



## UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA PARA ABORDAR LA DESVIACIÓN MEDIA CON ESTUDIANTES DE SECUNDARIA

**Jocelyn, Díaz Pallauta**

[jocelyndiazpallauta16@gmail.com](mailto:jocelyndiazpallauta16@gmail.com)

Universidad de Granada (España)

**Valeria, Bizet Leyton**

[valeb0@hotmail.com](mailto:valeb0@hotmail.com)

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

**Felipe, Ruz Ángel**

[felipe.ruz.angel@gmail.com](mailto:felipe.ruz.angel@gmail.com)

Universidad de Granada (España)

**Asunto:** Uso de recursos didácticos o tecnológicos

**Temática:** Variabilidad

### RESUMEN

*Este trabajo describe una lección de enseñanza para la desviación media, la que se llevó a cabo en cuatro fases con estudiantes chilenos de secundaria. Para el diseño de la situación y su posterior implementación se utilizaron elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas [TSD], mientras que la metodología empleada en la investigación es una ingeniería didáctica. Las respuestas, que aportan los estudiantes, informan de las ideas que poseen sobre la dispersión, en su mayoría incompletas, pero evidencian que el concepto es intuitivo y por tanto, puede facilitar el estudio de otras medidas como la varianza y la desviación estándar.*

294

### PALABRAS CLAVE

Dispersión, Situación didáctica, Ingeniería didáctica, Desviación media.

### INTRODUCCIÓN

Una diversidad de investigaciones apuntan a la importancia del rol de la variación en la estadística, Wild y Pfannkuch (1999) sostienen que la variación se constituye en un aspecto primordial, dado que esta noción se conecta con diferentes conceptos estadísticos en el ámbito del análisis exploratorio de datos, como la dispersión, centralización y distribución.

El estudio de la variación y las medidas de dispersión es decisivo en la inferencia estadística, no obstante, las investigaciones de esta temática en educación estadística son

escasas (Batanero, López-Marín, González-Ruiz y Díaz-Levicoy, 2015) y en los niveles básicos, prácticamente inexistentes.

Los autores Cobb y Moore (1997) señalan que cuando se calcula una medida de dispersión, los datos no son sólo números, sino que obedecen a un contexto, en el que se requiere una adecuada interpretación de los valores obtenidos, con el objeto de tomar mejores decisiones en determinadas situaciones.

Silva y Coutinho (2008) acusan que la enseñanza de diferentes estadísticos, como las medidas de centralización y dispersión, se ha limitado a la aplicación de fórmulas, sugiriendo que los profesores carecen de una comprensión profunda de estos conceptos, lo que impide que puedan ofrecer a los estudiantes propuestas de enseñanza donde estos cobren sentido. Sánchez (2013) y Batanero et al. (2015) confirman estas observaciones, mencionando que los estudiantes son capaces de determinar diferentes medidas de dispersión, pero presentan dificultades en comprender los procesos y los conceptos involucrados, lo que posteriormente se agudiza con el estudio de la inferencia.

Por otra parte, Garfield y Ben-Zvi (2008) y Estepa y Del Pino (2013) identifican en la enseñanza, una desvinculación de las medidas de dispersión respecto a las de centralización, a pesar de su complementariedad en el análisis exploratorio de los datos. En una experiencia realizada por Orta y Sánchez (2013) con estudiantes de secundaria (14 años), los autores detectaron que resulta muy complejo interpretar la dispersión en contextos de riesgo, porque los alumnos tienden a realizar comparaciones con valores particulares. En síntesis, de las investigaciones mencionadas anteriormente, se desprende que el tema no es sencillo, principalmente, cuando se trata de integrar la dispersión en la toma de decisiones en contexto.

Diferentes países incorporan en sus lineamientos curriculares el estudio de la dispersión, por ejemplo en Estados Unidos, los estándares propuestos por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) para la enseñanza de la matemática, en el eje de Datos y Azar aparecen objetivos que abordan la utilización e interpretación de las diferentes medidas de centralización y dispersión para el análisis de datos. En Chile, en el currículo de matemática, el eje de Probabilidad y Estadística, también incorpora tópicos asociados a la dispersión, así como habilidades como: “todos los y todas las estudiantes aprendan a realizar análisis, inferencias y obtengan información a partir de datos estadísticos” (MINEDUC, 2012, p.100).

Tomando en cuenta los antecedentes mencionados, la presente comunicación tiene por objetivo describir el proceso de diseño e implementación de una ingeniería didáctica

acerca de la desviación media con estudiantes de secundaria, con algunos elementos que aporta la Teoría de Situaciones Didácticas [TSD] (Brousseau, 2007).

## MARCO DE REFERENCIA

El marco de referencia utilizado en el estudio es la Teoría de Situaciones Didácticas [TSD] propuesto por Brousseau (2007), quien señala que una situación es considerada didáctica cuando se evidencian, dentro de las relaciones que emergen entre medio–estudiante y medio–docente, cuatro fases: situación de acción, situación de formulación, situación de validación y situación de institucionalización.

### 1. Situación de Acción.

En esta etapa el estudiante establece su primera interacción con el medio presentado. Tiene por objetivo que el alumno organice y escoja sus estrategias, y construya una representación de la situación que le sirve de modelo y de guía para tomar sus decisiones.

### 2. Situación de Formulación.

“La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto de retomar lo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico)” (Brousseau, 2007, p. 25). En esta fase el estudiante debe comunicar a sus compañeros de grupo la estrategia que propone y convencerlos de realizar una acción determinada, ya que es la única manera que tiene de actuar sobre la situación.

### 3. Situación de Validación.

En este tipo de situación, los alumnos (...) aprenden cómo convencer a los demás (...). Las razones que un alumno puede dar para convencer a otro, o las que pueda aceptar para cambiar de punto de vista, serán aceptadas progresivamente, construidas, puestas a prueba, debatidas y convenidas (Brousseau, 2007, p. 23).

Los esquemas de acción y formulación conllevan procesos de corrección, ya sea empírica o apoyada en aspectos culturales, para asegurar la pertinencia, adecuación, adaptación o conveniencia de los conocimientos movilizados. Sin embargo, la modelización en términos de situación permite distinguir un nuevo tipo de formulación: el emisor es un proponente y el receptor, un oponente.

### 4. Situación de Institucionalización.

Esta fase es responsabilidad del profesor, luego del tránsito de las fases anteriores, debe ordenar los resultados de sus alumnos, dando cuenta de lo que estos habían hecho, describiendo lo que había sucedido y lo que estaba vinculado con el conocimiento en cuestión, con el fin de asegurar la consistencia del conjunto de las modelizaciones, eliminando las que son contradictorias y de esta manera, dar a determinados conocimientos el estado cultural indispensable de saberes

Además de las cuatro fases, Brousseau también considera la relevancia de la situación didáctica, diseñada y propuesta por el profesor en la que conocimientos antiguos pierden alcance y genera, en el estudiante, la necesidad de aprender algo nuevo. Otro aspecto relevante, es el rol del profesor el que consiste en guiar este proceso por medio de devoluciones, las cuales corresponden al “acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (a-didáctica) o de un problema y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia” (Brousseau, 2007, p. 87).

## DESARROLLO DEL TEMA

### Aspectos metodológicos

La metodología empleada en la investigación es Ingeniería Didáctica, por su utilidad para analizar situaciones didácticas. Farfán (1997), declara que la Ingeniería Didáctica, se constituye en una metodología de investigación dentro de la Didáctica de las Matemáticas, la que se puede aplicar a los productos de enseñanza basados o derivados de ella y para guiar la experimentación en clase.

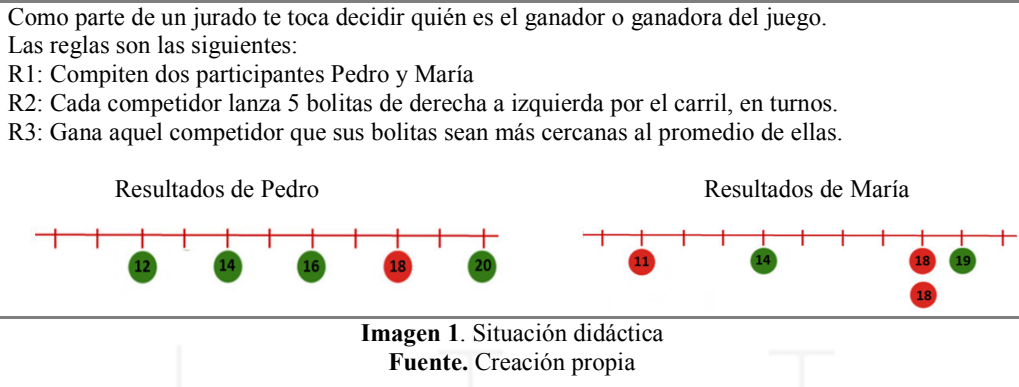
Los informantes lo conforman 25 estudiantes que cursaban su tercer año de enseñanza media (16-17 años), en un colegio particular subvencionado chileno, esta muestra no fue probabilística, sino que por disposición.

Algunos de los insumos utilizados para la construcción de la Ingeniería Didáctica, fueron las dificultades observadas, en diferentes estudios, respecto a la utilidad de la noción de dispersión para la interpretación y análisis de datos, lo que permite finalmente una mejor toma de decisiones en determinados contextos.

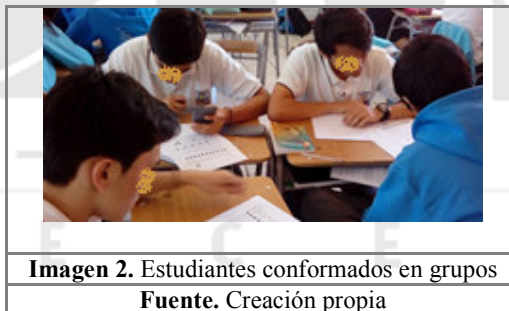
Para la secuencia de la clase se elaboró un guion de trabajo, el que fue pilotado en un grupo de 30 estudiantes, con similares características al de la muestra. Posteriormente, se clasificaron las respuestas correctas e incorrectas de las producciones entregadas por los estudiantes, seguido de un análisis de contenido de las respuestas, prestando especial atención en las estrategias puestas en juego para dar solución, las que en algunos casos, escaparon del análisis *a priori*.

### Desarrollo de la propuesta

*Situación didáctica.* Los estudiantes debieron responder a una tarea (Imagen 1) que consistió en justificar la decisión de cuál de dos series de datos, con igual media y rango, presenta menor dispersión en un contexto de juego. Cada serie de datos, se corresponde a la posición que ocupan 5 bolas que se lanzan por un carril y ocupan un depósito numerado del 10 al 20, pudiendo albergar cada depósito hasta 5 bolas.




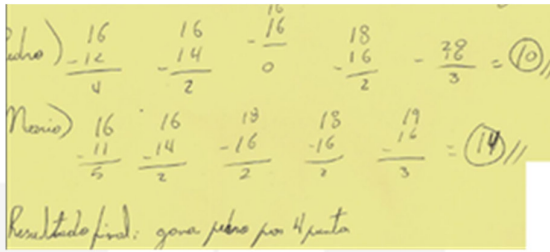
*Situación Acción.* En la primera fase, los estudiantes conformaron equipos y se les entregó, a cada uno, la tarea que debían realizar. Se hizo una lectura general de la tarea, y luego se les asignó un tiempo para buscar soluciones (Imagen 2). Las respuestas, en primera instancia, eran intuitivas y poco elaboradas, para orientar el trabajo, el profesor les hacía devoluciones, por ejemplo: “¿Cómo podemos estar seguros que ese jugador es el ganador?, ¿Crees que ese argumento convencerá a los jueces?”, “¿Puedes crear un argumento matemático que permitan fortalecer tu respuesta?” Estas preguntas motivaron una elaboración con argumentos matemáticos para poder dar respuesta a la cuestión.



*Situación de Formulación.* En esta fase, los estudiantes elaboran diferentes argumentos para justificar la elección del ganador. Cada grupo debió realizar concesos para decidir la estrategia que presentarían, como equipo, al curso. Las argumentaciones, se basaron en interpretaciones de los datos a través de gráficos, uso de intervalos centrados en la mediana de la serie inicial de datos, cálculo de distancias de cada lanzamiento con respecto a la media, promedio de las distancias de cada lanzamiento respecto a la media del conjunto, entre otras. Esto motivo la incertidumbre de algunos equipos, respecto a qué estrategia mostrar, en estos casos se les propuso que cada uno, dentro del grupo, les explicara a su compañeros su justificación y juntos tomaran una determinación.

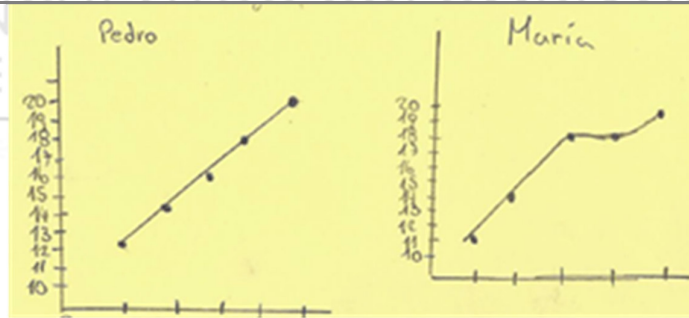
*Situación de Validación.* En la tercera fase, un representante de cada equipo explicó la estrategia empleada, junto con el jugador que consideraba el vencedor (Imagen 3), la

mayoría coincidía en que era Pedro. La justificación presentada, fue discutida y evaluada por el curso; en algunos casos, los mismos estudiantes identificaron equivocaciones, como cálculos incorrectos (Imagen 4), gráficos incompletos o errados en su construcción. A pesar de esto, el argumento empleado, en algunos casos, continuaba siendo válido.

	
<p><b>Imagen 3.</b> Presentación <b>Fuente.</b> Creación propia</p>	<p><b>Imagen 4.</b> Respuesta grupo 2 <b>Fuente.</b> Producción de los estudiantes</p>

Algunos ejemplos de respuestas que entregaron los representantes, fueron: “Pedro es el ganador porque la suma de las distancias de sus lanzamientos al promedio es menor” a lo que el profesor le preguntaba, “¿Cómo calcularon esa distancia?”, “¿Qué sucede si cambiamos uno de los valores obtenidos en los lanzamientos realizados por María?” Estas devoluciones invitaron a establecer algunas generalizaciones.

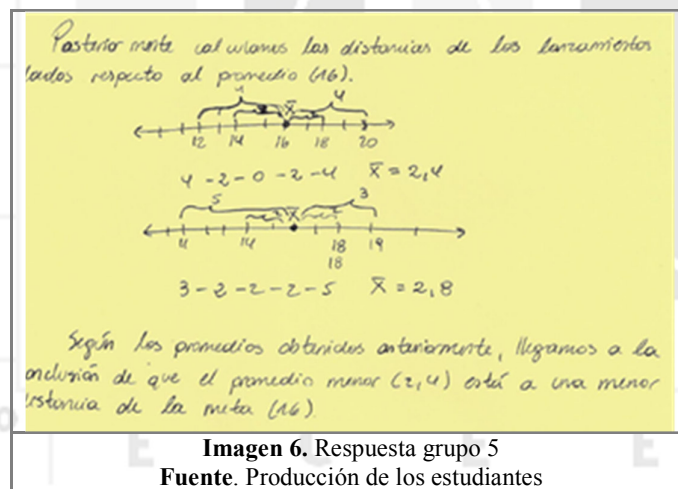
Al planteamiento, “Pedro es el ganador porque si observamos el gráfico, los lanzamientos de él son más constantes” (Imagen 5), se le consultó “¿Qué representa cada uno de los ejes?”, “¿Cuáles son las variables utilizadas?”, esto con el objeto de que el estudiante se percatara de los falencias de su representación gráfica, lo que generaba una debilidad en su argumento.


<p><b>Imagen 5.</b> Respuesta grupo 4 <b>Fuente.</b> Producción de los estudiantes</p>



También se rechazaron argumentaciones cuya justificación fuera débil como por ejemplo “gana Pedro porque la media de los lanzamientos de ambos jugadores es 16, y Pedro fue el único que acertó a este valor”.

*Situación de Institucionalización.* En la fase final, se les pidió a los estudiantes que observaran cada una de las estrategias presentadas por sus compañeros y señalaran cuál de ellas llamaba su atención. Varios señalaron el argumento del grupo 5 (Imagen 6), entre las razones expuestas, manifestaron que lo consideraban útil para diferentes conjuntos de datos. Posteriormente, se les solicitó que realizaran una descripción general para el procedimiento realizado, uno de los estudiantes se animó a compartir su respuesta diciendo “es el promedio de la diferencia de cada dato, respecto al promedio del conjunto de datos”. Otro alumno refutó diciendo “no puede ser la diferencia, porque también podría tomar valores negativos”, en este aspecto, los estudiantes afirmaron que la diferencia debe ser siempre un valor positivo, recordando el concepto de valor absoluto.



Finalmente, el profesor basado en las ideas que surgieron desde los estudiantes, institucionaliza los conceptos de desviación respecto a la media, y desviación media, como una nueva medida de dispersión, dado que ya conocían el rango.

Una vez conocido estos nuevos conceptos, cada estudiante debía redactar porque Pedro era el ganador. Una de las producciones, señala “aunque el promedio y el rango de los lanzamientos realizados por Pedro y María son iguales, la regla decía que gana el que tenga lanzamientos más cercanos al promedio, y si se calcula la desviación media de los valores que acertó cada uno, en el caso de Pedro es menor, por lo tanto él gana”.

## CONCLUSIONES

Abordar la enseñanza de la dispersión, no es tarea sencilla, dado que, en muchas ocasiones los profesores presentan dificultades en su comprensión, además de carencia de herramientas didácticas que les permitan una enseñanza basada en la interpretación y análisis, en lugar de la aplicación mecánica de fórmulas, sin sentido y ausente de una interpretación apropiada.

Como se señaló en la introducción, diferentes autores alertan de las dificultades en la comprensión de las medidas de dispersión, estas se asocian, principalmente, a que su enseñanza se ha desvinculado de las medidas de centralización. La propuesta de enseñanza presentada, vincula, la toma de decisión por parte del estudiante, junto con las medidas de tendencia central. Es un diseño factible de replicar, lo que puede contribuir a que los estudiantes comprendan el concepto de dispersión.

También se pudo observar la importancia del rol del profesor en las devoluciones realizadas en el proceso, ya que en una primera instancia, los estudiantes tienden a responder que hay más variabilidad o dispersión en un conjunto de datos basados por ideas comunes en lugar de un conocimiento estadístico.

Respecto a las respuestas, las estrategias que emplearon los estudiantes fueron diferentes, en su mayoría parcialmente correctas, dado que presentaban errores (en cálculos o en la construcción de gráficos); otras estrategias correctas involucraban el uso de intervalos centrados en la mediana de la serie inicial de datos. Es conveniente señalar, que la mayoría de los estudiantes, vinculó su respuesta con alguna medida de tendencia central como la mediana o la media.

Finalmente, las producciones de los estudiantes informan de las ideas que poseen sobre dispersión, en su mayoría incompletas, pero evidencian un concepto intuitivo, lo que puede facilitar el estudio de otras medidas como la varianza y la desviación estándar.

**Agradecimiento:** Proyecto EDU2016-74848-P, Beca CONICYT Folio: 77170121, grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

## REFERENCIAS

- Batanero, C., López-Martín, M., González-Ruiz, I., & Díaz-Levicoy, D. (2015). Las medidas de dispersión en el estudio de la inferencia estadística. En C. Vásquez, H. Rivas, N. Pincheira, & F. Rojas. (Eds.), *XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 312-316). Villarrica: SOCHIEM.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Editorial Zorzal.



- Cobb, G. W., & Moore, D. S. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, 104(9), 801-823.
- Estepa, A., & Del Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números* (83), 43-63.
- Farfán, R. (1997). Ingeniería didáctica, un estudio de la variación y cambio. Editorial Iberoamericano.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer.
- MINEDUC. (2012). Matemática educación básica. Bases curriculares. Santiago: Autor.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Orta, J. A., & Sánchez, E. (2013). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por estudiantes de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 421-430). Bilbao: SEIEM.
- Sánchez, E. (2013). *Elementos de estadística y su didáctica a nivel bachillerato*. Secretaría de Educación Pública, Subsecretaría de Educación Media Superior: México.
- Silva, C., & Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. & Rossman, A. (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, México: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.
- Wild, D. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67, 223-265.