



Ricardo Jorge Lopes Martins
Licenciado

Resistência à torção de perfis metálicos em forma de I ou H

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia Civil - Perfil Estruturas

Orientador: Professor Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves
Co-orientador: Professor Doutor Armando Sequeira Antão

Júri:

Presidente: Professor Doutor Fernando Manuel dos Anjos Henriques
Arguente: Professor João Carlos Gomes Rocha de Almeida
Vogal: Professor Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves

“Copyright” Ricardo Jorge Lopes Martins, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Deixo aqui os mais sinceros agradecimentos a todas as pessoas que intervieram direta ou indiretamente na elaboração desta tese.

Especialmente quero agradecer todo o apoio prestado pelo meu orientador, Professor Doutor Rodrigo Moura Gonçalves, pela transmissão de conhecimentos, disponibilidade e dedicação, sendo a peça chave desta tese.

Ao Professor Doutor Armando Antão, pelo o apoio fundamental e disponibilidade.

À minha família, pelo o apoio incondicional, a nível pessoal e académico, ao longo de todos estes anos de vida.

À minha família escotista, que não intervindo diretamente na vida académica tem muita influência sobre a mesma.

À minha namorada, pela paciência, apoio e compreensão.

A todos os meus amigos, que tornam os momentos difíceis, barreiras fáceis de serem ultrapassadas.

Ricardo Martins

Resumo

Na presente dissertação estuda-se a resistência plástica à torção de perfis de aço em consola de secção em forma de I ou H sujeitos à torção na extremidade livre. Este trabalho é motivado por resultados obtidos em estudos realizados por outros autores, que mostram que a resistência plástica à torção é superior à fornecida pela chamada "analogia do monte de areia", associada à torção uniforme. Em particular, Merchant e Dinno [5] propuseram um limite superior da carga de colapso dado pela soma dos momentos torsores resistentes dados (i) pela analogia do monte de areia e (ii) pela teoria da torção plástica não-uniforme. Apesar de esta aproximação violar o critério de cedência, Merchant e Dinno mostraram que conduz a cargas de colapso inferiores às obtidas em ensaios experimentais.

De modo a estudar este fenómeno, realizou-se uma análise por elementos finitos com o programa mechpy, baseado no Teorema Cinemático da análise limite, que mostra que o limite superior de Merchant e Dinno conduz, de facto, a boas estimativas da carga de colapso. Para tentar compreender um pouco melhor o fenómeno em causa, desenvolveram-se dois modelos simples de distribuições de tensões globalmente equilibradas. Apesar dos modelos propostos fornecerem cargas de colapso inferiores às obtidas com o método dos elementos finitos, mostram claramente que se verifica uma resistência à torção superior à dada pela analogia do monte de areia. Em particular, um dos modelos fornece estimativas bastante precisas da carga de colapso.

Palavras chave:

Perfis de aço; Resistência plástica à torção; Secção em I ou H ; Torção uniforme; Torção não-uniforme.

Abstract

The present work addresses the plastic resistance to torsion of steel I and H -section cantilevers. This work is motivated by results obtained in previous studies, carried out by other authors, which show that the plastic resistance to torsion is higher than that provided by the so-called "sand-heap analogy" associated with uniform torsion. In particular, Merchant and Dinno [5] proposed an upper bound for the collapse load which is given by the sum of the plastic torsion moments obtained with (i) the sand-heap analogy and (ii) the non-uniform plastic torsion theory. Although this approach violates the yield criterion, Merchant and Dinno have shown that it leads to lower collapse loads than those obtained experimentally. In order to study this phenomenon, a finite element analysis was performed using the mechpy program, which is based on the upper bound and shows that the Merchant and Dinno upper bound actually leads to good estimates of the collapse load. To help grasping this phenomenon, two simple models with globally equilibrated stress distributions are developed. Although the proposed models provide lower collapse loads than those obtained with the finite element method, they clearly show that the plastic torsion load is higher than that given by the sand-heap analogy. In particular, one of the models provides fairly accurate estimates of the collapse load.

Keywords:

Steel beams; Plastic torsion resistance; I and H -sections; Uniform torsion; Non-uniform torsion.

Índice de Matérias

Copyright	i
Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xiii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivação e enquadramento do tema	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Organização da Dissertação	2
2 Síntese teórica da torção	5
2.1 Introdução	5
2.2 Torção Uniforme	5
2.2.1 Momento torsor elástico	5
2.2.2 Momento Torsor Plástico - Analogia do monte de areia	12
2.3 Torção não-uniforme	14
2.3.1 Momento torsor elástico	14
2.3.2 Momento torsor plástico	16
2.4 Limite Superior de carga de colapso	17
3 Cálculo com elementos finitos da carga de colapso	21
3.1 Introdução	21
3.2 Implementação numérica aplicada à torção dos perfis metálicos . .	22
3.3 Metodologia	24
3.3.1 Definição geométrica e discretização	25
3.3.2 Processamento	26
3.3.3 Visualização	26
3.4 Resultados	28

4	Cálculo analítico da resistência plástica à torção	39
4.1	Caracterização dos modelos de distribuição de tensões	39
4.2	Cálculo de T_{plSV}	40
4.3	Cálculo de T_{plNU}	41
4.3.1	Modelo 2	43
4.4	Comparação de Resultados	44
4.4.1	Modelo 1	44
4.4.2	Modelo 2	46
4.4.3	Comparação entre modelos	46
4.5	Conclusão	48
4.6	Desenvolvimentos Futuros	50
	Referências bibliográficas	53
A	Gráficos referentes ao Modelo 2	55

Índice de Figuras

2.1 Barra prismática genérica (adaptado de: Sadd, 2009)	6
2.2 Equilíbrio de forças e momentos no final da peça	7
2.3 Secção transversal genérica (adaptado de: Sadd, Martin 2009)	8
2.4 Esquema da relação entre as curvas de nível e diagrama de esforços (fonte: Neto, 2016)	10
2.5 Analogia da membrana (adaptado de: Sadd, 2009)	11
2.6 Equilíbrio de forças (adaptado de: Sadd, 2009)	11
2.7 Representação das <i>linhas de cumeeira</i> (traço-ponto) e das curvas de nível para o caso de uma secção rectangular.	13
2.8 Representação do monte de areia considerado no <i>Sand Heap Analogy</i>	14
2.9 Equilíbrio de forças do bi-corte e momento torsor não-uniforme (Fonte: Naraynan, S.)	15
2.10 Diagrama de corpo livre de uma barra de secção em I sujeita à torção	16
2.11 Diagrama de tensões normais no colapso	17
2.12 Mecanismo de torção (adaptado de: Merchant e Dinno 1965)	18
2.13 Comparação de resultados experimentais de Merchant e Dinno com a equação proposta (adaptado de: Merchant e Dinno 1965)	19
2.14 Comparação de resultados experimentais de Pi e Trahair com a equação proposta (adaptado de: Pi e Trahair 1995)	19
3.1 Representação do valor λ na aproximação à carga de colapso (adaptado de: Silva, Mário 2009)	22
3.2 Dimensões das secções transversais utilizadas no estudo de caso	25
3.3 Elementos da malha na secção transversal	27
3.4 Perspetiva da malha ao longo do vão da peça	27
3.5 Convergência de resultados	28
3.6 Deformada da peça quando sujeita à torção (vista no plano zx)	29
3.7 Deformada da peça quando sujeita à torção (vista no plano zy)	30
3.8 Localização do corte da secção de colapso	30
3.9 Mapa das tensões segundo a direcção xx	31
3.10 Mapa das tensões segundo a direcção yy	31
3.11 Mapa das tensões segundo a direcção zz	32
3.12 Mapa das tensões segundo a direcção xy	32
3.13 Mapa das tensões segundo a direcção xz	33
3.14 Mapa das tensões segundo a direcção yz	33

3.15	Localização do corte de secção a meio vão	34
3.16	Mapa das tensões segundo a direção xx	35
3.17	Mapa das tensões segundo a direção yy	35
3.18	Mapa das tensões segundo a direção zz	36
3.19	Mapa das tensões segundo a direção xy	36
3.20	Mapa das tensões segundo a direção xz	37
3.21	Mapa das tensões segundo a direção yz	37
4.1	Modelo 1 - Distribuição de tensões utilizado no método analítico	40
4.2	Modelo 2 - Distribuição de tensões	40
4.3	Curvas de interação M-V (adaptado de: Gonçalves, Rodrigo <i>et. al.</i> 2014)	42
4.4	Comparação de resultados entre o método numérico e o método analítico para o Perfil A	44
4.5	Comparação de resultados entre o método numérico e o método analítico para o Perfil B	45
4.6	Comparação de resultados entre o método numérico e o método analítico para o Perfil A	47
4.7	Comparação de resultados entre o método numérico e o método analítico para o Perfil B	47
4.8	Comparação de resultados entre o método numérico, método analítico (ambos os modelos), <i>Merchant Upper Bound</i> para o Perfil A	48
4.9	Comparação de resultados entre o método numérico, método analítico (ambos os modelos), <i>Merchant Upper Bound</i> para o Perfil B	49
4.10	Diferença entre modelo 1, 2 e do <i>Merchant Upper Bound</i> face à implementação numérica no Perfil A	49
4.11	Diferença entre modelo 1, 2 e do <i>Merchant Upper Bound</i> face à implementação numérica no Perfil B	50
A.1	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 0,2m$	55
A.2	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 0,5m$	56
A.3	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 1m$	56
A.4	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 2m$	57
A.5	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 5m$	57
A.6	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 0,2m$	58
A.7	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 0,5m$	58
A.8	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 1m$	59
A.9	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 2m$	59
A.10	Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 5m$	60

Índice de Tabelas

3.1	Dimensões dos elementos das malhas em mm	26
3.2	Mapa de malhas consideradas em função do vão da peça	26
3.3	Tabela de resultados referentes ao modelo (i) com raio de transição	29
3.4	Tabela de resultados referentes ao modelo (ii) sem raio de transição	29
4.1	Tabela com os resultados de ambos os métodos e a diferença entre os mesmos para o Perfil A	44
4.2	Tabela com os resultados de ambos os métodos e a diferença entre os mesmos para o Perfil B	45
4.3	Tabela com os resultados de ambos os métodos e o erro entre os mesmos para o Perfil A	46
4.4	Tabela com os resultados de ambos os métodos e o erro entre os mesmos para o Perfil B	46

Lista de siglas e símbolos

Abreviaturas

Siglas

FCT Faculdade de Ciências e Tecnologia

UNL Universidade Nova de Lisboa

Índices

$()_{ij}$ relativo à faceta i segundo a direção j

$()_f$ relativo ao banzo (*flange*)

$()_w$ relativo à alma (*web*)

$()_{pl}$ valor plástico

$()_x$ relativo ao eixo x

$()_y$ relativo ao eixo y

$()_z$ relativo ao eixo z

Letras Latinas Maiúsculas

T momento torsor

E módulo de elasticidade

G módulo de distorção

I momento de inércia

L comprimento da barra

V esforço transversal

M momento fletor

H altura da secção do perfil

\bar{H} braço do binário devido às forças de bi-corte

- F força exterior aplicada na fronteira da peça
 D taxa da dissipação plástica por unidade de volume
 W_D taxa de trabalho da dissipação plástica por unidade de volume
 W_λ taxa de trabalho das forças variáveis
 B operador diferencial de compatibilidade

Letras Latinas minúsculas

- u deslocamentos
 \dot{u} velocidades
 b largura da parede
 t espessura da parede
 p pressão uniforme
 f função de cedência
 s parcela deviatórica do tensor das tensões
 k tensão ao corte puro de cedência

Letras Gregas

- σ tensão normal
 τ tensão de corte
 ε deformação
 $\dot{\varepsilon}$ taxa de deformação
 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ tensor da taxa de deformação
 $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}^p}$ tensor da taxa de deformações plásticas
 λ coeficiente que garante o menor majorante da carga de colapso
 Γ fronteira cinemática
 ϕ ângulo de rotação
 θ tração na membrana
 γ deformação transversal
 ψ função de empenamento
 α ângulo por unidade de comprimento

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e enquadramento do tema

Na presente dissertação são estudados perfis metálicos de secção em I , em consola e sujeitos à torção.

Segundo a teoria de *Saint-Venant*, uma barra sujeita à torção pura ou uniforme, sem empenamento restringido, desenvolve um campo de tensões tangenciais na secção transversal. Em regime plástico a torção uniforme é calculada através da analogia do monte de areia introduzida por Nadai [7].

A torção não-uniforme ocorre quando o empenamento é variável. Os esforços desenvolvidos através deste fenómeno geram um campo de tensões normais, no qual verifica-se tração e compressão na secção transversal.

Neste âmbito foram realizados estudos sobre a carga de colapso de um perfil metálico de secção em I sujeito à torção. O limite superior é calculado pela soma algébrica do momento torsor plástico dado pela torção uniforme e a torção não-uniforme, que, quando comparado com os resultados experimentais, revela-se inferior aos mesmos; este facto foi demonstrada por Merchant e Dinno [2]. No entanto, nota-se que este limite superior viola naturalmente o critério de cedência.

O limite inferior foi proposto por Boulton [1]. O autor define uma distribuição em que separa as tensões referentes à torção uniforme e não-uniforme, não violando o critério de cedência e respeitando o equilíbrio estático. Apesar de Boulton ter otimizado os seus resultados, a resistência plástica exata não foi alcançada.

Pi e Trahair [10] desenvolveram modelos de elementos finitos para confrontarem os resultados obtidos com os resultados experimentais, considerando pequena e grande rotação. As conclusões dos autores mostram que em relação a pequenas rotações, o limite de Merchant e Dinno referente à carga de colapso é uma estimativa razoável.

Osório [9] analisou consolas de secção em C , confrontando valores obtidos através de um modelo de elementos finitos de casca e um modelo analítico análogo ao procedimento do limite superior de Merchant e Dinno. Os resultados indicaram que, apesar do critério de cedência ser violado, os valores obtidos através de ambos os modelos eram semelhantes.

Baseado nos aspetos acima descritos e nas conclusões apresentadas, torna-se

evidente a necessidade de estudar a interação entre o mecanismo de torção uniforme e não-uniforme e a sua influência no colapso da viga.

1.2 Objetivos

O principal objetivo da presente dissertação é a compreensão do fenômeno da sobre-resistência aparente desenvolvida num perfil em I quando sujeito à torção. De modo a desenvolver um estudo estruturado foi necessário criar os seguintes sub-objetivos:

1. Obter um valor para a carga de colapso através de um programa de elementos finitos (mechpy) seguindo os seguintes passos:
 - (a) Seleção e criação de modelos em 3D de modo a aplicar o programa de cálculo de elementos finitos;
 - (b) Discretizar o modelo em elementos e verificar a convergência de resultados;
 - (c) Otimizar o modelo de cálculo conforme as limitações computacionais existentes.
 - (d) Utilizar o modelo otimizado para o cálculo da carga de colapso.
2. Criar um modelo analítico que permita obter resultados próximos dos previamente obtidos através do programa de cálculo de elementos finitos:
 - (a) Criar uma distribuição de tensões que não viole o critério de cedência baseada nos mapas de tensões obtidos através do programa de elementos finitos;
 - (b) Desenvolver uma folha de cálculo no programa Maple 2017 [®] de modo a obter os resultados da torção plástica;
3. Comparação e discussão de resultados.

1.3 Organização da Dissertação

O presente capítulo é introdutório, onde se encontram as principais referências que motivaram a elaboração deste trabalho. São também mencionados os objetivos e as etapas para alcançar os mesmos.

No segundo capítulo é explanada a base teórica necessária à compreensão dos conceitos inframencionados. A compreensão destes é fundamental para a análise dos capítulos subsequentes.

No terceiro capítulo encontra-se a caracterização, e a análise numérica dos perfis considerados. Os resultados obtidos através do programa de elementos finitos neste capítulo constituem a base de comparação para as análises posteriores dos modelos analíticos. O presente capítulo contém mapas de cores representativos qualitativamente das tensões normais longitudinais e de corte.

No quarto e último capítulo são descritos os modelos de distribuições de tensões considerados para a realização do estudo analítico do problema. Neste capítulo encontram-se, também, todos os resultados obtidos através do programa de elementos finitos e dos modelos analíticos, assim como a comparação entre os mesmos. Na penúltima e última secção deste capítulo encontra-se a conclusão e propostas para desenvolvimentos futuros relacionados com o tema.

A presente tese contém, em anexo, gráficos obtidos através do desenvolvimento de um modelo analítico para o cálculo da carga de colapso.

Capítulo 2

Síntese teórica da torção

2.1 Introdução

No presente capítulo é estudado o comportamento à torção de um perfil metálico em consola com secção em I ou H , sujeito à torção. É considerada a hipótese simplificativa dos pequenos deslocamentos.

Analogamente ao estudo desenvolvido por Merchant e Dinno [2], a torção é dividida em duas parcelas, torção uniforme e torção não-uniforme.

A torção uniforme ou de *Saint-Venant*, caracteriza-se por um empenamento constante ao longo da peça.

A torção não-uniforme caracteriza-se por um empenamento variável ao longo do vão da peça. Este fenómeno deve considerar-se principalmente em peças de secção aberta (exemplo: secção em C , H ou I).

Sumariamente, a torção total é constituída por duas componentes, torção uniforme T_{SV} e torção não-uniforme T_{NU} , originando:

$$T_{total} = T_{SV} + T_{NU} \quad (2.1)$$

2.2 Torção Uniforme

2.2.1 Momento torsor elástico

A teoria de *Saint-Venant* parte do método semi-inverso, ou seja, um método em que uma parte da solução do problema é assumida e a restante é calculada através de equações que o regem. No caso da torção, pode ser assumido o campo de deslocamentos ou campo de tensões. Para ambas as assunções é considerada uma barra prismática genérica (ver figura 2.1), sujeita a um momento torsor numa das extremidades tal que as secções subjacentes rodam rigidamente no seu plano relativamente a essa, sendo o empenamento constante.

O eixo da barra é coincidente com o eixo x_3 , no qual apresenta a secção transversal no plano x_2x_1 .

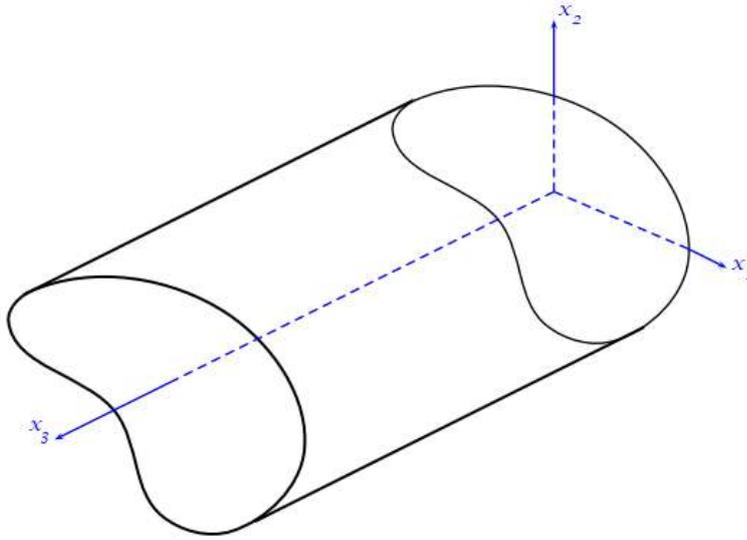


Figura 2.1: Barra prismática genérica (adaptado de: Sadd, 2009)

Assumindo o campo de tensões

A realização do cálculo do valor da torção uniforme através da assunção do campo de tensões implica assumir que $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0$, tal que as equações de equilíbrio são descritas por:

$$\tau_{\alpha,3} = 0 \quad (\alpha = 1, 2) \quad \tau_{\alpha,\alpha} = 0, \quad (2.2)$$

onde $\tau_\alpha = \sigma_{\alpha 3}$. As duas primeiras equações implicam que τ_1 e τ_2 dependam somente de x_1 e x_2 , transformando-se, assim, num problema meramente matemático. A terceira equação de equilíbrio é verificada com o recurso à função de Prandtl, que define τ_α através de uma função escalar φ obtendo-se:

$$\tau_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \quad (2.3a)$$

$$\tau_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}. \quad (2.3b)$$

Deste modo, todas as condições de equilíbrio ficam automaticamente verificadas dentro da área delimitada pelo contorno da secção.

Contudo, para satisfazer as condições de fronteira, é necessário garantir que:

$$\nabla \varphi \cdot s = 0, \text{ ou } \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0, \quad (2.4)$$

onde s é o vetor tangente à fronteira dado por $s = (s_1, s_2) = (-n_2, n_1)$.

Resumidamente e de modo a cumprir as condições de equilíbrio na fronteira e no

interior da secção podemos definir que:

- $\varphi = 0$ na fronteira;
- φ tem um valor constante desconhecido na região interior da secção.

Aplicando o princípio de *Saint-Venant*, através do equilíbrio de momentos no centro de corte da secção livre da peça (ver figura 2.2) obtemos a seguinte expressão:

$$T_{SV} + \int_A (-\sigma_{23}x_1 + \sigma_{13}x_2)dA = 0, \quad (2.5)$$

onde A é a área da secção transversal.

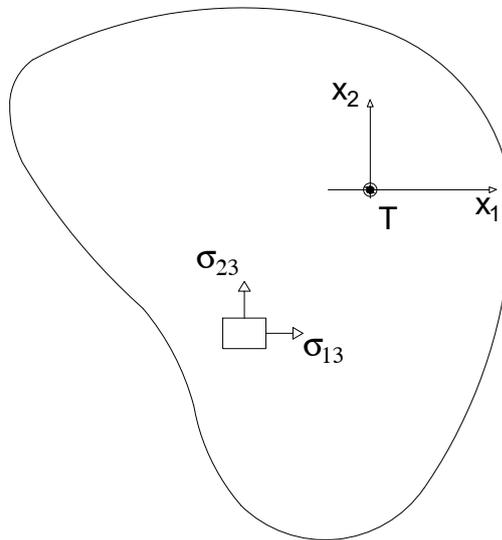


Figura 2.2: Equilíbrio de forças e momentos no final da peça

Simplificando e considerando as expressões (2.3) tem-se:

$$T_{SV} = - \int_A (\varphi_{,1}x_1 - \varphi_{,2}x_2)dA = - \int_A \varphi_{,i}x_i dA. \quad (2.6)$$

Integrando por partes considerando $((\varphi_i x_i)_{,i} = \varphi_{,i} x_i + \varphi x_{i,i})$ e $x_{i,i} = x_{1,1} + x_{2,2} = 2$, obtemos:

$$T_{SV} = - \left(\int_A (\varphi x_i)_{,i} dA - 2 \int_A \varphi dA \right). \quad (2.7)$$

Aplicando teorema da divergência no plano, $\int_A (\varphi x_i)_{,i} dA = \int_{\partial A} (\varphi x_i) n_i ds$, o primeiro termo da equação simplifica, dando origem a:

$$T_{SV} = \int_{\partial A} \varphi x_i n_i ds + \int_A 2\varphi dA, \quad (2.8)$$

onde n representa o vetor normal à fronteira.

O primeiro termo desaparece devido a $\varphi = 0$ na fronteira e obtém-se:

$$T_{SV} = 2 \int_A \varphi dA. \quad (2.9)$$

Assumindo o campo de deslocamentos

Nesta formulação considera-se que:

- para cada x_3 a secção comporta-se como um corpo rígido no seu plano, embora seja permitido a deformação na direção do eixo da peça (empenamento);
- o ângulo de rotação, β , é uma função linear dada por $\beta(x_3) = \alpha x_3$, onde x_3 é um ponto genérico na direção do eixo da peça e α é o valor do ângulo por unidade de comprimento.

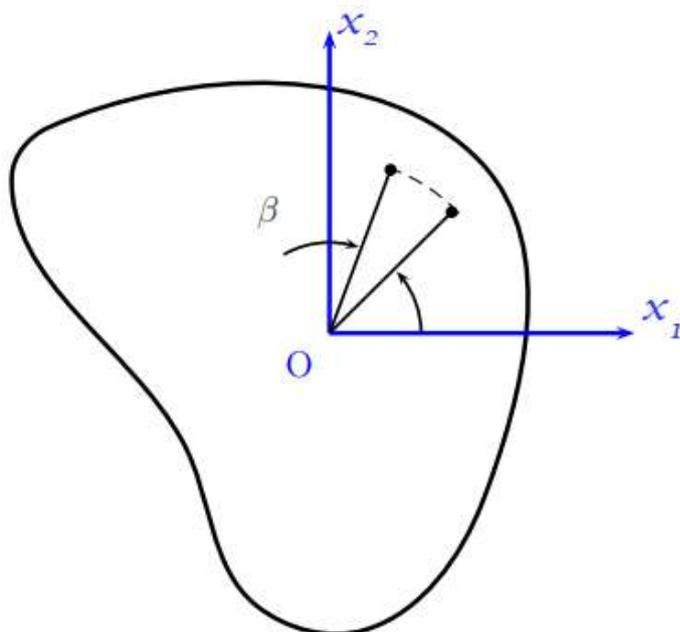


Figura 2.3: Secção transversal genérica (adaptado de: Sadd, 2009)

Supõe-se que os deslocamentos fora do plano da secção transversal considerada são constantes ao longo da coordenada x_3 da peça. Sendo definidos os

deslocamentos, nas três direções, através das seguintes expressões:

$$u_1 = -\alpha x_3 x_2, \quad (2.10a)$$

$$u_2 = \alpha x_3 x_1, \quad (2.10b)$$

$$u_3 = \alpha \psi(x_1, x_2), \quad (2.10c)$$

onde $\psi(x_1, x_2)$ caracteriza a função de empenamento.

Com o campo de deslocamentos assumido, as distorções são, assim, dadas por:

$$\gamma_{13} = \alpha(\psi_{,1} - x_2) \quad \gamma_{23} = \alpha(\psi_{,2} - x_1) \quad (2.11)$$

As relações constitutivas permitem obter as tensões:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad (2.12a)$$

$$\sigma_{23} = G(\alpha x_1 + u_{3,2}), \quad (2.12b)$$

$$\sigma_{13} = G(-\alpha x_2 + u_{3,1}), \quad (2.12c)$$

$$\sigma_{12} = 0, \quad (2.12d)$$

onde G é o módulo de distorção.

Derivando a equação (2.12b) e (2.12c) em relação a x_1 e x_2 , respetivamente, obtemos as seguintes expressões:

$$\sigma_{23,1} = G(\alpha + u_{3,21}), \quad (2.13a)$$

$$\sigma_{13,2} = G(-\alpha + u_{3,12}). \quad (2.13b)$$

Subtraindo (2.13b) por (2.13a) obtemos:

$$\sigma_{13,2} - \sigma_{23,1} = -2G\alpha. \quad (2.14)$$

A compatibilização das funções de Prandtl com a equação (2.14) permite definir a equação de equilíbrio (2.15).

Assim a função $\varphi(x_1, x_2)$ terá de ser constante em toda a fronteira C . Sendo que o valor constante da função escalar não tem influência pode-se considerar nulo.

Resumidamente, define-se:

$$\varphi_{,11} + \varphi_{,22} = -2G\alpha \quad \text{na área} \quad (2.15)$$

$$\varphi = 0 \quad \text{na fronteira} \quad (2.16)$$

Os resultados acima obtidos permitem calcular o valor do momento torsor elástico com recurso à analogia da membrana, conforme explicado de seguida.

Analogia da Membrana

A analogia da membrana permite calcular indiretamente o campo de tensões tangências e o momento torsor, correspondente, em peças de secção constante e parede fina.

As tensões de corte são diretamente proporcionais à inclinação da reta tangente à membrana num certo ponto. Logo, é possível fazer uma avaliação qualitativa das tensões de corte somente considerando a forma da secção em causa. Na figura 2.4 está representada uma secção em forma de L em que as curvas de nível demonstram que a membrana tem uma inclinação superior no canto reentrante (tensão tangencial máxima) e uma inclinação inferior no canto saliente (tensão tangencial mínima).

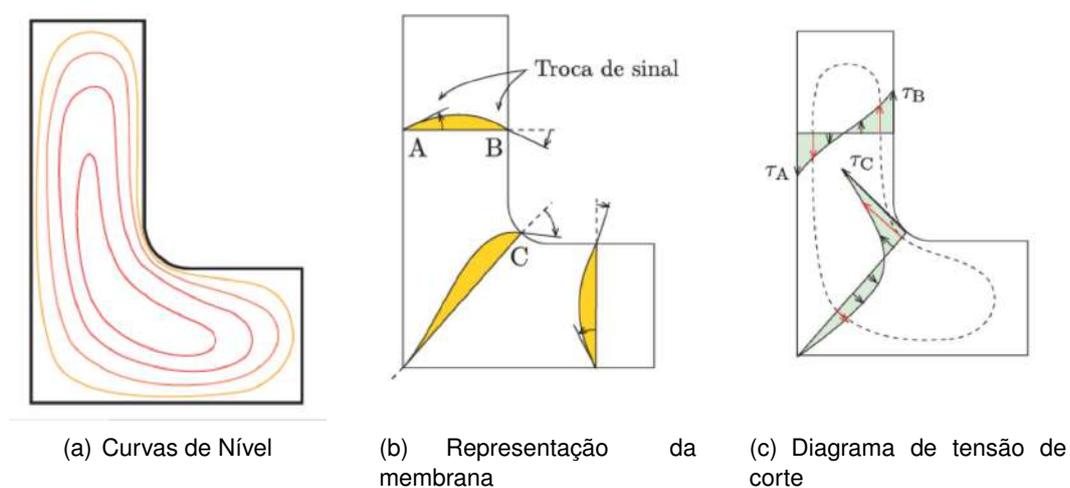


Figura 2.4: Esquema da relação entre as curvas de nível e diagrama de esforços (fonte: Neto, 2016)

As equações diferenciais que caracterizam o campo de tensões de uma peça sujeita à torção são semelhantes às equações que caracterizam a forma de uma membrana sujeita a uma pressão constante. Este facto permite estabelecer uma relação entre as tensões e a forma da membrana.

No desenvolvimento desta analogia considerou-se uma membrana elástica muito fina, com peso desprezável e sujeita a uma tração uniforme θ (ver figura 2.5). Essa membrana encontra-se fixa da fronteira da secção em estudo, está submetida a uma pressão uniforme de valor p e é descrita através da função $z(x, y)$. Seguidamente é considerado um elemento da membrana com as dimensões $dx \times dy$ no qual é realizado o equilíbrio de forças segundo o eixo zz , figura 2.6, dando origem à seguinte equação:

$$pdx dy + \theta dy \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \partial z}{\partial x \partial x} \right) - \theta dy \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \theta dy \left(\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \partial z}{\partial y \partial y} \right) - \theta dx \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Simplificando a equação (2.17) obtemos:

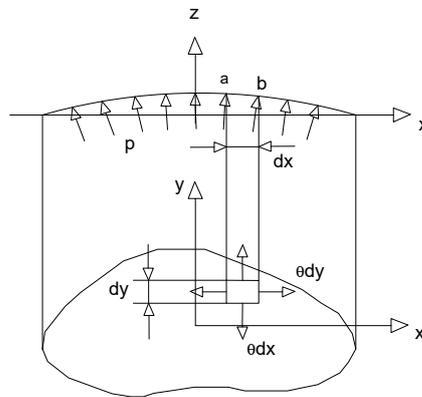


Figura 2.5: Analogia da membrana (adaptado de: Sadd, 2009)

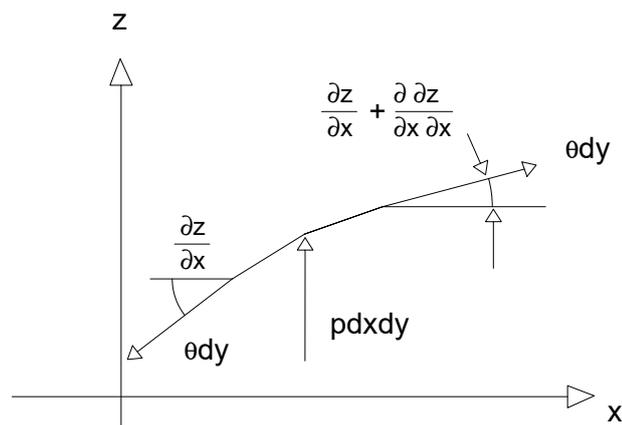


Figura 2.6: Equilíbrio de forças (adaptado de: Sadd, 2009)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{\theta}. \quad (2.18)$$

Constata-se um paralelismo entre a equação simplificada do equilíbrio de forças e a equação (2.15). Analisando as semelhanças entre as ambas, pode-se afirmar que:

$$\frac{p}{\theta} = 2G\alpha, \quad (2.19a)$$

$$z = \varphi. \quad (2.19b)$$

Analogamente à função de Prandtl (2.3) e à função (2.9) podemos afirmar:

$$\tau \equiv \frac{dz}{dn}, \quad (2.20a)$$

$$T_{SV} = \int_A 2z dx dy, \quad (2.20b)$$

em que, n é o vetor normal à membrana.

2.2.2 Momento Torsor Plástico - Analogia do monte de areia

No cálculo da torção plástica uniforme, foi considerada a analogia do monte de areia ou também designada *Sand-Heap Analogy* (Nadai, 1931).

Tal como deduzido anteriormente, a função $\varphi(x_1, x_2)$ é constante em toda a fronteira C . Assim, num ponto genérico (x_1, x_2) podemos assumir um conjunto de eixos cartesianos local, onde o eixo x_1 é paralelo à fronteira, em que, localmente $\tau_1 = \varphi_{,2}$ e $\tau_2 = 0$. Extrapolando estes resultados para toda a secção, $\varphi(x_1, x_2)$ define uma superfície em forma de monte de areia, tal que, a inclinação das paredes é constante e igual a τ_y .

Para um material elástico perfeitamente plástico, com $\tau_y = k$, a função escalar de tensão na região plástica é definida por:

$$|\nabla\varphi| = k. \quad (2.21)$$

Considerando a área da secção transversal totalmente plastificada, podemos designar a função escalar de tensões, por φ_p . De modo a calcular $\varphi_p(x_1, x_2)$ num ponto genérico basta multiplicar o valor de k pela distância entre o ponto de coordenadas (x_1, x_2) e o ponto da fronteira mais próximo. Quando um ponto genérico (x_1, x_2) está à mesma distância de dois ou mais pontos da fronteira é designado por *ponto de cumeeira*, tal que, um conjunto infinito de *pontos de cumeeira* designa-se por *linha de cumeeira*. Na figura 2.7 estão ilustradas, a traço-ponto, as *linhas de cumeeira* para uma secção rectangular. Estas representam o local onde $\nabla\varphi$ é descontínuo e as tensões são descontínuas no plano formado pela *linha de cumeeira* e o eixo x_3 .

A *Sand-heap Analogy* considera que sobre a secção do perfil é depositada areia, criando, assim, um monte de areia em que o ângulo de fricção interna não poderá ser excedido, sendo este definido pela base horizontal e o talude do monte de areia. O volume máximo atingido pelo monte de areia é considerado quando as paredes do mesmo tiverem todas a mesma inclinação, excetuando na fronteira e nas *linhas rígidas* dando origem ao monte representado na figura 2.8.

Analogamente aos resultados obtidos para o caso do comportamento elástico é possível reescrever a função diferencial de tensões através da seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = k^2, \quad (2.22)$$

onde $z = \varphi_p(x_1, x_2)$.

Assim, o momento torsor plástico traduz-se por:

$$T_{plSV} = 2 \int_A \varphi_p dA. \quad (2.23)$$

Simplificando (2.23) obtém-se:

$$T_{plSV} = 2 \times VOL, \quad (2.24)$$

em que VOL representa o volume do monte de areia.

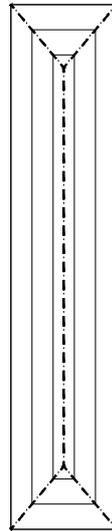


Figura 2.7: Representação das *linhas de cumeeira* (traço-ponto) e das curvas de nível para o caso de uma secção rectangular.

Nadai (1931) considera que o monte de areia pode ser aproximado a um prisma

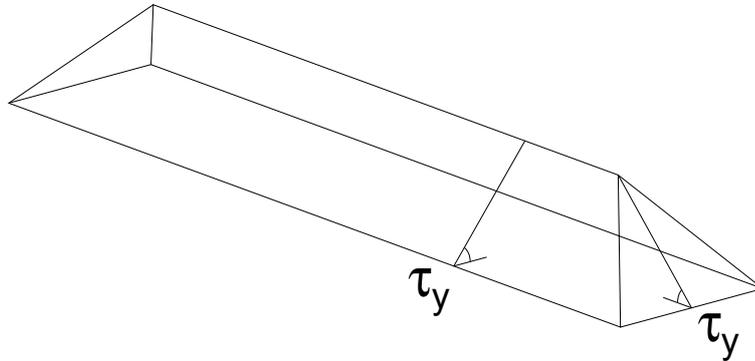


Figura 2.8: Representação do monte de areia considerado no *Sand Heap Analogy*

triangular regular, sendo a torção plástica uniforme dada por:

$$T_{plSV} = k \sum_i^n \frac{b_i t_i^2}{2}, \quad (2.25)$$

onde n são o número de paredes da secção e b e t são os respetivos, comprimentos e espessura de cada elemento retangular da secção.

De acordo com a teoria clássica de vigas (Lubliner, 1990), o valor da torção plástica uniforme é dado por:

$$T_{plSV} = k \sum_i^n \frac{t_i^2}{6} (3b_i - t_i). \quad (2.26)$$

Nesta formulação o volume calculado é exatamente o de um monte de areia, minimizando o erro consequente da aproximação do monte de areia a um prisma triangular.

2.3 Torção não-uniforme

2.3.1 Momento torsor elástico

A torção não-uniforme caracteriza-se por um empenamento variável ao longo do eixo da peça. Embora a teoria da torção não-uniforme possa ser apresentada para uma secção arbitrária, é aqui introduzida considerando uma secção em I duplamente simétrica. A força responsável pelo empenamento variável ao longo do comprimento da barra é designada por bi-corte V_f , devido à sua presença em

ambos os banzos. A força bi-corte origina tensões normais segundo a direção do eixo da barra, tais que têm o valor máximo de σ_y .

A força V_f e o momento torsor T estão representados na figura 2.9 estando relacionados através do equilíbrio de forças.

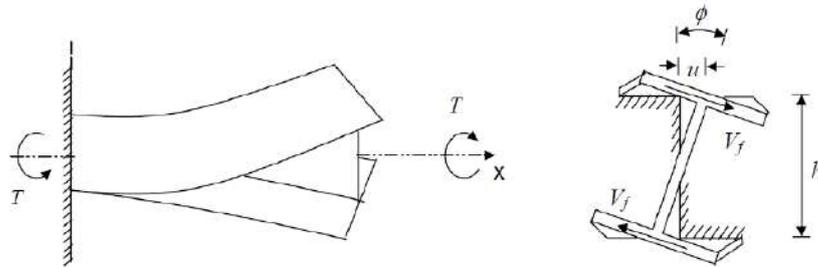


Figura 2.9: Equilíbrio de forças do bi-corte e momento torsor não-uniforme (fonte: Naraynan)

Observando a figura 2.9, momento torsor T é dado através:

$$T_{NU} = V_f h, \quad (2.27)$$

onde h representa a distância entre as linhas médias dos banzos.

O momento torsor M_f e o bi-corte V_f relacionam-se através de uma função linear em função de x , sendo que num elemento do banzo de comprimento dx , a relação M_f e V_f é dada por:

$$V_f = -\frac{dM_f}{dx}, \quad (2.28)$$

onde M_f é dado por

$$M_f = EI_f \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (2.29)$$

sendo E o módulo de elasticidade, I_f o momento de inércia dos banzos em relação ao eixo vertical da secção e $u = \phi \frac{h}{2}$ o deslocamento horizontal dos banzos. Substituindo u na equação (2.29), obtemos:

$$M_f = EI_f \frac{h}{2} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = EI_f \frac{h}{2} \phi'', \quad (2.30)$$

onde ϕ representa o ângulo de rotação da secção transversal.

Substituindo a equação anterior na equação (2.27), tem-se:

$$T_{NU} = \frac{EI_f h}{2} \frac{d^3 \phi}{dx^3} = -E\Gamma \phi''' \quad (2.31)$$

onde Γ representa a constante de empenamento da secção, sendo dada por

$$\Gamma = \frac{I_f h^2}{2}, \quad (2.32)$$

para a secção analisada.

2.3.2 Momento torsor plástico

Para o calculo do momento torsor plástico não-uniforme de uma barra em consola é necessário definir o momento plástico no banzo do perfil de secção em forma de I segundo o seu eixo principal, tal que

$$M_{pf} = V_{pf} L, \quad (2.33)$$

onde V_{pf} é o esforço transverso no banzo responsável pela plastificação total da área afetada.

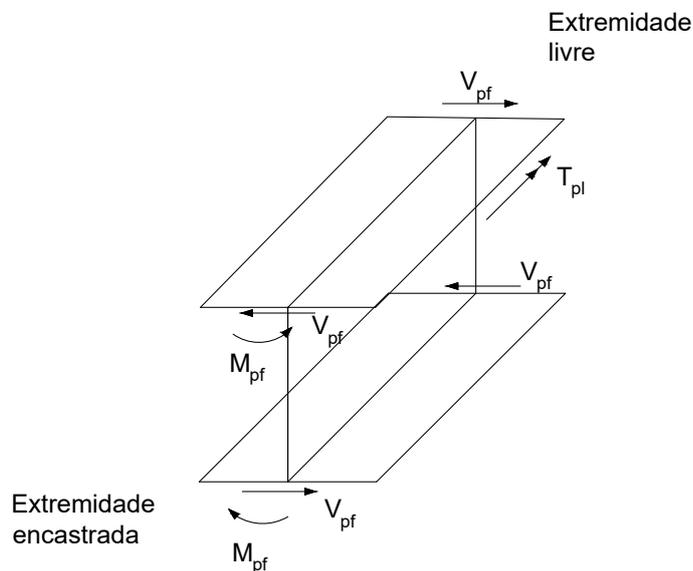


Figura 2.10: Diagrama de corpo livre de uma barra de secção em I sujeita à torção

Na figura 2.10 estão representados os esforços resultantes da aplicação de um

momento torsor na extremidade livre da peça. Analisando a figura é possível fazer o equilíbrio de forças entre V_{pf} e T_{pl} , dado por:

$$T_{pl} = V_{pf}h \quad (2.34)$$

sendo h a distância entre as linhas médias dos banzos.

O cálculo da torção plástica não-uniforme considera a área total do banzo em cedência e que as tensões de bi-corte são nulas estando o diagrama de tensões representado na figura 2.11. Este permite analisar a distribuição de tensões no banzo, sendo o valor de M_{pf} dado por:

$$M_{pf} = \sigma_y \frac{b_f^2 t_f}{4} \quad (2.35)$$

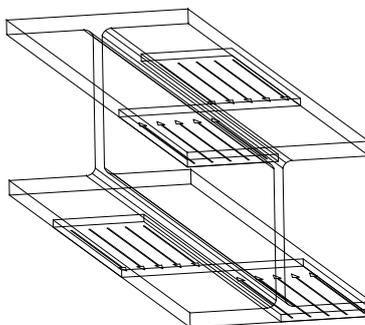


Figura 2.11: Diagrama de tensões normais no colapso

Substituindo na equação (2.35) a equação (2.33), obtem-se:

$$V_{pf} = \frac{\sigma_y b_f^2 t_f}{4L} \quad (2.36)$$

Concluindo, o valor do momento torsor plástico não-uniforme é dado por:

$$T_{plNU} = \frac{\sigma_y b_f^2 t_f}{4L} h \quad (2.37)$$

2.4 Limite Superior de carga de colapso

O limite superior para o valor de carga colapso foi criado por Merchant e Dinno (1965). No desenvolvimento deste limite foi considerada sobreposição de tensões, conseqüentemente a sobreposição de mecanismos.

Segundo Merchant o limite superior é dado pela soma simples entre o valor da torção uniforme e da torção não-uniforme.



(a) Mecanismo de torção uniforme

(b) Mecanismo de torção não-uniforme

Figura 2.12: Mecanismo de torção (adaptado de: Merchant e Dinno 1965)

No cálculo do momento torsor plástico devido à torção uniforme T_{plSV} , Merchant utilizou a teoria de *Saint-Venant* através a analogia do monte de areia, tal como já explicado nas secções antecedentes. Assim, ignorando a influência dos cantos arredondados, o valor da torção de *Saint-Venant* é dado pela equação (2.25).

No cálculo do momento torsor plástico devido à torção não-uniforme T_{plNU} , foi considerada a plastificação total dos banzos na secção de encastramento. Assim, o cálculo da torção não-uniforme é dado pela equação (2.37).

Concluindo, o valor do limite superior da resistência plástica à torção de vigas em I sujeitas à torção é dado através da seguinte expressão

$$T_{plTotal} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \frac{b_w t_w^2}{2} + \frac{\sigma_y b_f^2 t_f}{4L} h. \quad (2.38)$$

No desenvolvimento do limite superior da carga de colapso apresentado por Merchant e Dinno foi realizada uma comparação entre resultados experimentais e resultados obtidos através da proposta dos autores. Esta comparação apresenta-se na figura 2.13 e conclui-se que o valor da resistência plástica à torção é superior ao valor do momento torsor dado pela equação proposta. Assim, com esta sobre-resistência, os autores advogaram que a equação proposta pode ser utilizada no dimensionamento de perfis metálicos.

Os resultados obtidos pelos autores concluem que o colapso dá-se num regime de grandes deslocamentos devido à rotura dos banzos e não pela formação de um mecanismo plástico. Este fenómeno é explicado através do efeito de *Wagner* e do endurecimento do material.

Outros estudos foram desenvolvidos para mostrar este fenómeno.

Pi e Trahair (1995) mostraram que para pequenos deslocamentos a aproximação de Merchant podia ser assumida apesar da violação do critério de cedência. A figura 2.14 mostra a comparação entre valores obtidos através de resultados experimentais, o limite superior de Merchant e o momento torsor considerando grandes rotações.

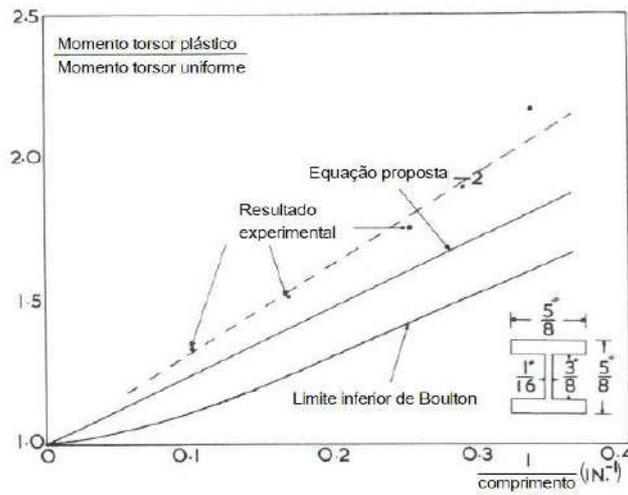


Figura 2.13: Comparação de resultados experimentais de Merchant e Dinno com a equação proposta (adaptado de: Merchant e Dinno 1965)

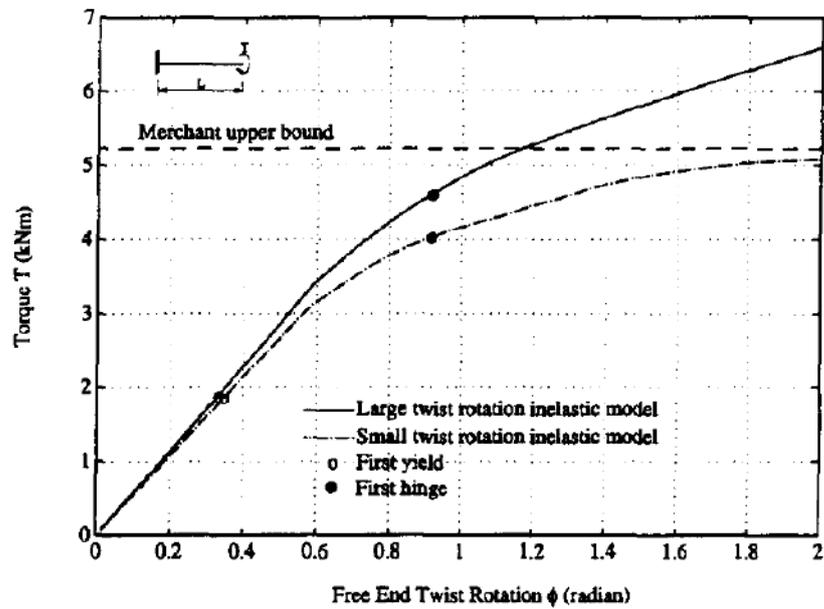


Figura 2.14: Comparação de resultados experimentais de Pi e Trahair com a equação proposta (adaptado de: Pi e Trahair 1995)

Capítulo 3

Cálculo com elementos finitos da carga de colapso

3.1 Introdução

No presente capítulo apresenta-se a metodologia de obtenção o valor de carga de colapso de um perfil metálico com secção em I ou H, encastrado e sujeito à torção, recorrendo a um programa de elementos finitos que implementa o teoremas da análise limite. O programa utilizado permite obter mapas de cores representantes das tensões, dissipações de energia e deformações nas três direções. Estes mapas serviram de base para compreensão da distribuição de tensões. Seguidamente, os valores obtidos através da implementação numérica em apreço serviram de comparação para a otimização do processo de analítico.

A obtenção da carga de colapso foi realizada recorrendo ao método numérico implementado no programa mechpy, um software desenvolvido no Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa.

O mechpy implementa numericamente, recorrendo ao método dos elementos finitos, os teoremas de análise limite. Esta tem um enorme potencial para o desenvolvimento de modelos numéricos de determinação da máxima carga suportada por uma estrutura caracterizada por um comportamento perfeitamente plástico.

O programa disponibiliza diferentes critérios para modelar a resistência do material, tais como os, de Von Mises, de Mohr-Coulomb, de Tresca e de Drucker-Prager.

O mechpy recorre a uma implementação numérica do Teorema Cinemático para a obtenção de limites superiores e uma do Teorema Estático para obtenção limites inferiores da carga de colapso.

No trabalho em apreço apenas foram considerados os limites superiores atendendo a que a implementação do Teorema Estático ainda se encontra em desenvolvimento no trabalho de doutoramento de Nuno Deusdado.

3.2 Implementação numérica aplicada à torção dos perfis metálicos

A implementação numérica do teorema de análise limite no programa mechpy tem como principal objetivo definir um valor λ tal que a carga de colapso é dada por λF , onde F representa a força exterior aplicada com tendência a provocar o colapso. O valor λ calculado é, garantidamente, um majorante da carga de colapso obtido através da implementação numérica do Teorema Cinemático. A figura 3.1 é ilustrativa da posição do valor λ em relação ao $\lambda_{colapso}$ sendo este o valor exato para o cálculo da resistência plástica máxima. A zona sombreada delimita a região admissível, sendo que a região exterior a esta é representativa da zona onde ocorre o colapso.

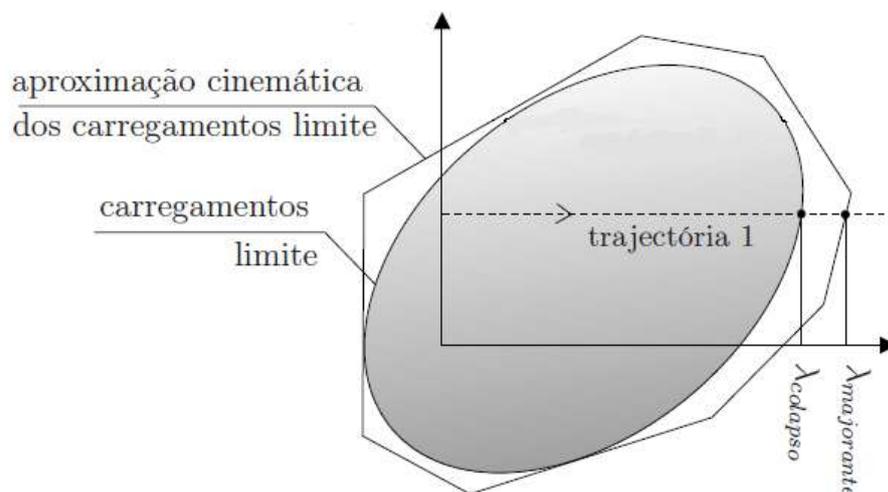


Figura 3.1: Representação do valor λ na aproximação à carga de colapso (adaptado de: Silva, 2009)

De modo a implementar numericamente o cálculo da carga de colapso é necessário definir a taxa do trabalho das forças exteriores, W_λ e a taxa do trabalho da dissipação plástica, W_D .

A taxa de dissipação plástica total define-se como o produto interno entre a velocidade de deformação e a tensão no corpo.

Considerando que o material obedece ao critério de Von Mises, define-se a função de cedência, f , como:

$$f(\sigma) = \left(\frac{1}{2} \text{tr}(\underline{s}^2) - k \right) \quad (3.1)$$

onde k é a tensão de corte de cedência obtida num ensaio de tração uniaxial e \underline{s} é o tensor da parcela deviatória das tensões, dado pela seguinte expressão:

3.2. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA APLICADA À TORÇÃO DOS PERFIS METÁLICOS 23

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (3.2)$$

sendo I o tensor identidade de 2ª ordem.

Após definição da função de cedência e considerando que o material tem plasticidade associada, determina-se a taxa de deformação plástica através de:

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p = \alpha \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \quad (3.3)$$

sendo o intervalo dos valores α responsável por garantir que o sentido da taxa de deformação plástica é o do exterior da superfície representativa da função de cedência.

Considerando que o material obedece ao critério de cedência de Von Mises, a taxa de dissipação plástica por unidade de volume \mathcal{D} , é definida por:

$$\mathcal{D}(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p) = k \sqrt{2 \text{tr}((\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p)^2)}, \quad \forall \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p \in \mathcal{C}_c \quad (3.4)$$

onde \mathcal{C}_c é um espaço auxiliar que impõe as condições de normalidade no escoamento plástico (3.3).

Consequentemente, a taxa da dissipação plástica num corpo Ω , em função de $\dot{\varepsilon}$, é dada por:

$$W_{\mathcal{D}}(\dot{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\varepsilon}) d\Omega \quad (3.5)$$

A taxa de trabalho das forças variáveis define-se pelo produto interno entre as forças de fronteira e a velocidade de deformação. No desenvolvimento da implementação numérica define-se a taxa do trabalho das forças exteriores através:

$$W_{\lambda} = \int_{\Gamma} F_{\lambda}^T \dot{u} d\Gamma \quad (3.6)$$

onde \dot{u} representa o campo de velocidades e Γ a fronteira cinemática.

Segundo um corolário do Teorema Cinemático aplicado ao presente caso, o majorante da carga de colapso, λ , resulta da seguinte equação:

$$\lambda = \frac{W_{\mathcal{D}}}{W_{\lambda}} \geq \lambda_{colapso} \Rightarrow \lambda W_{\lambda} = W_{\mathcal{D}} \quad (3.7)$$

Como a implementação do Teorema Cinemático define limites superiores para a carga de colapso, o valor ótimo para λ resultará no mínimo da função.

O problema transforma-se num problema otimização definido por:

$$\text{Min} \quad \lambda(\dot{u}, \dot{\varepsilon}) = W_{\mathcal{D}}(\dot{\varepsilon}) \quad (3.8)$$

com restrições definidas por:

$$W_{\lambda}(\dot{u}) = 1 \quad (3.9a)$$

$$\dot{\varepsilon} = B\dot{u} \quad (3.9b)$$

$$\dot{\varepsilon} \in \mathcal{C}_c \quad (3.9c)$$

$$\dot{u} = 0 \text{ em } \Gamma_u \quad (3.9d)$$

A condição (3.9a) impõe uma normalização da taxa do trabalho das forças variáveis permitindo calcular o valor ótimo de λ , evitando-se a necessidade de testar diversos parâmetros de carga. Esta simplificação não influencia o resultado final pois este vem refletido no parâmetro λ .

A condição (3.9b) impõe a compatibilidade cinemática entre as velocidades e as taxas de deformações, campos definidos *a priori* de forma independente.

A condição (3.9c) restringe as taxas de deformações admissíveis no seu domínio.

A condição (3.9d) garante a compatibilidade na fronteira cinemática.

A matriz B é um operador diferencial de compatibilidade utilizado para problemas tridimensionais definido por:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{\partial}{\partial y} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} & \cdot & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

O cálculo do minimizante da definição 3.8 recorre ao método Lagrangeano Aumentado.

Em consequência, as condições (3.9a) e (3.9b) são introduzidas na função objetivo 3.8 através de multiplicadores de Lagrange, sendo a segunda condição reforçada com uma penalização quadrática dando origem à seguinte expressão:

$$\text{Min} \quad \mathcal{L}(\dot{u}, \dot{\varepsilon}, \mu, \mu_{\lambda}) = \int_{\Omega} \mathcal{D}(\dot{\varepsilon}) d\Omega + \mu_{\lambda}(1 - W_{\lambda}) + \int_{\Omega} \mu^T (B\dot{u} - \dot{\varepsilon}) d\Omega + \frac{r}{2} \int_{\Omega} |B\dot{u} - \dot{\varepsilon}|^2 d\Omega$$

sujeito a: $\dot{\varepsilon} \in \mathcal{C}_c$

onde μ_{λ} é o multiplicador de Lagrange.

3.3 Metodologia

A metodologia utilizada baseia-se em três passos:

1. Definição geométrica e discretização;
2. Processamento;
3. Visualização.

3.3.1 Definição geométrica e discretização

Caracterização dos perfis estudados

A definição dos modelos considerados foi baseada na relação altura-largura, em que num primeiro modelo considerou-se um perfil mais esbelto, Perfil A, e no segundo modelo um perfil mais robusto, Perfil B, figura 3.2. Ao considerar estes dois modelos podemos analisar a influência da proporção altura-largura no cálculo da carga de colapso. Na caracterização do material foi considerado um aço S275 seguindo o critério de cedência de Von Mises.

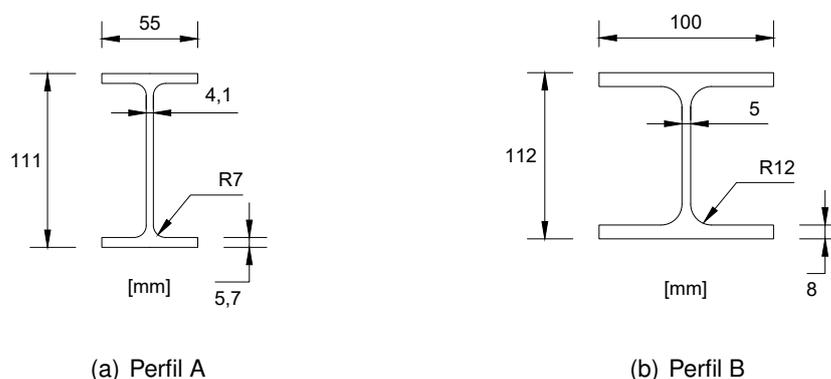


Figura 3.2: Dimensões das secções transversais utilizadas no estudo de caso

Na dissertação o Perfil A e o Perfil B considerados foram analisados através da variação do seu comprimento. Assim, de modo a analisar a influência da carga de colapso em função do comprimento da peça foram consideradas peças com vãos de 200, 500, 1000, 2000 e 5000 milímetros.

Modelação

A definição geométrica e introdução das condições limite do problema foram realizadas através do programa gmsht [3]. Este software permite uma primeira discretização de elementos finitos em modelos tridimensionais.

A malha criada no gmsht é constituída por hexaedros com dimensões variáveis nas três direções. Assim, com o objetivo de serem definidos um mínimo dois elementos na espessura das paredes do perfil, foram consideradas fixas as dimensões dos mesmos no plano de corte da secção transversal, variando-se a terceira dimensão na direção do eixo da peça. De modo a garantir a convergência do processo foram realizados cálculos fazendo variar a quantidade e dimensão dos elementos finitos discretizados.

Para a aplicação do momento torsor, foi considerado um comprimento extra, segundo o eixo longitudinal do perfil, com um valor $3H$ onde foi aplicada uma carga distribuída unitária na superfície do banzo superior e uma carga equivalente de sentido oposto no banzo inferior.

Tabela 3.1: Dimensões dos elementos das malhas em mm

	Perfil A			Perfil B		
	dim_x	dim_y	dim_z	dim_x	dim_y	dim_z
Malha I	2.0	2.8	90	2.5	4	90
Malha II	2.0	2.8	45	2.5	4	45
Malha III	2.0	2.8	20	2.5	4	20
Malha IV	2.0	2.8	10	2.5	4	10

A limitações computacionais restringiram o uso das diferentes malhas consoante o comprimento do vão da peça. Na tabela seguinte são indicadas as malhas utilizadas para cada comprimento L .

Tabela 3.2: Mapa de malhas consideradas em função do vão da peça

L (m)	Perfil A					Perfil B				
	0.2	0.5	1	2	5	0.2	0.5	1	2	5
Malha I	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Malha II	x	x	x	x		x	x	x	x	
Malha III	x	x	x			x	x	x		
Malha IV	x					x				

3.3.2 Processamento

A realização do cálculo da carga de colapso através do mechpy requer um processo acessório de discretização dos elementos previamente definidos. Assim, o programa através do módulo *convert* transforma cada hexaedro da malha em 24 tetraedros (ver figuras 3.3 e 3.4). Tal como referido no subcapítulo 3.2 o campo de velocidades e campo de deformações são grandezas fundamentais para o cálculo. Deste modo, o campo de velocidades é aproximado através de funções quadráticas com recurso à divisão de cada aresta dos tetraedros em três nós (no centro e nos vértices). Contudo, as taxas de deformações são aproximadas por funções lineares recorrendo ao cálculo em dois nós por aresta.

3.3.3 Visualização

A visualização é realizada através do Paraview [12]. Este é um programa "open-source" o qual permite construir visualizações de análise de dados quantitativas e qualitativas. O Paraview permite visualizar modelos em 2D e 3D, tornando-se, assim, uma ferramenta fundamental para a compreensão das distribuição do campo de tensões. No presente estudo foram visualizados os campos de tensões nas diferentes direções e, também, as dissipações de

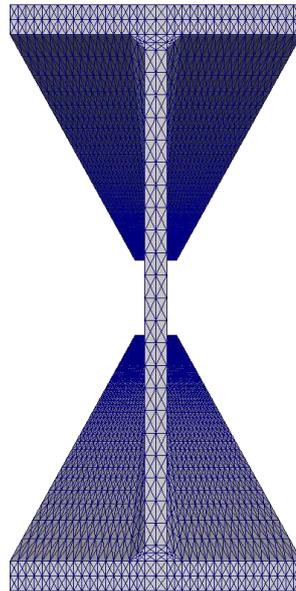


Figura 3.3: Elementos da malha na secção transversal

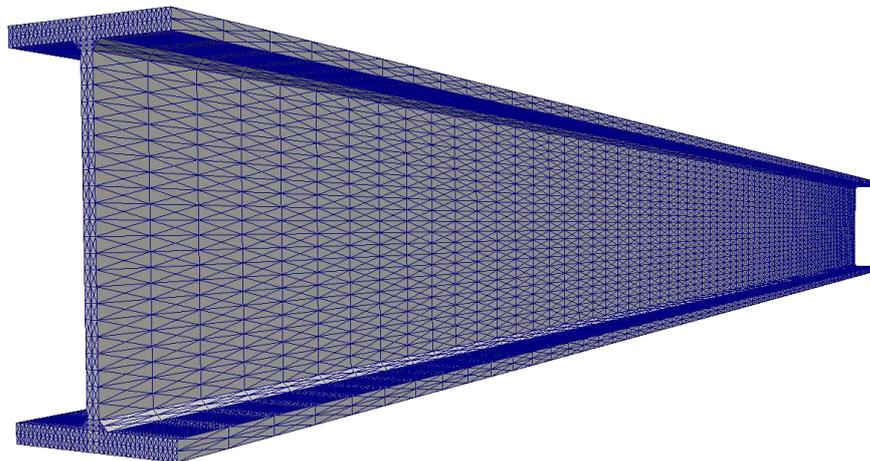


Figura 3.4: Perspetiva da malha ao longo do vão da peça

energia. Estas últimas permitem determinar a localizações das secções críticas, nomeadamente a secção de colapso.

3.4 Resultados

A confiança nos resultados obtidos através do software é essencial para o sucesso da presente dissertação, nesta perspetiva foram utilizadas várias discretizações de malhas progressivamente mais refinadas para mostrar a convergência dos resultados para a solução exata. Através da análise do gráfico 3.5 verifica-se uma tendência dos resultados para um determinado valor em função do número de graus de liberdade (GDL). Assim, podemos concluir que quanto maior for o refinamento da malha melhor será o resultado obtido, sendo este considerado o valor de carga de colapso.

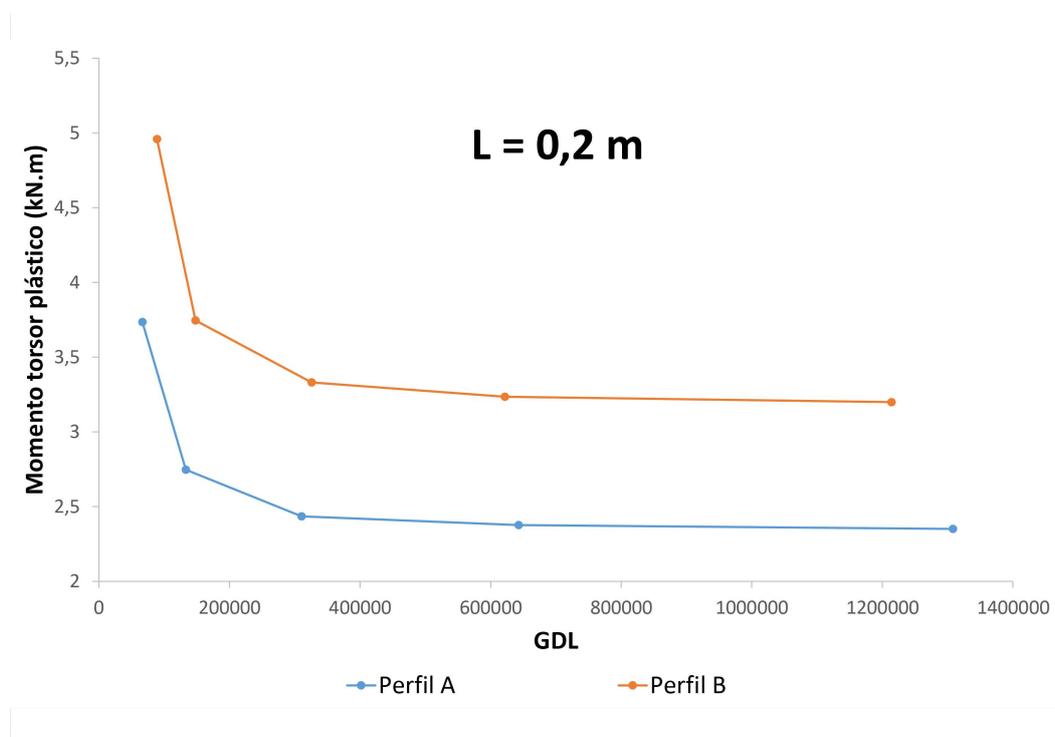


Figura 3.5: Convergência de resultados

A carga de colapso foi calculada para dois modelos: (i) o primeiro modelo considera a existência do raio de transição alma-banzo; (ii) e o segundo modelo não considera o raio de transição.

Após o cálculo da carga de colapso no programa mechpy, os valores obtidos para os modelos (i) e (ii) estão representados na tabelas 3.3 e 3.4, respetivamente.

Através do programa Paraview [®] é possível obter mapas de cores para da dissipação plástica e para as tensões em todas as direções. Os mapas de tensões foram a base de suporte na definição dos modelos de distribuição de tensões. Devido a limitações computacionais somente foram obtidos os mapas para o Perfil

A de comprimento $L = 1m$.

Nas figuras 3.6 e 3.7 encontram-se as deformadas do Perfil A quando sujeito à torção. Note-se que na figura referente à planta do perfil, afigura-se um empenamento dos banzos. Este empenamento variável ao longo do vão deve-se ao facto da peça ser solicitada à torção numa das extremidades enquanto a extremidade oposta se encontra encastrada, ou seja a peça está sujeita a um empenamento restringido.

Tabela 3.3: Tabela de resultados referentes ao modelo (i) com raio de transição

Perfil	L=0.2 m	L=0.5 m	L=1 m	L=2 m	L=5 m
Perfil A	1.057	0.781	0.649	0.569	0.521
Perfil B	3.711	2.622	2.106	1.800	1.618

Tabela 3.4: Tabela de resultados referentes ao modelo (ii) sem raio de transição

Perfil	L=0.2 m	L=0.5 m	L=1 m	L=2 m	L=5 m
Perfil A	0.933	0.690	0.566	0.492	0.447
Perfil B	3.078	2.202	1.747	1.475	1.304



Figura 3.6: Deformada da peça quando sujeita à torção (vista no plano zx)

Os mapas referentes às tensões nas direções normais, têm uma escala compreendida entre $-\frac{\sigma_{ii}}{\sigma_y}$ e $\frac{\sigma_{ii}}{\sigma_y}$. Enquanto os mapas referentes a tensões de corte, têm uma escala compreendida entre $-\frac{\sigma_{ij}}{\tau_y}$ e $\frac{\sigma_{ij}}{\tau_y}$. Esta adaptação da escala permite a comparação entre os diferentes mapas assim, como a análise da influência de cada tensão na secção considerada.

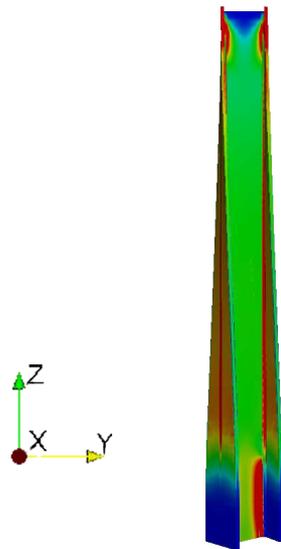


Figura 3.7: Deformada da peça quando sujeita à torção (vista no plano zy)

Secção de colapso

Inicialmente, foram consideradas as tensões na secção de colapso. Analisando a figura 3.8 concluiu-se que a rotura se encontrava a aproximadamente 5 cm da extremidade encastrada.

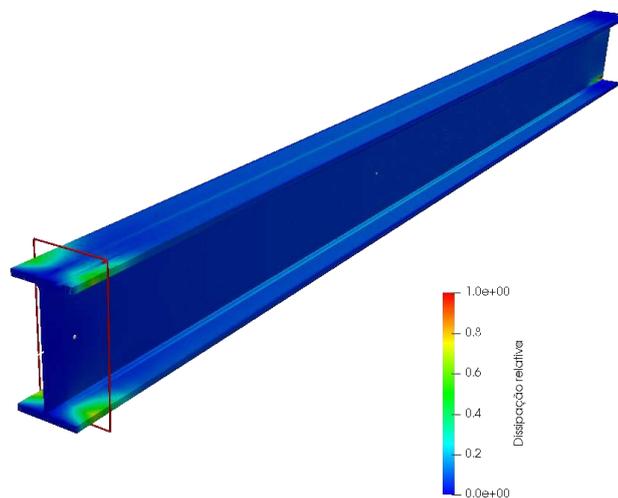


Figura 3.8: Localização do corte da secção de colapso

Analisando os mapas de cores referentes à secção de colapso (ver as figuras 3.9 a 3.13) verifica-se a elevada influência das tensões normais (direção zz). Na figura 3.14 observa-se uma maior influência da tensão de corte na zona junto à alma da

secção. A análise das tensões segundo as direções xx e yy é bastante complexa devido à sua distribuição nas facetas x e y, respetivamente.

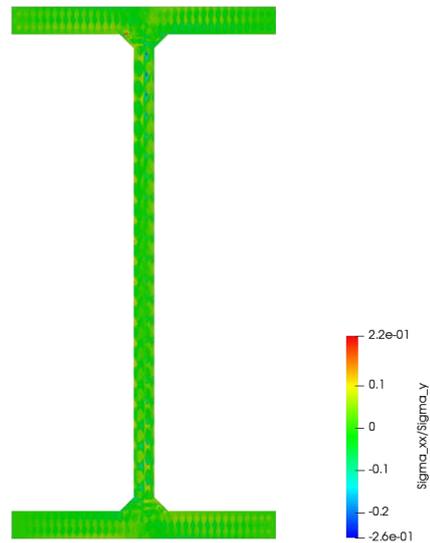


Figura 3.9: Mapa das tensões segundo a direção xx (secção de colapso)

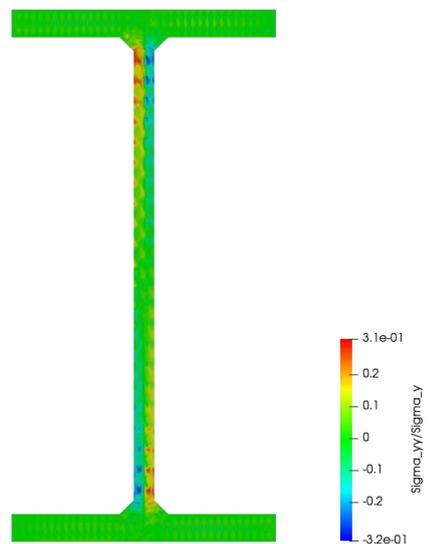


Figura 3.10: Mapa das tensões segundo a direção yy (secção de colapso)

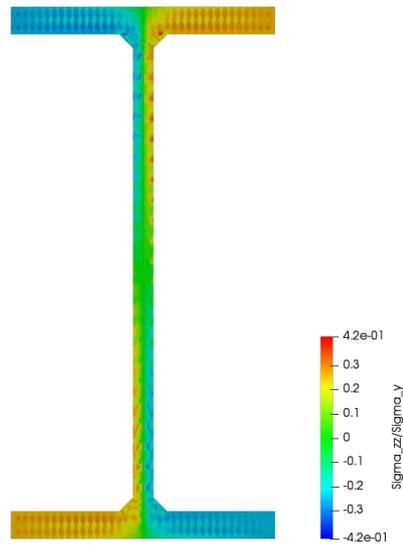


Figura 3.11: Mapa das tensões segundo a direção zz (secção de colapso)

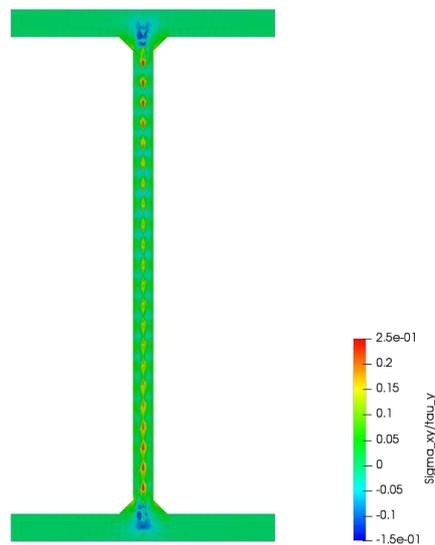


Figura 3.12: Mapa das tensões segundo a direção xy (secção de colapso)

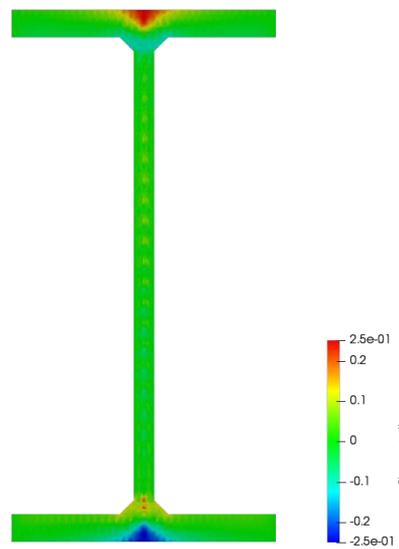


Figura 3.13: Mapa das tensões segundo a direção xz (secção de colapso)

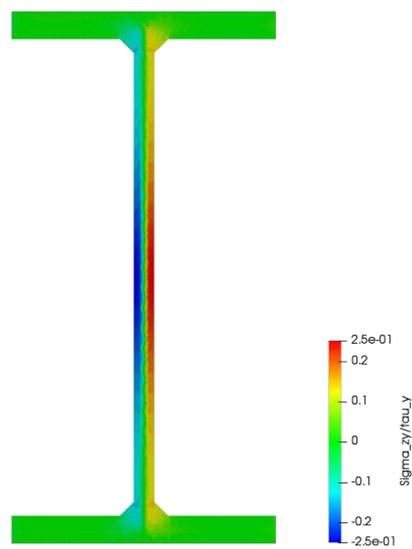


Figura 3.14: Mapa das tensões segundo a direção yz (secção de colapso)

Secção a meio vão

Na secção a meio vão, a distribuição do campo de tensões está melhor definida comparativamente com a secção de colapso. Este facto dá-se devido à menor perturbação. Assim, analisando os mapas de tensões (ver figuras 3.16 a 3.21), é possível caracterizar qualitativamente o campo de tensões. Particularmente, analisando a figura 3.18, nota-se maior influência de tensões normais na zona da linha média dos banzos, sendo praticamente nula na alma. As figuras 3.20 e 3.21 afiguram a tensão de corte em toda a secção.

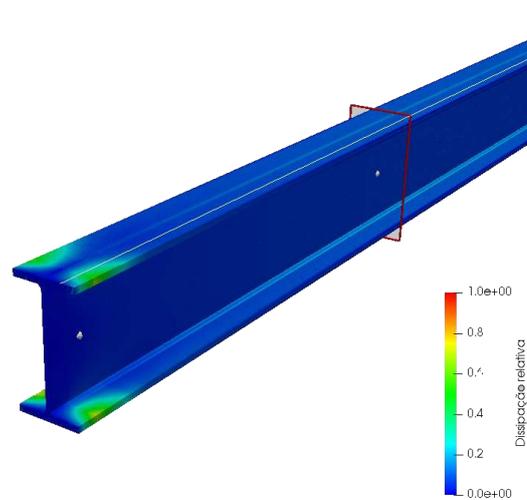


Figura 3.15: Localização do corte da secção a meio vão

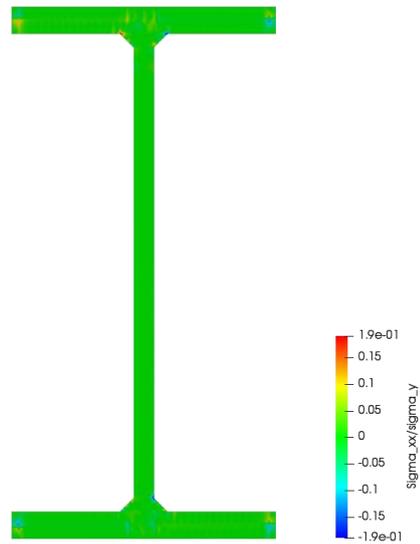


Figura 3.16: Mapa das tensões segundo a direção xx (secção a meio vão)

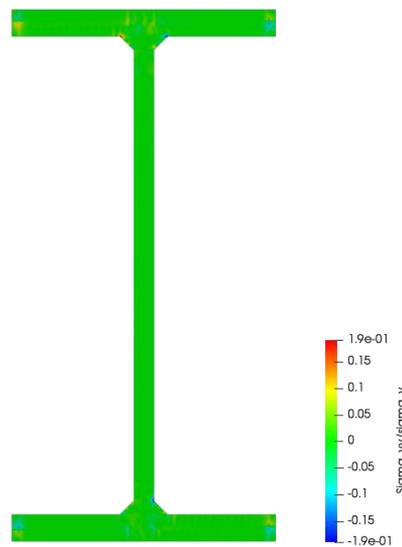


Figura 3.17: Mapa das tensões segundo a direção yy (secção a meio vão)

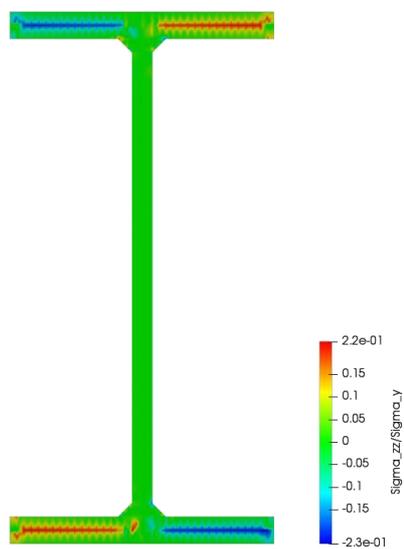


Figura 3.18: Mapa das tensões segundo a direção zz (secção a meio vão)

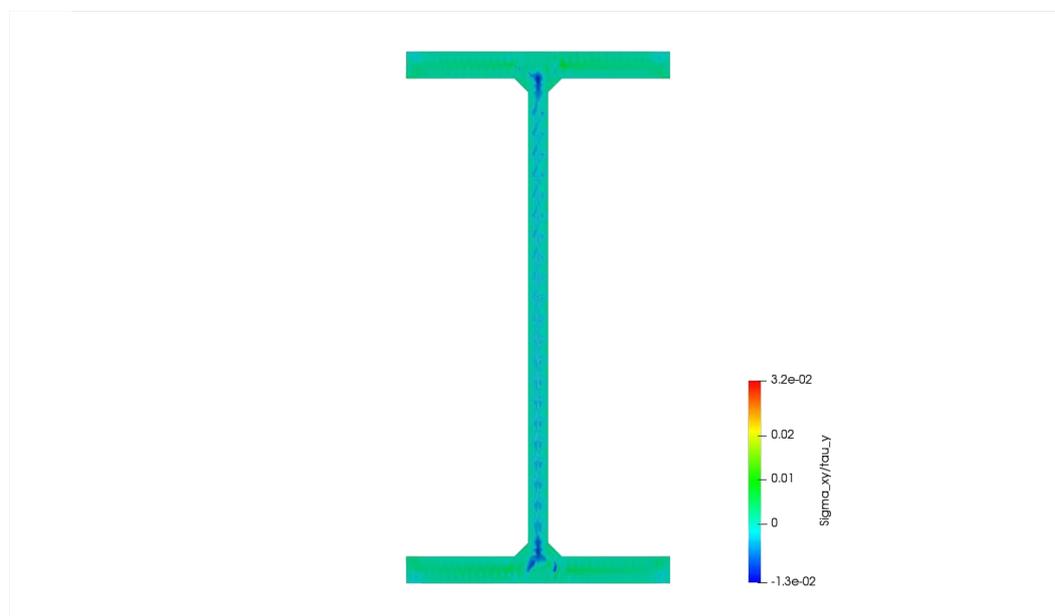


Figura 3.19: Mapa das tensões segundo a direção xy (secção a meio vão)

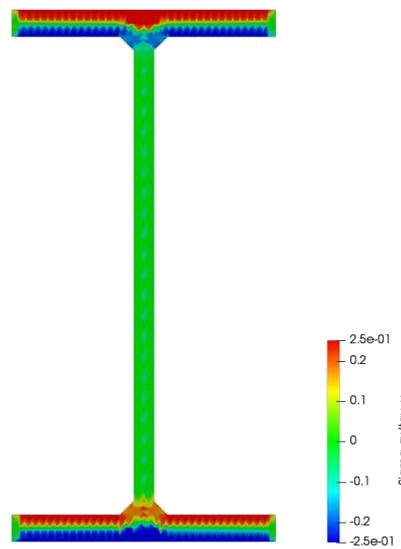


Figura 3.20: Mapa das tensões segundo a direção xz (secção a meio vão)

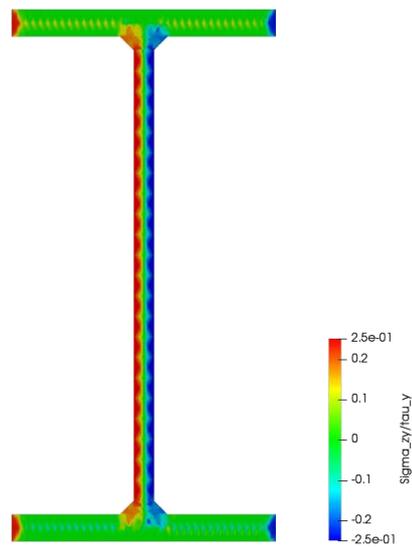


Figura 3.21: Mapa das tensões segundo a direção yz (secção a meio vão)

Capítulo 4

Cálculo analítico da resistência plástica à torção

4.1 Caracterização dos modelos de distribuição de tensões

Numa primeira abordagem foi necessário definir uma distribuição de tensões que não violasse o critério de cedência e satisfizesse "globalmente"(ao nível da secção transversal) o equilíbrio. A base de definição dos modelos de distribuição do campo de tensões são os mapas de cores obtidos através do modelo de elementos finitos apresentado no capítulo anterior. Deste modo, foram desenvolvidos dois modelos de distribuição de tensões, Modelo 1 e Modelo 2, representados pelas figuras 4.1 e 4.2, respetivamente.

Na definição de ambos os modelos foram definidas as tensões de corte referentes a cada tipo de torção (uniforme e não-uniforme).

Relativamente ao Modelo 1, foi considerada a tensão de corte de cedência em toda a secção de colapso referente à parcela da torção uniforme (ver figura 4.1.a). A parcela da torção não-uniforme está representada pela figura 4.1.b e é responsável pelo empenamento variável ao longo do vão da peça. Esta componente da torção plástica tem uma influência maioritária nos banzos tendo sido desprezada na alma, que plastifica por torção uniforme. A tensão de corte considerada na parcela da torção não-uniforme está limitada ao valor de $\tau_1 \leq 2\tau_y$, para que o critério de cedência não seja violado.

Relativamente ao Modelo 2, representado na figura 4.2, as parcelas de tensões referentes à torção uniforme e não-uniforme não foram sobrepostas. Assim, a parcela de tensões de corte relativas à torção não-uniforme é delimitada por um retângulo de dimensões $(t_f - 2\alpha t_f) \times (b_f - 2\alpha t_f)$ inserido na linha média dos banzos, sendo a restante área considerada na parcela da torção uniforme. A tensão de corte para ambas as parcelas da torção uniforme e não-uniforme é a tensão de cedência ao corte τ_y .

Paralelamente ao desenvolvimento dos modelos de distribuição de tensões, foi criada uma folha de cálculo no programa Maple [6], no qual foram realizados os cálculos para a posterior comparação com os valores obtidos através do programa mechpy. Esta avaliação, entre o cálculo numérico e o cálculo analítico, permitiu

selecionar o melhor modelo de distribuição de tensões.

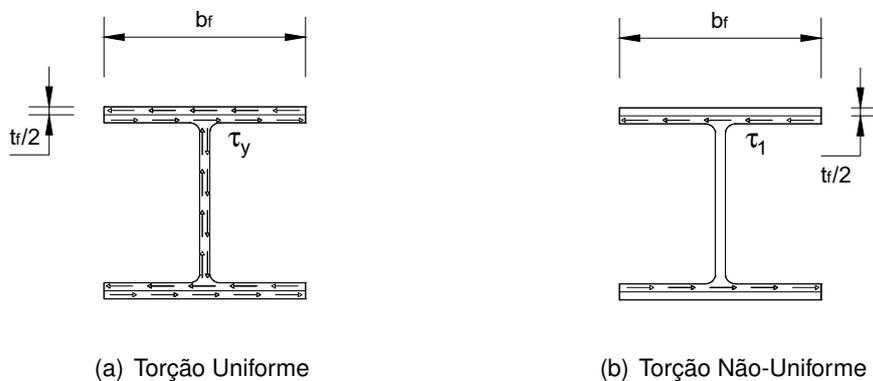


Figura 4.1: Modelo 1 - Distribuição de tensões utilizado no método analítico

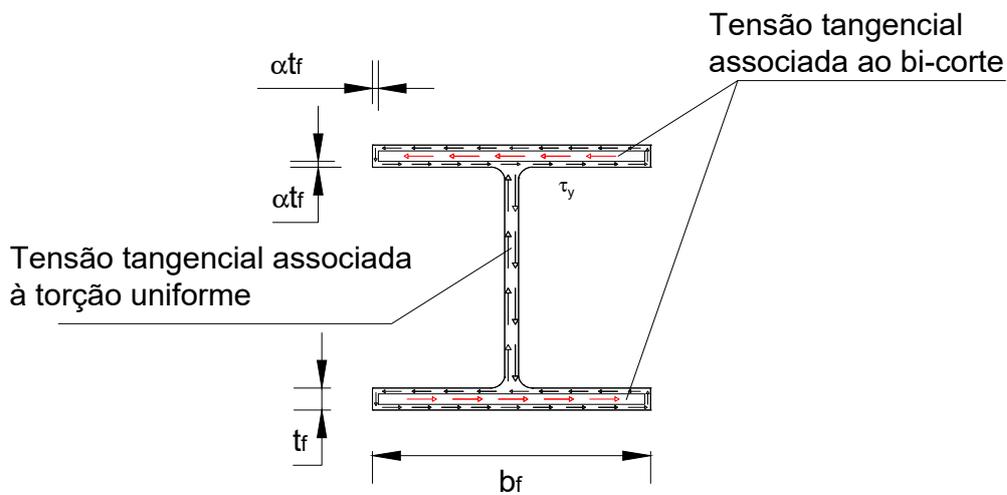


Figura 4.2: Modelo 2 - Distribuição de tensões

4.2 Cálculo de T_{plSV}

O cálculo da torção uniforme em ambos os modelos foi realizado com recurso às expressões (2.25) e (2.26).

Modelo 1

Considerando a parcela de tensões definidas para o cálculo da torção uniforme no Modelo 1 de distribuição de tensões, a expressão para o cálculo da torção uniforme plástica é dada por:

$$T_{plSV} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left(\frac{b_w t_w^2}{2} + 2 \left(\frac{t_f^2}{6} (3b_f - t_f) \right) \right). \quad (4.1)$$

Note-se a utilização da expressão deduzida por Nadai (1931) para o cálculo da torção uniforme na alma. Esta simplificação foi adotada devido à continuidade da secção através da ligação banzo-alma.

Modelo 2

Relativamente ao Modelo 2 de distribuição de tensões, a expressão de cálculo da torção uniforme plástica vem em função de α , sendo dada por:

$$T_{plSV}(\alpha) = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} \left(2\alpha t_f^2 (2b_f - 2\alpha t_f) + \frac{8\alpha^2 t_f}{3} - 2\alpha b_f \right) + \frac{b_w t_w^2}{2} \quad (4.2)$$

4.3 Cálculo de T_{plNU}

O procedimento de cálculo do momento torsor plástico não-uniforme é diferente para os dois modelos de distribuições de tensões considerados. As subsecções seguintes contêm os procedimentos utilizados para ambos os modelos.

Modelo 1

As forças de bi-corte, V_1 , e o respetivo bi-momento, M_1 , para o Modelo 1, são calculadas através das seguintes expressões:

$$V_1 = \tau_1 b_f \frac{t_f}{2}, \quad (4.3a)$$

$$M_1 = V_1 L. \quad (4.3b)$$

É possível calcular valor de τ_1 utilizando a normalização do bi-corte e o bi-momento, tal que $v = m$, onde:

$$v = \frac{V_1}{V_p} \quad (4.4a)$$

$$m = \frac{M_1}{M_p} = \frac{V_1 L}{V_p L} \quad (4.4b)$$

e o bi-corte plástico V_p e bi-momento plástico M_p são dados por

42CAPÍTULO 4. CÁLCULO ANALÍTICO DA RESISTÊNCIA PLÁSTICA À TORÇÃO

$$V_p = \tau_y b_f \frac{t_f}{2}, \quad (4.5a)$$

$$M_p = \frac{b_f^2 t_f}{4} \frac{t_f}{2} \sigma_y. \quad (4.5b)$$

Contudo, na presente dissertação considerou-se uma sobre-resistência à torção associada ao esforço transversal normal σ_{11} e ao esforço normal longitudinal σ_{33} (Gonçalves, 2014). A comparação entre as tensões σ_{11} , σ_{33} e σ_{13} permitiram concluir que quando o valor da normalização do bi-corte é $v = 0,26$ existe um aumento da resistência ao momento plástico de aproximadamente 7,7%. Esta sobre-resistência é verificada para valores de v compreendidos entre 0 e 0,6, contudo quando $v = 0,53$ o excedente de resistência somente se verifica perto das fibras extremas dos banzos, pelo que não se consideram valores de $v \geq 0,5$.

Este aumento de resistência foi originalmente deduzido por Green, na qual resultou a seguinte expressão aproximada:

$$m = 1 + 1.23v(0.5 - v). \quad (4.6)$$

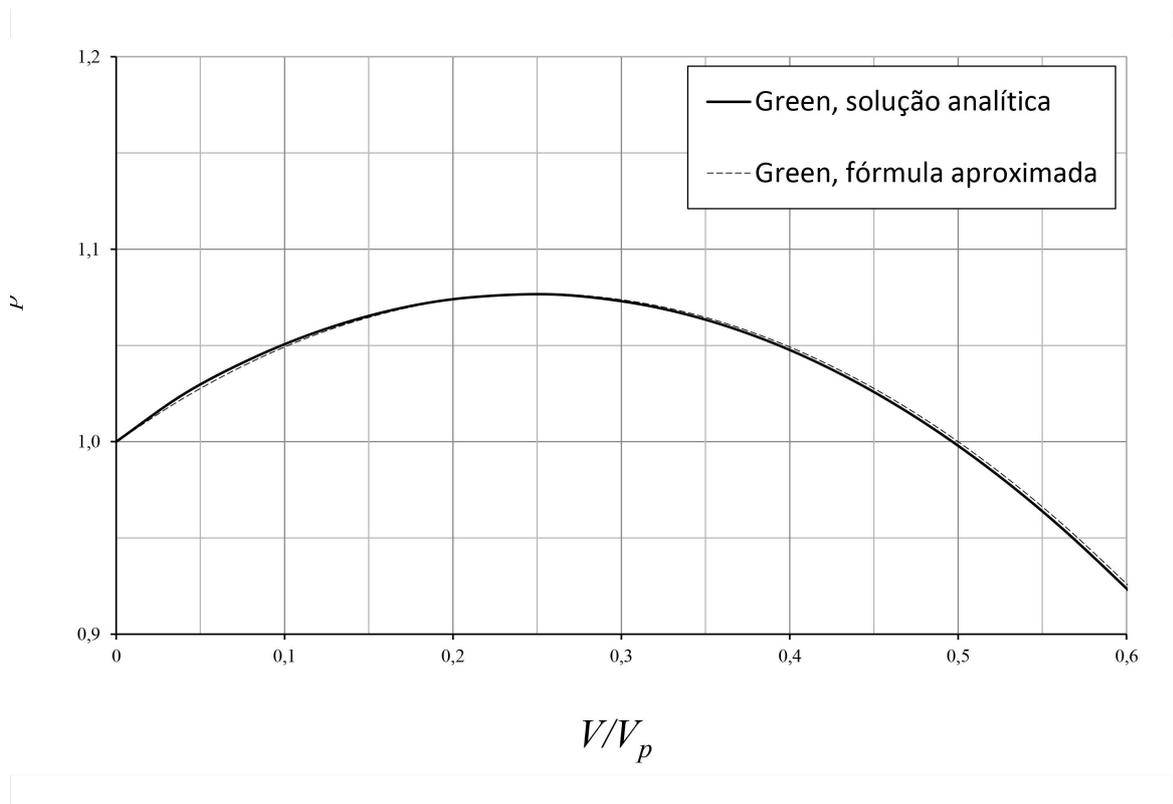


Figura 4.3: Curvas de interação M-V (adaptado de: Gonçalves, Rodrigo 2014)

A figura 4.3 compara a fórmula aproximada (4.6) e a solução analítica de Green

para carga de colapso. Note-se a forte semelhança de resultados entre ambos os métodos de cálculo. Assim, no presente estudo foi considerada a relação (4.6) para a obtenção dos valores de τ_1 para cada comprimento L .

Deste modo, temos todos os elementos para calcular a torção não-uniforme, dada pela seguinte expressão:

$$T_{pl,NU} = V_1 \bar{H}, \quad (4.7)$$

sendo \bar{H} a distância entre as linhas de ação de V_1 . Neste caso, esta distância é dada pela expressão 2.15.

$$\bar{H} = H - \frac{3}{2}t_f. \quad (4.8)$$

Finalmente, devido à sobreposição de efeitos, podemos calcular a torção plástica como sendo a soma da torção uniforme com a torção não-uniforme:

$$T_{plTotal} = T_{plSV} + T_{plNU}. \quad (4.9)$$

4.3.1 Modelo 2

No presente modelo o momento torsor não-uniforme está em função de V_2 e de α , sendo posteriormente calculado o máximo da função.

O cálculo da normalização v é representado através da seguinte função:

$$v(V_2, \alpha) = \frac{V_2}{V_p} = \frac{V_2}{\tau_y(b_f - 2\alpha t_f)(t_f - 2\alpha t_f)}. \quad (4.10)$$

A normalização do momento no encastramento da consola é dado por:

$$m = \frac{M_2}{M_p} = \frac{V_2 L}{V_p L} \quad (4.11)$$

onde $M_p = \left(\frac{b_f - 2\alpha t_f}{2}\right)^2 (t_f - 2\alpha t_f) \sigma_y$.

Seguidamente, considerando a equação (4.6), a função representante do momento torsor não-uniforme é dada por:

$$T_{pl,NU}(V_2, \alpha) = \frac{(t_f - 2\alpha t_f) \left(\frac{b_f - 2\alpha t_f}{2}\right)}{4L} m \bar{H} \sigma_y, \quad (4.12)$$

onde $\bar{H} = H - t_f$.

4.4 Comparação de Resultados

4.4.1 Modelo 1

Os resultados apresentados provêm do desenvolvimento explanado nos subcapítulos antecedentes.

Nas figuras 4.4 e 4.5 apresentam-se gráficos com os momentos torsores plásticos obtidos através do método numérico (MEF) e do método analítico.

Tabela 4.1: Tabela com os resultados de ambos os métodos e a diferença entre os mesmos para o Perfil A

L	MEF c/raio (kN.m)	MEF s/raio (kN.m)	modelo analítico (kN.m)	diferença s/raio(%)
0.2	1.057	0.933	0.730	21.74
0.5	0.781	0.690	0.533	22.79
1	0.649	0.566	0.469	17.14
2	0.569	0.492	0.438	10.99
5	0.521	0.447	0.420	6.10

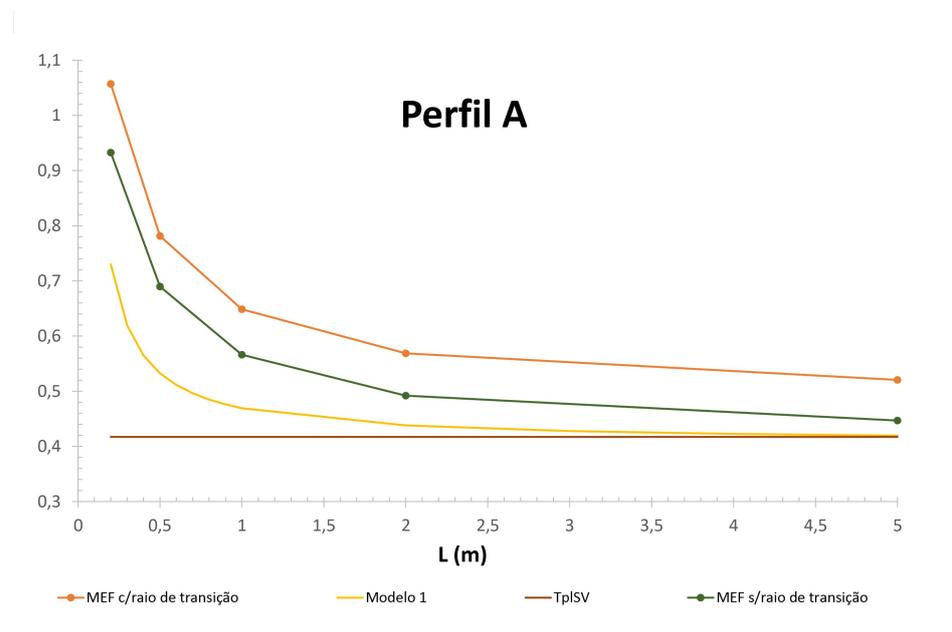


Figura 4.4: Comparação de resultados entre o método numérico e o método analítico para o Perfil A

Tabela 4.2: Tabela com os resultados de ambos os métodos e a diferença entre os mesmos para o Perfil B

L	MEF c/raio (kN.m)	MEF s/raio (kN.m)	modelo analítico (kN.m)	diferença s/raio (%)
0.2	3.711	3.078	2.660	13.60
0.5	2.622	2.202	1.755	20.33
1	2.106	1.747	1.461	16.33
2	1.800	1.475	1.319	10.60
5	1.618	1.304	1.235	5.30

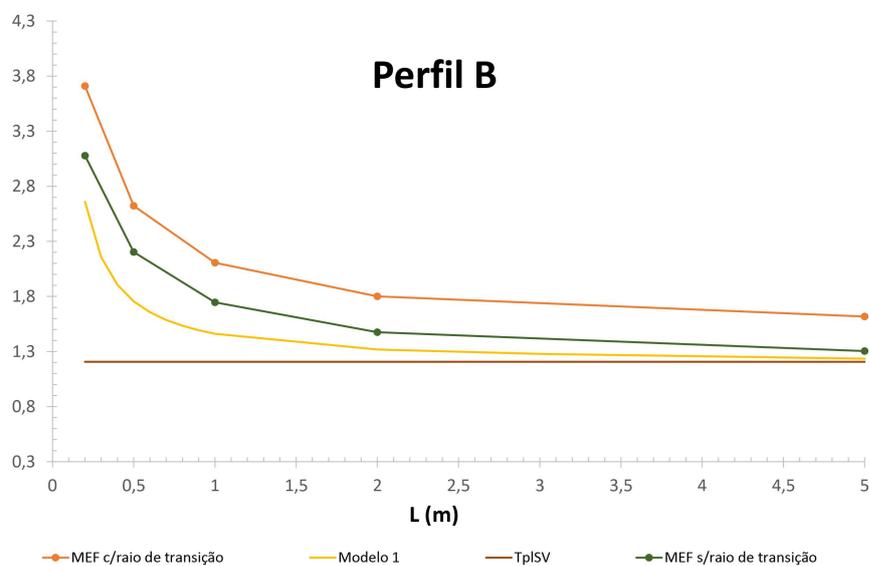


Figura 4.5: Comparação de resultados entre o método numérico e o método analítico para o Perfil B

4.4.2 Modelo 2

Os resultados da resistência à torção plástica total no presente modelo, foram calculados a partir dos máximos da função abaixo descrita:

$$T_{plTotal}(V_2, \alpha) = T_{plSV}(\alpha) + T_{plNU}(V_2, \alpha) \quad (4.13)$$

Após estabelecida a função $T_{plTotal}(V_2, \alpha)$ é necessário calcular o seu máximo através do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial T_{plTotal}}{\partial V_2} = 0 \\ \frac{\partial T_{plTotal}}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

Note-se que os valores de α estão compreendidos entre 0 e 0,5, tal que, $\alpha = 0$ representa a secção dos banzos totalmente sob a influência de torção não-uniforme e $\alpha = 0,5$ toda a secção transversal encontra-se sob a influência da torção uniforme.

Tabela 4.3: Tabela com os resultados de ambos os métodos e o erro entre os mesmos para o Perfil A

L	MEF c/raio (kN.m)	MEF s/raio (kN.m)	modelo analítico (kN.m)	diferença s/raio (%)
0.2	1.057	0.933	0.805	13.68
0.5	0.781	0.690	0.462	33.07
1	0.649	0.566	0.419	25.95
2	0.569	0.492	0.410	16.72
5	0.521	0.447	0.407	8.85

Tabela 4.4: Tabela com os resultados de ambos os métodos e o erro entre os mesmos para o Perfil B

L	MEF c/raio (kN.m)	MEF s/raio (kN.m)	modelo analítico (kN.m)	diferença s/raio (%)
0.2	3.711	3.078	3.270	6.24
0.5	2.622	2.202	1.526	30.70
1	2.106	1.747	1.259	27.94
2	1.800	1.475	1.199	18.76
5	1.618	1.304	1.183	9.31

4.4.3 Comparação entre modelos

Analisando os gráficos 4.8 e 4.9 de comparação de modelos, afigura-se um andamento do traçado do modelo 1 com maior semelhança em relação ao traçado originado através do modelo de elementos finitos.

Comparando o andamento do traçado do modelo de elementos finitos e andamento do traçado do limite superior representados nos gráficos conclui-se que o traçado de *Merchant* é efetivamente um limite superior para o valor da carga

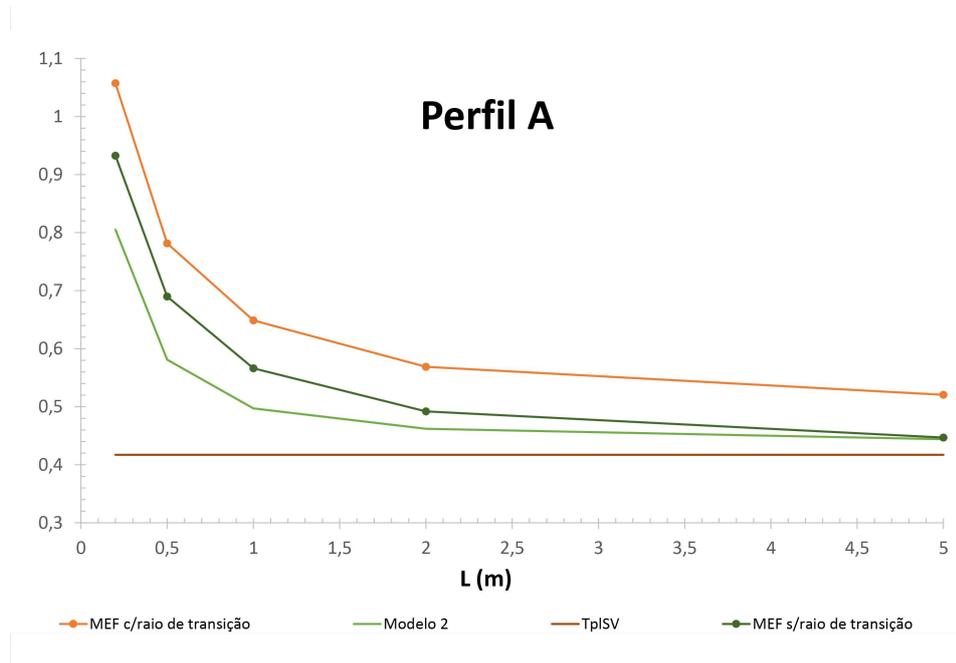


Figura 4.6: Comparação de resultados entre o método numérico e o método analítico para o Perfil A

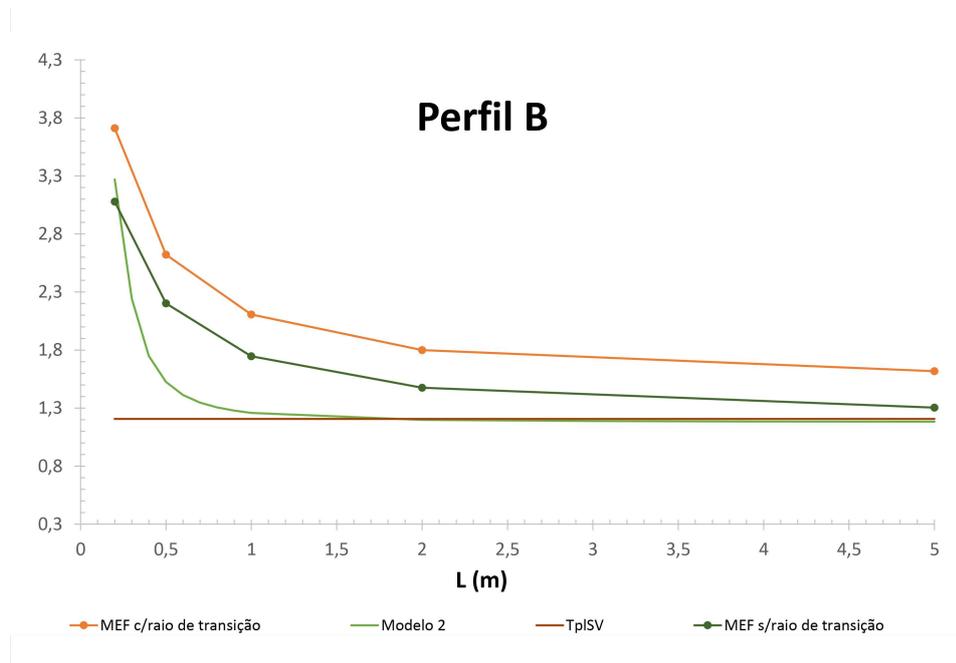


Figura 4.7: Comparação de resultados entre o método numérico e o método analítico para o Perfil B

de colapso. Este facto, reforça os resultados apresentados por Merchant e Dinno (1965) e Pi e Trahair (1995).

Note-se que todos os modelos utilizados tendem para o valor do momento torsor uniforme T_{plSV} à medida que L vai aumentando.

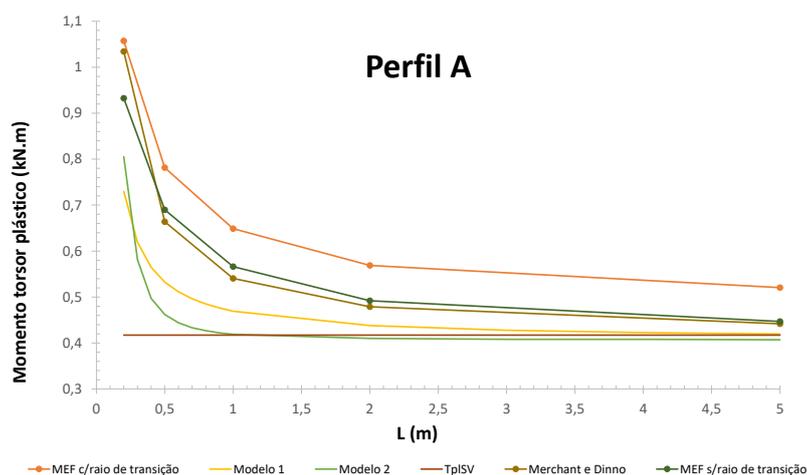


Figura 4.8: Comparação de resultados entre o método numérico, método analítico (ambos os modelos), *Merchant Upper Bound* para o Perfil A

Os gráficos 4.10 e 4.11 mostram que para comprimentos pequenos o modelo 2 de distribuição de tensões tem uma menor diferença de resultados em relação ao valor de carga de colapso obtido através do método de elementos finitos comparativamente com o modelo 1. No plano geral, o modelo 1 fornece com melhores resultados.

Relativamente aos os valores de carga de colapso obtidos através *Merchant upper bound* em relação aos valores obtidos através do método de elementos finitos para um modelo sem raio de transição afigura-se uma diferença mínima. Contudo, os valores deste método violam o critério de cedência.

4.5 Conclusão

Em primeiro lugar, os resultados obtidos com o programa de elementos finitos confirmam que a resistência à torção de consolas com secção em I e sujeitas a um momento torsor aplicado na extremidade é superior à expressão proposta por Merchant e Dinno quando se consideram os raios de transição banzo-alma. Contudo, quando esse raio não é considerado, a resistência reduz aproximadamente 15 % e torna-se praticamente coincidente com a obtida com a referida expressão. Estes resultados mostram assim que, pelo menos para o

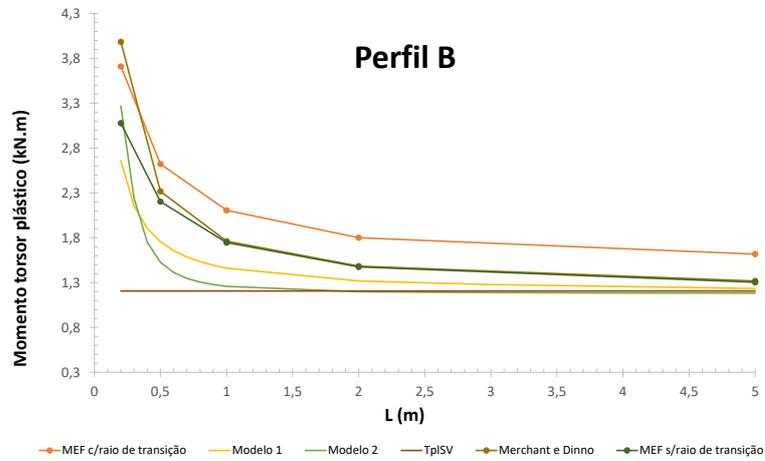


Figura 4.9: Comparação de resultados entre o método numérico, método analítico (ambos os modelos), *Merchant Upper Bound* para o Perfil B

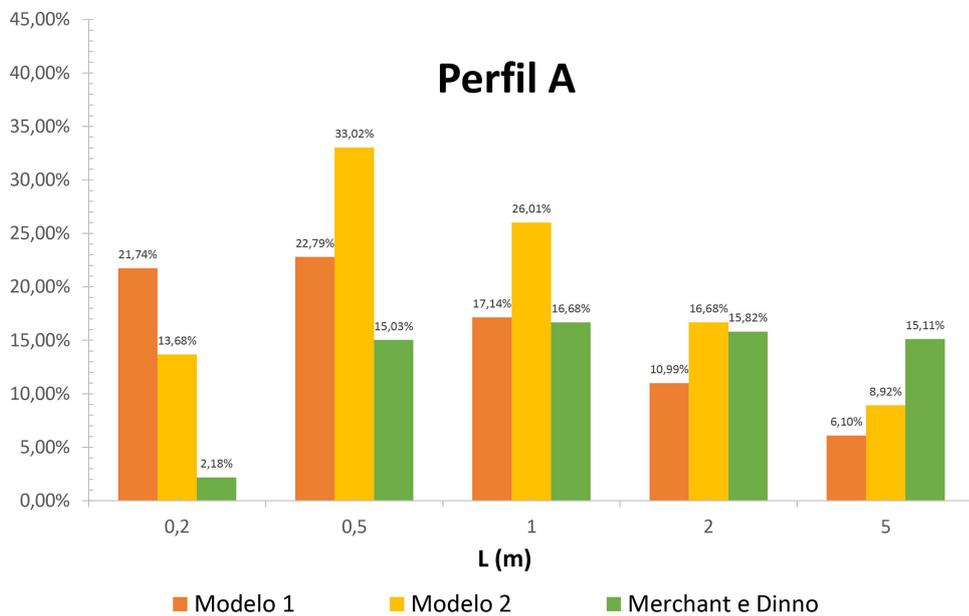


Figura 4.10: Diferença entre modelo 1, 2 e do *Merchant Upper Bound* face à implementação numérica no Perfil A

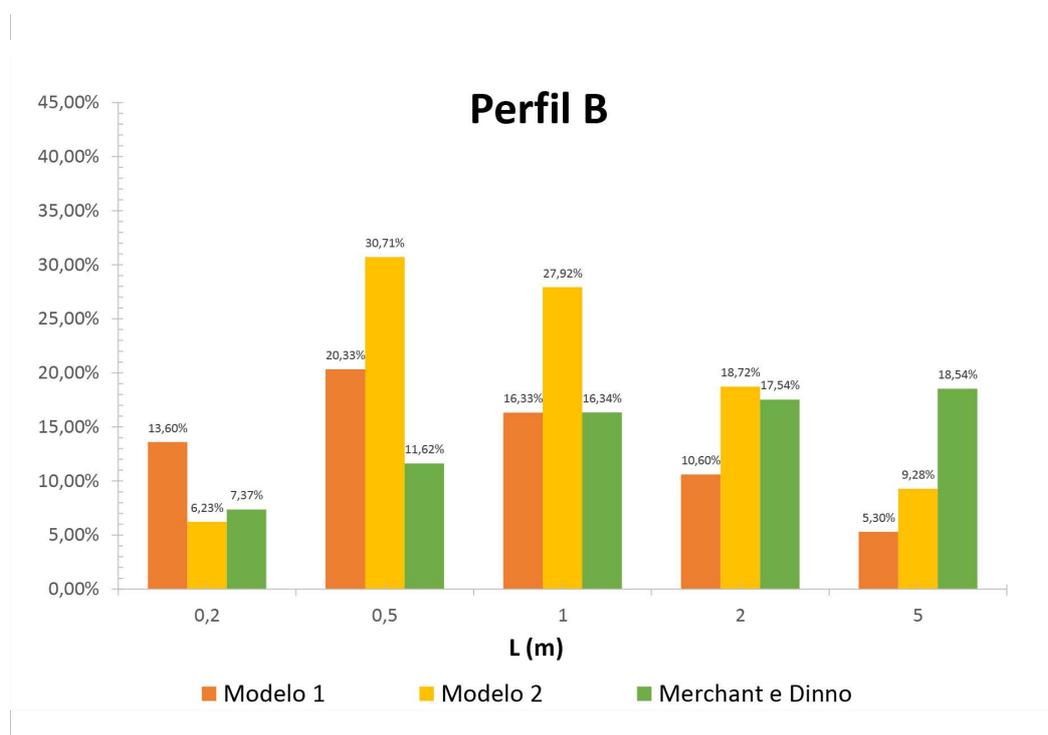


Figura 4.11: Diferença entre modelo 1, 2 e do *Merchant Upper Bound* face à implementação numérica no Perfil B

caso estudado, a resistência à torção uniforme e não-uniforme pode ser somada. Para além disso, observou-se que o momento torsor não-uniforme apenas tem influência considerável para barras com comprimentos relativamente reduzidos. Com o objetivo de tentar compreender o fenómeno descrito no parágrafo anterior, propuseram-se dois modelos simples, que não violam o critério de cedência e são equilibrados ao nível da secção. Em particular, um dos modelos baseia-se na observação dos campos de tensões obtidos com os modelos de elementos finitos. Apesar de estes modelos fornecerem cargas de colapso algo inferiores às obtidas com o método dos elementos finitos, mostram que a resistência à torção envolve uma combinação dos dois mecanismos de transmissão de torção.

4.6 Desenvolvimentos Futuros

Atendendo à existência de margem de melhoria de resultados face aos valores obtidos através da modelação de elementos finitos, podem-se desenvolver as seguintes frentes de trabalho:

- Na presente dissertação, o modelo utilizado no programa de mechpy somente contém dois elementos na espessura da secção. A melhoria do modelo através do aumento do número de elementos deverá definir com maior rigor os campos de tensões e, com isso, melhorar os modelos de distribuição de tensões propostos;

- Apesar da soma algébrica dos valores de momento torsor para torção uniforme e não-uniforme ter sido considerada satisfatória na obtenção da resistência à torção de uma barra com secção em I com empenamento restringido, é fundamental estudar outras secções transversais, condições de apoio e carregamento, com o fim de justificar este método.

Referências bibliográficas

- [1] Boulton, N.: *Plastic twisting and bending of an I-beam in which the warp the warp is restricted*. Pergamon Press Ltd., 4:491–502, 1962.
- [2] Dinno, K. e Merchant W.: *A procedure for calculating collapse of I-sections under bending and torsion*. The Structural Engineer, 43(7):219–221, 1965.
- [3] Geuzaine, C. e Remacle J.F.: *Gmsh*, 2009.
- [4] Gonçalves, R., Coelho T. e Camotim D.: *On the plastic moment of I-sections subjected to moderate shear forces*. Thin-Walled Structures, 78:138–147, 2014.
- [5] Lubliner, J.: *Plasticity Theory*. Nova Iorque, 1990.
- [6] Maplesoft: *Maple 2017*. Canada.
- [7] Nadai, A.: *Plasticity: a mechanics of the plastic state of matter*. Nova Iorque, 1931.
- [8] Neto, E. e Costa H.: *Tensões Tangenciais na Torção Uniforme*. Escola Politécnica da USP, 2016.
- [9] Osório, M.: *Estudo da Resistência Plástica de Perfis de Aço com Secção em C*. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, 2014.
- [10] Pi, Y. e Trahair N.: *Inelastic Torsion of Steel I-Beams*. Journal of Structural Engineering, 121(4):609–620, abril 1995.
- [11] Sadd, M.: *Elasticity Theory, Applications and Numerics*. USA, 2009.
- [12] Sandia National Laboratory, Kitware Inc, Los Alamos National Laboratory: *Paraview 4.4*, 2015.
- [13] Silva, M.: *Implementação Numérica Tridimensional do Teorema Cinemático da Análise Limite*. Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, 2009.

Apêndice A

Gráficos referentes ao Modelo 2

No presente anexo encontram-se os gráficos representativos das funções $T_{plTotal}(V_2, \alpha)$ utilizada no Modelo 2 proposto para a distribuição de tensões.

Perfil A

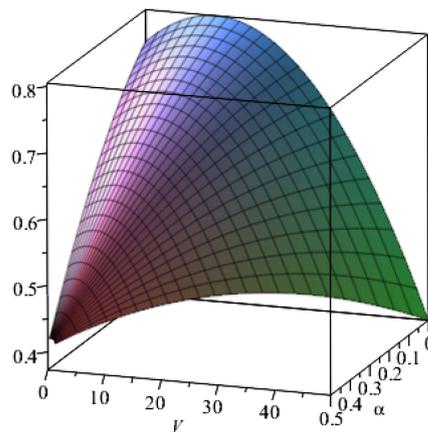


Figura A.1: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 0, 2m$

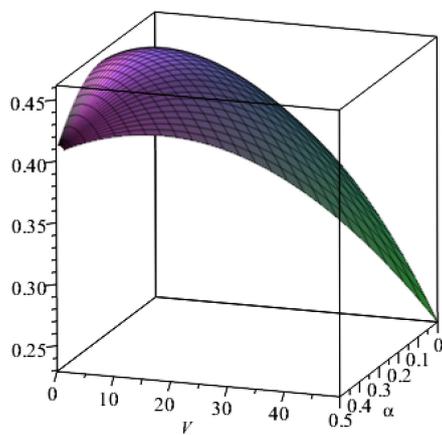


Figura A.2: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 0,5m$

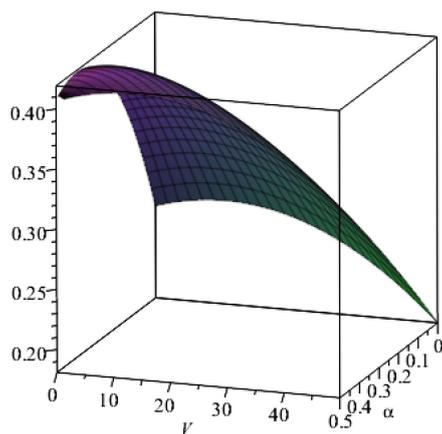


Figura A.3: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 1m$

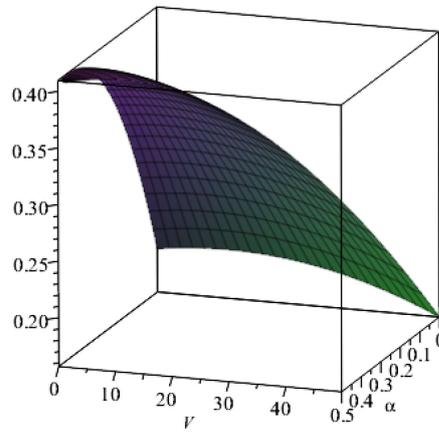


Figura A.4: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 2m$

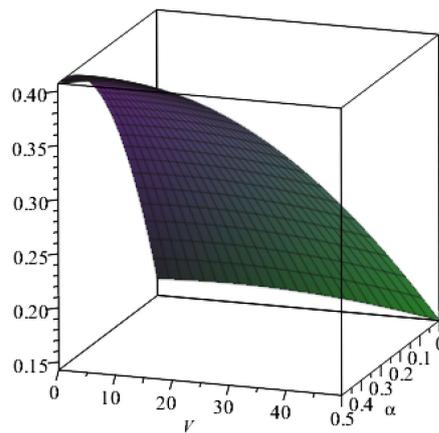


Figura A.5: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil A, com $L = 5m$

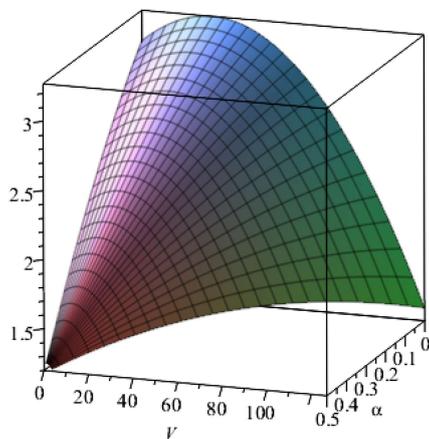
Perfil B

Figura A.6: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 0,2m$

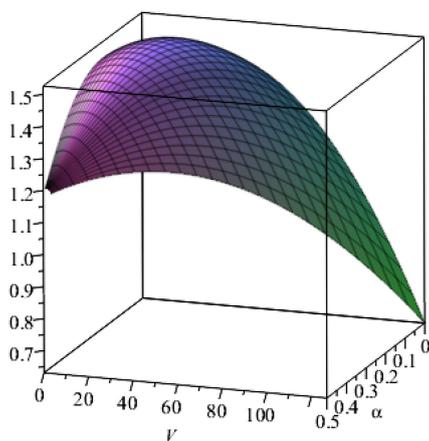


Figura A.7: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 0,5m$

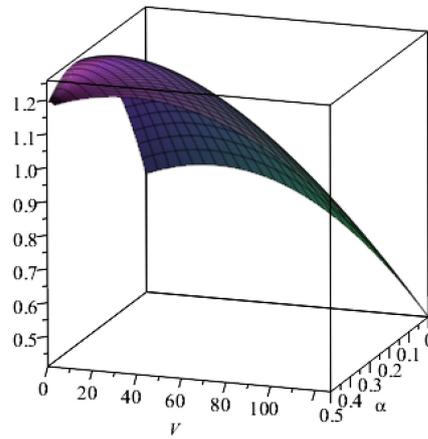


Figura A.8: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 1m$

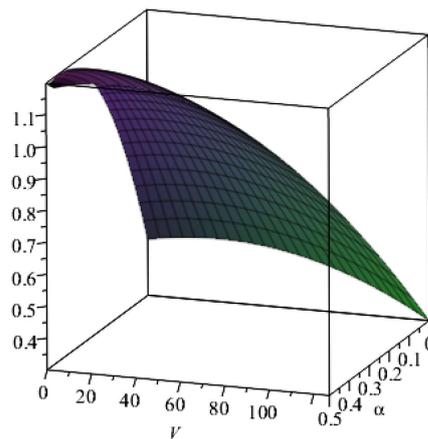


Figura A.9: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 2m$

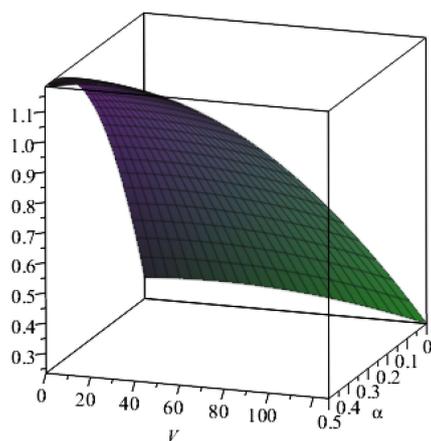


Figura A.10: Gráfico da função $T_{plTotal}$ referente ao Perfil B, com $L = 5m$