

# Tábuas de Mortalidade e Métodos de Provisão de Sinistros

Liliana Raquel Cunha Borges

2.º Ciclo

Departamento de Matemática

2018

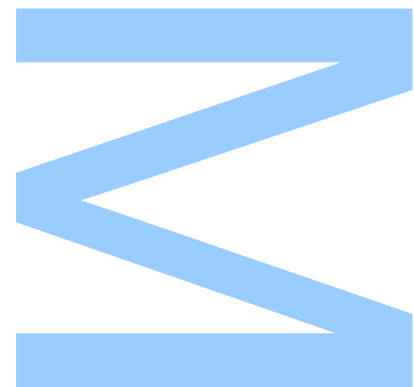
## **Orientador**

Joaquim Fernando Pinto da Costa, Professor

Auxiliar, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

## **Orientador de Estágio**

Filipe Alexandre Gonçalves, Ageas Portugal - Companhia de Seguros S.A.



**U. PORTO**

**FC** FACULDADE DE CIÊNCIAS  
UNIVERSIDADE DO PORTO

Todas as correções determinadas pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

**S**

S

S

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus pais por tudo pois sem eles nada disto seria possível. Obrigado por me apoiarem e sempre terem demonstrado orgulho em mim. Ao meu irmão porque sempre esteve lá e acreditou em mim.

Ao Dr. Luís Maranhão por ter tornado possível a realização deste estágio, pela disponibilidade que sempre demonstrou para qualquer tipo de esclarecimento e pela experiência que me permitiu adquirir. Ao Filipe Gonçalves por toda a orientação, ajuda e partilha de conhecimento. Também a toda a equipa da Ageas que me acolheu.

Ao Prof. Joaquim Costa pela orientação prestada e pelas correções deste trabalho.

A todos os meus amigos que acompanharam todo o meu percurso. À Patrícia Oliveira por ser a minha companheira de todas as horas, por mostrar que, quando tudo parecia perdido, nós conseguiríamos alcançar os nossos objetivos e, mesmo estando longe nestes dois últimos anos, esteve sempre presente. À Patrícia Reis e ao Ricardo por estarem lá em todos os momentos. À Cris e à Bia por me acompanharem neste aventura do mundo universitário. À Luana e à Flávia por serem as melhores companheiras de casa. À Rita, São, Joana, Raquel, Inês, Ana Rita, Ana, Margarida, João, Guilherme...por serem incríveis e especiais.



# Resumo

Atualmente é necessário analisar a esperança média de vida que vem crescendo ao longo dos anos. Assim são construídas tábuas de mortalidade onde constam dados, tais como, a taxa de mortalidade e a esperança média de vida. O objetivo é prever, através de certos métodos como por exemplo, o método de Lee-Carter, esperanças médias de vida para os anos futuros de modo a assegurar a posição financeira de uma companhia de seguros.

Também a provisão de sinistros é de extrema importância numa companhia de seguros pois esta representa grande parte do passivo das seguradoras do ramo não vida. Assim são estudados diversos métodos com o objetivo de estimar esta provisão. Estes métodos dividem-se em dois grupos: Os métodos determinísticos, tal como o Chain Ladder, que estimam reservas (ou provisões) pontuais, sem considerar qualquer variabilidade e os métodos estocásticos, tais como, o método de Mack e o Bootstrap, que consideram essa variabilidade. É também considerado o método de Munich Chain Ladder que relaciona pagamentos e cargas (ou custos).

Por fim é feito um breve estudo da distribuição log-normal com o objetivo de estimar a média e o desvio-padrão conhecendo apenas dois valores correspondentes a dois percentis distintos.

**Palavras-chave:** Tábuas de mortalidade, Taxa de mortalidade, Esperança média de vida, Método de Lee-Carter, Triângulos Run-off, Provisão de Sinistros, Método Chain Ladder, Método de Bootstrap, Método de Mack, Método de Munich Chain Ladder, Distribuição Log-Normal



# Abstract

Nowadays it is necessary to analyze life expectancy which has been growing over the years. Mortality tables are thus constructed which record data such as mortality rate and life expectancy. The aim of predicting, by certain methods such as the Lee-Carter method, life expectancy for future years in a manner as to ensure the financial position of an insurance company.

The claim's provision is of extreme importance in an insurance company as this represents a large part of the liabilities of non-life insurers. Thus, several methods are studied with the objective of estimating this provision. These methods are divided into two groups: Deterministic methods, such as the Chain Ladder, which estimate timely reserves (or provisions), without considering any variability; and stochastic methods, such as the method of Mack and Bootstrap, which consider this variability. It is also considered the Munich Chain Ladder method that relates payments and incurred.

Finally, a brief study of the log-normal distribution is made with the purpose of estimating the mean and the standard deviation knowing only two values corresponding to two distinct percentiles.

**Keywords:** Mortality tables, Mortality rates, Life Expectancy, Lee-Carter Method, Triangles Run-off, Claims provision, Chain Ladder Method, Bootstrap Method, Mack's Method, Munich Chain Ladder Method, Log-Normal Distribution





# Conteúdo

<b>Lista de Acrónimos</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.0.1 Estrutura . . . . .	3
<b>2 Tábuas de Mortalidade</b>	<b>5</b>
2.1 Tipos de tábuas de mortalidade . . . . .	5
2.2 Método de Lee-Carter . . . . .	6
2.2.1 Ajustamento do modelo demográfico . . . . .	7
2.2.2 Modelo de Séries Temporais . . . . .	9
2.2.3 Projeção de Tabelas de Mortalidade . . . . .	13
<b>3 Métodos de Provisão de Sinistros</b>	<b>15</b>
3.1 Sinistro . . . . .	15
3.1.1 Processo de um sinistro . . . . .	15
3.1.2 Provisão de Sinistros . . . . .	16
3.2 Nomenclatura e Triângulos Run-off . . . . .	17
3.3 Fator Cauda . . . . .	19
3.4 Métodos Determinísticos . . . . .	19
3.4.1 Método Chain Ladder . . . . .	19
3.5 Métodos Estocásticos . . . . .	22
3.5.1 Método de Bootstrap (aplicado ao Chain Ladder) . . . . .	23
3.5.2 Método de Thomas Mack . . . . .	26
3.6 Métodos que relacionam triângulos de pagamentos com triângulos de cargas	28
3.6.1 Método de Munich Chain Ladder . . . . .	29
3.7 Distribuição Log-Normal . . . . .	32
3.7.1 Estimação dos parâmetros da distribuição log-normal dados dois quantis . . . . .	32
<b>4 Aplicação Prática</b>	<b>35</b>
4.1 Tábuas de Mortalidade - Método de Lee-Carter . . . . .	35

4.1.1	Análise Gráfica . . . . .	35
4.1.2	Modelo de Lee-Carter: Modelo demográfico . . . . .	36
4.1.3	Modelo de Lee-Carter: Modelo de Séries Temporais . . . . .	37
4.1.4	Projeção de Tábuas de Mortalidade . . . . .	42
4.2	Métodos de Provisão de Sinistros . . . . .	43
4.2.1	Seguro Habitação . . . . .	43
4.2.2	Análise Gráfica . . . . .	45
4.2.3	Método Chain Ladder . . . . .	46
4.2.4	Método de Bootstrap . . . . .	48
4.2.5	Método de Mack . . . . .	52
4.2.6	Método de Munich Chain Ladder . . . . .	53
4.3	Distribuição Log-Normal . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>59</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>61</b>

# Lista de Tabelas

3.1	Triângulo run-off com montantes incrementais, $X_{i,j}$ . . . . .	18
3.2	Triângulo run-off com montantes acumulados, $C_{i,j}$ . . . . .	18
3.3	Triângulo run-off com montantes acumulados, Fonte: Carrato et al. [2017]	21
3.4	Triângulo run-off com montantes acumulados, Fonte: Carrato et al. [2017]	22
3.5	Total de Reservas para o triângulo run-off . . . . .	22
3.6	Triângulo com os dados ajustados . . . . .	24
3.7	Resíduos de Pearson . . . . .	25
3.8	Resultados obtidos através do método de Bootstrap . . . . .	26
4.1	Nº de Mortes Observadas vs. Nº de Mortes Estimadas . . . . .	37
4.2	$\ddot{k}_t$ reestimados . . . . .	37
4.3	AIC dos modelos candidatos . . . . .	40
4.4	Drift do modelo $ARIMA(0, 1, 0)$ . . . . .	40
4.5	Triângulo Run-off dos pagamentos acumulados do ramo MRH . . . . .	44
4.6	Triângulo Run-off das cargas acumulados do ramo MRH . . . . .	45
4.7	Fatores de desenvolvimento do triângulo run-off dos pagamentos acumulados	47
4.8	Fatores de desenvolvimento do triângulo run-off das cargas acumuladas .	47
4.9	Estimativas dos montantes de indenizações finais $C_{i,N}$ e reservas para cada ano de ocorrência $i$ e total . . . . .	48
4.10	Triângulo Run-off dos pagamentos acumulados ajustados do ramo MRH .	49
4.11	Resíduos de Pearson . . . . .	50
4.12	Resultados obtidos através do método de Bootstrap . . . . .	51
4.13	Resultados obtidos através do método de Mack . . . . .	52
4.14	Resultados obtidos através do método de Munich Chain Ladder . . . . .	53
4.15	Percentil 75% e Percentil 90% de cada um dos ramos . . . . .	54
4.16	Média e Desvio-Padrão de cada um dos principais ramo . . . . .	54
4.17	Percentil da reserva de cada um dos ramo explorados . . . . .	55
A.1	$\hat{k}_t$ estimados . . . . .	63

A.2	$\hat{\alpha}_x$ e $\hat{\beta}_x$ estimados . . . . .	64
B.1	Tábua de Mortalidade de 2015 . . . . .	68
B.2	Tábua de Mortalidade de 2016 . . . . .	69
B.3	Tábua de Mortalidade de 2017 . . . . .	70
B.4	Tábua de Mortalidade de 2018 . . . . .	71
B.5	Tábua de Mortalidade de 2019 . . . . .	72
B.6	Tábua de Mortalidade de 2020 . . . . .	73

# Lista de Figuras

2.1	Função de autocorrelação de uma série não estacionária . . . . .	11
2.2	Tábua de Mortalidade da População Italiana para o ano de 2025 por género, Fonte: Russolillo [2014] . . . . .	14
3.1	Evolução temporal do processo de um sinistro, Fonte: Pinto [2013] . . . . .	16
3.2	Gráficos de Resíduos por ano de ocorrência e por ano de desenvolvimento, respetivamente . . . . .	25
4.1	Taxa de mortalidade observada entre 2006 e 2016 . . . . .	35
4.2	Gráfico da Função de Autocorrelação e Função de Autocorrelação Parcial da série temporal $\ddot{k}_t$ . . . . .	38
4.3	Teste Estatístico ADF para a série temporal $\ddot{k}_t$ . . . . .	38
4.4	Gráfico da Função de Autocorrelação e Função de Autocorrelação Parcial da série temporal diferenciada $\ddot{k}_t$ . . . . .	38
4.5	Teste Estatístico ADF para a série temporal $\ddot{k}_{1t}$ . . . . .	39
4.6	Taxa de mortalidade observada vs. Taxa de mortalidade estimada 2015 . . . . .	41
4.7	Taxa de mortalidade vs. Taxa de mortalidade estimada 2016 . . . . .	41
4.8	Esperança média de vida esperada vs. Esperança média de vida observada em 2016 . . . . .	42
4.9	Esperança média de vida estimada entre 2015 e 2020 quando $x = 25$ . . . . .	42
4.10	Esperança média de vida estimada entre 2015 e 2020 quando $x = 60$ . . . . .	43
4.11	Desenvolvimento dos pagamentos acumulados e das cargas acumuladas, respetivamente . . . . .	46
4.12	Gráficos de Resíduos por ano de ocorrência e por ano de desenvolvimento, respetivamente . . . . .	50
4.13	Histograma das 2000 simulações para a reserva . . . . .	51
4.14	Análise dos montantes de pagamentos finais por ano de ocorrência $i$ . . . . .	53
.1	Ajustamento dos dados aos fatores de desenvolvimento . . . . .	76



# Lista de Acrónimos

- ACF** Autocorrelation Function. 37, 38
- ADF** Augmented Dickey-Fuller. 36, 37
- AIC** Akaike Information Criterion. xi, 37, 38
- AP** Acidentes Pessoais. 53
- ARIMA** Autoregressive Integrated Moving Average. 9, 35, 37–39
- AT** Acidentes de Trabalho. 53
- AUTO** Automóvel. 53
- DV** Diversos. 53
- IBNER** Incurred But Not Enough Reported. 17
- IBNR** Incurred But Not Reported. 17
- ISP** Instituto de Seguros de Portugal. 35
- MRH** Multiriscos Habitação. xi, 41, 43, 44, 46, 47
- PACF** Partial Autocorrelation Function. 37, 38
- Prop** Propriedades. 53
- RC** Responsabilidade Civil. 53
- RMSE** Root-Mean-Square Error. 39
- TR** Transportes. 53
- VBA** Visual Basic of Applications. 3

# Capítulo 1

## Introdução

Este trabalho foi realizado no âmbito de um estágio curricular na companhia de seguros Ageas Portugal. A Ageas é um grupo segurador internacional, com sede em Bruxelas, que contempla 190 anos de experiência e conhecimento. A Ageas está presente em 14 países, entre eles Portugal, onde propõe soluções vida e não vida a milhões de clientes individuais e empresariais. Em Portugal, a Ageas está presente desde 2005, operando através de marcas reconhecidas, tal como a Médis e a Ocidental. Em 2016, a AXA Portugal foi comprada pela Ageas, local onde decorreu o estágio, mais propriamente, no departamento de atuariado não vida.

O estágio curricular foi dividido em dois temas distintos.

Numa primeira fase foram efetuados estudos sobre tábuas de mortalidade.

O primeiro cientista a tentar construir uma tábua de mortalidade foi John Graunt, no século XVII, falecendo sem conseguir concluir o seu trabalho, dada a dificuldade que tinha em obter dados referentes à mortalidade. Alguns estatísticos afirmam, no entanto, que foram os sábios islâmicos, no século XV, que construíram a primeira tábua de mortalidade da história.

O século XX fica marcado pelo grande avanço tecnológico e pelas grandes descobertas efetuadas nas mais diversas áreas, nomeadamente, a saúde. Estas melhorias em diversos setores da vida humana levam a que a esperança média de vida, isto é, o tempo médio que uma pessoa ainda espera viver, cresça. Como exemplo tem-se a evolução da esperança média de vida à nascença em Portugal. Entre 1940 e 2000, a esperança média de vida passou de 51.38 anos para 76.82 anos (informação retirada do [hmd](#)).

Do ponto de vista humano, o facto de se viver mais tempo é visto de uma forma positiva. Já do ponto de vista de uma seguradora, o aumento da esperança média de vida afeta a sua posição financeira sendo, por isso, necessário a construção de tábuas de mortalidade atualizadas.

As tábuas de mortalidade mostram uma previsão das taxas de mortalidade e esperança



média de vida para anos futuros que proporcionam assim uma pequena segurança para as seguradoras. Existem diversos tipos de tábuas de mortalidade assim como existem diversos tipos de métodos aplicáveis neste estudo.

Neste trabalho, o método a ser estudado é o método de [Lee e Carter \[1992\]](#), um método que se baseia na informação do passado para projetar previsões para o futuro.

Assim, o principal objetivo da construção de tábuas de mortalidade é conseguir prever as taxas de mortalidade e respetivas esperanças médias de vida, de modo a que seja possível o cálculo de rendas vitalícias (pagamento de um valor fixo a uma pessoa segura até ao fim da sua vida, pela companhia de seguros).

A segunda fase do estágio consistiu no estudo de métodos de provisão de sinistros.

Um seguro é um contrato celebrado entre o tomador do seguro e a empresa de seguros, onde estão presentes as respetivas condições gerais, especiais, se as houver, e particularidades acordadas.

Os seguros dividem-se em duas categorias distintas, os ramos de vida e os ramos de não vida. O ramo vida consiste nos seguros de vida clássicos e nos seguros financeiros. O ramo não vida engloba seguros que têm objetos, bens patrimoniais e seguros pessoais.

Parte do trabalho de uma companhia de seguros, no ramo não vida, é estimar provisões técnicas adequadas que permitam assegurar o cumprimento dos compromissos decorrentes dos contratos de seguro. É muito importante esta estimação pois, caso não aconteça, no futuro a empresa pode enfrentar problemas financeiros e, no pior dos casos, pode levar à sua insolvência.

Assim, a estimação das provisões técnicas é acompanhada com especial atenção pela empresa, nomeadamente pelos atuários (responsável especialista em avaliar e administrar riscos), com o objetivo dos valores apurados serem o mais próximo da realidade.

De entre os tipos de provisões técnicas existem as provisões para sinistros. Estas provisões correspondem ao custo total estimado que a empresa terá de suportar para regularizar todos os sinistros ocorridos até à data considerada, considerando tanto os sinistros que tenham sido reportados como aqueles que ainda não foram, após dedução dos montantes já pagos respeitantes a esses sinistros.

Para estimar as provisões para sinistros existem diversos tipos de métodos que se encontram divididos em dois grupos: I) Os métodos determinísticos que correspondem a estimativas pontuais, ou seja, estimativas que não consideram qualquer variabilidade; II) Os métodos estocásticos destacam-se dos métodos determinísticos porque consideram essa variabilidade.

Assim, neste trabalho, serão considerados, como método determinístico, o método Chain

Ladder e como métodos estocásticos, o método de Thomas Mack e a metodologia de Bootstrap. Além destes, ainda será considerado o método de Munich Chain Ladder que relaciona o triângulo dos pagamentos com o triângulo das cargas.

Todos os métodos de provisão de sinistros mencionados foram aplicados através da utilização do pacote Chain Ladder do software R (versão 3.4.4) e posteriormente implementados numa folha de excel (com recurso ao [VBA](#)) com o objetivo de conseguir estimar uma provisão técnica de sinistros que se aproxime o mais possível da realidade.

Por fim, será feito um estudo breve da distribuição log-normal com o objetivo de, dadas duas quantidades correspondentes a dois percentis diferentes, obtidos pelo método de Bootstrap, conseguir chegar aos parâmetros (média e desvio-padrão) da distribuição.

### **1.0.1 Estrutura**

Este trabalho encontra-se dividido em quatro partes. É feita uma introdução inicial presente no capítulo 1. O capítulo 2 apresenta uma introdução às tábuas de mortalidade seguida da explicação do método de Lee-Carter para a sua estimação. O capítulo 3 explica o que é um sinistro, o seu processo e explica os métodos Chain Ladder, Bootstrap, Mack e Munich Chain Ladder para provisão de sinistros. Também é feito um breve resumo da distribuição log-normal seguida da explicação de como se chega aos parâmetros da distribuição considerando como conhecidos dois percentis e os seus respetivos valores. No capítulo 4 serão aplicados todos os métodos abordados nos capítulos anteriores. Por fim serão feitas algumas considerações finais relativas aos resultados obtidos e serão feitas também algumas propostas de trabalho futuro.



# Capítulo 2

## Tábuas de Mortalidade

Uma tábua de mortalidade, segundo [Bravo \[2007\]](#), é definida como um modelo tabular de análise demográfica que sintetiza um conjunto de funções básicas que permitem analisar, numa determinada população o fenómeno de longevidade e efetuar juízos sobre a evolução de mortalidade.

### 2.1 Tipos de tábuas de mortalidade

As tábuas de mortalidade podem ser classificadas quanto à utilização de gerações fictícias ou reais:

- **Tábuas contemporâneas (transversais ou de momento):** Envolvem o estudo de um grupo dentro de uma população, ao longo de um determinado período de tempo, de uma geração fictícia (composta, normalmente, por 100000 nados-vivos), que é sujeito às condições de mortalidade para cada idade (ou agrupamento de idades) num determinado período de tempo. Estas tábuas baseiam-se na utilização de estatísticas referentes a um período de tempo curto quer para os óbitos, quer para a população exposta ao risco;
- **Tábuas geracionais (ou longitudinais):** Baseiam-se no cálculo das taxas de mortalidade de indivíduos nascidos no mesmo ano. A construção deste tipo de tábuas implica o acompanhamento dos indivíduos desde o seu nascimento até à sua morte, através de uma análise longitudinal.

As tábuas de mortalidade podem também ser classificadas segundo a consideração do tempo cronológico na elaboração e apresentação:

- **Tábuas Estáticas:** São tábuas unidimensionais onde todas as funções são apenas referentes à idade biológica  $x$ ;

- **Tábuas dinâmicas (ou prospetivas):** São tábuas bidimensionais em que todas as funções são referentes à idade biológica, representada em cada linha, e ao ano de calendário (tempo cronológico), representado em cada coluna.

## 2.2 Método de Lee-Carter

Os métodos de projeção de mortalidade têm como objetivo prever taxas de mortalidade para períodos futuros onde não existe qualquer informação.

O método de Lee e Carter [1992] é um método extrapolativo que combina um modelo demográfico com um modelo de séries temporais. Ou seja, através da informação histórica é estimado o modelo demográfico, onde é possível obter o índice temporal geral de mortalidade. Este índice é modelado como uma série temporal para que seja possível projetá-lo e assim obter previsões da taxa de mortalidade e esperança média de vida.

**Definição 2.2.1** *A taxa de mortalidade para a idade  $x$  no ano  $t$ ,  $m_{x,t}$ , é um índice demográfico que reflete o número de mortes registadas em uma determinada região. A taxa de mortalidade é obtida através da seguinte expressão,*

$$m_{x,t} = \frac{d_{x,t}}{E_{x,t}} \quad (2.1)$$

em que,

- $E_{x,t}$  é o número de pessoas expostas ao risco para a idade  $x$  no ano  $t$ ;
- $d_{x,t}$  é o número de mortes para a idade  $x$  no ano  $t$ .

**Definição 2.2.2** *A esperança média de vida,  $e_x$  é o número aproximado de anos que um grupo de indivíduos nascidos no mesmo ano espera viver se mantidas as condições desde o seu nascimento.*

O modelo demográfico apresentado por Lee e Carter [1992] é o seguinte:

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t} \quad (2.2)$$

onde,

- $m_{x,t}$  é a taxa de mortalidade para a idade  $x$  no ano  $t$ ;
- $\alpha_x$  define, para cada idade  $x$ , o nível médio das taxas de mortalidade;

- $k_t$  descreve o índice temporal geral de mortalidade no ano  $t$ ;
- $\beta_x$  descreve as alterações nas taxas de mortalidade na idade  $x$  provocadas por uma alteração de  $k_t$ ;
- $\epsilon_{x,t}$  é o termo erro com média 0 e variância  $\sigma^2$ .

### 2.2.1 Ajustamento do modelo demográfico

O ajustamento do modelo demográfico é composto por duas etapas. Em primeiro lugar é efetuada uma estimação dos parâmetros  $\alpha_x$ ,  $\beta_x$  e  $k_t$  recorrendo a uma aproximação do método de decomposição em valores singulares (SVD) para encontrar uma solução de mínimos quadrados. Em segundo lugar é realizada uma reestimação do parâmetro  $k_t$  através de um método iterativo.

#### Estimação dos parâmetros $\alpha_x$ , $\beta_x$ e $k_t$

Para encontrar uma solução para o modelo, Lee e Carter recorreram a uma aproximação do método SVD para encontrar uma solução de mínimos quadrados quando aplicado à matriz de logaritmos das taxas de mortalidade  $m_{x,t}$ .

Observando o modelo demográfico é possível notar que este admite mais do que uma solução para os parâmetros que estão a ser estimados, ou seja, verifica-se que o modelo é invariante a algumas transformações. Considere-se, por exemplo, que  $a$ ,  $b$  e  $k$  são uma solução do modelo (2.2). Assim, dado um escalar  $c$ ,

- $a \rightarrow a$ ,  $b \rightarrow bc$  e  $k \rightarrow \frac{k}{c}$  ou
- $a \rightarrow a - bc$ ,  $b \rightarrow b$  e  $k \rightarrow k + c$

são também soluções do modelo.

Para tornar a solução do modelo demográfico única, os autores impuseram duas condições:

$$\sum_{x=x_1}^{x_n} \beta_x = 1 \quad \sum_{t=t_1}^{t_T} k_t = 0 \quad (2.3)$$

onde  $x_1$  e  $x_n$  representam, respetivamente, a idade atuarial inicial e a idade atuarial final e  $t_1$  e  $t_T$  são, respetivamente, o ano inicial e o ano final.

Assim é possível chegar à estimação de cada parâmetro:

$$\sum_{t=t_1}^{t_T} \ln(m_{x,t}) = \sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t \Leftrightarrow \sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{\alpha}_x = \sum_{t=t_1}^{t_T} \ln(m_{x,t}) - \sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{\beta}_x \hat{k}_t$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \hat{\alpha}_x \sum_{t=t_1}^{t_T} 1 &= \sum_{t=t_1}^{t_T} \ln(m_{x,t}) - \hat{\beta}_x \sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{k}_t \Leftrightarrow (t_T - t_1 + 1)\hat{\alpha}_x = \sum_{t=t_1}^{t_T} \ln(m_{x,t}) \\ \Leftrightarrow \hat{\alpha}_x &= \frac{1}{h} \sum_{x=x_1}^{x_n} \ln(m_{x,t}) \text{ onde, } h = t_T - t_1 + 1 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=x_1}^{x_n} \ln(m_{x,t}) &= \sum_{x=x_1}^{x_n} \hat{\alpha}_x + \sum_{x=x_1}^{x_n} \hat{\beta}_x \hat{k}_t \Leftrightarrow \sum_{x=x_1}^{x_n} (\ln(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x) = \hat{k}_t \sum_{x=x_1}^{x_n} \hat{\beta}_x \\ \Leftrightarrow \hat{k}_t &= \sum_{x=x_1}^{x_n} (\ln(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cada  $\hat{\beta}_x$  é estimado usando o método dos mínimos quadrados, isto é, escolhendo  $\hat{\beta}_x$  para minimizar

$$\sum_{x,t} (\ln(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{k}_t)^2$$

Derivando em ordem a  $\hat{\beta}_x$ ,

$$\sum_{t=t_1}^{t_T} 2(\ln(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{k}_t)(-\hat{k}_t)$$

Para encontrar o mínimo iguala-se a derivada a 0:

$$\begin{aligned} 2 \sum_{t=t_1}^{t_T} (\ln(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{k}_t)(-\hat{k}_t) &= 0 \Leftrightarrow -1 \sum_{t=t_1}^{t_T} (\ln(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{k}_t)(\hat{k}_t) = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{k}_t (\ln(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x) - \sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{\beta}_x \hat{k}_t^2 &= 0 \Leftrightarrow \hat{\beta}_x \sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{k}_t^2 = \sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{k}_t (\ln(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x) \\ \Leftrightarrow \hat{\beta}_x &= \frac{\sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{k}_t (\ln(m_{x,t}) - \hat{\alpha}_x)}{\sum_{t=t_1}^{t_T} \hat{k}_t^2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

### Reestimação do parâmetro $k_t$

A segunda etapa consiste na reestimação do parâmetro  $k_t$  utilizando as estimações de  $\hat{\alpha}_x$  e  $\hat{\beta}_x$  obtidas anteriormente. Esta reestimação deve-se ao facto da estimação dos parâmetros ser baseada no logaritmo das taxas de mortalidade e não nas próprias taxas de mortalidade. Assim, para garantir que o total de mortes observadas seja igual ao número de mortes esperadas, é efetuada uma reestimação do parâmetro  $k_t$ . Sejam,

$$\sum_{x=x_1}^{x_n} d_{x,t} \quad (2.7)$$

o número de mortes observadas e

$$\ln(m_{x,t}) = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t \Leftrightarrow \ln\left(\frac{d_{x,t}}{E_{x,t}}\right) = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t$$

$$\hat{d}_{x,t} = \sum_{x=x_1}^{x_n} E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t) \quad (2.8)$$

o número de mortes estimadas. Os novos estimadores de  $k_t$  são obtidos resolvendo a seguinte equação:

$$\sum_{x=x_1}^{x_n} [E_{x,t} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t) - d_{x,t}] = 0 \quad (2.9)$$

Para a resolução deste problema recorre-se ao método iterativo de Newton-Raphson considerando os  $k_t$  anteriormente estimados como valores iniciais.

**Definição 2.2.3** *Seja  $F(x)$  uma função contínua e derivável num intervalo  $[a, b]$  onde existe uma raiz  $X$  da equação  $F(x) = 0$ . Seja  $x_0$  uma aproximação dessa raiz.*

*O método de Newton-Raphson constrói, a partir de uma valor inicial  $x_0$ , uma sucessão  $(x_n)_n$  definida pela relação de recorrência:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, & n \geq 0 \\ x_0 \text{ dado} \end{cases} \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Modelo de Séries Temporais

A tendência da mortalidade do modelo de Lee-Carter é capturada pelo índice temporal geral de mortalidade,  $k_t$ . Assim, o vetor  $k$  é modelado como uma série temporal. Lee e Carter recorreram à metodologia de Box-Jenkins (identificação-estimação-diagnóstico) para gerar um modelo ARIMA apropriado para a série temporal.

**Definição 2.2.4** *Num modelo auto-regressivo (AR), o valor presente da série temporal  $X_t$  é expresso linearmente em termos dos valores passados da série e da perturbação aleatória  $a_t$  ocorrendo no instante  $t$ . A ordem deste processo depende do valor mais antigo sobre o qual a regressão tem lugar. Num processo auto-regressivo de ordem  $p$ , o modelo pode escrever-se como*

$$X_t = \delta + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + a_t \quad (2.11)$$

*em que os vários  $\phi_i$  são constantes reais e a série dos  $a_t$  apresenta distribuição normal de valores independentes.*



*Um modelo auto-regressivo é simplesmente uma regressão linear do valor corrente da série sobre um ou mais dos valores anteriores da série.*

**Definição 2.2.5** *Num modelo de médias móveis (MA), o valor presente da série expressa-se em função dos valores presente e passados das perturbações aleatórias, que formam uma série de ruído branco. A ordem deste processo depende do valor mais antigo da série de ruído branco considerado; para um processo de média móvel de ordem  $q$ , a série exprime-se como*

$$X_t = m + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (2.12)$$

*em que os vários  $\theta_i$  são constantes reais.*

*Isto é, um modelo de média móvel constrói-se como uma regressão linear do valor presente da série sobre as perturbações aleatórias de um ou mais valores anteriores da série. Admite-se que estas perturbações são geradas por uma mesma distribuição, habitualmente normal, de média e desvio-padrão constantes.*

**Definição 2.2.6** *Um modelo auto-regressivo integrado de médias móveis (ARIMA) é um modelo que é ajustado aos dados de uma série temporal para entendê-los melhor ou para prever futuros pontos da série.*

*Um modelo ARIMA é denotado como ARIMA( $p, d, q$ ) onde:*

- $p$  é a ordem do modelo auto-regressivo;
- $d$  é o grau de diferenciação;
- $q$  é a ordem do modelo de médias móveis.

Considerando a série temporal fornecida pela reestimação do parâmetro  $k_t$  é necessário identificar o modelo mais apropriado para a série. O processo para construir este modelo passa por quatro passos:

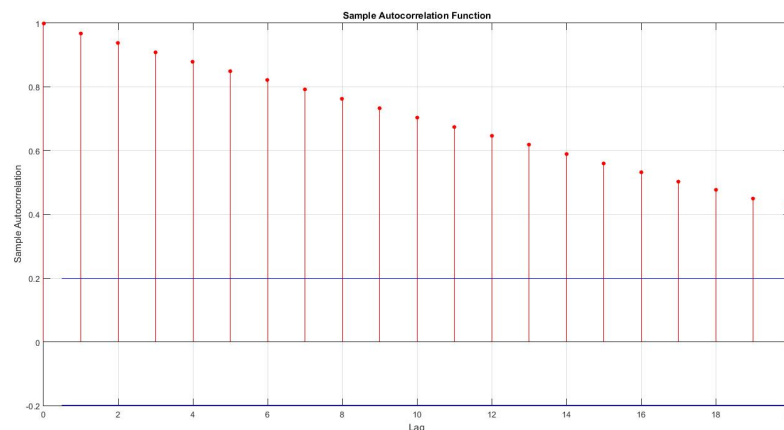
1. Análise preliminar da série e possíveis transformações;
2. Identificação da ordem do modelo;
3. Estimação dos parâmetros;
4. Avaliação do modelo.

## Análise preliminar da série e possíveis transformações

A primeira etapa consiste numa análise preliminar da série temporal, através da função de autocorrelação e da função de autocorrelação parcial, para verificar a estacionariedade da série. A identificação de alguma tendência, sazonalidade ou ciclos indica que a série pode não ser estacionária.

**Definição 2.2.7** *O gráfico da função de autocorrelação (ACF) mostra os valores calculados a partir da série temporal, nas diferentes defasagens existentes para medir a significância das correlações entre a observação presente e as anteriores. Assim é possível ver o quanto é necessário voltar no tempo, ou seja, é possível determinar quantas defasagens no tempo as observações estão correlacionadas. Os valores da ACF encontram-se entre  $-1$  e  $+1$ , se a série temporal for estacionária.*

**Definição 2.2.8** *O gráfico da função de autocorrelação parcial (PACF) mostra os valores calculados, a partir da série temporal, usando os seus valores defasados como variáveis independentes. Quando a regressão inclui somente uma variável independente de um período defasado, o coeficiente da variável independente é chamado de função autocorrelação parcial de primeira ordem; quando um segundo termo de dois períodos de defasagem for adicionado à regressão, o coeficiente do segundo termo é chamado de função de autocorrelação parcial de segunda ordem, etc. Os valores da PACF encontram-se entre  $-1$  e  $+1$ , se a série temporal for estacionária.*



**Figura 2.1:** Função de autocorrelação de uma série não estacionária

O modelo [ARIMA](#) tem como restrição a estacionariedade da série, ou seja, as suas propriedades não dependem do tempo enquanto a série é observada.

Para verificar a estacionariedade de uma série pode-se recorrer ao teste estatístico [ADF](#).

**Definição 2.2.9** *O teste [Augmented Dickey-Fuller \(ADF\)](#) é um teste estatístico para estudar a estacionariedade de uma série temporal.*

*As hipóteses do teste são:*

$H_0$ : *A série não é estacionária*

$H_1$ : *A série é estacionária*

Caso a série não seja estacionária é necessário diferenciá-la até que ela se torne estacionária, isto é, é necessário calcular as diferenças entre observações consecutivas. O número de vezes que a série é diferenciada até que se torne estacionária corresponde ao parâmetro  $d$  do modelo [ARIMA](#).

### Identificação da ordem do modelo

Após tornar a série estacionária é preciso decidir quantos parâmetros auto-regressivos ( $p$ ) e/ou parâmetros de médias móveis ( $q$ ) são necessários para obter um modelo efetivo para a série temporal em questão.

Estas informações podem ser obtidas recorrendo à função de autocorrelação ([ACF](#)) e à função de autocorrelação parcial ([PACF](#)).

Observando os gráficos da [ACF](#) e da [PACF](#) são escolhidos os candidatos, modelos  $AR(p)$ ,  $MA(q)$  ou  $ARMA(p, q)$ . Entre estes modelos é selecionado o modelo mais adequado à série temporal estudada.

A escolha do modelo é feita através do critério [AIC](#).

**Definição 2.2.10** *Suponha que existe um modelo estatístico relativo a alguns dados. O valor [AIC](#) do modelo pode ser calculado através da fórmula:*

$$AIC = 2k - 2 \ln(\hat{L}) \tag{2.13}$$

onde,

- $k$  é o número de parâmetros estimados no modelo;
- $\hat{L}$  é a função de máxima verosimilhança do modelo.

A escolha do modelo recai sobre aquele que apresenta o menor valor [AIC](#) pois quanto menor for esse valor melhor é o seu ajustamento em relação aos dados.

### Estimação dos parâmetros

Após as ordens do modelo terem sido identificadas, isto é, os valores de  $p$ ,  $d$  e  $q$  terem sido identificados, é necessário estimar os parâmetros do modelo  $\delta, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ . A estimação por máxima verosimilhança (MLE) pode ser usada para estimar os parâmetros do modelo. Este método encontra os valores dos parâmetros do modelo que maximiza a probabilidade de obter os dados que são observados.

Para os modelos [ARIMA](#), o MLE é muito semelhante ao método dos mínimos quadrados.

### Avaliação do modelo

O objetivo da avaliação do modelo é verificar se o modelo estimado nas fases anteriores é adequado para a série temporal estudada. Caso não seja, é necessário refazer alguns passos para encontrar um modelo alternativo.

Esta avaliação baseia-se no cálculo do [RMSE](#) ([Root-Mean-Square Error](#)).

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^T (\hat{y}_t - y_t)^2}{T}} \quad (2.14)$$

#### 2.2.3 Projeção de Tabelas de Mortalidade

Construído o modelo de previsão já é possível fazer previsões futuras do índice de mortalidade  $k_t$  para  $s$  anos futuros. Consequentemente é possível construir uma tábua de mortalidade.

A primeira variável a ser calculada é a taxa de mortalidade para cada idade  $x$  e ano  $t$ :

$$\ddot{m}_{x,t_{max}+s} = \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \ddot{k}_{t_{max}+s}, s > 0 \quad (2.15)$$

Usando as previsões das taxas de mortalidade é possível calcular todos os elementos de uma tábua de mortalidade.

- $q_x$ : Probabilidade de um indivíduo que atingiu a idade  $x$  falecer antes de alcançar a idade  $x + 1$

$$q_x = \frac{w_x m_x}{(1 + f'_x w_x m_x)} \quad (2.16)$$

onde  $m_x$  é a taxa de mortalidade da idade  $x$ ,  $w_x$  é o número de idades dentro de um grupo (neste estudo serão consideradas as idades isoladas, pelo que,  $w_x = 1$ ) e  $f'_x$  é o número médio de anos vividos dentro do intervalo de idades  $[x, x + 1]$  para

pessoas que morrem naquela idade (tal como Russolillo [2014] será assumindo que  $f_x = \frac{1}{2}$  e  $f'_x = 1 - f_x$ );

- $l_{x+w_x}$ : Número de sobreviventes à idade  $x$ , considerando uma geração inicial de 100000 nados-vivos;

$$l_{x+w_x} = l_x(1 - q_x) \quad (2.17)$$

- $d_x$ : Número de óbitos da geração inicial registados entre as idades  $x$  e  $x + 1$ ;

$$d_x = l_x - l_{x+w_x} = l_x q_x \quad (2.18)$$

- $L_x$ : Total de anos completos vividos pelos sobreviventes da geração inicial entre as idades  $x$  e  $x + 1$ ;

$$L_x = w_x(l_x - f'_x d_x) \quad (2.19)$$

- $T_x$ : Total de anos completos vividos pelos sobreviventes após a idade  $x$ ;

$$T_{x_i} = \sum_{x_i}^{x_n} L_x \quad (2.20)$$

- $e_x$ : Número esperado de anos de vida futura dos indivíduos que atingiram a idade  $x$ .

$$e_{x_i} = \frac{T_{x_i}}{l_{x_i}} \quad (2.21)$$

A figura seguinte mostra, de forma incompleta, um exemplo de uma tábua de mortalidade.

Male					Female				
$x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$x$	$q_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$
Calendar year 2025									
1 = 0	0.00106	100	106	99.910	1 = 0	0.00099	100	99	99.917
2 = 1 - 4	0.00014	99.89372	14	399.547	2 = 1 - 4	0.00015	99.90132	15	399.575
3 = 5 - 9	0.00023	99.87966	23	499.341	3 = 5 - 9	0.00018	99.88607	18	499.386
4 = 10 - 14	0.00037	99.85657	37	499.189	4 = 10 - 14	0.00027	99.86833	27	499.274
5 = 15 - 19	0.00198	99.81916	198	498.601	5 = 15 - 19	0.00060	99.84128	59	499.058
6 = 20 - 24	0.00345	99.62115	343	497.247	6 = 20 - 24	0.00068	99.78185	68	498.740
7 = 25 - 29	0.00358	99.27778	355	495.501	7 = 25 - 29	0.00076	99.71434	75	498.383
8 = 30 - 34	0.00353	98.92258	349	493.741	8 = 30 - 34	0.00100	99.63895	100	497.945

**Figura 2.2:** Tábua de Mortalidade da População Italiana para o ano de 2025 por género, Fonte: Russolillo [2014]

# Capítulo 3

## Métodos de Provisão de Sinistros

O contrato de seguro é um compromisso realizado entre uma empresa de seguros e uma pessoa singular ou coletiva em que a primeira se compromete, mediante a receção de um pagamento prévio ou conjunto de pagamentos escalonados no tempo, e na eventualidade de ocorrer um evento aleatório, a fornecer à outra parte contratante uma prestação em dinheiro ou serviço.

Para garantir o pagamento de indemnizações, sempre que ocorra um sinistro nos termos do contrato, é necessário estimar uma provisão técnica, ou seja, prever pagamentos futuros para sinistros pendentes ou sinistros ainda não declarados.

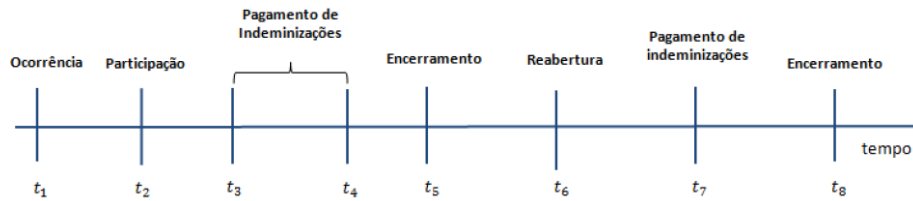
Neste capítulo serão abordados alguns conceitos e nomenclaturas referentes à provisão de sinistros bem como o estudo de alguns métodos determinísticos e estocásticos para a provisão de sinistros.

### 3.1 Sinistro

Um sinistro é definido como um evento ou uma série de eventos resultantes de uma mesma causa suscetível de fazer funcionar as garantias de um ou mais contratos de seguro.

#### 3.1.1 Processo de um sinistro

Um sinistro passa por diversas fases desde a sua ocorrência até ao seu encerramento. A seguinte figura demonstra as diversas fases de um sinistro.



**Figura 3.1:** Evolução temporal do processo de um sinistro, Fonte: Pinto [2013]

Como é possível ver através da [Figura 3.1](#) o processo de um sinistro pode demorar alguns dias como também pode durar anos até que seja encerrado. Esta demora provém de diversos fatores, tais como, atrasos administrativos ou longos processos jurídicos. Além destes fatores existem ainda os casos em que o sinistro demora anos para ser participado à seguradora.

Assim, como já foi referido, o processo de um sinistro passa por diversas fases:

- Em  $t_1$  ocorre o sinistro;
- Em  $t_2$  o sinistro ocorrido é participado à companhia de seguros, sendo agora o resto do processo tratado pelos mesmos;
- Em  $t_3$  e  $t_4$  são efetuados os pagamentos das indemnizações associadas ao sinistro;
- Em  $t_5$  ocorre o encerramento (pode não ser definitivo) do sinistro depois de todas as situações serem regularizadas;
- Em  $t_6$  o processo do sinistro pode ser reaberto devido a novas informações relativas ao sinistro em causa;
- Em  $t_7$  são efetuados novos pagamentos de indemnizações de modo a regularizar a situação do sinistro;
- Em  $t_8$  existe novo encerramento do sinistro (podendo ser definitivo ou não).

### 3.1.2 Provisão de Sinistros

Uma companhia de seguros precisa de assegurar todas as etapas do processo de um sinistro daí a importância de criar uma provisão para sinistros, ou reserva. Esta provisão para sinistro corresponde à reserva total estimada pela seguradora para assegurar a regularização de todos os sinistros, tanto os pendentes como os não declarados, para um determinado espaço temporal.

A provisão para sinistros encontra-se dividida em dois tipos:

- Reserva para sinistros que cobrem os futuros custos de sinistros que já ocorreram mas ainda não foram reportados - **Incurred But Not Reported (IBNR)**;
- Reserva para sinistros para cobrir potenciais insuficiências que possam existir nas reservas, ou seja, para regularizar pagamentos referentes a sinistros pendentes - **Incurred But Not Enough Reported (IBNER)**.

Apesar de existir esta distinção, a estimação do **IBNR** e do **IBNER** é feita como uma só, não existindo distinção entre as duas.

### 3.2 Nomenclatura e Triângulos Run-off

Os métodos utilizados para o cálculo de reservas de sinistros baseiam-se num triângulo run-off. Um triângulo run-off é uma matriz incompleta onde estão organizados todos os dados históricos referentes aos sinistros ocorridos e participados até à data em que ele é construído. Usualmente, os dados estão organizados em períodos anuais mas também podem ser construídos em períodos mensais, trimestrais ou semestrais.

Cada linha do triângulo run-off representa um período de acidente  $i$ , onde  $1 \leq i \leq N$  em que 1 é o período inicial considerado e  $N$  é o período até ao qual há informação disponível.

Cada coluna do triângulo run-off representa um período de desenvolvimento  $j$ , onde  $1 \leq j \leq M$  em que 1 é o período inicial considerado e  $M$  é o período até ao qual há informação disponível.

Normalmente, os triângulos run-off são matrizes quadradas, isto é,  $N = M$ . Serão apenas considerados triângulos run-off em que o número de períodos de ocorrência é igual ao número de períodos de desenvolvimento.

Considere-se  $X_{i,j}$  o montante incremental correspondente ao período de ocorrência  $i$  e período de desenvolvimento  $j$  e  $N$  o período até ao qual existem dados disponíveis. Assim, o conjunto de dados é:

$$\{X_{i,j} : i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N - i + 1\} \quad (3.1)$$

A seguinte figura mostra os dados, na forma incremental, distribuídos no triângulo run-off.



Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento						
	1	2	...	$k$	...	$N-1$	$N$
1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	...	$X_{1,k}$	...	$X_{1,N-1}$	$X_{1,N}$
2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	...	$X_{2,k}$	...	$X_{2,N-1}$	
...	...	...	...	...	...		
$k$	$X_{k,1}$	$X_{k,2}$	...	$X_{k,k}$			
...	...	...	...				
$N-1$	$X_{N-1,1}$	$X_{N-1,2}$					
$N$	$X_{N,1}$						

**Tabela 3.1:** Triângulo run-off com montantes incrementais,  $X_{i,j}$

Considere-se  $C_{i,j}$  o montante acumulado correspondente ao período de ocorrência  $i$  e período de desenvolvimento  $j$  e  $N$  o período até ao qual existem dados disponíveis. Assim, o conjunto de dados é:

$$\{C_{i,j} : i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N - i + 1\} \quad (3.2)$$

A seguinte figura mostra os dados, na forma acumulada, distribuídos no triângulo run-off.

Período de Ocorrência	Período de Desenvolvimento						
	1	2	...	$k$	...	$N-1$	$N$
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,k}$	...	$C_{1,N-1}$	$C_{1,N}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	$C_{2,k}$	...	$C_{2,N-1}$	
...	...	...	...	...	...		
$k$	$C_{k,1}$	$C_{k,2}$	...	$C_{k,k}$			
...	...	...	...				
$N-1$	$C_{N-1,1}$	$C_{N-1,2}$					
$N$	$C_{N,1}$						

**Tabela 3.2:** Triângulo run-off com montantes acumulados,  $C_{i,j}$

O objetivo fundamental da provisão de sinistros é completar a parte inferior da matriz, ou seja, estimar os valores que se vão pagar no futuro. Assim, os montantes a ser estimados são:

$$\{C_{i,j} : i = 2, \dots, N, j = N - i + 2, \dots, N\} \quad (3.3)$$

Para os montantes incrementais, a fórmula é análoga.

Completada a matriz é possível estimar a reserva para cada período de ocorrência  $i$  através das seguintes fórmulas para a forma incremental e para o forma acumulada, respetivamente:

$$\sum_{x=N-i+2}^N X_{i,x} \quad R_i = C_{i,N} - C_{i,N-i+1} \quad (3.4)$$

onde  $i = 1 \dots N$ ,  $C_{i,N}$  representa o montante final, também chamado de *ultimate*, para cada período de ocorrência e  $C_{i,N-i+1}$  representa o montante conhecido até ao momento do exercício. A reserva total é dada por:

$$R = \sum_{i=1}^N R_i \quad (3.5)$$

Da mesma forma que os triângulos são usados para estimar os montantes a pagar também podem ser utilizados para prever o número de sinistros que ainda não foram declarados.

A estimação das reservas será feita através de métodos estatísticos explicados posteriormente.

### 3.3 Fator Cauda

Em certos ramos de seguros, mesmo passado muito tempo, a regularização de um sinistro pode ainda não estar concluída, ou seja, o valor da reserva estimada pode não ser suficiente para cobrir as indemnizações a pagar.

Assim, a seguradora precisa de se precaver para este tipo de situação porque, se não o fizer, está a assumir que não existe nenhuma indemnização a ser liquidada após o instante  $N$ . O **fator cauda** representa então um valor que reflete a evolução esperada após o último ano de desenvolvimento apresentado no triângulo run-off.

### 3.4 Métodos Determinísticos

São classificados como métodos determinísticos os métodos que se baseiam apenas nos dados históricos, sem considerar qualquer distribuição de probabilidade para estimar valores futuros.

#### 3.4.1 Método Chain Ladder

O método Chain Ladder é um algoritmo determinístico de previsão eficaz e de fácil aplicabilidade. É um dos métodos de previsão mais conhecido e utilizado dada a sua simplicidade e a aproximação dos seus resultados com a realidade.

Este método baseia-se no cálculo de uma sequência de fatores de desenvolvimento em função dos períodos de desenvolvimento de cada período de ocorrência. Estes fatores,

juntamente com os dados existentes, permitem a estimação das reservas.

Este método apresenta os seguintes pressupostos:

- A frequência de sinistralidade pode variar ao longo do tempo;
- Os montantes para os diferentes períodos de ocorrência são independentes;
- Os fatores de desenvolvimento são os mesmos ao longo dos períodos de ocorrência, ou seja, existe proporcionalidade entre os seus períodos de desenvolvimento.

Define-se fator de desenvolvimento,  $f_j$ , como a razão dos montantes acumulados no final do período de desenvolvimento  $j + 1$  e os montantes acumulados no final do período de desenvolvimento  $j$ , ou seja:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{k=1}^{N-j} C_{k,j+1}}{\sum_{k=1}^{N-j} C_{k,j}} \quad \text{para } 1 \leq j \leq n - 1 \quad (3.6)$$

Os valores dos montantes acumulados para os períodos de desenvolvimento são estimados através da seguinte fórmula:

$$\hat{C}_{i,j} = \hat{C}_{i,j-1} \hat{f}_{j-1} \quad \text{para } 2 \leq i \leq N \quad \text{e} \quad N - i + 2 \leq j \leq N \quad (3.7)$$

onde  $\hat{C}_{i,N-i+1} = C_{i,N-i+1}$ .

A estimação do total de pagamentos e a reserva para cada período de ocorrência são calculados da seguinte forma:

$$\hat{C}_{i,N} = C_{i,N-i+1} \hat{f}_{N-i+1} \dots \hat{f}_{N-1} \quad \text{para } 2 \leq i \leq N \quad (3.8)$$

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{i,N} - C_{i,N-i+1} \quad (3.9)$$

onde,

- $\hat{C}_{i,N}$  representa o valor total de montantes previstos para o período de ocorrência  $i$ ;
- $\hat{R}_i$  representa a reserva para o período de ocorrência  $i$ .

A reserva total é estimada através da seguinte fórmula:

$$\hat{R} = \sum_{t=1}^N \hat{R}_t \quad (3.10)$$

Segue um exemplo para melhor entendimento do funcionamento do método Chain Ladder.

### Exemplo

Considere-se o seguinte triângulo run-off, na forma acumulada, de pagamentos de indemnizações desde 1981 a 1987.

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
1981	5012	8269	10907	11805	13539	16181	18009
1982	106	4285	5396	10666	13782	15599	
1983	3410	8992	13873	16141	18735		
1984	5655	11555	15766	21266			
1985	1092	9565	15836				
1986	1513	6445					
1987	557						

**Tabela 3.3:** Triângulo run-off com montantes acumulados, Fonte: Carrato et al. [2017]

Visualizando o triângulo run-off tiram-se algumas conclusões iniciais:

- O período considerado é anual e mostra as indemnizações pagas entre 1981 e 1987;
- Relativamente aos sinistros ocorridos em 1981 verifica-se que houve pagamentos de indemnizações no próprio ano, 5012, mas também houve nos anos seguintes (até 1987), respetivamente, 3257, 2638, 898, 1734, 2642, 1828;
- Relativamente aos sinistros ocorrido em 1982, conhecem-se os pagamentos de indemnizações entre 1982 e 1987. Um dos montantes a ser estimado é o valor pago em 1988 relativamente aos sinistros ocorridos em 1982;
- Tal como em 1982, também são estimados montantes pagos relativos aos anos de ocorrência de 1983 até 1987;
- Assume-se que os pagamentos desconhecidos e que serão estimados seguem o mesmo padrão dos já conhecidos.

Em primeiro lugar é necessário calcular os fatores de desenvolvimento recorrendo à fórmula (3.6):

$$f_1 = \frac{\sum_{x=1}^6 C_{x,2}}{\sum_{x=1}^6 C_{x,1}} = 2.925, f_2 = \frac{\sum_{x=1}^5 C_{x,3}}{\sum_{x=1}^5 C_{x,2}} = 1.448, f_3 = \frac{\sum_{x=1}^4 C_{x,4}}{\sum_{x=1}^4 C_{x,3}} = 1.303$$

$$f_4 = \frac{\sum_{x=1}^3 C_{x,5}}{\sum_{x=1}^3 C_{x,4}} = 1.193, f_5 = \frac{\sum_{x=1}^2 C_{x,6}}{\sum_{x=1}^2 C_{x,5}} = 1.163, f_6 = \frac{C_{1,7}}{C_{1,6}} = 1.114$$

Tendo os fatores de desenvolvimento é possível estimar os montantes acumulados dos pagamentos, recorrendo à fórmula (3.7), e completar o triângulo run-off.

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
1981	5012	8269	10907	11805	13539	16181	18009
1982	106	4285	5396	10666	13782	15599	<b>17377</b>
1983	3410	8992	13873	16141	18735	<b>21789</b>	<b>24273</b>
1984	5655	11555	15766	21266	<b>25370</b>	<b>29506</b>	<b>32869</b>
1985	1092	9565	15836	<b>20634</b>	<b>24617</b>	<b>28629</b>	<b>31893</b>
1986	1513	6445	<b>9332</b>	<b>12160</b>	<b>14507</b>	<b>16872</b>	<b>18795</b>
1987	557	<b>1629</b>	<b>2359</b>	<b>3074</b>	<b>3667</b>	<b>4265</b>	<b>4751</b>

**Tabela 3.4:** Triângulo run-off com montantes acumulados, Fonte: Carrato et al. [2017]

Por fim já é possível calcular a reserva para cada um dos anos de ocorrência e, consequentemente, a reserva total.

Ano de ocorrência	Reserva
1981	0
1982	1778
1983	5538
1984	11603
1985	16057
1986	12350
1987	4194
Total	51520

**Tabela 3.5:** Total de Reservas para o triângulo run-off

Como foi mostrado na tabela (3.5), a reserva total para o caso em estudo é 51520*euros*. Esta reserva estimada corresponde ao montante que a seguradora tem de manter para os sinistros ocorridos entre 1981 e 1987 cobrindo o pagamento de indemnizações até 1993.

### 3.5 Métodos Estocásticos

Como foi possível ver, os métodos determinísticos (neste caso, o método Chain Ladder) são bastantes simples e facilmente aplicáveis. O grande problema nestes métodos é que são estimadas reservas pontuais, ou seja, não é considerada qualquer variabilidade nos resultados.

Os métodos estocásticos são métodos que consideram essa variabilidade nos resultados.

Estes métodos estimam desvios-padrão, erros de previsão e intervalos de confiança conforme o método que é considerado. Dentro destes métodos existem métodos paramétricos, ou seja, métodos que assumem as estimativas através de uma distribuição de probabilidade e métodos não paramétricos que estimam erros de previsão.

### 3.5.1 Método de Bootstrap (aplicado ao Chain Ladder)

A metodologia de *Bootstrap* é uma técnica de reamostragem, introduzida por Efron e Tibshirani [1993], com o objetivo de obter diversas informações de um conjunto de dados, normalmente obtidos por métodos analíticos. Para o caso em estudo, a metodologia de *Bootstrap* é aplicado com o objetivo de calcular provisões para sinistros.

England e Verrall [1999] utilizaram, inicialmente, a metodologia de *Bootstrap* para estimar o erro das estimativas das reservas do método Chain Ladder. England [2001], posteriormente, recorreu ao método para simular o erro do processo, além de utilizar o método de *Bootstrap*, com o objetivo de obter a estimação do erro e também de uma distribuição preditiva.

Considerando uma aplicação básica do método de *Bootstrap* ao método Chain Ladder, onde os dados são considerados independentes e identicamente distribuídos, a reamostragem, com reposição, ocorre a partir dos dados presentes no triângulo run-off.

O procedimento apresentado em seguida tem como base o trabalho de England e Verrall [2002].

- Ao triângulo run-off é aplicado o método Chain Ladder de modo a obter os montantes da parte inferior do triângulo, as reservas de cada período de ocorrência e a reserva total;
- Os dados presentes no triângulo são ajustados a partir da diagonal  $C_{i,N+1-i}$  considerando

$$\widehat{C}_{i,N+1-i} \equiv C_{i,N+1-i}; \quad \widehat{C}_{i,j} = \frac{C_{i,N+1-i}}{\widehat{f}_{N-i} \cdot \dots \cdot \widehat{f}_j}, \quad i + j \leq N \quad (3.11)$$

- Calculam-se os resíduos de Pearson padronizados através da seguinte expressão

$$r_{i,j} = \frac{(C_{i,j} - C_{i,j-1}) - (\widehat{C}_{i,j} - \widehat{C}_{i,j-1})}{\sqrt{\widehat{C}_{i,j} - \widehat{C}_{i,j-1}}}, \quad i + j \leq N + 1 \quad (3.12)$$

- O ciclo bootstrap é iniciado e repetido  $R$  vezes seguindo o seguinte procedimento
  - É feita uma reamostragem, com reposição, dos resíduos de modo a ter um novo

triângulo de resíduos;

- É construído um novo triângulo, na forma incremental, com dados novos obtidos através da inversão da expressão dos resíduos de Pearson

$$X_{i,j}^* = r_{i,j}^* \sqrt{\widehat{C}_{i,j} - \widehat{C}_{i,j-1}} + \widehat{C}_{i,j} - \widehat{C}_{i,j-1}, \quad i + j \leq N + 1 \quad (3.13)$$

- Converte-se o novo triângulo para a forma cumulativa
  - É aplicado o método Chain Ladder ao novo triângulo de modo a obter os montantes da parte inferior do triângulo, as reservas para cada período de ocorrência e a reserva total.
- Efetuado o ciclo bootstrap  $R$  vezes, é obtida a distribuição preditiva das reservas, onde o seu valor médio corresponde ao montante das reservas.
  - Através da amostra das reservas obtidas é possível retirar diversas informações, tais como, o desvio-padrão, o erro quadrático médio e os percentis.

### Exemplo

Considere-se o triângulo run-off da [Tabela 3.3](#). Os fatores de desenvolvimento são obtidos através do método Chain Ladder.

Considerando a equação (3.11), os dados do triângulo são ajustados a partir da diagonal, como mostra a [Tabela 3.6](#).

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
1981	2112	6180	8948	11662	13911	16181	<b>18009</b>
1982	2037	5958	8626	11243	13410	<b>15599</b>	
1983	2845	8323	12051	15707	<b>18735</b>		
1984	3852	11269	16317	<b>21266</b>			
1985	3739	10937	<b>15836</b>				
1986	5413	<b>6445</b>					
1987	<b>557</b>						

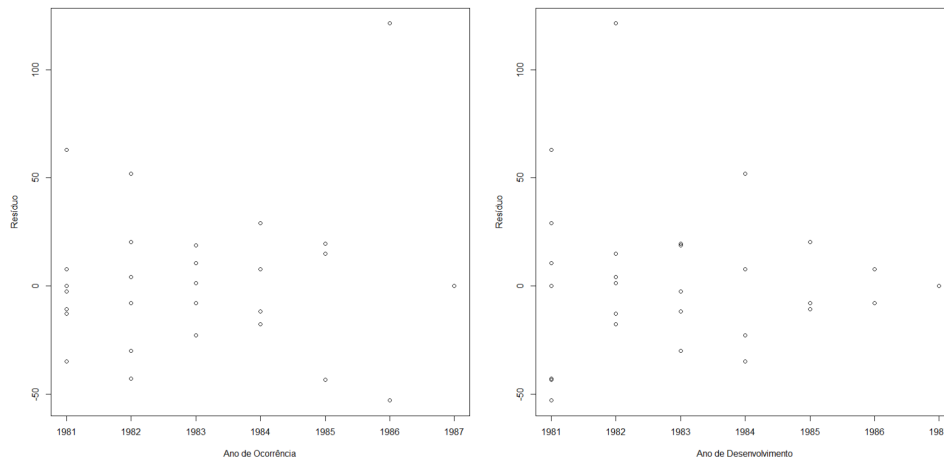
**Tabela 3.6:** Triângulo com os dados ajustados

Obtidos os dados ajustados, são calculados os resíduos de Pearson.

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
1981	63.085	-12.706	-2.475	-34.862	-10.848	7.800	0.000
1982	-42.779	4.120	-30.152	51.871	20.373	-7.945	
1983	10.590	1.407	18.879	-22.950	-7.889		
1984	29.049	-17.611	-11.778	7.826			
1985	-43.285	15.025	19.600				
1986	-53.012	121.433					
1987	0.000						

**Tabela 3.7:** Resíduos de Pearson

Antes de iniciar o ciclo bootstrap é necessário verificar a condição de independência, recorrendo ao gráfico dos resíduos.



**Figura 3.2:** Gráficos de Resíduos por ano de ocorrência e por ano de desenvolvimento, respetivamente

Através dos gráficos da [Figura 3.2](#) é possível verificar que os dados não seguem nenhuma tendência confirmando-se assim a sua independência.

Tendo em conta a informação anterior é possível iniciar o ciclo bootstrap, considerando 5000 simulações. Em cada simulação é feita uma reamostragem, com reposição, dos resíduos de modo a obter um novo triângulo. Usando a equação (3.13) são estimados os novos valores, na forma incremental, do triângulo. O triângulo é convertido para a forma cumulativa de modo a que seja aplicado o método Chain Ladder com o objetivo de estimar os montantes finais de cada ano de ocorrência e, conseqüentemente, a reserva total.

Dado o número elevado de simulações, 5000, e considerando o Teorema do Limite Central, as estimativas obtidas são assintoticamente normais.



	<i>Ultimate</i>	Reserva	Erro Padrão	Limite Inferior	Limite Superior
1981	18009	0	0	0	0
1982	17513	1914	2397	1848	1980
1983	24704	5969	4473	5845	6093
1984	33646	12380	6937	12188	12572
1985	32902	17066	8522	16830	17302
1986	19426	12981	7751	12766	13196
1987	5222	4665	7505	4457	4873
Total	151422	54975	18674	54457	55493

**Tabela 3.8:** Resultados obtidos através do método de Bootstrap

A [Tabela 3.8](#) mostra um resumo dos resultados obtidos através do método de Bootstrap. É possível ver que é estimada uma provisão total de 54975 euros com um limite superior de 55493 euros para um nível de significância de 5%.

### 3.5.2 Método de Thomas Mack

Thomas Mack [1993] desenvolveu um método estocástico que estima a variabilidade do método Chain Ladder. O objetivo deste método é manter as características do método Chain Ladder, mas também proporcionar mais informação, tal como, erros de previsão e intervalos de confiança. Através dos intervalos de confiança é possível avaliar a variabilidade das estimativas produzidas pelo método Chain Ladder e assim determinar, com um certo nível de confiança, a viabilidade das previsões.

O método desenvolvido por Mack é um método não paramétrico pois não assume que os dados sigam uma distribuição de probabilidade.

Tal como no método Chain Ladder, no modelo de Mack é necessário testar o método para verificar se é adequado aos dados existentes, ou seja, é necessária a verificação dos três pressupostos testados para o método Chain Ladder. Estes pressupostos já estão implícitos porque a estimação da variabilidade provém das estimativas do método Chain Ladder.

Considere-se  $C_{i,j}$  uma variável aleatória que representa os montantes do triângulo run-off acumulado. Para além destes pressupostos, o modelo de Mack assume três pressupostos adicionais:

1. Existem fatores de desenvolvimento  $f_1, \dots, f_{N-1} > 0$  tal que

$$E(C_{i,j+1} | C_{i,1} \dots C_{i,j}) = C_{i,j} f_j, \quad 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N-1 \quad (3.14)$$

2. As variáveis  $C_{i,j}$  de diferentes períodos de ocorrência são independentes, isto é,

$$\{C_{i,1}, \dots, C_{i,N}\} \text{ e } \{C_{k,1}, \dots, C_{k,N}\}, \text{ com } i \neq k \text{ são independentes} \quad (3.15)$$

3.

$$V(C_{i,j+1}|C_{i,1} \dots C_{i,j}) = \sigma_j^2, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N-1 \quad (3.16)$$

sendo  $\sigma_j^2$  um estimador não enviesado.

Assim, de forma resumida, a equação (3.14) do primeiro pressuposto representa a proporcionalidade entre períodos de desenvolvimento, a equação (3.15) do segundo pressuposto mostra a independência entre diferentes períodos de ocorrência e a equação (3.16) do terceiro pressuposto mostra que, para cada período de desenvolvimento  $j$ , existe um único estimador,  $\sigma_j^2$ , garantindo que os estimadores dos coeficientes de desenvolvimento sejam os de menor variância.

Como já foi visto anteriormente, os fatores de desenvolvimento podem ser estimados através da fórmula (3.6). Já a constante de proporcionalidade,  $\sigma_j^2$ , pode ser estimada da seguinte forma,

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{N-j-1} \sum_{i=1}^{N-j} C_{i,j} \left( \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \hat{f}_j \right)^2 \text{ para } 1 \leq j \leq N-2 \quad (3.17)$$

e, para o caso  $\hat{\sigma}_{j-1}^2$  existe duas possibilidades:

- Se  $\hat{f}_{N-1} = 1$  e a regularização dos sinistros terminar após  $N-1$  anos então  $\hat{\sigma}_{N-1}^2 = 0$ ;
- Caso a regularização dos sinistros não termine após  $N-1$  anos, tem-se  $\hat{\sigma}_{N-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{N-2}^4}{\hat{\sigma}_{N-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{N-3}^2, \hat{\sigma}_{N-2}^2)\right)$

Estimados os montantes totais e as reservas para cada período de ocorrência, através do método Chain Ladder é possível calcular o erro de previsão para cada período de ocorrência. Para estimar esta variabilidade recorre-se ao erro quadrático médio definido pela seguinte expressão:

$$mse(\hat{R}_i) = E((\hat{R}_i - R_i)^2|D) = E((\hat{C}_{i,N} - C_{i,N})^2|D) = mse(\hat{C}_{i,N}) \quad (3.18)$$

onde  $D = \{C_{i,j}|i+j \leq N+1\}$  representa os dados.

Considerando a regra geral  $E(X-a)^2 = Var(X) + (E(X) - a)^2$ , tem-se

$$mse(\hat{C}_{i,N}) = Var(C_{i,N}|D) + (E(C_{i,N}|D) - \hat{C}_{i,N})^2 \quad (3.19)$$

que mostra que o erro quadrático médio é a soma da variabilidade dos dados com a variabilidade associada à previsão.

Assim, considerando os pressupostos (3.14), (3.15) e (3.16), Mack prova que o erro quadrático médio pode ser estimado através da seguinte expressão

$$\widehat{mse}(\widehat{R}_i) = \widehat{C}_{i,N}^2 \sum_{j=N+1-i}^{N-1} \frac{\widehat{\sigma}_j^2}{\widehat{f}_j^2} \left( \frac{1}{\widehat{C}_{i,j}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{N-j} C_{k,j}} \right) \quad (3.20)$$

onde  $\widehat{C}_{i,j} = C_{i,N+1-i} \widehat{f}_{N+1-i} \times \dots \times \widehat{f}_{j-1}$ ,  $j > N+1-i$  são os valores estimados dos futuros  $C_{i,j}$  e  $\widehat{C}_{i,N+1-i} = C_{i,N+1-i}$ .

Além disto, considerando os pressupostos e a notação da expressão (3.20), o autor propõe estimar o erro quadrático médio da reserva total,  $\widehat{R} = \widehat{R}_2 + \dots + \widehat{R}_N$ , através da seguinte expressão,

$$\widehat{mse}(\widehat{R}) = \sum_{i=2}^N (s.e.(\widehat{R}_i))^2 + \widehat{C}_{i,N} \left( \sum_{k=i+1}^N \widehat{C}_{k,N} \right) \sum_{j=N+1-i}^{N-1} \frac{2\widehat{\sigma}_j^2 / \widehat{f}_j^2}{\sum_{p=1}^{N-j} C_{p,j}} \quad (3.21)$$

### 3.6 Métodos que relacionam triângulos de pagamentos com triângulos de cargas

O uso de métodos determinísticos pelos atuários tem vindo a diminuir ao longo do tempo. O facto de serem pedidas propriedades estatísticas das reservas tem levado a esta diminuição. Como tal, o recurso a métodos estocásticos tem aumentado.

Apesar destes métodos terem cada vez mais destaque, é necessário ter em consideração outro tipo de dificuldades que alguns métodos estocásticos não conseguem colmatar como, por exemplo, a dualidade de triângulos para o mesmo ramo.

Como já foi mencionado, para cada ramo existe um triângulo de pagamentos de indemnizações. Mas, para além deste, também existe um triângulo de custos (ou cargas).

Como já foi explicado, os pagamentos das indemnizações não são efetuados logo após a ocorrência do sinistro. Aliás, pode demorar anos até que as indemnizações de um sinistro estejam totalmente liquidadas. Assim, quando um sinistro é reportado, é estimado um valor total das indemnizações relativas a esse sinistro.

Portanto, o triângulo dos custos é calculado da seguinte forma. Às indemnizações já liquidadas é somado o valor das indemnizações que ainda está por liquidar.

Normalmente, o triângulo dos pagamentos e o triângulo dos custos são estudados separadamente, ignorando qualquer correlação existente entre os dois.

Assim foram criados alguns métodos que estudam a dependência existente entre estes triângulos como, por exemplo, o Método de Munich Chain Ladder.

### 3.6.1 Método de Munich Chain Ladder

Quarg e Mack [2004] introduziram um método, denominado por *Munich Chain Ladder*, que efetua uma previsão mais consistente do montante de indemnizações considerando os dados presentes no triângulo run-off dos pagamentos e no triângulo run-off dos custos. O método Munich Chain Ladder foi concebido para lidar com a correlação existente entre o triângulo dos pagamentos e o triângulo dos custos.

#### Notação

Seja  $N$  o número de períodos de ocorrência e de períodos de desenvolvimento (como já foi mencionado, apenas serão considerados triângulos em que o número de períodos de ocorrência é igual ao número de períodos de desenvolvimento).

Para  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, N - i + 1$ , sejam  $P_{i,j}$  os pagamentos acumulados observados e  $I_{i,j}$  os custos acumulados observados relativos ao período de ocorrência  $i$  e período de desenvolvimento  $j$ .

O método de Munich Chain Ladder tem o mesmo objetivo que os métodos apresentados que é a estimação dos valores em falta no triângulo run-off. Assim são estimados os montantes  $P_{i,j}$  e  $C_{i,j}$ , com  $2 \leq i \leq N$  e  $N - i + 2 \leq j \leq N$ , para cada um dos triângulos de modo a preencher o triângulo inferior.

São introduzidas também as proporções entre pagamentos e custos e o seu inverso

$$(P/I)_{i,j} = Q_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{I_{i,j}} \quad e \quad (I/P)_{i,j} = Q_{i,j}^{-1} = \frac{I_{i,j}}{P_{i,j}} \quad (3.22)$$

do período de ocorrência  $i$  e período de desenvolvimento  $j$ .

Por fim são definidos os fatores de desenvolvimento para os pagamentos e para os custos, com  $j = 1, \dots, N - 1$ , utilizando a expressão apresentada no método Chain Ladder,

$$f_j^P = \frac{\sum_{k=1}^{N-j} P_{k,j+1}}{\sum_{k=1}^{N-j} P_{k,j}} \quad f_j^I = \frac{\sum_{k=1}^{N-j} I_{k,j+1}}{\sum_{k=1}^{N-j} I_{k,j}} \quad (3.23)$$

As observações relativas ao período de ocorrência  $i$  até ao período de desenvolvimento  $k$  são definidas pelas seguintes expressões,

$$P_i(k) = \{P_{i,j} : j \leq k\} \quad (3.24)$$

$$I_i(k) = \{I_{i,j} : j \leq k\} \quad (3.25)$$

$$B_i(k) = \{P_{i,j}, I_{i,j} : j \leq k\} \quad (3.26)$$

que representam, respetivamente, o triângulo dos pagamentos, o triângulo dos custos e ambos os triângulos.

As estimações dos montantes futuros,  $P_{i,j}$  e  $I_{i,j}$ , com  $2 \leq i \leq N$  e  $N - i + 2 \leq j \leq N$ , são definidas como,

$$P_{i,j+1} = P_{i,j} \cdot f_j^P \quad I_{i,j+1} = I_{i,j} \cdot f_j^I \quad (3.27)$$

Este modelo baseia-se em diversos pressupostos que podem ser consultados no trabalho de Quarg e Mack (2004).

### Estimação de parâmetros não enviesados do modelo Munich Chain Ladder

Quarg e Mack [2004] propuseram estimativas não enviesadas para os parâmetros necessários para o método de Munich Chain Ladder que serão apresentadas de seguida.

Em relação aos fatores de desenvolvimento  $f_j^P$  e  $f_j^I$ , para  $j = 1, \dots, N - 1$ , são usados os estimadores do método Chain Ladder. São também estimadas as proporções relativas ao ano de desenvolvimento  $j$ .

$$\widehat{f}_j^P = \frac{\sum_{k=1}^{N-j} P_{k,j+1}}{\sum_{k=1}^{N-j} P_{k,j}} \quad e \quad \widehat{q}_j^{-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N-j+1} I_{i,j}}{\sum_{i=1}^{N-j+1} P_{i,j}} \quad (3.28)$$

e

$$\widehat{f}_j^I = \frac{\sum_{k=1}^{N-j} I_{k,j+1}}{\sum_{k=1}^{N-j} I_{k,j}} \quad e \quad \widehat{q}_j = \frac{\sum_{i=1}^{N-j+1} P_{i,j}}{\sum_{i=1}^{N-j+1} I_{i,j}} \quad (3.29)$$

em que as expressões (3.28) são relativas aos pagamentos e as expressões (3.29) são relativas aos custos.

Para  $j = 1, \dots, N - 2$ , as estimativas não enviesadas das variâncias para os pagamentos são as seguintes:

$$(\widehat{\sigma}_j^P)^2 = \frac{1}{N - j - 1} \sum_{i=1}^{N-j} P_{i,j} \left( \frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} - \widehat{f}_j^P \right)^2 \quad (3.30)$$

e

$$(\widehat{\theta}_j^P)^2 = \frac{1}{N - j} \sum_{i=1}^{N-j+1} P_{i,j} (Q_{i,j}^{-1} - \widehat{q}_j^{-1})^2 \quad (3.31)$$

Do mesmo modo, as estimativas não enviesadas das variâncias para os custos são:

$$(\widehat{\sigma}_j^I)^2 = \frac{1}{N - j - 1} \cdot \sum_{i=1}^{N-j} I_{i,j} \cdot \left( \frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} - \widehat{f}_j^I \right)^2 \quad (3.32)$$

e

$$(\widehat{\theta}_j^I) = \frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j+1} I_{i,j} (Q_{i,j} - \widehat{q}_j)^2 \quad (3.33)$$

Conseqüentemente, as estimativas dos desvios-padrão são  $\widehat{\sigma}_j^P = \sqrt{(\widehat{\sigma}_j^P)^2}$ ,  $\widehat{\theta}_j^P = \sqrt{(\widehat{\theta}_j^P)^2}$ ,  $\widehat{\sigma}_j^I = \sqrt{(\widehat{\sigma}_j^I)^2}$  e  $\widehat{\theta}_j^I = \sqrt{(\widehat{\theta}_j^I)^2}$ , respetivamente.

Os resíduos de Pearson para os pagamentos e para os custos são calculados através das seguinte expressões:

$$r_{i,j}^P = \frac{P_{i,j+1} - \widehat{f}_j^P}{\widehat{\sigma}_j^P} \sqrt{P_{i,j}} \quad e \quad r_{i,j}^{Q^{-1}} = \frac{Q_{i,j}^{-1} - \widehat{q}_j^{-1}}{\widehat{\theta}_j^P} \sqrt{P_{i,j}} \quad (3.34)$$

e

$$r_{i,j}^I = \frac{I_{i,j+1} - \widehat{f}_j^I}{\widehat{\sigma}_j^I} \sqrt{I_{i,j}} \quad e \quad r_{i,j}^Q = \frac{Q_{i,j} - \widehat{q}_j}{\widehat{\theta}_j^I} \sqrt{I_{i,j}} \quad (3.35)$$

Assim é possível chegar à estimativa dos coeficientes de correlação para os pagamentos e para os custos,

$$\widehat{\rho}^P = \frac{\sum_{i,j} r_{i,j}^{Q^{-1}} r_{i,j}^P}{\sum_{i,j} (r_{i,j}^{Q^{-1}})^2} \quad (3.36)$$

e

$$\widehat{\rho}^I = \frac{\sum_{i,j} r_{i,j}^Q r_{i,j}^I}{\sum_{i,j} (r_{i,j}^Q)^2} \quad (3.37)$$

Considerando os coeficientes de correlação (3.36) e (3.37) obtém-se as fórmulas recursivas para os pagamentos e para os custos,

$$\widehat{P}_{i,j+1} = \widehat{P}_{i,j} (\widehat{f}_j^P + \widehat{\rho}^P \frac{\widehat{\sigma}_j^P}{\widehat{\theta}_j^P} (Q_{i,j}^{-1} - \widehat{q}_j^{-1})) \quad (3.38)$$

e

$$\widehat{I}_{i,j+1} = \widehat{I}_{i,j} (\widehat{f}_j^I + \widehat{\rho}^I \frac{\widehat{\sigma}_j^I}{\widehat{\theta}_j^I} (Q_{i,j} - \widehat{q}_j)) \quad (3.39)$$

onde  $1 \leq N$  e  $N - i + 1 \leq j \leq N - 1$  e considerando  $\widehat{P}_{i,j} = P_{i,j}$  e  $\widehat{I}_{i,j} = I_{i,j}$  para  $j = N - i + 1$  como valores iniciais.

Por fim, as reservas, para cada período de ocorrência  $i$ , são calculadas através de

$$\widehat{R}_i^P = \widehat{P}_{i,N} - P_{i,N-i+1} \quad (3.40)$$

e

$$\widehat{R}_i^I = \widehat{I}_{i,N} - I_{i,N-i+1} \quad (3.41)$$

para o triângulo run-off dos pagamentos e o triângulo run-off dos custos, respetivamente.

### 3.7 Distribuição Log-Normal

Em teoria da probabilidade, a distribuição log-normal é uma distribuição de probabilidade contínua. Seja  $X$  uma variável aleatória que segue uma distribuição log-normal com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ . Então  $Y = \ln(X)$  segue uma distribuição normal com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ .

A sua função de densidade de probabilidade (PDF) é:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x > 0$$

O valor esperado de  $X$  é:

$$E(X) = E(\exp(Y)) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

A variância de  $X$  é:

$$\text{var}(X) = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1)$$

#### 3.7.1 Estimação dos parâmetros da distribuição log-normal dados dois quantis

Seja  $X$  uma variável aleatória que segue uma distribuição log-normal com parâmetros  $\mu$  e  $\sigma$ . Logo,  $Y = \ln(X)$  segue uma distribuição normal com média  $\mu$  e desvio-padrão  $\sigma$ . A variável aleatória  $X$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\ln(X) = \mu + \sigma Z \Leftrightarrow X = e^{\mu + \sigma Z}$$

onde  $Z \sim N(0, 1)$ .

Dadas as probabilidades  $p_1$  e  $p_2$ , considere-se os valores  $x_1$  e  $x_2$ , tais que

$$\begin{cases} P(X < x_1) = p_1 \\ P(X < x_2) = p_2 \end{cases}$$

Para que o problema seja consistente é necessário impor  $(p_1 - p_2)(x_1 - x_2) > 0$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} P(Y < \ln(x_1)) = p_1 \\ P(Y < \ln(x_2)) = p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{\ln(x_1)-\mu}{\sigma}\right) = p_1 \\ P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} < \frac{\ln(x_2)-\mu}{\sigma}\right) = p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P(Z < \frac{\ln(x_1)-\mu}{\sigma}) = p_1 \\ P(Z < \frac{\ln(x_2)-\mu}{\sigma}) = p_2 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\ln(x_1)-\mu}{\sigma} = z_{p_1} \\ \frac{\ln(x_2)-\mu}{\sigma} = z_{p_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \ln(x_1) - z_{p_1}\sigma \\ \mu = \ln(x_2) - z_{p_2}\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \ln(x_1) - z_{p_1}\sigma \\ \ln(x_1) - z_{p_1}\sigma = \ln(x_2) - z_{p_2}\sigma \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \ln(x_1) - z_{p_1}\sigma \\ \ln(x_1) - \ln(x_2) = z_{p_1}\sigma - z_{p_2}\sigma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = \ln(x_1) - z_{p_1} \frac{\ln(\frac{x_1}{x_2})}{(z_{p_1} - z_{p_2})} \\ \sigma = \frac{\ln(\frac{x_1}{x_2})}{(z_{p_1} - z_{p_2})} \end{cases} \quad (3.42)
 \end{aligned}$$





# Capítulo 4

## Aplicação Prática

Neste capítulo, os diversos métodos apresentados serão aplicados a dados reais fornecidos pela AGEAS Seguros. Aos dados fornecidos foi aplicada uma percentagem de modo a manter a confidencialidade dos dados da companhia.

### 4.1 Tábuas de Mortalidade - Método de Lee-Carter

O conjunto de dados, fornecido pela AGEAS Seguros, contém dados entre 2006 e 2016 relativos aos pensionistas de todas as companhias de Portugal. Os dados estão divididos por género e idade entre os 0 e os 120 anos.

Para o caso em estudo, não será considerada a diferença de género. A idade de interesse é entre os 25 e os 75 anos.

#### 4.1.1 Análise Gráfica

Inicialmente foi feita uma pequena análise gráfica para ver a evolução do número de pessoas expostas ao risco e o número de mortes, por idade atuarial  $x$ . Considerando a equação (2.1) são calculadas as taxas de mortalidade para cada idade  $x$  entre os anos de 2006 e 2016.

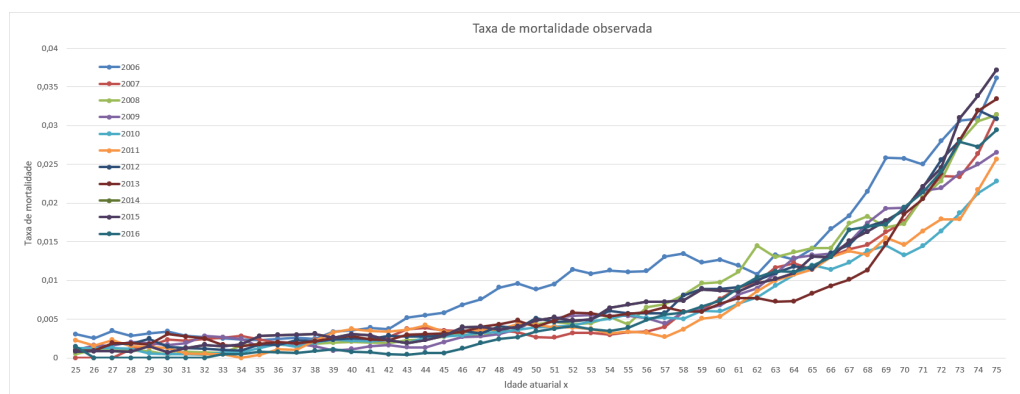


Figura 4.1: Taxa de mortalidade observada entre 2006 e 2016

Do gráfico podem ser tiradas algumas conclusões:

- Entre os 25 e os 42 anos, a taxa de mortalidade comportou-se de forma semelhante para os onze anos em estudo, não existindo nenhum ano que se destacasse;
- Entre os 43 e os 60 anos, a taxa de mortalidade destacou-se em 2006, sendo mais alta neste ano do que nos outros, que se comportaram de forma semelhante;
- Na idade 62 verifica-se um ligeiro aumento da taxa de mortalidade em 2008 em relação aos outros anos;
- Entre os 63 e os 68 anos, a taxa de mortalidade em 2013 é ligeiramente menor que nos outros anos;
- Entre os 68 e os 72 anos, a taxa de mortalidade em 2006 é ligeiramente maior que nos outros anos;
- Entre os 73 e os 75 anos, a taxa de mortalidade varia por cada ano, sendo a menor taxa de mortalidade, aos 75 anos, registada em 2010 e a maior taxa de mortalidade, aos 75 anos, registada em 2015.

#### 4.1.2 Modelo de Lee-Carter: Modelo demográfico

##### Estimação dos parâmetros $\alpha_x$ , $\beta_x$ e $k_t$

Para a previsão de tábuas de mortalidade foram considerados os anos 2006 a 2014. Os anos 2015 e 2016 foram deixados de fora para que, na etapa de avaliação do modelo, existam dados para comparar com as previsões estimadas.

A cada taxa de mortalidade calculada foi aplicado o logaritmo para que o modelo demográfico do modelo de Lee-Carter possa ser aplicado. Foram estimados os parâmetros  $\hat{\alpha}_x$ ,  $\hat{\beta}_x$  e  $\hat{k}_t$  considerando as restrições (2.3).

As estimações destes parâmetros podem ser vistas na [Tabela A.1](#) e na [Tabela A.2](#).

##### Reestimação do parâmetro $\hat{k}_t$

Estimados os parâmetros do modelo demográfico, segue-se para a reestimação do parâmetro  $\hat{k}_t$ . Esta reestimação, como já foi mencionado, deve-se à discrepância existente entre o número de mortes observadas e o número de mortes estimadas pelo facto das estimações terem sido feitas através do logaritmo das taxas de mortalidade. A tabela seguinte mostra as diferenças entre as mortes observadas pelo [ISP](#) e as estimadas pelo modelo demográfico.

Ano $t$	Nº de Mortes Observadas	Nº de Mortes Estimadas	Diferença
2006	290	271	19
2007	173	229	56
2008	214	186	28
2009	209	205	4
2010	173	180	7
2011	167	190	23
2012	205	192	13
2013	187	194	7
2014	234	213	21

**Tabela 4.1:** Nº de Mortes Observadas vs. Nº de Mortes Estimadas

Recorrendo ao método de Newton-Raphson, assumindo um erro de  $1 \times 10^{-4}$  e considerando os  $\hat{k}_t$  como valores iniciais para o método, chegou-se aos  $\ddot{k}_t$  apresentados na seguinte tabela.

Ano $t$	$\ddot{k}_t$
2006	26.0482
2007	-6.8393
2008	4.6739
2009	-4.0009
2010	-19.6256
2011	-18.4562
2012	4.8147
2013	-5.7367
2014	7.8009

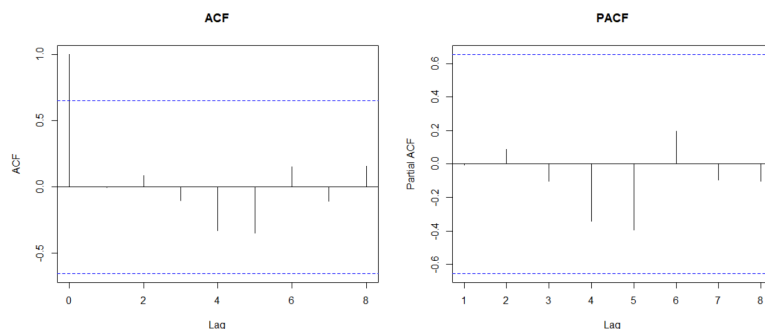
**Tabela 4.2:**  $\ddot{k}_t$  reestimados

### 4.1.3 Modelo de Lee-Carter: Modelo de Séries Temporais

As reestimações do parâmetro  $\ddot{k}_t$  são agora consideradas como uma série temporal para que seja possível encontrar um modelo [ARIMA](#) apropriado e assim gerar previsões.

#### Análise Preliminar da Série

Considere-se a seguinte figura da função de autocorrelação e função de autocorrelação parcial da série temporal  $\ddot{k}_t$ :



**Figura 4.2:** Gráfico da Função de Autocorrelação e Função de Autocorrelação Parcial da série temporal  $\hat{k}_t$

Observando o gráfico da função de autocorrelação da [Figura 4.2](#) não se pode concluir que a série não seja estacionária. A série não apresenta autocorrelações positivas para um número elevado de defasagens, nem apresenta a *lag-1* nula ou negativa, sinais claros de que a série precisa ser diferenciada.

Para confirmar a estacionariedade da série recorreu-se ao teste estatístico [ADF](#) considerando um nível de significância de 0.05.

```

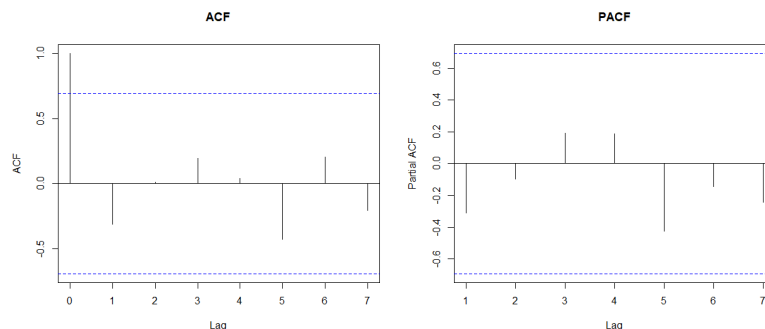
Augmented Dickey-Fuller Test
data: k
Dickey-Fuller = -0.15593, Lag order = 2, p-value = 0.9897
alternative hypothesis: stationary

```

**Figura 4.3:** Teste Estatístico ADF para a série temporal  $\hat{k}_t$

O teste [ADF](#) mostra que a hipótese nula,  $H_0$ , não pode ser rejeitada pois o seu valor-p, 0.9897, é superior ao nível de significância. Assim não pode ser negada a não estacionariedade da série pelo que esta tem de ser diferenciada.

A seguinte figura mostra a função de autocorrelação e a função de autocorrelação parcial da série temporal diferenciada,  $\hat{k}_{1t}$ .



**Figura 4.4:** Gráfico da Função de Autocorrelação e Função de Autocorrelação Parcial da série temporal diferenciada  $\hat{k}_{1t}$

Tal como a série temporal  $\ddot{k}_t$ , as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial da série temporal diferenciada  $\ddot{k}_{1t}$  não apresentam qualquer sinal de não estacionariedade da série. Assim, o teste estatístico **ADF** será novamente considerado para confirmar a estacionariedade da série.

```

Augmented Dickey-Fuller Test

data: k1
Dickey-Fuller = -3.857, Lag order = 1, p-value = 0.03164
alternative hypothesis: stationary
    
```

**Figura 4.5:** Teste Estatístico ADF para a série temporal  $\ddot{k}_{1t}$

O teste **ADF** mostra que a hipótese nula,  $H_0$ , pode ser rejeitada pois o seu valor-p, 0.03164, é inferior ao nível de significância. Assim, a série é estacionária e não precisa ser novamente diferenciada.

Assim, o parâmetro  $d$  do modelo **ARIMA** é 1.

### Identificação da ordem do modelo

Considere-se novamente as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial da série temporal diferenciada  $\ddot{k}_{1t}$  (**Figura 4.4**).

A **PACF** mostra o número de termos autorregressivos indicados para o modelo. Se a **PACF** demonstrar um corte nítido ao longo das defasagens ou se a primeira defasagem for positiva pode indicar a adição de um termo autorregressivo.

Como é possível ver pelo gráfico da **PACF**, a primeira defasagem é negativa indicando que não será necessária a adição de um termo autorregressivo.

A **ACF** mostra o número de termos de médias móveis indicados para o modelo. Se a **ACF** demonstrar um corte nítido ao longo das defasagens ou se a primeira defasagem for negativa pode indicar a adição de um termo de médias móveis.

Como é possível ver pelo gráfico da **ACF**, a primeira defasagem é positiva indicando que não será necessária a adição de um termo de médias móveis.

Para confirmar as informações tiradas da **ACF** e da **PACF** serão considerados como candidatos ao modelo, os modelos  $ARIMA(0, 1, 0)$ ,  $ARIMA(1, 1, 0)$ ,  $ARIMA(0, 1, 1)$  e  $ARIMA(1, 1, 1)$ . A escolha do modelo recai sobre o critério **AIC**.

Modelo ARIMA	AIC
ARIMA(0, 1, 0)	72.09
ARIMA(1, 1, 0)	72.68
ARIMA(0, 1, 1)	72.63
ARIMA(1, 1, 1)	74.63

Tabela 4.3: AIC dos modelos candidatos

Observando a Tabela 4.3 verifica-se que o modelo ARIMA que apresenta menor AIC é o modelo ARIMA(0, 1, 0), ou seja, este é o modelo que melhor se ajusta aos dados. A informação tirada da tabela veio apenas confirmar as conclusões tiradas a partir da ACF e da PACF de que não eram necessárias adições de termos autorregressivos e de termos de médias móveis.

### Estimação dos parâmetros

O modelo ARIMA(0, 1, 0) é o seguinte:

$$\ddot{k}_t = \lambda + \ddot{k}_{t-1} + \mu_t \tag{4.1}$$

onde,

- $\ddot{k}_t$  e  $\ddot{k}_{t-1}$  são observações da série temporal;
- $\lambda$  é o drift (tendência);
- $\mu_t \sim N(0, \sigma_\mu^2)$ .

O drift do modelo ARIMA(0, 1, 0) é o seguinte:

drift	s.e
-2.2809	6.0330

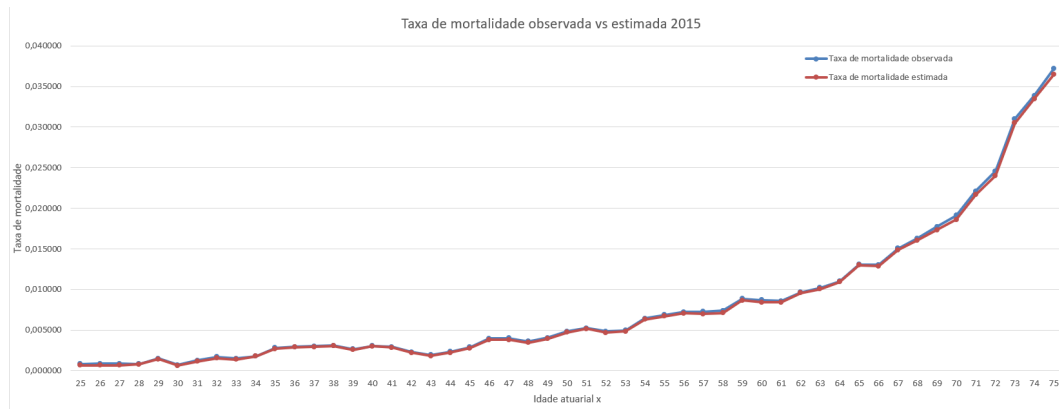
Tabela 4.4: Drift do modelo ARIMA(0, 1, 0)

### Avaliação do modelo

Com base no modelo é gerada uma previsão  $\{\dot{k}_{t_{max}+s} : s > 0\}$  para o índice temporal de mortalidade dado por:

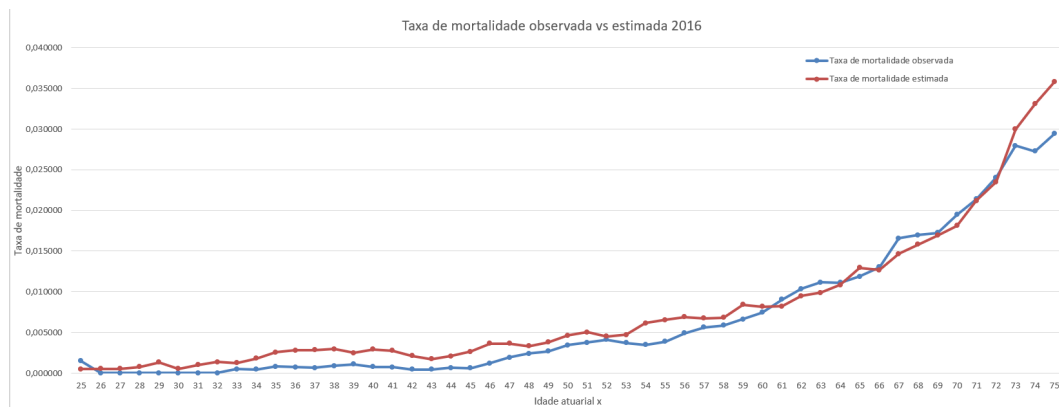
$$\dot{k}_{t_{max}+s} = E[\lambda s + \ddot{k}_{t_{max}} + \sum_{t=1}^s \mu_t] = \ddot{k}_{t_{max}} + \lambda s \tag{4.2}$$

Assim, através da equação (2.15), é possível chegar às previsões das taxas de mortalidade dos anos 2015 e 2016 e compará-las com as taxas de mortalidade observadas.



**Figura 4.6:** Taxa de mortalidade observada vs. Taxa de mortalidade estimada 2015

A Figura 4.6 mostra a comparação da taxa de mortalidade observada com a taxa de mortalidade estimada para o ano de 2015. Observando o gráfico conclui-se que o modelo se adapta bem aos dados reais. O valor **RMSE** para o ano 2015 é  $2.34 \times 10^{-4}$ .



**Figura 4.7:** Taxa de mortalidade vs. Taxa de mortalidade estimada 2016

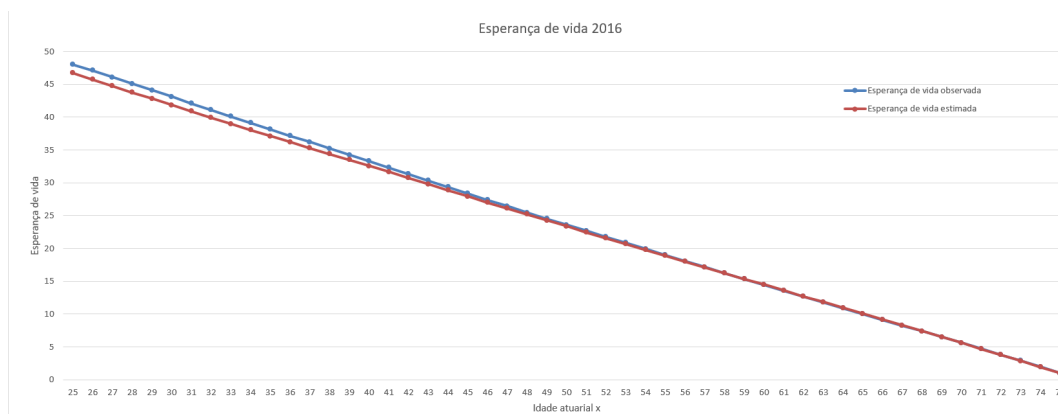
A Figura 4.7 mostra a comparação da taxa de mortalidade observada com a taxa de mortalidade estimada para o ano de 2016. Analisando o gráfico, verifica-se que começam a aparecer algumas discrepâncias em algumas idades. A maior diferença apresenta-se entre os 73 e os 75 anos onde a taxa de mortalidade observada é superior à taxa de mortalidade estimada. O valor **RMSE** para o ano de 2016 é  $1.86 \times 10^{-3}$ . Pode-se então concluir que o modelo **ARIMA** escolhido,  $ARIMA(0, 1, 0)$ , se ajusta bem aos dados. Assim, pode-se seguir para a projeção das tábuas de mortalidade.



#### 4.1.4 Projeção de Tábuas de Mortalidade

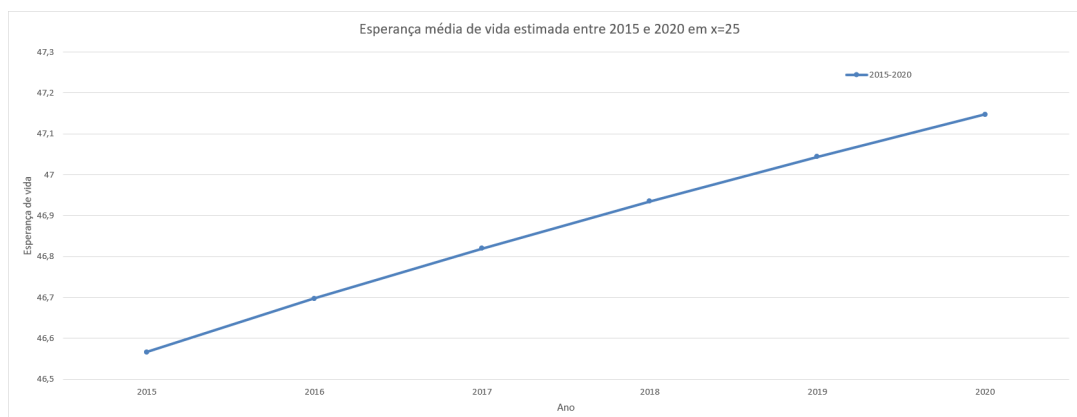
Através das fórmulas (2.15), (2.16), (2.17), (2.18), (2.19), (2.20) e (2.21) é possível construir as tábuas de mortalidade para os anos 2015 (Tabela B.1), 2016 (Tabela B.2), 2017 (Tabela B.3), 2018 (Tabela B.4), 2019 (Tabela B.5) e 2020 (Tabela B.6), presentes em anexo.

Construídas as tábuas foram analisados alguns dados de interesse presentes nelas.



**Figura 4.8:** Esperança média de vida esperada vs. Esperança média de vida observada em 2016

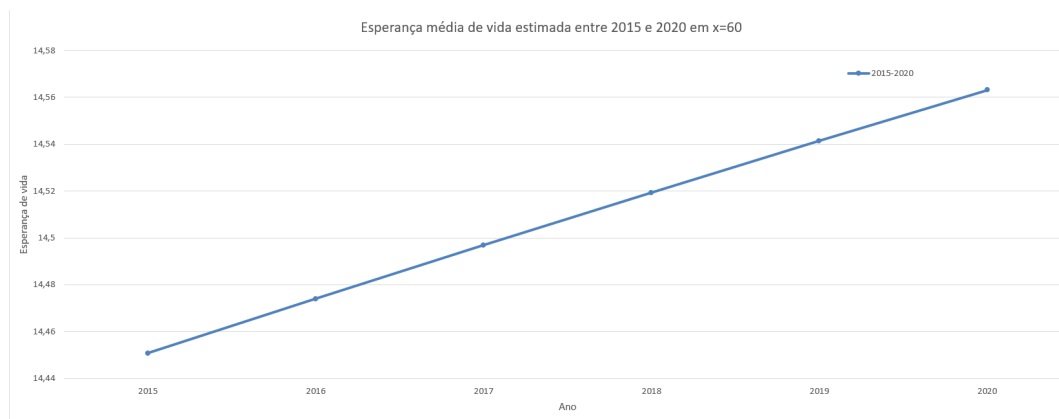
É possível ver no gráfico da Figura 4.8 a esperança média de vida observada e estimada relativa ao ano de 2016. É possível ver que entre os 25 e 55, a esperança média de vida observada é superior à estimada (sendo mais evidente nos primeiros anos). A partir dos 55 anos, a esperança média de vida observada e estimada estão sobrepostas, ou seja, a estimativa da esperança média de vida é muito próxima à realidade.



**Figura 4.9:** Esperança média de vida estimada entre 2015 e 2020 quando  $x = 25$

O gráfico da Figura 4.9 mostra a esperança média de vida estimada para os anos de 2015 até 2020 para as pessoas com 25 anos. Como era de esperar, dada a informação histórica

obtida, a esperança média de vida continuará crescente ao longo dos anos havendo um aumento de 0.58 anos no espaço de 6 anos.



**Figura 4.10:** Esperança média de vida estimada entre 2015 e 2020 quando  $x = 60$

O gráfico da [Figura 4.10](#) mostra a esperança média de vida estimada para os anos de 2015 até 2020 para as pessoas com 60 anos. Como era de esperar, dada a informação histórica obtida, a esperança média de vida continuará crescente ao longo dos anos havendo um aumento de 0.11 anos no espaço de 6 anos.

## 4.2 Métodos de Provisão de Sinistros

O conjunto de dados fornecido pela **AGEAS Seguros** é composto por todos os sinistros do ramo **Multirriscos Habitação (MRH)** compreendidos entre Janeiro de 2004 e Dezembro de 2017. Os valores presentes encontram-se em milhares de euros.

### 4.2.1 Seguro Habitação

Os edifícios em regime de propriedade horizontal são obrigados a ter um seguro de incêndio que cobre o risco de danos causados diretamente por incêndios quer nas frações autónomas quer nas partes do edifício comuns.

Mas, para além do risco de incêndio, estes edifícios correm outros riscos, tais como, roubos ou inundações.

Para cobrir estes danos, muitas vezes os proprietários dos imóveis recorrem a um seguro multirriscos habitação (**MRH**). Este seguro cobre um leque alargado de riscos que vai para além dos incêndios.

O seguro **MRH** oferece conjuntos de coberturas de danos nos imóveis ou no recheio, tais como:

- Estragos nas paredes, chão e mobiliário causados por problemas na distribuição de águas e esgotos;
- Indemnizações por bens furtados e roubados, bem como pelos estragos em portas e janelas;
- Danos causados por tempestades;
- Inundações e aluimento de terras;
- Demolição e remoção de escombros em caso de queda da fachada ou telhado;
- Indemnizações a terceiros por danos involuntários (por exemplo, a queda de um vaso em alguém ou numa viatura);
- Danos em aparelhos elétricos por sobrecarga ou curto-circuito;
- Entre outros.

Os dados estão organizados em dois triângulos run-off. O primeiro refere-se ao triângulo run-off, na forma acumulada, dos pagamentos efetuados. O segundo triângulo refere-se ao triângulo run-off, na forma acumulada, das cargas (ou custos).

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
2004	4610	6186	6268	6286	6305	6486	6699
2005	4575	6179	6201	6218	6266	6278	6267
2006	4761	7458	7616	7654	7688	7719	7754
2007	4815	7199	7337	7350	7365	7556	7559
2008	7957	10865	10930	10942	10955	10970	10973
2009	7654	12100	12213	12285	12294	12297	12300
2010	10464	13854	14042	14142	14138	14141	14144
2011	9631	12923	13033	13194	13213	13232	13237
2012	9158	12543	12676	12751	12780	12800	
2013	12969	16736	17047	17435	17460		
2014	10205	13945	14080	14275			
2015	6476	9209	9344				
2016	6945	9656					
2017	10077						

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	8	9	10	11	12	13	14
2004	6697	6697	6698	6701	6702	6702	6702
2005	6414	6413	6413	6413	6413	6415	
2006	7865	7865	7865	7865	7865		
2007	7557	7558	7558	7558			
2008	10973	10973	10974				
2009	12300	12300					
2010	14146						

**Tabela 4.5:** Triângulo Run-off dos pagamentos acumulados do ramo MRH

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
2004	5583	6379	6355	6426	6543	6698	6712
2005	5905	6477	6429	6483	6446	6450	6428
2006	6785	7643	7766	7783	7817	7823	7837
2007	6431	7313	7383	7420	7438	7581	7559
2008	9636	10948	11126	11147	11114	11005	10990
2009	9160	12318	12403	12451	12305	12297	12300
2010	12149	13976	14133	14233	14193	14170	14159
2011	10968	13137	13171	13251	13251	13241	13239
2012	11814	12887	12837	12810	12823	12837	
2013	15225	17289	17493	17681	17514		
2014	13067	14251	14402	14616			
2015	8404	9364	9450				
2016	8819	9912					
2017	12771						

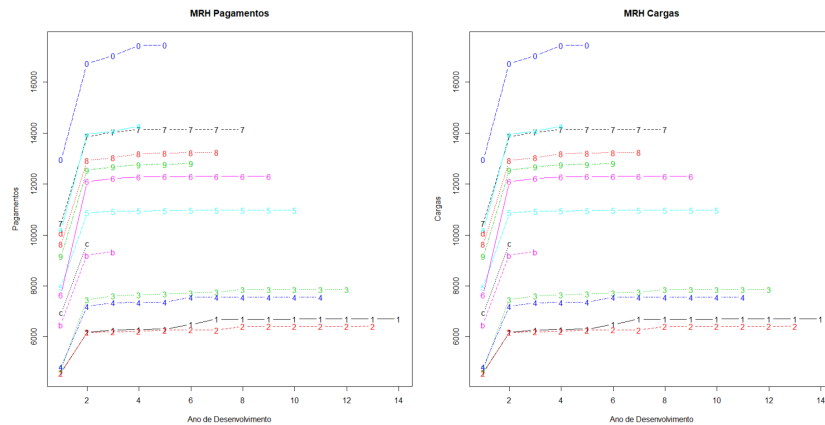
Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	8	9	10	11	12	13	14
2004	6709	6709	6707	6701	6702	6702	6703
2005	6575	6563	6563	6563	6623	6626	
2006	7865	7865	7865	7865	7865		
2007	7558	7558	7558	7558			
2008	10975	10978	10976				
2009	12300	12300					
2010	14161						

**Tabela 4.6:** Triângulo Run-off das cargas acumulados do ramo MRH

Como já foi mencionado, as tabelas (4.5) e (4.6) mostram os montantes de indenizações acumuladas e as respetivas cargas acumuladas para os anos 2004 até 2017. Verifica-se então que estão 14 anos em estudo, logo  $N = 14$ ,  $1 \leq i \leq 14$  e  $1 \leq j \leq 15 - i$ . Cada elemento dos triângulos run-off representa os pagamentos ou cargas com visão a 31 de Dezembro de cada ano de desenvolvimento.

### 4.2.2 Análise Gráfica

A representação gráfica apresentada em seguida mostra o desenvolvimento dos pagamentos acumulados e das cargas acumuladas ao longo dos anos de desenvolvimento.



**Figura 4.11:** Desenvolvimento dos pagamentos acumulados e das cargas acumuladas, respetivamente

Analisando o gráfico do desenvolvimento dos pagamentos acumulados da [Figura 4.11](#) verifica-se que entre o ano de desenvolvimento 1 e o ano de desenvolvimento 2 há um aumento significativo dos pagamentos. Esta conclusão não é estranha dado que os pagamentos do seguro [Multirrisco Habitação \(MRH\)](#) são efetuados logo após a ocorrência do sinistro ou nos anos de desenvolvimento seguintes.

É possível verificar também que a partir do ano de desenvolvimento 8, os pagamentos das indemnizações estabilizam não sendo necessária a aplicação de um fator cauda.

Em relação ao gráfico de desenvolvimento das cargas acumuladas, as conclusões são semelhantes. Existe um crescimento mais significativo entre os anos de desenvolvimento 1 e 2 e a partir do ano de desenvolvimento 8, as cargas estabilizam dado que os pagamentos de indemnizações estão praticamente liquidados.

Feita uma pequena análise gráfica sobre a forma como se desenvolviam os pagamentos acumulados e as cargas acumuladas relativas ao seguro Habitação é possível prosseguir para a estimação das reservas recorrendo aos métodos apresentados.

### 4.2.3 Método Chain Ladder

Seguindo o procedimento do método Chain Ladder, foram estimados os fatores de desenvolvimento, recorrendo à fórmula (3.6).

	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
$\widehat{f}_j$	1.3855	1.0123	1.0090	1.0019	1.0052	1.0032	1.0039
	Ano de Desenvolvimento						
	8	9	10	11	12	13	
$\widehat{f}_j$	1.0000	1.0000	1.0001	1.0000	1.0002	1.0000	

**Tabela 4.7:** Fatores de desenvolvimento do triângulo run-off dos pagamentos acumulados

A [Tabela 4.7](#) mostra os fatores de desenvolvimento em relação ao triângulo run-off dos pagamentos acumulados. Como é possível ver, o desenvolvimento da liquidação de indemnizações é um processo rápido. Os primeiros anos são marcados pelo pagamentos da maioria das indemnizações que começa a estabilizar a partir do ano de desenvolvimento 8 (como já tinha sido visto no primeiro gráfico da [Figura 4.11](#)).

	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
$\widehat{f}_j$	1.1448	1.0073	1.0065	0.9981	1.0015	0.9995	1.0024
	Ano de Desenvolvimento						
	8	9	10	11	12	13	
$\widehat{f}_j$	0.9998	0.9999	0.9998	1.0029	1.0002	1.0001	

**Tabela 4.8:** Fatores de desenvolvimento do triângulo run-off das cargas acumuladas

Da mesma forma que na tabela anterior, a [Tabela 4.8](#) mostra os fatores de desenvolvimento do triângulo run-off das cargas acumuladas. As conclusões são semelhantes às anteriores. Existe um maior desenvolvimento do primeiro para o segundo ano de desenvolvimento começando a estabilizar em seguida. A grande causa disto deve-se ao facto de as cargas estarem constantemente a ser atualizadas conforme as atualizações sobre determinado sinistro. Como no seguro Habitação, o pagamento de indemnizações é efetuado de uma maneira rápida, levando normalmente pouco tempo, a reserva acaba por estabilizar.

Como foi mencionado na explicação do método Chain Ladder, os fatores de desenvolvimento permitem determinar os montantes de indemnizações finais (denominado muitas vezes por *Ultimate*). Assim já é possível estimar o montante de indemnizações finais para cada ano de ocorrência  $i$ , através da equação (3.8) e, conseqüentemente, estimar a reserva necessária para cada ano de ocorrência  $i$  e a reserva total, recorrendo às equações (3.9) e (3.10).

	<i>Ultimate</i> Pagamentos	<i>Ultimate</i> Cargas	Reservas
2004	6702	6703	0
2005	6415	6627	0
2006	7867	7868	2
2007	7560	7582	2
2008	10977	11009	3
2009	12305	12336	5
2010	14151	14200	5
2011	13293	13307	56
2012	12896	12896	96
2013	17683	17622	223
2014	14485	14678	210
2015	9567	9552	223
2016	10007	10092	351
2017	14470	14885	4393
Total	158378	159357	5568

**Tabela 4.9:** Estimativas dos montantes de indemnizações finais  $C_{i,N}$  e reservas para cada ano de ocorrência  $i$  e total

Comparando os *Ultimate* dos pagamentos com a diagonal do triângulo run-off dos pagamentos acumulados (Tabela 4.5) verifica-se que os montantes do *Ultimate* são iguais para os anos de ocorrência iniciais e para os anos de ocorrência mais recentes são superiores. Isto deve-se, como já foi mencionado, ao facto dos sinistros ocorridos serem sinistros em que as suas indemnizações são liquidadas nos primeiros anos de desenvolvimento. Em relação aos *Ultimate* das cargas é possível ver que, para os anos mais recentes (nomeadamente 2017), o *Ultimate* se distancia mais dos valores da diagonal. Isto deve-se ao facto das cargas darem um grande salto, nomeadamente do primeiro ano de desenvolvimento para o segundo, e depois estabilizarem ao longo dos restantes anos de desenvolvimento. Verifica-se ainda que a reserva esperada que a companhia precisa para cobrir os sinistros ocorridos entre 2004 e 2017 no ramo MRH é 5568 milhares de euros.

#### 4.2.4 Método de Bootstrap

Como já foi explorado, o método de Bootstrap baseia-se na reamostragem de uma amostra inicial auxiliado pelo método Chain Ladder. Para o estudo em causa serão consideradas 2000 simulações. É considerado o triângulo run-off dos pagamentos acumulados presente na Tabela 4.5. Os fatores de desenvolvimento são os mesmos que os estimados pelo método Chain Ladder.

Através da equação (3.11) são obtidos os montantes de pagamentos acumulados ajustados presentes na Tabela 4.10.

## Tábuas de Mortalidade e Métodos de Provisão de Sinistros

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
2004	4668	6467	6546	6605	6618	6652	6674
2005	4468	6191	6267	6323	6335	6368	6389
2006	5479	7591	7685	7754	7769	7809	7834
2007	5265	7295	7384	7451	7465	7504	7528
2008	7645	10593	10723	10819	10840	10896	10931
2009	8569	11873	12019	12127	12150	12213	12252
2010	9855	13655	13822	13947	13973	14046	14091
2011	9258	12827	12984	13101	13126	13194	<b>13237</b>
2012	8981	12443	12596	12709	12734	<b>12800</b>	
2013	12315	17062	17272	17427	<b>17460</b>		
2014	10087	13976	14148	<b>14275</b>			
2015	6663	9231	<b>9344</b>				
2016	6969	<b>9656</b>					
2017	<b>10077</b>						

Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	8	9	10	11	12	13	14
2004	6700	6700	6700	6700	6700	6702	<b>6702</b>
2005	6414	6414	6414	6414	6414	<b>6415</b>	
2006	7865	7865	7865	7865	<b>7865</b>		
2007	7557	7557	7557	<b>7558</b>			
2008	10974	10974	<b>10974</b>				
2009	12300	<b>12300</b>					
2010	<b>14146</b>						

Tabela 4.10: Triângulo Run-off dos pagamentos acumulados ajustados do ramo MRH

O passo seguinte consiste no cálculo dos resíduos de Pearson que podem ser observados na Tabela 4.11.

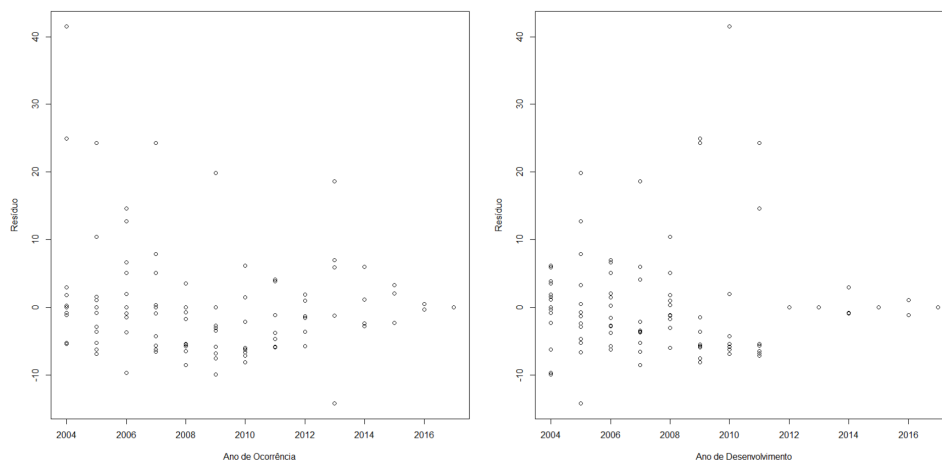
Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	1	2	3	4	5	6	7
2004	-0.85	-5.26	0.24	-5.26	1.79	24.98	41.49
2005	1.60	-2.86	-6.20	-5.25	10.46	-3.62	-6.90
2006	-9.71	12.73	6.66	-3.72	5.05	-1.48	1.94
2007	-6.20	7.86	5.07	-6.53	0.33	24.33	-4.26
2008	3.56	-0.73	-5.72	-8.53	-1.76	-5.50	-5.41
2009	-9.89	19.88	-2.73	-3.48	-3.03	-7.54	-5.83
2010	6.14	-6.65	1.51	-2.16	-5.95	-8.15	-6.24
2011	3.88	-4.64	-3.78	4.08	-1.15	-5.90	-5.86
2012	1.87	-1.32	-1.57	-3.63	0.98	-5.73	
2013	5.90	-14.23	7.00	18.59	-1.27		
2014	1.17	-2.38	-2.80	6.00			
2015	-2.29	3.25	2.06				
2016	-0.29	0.46					
2017	0.00						



Ano de Ocorrência	Ano de Desenvolvimento						
	8	9	10	11	12	13	14
2004	-5.42	0.00	0.00	2.95	0.00	-1.16	0.00
2005	24.31	0.00	0.00	-0.80	0.00	1.10	
2006	14.60	0.00	0.00	-0.89	0.00		
2007	-5.64	0.00	0.00	-0.87			
2008	-6.52	0.00	0.00				
2009	-6.85	0.00					
2010	-7.16						

**Tabela 4.11:** Resíduos de Pearson

Antes de prosseguir com a aplicação do método é necessário verificar, através dos gráficos dos resíduos, a condição de independência.



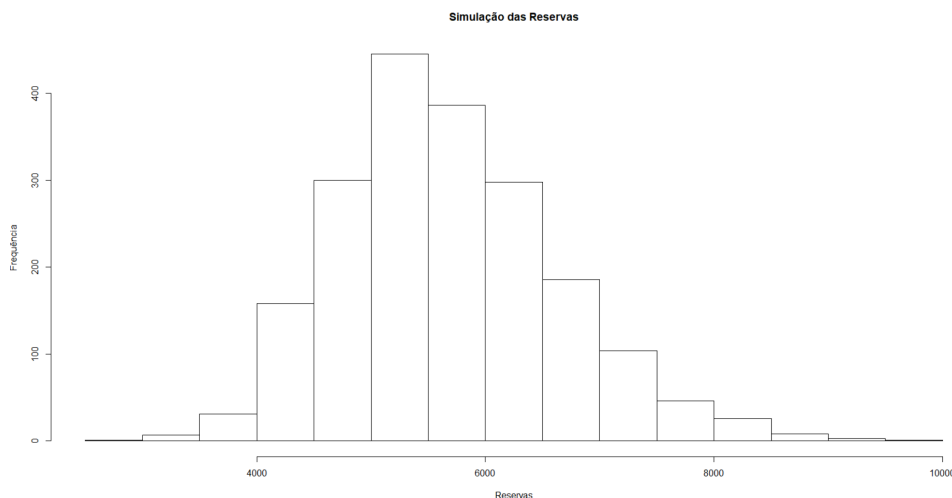
**Figura 4.12:** Gráficos de Resíduos por ano de ocorrência e por ano de desenvolvimento, respetivamente

Analisando os gráficos da [Figura 4.12](#) é possível validar que os dados não seguem nenhuma tendência confirmando-se assim a sua independência.

Pode-se então prosseguir para o ciclo bootstrap.

Foram efetuadas 2000 simulações. Em cada simulação foi feita uma reamostragem, com reposição, de modo a obter um novo triângulo de resíduos. Com estes resíduos foi construído um novo triângulo de pagamentos na forma incremental, sendo convertido para a forma acumulada. Por fim foi aplicado o método Chain Ladder com o objetivo de preencher a parte inferior do triângulo e assim obter a reserva necessária.

O histograma ([4.13](#)) mostra os valores das reservas estimadas em cada simulação.



**Figura 4.13:** Histograma das 2000 simulações para a reserva

As dimensões das amostras são, por construção, muito grandes. Assim, com base no Teorema do Limite Central, as estimativas obtidas pelo método de Bootstrap são assintoticamente normais.

	<i>Ultimate</i>	Reserva	Erro Padrão	Limite Inferior	Limite Superior
2004	6702	0	0	0	0
2005	6415	0	0	0	0
2006	7868	2	31	1	3
2007	7560	2	28	1	3
2008	10979	5	38	3	7
2009	12304	4	48	2	6
2010	14153	7	48	5	9
2011	13297	60	94	56	64
2012	12900	100	110	95	105
2013	17697	237	174	229	245
2014	14496	220	156	213	227
2015	9569	224	156	217	231
2016	10023	367	194	358	376
2017	14517	4440	806	4405	4475
Total	158477	5667	959	5625	5709

**Tabela 4.12:** Resultados obtidos através do método de Bootstrap

A [Tabela 4.12](#) mostra um resumo dos resultados obtidos pela aplicação do método de Bootstrap. É estimada uma provisão média total de 5667 milhares de euros, com um limite superior de 5709 milhares de euros para um nível de significância de 5%.

#### 4.2.5 Método de Mack

Como já foi referido, o método de Mack estima a variabilidade do método Chain Ladder. Para o caso em estudo será apenas verificado a validade do primeiro pressuposto. Para isso basta verificar a existência de proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento. Considerem-se os pares ordenados  $(C_{i,j+1}, C_{i,j})$  e as retas de declive  $\hat{f}$ .

É possível ver através da [Figura .1](#) que as retas de declive  $\hat{f}$  estão bem ajustadas aos dados observados. Assim é possível aceitar a existência de proporcionalidade entre os anos de desenvolvimento.

Posto isto segue-se com a aplicação do método de Mack. A tabela seguinte mostra os montantes de indemnizações finais para cada ano de ocorrência  $i$ , a respetiva reserva e o erro de previsão.

	<i>Ultimate</i>	Reservas	Erro de Previsão
2004	6702	0	0
2005	6415	0	0
2006	7867	2	3
2007	7560	2	2
2008	10977	4	4
2009	12305	5	4
2010	14151	5	5
2011	13293	57	103
2012	12896	96	155
2013	17683	223	235
2014	14485	210	211
2015	9567	223	184
2016	10007	352	196
2017	14470	4393	876
Total	158379	5569	1071

**Tabela 4.13:** Resultados obtidos através do método de Mack

Analisando a [Tabela 4.13](#) verifica-se que, para os anos de ocorrência  $i$  mais recentes, os erros de previsão são maiores. Como é possível visualizar pelo triângulo de pagamentos (4.5) quanto mais recente o ano de ocorrência menos são os anos de desenvolvimento, ou seja, existe menos informação tornando assim a estimação da reserva mais incerta.

Para além disto é possível concluir também que os anos de ocorrência mais recentes têm um maior peso na reserva estimada, dado que, são os anos que têm mais sinistros abertos. As conclusões tiradas são visíveis no gráfico (4.14).

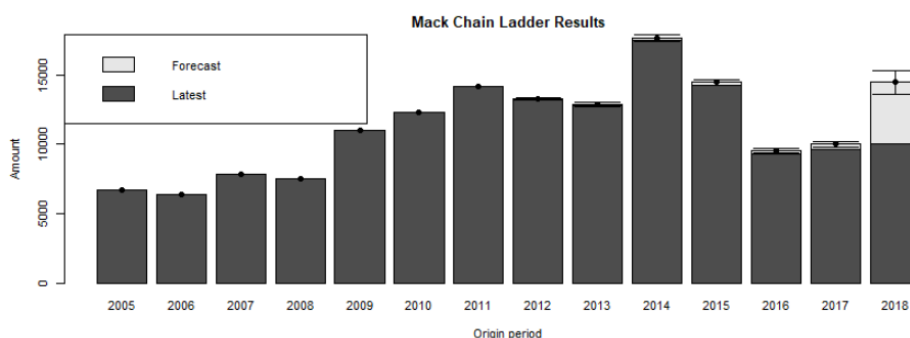


Figura 4.14: Análise dos montantes de pagamentos finais por ano de ocorrência  $i$

#### 4.2.6 Método de Munich Chain Ladder

Como já foi referido, o método de Munich Chain Ladder considera, ao contrário dos outros métodos, a correlação entre o triângulo de pagamentos e o triângulo de cargas.

Assim, recorrendo às equações (3.38) e (3.39), são estimados os montantes de indemnizações finais e, conseqüentemente, através das equações (3.40) e (3.41), as respetivas reservas.

	<i>Ultimate</i> Pagamentos	Reservas Pagamentos	<i>Ultimate</i> Carga	Reservas Cargas
2004	6702	0	6703	0
2005	6416	0	6627	1
2006	7867	1	7868	3
2007	7559	1	7581	23
2008	10977	3	11008	32
2009	12304	3	12335	34
2010	14150	4	14198	37
2011	13274	38	13303	65
2012	12863	63	12893	56
2013	17586	126	17613	98
2014	14588	312	14689	73
2015	9521	177	9546	96
2016	10047	391	10095	184
2017	14814	4737	14920	2150
Total	158666	5856	159379	2851

Tabela 4.14: Resultados obtidos através do método de Munich Chain Ladder

Como é possível ver através da Tabela 4.14, o montante de indemnizações total de pagamentos é 158666 milhares de euros, ou seja, é estimada uma provisão de 5856 milhares de euros.

### 4.3 Distribuição Log-Normal

A **Ageas** estabelece provisões de sinistros (*Booked Reserves*) para cada ramo que explora. Com o objetivo de determinar o nível de confiança da **Ageas** no seu nível de provisionamento é necessário ajustar uma distribuição às reservas de cada ramo e determinar o percentil em que se encontra esse volume de provisões.

Começa-se por determinar os percentis 75% e 90% de cada distribuição (requisito da companhia) para cada ramo e também do total da companhia (assumindo a diversificação do risco entre todos os ramos), através do método de Bootstrap.

Todos os valores apresentados encontram-se em milhares de euros.

	<b>P75</b>	<b>P90</b>
<b>Saúde</b>	2981	3154
<b>AP</b>	2065	2632
<b>Auto</b>	127066	132856
<b>Prop</b>	22957	25162
<b>RC</b>	39290	43878
<b>TR</b>	2063	2548
<b>DV</b>	1851	2029
<b>AT</b>	24078	25653
<b>Total</b>	222351	237912

**Tabela 4.15:** Percentil 75% e Percentil 90% de cada um dos ramos

Para encontrar a solução para o problema, a amostra obtida pelo método de Bootstrap foi ajustada a uma distribuição log-normal.

Assim, recorrendo à fórmula (3.42) foram estimados os parâmetros referentes a esta distribuição,  $\mu$  e  $\sigma$ , utilizando os percentis apresentados na [Tabela 4.15](#).

	$\mu$	$\sigma$
<b>Saúde</b>	7.937336	0.0929274
<b>AP</b>	7.363324	0.3996525
<b>Auto</b>	11.70295	0.07340142
<b>Prop</b>	9.939479	0.1510753
<b>RC</b>	10.45602	0.1819304
<b>TR</b>	7.397316	0.3478188
<b>DV</b>	7.421466	0.1512482
<b>AT</b>	10.01865	0.1043748
<b>Total</b>	12.23686	0.1114279

**Tabela 4.16:** Média e Desvio-Padrão de cada um dos principais ramo

Encontrados os parâmetros ([Tabela 4.16](#)) para cada um dos ramos, foi estimado o percentil em que se encontra a reserva provisionada para cada ramo e a reserva total.

	<b>Reserva</b>	<b>Percentil</b>
<b>Saúde</b>	5064	1.00
<b>AP</b>	2530	0.88
<b>AUTO</b>	133565	0.91
<b>Prop</b>	23426	0.79
<b>RC</b>	38065	0.69
<b>TR</b>	1990	0.72
<b>DV</b>	1885	0.79
<b>AT</b>	26226	0.93
<b>Total</b>	232751	0.86

**Tabela 4.17:** Percentil da reserva de cada um dos ramo explorados



# Capítulo 5

## Considerações Finais

Neste capítulo são apresentadas as conclusões deste trabalho e algumas propostas de trabalho futuro.

As tábuas de mortalidade mostram algumas informações, tais como, a taxa de mortalidade e a esperança média de vida. Estas informações são muito importantes para uma seguradora pois, através destas, é possível o cálculo de rendas vitalícias.

Neste trabalho foi utilizado o método de Lee-Carter. Este método é um dos mais utilizados na construção de tábuas de mortalidade dada a sua aplicabilidade simples e eficaz em relação aos resultados que propõe.

Como já foi mencionado no capítulo anterior, com base nos resultados obtidos pelo método de Lee-Carter, a esperança média de vida tem tendência a aumentar. Estes resultados são viáveis a curto prazo, continuando a ser necessário a implementação de tábuas de mortalidade atualizadas devido a qualquer mudança brusca.

Uma fragilidade que o método de Lee-Carter apresenta é o facto de ser um método extrapolativo, ou seja, um método que se baseia no passado para fazer projeções do futuro. Se o futuro se mantiver como o passado, o método é eficaz. O problema é que o método de Lee-Carter não consegue prever acontecimentos bruscos que possam acontecer, tais como, o aparecimento de algum vírus ou doença, alguma catástrofe natural ou um ataque terrorista (tal como, o 11 de Setembro que causou milhares de mortes).

Assim, como trabalho futuro propõe-se o estudo de outros métodos relacionados com a construção de tábuas de mortalidade.

Como já foi referido, a provisão de sinistros representa uma parte significativa do passivo de uma companhia de seguros no ramo não vida. Como tal é muito importante a estimação desta provisão para que a companhia não entre em insolvência.

Todos os métodos que foram estudados apresentaram resultados satisfatórios. O método Chain Ladder é o que apresenta uma menor reserva e o método que apresenta maior reserva é o método de Munich Chain Ladder, diferindo em 288 milhares de euros. Esta



diferença entre o método Chain Ladder o método de Munich Chain Ladder demonstra que a correlação entre o triângulo dos pagamentos e o triângulo das cargas é significativa pois, caso não fosse, as estimativas do método de Munich Chain Ladder seriam muito semelhantes aos resultados obtidos pelo método Chain Ladder.

Tanto o método de Bootstrap como o método de Mack mostram que, quanto mais recente é o ano, maior é a reserva e o erro padrão. Isto deve-se ao facto de não existir tanta informação para esses anos e, conseqüentemente, os montantes de indemnizações não estarem totalmente liquidados, ou seja, existe maior volatilidade em relação à reserva.

Assim, como trabalho futuro propõe-se o estudo de triângulos run-off e estimação de reservas considerando o fator cauda.

Em relação à estimação do percentil, os resultados apresentados foram satisfatórios. Estes foram comparados com os estimados por interpolação (método utilizado pela companhia) e os resultados obtidos são semelhantes. Nos ramos em que existe uma maior reserva, os percentis são praticamente iguais. Naqueles em que a reserva é menor, os percentis podem diferir até 1%.

# Bibliografia

- Bravo, J. M. V.. *Tábuas de Mortalidade Contemporâneas e Prospectivas: Modelos Estocásticos, Aplicações Actuarias e Cobertura do Risco de Longevidade*. PhD thesis, Universidade de Évora, 2007.
- Carrato, A., Concina, F., Gesmann M., Murphy, D., Wüthrich, M. and Zhang, W.. Claim's Reserving with R: Chain Ladder - 0.2.5 Package Vignette. 2017.
- Efron, B. and Tibshirani, R. J.. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman and Hall., 1993.
- England, P. D.. Addendum to 'Analytic and Bootstrap Estimates of Prediction Errors in Claims Reserving'. *Actuarial Research Paper No. 138, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London, EC1V 0HB*, 2001.
- England, P. D. and Verrall, R. J.. Analytic and Bootstrap Estimates of Prediction Errors in Claims Reserving. *Insurance: Mathematics and Economics* 25 (1999) 281–293, 1999.
- England, P. D. and Verrall, R. J.. Stochastic Claims Reserving in General Insurance. *British Actuarial Journal*, 8, pp 443-518 doi:10.1017/S1357321700003809, 2002.
- Lee, R. D. and Carter, L. R.. Modelling and Forecasting U.S. Mortality. *Journal of the American Statistical Association*, 87, 659671, 1992.
- Mack, T.. Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. *ASTIN Bulletin*, Vol. 23 N° 2 (pp. 215 – 225), 1993.
- Pinto, A. C. R.. Métodos de Previsão de Sinistros. Master's thesis, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2013.
- Quarg, G. and Mack, T.. Munich Chain Ladder: A Reserving Method that Reduces the Gap between IBNR Projections based on Paid Losses and IBNR Projection Based on Incurred Losses. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs-und Finanzmathematik*, volume 26, number 4, 2004, pages 597-630, 2004.

Russolillo, M.. The Future Human Lifespan: A Study on Italian Population. *Applied Mathematics*, 2014, 5, 1641-1650, 2014.

URL: <https://www.mortality.org/>. Acedido a 30 de Julho de 2018.

# Apêndices



# Anexo A

Ano $t$	$\hat{k}_t$
2006	23.17178
2007	16.02932
2008	-8.06932
2009	-5.79570
2010	-15.35427
2011	-5.23495
2012	-1.72027
2013	-1.96414
2014	-1.06246

Tabela A.1:  $\hat{k}_t$  estimados

Idade atuarial $x$	$\hat{\alpha}_x$	$\hat{\beta}_x$
25	-6.00915	0.11569
26	-5.93736	0.10636
27	-5.70476	0.10878
28	-6.52135	0.01229
29	-6.49174	0.02944
30	-6.63981	0.04549
31	-6.64761	0.04113
32	-6.61337	0.04140
33	-6.64078	0.03533
34	-5.71072	-0.00331
35	-6.44752	0.02077
36	-6.27256	0.00901
37	-6.30559	0.01059
38	-6.14879	0.00786
39	-6.06737	0.01173
40	-6.01228	0.00895
41	-5.99317	0.01369
42	-5.99965	0.01296

43	-5.92769	0.02528
44	-5.83458	0.02140
45	-5.76613	0.01839
46	-5.64667	0.01810
47	-5.59864	0.02015
48	-5.51172	0.01938
49	-5.42919	0.01526
50	-5.39197	0.00809
51	-5.35854	0.00826
52	-5.29946	0.01416
53	-5.28796	0.01155
54	-5.24135	0.00959
55	-5.22578	0.01027
56	-5.18955	0.00931
57	-5.16885	0.01562
58	-5.01291	0.01774
59	-4.90449	0.01110
60	-4.84698	0.01343
61	-4.74347	0.00941
62	-4.64632	0.00358
63	-4.54823	0.00683
64	-4.48298	0.00302
65	-4.42229	0.00166
66	-4.34773	0.00647
67	-4.24627	0.00584
68	-4.15444	0.00650
69	-4.05416	0.00976
70	-4.01563	0.01153
71	-3.90438	0.00922
72	-3.79667	0.00981
73	-3.68523	0.00736
74	-3.58227	0.00529
75	-3.49785	0.00849

Tabela A.2:  $\hat{\alpha}_x$  e  $\hat{\beta}_x$  estimados







# Anexo B

Idade atuarial $x$	$\ddot{m}_{x,2015}$	$\ddot{q}_{x,2015}$	$\ddot{l}_{x,2015}$	$\ddot{d}_{x,2015}$	$\ddot{L}_{x,2015}$	$\ddot{T}_{x,2015}$	$\ddot{e}_{x,2015}$
25	0.0006	0.0006	100000.0	63.6797	99946.2	4656616.8	46.57
26	0.0007	0.0007	99936.3	66.9086	99902.9	4556670.6	45.60
27	0.0007	0.0007	99869.4	66.4106	99836.2	4456767.7	44.63
28	0.0008	0.0008	99803.0	79.1882	99763.4	4356931.5	43.66
29	0.0014	0.0014	99723.8	140.7044	99653.5	4257168.1	42.69
30	0.0006	0.0006	99583.1	61.1523	99552.5	4157514.7	41.75
31	0.0011	0.0011	99522.0	111.6983	99466.1	4057962.1	40.77
32	0.0015	0.0015	99410.3	151.2266	99334.6	3958496.0	39.82
33	0.0014	0.0014	99259.0	135.2383	99191.4	3859161.4	38.88
34	0.0018	0.0018	99123.8	177.0829	99035.3	3759970.0	37.93
35	0.0027	0.0027	98946.7	265.3128	98814.1	3660934.7	37.00
36	0.0029	0.0029	98681.4	282.8334	98540.0	3562120.7	36.10
37	0.0029	0.0029	98398.6	287.2539	98254.9	3463580.7	35.20
38	0.0030	0.0030	98111.3	297.0710	97962.8	3365325.7	34.30
39	0.0026	0.0026	97814.2	251.0242	97688.7	3267363.0	33.40
40	0.0030	0.0030	97563.2	292.0166	97417.2	3169674.2	32.49
41	0.0028	0.0028	97271.2	275.1014	97133.6	3072257.0	31.58
42	0.0022	0.0022	96996.1	214.1943	96889.0	2975123.4	30.67
43	0.0018	0.0018	96781.9	176.3769	96693.7	2878234.4	29.74
44	0.0022	0.0022	96605.5	212.9576	96499.0	2781540.7	28.79
45	0.0028	0.0028	96392.6	266.2469	96259.4	2685041.6	27.86
46	0.0038	0.0038	96126.3	364.3817	95944.1	2588782.2	26.93
47	0.0038	0.0038	95761.9	364.3777	95579.8	2492838.1	26.03
48	0.0035	0.0035	95397.6	329.1879	95233.0	2397258.3	25.13
49	0.0039	0.0039	95068.4	371.6475	94882.5	2302025.3	24.21
50	0.0047	0.0047	94696.7	446.8940	94473.3	2207142.8	23.31
51	0.0051	0.0051	94249.8	483.1677	94008.2	2112669.5	22.42
52	0.0047	0.0047	93766.7	437.8976	93547.7	2018661.3	21.53
53	0.0048	0.0048	93328.8	450.6579	93103.4	1925113.5	20.63
54	0.0063	0.0063	92878.1	583.0188	92586.6	1832010.1	19.72
55	0.0067	0.0067	92295.1	617.0901	91986.5	1739423.5	18.85
56	0.0071	0.0070	91678.0	645.9685	91355.0	1647437.0	17.97
57	0.0070	0.0070	91032.0	634.6747	90714.7	1556081.9	17.09
58	0.0071	0.0071	90397.4	638.4697	90078.1	1465367.2	16.21
59	0.0086	0.0086	89758.9	772.7108	89372.5	1375289.1	15.32
60	0.0084	0.0084	88986.2	745.8854	88613.2	1285916.6	14.45
61	0.0084	0.0084	88240.3	737.7010	87871.4	1197303.4	13.57
62	0.0096	0.0095	87502.6	834.2513	87085.5	1109431.9	12.68
63	0.0100	0.0100	86668.3	866.0148	86235.3	1022346.5	11.80
64	0.0109	0.0108	85802.3	930.6609	85337.0	936111.1	10.91
65	0.0130	0.0129	84871.7	1096.9112	84323.2	850774.1	10.02
66	0.0129	0.0128	83774.8	1070.3168	83239.6	766450.9	9.15
67	0.0149	0.0148	82704.4	1220.5389	82094.2	683211.3	8.26
68	0.0161	0.0159	81483.9	1297.8825	80835.0	601117.2	7.38
69	0.0173	0.0172	80186.0	1377.2138	79497.4	520282.2	6.49
70	0.0186	0.0184	78808.8	1453.1338	78082.2	440784.8	5.59
71	0.0217	0.0214	77355.7	1657.2966	76527.0	362702.6	4.69
72	0.0240	0.0237	75698.4	1796.0863	74800.3	286175.6	3.78
73	0.0305	0.0300	73902.3	2220.2714	72792.1	211375.2	2.86
74	0.0335	0.0329	71682.0	2359.5765	70502.2	138583.1	1.93
75	0.0365	0.0358	69322.4	2483.1549	68080.9	68080.9	0.98

Tabela B.1: Tábua de Mortalidade de 2015

Idade atuarial $x$	$\dot{m}_{x,2016}$	$\ddot{q}_{x,2016}$	$\bar{l}_{x,2016}$	$\bar{d}_{x,2016}$	$\bar{L}_{x,2016}$	$\bar{T}_{x,2016}$	$\bar{e}_{x,2016}$
25	0.0005	0.0005	100000.0	48.9168	99958.7	4669695.0	46.70
26	0.0005	0.0005	99951.1	52.5078	99924.8	4569736.3	45.72
27	0.0005	0.0005	99898.6	51.8374	99872.7	4469811.5	44.74
28	0.0008	0.0008	99846.7	77.0336	99808.2	4369938.8	43.77
29	0.0013	0.0013	99769.7	131.6329	99703.9	4270130.6	42.80
30	0.0006	0.0006	99638.1	55.1575	99610.5	4170426.7	41.86
31	0.0010	0.0010	99582.9	101.7637	99532.0	4070816.2	40.88
32	0.0014	0.0014	99481.2	137.7063	99412.3	3971284.2	39.92
33	0.0013	0.0013	99343.4	124.8798	99281.0	3871871.9	38.97
34	0.0018	0.0018	99218.6	178.5951	99129.3	3772590.9	38.02
35	0.0026	0.0026	99040.0	253.2936	98913.3	3673461.6	37.09
36	0.0028	0.0028	98786.7	277.3810	98648.0	3574548.3	36.18
37	0.0029	0.0028	98509.3	280.7262	98368.9	3475900.3	35.28
38	0.0030	0.0030	98228.6	292.1466	98082.5	3377531.4	34.38
39	0.0025	0.0025	97936.4	244.7122	97814.1	3279448.9	33.49
40	0.0029	0.0029	97691.7	286.5041	97548.5	3181634.8	32.57
41	0.0027	0.0027	97405.2	267.0221	97271.7	3084086.4	31.66
42	0.0021	0.0021	97138.2	208.2670	97034.0	2986814.7	30.75
43	0.0017	0.0017	96929.9	166.7560	96846.5	2889780.6	29.81
44	0.0021	0.0021	96763.2	203.1539	96661.6	2792934.1	28.86
45	0.0027	0.0026	96560.0	255.7693	96432.1	2696272.5	27.92
46	0.0036	0.0036	96304.2	350.3191	96129.1	2599840.4	27.00
47	0.0036	0.0036	95953.9	348.7350	95779.6	2503711.3	26.09
48	0.0033	0.0033	95605.2	315.6651	95447.4	2407931.8	25.19
49	0.0038	0.0038	95289.5	359.7918	95109.6	2312484.4	24.27
50	0.0046	0.0046	94929.7	439.8267	94709.8	2217374.8	23.36
51	0.0050	0.0050	94489.9	475.3758	94252.2	2122665.0	22.46
52	0.0045	0.0045	94014.5	425.1318	93802.0	2028412.8	21.58
53	0.0047	0.0047	93589.4	440.1966	93369.3	1934610.8	20.67
54	0.0062	0.0061	93149.2	572.1040	92863.1	1841241.5	19.77
55	0.0066	0.0065	92577.1	604.6863	92274.7	1748378.4	18.89
56	0.0069	0.0069	91972.4	634.4761	91655.2	1656103.6	18.01
57	0.0068	0.0067	91337.9	614.5948	91030.6	1564448.5	17.13
58	0.0068	0.0068	90723.3	615.4412	90415.6	1473417.8	16.24
59	0.0084	0.0084	90107.9	756.4072	89729.7	1383002.2	15.35
60	0.0082	0.0081	89351.5	726.4454	88988.3	1293272.5	14.47
61	0.0082	0.0082	88625.0	725.2554	88262.4	1204284.3	13.59
62	0.0095	0.0095	87899.8	831.2597	87484.2	1116021.8	12.70
63	0.0099	0.0098	87068.5	856.6356	86640.2	1028537.7	11.81
64	0.0108	0.0108	86211.9	928.7232	85747.5	941897.5	10.93
65	0.0130	0.0129	85283.2	1098.0985	84734.1	856150.0	10.04
66	0.0127	0.0126	84185.1	1059.9005	83655.1	771415.8	9.16
67	0.0147	0.0146	83125.2	1210.6406	82519.8	687760.7	8.27
68	0.0158	0.0157	81914.5	1285.6801	81271.7	605240.9	7.39
69	0.0169	0.0168	80628.8	1354.6018	79951.5	523969.2	6.50
70	0.0181	0.0180	79274.2	1424.1027	78562.2	444017.6	5.60
71	0.0212	0.0210	77850.1	1633.5595	77033.4	365455.4	4.69
72	0.0235	0.0232	76216.6	1768.8140	75332.2	288422.1	3.78
73	0.0300	0.0296	74447.8	2199.9687	73347.8	213089.9	2.86
74	0.0331	0.0325	72247.8	2350.1252	71072.7	139742.1	1.93
75	0.0358	0.0351	69897.7	2456.5701	68669.4	68669.4	0.98

Tabela B.2: Tábua de Mortalidade de 2016

Idade atuarial $x$	$\ddot{m}_{x,2017}$	$\ddot{q}_{x,2017}$	$\ddot{l}_{x,2017}$	$\ddot{d}_{x,2017}$	$\ddot{L}_{x,2017}$	$\ddot{T}_{x,2017}$	$\ddot{e}_{x,2017}$
25	0.0004	0.0004	100000.0	37.5752	99968.2	4681941.4	46.82
26	0.0004	0.0004	99962.4	41.2045	99941.8	4581973.1	45.84
27	0.0004	0.0004	99921.2	40.4589	99901.0	4482031.3	44.86
28	0.0008	0.0008	99880.8	74.9304	99843.3	4382130.3	43.87
29	0.0012	0.0012	99805.8	123.1339	99744.3	4282287.0	42.91
30	0.0005	0.0005	99682.7	49.7450	99657.8	4182542.7	41.96
31	0.0009	0.0009	99633.0	92.7021	99586.6	4082884.9	40.98
32	0.0013	0.0013	99540.3	125.3792	99477.6	3983298.3	40.02
33	0.0012	0.0012	99414.9	115.2991	99357.2	3883820.8	39.07
34	0.0018	0.0018	99299.6	180.0951	99209.5	3784463.5	38.11
35	0.0024	0.0024	99119.5	241.7844	98998.6	3685254.0	37.18
36	0.0028	0.0028	98877.7	271.9941	98741.7	3586255.4	36.27
37	0.0028	0.0028	98605.7	274.3065	98468.5	3487513.7	35.37
38	0.0029	0.0029	98331.4	287.2611	98187.8	3389045.2	34.47
39	0.0024	0.0024	98044.1	238.5230	97924.9	3290857.4	33.57
40	0.0029	0.0029	97805.6	281.0531	97665.1	3192932.6	32.65
41	0.0027	0.0027	97524.6	259.1404	97395.0	3095267.5	31.74
42	0.0021	0.0021	97265.4	202.4721	97164.2	2997872.5	30.82
43	0.0016	0.0016	97062.9	157.6347	96984.1	2900708.3	29.88
44	0.0020	0.0020	96905.3	193.7695	96808.4	2803724.2	28.93
45	0.0025	0.0025	96711.5	245.6623	96588.7	2706915.8	27.99
46	0.0035	0.0035	96465.9	336.7403	96297.5	2610327.1	27.06
47	0.0035	0.0035	96129.1	333.7032	95962.3	2514029.6	26.15
48	0.0032	0.0032	95795.4	302.6406	95644.1	2418067.3	25.24
49	0.0037	0.0036	95492.8	348.2465	95318.7	2322423.2	24.32
50	0.0046	0.0045	95144.5	432.7855	94928.2	2227104.5	23.41
51	0.0049	0.0049	94711.8	467.6163	94478.0	2132176.3	22.51
52	0.0044	0.0044	94244.1	412.6545	94037.8	2037698.4	21.62
53	0.0046	0.0046	93831.5	429.8892	93616.5	1943660.6	20.71
54	0.0060	0.0060	93401.6	561.2758	93121.0	1850044.0	19.81
55	0.0064	0.0064	92840.3	592.4055	92544.1	1756923.1	18.92
56	0.0068	0.0068	92247.9	623.0532	91936.4	1664379.0	18.04
57	0.0065	0.0065	91624.9	595.0178	91327.4	1572442.6	17.16
58	0.0065	0.0065	91029.8	593.1055	90733.3	1481115.2	16.27
59	0.0082	0.0082	90436.7	740.2694	90066.6	1390381.9	15.37
60	0.0079	0.0079	89696.5	707.3372	89342.8	1300315.3	14.50
61	0.0080	0.0080	88989.1	712.8396	88632.7	1210972.5	13.61
62	0.0094	0.0094	88276.3	828.0676	87862.3	1122339.8	12.71
63	0.0097	0.0097	87448.2	847.1406	87024.7	1034477.5	11.83
64	0.0108	0.0107	86601.1	926.5505	86137.8	947452.9	10.94
65	0.0129	0.0128	85674.5	1099.0031	85125.0	861315.1	10.05
66	0.0125	0.0124	84575.5	1049.3129	84050.9	776190.0	9.18
67	0.0145	0.0144	83526.2	1200.5075	82926.0	692139.1	8.29
68	0.0156	0.0155	82325.7	1273.2543	81689.1	609213.2	7.40
69	0.0166	0.0164	81052.5	1331.9995	80386.5	527524.1	6.51
70	0.0177	0.0175	79720.5	1395.2583	79022.8	447137.6	5.61
71	0.0208	0.0206	78325.2	1609.6910	77520.4	368114.8	4.70
72	0.0230	0.0227	76715.5	1741.4275	75844.8	290594.4	3.79
73	0.0295	0.0291	74974.1	2179.1685	73884.5	214749.6	2.86
74	0.0327	0.0321	72794.9	2339.9624	71624.9	140865.1	1.94
75	0.0351	0.0345	70455.0	2429.4702	69240.2	69240.2	0.98

Tabela B.3: Tábua de Mortalidade de 2017

Idade atuarial $x$	$\ddot{m}_{x,2018}$	$\ddot{q}_{x,2018}$	$\bar{l}_{x,2018}$	$\bar{d}_{x,2018}$	$\bar{L}_{x,2018}$	$\bar{T}_{x,2018}$	$\bar{e}_{x,2018}$
25	0.0003	0.0003	100000.0	28.8626	99975.6	4693470.2	46.93
26	0.0003	0.0003	99971.1	32.3332	99955.0	4593494.6	45.95
27	0.0003	0.0003	99938.8	31.5760	99923.0	4493539.6	44.96
28	0.0007	0.0007	99907.2	72.8790	99870.8	4393616.6	43.98
29	0.0012	0.0012	99834.3	115.1745	99776.8	4293745.8	43.01
30	0.0004	0.0004	99719.2	44.8598	99696.7	4193969.0	42.06
31	0.0008	0.0008	99674.3	84.4397	99632.1	4094272.3	41.08
32	0.0011	0.0011	99589.9	114.1439	99532.8	3994640.2	40.11
33	0.0011	0.0011	99475.7	106.4417	99422.5	3895107.4	39.16
34	0.0018	0.0018	99369.3	181.5869	99278.5	3795684.9	38.20
35	0.0023	0.0023	99187.7	230.7712	99072.3	3696406.4	37.27
36	0.0027	0.0027	98956.9	266.6797	98823.6	3597334.1	36.35
37	0.0027	0.0027	98690.3	268.0009	98556.3	3498510.5	35.45
38	0.0029	0.0029	98422.3	282.4225	98281.0	3399954.2	34.54
39	0.0024	0.0024	98139.8	232.4615	98023.6	3301673.2	33.64
40	0.0028	0.0028	97907.4	275.6710	97769.5	3203649.6	32.72
41	0.0026	0.0026	97631.7	251.4591	97506.0	3105880.1	31.81
42	0.0020	0.0020	97380.2	196.8129	97281.8	3008374.1	30.89
43	0.0015	0.0015	97183.4	148.9924	97108.9	2911092.3	29.95
44	0.0019	0.0019	97034.4	184.7930	96942.0	2813983.3	29.00
45	0.0024	0.0024	96849.6	235.9209	96731.7	2717041.3	28.05
46	0.0034	0.0033	96613.7	323.6397	96451.9	2620309.6	27.12
47	0.0033	0.0033	96290.1	319.2696	96130.4	2523857.7	26.21
48	0.0030	0.0030	95970.8	290.1064	95825.8	2427727.3	25.30
49	0.0035	0.0035	95680.7	337.0152	95512.2	2331901.5	24.37
50	0.0045	0.0045	95343.7	425.7846	95130.8	2236389.3	23.46
51	0.0049	0.0048	94917.9	459.9044	94687.9	2141258.5	22.56
52	0.0042	0.0042	94458.0	400.4733	94257.8	2046570.6	21.67
53	0.0045	0.0045	94057.5	419.7481	93847.7	1952312.8	20.76
54	0.0059	0.0059	93637.8	550.5522	93362.5	1858465.2	19.85
55	0.0063	0.0062	93087.2	580.2666	92797.1	1765102.7	18.96
56	0.0066	0.0066	92507.0	611.7206	92201.1	1672305.6	18.08
57	0.0063	0.0063	91895.2	575.9526	91607.3	1580104.5	17.19
58	0.0063	0.0063	91319.3	571.4640	91033.6	1488497.2	16.30
59	0.0080	0.0080	90747.8	724.3226	90385.7	1397463.7	15.40
60	0.0077	0.0076	90023.5	688.5816	89679.2	1307078.0	14.52
61	0.0079	0.0078	89334.9	700.4797	88984.7	1217398.8	13.63
62	0.0093	0.0093	88634.4	824.7016	88222.1	1128414.1	12.73
63	0.0096	0.0095	87809.7	837.5606	87391.0	1040192.1	11.85
64	0.0107	0.0106	86972.2	924.1716	86510.1	952801.1	10.96
65	0.0129	0.0128	86048.0	1099.6566	85498.2	866291.0	10.07
66	0.0123	0.0122	84948.3	1038.5917	84429.1	780792.8	9.19
67	0.0143	0.0142	83909.8	1190.1817	83314.7	696363.8	8.30
68	0.0154	0.0152	82719.6	1260.6509	82089.2	613049.1	7.41
69	0.0162	0.0161	81458.9	1309.4576	80804.2	530959.9	6.52
70	0.0172	0.0171	80149.5	1366.6537	79466.1	450155.7	5.62
71	0.0203	0.0201	78782.8	1585.7546	77989.9	370689.6	4.71
72	0.0225	0.0222	77197.1	1713.9970	76340.1	292699.6	3.79
73	0.0290	0.0286	75483.1	2157.9541	74404.1	216359.6	2.87
74	0.0323	0.0318	73325.1	2329.1691	72160.5	141955.5	1.94
75	0.0344	0.0338	70995.9	2401.9524	69795.0	69795.0	0.98

Tabela B.4: Tábua de Mortalidade de 2018

Idade atuarial $x$	$\ddot{m}_{x,2019}$	$\ddot{q}_{x,2019}$	$\bar{l}_{x,2019}$	$\bar{d}_{x,2019}$	$\bar{L}_{x,2019}$	$\bar{T}_{x,2019}$	$\bar{e}_{x,2019}$
25	0.0002	0.0002	100000.0	22.1699	99981.3	4704373.7	47.04
26	0.0003	0.0003	99977.8	25.3711	99965.1	4604392.4	46.05
27	0.0002	0.0002	99952.5	24.6422	99940.1	4504427.3	45.07
28	0.0007	0.0007	99927.8	70.8797	99892.4	4404487.1	44.08
29	0.0011	0.0011	99856.9	107.7229	99803.1	4304594.8	43.11
30	0.0004	0.0004	99749.2	40.4517	99729.0	4204791.7	42.15
31	0.0008	0.0008	99708.8	76.9080	99670.3	4105062.7	41.17
32	0.0010	0.0010	99631.9	103.9070	99579.9	4005392.4	40.20
33	0.0010	0.0010	99527.9	98.2558	99478.8	3905812.5	39.24
34	0.0018	0.0018	99429.7	183.0738	99338.2	3806333.7	38.28
35	0.0022	0.0022	99246.6	220.2383	99136.5	3706995.5	37.35
36	0.0026	0.0026	99026.4	261.4429	98895.7	3607859.0	36.43
37	0,0027	0,0027	98764,9	261.8137	98634.0	3508963.4	35.53
38	0.0028	0.0028	98503.1	277.6369	98364.3	3410329.3	34.62
39	0.0023	0.0023	98225.5	226.5304	98112.2	3311965.0	33.72
40	0.0028	0.0028	97999.0	270.3635	97863.8	3213852.8	32.79
41	0.0025	0.0025	97728.6	243.9794	97606.6	3115989.0	31.88
42	0.0020	0.0020	97484.6	191.2909	97389.0	3018382.4	30.96
43	0.0014	0.0014	97293.3	140.8081	97222.9	2920993.5	30.02
44	0.0018	0.0018	97152.5	176.2116	97064.4	2823770.5	29.07
45	0.0023	0.0023	96976.3	226.5381	96863.0	2726706.1	28.12
46	0.0032	0.0032	96749.8	311.0092	96594.3	2629843.1	27.18
47	0.0032	0.0032	96438.8	305.4196	96286.0	2533248.8	26.27
48	0.0029	0.0029	96133.3	278.0525	95994.3	2436962.8	25.35
49	0.0034	0.0034	95855.3	326.0989	95692.2	2340968.5	24.42
50	0.0044	0.0044	95529.2	418.8349	95319.8	2245276.3	23.50
51	0.0048	0.0048	95110.3	452.2520	94884.2	2149956.5	22.60
52	0.0041	0.0041	94658.1	388.5923	94463.8	2055072.3	21.71
53	0.0044	0.0043	94269.5	409.7821	94064.6	1960608.5	20.80
54	0.0058	0.0058	93859.7	539.9475	93589.7	1866543.9	19.89
55	0.0061	0.0061	93319.8	568.2840	93035.6	1772954.1	19.00
56	0.0065	0.0065	92751.5	600.4947	92451.2	1679918.5	18.11
57	0.0061	0.0060	92151.0	557.4029	91872.3	1587467.2	17.23
58	0.0060	0.0060	91593.6	550.5129	91318.3	1495594.9	16.33
59	0.0078	0.0078	91043.1	708.5861	90688.8	1404276.6	15.42
60	0.0074	0.0074	90334.5	670.1931	89999.4	1313587.8	14.54
61	0.0077	0.0077	89664.3	688.1967	89320.2	1223588.4	13.65
62	0.0093	0.0092	88976.1	821.1835	88565.5	1134268.2	12.75
63	0.0094	0.0094	88154.9	827.9206	87741.0	1045702.7	11.86
64	0.0106	0.0106	87327.0	921.6101	86866.2	957961.7	10.97
65	0.0128	0.0127	86405.4	1100.0849	85855.3	871095.5	10.08
66	0.0121	0.0120	85305.3	1027.7679	84791.4	785240.2	9.21
67	0.0141	0.0140	84277.5	1179.6981	83687.7	700448.8	8.31
68	0.0151	0.0150	83097.8	1247.9078	82473.9	616761.1	7.42
69	0.0158	0.0157	81849.9	1287.0171	81206.4	534287.2	6.53
70	0.0168	0.0166	80562.9	1338.3309	79893.7	453080.8	5.62
71	0.0199	0.0197	79224.6	1561.8023	78443.7	373187.0	4.71
72	0.0220	0.0217	77662.8	1686.5801	76819.5	294743.3	3.80
73	0.0285	0.0281	75976.2	2136.3954	74908.0	217923.8	2.87
74	0.0319	0.0314	73839.8	2317.8128	72680.9	143015.8	1.94
75	0.0338	0.0332	71522.0	2374.0981	70334.9	70334.9	0.98

Tabela B.5: Tábua de Mortalidade de 2019

Idade atuarial $x$	$\ddot{m}_{x,2020}$	$\ddot{q}_{x,2020}$	$\ddot{l}_{x,2020}$	$\ddot{d}_{x,2020}$	$\ddot{L}_{x,2020}$	$\ddot{T}_{x,2020}$	$\ddot{e}_{x,2020}$
25	0.0002	0.0002	100000.0	17.0288	99985.6	4714726.8	47.15
26	0.0002	0.0002	99983.0	19.9076	99973.0	4614741.2	46.16
27	0.0002	0.0002	99963.1	19.2302	99953.4	4514768.1	45.16
28	0.0007	0.0007	99943.8	68.9320	99909.4	4414814.7	44.17
29	0.0010	0.0010	99874.9	100.7485	99824.5	4314905.3	43.20
30	0.0004	0.0004	99774.2	36.4748	99755.9	4215080.8	42.25
31	0.0007	0.0007	99737.7	70.0440	99702.7	4115324.9	41.26
32	0.0009	0.0009	99667.6	94.5818	99620.3	4015622.2	40.29
33	0.0009	0.0009	99573.1	90.6926	99527.7	3916001.9	39.33
34	0.0019	0.0019	99482.4	184.5585	99390.1	3816474.2	38.36
35	0.0021	0.0021	99297.8	210.1691	99192.7	3717084.1	37.43
36	0.0026	0.0026	99087.6	256.2875	98959.5	3617891.4	36.51
37	0.0026	0.0026	98831.3	255.7475	98703.5	3518931.9	35.61
38	0.0028	0.0028	98575.6	272.9089	98439.1	3420228.4	34.70
39	0.0022	0.0022	98302.7	220.7314	98192.3	3321789.3	33.79
40	0.0027	0.0027	98082.0	265.1346	97949.4	3223597.0	32.87
41	0.0024	0.0024	97816.8	236.7006	97698.5	3125647.6	31.95
42	0.0019	0.0019	97580.1	185.9066	97487.2	3027949.1	31.03
43	0.0014	0.0014	97394.2	133.0605	97327.7	2930461.9	30.09
44	0.0017	0.0017	97261.2	168.0118	97177.1	2833134.2	29.13
45	0.0022	0.0022	97093.1	217.5056	96984.4	2735957.1	28.18
46	0.0031	0.0031	96875.6	298.8389	96726.2	2638972.7	27.24
47	0.0030	0.0030	96576.8	292.1366	96430.7	2542246.5	26.32
48	0.0028	0.0028	96284.7	266.4668	96151.4	2445815.8	25.40
49	0.0033	0.0033	96018.2	315.4961	95860.4	2349664.3	24.47
50	0.0043	0.0043	95702.7	411.9452	95496.7	2253803.9	23.55
51	0.0047	0.0047	95290.8	444.6686	95068.4	2158307.2	22.65
52	0.0040	0.0040	94846.1	377.0132	94657.6	2063238.7	21.75
53	0.0042	0.0042	94469.1	399.9975	94269.1	1968581.2	20.84
54	0.0056	0.0056	94069.1	529.4724	93804.3	1874312.1	19.92
55	0.0060	0.0059	93539.6	556.4689	93261.4	1780507.7	19.03
56	0.0064	0.0063	92983.1	589.3881	92688.4	1687246.4	18.15
57	0.0059	0.0058	92393.7	539.3684	92124.1	1594557.9	17.26
58	0.0058	0.0058	91854.4	530.2445	91589.3	1502433.9	16.36
59	0.0076	0.0076	91324.1	693.0747	90977.6	1410844.6	15.45
60	0.0072	0.0072	90631.1	652.1818	90305.0	1319867.0	14.56
61	0.0075	0.0075	89978.9	676.0075	89640.9	1229562.1	13.67
62	0.0092	0.0092	89302.9	817.5318	88894.1	1139921.2	12.76
63	0.0093	0.0092	88485.3	818.2415	88076.2	1051027.1	11.88
64	0.0105	0.0105	87667.1	918.8859	87207.7	962950.9	10.98
65	0.0128	0.0127	86748.2	1100.3097	86198.1	875743.2	10.10
66	0.0119	0.0119	85647.9	1016.8672	85139.5	789545.2	9.22
67	0.0139	0.0138	84631.0	1169.0857	84046.5	704405.7	8.32
68	0.0149	0.0148	83461.9	1235.0563	82844.4	620359.2	7.43
69	0.0155	0.0154	82226.9	1264.7112	81594.5	537514.8	6.54
70	0.0163	0.0162	80962.2	1310.3235	80307.0	455920.3	5.63
71	0.0195	0.0193	79651.9	1537.8773	78882.9	375613.2	4.72
72	0.0215	0.0212	78114.0	1659.2245	77284.4	296730.3	3.80
73	0.0280	0.0277	76454.8	2114.5512	75397.5	219446.0	2.87
74	0.0315	0.0310	74340.2	2305.9509	73187.2	144048.5	1.94
75	0.0331	0.0326	72034.3	2345.9762	70861.3	70861.3	0.98

Tabela B.6: Tábua de Mortalidade de 2020





# Anexo C

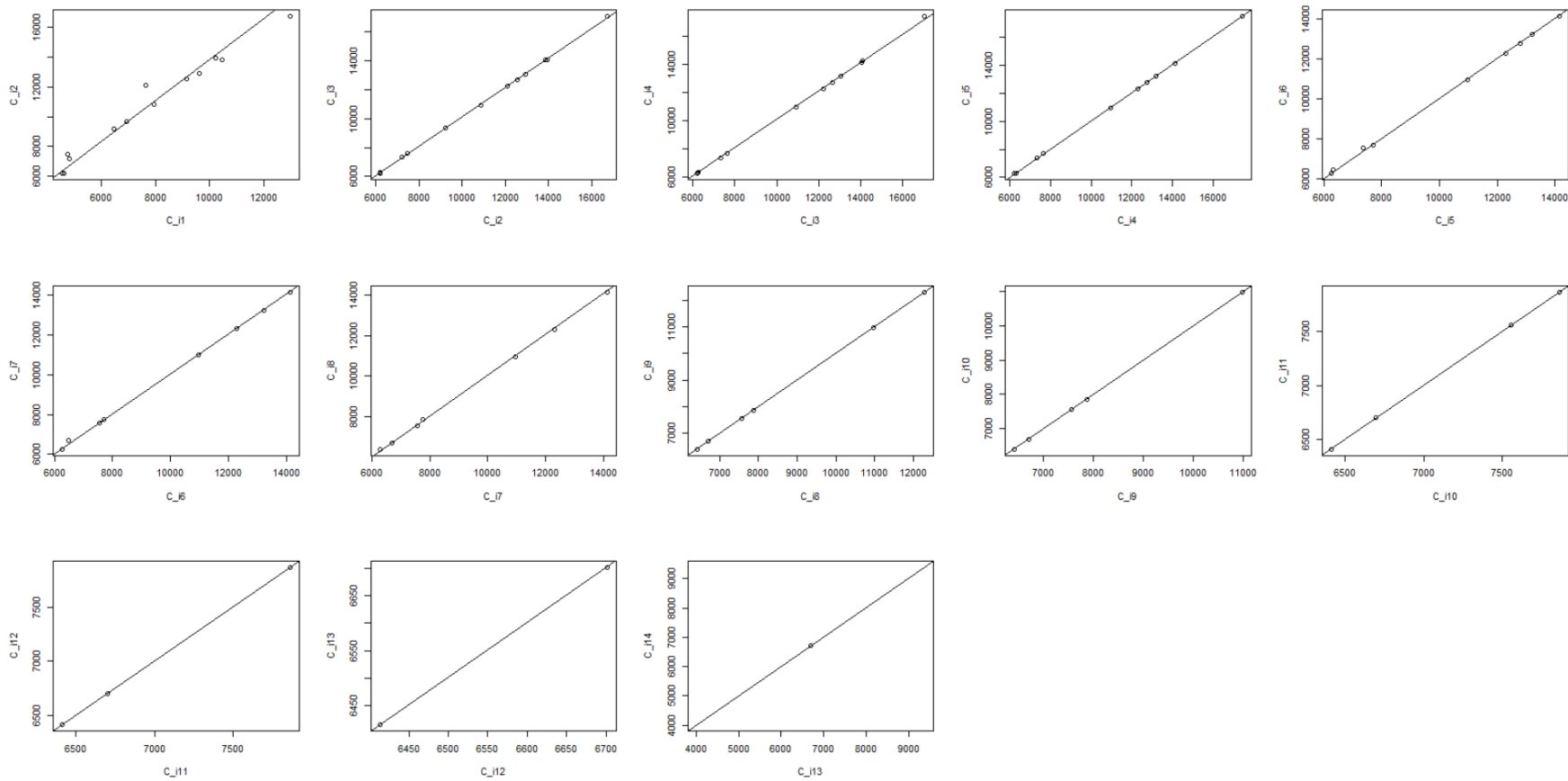


Figura .1: Ajustamento dos dados aos fatores de desenvolvimento