



Formar para la evaluación formativa

Las trayectorias de aprendizaje

María Luz Callejo de la Vega

Universidad de Alicante

Eloísa Montero Pascual

Escuni, Centro Universitario de Magisterio (Madrid)



En este artículo proponemos el uso de trayectorias de aprendizaje para la evaluación formativa. Presentamos algunas referencias de su uso en la formación inicial del profesorado y un ejemplo de aplicación de una trayectoria de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de *grupos múltiples*, para hacer una evaluación formativa de una alumna a dos problemas con fracciones.

PALABRAS CLAVE

- EVALUACIÓN FORMATIVA
- TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE
- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS
- FRACCIONES



La evaluación formativa es un proceso de regulación del aprendizaje que tiene como finalidad adaptar la intervención educativa, ajustando las dificultades y logros de los estudiantes a los objetivos pretendidos. Para llevarla a cabo, es preciso:

- Identificar un objetivo de aprendizaje.
- Recoger información sobre los progresos y dificultades de aprendizaje de los estudiantes. Esto requiere emplear estrategias para que los estudiantes expresen su pensamiento y sus ideas, así como tener un marco para poder interpretar estas ideas y, en su caso, diagnosticar los factores que causan las dificultades.
- Proporcionar retroalimentación a los estudiantes, lo que implica conocer el tipo más adecuado de respuesta que se les puede dar en cada situación.

Por otra parte, la evaluación formativa requiere que el profesorado tenga un profundo conocimiento de los distintos aspectos que conforman el conocimiento para la enseñanza (conocimiento de la materia y conocimiento didáctico del contenido según Shulman, 1987) así como referencias sobre la progresión del aprendizaje y retroalimentación adecuada en función de su nivel dentro de esta progresión.

TRAYECTORIAS DE APRENDIZAJE

Una herramienta que puede ayudar a la evaluación formativa es la de las trayectorias de aprendizaje, que en los últimos años se han incorporado como contenido en los programas de desarrollo profesional. Para Clements y Sarama (2015), una trayectoria de aprendizaje tiene tres componentes:

- 1 Un objetivo de aprendizaje.
- 2 Una progresión del aprendizaje que describe niveles de desarrollo para alcanzar el objetivo.
- 3 Un conjunto de tareas instruccionales.

Las trayectorias de aprendizaje se utilizan para, entre otras tareas, planificar la enseñanza de un contenido



Las trayectorias de aprendizaje se han utilizado como referencia para realizar tareas profesionales tales como planificar la enseñanza de un contenido concreto (explicitando objetivos y diseñando secuencias de tareas), interpretar y valorar las respuestas de los estudiantes (visualizando la progresión del aprendizaje), y tomar decisiones instruccionales en función de la interpretación de estas respuestas.

EJEMPLOS DE USOS DE LAS TRAYECTORIAS DE APRENDIZAJE

Presentamos a continuación algunas referencias de la introducción de trayectorias de aprendizaje en los programas de formación inicial de maestros de educación infantil y primaria y en el máster de profesorado de secundaria.

En un artículo aparecido en esta misma revista, Sánchez-Matamoros y Fernández Verdú (2016) presentan la utilización de una trayectoria de aprendizaje del concepto de *derivada* en el máster de formación de profesorado de secundaria, para desarrollar este concepto mediante una secuencia de actividades. Describen tres niveles de desarrollo de la comprensión de la derivada que se han generado con información proporcionada por resultados de investigaciones previas y atienden a las relaciones entre modos de representación (analítico-numérico y gráfico) y el carácter local y global de la derivada (derivada de una función en

un punto y derivada de una función). Teniendo en cuenta estos dos aspectos, han diseñado una secuencia de actividades que requiere distintos niveles de comprensión de este concepto.

Una trayectoria de aprendizaje sobre la longitud y su medida, adaptada de Clements y Sarama (2015), ha sido utilizada en el grado en Maestro en Educación Infantil (Sánchez-Matamoros y otros, 2018) con objeto de que los futuros maestros la usen como instrumento conceptual para describir e interpretar respuestas de niños a situaciones de enseñanza-aprendizaje y proponer tareas en función de la comprensión inferida. El modelo de progresión de la comprensión de este concepto consta de cinco niveles: los tres primeros van del reconocimiento de la magnitud longitud como un atributo de los objetos hasta la propiedad transitiva; los dos últimos tratan de la construcción de la idea de unidad de medida de longitud.

Una trayectoria de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de *grupos múltiples* (Empson y Levi, 2011) ha sido el marco de un experimento de enseñanza con estudiantes para maestro de primaria (Montero y Callejo, 2018). Los problemas de grupos múltiples son casos especiales de multiplicación y división con fracciones con un número entero de grupos iguales

de cantidades fraccionarias, por ejemplo: «Tengo 12 chocolatinas y quiero dar $\frac{3}{4}$ de chocolatina a cada niño, ¿a cuántos niños puedo dar?». El objetivo de la trayectoria de aprendizaje fue que los estudiantes resolvieran problemas de grupos múltiples utilizando diferentes estrategias, antes de enseñarles los algoritmos de las operaciones de multiplicar y dividir fracciones.

La progresión del aprendizaje de las estrategias consta de tres etapas (Empson y Levi, 2011). Las desarrollamos a continuación.

Etapa 1. Modelado directo y adición repetida

En la primera etapa de la progresión del aprendizaje se representa cada cantidad fraccionaria. En el modelado directo, los niños y niñas representan todas las cantidades en el problema y cuentan o suman (y, en ocasiones, restan para los problemas de división-medida) hasta llegar a la respuesta final. Por ejemplo, en el problema de las chocolatinas, una forma de implementar esta estrategia es dibujar las 12 chocolatinas y dividir cada una en cuartos; a continuación, se agrupan los 3 cuartos que se dan a cada niño y se sigue este proceso hasta que se usen los 48 cuartos en que se han dividido las 12 chocolatinas. Como hay 16 grupos de $\frac{3}{4}$, se puede dar a 16 niños (véase ejemplo en imagen 1).

La estrategia de adición repetida se diferencia de la modelización directa en que las fracciones se representan de manera simbólica, con números fraccionarios, en lugar de con dibujos. En el ejemplo de la imagen 2, se da $\frac{3}{4}$ de cada una de las 12 chocolatinas a 12 niños; después, se suma tres veces $\frac{1}{4}$ de los 12 cuartos que sobraron después del primer reparto.

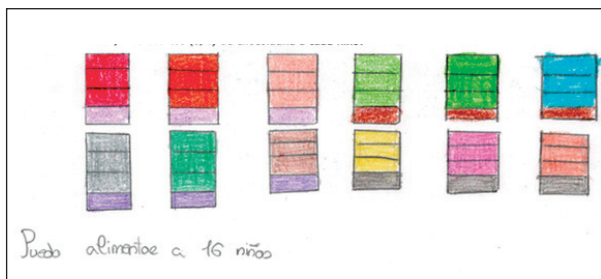


Imagen 1

Etapa 2. Agrupamiento y combinación (pensando aditivamente)

En la segunda etapa, no se representa cada fracción unitaria, sino que se agrupan y cuentan conjuntos de fracciones con la idea de que con ese agrupamiento se tenga un número entero. Se utilizan estos agrupamientos para contar el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.). Por ejemplo, en el problema de las chocolatinas se tiene que $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$ son 3 chocolatinas y se puede dar a 4 niños; con otras 3 más, se puede dar a 8 niños; con otras 3 más, a 12 niños, y con otras 3 más se puede dar a 16 niños.

Etapa 3. Estrategias multiplicativas (con proporcionalidad, proceso constructivo, o directamente con multiplicación)

En la tercera etapa, se relaciona el grupo fraccionario o un agrupamiento con el total, usando la multiplicación. Por ejemplo: 3 chocolatinas para 4 niños. Si tenemos 12 chocolatinas, hay 4 grupos de 3 chocolatinas, luego se puede dar a $4 \times 4 = 16$ niños.

En esta progresión, subyace la idea de construir el concepto de fracción como cantidad usando la idea de unidad iterativa (Buform, 2018). En el ejemplo de la primera estrategia, se usa la frac-

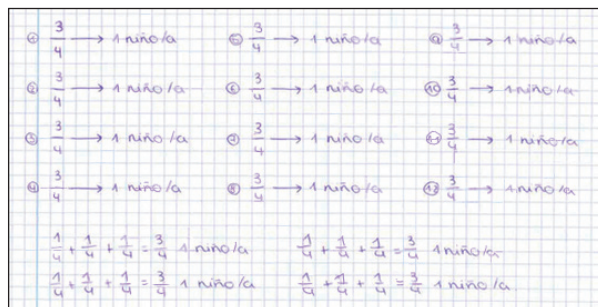


Imagen 2

ción unitaria $\frac{1}{4}$, que se va iterando sucesivamente; cada tres iteraciones, se tiene un grupo de $\frac{3}{4}$. Se terminan las iteraciones cuando se alcanza 12 unidades. En la segunda, se utiliza una fracción no unitaria, $\frac{3}{4}$, que se va iterando hasta llegar a 12 unidades. En la tercera, hay un salto cualitativo respecto de las anteriores, pues se pasa de estrategias aditivas a multiplicativas.

Las variables de tarea que se pueden utilizar para que los niños y niñas avancen en la progresión de las estrategias son: el uso de números no *amigables* (por ejemplo, en lugar de usar los números 12, 3 y 4 en el problema de las chocolatinas, usar otros en los que no haya una relación de múltiplos o divisores), uso de fracciones impropias o proponer divisiones con resto.

USO DE LA TRAYECTORIA DE APRENDIZAJE PARA VALORAR LA RESPUESTA DE UNA ESTUDIANTE

Ana es una alumna de 5.º de primaria. En su clase han estudiado el significado de la fracción como relación parte-todo y su representación mediante dibujos y de forma simbólica. Conocen también, de cursos anteriores, los significados de las operaciones con números enteros y sus algoritmos, pero no han trabajado los algoritmos de

■

En la estrategia de adición repetida las fracciones se representan simbólicamente, con números fraccionarios

las operaciones con fracciones. Con el objetivo de conocer cómo utiliza sus conocimientos sobre el significado de la fracción y de las operaciones de multiplicación y división, su maestra ha propuesto a la clase los dos problemas siguientes:

- Tengo 12 chocolatinas. ¿A cuántos niños puedo dar si doy tres cuartos ($3/4$) de chocolatina a cada niño?
- Para hacer una bandeja de galletas necesitamos utilizar un cuarto de una taza de azúcar. Si tienes 5 tazas y media, ¿cuántas bandejas de galletas puedes hacer?

Las respuestas de Ana se muestran en las imágenes 3 y 4.

¿Qué muestran las respuestas de Ana sobre su conocimiento de las fracciones y las operaciones? En primer lugar, podemos decir que **la alumna resolvió ambos problemas con estrategias multiplicativas (tercera etapa de la progresión del aprendizaje)**, buscando relaciones entre los números que aparecen en los enunciados.

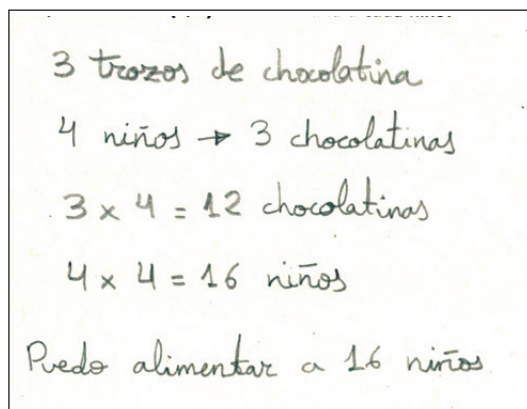


Imagen 3

En el problema de las chocolatinas, la relación entre el numerador y el denominador de la fracción (4 niños \rightarrow 3 chocolatinas) ha sido clave para su resolución. Apoyándose en esta relación, ha usado el razonamiento proporcional: ha multiplicado las 3 chocolatinas por 4 para obtener 12 chocolatinas que tiene, usando la multiplicación como operación inversa de la división. Como 4 es la constante de proporcionalidad, ha multiplicado también los niños por 4, obteniendo como solución del problema 16 niños.

En el problema de las galletas, ha comenzado también usando la relación de proporcionalidad para saber cuántas bandejas se pueden hacer con una taza de azúcar: «1 taza de azúcar da para 4 bandejas de galletas». Por otra parte, ha descompuesto «5 tazas y media» en «5 tazas y media taza», y ha hecho los cálculos por separado: número de bandejas de galletas con 5 tazas y número de bandejas de galletas con media taza, y ha sumado los resultados. Por tanto, ha usado las dos propiedades de la relación de proporcionalidad $f(kx) = k f(x)$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

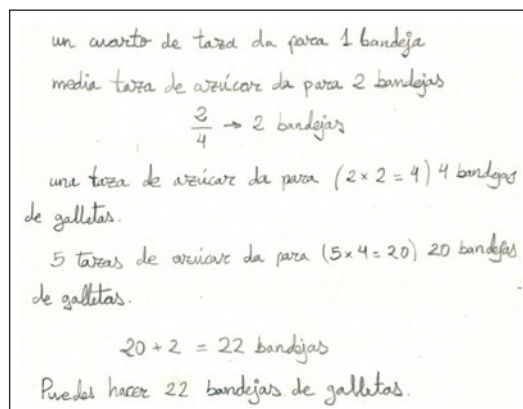


Imagen 4

¿Qué retroalimentación se le puede dar a Ana? La maestra puede dar a Ana distintos tipos de retroalimentación. Además de valorar positivamente su trabajo, puede pedirle que le explique las estrategias que ha seguido, para tener más información sobre su pensamiento. También puede proponerle problemas de mayor dificultad cambiando los datos, por ejemplo, un problema donde la relación entre algunos de los números naturales que aparecen no sea de múltiplo y divisor, como el siguiente:

Tengo 12 chocolatinas y doy $\frac{3}{7}$ de chocolatina a cada niño.

O un problema en que haya resto preguntándole lo que puede dar a cada niño y cuánto le sobra:

Tengo 10 chocolatinas y doy $\frac{3}{7}$ de chocolatina a cada niño.

Por otro lado, como ha dado muestras de manejar el razonamiento proporcional y el pensamiento relacional (uso de las propiedades de las igualdades y las operaciones para operar), le puede proponer tareas que impliquen estas formas de pensamiento.

REFLEXIÓN FINAL

En este artículo hemos visto cómo la progresión del aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples puede ayudar a interpretar las estrategias que usan los estudiantes. Estas estrategias se apoyan en conocimientos matemáticos sobre los significados de las fracciones y las relaciones entre las cantidades. Por ello, la formación para la evaluación formativa requiere

La formación para la evaluación formativa requiere que el profesorado tenga un conocimiento matemático sobre estos aspectos



re que el profesorado tenga un conocimiento matemático sobre estos aspectos, así como un conocimiento de contenido pedagógico sobre las estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples. ◀

Nota

* Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2014-54526-R y EDU2017-87411-R, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO)/ FEDER, Gobierno de España.

Referencias bibliográficas

- BUFORN, A. (2018): «El concepto de fracción. Actividades para desarrollar el significado de la relación parte-todo». *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, núm. 80, pp. 59-65.
- CLEMENTS, D.; SARAMA, J. (2015): *El aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas a temprana edad*. Learning Tools.
- EMPSON, S.B.; LEVI, L. (2011): *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals*. Portsmouth, NH. Heinemann.
- MONTERO, E.; CALLEJO, M.L. (2018): «Cómo interpretan estudiantes para maestro respuestas de alumnos de Primaria a problemas de división-medida con fracciones», en RODRÍGUEZ-MUÑIZ, L.J. y otros (eds.): *Investigación en Educación Matemática XXII*. Gijón. SEIEM, pp. 378-386.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G.; FERNÁNDEZ VERDÚ, C.
(2016): Secuencias de actividades sobre derivada desde una trayectoria de aprendizaje. *Uno: Revista de Didáctica de las matemáticas*, núm. 72, pp. 40-45.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, G. y otros (2018): «Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 21(2), pp. 203-228.

SHULMAN, L. (1987): Knowledge and teaching: Foundations on the new reform. *Harvard Educational Review*, vol. 57(1), pp. 1-23.

Direcciones de contacto

María Luz Callejo de la Vega

Universidad de Alicante

luz.callejo@ua.es

Eloísa Montero Pascual

Escuni, Centro Universitario de Magisterio. Madrid

emontero@escuni.es

Este artículo fue solicitado por UNO: REVISTA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS en julio de 2018 y aceptado en noviembre de 2018 para su publicación.

Enseñar matemáticas

Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep M.^a Fortuny, Joaquim Giménez, Montserrat Torra

Un manual que pretende transmitir referencias, experiencias y buenas dosis de optimismo para mejorar la calidad docente dentro del ámbito de las matemáticas y, al mismo tiempo ayudara reflexionar sobre la labor docente y a orientarla.

La obra se divide en cuatro capítulos: el primero gira en torno a consideraciones generales de la materia; en el resto de capítulos se trata monográficamente la enseñanza de las matemáticas en las etapas correspondientes a educación infantil, primaria y secundaria obligatoria y se dan, además, orientaciones sobre modelos de enseñanza, atención a la diversidad, evaluación, globalización, enlace de ciclos y propuestas de materiales y de actividades sugerentes.


Enseñar matemáticas


Claudi Alsina, Carme Burgués, Josep M.^a Fortuny,
Joaquim Giménez, Montserrat Torra

102


22,80 €



 Hurtado, 29. 08022 Barcelona

 info@irif.eu

 www.grao.com

 934 080 464