ponto 2 (c) Fator de concentração de tensões no ponto 1

Na tabela 5.14 apresentam-se alguns campos de tensão σ_y obtidos para diferentes frações volúmi-
cas e números de repetições da célula unitária.

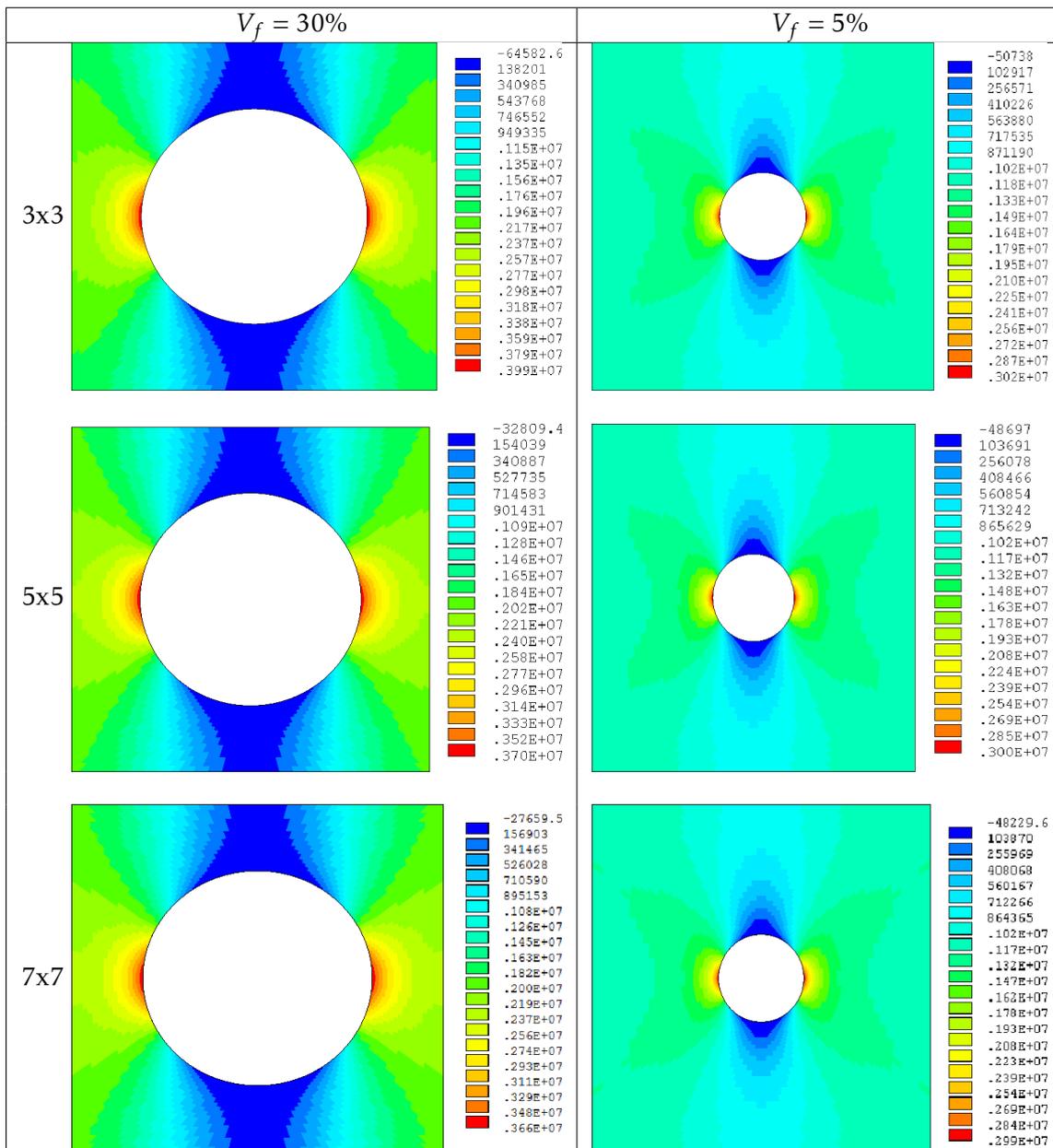


Tabela 5.14: Campos de tensão σ_y da célula com furo circular quando submetida a um carregamento uniaxial.

5.2.2 Furo circular - Carregamento de Corte

Na figura 5.16 está representada a célula e os pontos onde são medidas as tensões.

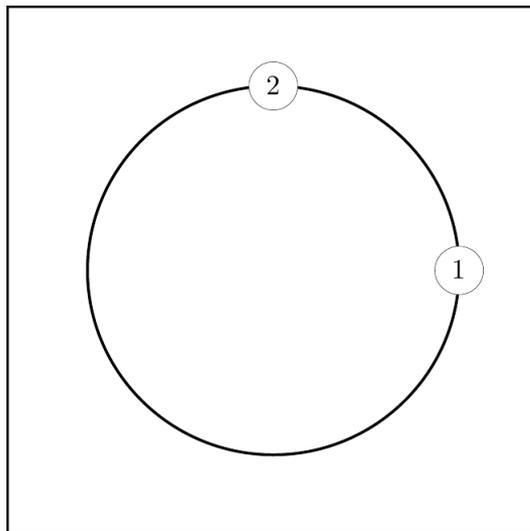


Figura 5.16: Célula unitária com furo circular. No ponto 1 mede-se a tensão σ_y e no ponto 2 a tensão σ_x

Nos gráficos da figura 5.17 são apresentadas as tensões obtidas no ponto 1 e 2 e o fator de concentração de tensão no ponto 1 para frações volúmicas do furo de 0.5% até 60% e para repetições de 3x3, 5x5 e 7x7 células unitárias.

Nos gráficos da figura 5.17 é possível observar que os valores da tensão σ_y máxima no ponto 1 e da tensão σ_z mínima no ponto 2 têm o mesmo valor absoluto, o que vai de encontro ao que foi apresentado até aqui.

No gráfico da figura 5.17(c) observa-se que tal como acontece para o carregamento uniaxial, o fator de concentração de tensões diverge com o aumento da fração volúmica do furo. Para o carregamento de corte, é um fator mais crítico do que para o carregamento uniaxial, uma vez que a diferença entre os fatores de concentração de tensão de 3 repetições e de 5 e 7 repetições é maior para todas as frações volúmicas. Neste gráfico é possível observar uma divergência entre os fatores de concentração de tensão de 5 e 7 repetições para as últimas frações volúmicas do furo.

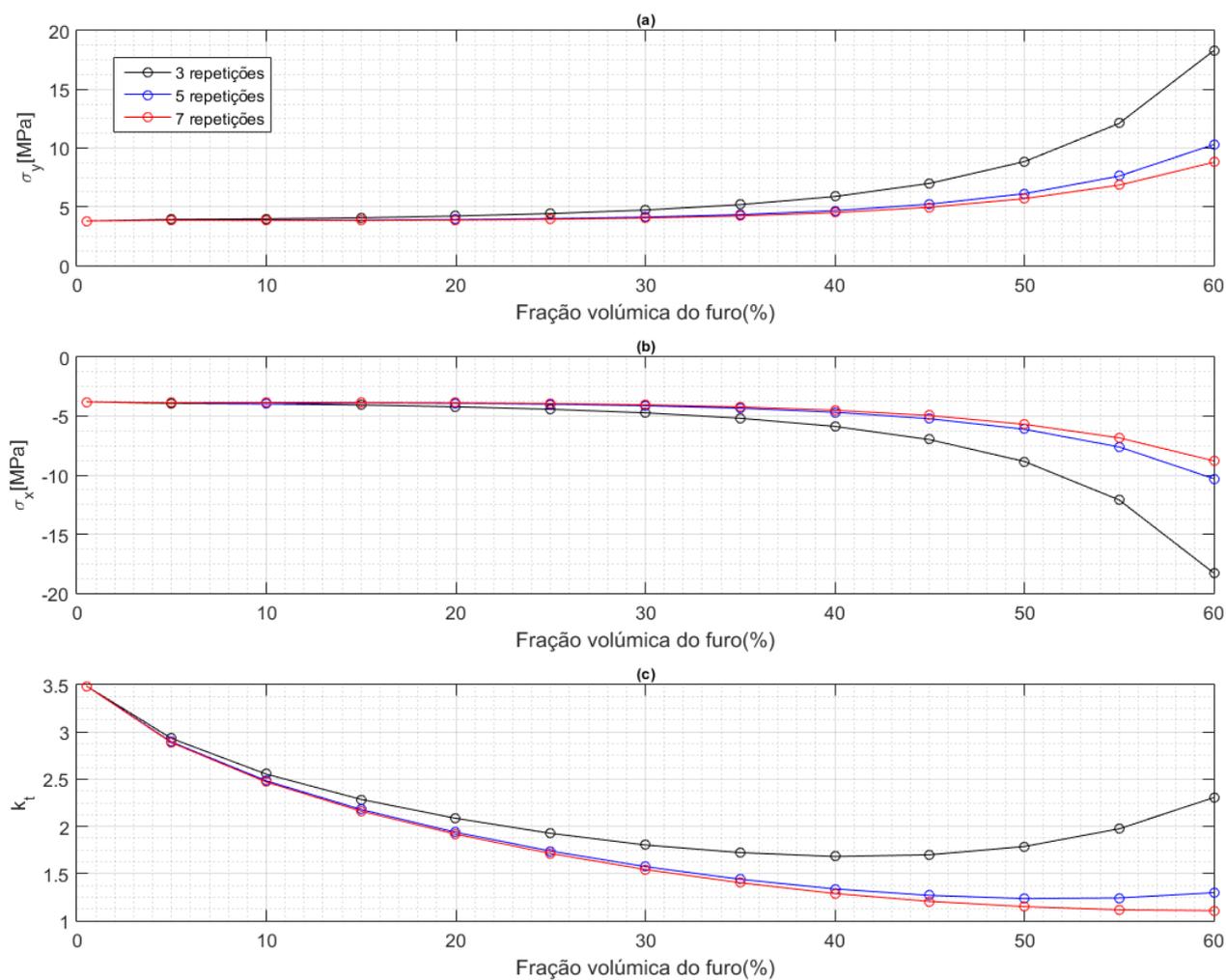


Figura 5.17: Resultados do ensaio com carregamento de corte para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo circular:(a) Gráfico da tensão σ_y no ponto 1 (b) Gráfico da tensão σ_x no ponto 2 (c) Fator de concentração de tensões no ponto 1

Na tabela 5.15 apresentam-se alguns campos de tensão σ_y obtidos para diferentes frações volúmi-
cas e números de repetições da célula unitária.

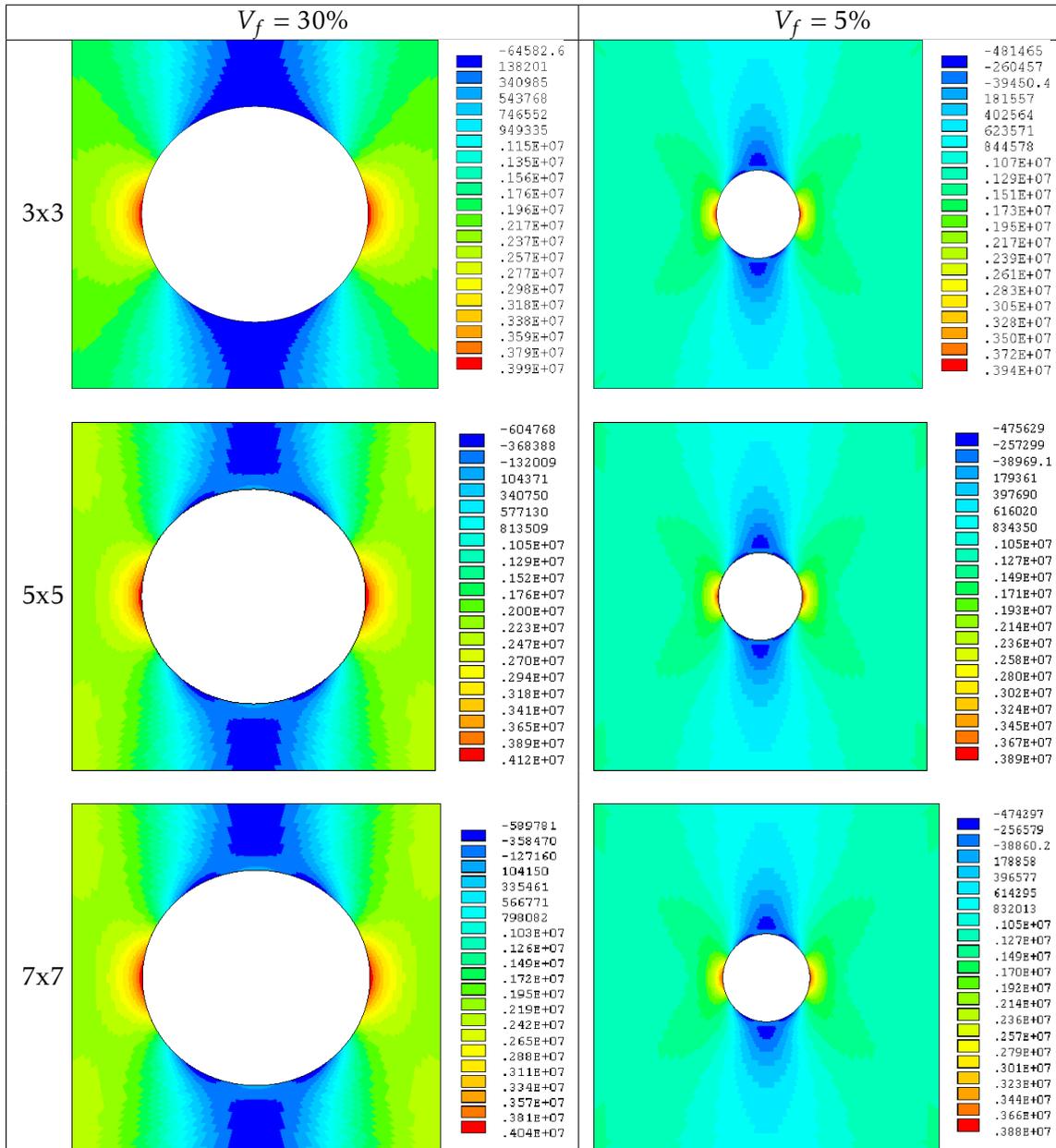


Tabela 5.15: Campos de tensão σ_y da célula com furo circular quando submetida a um carregamento de corte.

5.2.3 Furo circular - Carregamento Hidrostático

Na figura 5.18 está representada a célula e os pontos onde são medidas as tensões.

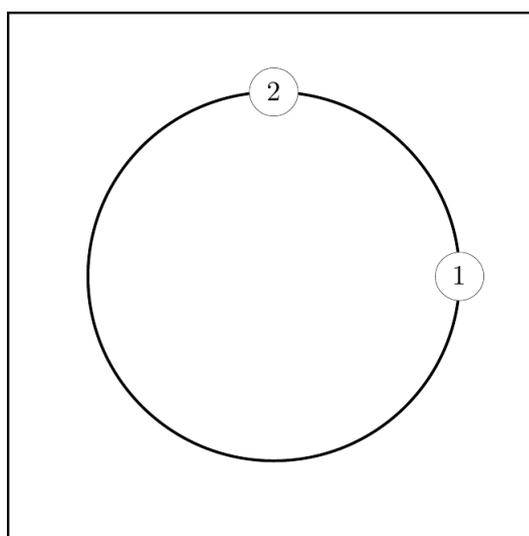


Figura 5.18: Célula unitária com furo circular. No ponto 1 e 2 mede-se a tensão σ_{eq} .

Nos gráficos da figura 5.19 são apresentadas as tensões máximas equivalentes para frações volúmicas do furo de 0.5% até 60%. É também apresentada a tensão máxima equivalente das micro-estruturas de Vigdergauz com o mesmo carregamento para cada fração volúmica do furo.

Pelo gráfico é possível observar que o efeito de escala não tem influência na tensão equivalente máxima, uma vez que a tensão equivalente máxima é aproximadamente igual para qualquer número de repetições da célula unitária.

É também possível observar a diferença significativa que existe entre os valores de tensão equivalente máxima da célula com furo circular e de micro-estrutura ótima de Vigdergauz. O furo circular é uma forma ótima das micro-estruturas de Vigdergauz para frações volúmicas muito baixas e para frações volúmicas intermédias a diferença entre tensões equivalentes máximas não é muito grande mas como se pode ver na tabela 5.16, a tensão equivalente já não é constante à volta do furo para frações volúmicas intermédias.

5.2. ESTUDO DE EFEITO DE ESCALA

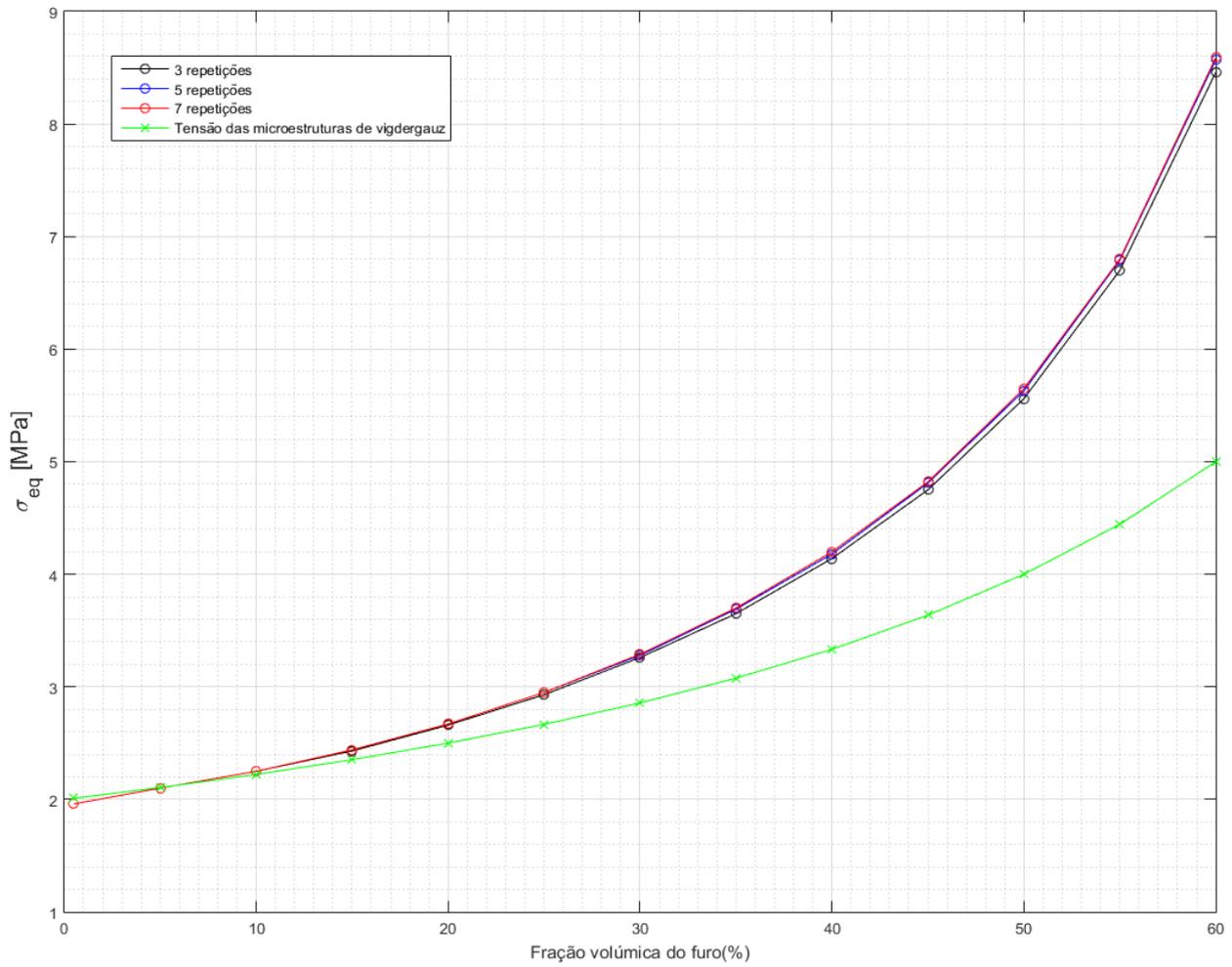


Figura 5.19: Resultados da tensão equivalente máxima do ensaio com carregamento hidrostático para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo circular.

Na tabela 5.16 apresentam-se alguns campos de tensão σ_y obtidos para diferentes frações volúmicas e números de repetições da célula unitária.

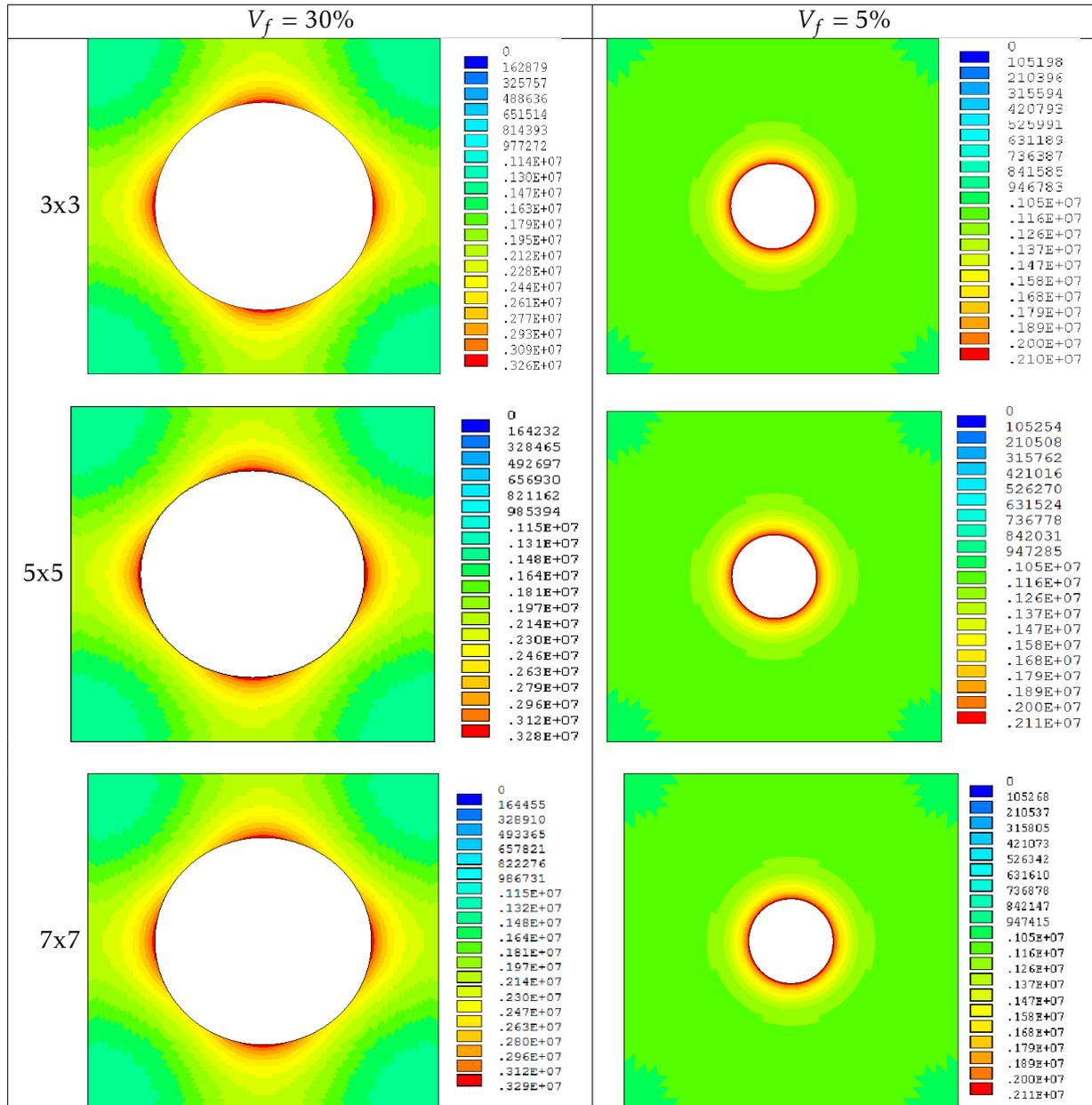


Tabela 5.16: Campos de tensão σ_{eq} da célula com furo circular quando submetida a um carregamento hidrostático.

5.2.4 Furo elíptico - Carregamento Uniaxial

Na figura 5.20 está representada a célula e os pontos onde são medidas as tensões.

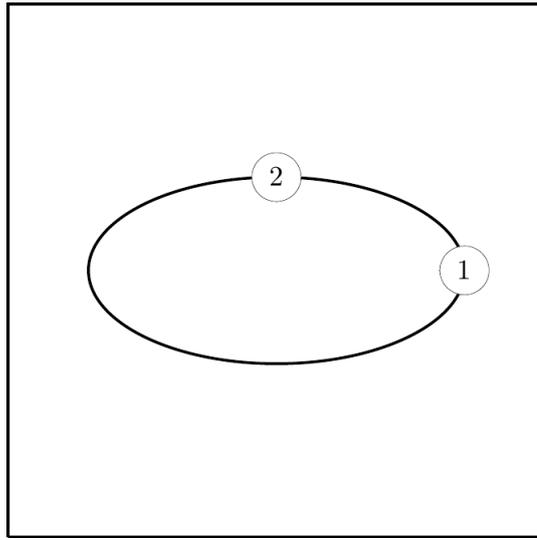


Figura 5.20: Célula unitária com furo elíptico. No ponto 1 mede-se a tensão σ_y e no ponto 2 a tensão σ_x

Nos gráficos da figura 5.21 são apresentadas as tensões obtidas no ponto 1 e 2 e o fator de concentração de tensão no ponto 1 para frações volúmicas do furo de 0.5% até 30% e para repetições de 3x3, 5x5 e 7x7 células unitárias.

Pelo gráfico é possível ver que a diferença da tensão σ_y máxima no ponto 1 entre diferentes números de repetições é mais baixa do que no caso da célula unitária com furo circular. A interferência entre campos de tensão de células consecutivas parece começar para frações volúmicas de 20% porque a tensão σ_y no ponto 1 aumenta a taxas maiores do que se verifica para frações volúmicas mais baixas.

No entanto a interferência entre campos de tensão de células consecutivas não é intensa o suficiente para divergir os fatores de concentração de tensão.

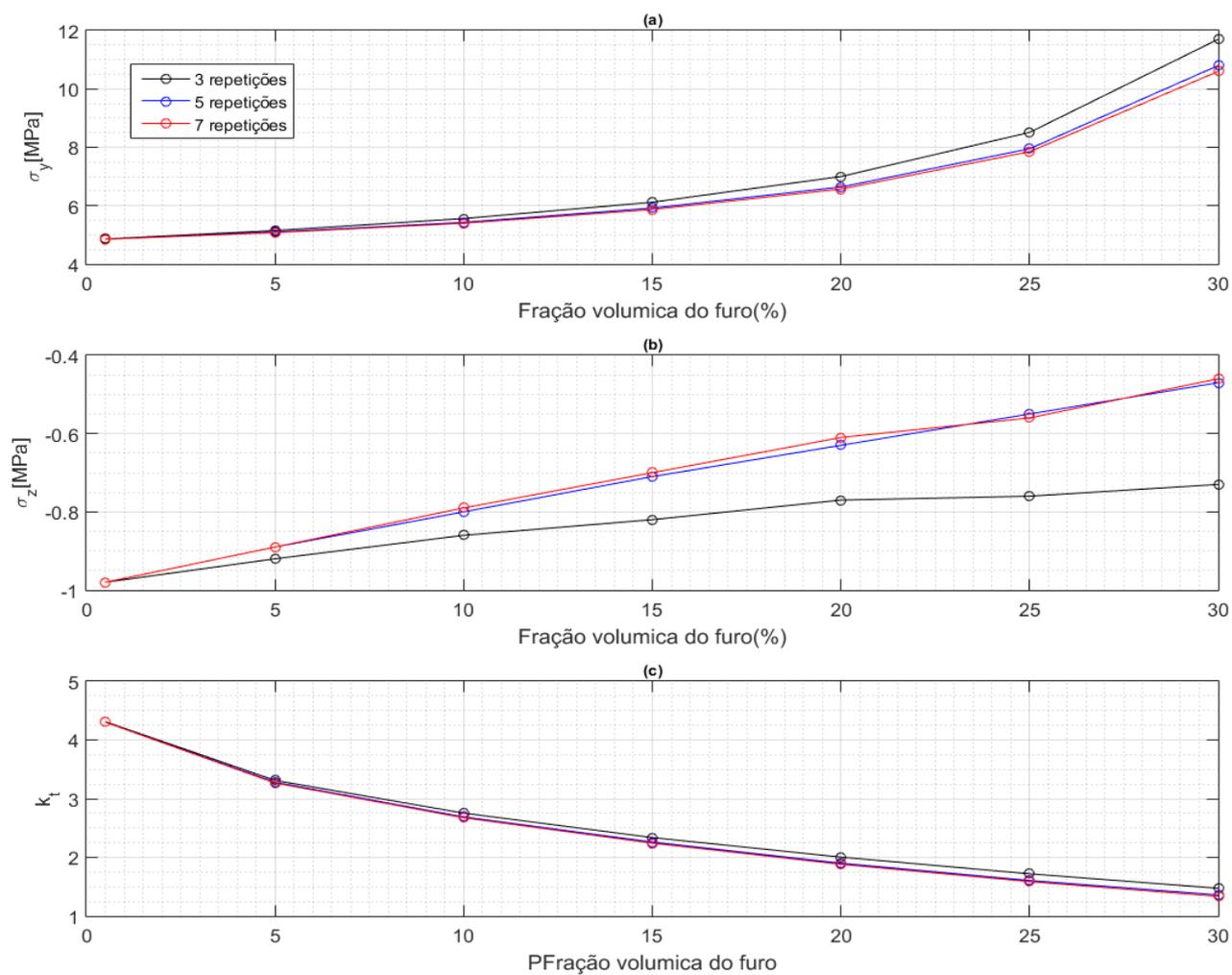


Figura 5.21: Resultados do ensaio com carregamento de corte para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo elíptico:(a) Gráfico da tensão σ_y no ponto 1 (b) Gráfico da tensão σ_x no ponto 2 (c) Fator de concentração de tensões no ponto 1

Na tabela 5.17 apresentam-se alguns campos de tensão σ_y obtidos para diferentes frações volúmicas e números de repetições da célula unitária.

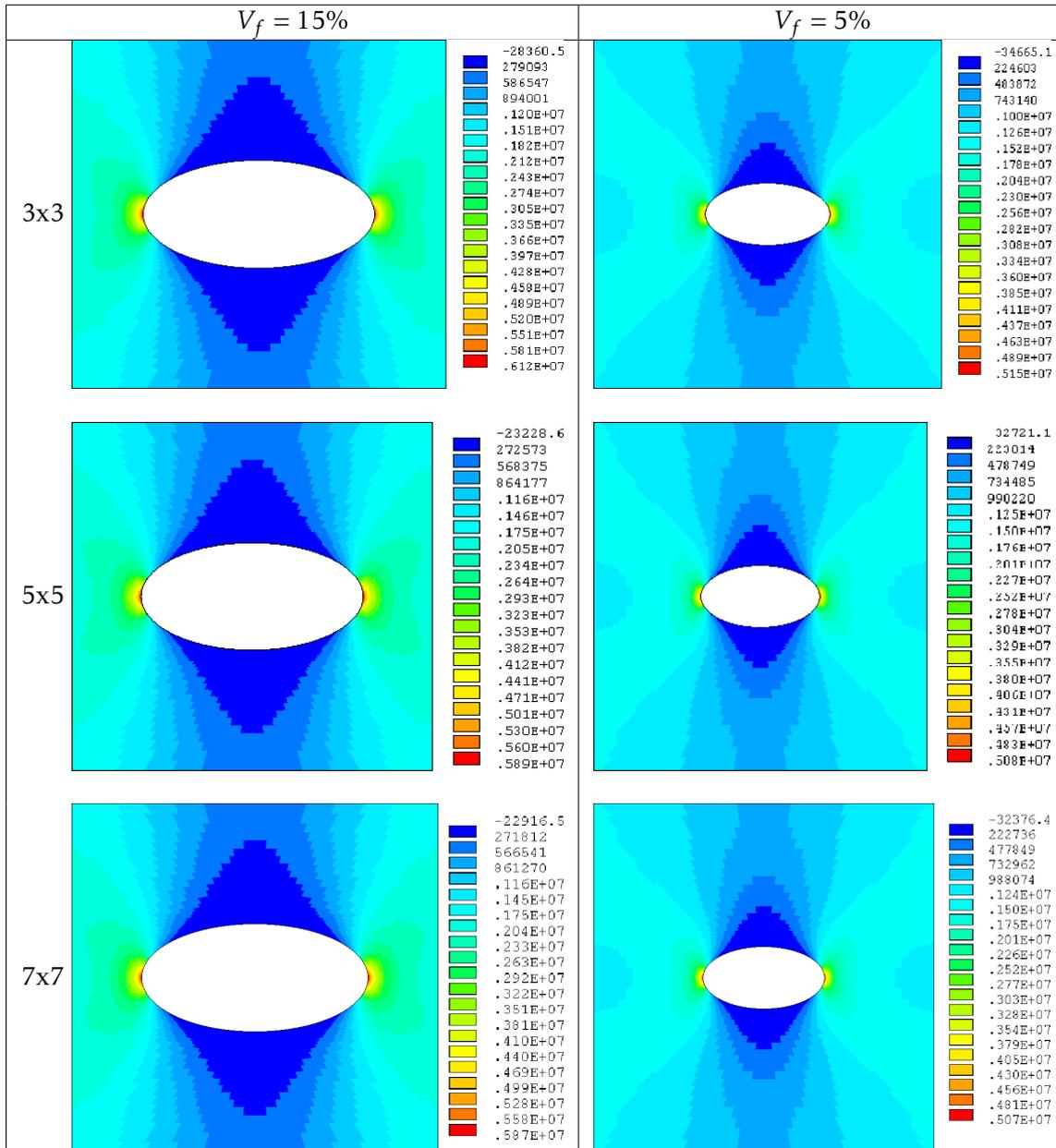


Tabela 5.17: Campos de tensão σ_y da célula com furo elíptico quando submetida a um carregamento uniaxial.

5.2.5 Furo elíptico - Carregamento de Corte

Na figura 5.22 está representada a célula e os pontos onde são medidas as tensões.

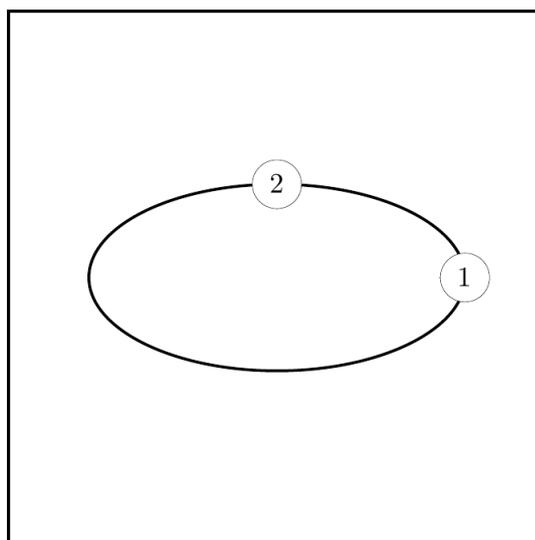


Figura 5.22: Célula unitária com furo elíptico. No ponto 1 mede-se a tensão σ_y e no ponto 2 a tensão σ_x

Nos gráficos da figura 5.23 são apresentadas as tensões obtidas no ponto 1 e 2 e o fator de concentração de tensão no ponto 1 para frações volúmicas do furo de 0.5% até 30% e para repetições de 3x3,5x5 e 7x7 células unitárias.

Observando os gráfico da figura 5.25 verifica-se um comportamento da tensão σ_y máxima semelhante ao que se verifica no caso do carregamento uniaxial. O efeito de escala não tem tanta influência como para a célula unitária com furo circular e a proximidade dos furos das diferentes células fazem sentir-se em frações volúmicas do furo mais altas.

No gráfico da figura 5.23(b), o aumento do efeito de escala resulta numa divergência dos resultados de tensão de 3 repetições em relação aos de 5 e 7 repetições.

Para o fator de concentração de tensões as diferenças entre diferentes números de repetições são baixas e observa-se convergência para todos os meios celulares.

5.2. ESTUDO DE EFEITO DE ESCALA

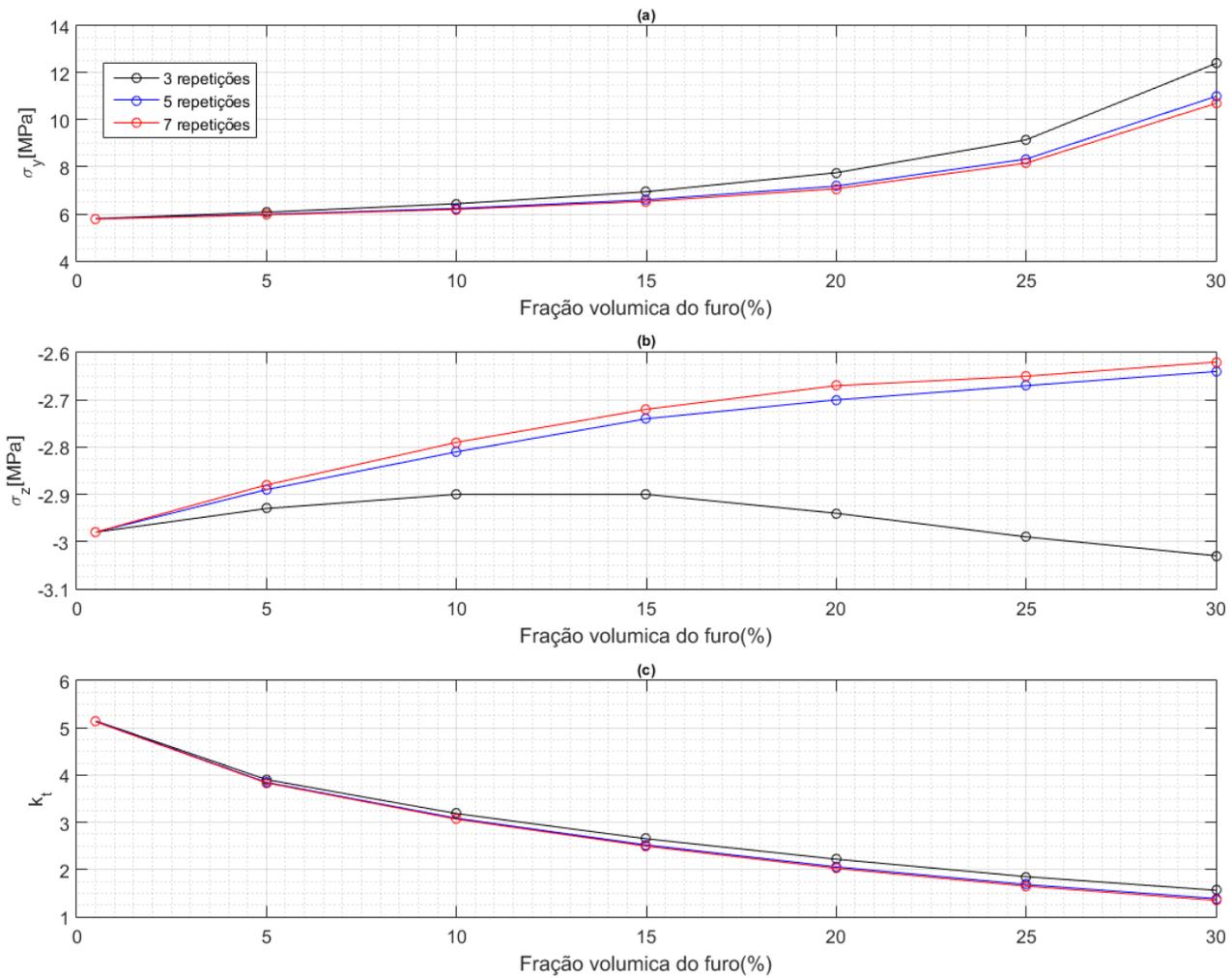


Figura 5.23: Resultados do ensaio com carregamento de corte para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo elíptico:(a) Gráfico da tensão σ_y no ponto 1 (b) Gráfico da tensão σ_x no ponto 2 (c) Fator de concentração de tensões no ponto 1

Na tabela 5.18 apresentam-se alguns campos de tensão σ_y obtidos para diferentes frações volúmicas e números de repetições da célula unitária.

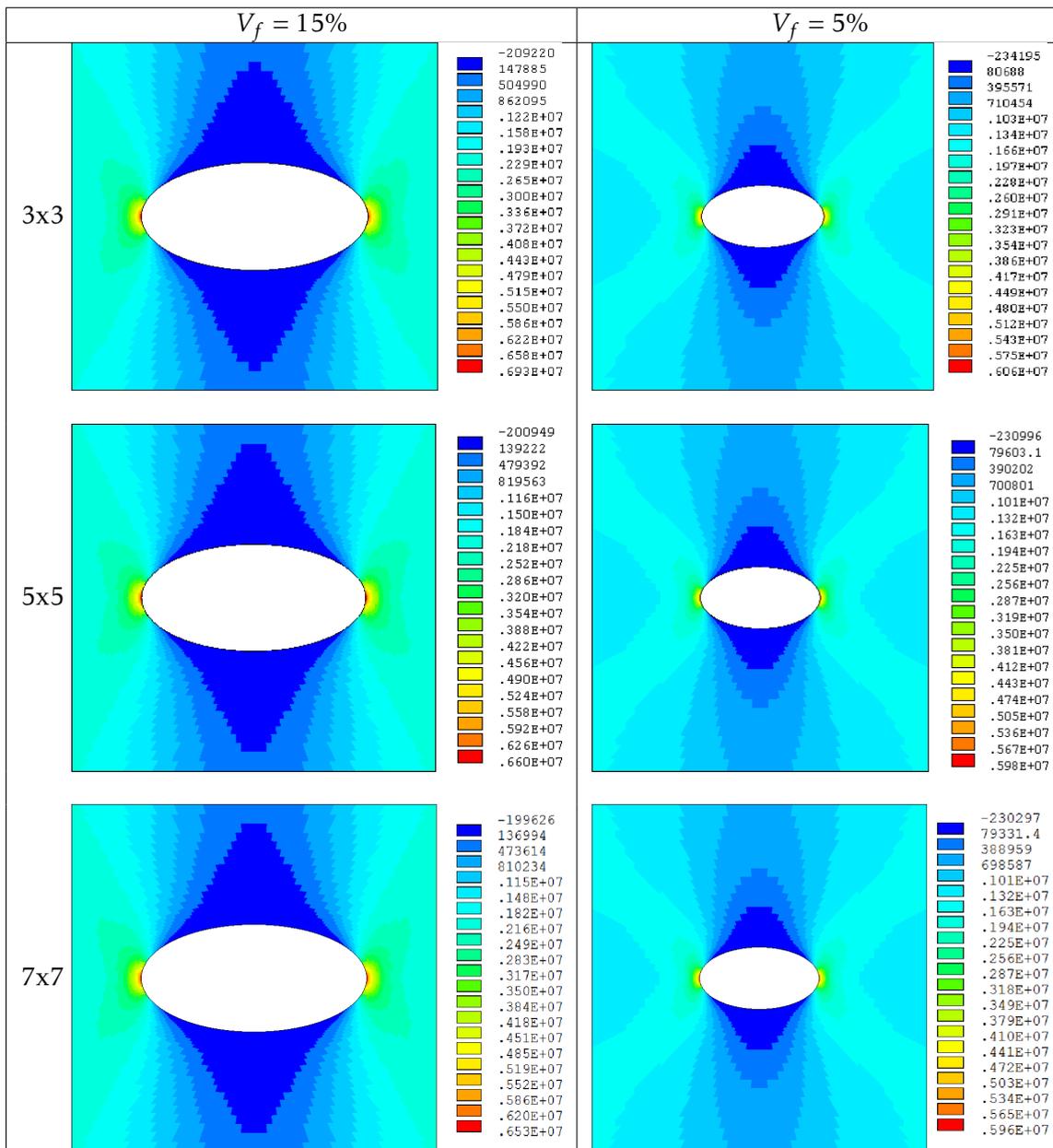


Tabela 5.18: Campos de tensão σ_y da célula com furo elíptico quando submetida a um carregamento de corte.

5.2.6 Furo elíptico - Carregamento Biaxial

Na figura 5.24 está representada a célula e os pontos onde são medidas as tensões.

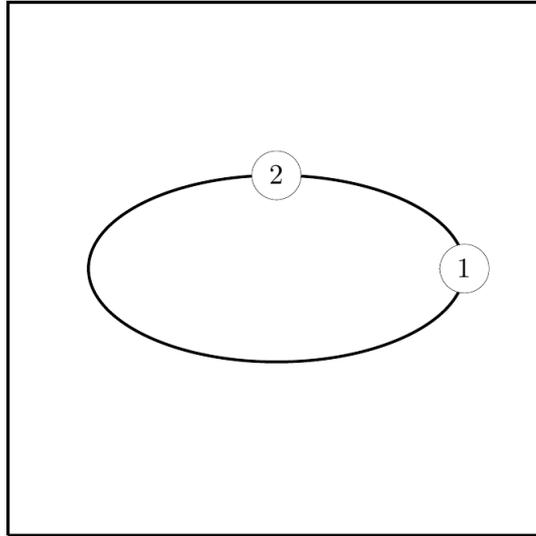


Figura 5.24: Célula unitária com furo elíptico. No ponto 1 e 2 mede-se a tensão σ_{eq} .

Nos gráficos da figura 5.25 são apresentadas as tensões máximas equivalentes para frações volúmicas do furo de 0.5% até 30%. É também apresentada a tensão máxima equivalente das micro-estruturas de Vigdergauz com o mesmo carregamento para cada fração volúmica do furo.

Na figura 5.25 observa-se que tal como acontece para a célula unitária com furo circular, a mudança do efeito de escala não tem influência nos resultados da tensão equivalente mas, é possível observar o efeito que as células circundantes têm na tensão equivalente máxima da célula central através da diferença entre resultados consecutivos. A diferença entre a tensão equivalente máxima aumenta com o aumento da fração volúmica do furo e conseqüente aproximação dos furos das células unitárias .

A diferença entre a tensão equivalente máxima neste furo e a tensão equivalente máxima de uma microestrutura de Vigdergauz é significativamente mais elevada do que no caso da célula com furo circular e pode ver-se que uma elipse deste tipo só tem uma forma ótima quando o tamanho do furo replica a situação da placa infinita com um furo elíptico.

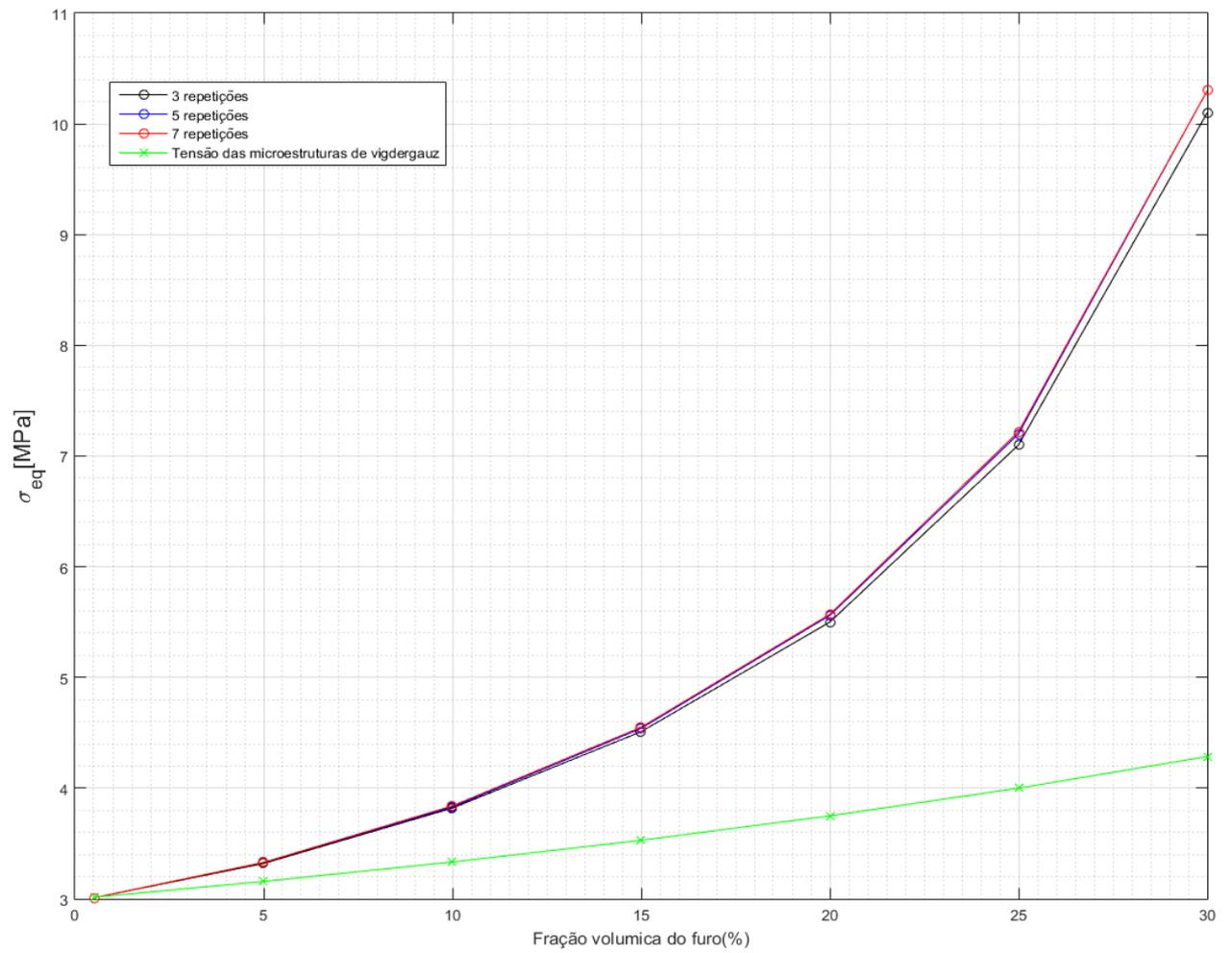


Figura 5.25: Resultados de tensão equivalente máxima do ensaio com carregamento bi-axial para 3,5 e 7 repetições da célula unitária com furo elíptico.

Na tabela 5.19 apresentam-se alguns campos de tensão σ_y obtidos para diferentes frações volúmi-
cas e números de repetições da célula unitária.

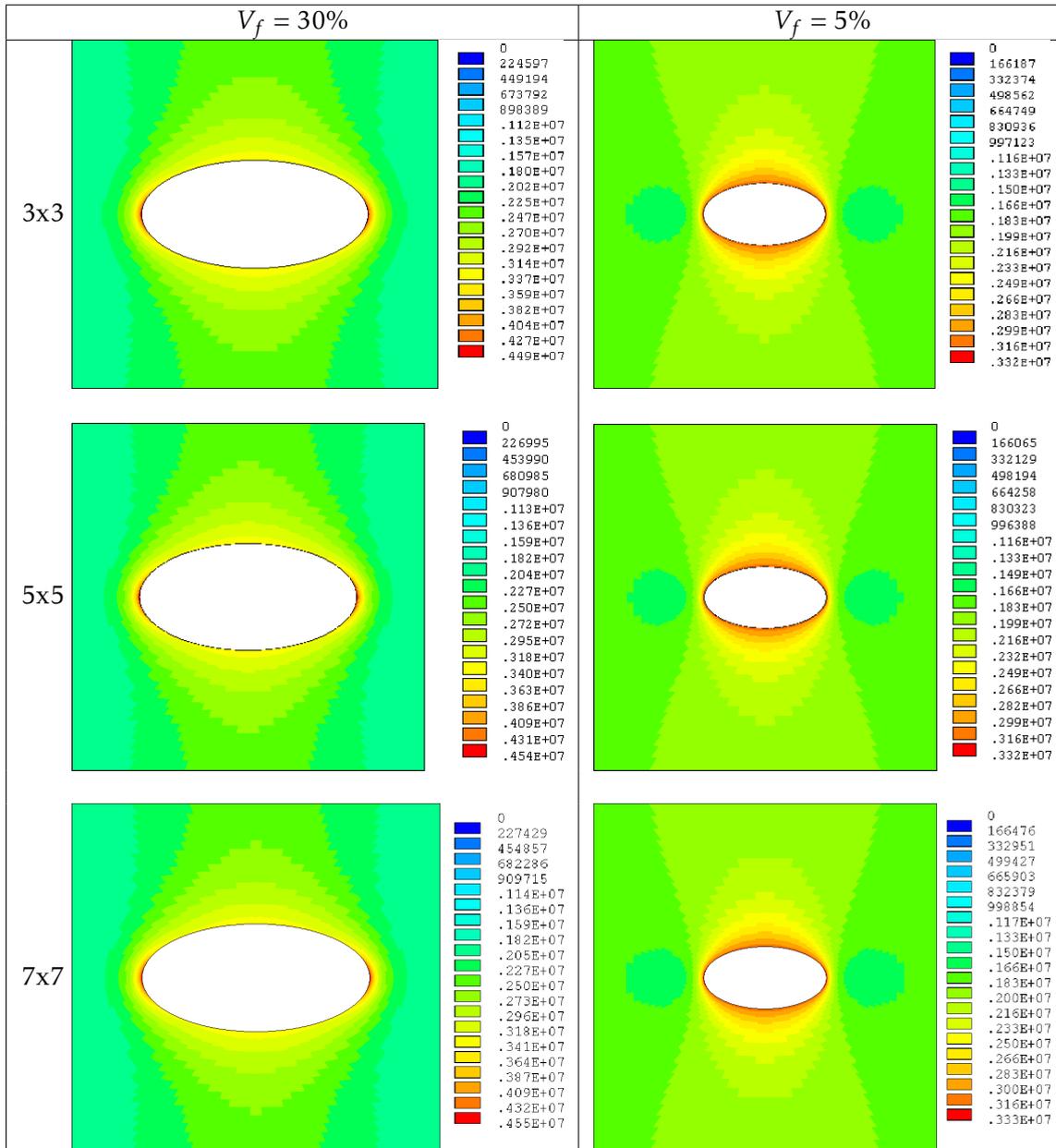


Tabela 5.19: Campos de tensão σ_{eq} da célula com furo elíptico quando submetida a um carregamento biaxial.

5.3 Arranjo hexagonal

Neste estudo a célula unitária foi repetida 5 vezes. A relação entre módulo de rigidez da matriz e fibra é igual $\frac{E_{matriz}}{E_{fibra}} = 10$.

Os carregamentos utilizados neste estudo são unitários e estão representados na tabela 5.20:

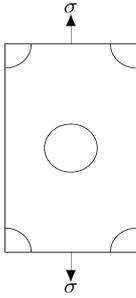
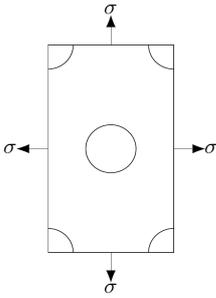
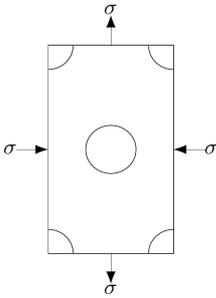
Carregamentos	Célula do arranjo hexagonal
Uniaxial	
Hidrostatico	
Corte	

Tabela 5.20: Carregamentos utilizados no caso de estudo da célula de arranjo hexagonal.

5.3.1 Carregamento Uniaxial

No gráfico da figura 5.26 é apresentada a evolução da tensão equivalente máxima, σ_{eq} , com a fração volúmica das fibras.

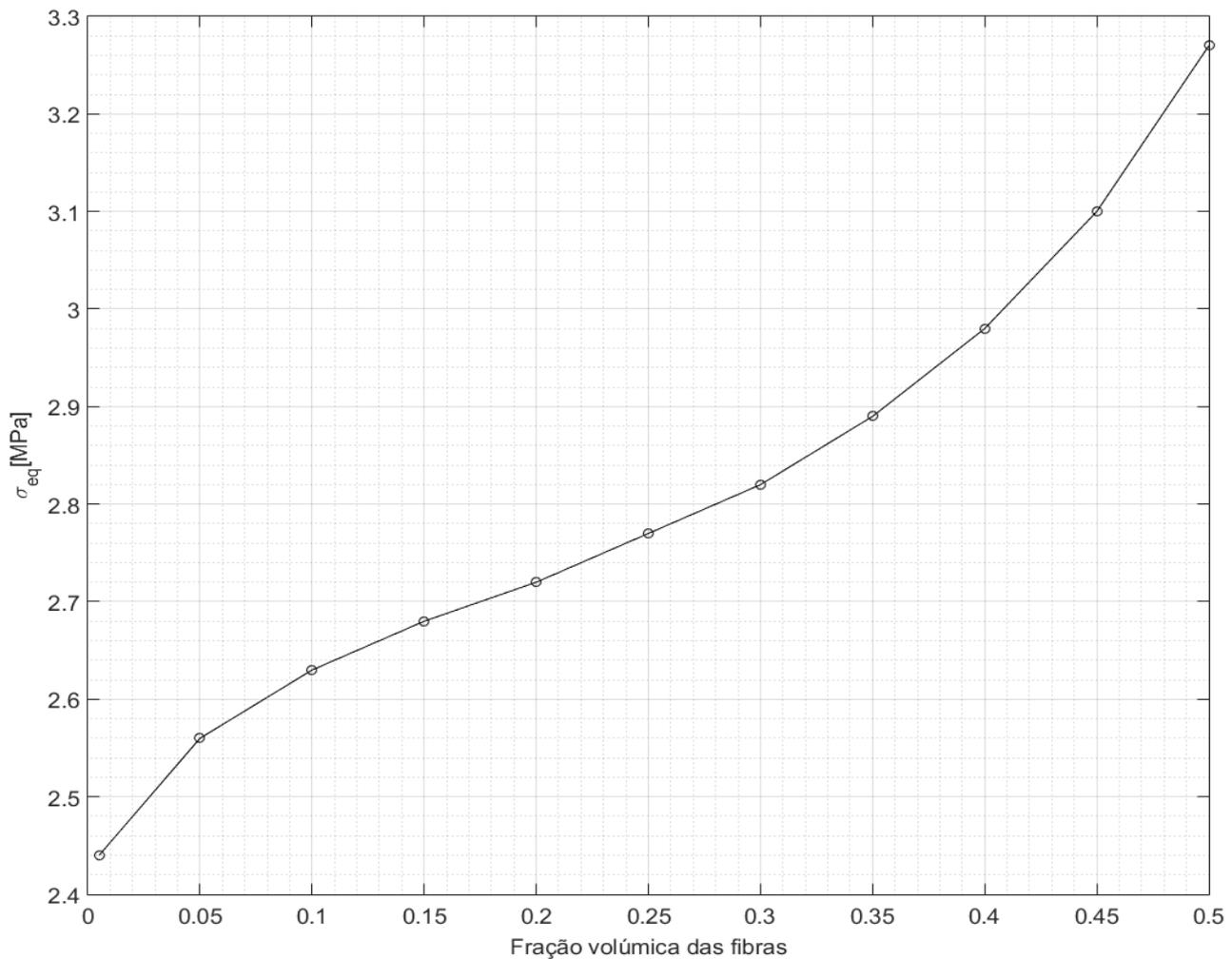


Figura 5.26: Resultado da tensão equivalente máxima para ensaio uniaxial da célula de arranjo hexagonal.

Observando o gráfico é possível ver que a tensão equivalente máxima tem duas taxas de aumento diferentes. Antes da fração volúmica das fibras atingir o valor 25%, a tensão equivalente máxima aumenta a uma taxa mais lenta do que depois desse valor.

À medida que as fibras aumentam o seu diâmetro e se aproximam na matriz, os valores da tensão aumentam mais rapidamente. Na tabela 5.14 é possível ver a evolução da tensão equivalente. Observa-se que à medida que o raio das fibras aumenta, as zonas de concentração de tensões tornam-se maiores.

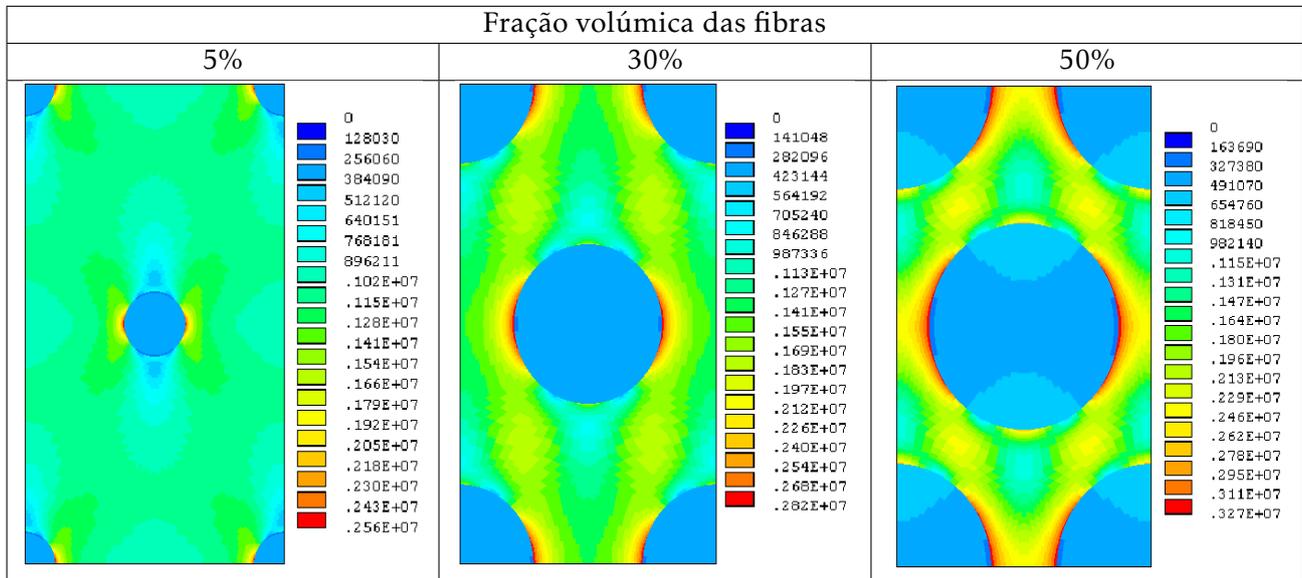


Tabela 5.21: Campos da tensão equivalente em carregamento uniaxial para diferentes frações volúmicas das fibras. As zonas a vermelho correspondem às zonas onde a tensão equivalente é máxima.

5.3.2 Carregamento Hidrostático

No gráfico da figura 5.27 é apresentada a evolução da tensão equivalente máxima, σ_{eq} , com a fração volúmica das fibras.

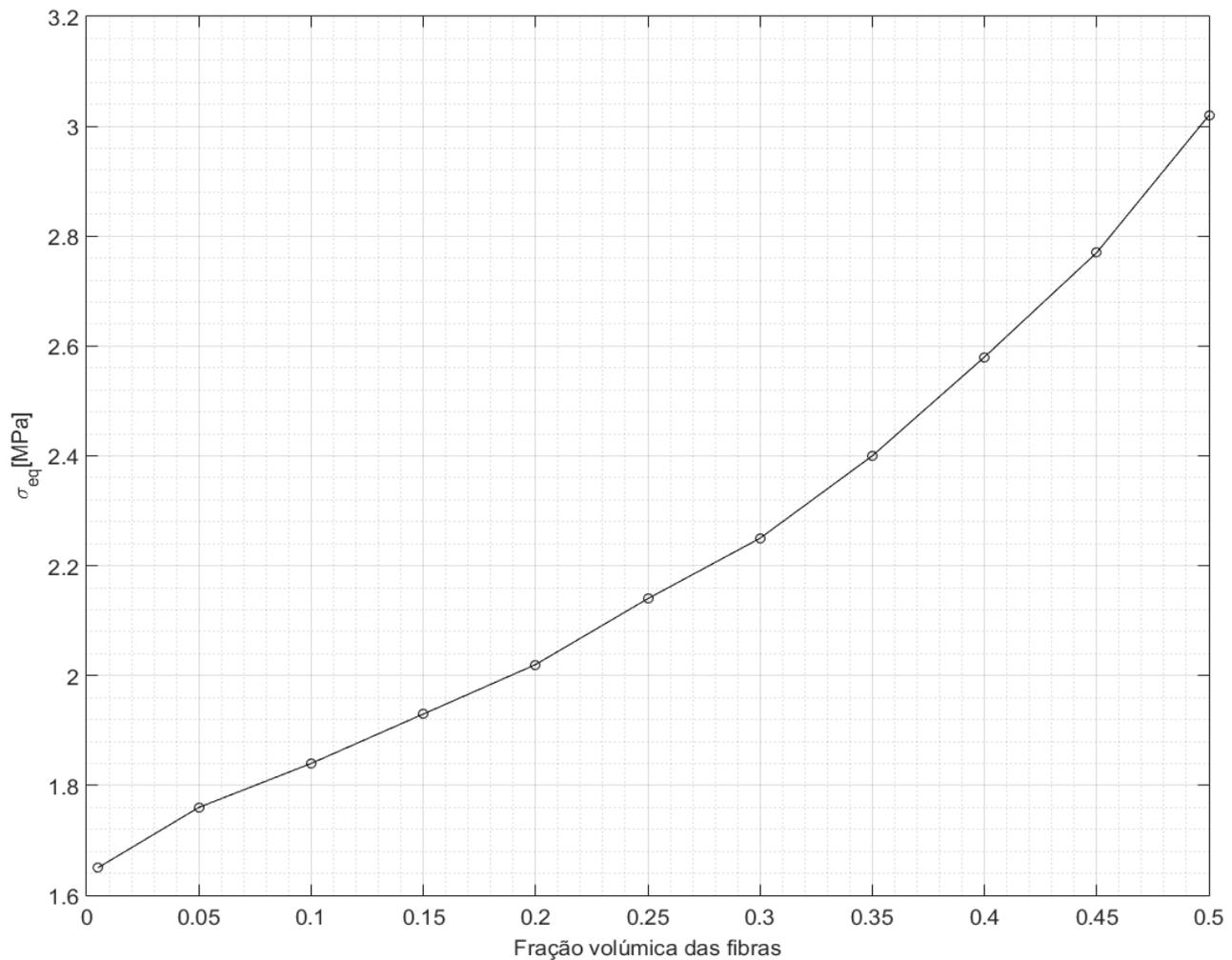


Figura 5.27: Resultado da tensão equivalente máxima para ensaio hidrostático da célula de arranjo hexagonal.

Observando o gráfico, vemos que a subida da tensão equivalente máxima é mais constante do que para o caso uniaxial mas o valor inicial da tensão é mais baixo e o último valor da tensão registado é bastante próximo do obtido para o carregamento

uniaxial.

Pela tabela 5.15 é possível ver a evolução da influência dos campos de tensão entre fibras com o aumento do raio das mesmas. Quando as fibras têm uma fração volúmica baixa, a tensão equivalente é constante à volta do furo mas à medida que o raio das fibras aumenta formam-se picos de tensão onde as fibras estão mais próximas umas das outras.

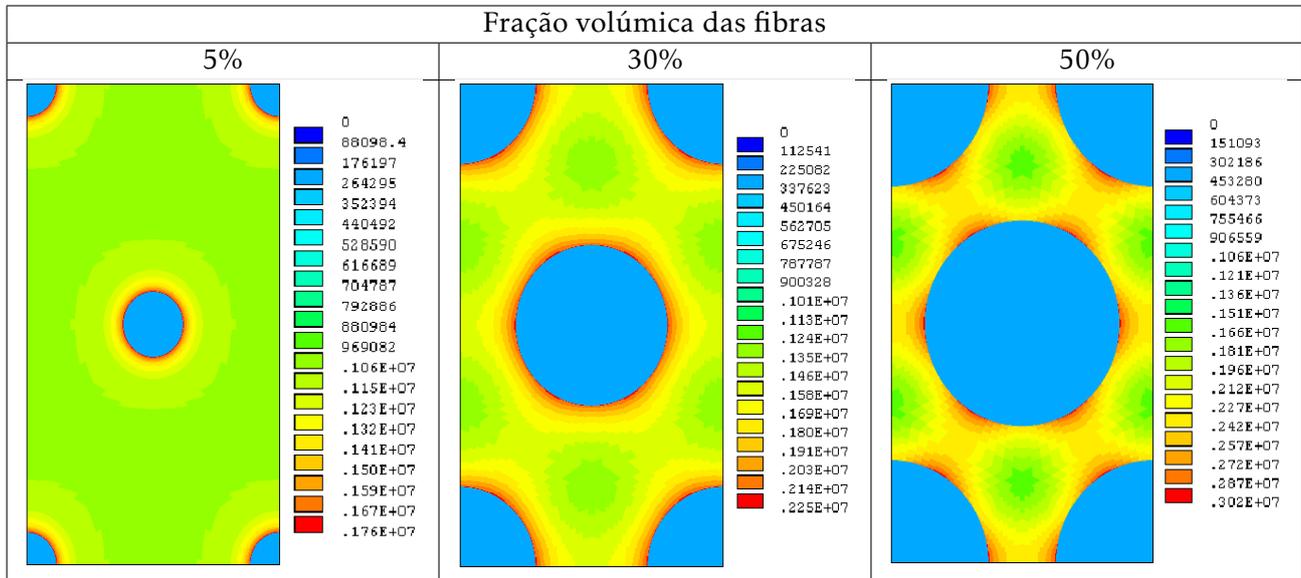


Tabela 5.22: Campos da tensão equivalente em carregamento hidrostático para diferentes frações volúmicas das fibras. As zonas a vermelho correspondem às zonas onde a tensão equivalente é máxima.

5.3.3 Carregamento de Corte

No gráfico da figura 5.28 é apresentada a evolução da tensão equivalente máxima, σ_{eq} , com a fração volúmica das fibras.

Neste carregamento verifica-se a maior diferença entre o valor da tensão inicial e o valor da tensão final mas o aumento da tensão é quase constante desde o início.

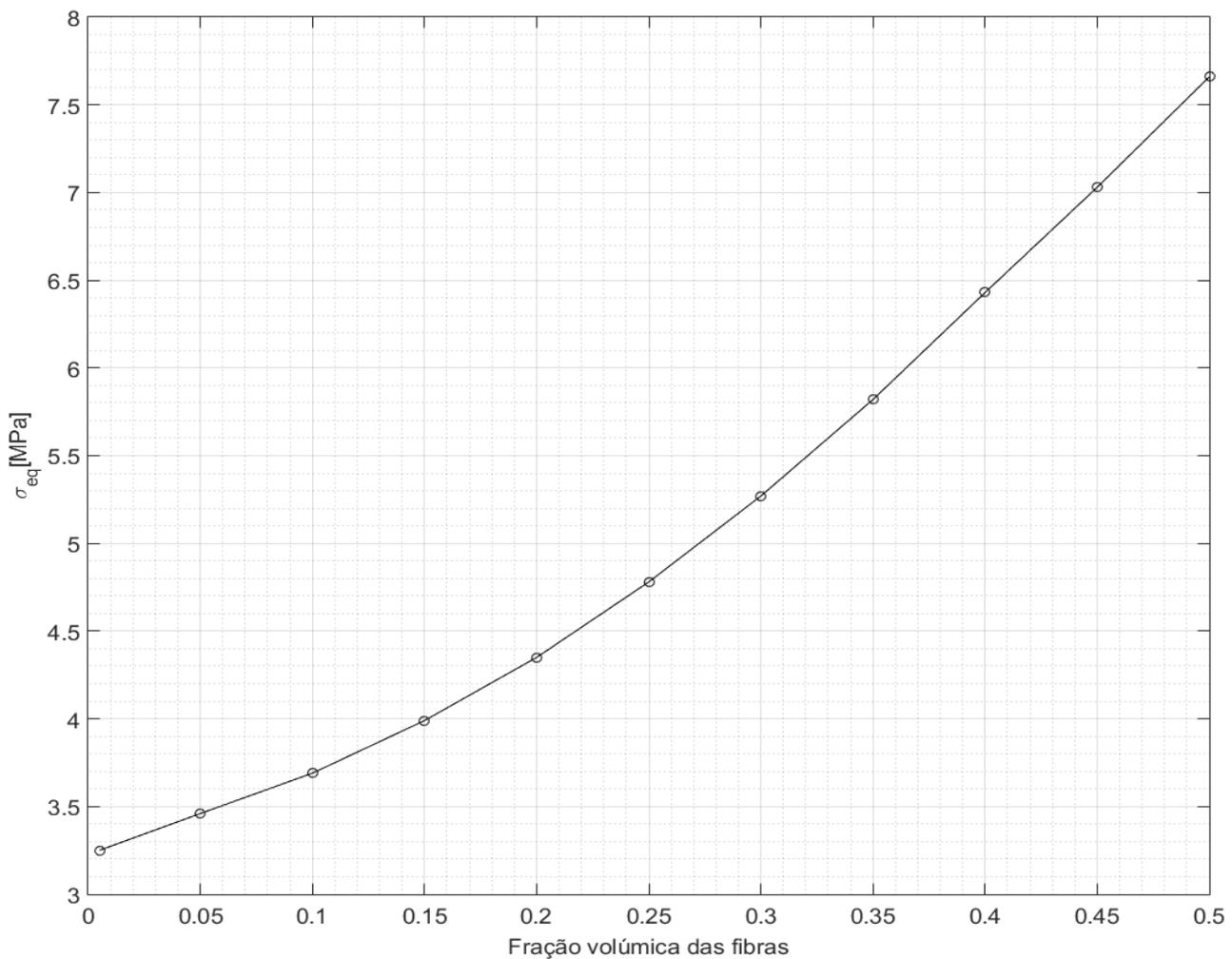


Figura 5.28: Resultado da tensão equivalente máxima para ensaio corte da célula de arranjo hexagonal.

Pela tabela 5.13 é fácil identificar as zonas onde os campos de tensão das fibras se influenciam. Para uma fração volúmica da fibra de 5%, cada fibra tem quatro zonas onde a concentração de tensão é igual mas à medida que a fração volúmica das fibras aumenta, as zonas laterais de concentração de tensões desaparecem.

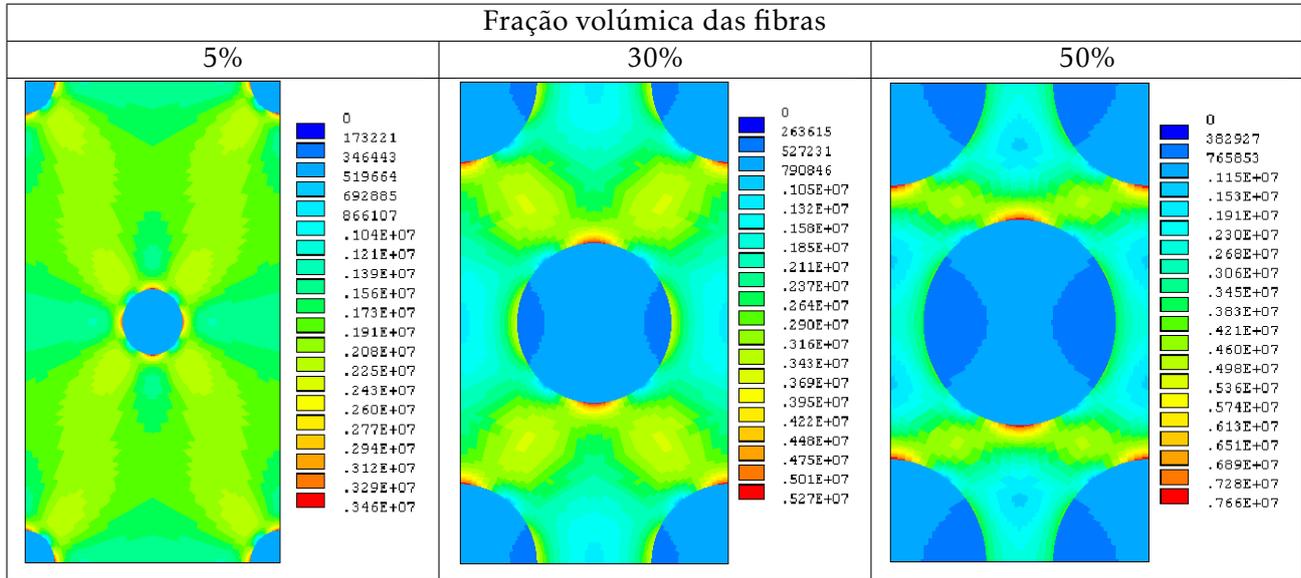


Tabela 5.23: Campos da tensão equivalente em carregamento de corte para diferentes frações volúmicas das fibras. As zonas a vermelho correspondem às zonas onde a tensão equivalente é máxima.

CONCLUSÃO E DESENVOLVIMENTO FUTURO

A presente dissertação contribui para o conhecimento científico ao nível da concentração de tensões de materiais com microestrutura periódica.

Este trabalho inicia-se com uma apresentação sobre materiais compósitos e meios periódicos e é feita uma introdução aos efeitos da concentração de tensões em placas com furos de diferentes geometrias.

Foi feito um estudo de convergência de malha de elementos finitos com o objetivo de obter malhas de elementos finitos para modelação de placas infinitas com furo circular e elíptico. As malhas foram sujeitas a carregamentos que têm uma solução de concentração de tensão existente na literatura. As malhas de elementos finitos são uma boa aproximação aos casos considerados, sendo que a malha para o caso da placa infinita com furo circular obteve resultados de tensão com erros relativos menores que 3% em todos os carregamentos e a placa infinita com furo elíptico obteve erros relativos menores que 1% em todos os carregamentos considerados.

Realizou-se um estudo sobre a influência do efeito de escala da microestrutura periódica na concentração de tensões que existe na interface sólido-vazio de uma célula unitária com um furo. Utilizou-se as mesmas malhas de elementos finitos do estudo de convergência de malha e variou-se a fração volúmica do furo, antes de se repetir a mesma geometria 3,5 ou 7 vezes em duas direções para formar um meio celular. Os meios celulares foram sujeitos aos mesmos carregamentos do estudo de convergência de malha e foram analisados os resultados de tensão da célula unitária central do meio

celular.

No caso de um meio celular composto por células unitárias com furo circular, demonstrou-se que para carregamentos uniaxiais e de corte, os resultados de tensão da célula unitária são intensificados pela aproximação dos furos das células circundantes, resultando numa subida do fator de concentração de tensão nas imediações do furo quando o furo tem frações volúmicas altas. A célula central de um meio com 3 repetições sofre intensificação das tensões para frações volúmicas do furo de 30%, enquanto que num meio com 5 repetições só se verifica este fenómeno para um furo com fração volúmica de 55%. Um carregamento hidrostático produz os mesmos resultados em todos os meios celulares.

Um meio celular composto por células unitárias com furo elíptico apresenta maior semelhança entre resultados de diferentes meios celulares. No entanto, verifica-se intensificação de tensões para frações volúmicas do furo mais baixas do que numa célula com furo circular. Os resultados dos diferentes meios são aproximados porque um furo elíptico aproxima-se da fronteira da célula para frações volúmicas baixas, o que faz com que o efeito de escala não tenha um impacto tão grande num meio celular deste tipo.

Estudou-se um arranjo hexagonal de material compósito até agora pouco estudado e mostrou-se como é que o aumento do tamanho das fibras intensifica a tensão na matriz para vários carregamentos. Em carregamento uniaxial, as zonas de tensão máxima aumentam de tamanho com o aumento do raio das fibras e em carregamento de corte acontece o contrário, as zonas de tensão máxima tornam mais localizadas com o aumento do raio das fibras. Para carregamentos hidrostáticos, as zonas de tensão equivalente máxima tornam-se mais pequenas com o aumento do raio das fibras e têm uma disposição hexagonal à volta das fibras.

Para o desenvolvimento futuro, é necessário expandir os carregamentos utilizados a 2-D para 3-D e fazer uma análise para carregamentos mais complexos. Podem ser aproveitados os geradores de malha desenvolvidos para estudar formas geométricas mais complexas ou casos de empacotamento máximo da fibra na matriz. Também, os resultados de convergência alcançados com a utilização do *h-method* podem ser comparados com resultados alcançados com a utilização *p-method*, através do uso de elementos com 20 nós. Por último, a aproximação da curva do fator de concentração de tensões para placas de largura finita com furo circular (dada pela equação 3.8) pode ser aproximada através da utilização de modelos numéricos.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bendsøe, M. P. e Sigmund, O., *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2003 2nd, 2004
- [2] Xia, Liang, *Multiscale Structural Topology Optimization*, ISTE Press and Elsevier, United Kingdom and United States of America, 2016
- [3] Skrzypek, Jacek J. e Ganczarski, Artur W., *Mechanics of Anisotropic Materials*, Springer, 2015
- [4] Liu, L., James, R. D., e Leo, P. H. , "Periodic Inclusion—Matrix Microstructures with Constant Field Inclusions", Em: *Metallurgical and Materials Transactions A*(2007), Volume 38, Issue 4, pp. 781–787.
- [5] Noel, Lise e Duysinx, Pierre, "Shape optimization of microstructural designs subject to local stress constraints within an XFEM-level set framework", Em: *Structural and Multidisciplinary Optimization* June 2017, Volume 55, Issue 6, pp 2323–2338
- [6] Vigdergauz, Shmuel, "Two-dimensional grained composites of minimum stress concentrations", Em: *Int. J. Solids Structures*(1997) Vol. 34, No. 6, pp. 661-672,
- [7] Li, Shuguang, "On the unit cell for micromechanical analysis of fibre-reinforced composites", Em: *Proceedings of The Royal Society A*(1999) Volume 455, Issue 1983, pp. 815-838

- [8] Vaidya, R. S. e Sun, C.T, "Prediction of composite properties from a representative volume element", Em: *Composites Science and Technology*(1996) Volume 56 , Issue 2, pp. 171-179
- [9] Gonçalves, Gonçalo Martins, "Análise dos problemas de não-linearidade e singularidades em otimização topológica de estruturas e materiais com critérios de tensão", Tese de mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2017
- [10] Coelho, P. S. G., "Modelos hierárquicos para a análise e síntese de estruturas e materiais com aplicações à remodelação óssea". Tese de doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2009.
- [11] Reis, Rui, "Análise de tensão em materiais compósitos de microestrutura periódica", Tese de mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, 2016
- [12] Timoshenko, Stephen e Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, United States of America, 1951
- [13] Kirsch, E.G., "Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre", Em: *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*(1898), Vol. 42, pp. 797-807
- [14] Inglis, C.E., "Stresses in Plates Due to the Presence of Cracks and Sharp Corners", Em: *Transactions of the Institute of Naval Architects*(1913), Vol. 55, pp. 219-241