Mendoza, J., & Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 36-61.

Artículo recibido el 22 de enero de 2018; Aceptado para publicación el 4 de junio de 2018

La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad

Modeling in the communities of mathematical knowledge. The use of mathematics in bionic engineers. The case of stability

Edith Johanna Mendoza Higuera[1]
Francisco Cordero Osorio[2]

Resumen

Nuestra investigación tiene como objetivo principal revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en una comunidad de conocimiento matemático de ingenieros biónicos. Los datos empíricos fueron delimitados en escenarios de la obra matemática y de la profesión-formación escolar de la ingeniería. El método del estudio se constituyó de dos líneas de trabajo. En la primera problematizamos la relación modelación y estabilidad en los sistemas de control entre diferentes dominios de conocimiento: el discurso matemático escolar y el campo de la ingeniería biónica, en el cotidiano del ingeniero como docente y como estudiante; y, en la segunda, se conformaron los elementos que estructuran una transversalidad de saberes: *la estabilidad del movimiento* y *la estabilidad de las señales*. Un resultado relevante de la investigación consistió en haber encontrado que los usos matemáticos propios de los ingenieros no están en *relación* con la matemática escolar habitual para ingenieros. Como es el caso de las ecuaciones diferenciales: para los ingenieros es "*una instrucción que organiza comportamientos"*, mientras que para la matemática escolar es "*hallar una solución que no se conoce"*.

Palabras clave: Comunidad de Conocimiento Matemático; usos del conocimiento matemático; categoría de modelación; ingenieros biónicos**.**

Abstract

Our research has as main objective to reveal the uses of mathematical knowledge and its resignifications in a mathematical knowledge community of bionic engineers. The empirical data were delimited in scenarios of the mathematical work and in the profession-school education of engineering. The study method consisted of two lines of work. In the first one we problematize the relationship between modeling and stability in the control systems between different domains of knowledge: school mathematical discourse and the field of bionic engineering, in the engineer's daily life as a teacher and as a student; and, in the second, the elements that structure a transversality of knowledge were shaped: *the stability of the movement* and the *stability of the signals*. A relevant result of the investigation consisted of having found that the mathematical uses of the engineers are not related to the usual school mathematics for engineers. As is the case with differential equations: for engineers it is "*an instruction that organizes behaviors*", while for school mathematics it is "*finding a solution that is not known*".

Key words: Mathematical Knowledge Community; uses of mathematical knowledge; modeling category; electrical engineers.

---

[1] Candidata a Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México. Email: ejmendoza@cinvestav.mx
[2] Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Investigador Titular. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Ciudad de México, México. Email: fcordero@cinvestav.mx

1. INTRODUCCIÓN

Nuestro programa de investigación consiste en construir un *marco de referencia* para valorar, en la educación de la matemática, *la justificación funcional del conocimiento matemático* que demandan otros dominios de conocimiento: *los disciplinares* y *los de la vida*. Su construcción es condición *sine qua non* para poder crear *la relación recíproca entre la matemática de la escuela y el cotidiano de las realidades*. La naturaleza de la formulación obliga estudiar *la construcción social del conocimiento matemático* (Cantoral, 2013; Cordero, Gómez, Silva-Crocci y Soto, 2015), la cual provee de la *pluralidad epistemológica* y de la *transversalidad de los usos del conocimiento matemático*. Estos dos aspectos definen una categoría de modelación matemática que por un lado formula una variedad teórica y, por el otro, cuestiona los tratamientos escolares habituales que no favorecen los usos de las matemáticas que se aprenden en la escuela y en la vida. Esa categoría de modelación abrirá otro tratamiento escolar alternativo donde se favorecerá *el aprendizaje de los significados de la matemática.*

Específicamente, en esta investigación, nos enfocamos en una comunidad de conocimiento matemático de ingenieros biónicos (CCM(IB)) para formular un marco de referencia que caracterice y estructure los *usos de la estabilidad* en situaciones específicas en la ingeniería biónica. Este marco está compuesto por la movilidad de los usos y significados del conocimiento matemático en las diferentes situaciones específicas propias de otros dominios de conocimiento y del cotidiano de la vida. A este hecho le llamaremos de aquí en adelante *resignificaciones de los usos del conocimiento matemático* (Cordero, 2016a, 2017). En ese sentido, la problemática consiste en que los usos del conocimiento matemático propios del cotidiano disciplinar de la ingeniería son diferentes de la matemática escolar. Por eso proponemos revelar aspectos de funcionalidad de la matemática que coadyuven al diálogo recíproco entre el aula y la realidad en el entorno de la CCM(IB).

En ese sentido mostramos, *grosso modo*, una resignificación de la estabilidad en la obra de Lyapunov a la matemática escolar de la ingeniería biónica. Señalamos pautas que van conformando las bases de una construcción social del conocimiento matemático que le dan sentido al programa permanente de calidad para responder cabalmente a la función del docente de matemáticas en la ingeniería.

Para valorar el estatus del planteamiento de la investigación convenimos abordar los roles de los modelos educativos y de las enseñanzas de la matemática, primero en general y después orientado a la ingeniería.

Los modelos educativos han buscado por años que el conocimiento que se enseña en las escuelas mejore las condiciones de vida de las sociedades. Múltiples y variadas investigaciones han demostrado que este objetivo aún no se alcanza (Carraher, Carraher y Schliemann, 1997; Callejo et al., 2010 citado por Gómez-Osalde, 2015). La escuela se encuentra alejada de la realidad del estudiante y, en general, de las comunidades donde se encuentra inmersa. Algunos trabajos de nuestra disciplina han reportado que la matemática escolar no trasciende al cotidiano del estudiante: lo que "aprende" en la escuela, se queda en la escuela (Gómez-Osalde, 2015). Por otro lado, el conocimiento de la gente no es considerado como un marco de referencia para entender el conocimiento del estudiante. Se desconocen los usos de conocimiento matemático en los diferentes escenarios no escolares en los que se desenvuelve la gente. En general, en los objetivos educativos interesa conocer lo que sabe un estudiante y no así cómo usa su conocimiento (Cordero, 2016a). Se afirma que, en estos escenarios no escolares, el ciudadano que actúa ante una situación específica se vale de justificaciones que le son funcionales y no así de justificaciones que necesariamente responden a un razonamiento lógico matemático. Es decir, estas justificaciones funcionales responden a lo que es de utilidad a la gente (Cordero y Flores, 2007; Cordero, Mena y Montalto, 2010). Así, se observa una débil relación entre la matemática escolar y la matemática de la gente, la una no afecta a la otra. Además, el docente de matemáticas no cuenta con un marco de referencia que le ayude a articular los usos del conocimiento matemático de la gente, por ende, sus funcionalidades y sus resignificaciones (Cordero et al., 2015). Por esto, interesa identificar los usos del conocimiento matemático en escenarios del cotidiano donde se rescate el conocimiento de la gente, del trabajador, del que aprende, del nativo (Cordero, 2016a).

Nuestro programa de investigación socioepistemológico se propone como tarea valorar las resignificaciones que la gente construye alrededor de las nociones matemáticas en situaciones específicas de su cotidiano (escuela, trabajo, ciudad). Estas resignificaciones expresan la transversalidad de usos del conocimiento matemático; es decir, cada escenario compone funcionamientos y formas que debaten con otros funcionamientos y formas generando nuevas resignificaciones (Cordero y Flores, 2007).

En particular en esta investigación, como ya lo dijimos, tenemos el propósito de revelar los usos del conocimiento matemático de la estabilidad en un sistema de control en el cotidiano de esa comunidad de ingenieros, CCM(IB); específicamente en su profesión y en su formación escolar. Esos usos se infieren en la obra matemática, que en conjunto conforman un desarrollo de usos y resignificaciones de la estabilidad. Todo lo anterior caracteriza una transversalidad de usos del conocimiento matemático, específicamente, en la estabilidad del movimiento y más tarde en las ecuaciones diferenciales (Mendoza, 2017).

Entonces, el propósito de la investigación consiste en caracterizar elementos de la funcionalidad de la estabilidad en la transversalidad entre la obra matemática y la ingeniería. Todo esto articulado conforma una epistemología de usos, la cual es la base para diseñar la situación escolar de socialización que trastoca y transforma la matemática escolar para crear la relación recíproca entre la matemática de la escuela y el cotidiano de las realidades.

En ese sentido, nuestro programa de investigación socioepistemológico del aprendizaje de la matemática en la formación inicial del ingeniero consiste en revelar usos de la matemática dentro de la comunidad de ingenieros, tanto en su saber como en el hacer para su formación y desarrollo; así como para formular la intencionalidad en el aula. Esto, creemos, conllevará a conformar un constructo de diálogo continuo y permanente entre las comunidades de conocimiento involucradas y, de esta manera, contribuir en la problemática de aprendizaje de la matemática en la ingeniería (Mendoza, Cordero, Gómez y Solís, en prensa).

Con lo anterior, nos preguntamos ¿cuáles son los elementos que estructuran a la funcionalidad, en la transversalidad de usos de conocimiento matemático, específicamente de la estabilidad, que permitan el diseño de situaciones escolares de socialización acorde a los objetivos de formación de los ingenieros?

El documento se ha estructurado en cinco secciones. En la primera planteamos la problemática para relacionar la *categoría de modelación* y el modelo *Comunidad de*

Conocimiento Matemático (CCM). En la segunda definimos la *categoría de modelación* con base en la *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. En la tercera, establecemos la *epistemología de usos matemáticos del ingeniero* cuando modela la estabilidad para que esta sea considerada como la base del diseño de la situación escolar de socialización. En la cuarta y quinta se consideran las conclusiones y referencias, respectivamente.

2. PROBLEMÁTICA

La *interpretación de la realidad* deberá construir la relación recíproca entre el conocimiento matemático y los cotidianos disciplinares del especialista, del trabajador y de la gente. Para esto, conviene hacer algunas distinciones que conllevan la postura epistemológica y ontológica respecto de qué son realidad, matemática y modelación, y cuál es, genéricamente, la problemática fundamental del aprendizaje de la matemática, en todos los niveles educativos. Las distinciones mismas tensan las posturas que comúnmente se conocen en la jerga disciplinar de la matemática educativa; sin embargo, son los puntos de inflexión que revolucionan las tesis del rol de la modelación en la problemática del aprendizaje de la matemática (Cordero et al, 2015; Cordero, 2015, 2016a; Morales, Mena-Lorca, Vera y Rivera, 2012).

En el contexto de nuestro Programa convenimos entender como realidad, en términos generales, la relación del conocimiento entre la escuela, el trabajo y la ciudad. Esta acepción de realidad ha llevado a generar constructos que valoran los usos y significados de los objetos matemáticos (Cordero, 2016b, 2017). Entonces el nuevo *Marco de Referencia* será la base para la *interpretación de la realidad*, con el cual se construirá y mantendrá la relación recíproca entre el conocimiento matemático y los cotidianos del disciplinario y de la vida. Sin embargo, debemos considerar varios aspectos. Primeramente, queremos decir que nos preocupamos por la *función social del conocimiento matemático* (Cordero et al., 2015; Cordero, 2016a, 2016b). Este hecho ha orientado cuestionamientos sobre los usos del conocimiento de comunidades diversas; por ejemplo, revela que estos son diferentes para los matemáticos y para los ingenieros (Mendoza et al., en prensa, Cordero, 2016a; Pérez-Oxté y Cordero, 2016; entre otros); pero también son diferentes en la escuela y en la calle (Carraher, Carraher y Schliemann, 1997; Rodrigo, 1997). El significado de estas evidencias abre preguntas que obliga precisar sobre sus contrastes; no es suficiente cuestionarse, en nuestro caso, ¿qué es el conocimiento matemático? sino, también, importa preguntarse ¿qué conocimiento matemático?; lo que conlleva considerar su pluralidad epistemológica y su transversalidad de saberes. Es decir, los entornos de las relaciones recíprocas de los usos y significados entre la obra matemática, la matemática escolar, la matemática de otras disciplinas, e inclusive la matemática del cotidiano de la gente. En esos entornos se deberá conformar una matemática, en la cual sus usos son resignificados en situaciones específicas donde, la mayoría de las veces, la matemática no es el objeto de estudio, sino más bien, es la transversalidad de los usos del conocimiento matemático en los diferentes escenarios. A esto le llamamos *matemática funcional*, lo que significa que valoramos las relaciones horizontales y recíprocas entre la matemática y la realidad y dejamos que ahí se construyan las modelaciones matemáticas que sucedan (Cordero, 2016a). Y en segundo lugar, la postura anterior obliga a definir una *categoría de modelación*, la cual *es un proceso que acompaña a la pluralidad epistemológica y a la transversalidad de saberes que conforma la funcionalidad matemática.* Es algo más robusto que una representación (de la realidad) o una aplicación matemática (a una situación real). Barbosa (2009) afirma que los modelos matemáticos son más que un "retrato de la realidad". Estas aproximaciones sin duda son contribuciones para la educación matemática. Cuando el modelo es sometido a una crítica sobre su función, de acuerdo con la situación en cuestión, la modelación favorece el justificar proposiciones, el establecer conceptos o el estructurar fenómenos. Sin embargo, nuestra categoría de modelación *es una práctica plasmada específicamente como la argumentación de la situación en cuestión,* la cual está compuesta de significaciones y resignificaciones con sus respectivos procedimientos que se van construyendo de acuerdo con las operaciones que los participantes son capaces de hacer, con las condiciones que ellos son capaces de capturar y transformar y con los conceptos que van construyendo progresivamente (Cordero, 2011). Esta categoría de modelación lleva a cabo múltiples realizaciones y hace ajustes en su estructura para producir un patrón deseable. Es un medio que soporta el desarrollo del razonamiento y de la argumentación (Suárez, 2014). *La categoría de modelación es conocimiento matemático expresado en un proceso que trasciende y se resignifica; que valora los elementos en el entorno del objeto que le dan* *sentido*. Por ejemplo, los estudios socioepistemológicos han conformado categorías de conocimiento matemático, como la *predicción* y el *comportamiento tendencial*, las cuales componen los entornos de usos y significados de la *analiticidad de las funciones (Serie de Taylor)* (Cantoral, 2013) y *la estabilidad de las funciones (la asintoticidad de las funciones)* (Cordero, 2008).

3. LA TEORÍA SOCIOEPISTEMOLÓGICA Y LA CATEGORÍA DE MODELACIÓN

Las tesis del rol de la modelación en la problemática del aprendizaje de la matemática, que mencionamos anteriormente, están basadas en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Cantoral (2013) la ha provisto de fundamentos, para formular el programa de investigación propio de la teoría. Este consiste en explicar el enigma de la construcción social del conocimiento matemático y de su difusión institucional. Un constructo medular es la práctica social, con el cual en un sistema complejo de procesos de dimensión social se problematiza el saber matemático, al confrontar los saberes sabio, técnico y popular para sintetizarlos en la sabiduría humana. El *saber* es interpretado como *el conocimiento puesto en uso*.

Esta teoría se ha valido de un centenar de investigaciones realizadas desde hace un poco más de dos décadas por una comunidad de socioepistemólogos de diferentes generaciones. Cordero (2016b) considera que el constructo *práctica social* en la evolución y desarrollo de la Teoría Socioepistemológica, a la luz de las investigaciones, se ha provisto de un significado, el cual, consiste en que la práctica social valora, en la problemática educativa de la matemática, *el sujeto olvidado*, que es fundamental recuperar. Esta tesis tiene diferentes expresiones: la realidad, el cotidiano, los usos del conocimiento, y en términos más genéricos la gente (Cordero et al., 2015). Con esta tesis Cordero formula un *Programa Socioepistemológico* llamado *Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA)* (Cordero, 2016a, 2016b). Su objetivo principal consiste en revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente: en la escuela, en el trabajo o la profesión, y en las vidas cotidianas. El Programa se desarrolla a través de dos líneas de trabajo simultáneas: la Resignificación del Conocimiento Matemático y su Impacto Educativo. En la primera se problematizan las categorías de conocimiento matemático que suceden en las comunidades entre diferentes dominios de conocimiento que obligadamente entran en juego: el discurso matemático escolar, el campo disciplinar y el cotidiano de la comunidad. En la segunda línea de trabajo se conforman los multifactores y estadios que coadyuvan a la alianza de calidad de la docencia de matemáticas (Cordero, 2016b). Los multifactores son los elementos que contribuyen a lograr un resultado pero que han estado ausentes y es necesario recuperarlos, tales como: identidad, inclusión, socialización, emancipación, empoderamiento, entre otros (ver figura 1).

Entonces, en el marco del Programa Socioepistemológico SOLTSA, para *generar la relación recíproca entre la matemática y la realidad*, es necesario ingresar y valorar la justificación funcional; para eso se deberá conformar una base compuesta por una pluralidad epistemológica de la matemática que deriva en la transversalidad de saberes matemáticos para valorar sus resignificaciones. Por lo tanto, creemos que la categoría de modelación, que hemos planteado, en la sección anterior, jugará un papel fundamental.

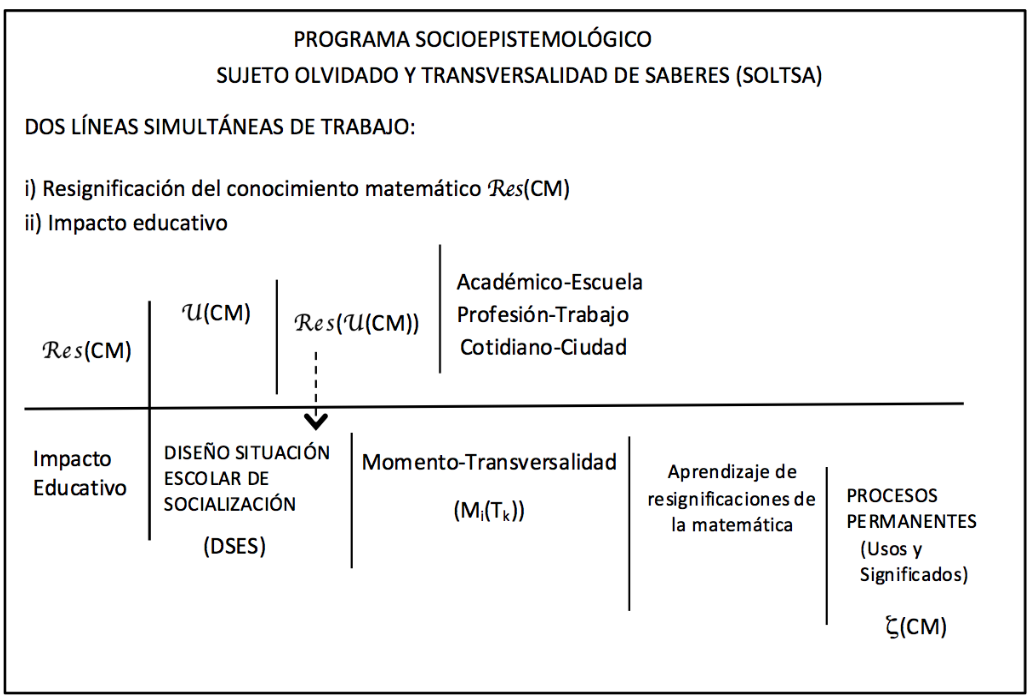

Figura 1. Programa Socioepistemológico. Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA) (Cordero, 2016a, 2016b).

Conviene así, revisar, con esta orientación, el estatus de la modelación en las investigaciones de la matemática educativa. Por ejemplo, Kaiser y Sriraman (2006) señalan que en el desarrollo de la modelación matemática en la educación se han generado diferentes perspectivas; cada una expresa sus objetivos para la matemática, la realidad y la educación: *Realistic, Contextual, Educacional, Socio-crítica, Epistemológica* y *Cognitiva*. Hay programas de investigación orientados a que los estudiantes deben aprender modelación matemática para usar las matemáticas en su vida cotidiana, como ciudadanos y participantes en la fuerza de trabajo. La creación de referencias para hacer ver la utilidad de la matemática son de impacto educativo y social en el mundo (Pollak, 2003; Cirillo, Pelesko, Felton-Koestler y Rubel, 2016). Sin embargo, hay otros programas orientados a entender a la modelación como prácticas culturales que contribuyen al desarrollo de las perspectivas de la *etnomatemática*. Importa, para la educación, caracterizar a la modelación con rasgos propios de las culturas. Orey y Rosa (2015) contribuyen con la formulación de un constructo denominado *etnomodelación*, el cual es estudiado como fenómenos matemáticos dentro de una cultura, lo que deriva en construcciones sociales y culturales. Seguramente tendrá su impacto educativo.

De igual manera, nuestra *categoría de modelación* es una construcción social que no asume la preexistencia de la modelación sino que se construye en las "acciones" que se efectúan con las relaciones recíprocas y horizontales entre los conocimientos de la matemática y de la vida. Para los fines de la educación, la relación recíproca es el indicador de que la matemática escolar y la matemática de la vida deben afectarse mutuamente, mientras que la relación horizontal es el indicador de que deben conservar el mismo estatus y valor epistemológico (Cordero, 2006, 2016a, 2017; Cordero, Mena y Huincahue, 2017).

En ese sentido, creemos que ha sido acertado el desarrollo de la educación de la matemática, en el mundo, cuando ha considerado, entre muchas otras cosas, entender el conocimiento matemático en la escuela y fuera de la escuela; y, aquellas orientaciones que plantean integrar la modelación matemática para que la matemática sea usada en la vida del ciudadano y en la fuerza de trabajo. Este desarrollo educativo es un cambio, contemporáneo, de relevancia porque se van creando referencias al estudiante de la utilidad de la matemática.

Ambas orientaciones coinciden en un principio: "relacionar" la matemática con el "mundo real". Sin embargo, la tensión radica en el constructo "relación". Una asume como conocimiento verdadero el de la escuela (o el académico) por lo cual "mide" la emulación de ese conocimiento en el cotidiano, y la otra, privilegia las "acciones" sobre la modelación matemática. Por nuestra parte sostenemos la *matemática funcional*, lo que significa que valoramos *las relaciones horizontales y recíprocas del uso del conocimiento matemático,* entre los escenarios: *el académico-escolar; la profesión-trabajo; y el cotidiano-ciudad* (Cordero, 2016a, 2017).

La categoría de modelación es un conocimiento funcional de la matemática, a partir de ahora la denotaremos por ζ(Mod), lo que implica valorarla a través de entornos de sus relaciones recíprocas con la realidad, la cual, en nuestro planteamiento socioepistemológico SOLTSA, son los escenarios descritos anteriormente. Su estructura está compuesta por los usos del conocimiento matemático U(CM) que suceden en los diversos escenarios, y por sus resignificaciones de esos usos, Res(U(CM)), en situaciones específicas (*Se*), por ende la estructura admite la pluralidad epistemológica (Cordero, 2016a).

Tales situaciones son parte de ese entorno (relaciones recíprocas) y suceden en las condiciones de las jergas de los que participan. A esto le llamaremos *lo matemático* (Cordero et al., 2015; Cordero, 2017). Cada situación específica Se_i se conforma por elementos secuenciales que construyen lo matemático: significación, procedimiento, e instrumento, que derivan la argumentación de la situación (*Arg(CM)*). Por ejemplo, para la construcción de lo matemático en la situación de transformación, las significaciones son los patrones de comportamiento gráfico y analítico, los procedimientos derivados de las significaciones son la variación de los parámetros, los instrumentos de las significaciones y procedimientos son las instrucciones que organizan comportamientos. Todo esto genera la argumentación de la situación de transformación: el comportamiento tendencial. El comportamiento tendencial es la resignificación de usos de las gráficas (Cordero, 2008). Los que participan en la situación son comunidades de conocimiento, es decir; la premisa, de la Teoría Socioepistemológica, que hace alusión a que las prácticas sociales generan conocimiento matemático, subyace la consideración del *ser con otro*. Todo ello emana elementos como organización de grupos o función de las sociedades. En ese sentido el constructo que se formule de participante debe estar cercano a comunidad con relación al conocimiento. Es decir, si hay conocimiento existe una comunidad que lo construye (Cordero, 2016a). De aquí en adelante, en nuestro caso, nos vamos a referir a la idea anterior como "comunidad de conocimiento matemático (CCM)". En ese sentido la *Arg(CM)*$_i$ es una **Res**(**U**(CM))$_i$ construida por la *CCM*$_i$ en *Se*$_i$ (Cordero, 2016b) (ver figura 2).

Los **U**(CM) se resignifican en cada *Se* y también cuando suceden transversalidades (T_i) entre escenarios o dominios de conocimiento (D_i) (por ejemplo, relaciones recíprocas y horizontales entre la escuela y el trabajo; o entre la matemática y la ingeniería). Pero en las situaciones y transversalidades suceden momentos (M_i), y entre ellos también los usos se resignifican. Los M_i son fases en el proceso situacional. Y los **U**(CM) son las funciones orgánicas de las situaciones (*funcionamientos*) que se manifiestan por las "tareas" que componen la situación, y la *forma* del uso será la clase de esas 'tareas". Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios. Cuando la alternancia de tareas sucede, se genera una nueva función orgánica, que debatirá con las formas de los usos. A este "acto de uso" se le llamará resignificación de usos (Cordero y Flores, 2007).

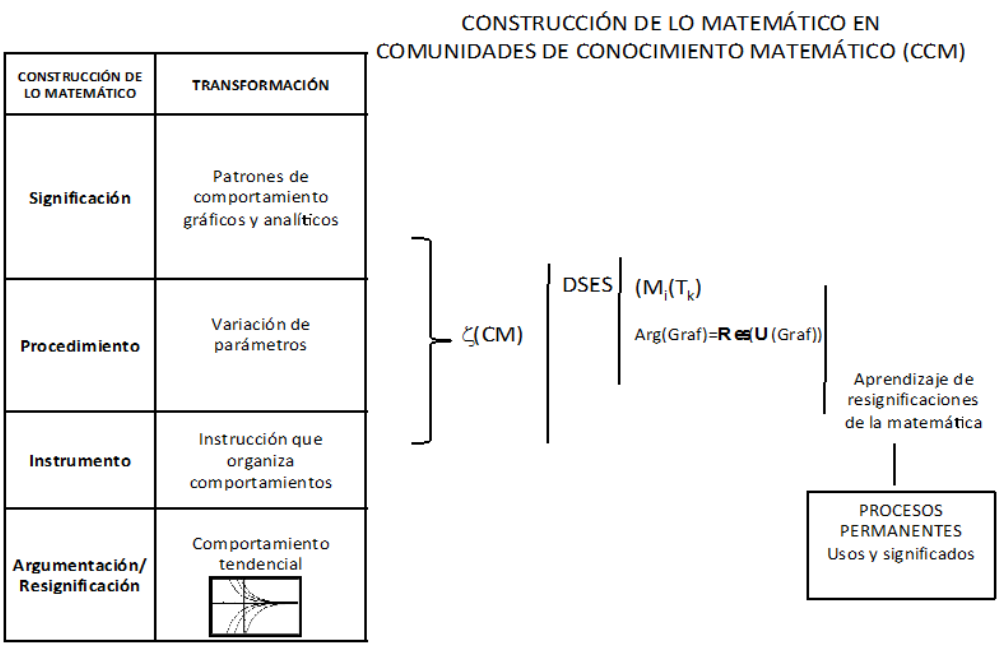

Figura 2. Construcción de lo matemático en comunidades de conocimiento matemático. (Cordero, 2017)

Por su parte la comunidad de conocimiento matemático CCM_i en Se_i en el sentido de ζ(Mod) y del MR consiste en crear un ente que caracterice lo propio de lo que es comunidad, es decir su naturaleza. No cualquier conjunto de personas agrupadas componen una comunidad. Se debe distinguir a la comunidad de conocimiento de la individualidad, de lo público, y de la universalidad o de lo cosmopolita. En ese sentido reconocemos tres elementos constitutivos de una comunidad: i) *Reciprocidad* es el conocimiento que se genera por la existencia de un compromiso mutuo; ii) *Intimidad* es el uso de conocimiento propio y privado que no es público; iii) *Localidad* es el conocimiento local, se da cuando existe una coincidencia en ideas, una jerga disciplinar, trabajo u oficio, intereses, lo regional, entre otros. Estos tres elementos nos permiten separar lo individual, lo público y lo cosmopolita e identificar lo propio de comunidad. De ahí la importancia de formular el constructo comunidad de conocimiento matemático como una triada *CCM* (*reciprocidad, intimidad, localidad*). Otro aspecto consiste en el uso del conocimiento matemático. Para apreciar el uso se requiere de un referente que señale su tradición, su cultura y su historia, en el seno de su comunidad. Por ello, importa la continuidad del conocimiento, es decir, *la institucionalización* como un eje transversal. Pero una comunidad se distingue de otra, entonces se requiere de momentos de *identidad*, tales como: *legitimidad, resistencia* y *proyecto*. Así la identidad, con sus momentos, será otro eje transversal (Cordero, 2016a; Cordero y Silva-Crocci, 2012).

4. UNA COMUNIDAD DE CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE INGENIEROS BIÓNICOS

Un principio del campo de la Ingeniería Biónica consiste en *reproducir comportamientos* en diferentes situaciones. Las modelaciones de este principio derivan en los sistemas de control, donde se problematiza la estabilidad contextualizada por la situación en cuestión (IPN, s.f.).

4.1. Epistemología de usos del conocimiento matemático de la estabilidad.

Se trata de justificar la categoría ζ(Mod) como una resignificación del uso de conocimiento matemático de la estabilidad en un sistema de control, en una CCM(IB). En ese sentido se problematiza la categoría *reproducción de comportamientos* que emergió en la comunidad de ingenieros CCM(IB) entre diferentes dominios de conocimiento: el discurso matemático escolar, el campo disciplinar y el cotidiano (académico) de la comunidad. Esta problematización conlleva identificar las significaciones, procedimientos e instrumentos que configuran la argumentación y que a su vez conforman la epistemología de usos del conocimiento matemático de la estabilidad.

Para dar evidencia de esta epistemología, adoptamos una metodología de investigación cualitativa. Específicamente consideramos algunos aspectos de la Etnografía (Guber, 2001). Por ejemplo, tomamos la inmersión como el método que nos posibilitó adentrarnos y conocer CCM(IB) para revelar sus usos de conocimiento matemático de la estabilidad. Como técnicas para tomar datos utilizamos las entrevistas no estructuradas, que tenían como objetivo dialogar con el ingeniero-profesor a cerca de su labor, de su profesión y del conocimiento de la ingeniería, y la observación de cómo el ingeniero-profesor desarrolla sus clases (tipo laboratorio) al plantear, a los ingenieros en formación, la necesidad de diseñar un sistema de control en una situación donde se requiere controlar la temperatura de un foco (en la sección 4.1.3 se profundizan cómo y qué se observó).

Bajo esta idea, se propuso tres fases de trabajo. Primera fase: inmersión inicial (se analizaron artículos de la profesión sobre los sistemas de control y textos de Teoría de control; se realizaron entrevistas no estructuradas); segunda fase: inmersión profunda (se formuló hipotéticamente una epistemología de la categoría en cuestión y analizó su emergencia en la CCM(IB) en situaciones específicas por medio de la observación a la comunidad); tercera fase: análisis y epistemología (se problematizó la categoría en el discurso matemático escolar, el campo disciplinar y el cotidiano (académico) de la comunidad).

En una fase previa, a las ya mencionadas. Se realizó un análisis profundo de la obra intitulada *The general problem of the stability of motion* de Aleksandr Mijáilovich Lyapunov, específicamente del ítem 16 Teorema 1. Este análisis se realizó con dos objetivos, problematizar la categoría de *reproducción de comportamientos* en la construcción de la estabilidad como objeto matemático, y a su vez, mostrar la transversalidad de usos en la obra matemática y otras disciplinas como la ingeniería.

Para el análisis de los datos, revisamos todas las grabaciones y anotaciones realizadas en cada una de las fases de la inmersión y fuimos conformando los episodios que nos permitieron inferir los **U**(CM) y así la ζ(Mod). El esfuerzo inquisitivo para tal fin, consistió en la *confrontación* entre el objeto matemático (de la matemática escolar) y los usos y significados de la matemática en la obra de Lyapunov y en la ingeniería biónica. En ese sentido a continuación presentaremos el análisis de los apartes seleccionados de la obra de Lyapunov y la problematización de la categoría en la CCM(IB).

4.1.1. *La Estabilidad en el Discurso Matemático Escolar*

El estudio de la estabilidad que estamos presentado, deriva de la búsqueda de significaciones que respondan a una matemática funcional de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Cordero y Solís (2001) y Cordero et al. (2016) afirman que las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes son modelos de estabilidad y que fueron construidas para que la función $y(x)$ tendiera a comportarse como otra función dada $F(x)$, salvo con algunas variaciones $y', y'', \ldots, y^n$. Este hecho conforma una categoría de conocimiento matemático denominada *reproducción de comportamientos*. En Boyce y Di Prima (1992), tomado como referencia en los cursos de Ecuaciones Diferenciales, no se menciona la estabilidad hasta el capítulo de ecuaciones diferenciales no lineales. Es decir, el hecho mostrado inicialmente no es discutido en el libro de texto, y con seguridad tampoco en las aulas. Al confrontar la categoría y los significados dados a las ecuaciones diferenciales en el libro, encontramos que no se discute su función: *reproducir un comportamiento* (Mendoza, 2017). Los autores expresan que en la solución de problemas de ingeniería, biología y física, se busca un modelo que contiene derivadas de una función desconocida y se resuelve según el tipo de ecuación. No se explicita la relación entre la función y sus derivadas, ni la razón desde las otras disciplinas para construir una ecuación diferencial que modele una estabilidad.

De esta manera, nos abocamos a problematizar la categoría de *reproducción de comportamientos* en la obra de Lyapunov y en la CCM(IB).

4.1.2 *Usos de la estabilidad en la obra matemática*

A Lyapunov le interesó resolver cuestionamientos relacionados con las propiedades del movimiento, en particular las del equilibrio, como la estabilidad e inestabilidad. Esto lo llevó a estudiar la dinámica de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales con ciertas características específicas.

Lyapunov propone el hoy llamado método directo, que se basa fundamentalmente en el teorema de estabilidad de Lagrange-Dirichlet sobre la energía mecánica. En su tesis doctoral, ese teorema aparece en el ítem 16 de la siguiente manera:

> "Teorema 1. Si las ecuaciones diferenciales de un movimiento perturbado son tales que es posible encontrar una función definida V, tal que la derivada V' es una función de signo fijo el cual es opuesto al de V, o se reduce idénticamente a cero, el movimiento no perturbado es estable" (Lyapunov, 1907[3]/1992, p. 582).

Este teorema implica que, conocido el comportamiento de una función V, se puede conocer el comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, y así su estabilidad. Es decir, si para un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales que modelan un movimiento perturbado de la forma $\frac{dx_1}{dt} = X_1, \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = X_n$, existe una función V definida, tal que $V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n + \frac{\partial V}{\partial t}$, es de signo fijo opuesto al de V, o es igual a cero, el sistema es estable. V' es la derivada total y representa el comportamiento de una partícula que se mueve alrededor de las trayectorias dibujadas por $\frac{dx_1}{dt} = X_1, \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = X_n$ y dadas las condiciones y el comportamiento definido para V, las trayectorias quedan atrapadas y se dirigen al punto de equilibrio o son iguales a cero. De esta manera, Lyapunov caracteriza el comportamiento de movimientos no perturbados estables conocidos (en términos de la energía total) y busca una función que pueda permitirle modelar este comportamiento y así decidir cuáles movimientos no perturbados desconocidos son estables y cuáles no lo son. Si esta función V existe, expresa la tendencia en el comportamiento de las soluciones, pues V' indica que las trayectorias permanecen cerca del punto de equilibrio o que tienden hacia este. Lyapunov le da un uso a la estabilidad otorgándole el funcionamiento al *buscar la relación entre dos movimientos o*

[3] Traducción propia (Citado en Mendoza, 2017). El documento revisado es la versión en inglés publicada en 1992. Ésta es una traducción de la versión francesa de 1907 que Lyapunov mismo revisó y corrigió. El documento original en ruso fue escrito en 1892.

al identificar patrones de comportamiento del movimiento perturbado hacia el no perturbado y a su vez, la forma que utiliza para lograrlo es encontrar una función V, con ciertas propiedades, que modele el comportamiento de las trayectorias. No se puede hablar del comportamiento del movimiento perturbado sin el no perturbado; de hecho, esta interpretación da pie para construir comportamientos deseables, es decir; *conocido un comportamiento dibujar otro que se parezca a ese, o dicho de otra manera Reproducir un Comportamiento* (Mendoza, 2017).

4.1.2 *Usos de la estabilidad en la comunidad de ingenieros biónicos. Escenario escolar.*

La comunidad de conocimiento matemático de ingenieros biónicos (CCM(IB)) que fueron observados y entrevistados están adscritos a la Unidad Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas del Instituto Politécnico Nacional (UPIITA-IPN).

De manera general "La biónica es la asimilación de principios de ingeniería que se utilizan *en sistemas naturales, y la aplicación de estos principios al diseño o mejora de sistemas tecnológicos o materiales*" (Lodato, 2000, p. 47 citado por Miralles y Giuliano (2008)).

En específico, la licenciatura en Ingeniería Biónica, de UPIITA-IPN, tiene como objetivo formar ingenieros para:

> "diseñar, desarrollar y producir dispositivos artificiales que posean un comportamiento y desempeño morfológico y/o funcional semejante al de órganos o sistemas biológicos. La Ingeniería Biónica se concibe como el conjunto de conocimientos interdisciplinarios entre la electrónica y la biología cuyo propósito es la creación de sistemas artificiales para reproducir las características y la estructura de organismos vivos". (IPN, s.f.)

Para alcanzar el objetivo antes mencionado, la Licenciatura cuenta con un programa curricular diferenciado por cinco niveles articulados. Una de las asignaturas que deben cursar los estudiantes es Modelado y Control de Sistemas Biológicos. Es en esta clase donde observamos, por tres meses, la práctica profesional (como docente) de un ingeniero biónico y el hacer de los ingenieros en formación.

Uno de los conceptos centrales, tanto para esta asignatura como para la Licenciatura en sí, es el estudio de los sistemas de control. Todos, si no, casi todos los dispositivos artificiales que se construyen se conforman de procesos que se requieren controlar, de tal manera que se puedan reproducir las características y la estructura deseadas.

Es por ello que pusimos nuestra mirada en el estudio de los Sistemas de Control. Así mismo, la estabilidad de estos sistemas, que son modelados por ecuaciones diferenciales, fue una de las características que conllevó la emergencia de diferentes conceptos y técnicas tanto para la Teoría de Control, como para la matemática misma.

De manera muy concreta, Kuo (1996, p. 85) dice: "en términos más técnicos, los objetivos [de un sistema de control] se pueden identificar como entradas, o señales actuantes u, y los resultados también se llaman salidas, o variables controladas, y. En general, el objetivo de un sistema de control es *controlar las salidas en alguna forma prescrita mediante las entradas a través de los elementos del sistema de control*".

Por ejemplo, en la figura 3 se puede observar un diagrama de bloques de un sistema de control en lazo cerrado. La salida $Y(s)$ se realimenta al punto suma, en donde se compara con la entrada de referencia $R(s)$. Cuando la salida se realimenta al punto suma para compararse con la entrada, es necesario convertir la forma de la señal de salida en la de la señal de entrada. Esta conversión se consigue mediante el elemento de realimentación $B(s)$.

$r(t), R(s) =$ entrada de referencia (señal de entrada)
$y(t), Y(s) =$ salida (variable controlada)
$b(t), B(s) =$ señal de realimentación
$u(t), U(s) =$ señal actuante = a señal de error $e(t), E(s)$, cuando $H(s) = 1$
$H(s) =$ función de transferencia de realimentación
$G(s) =$ función de transferencia de la trayectoria directa

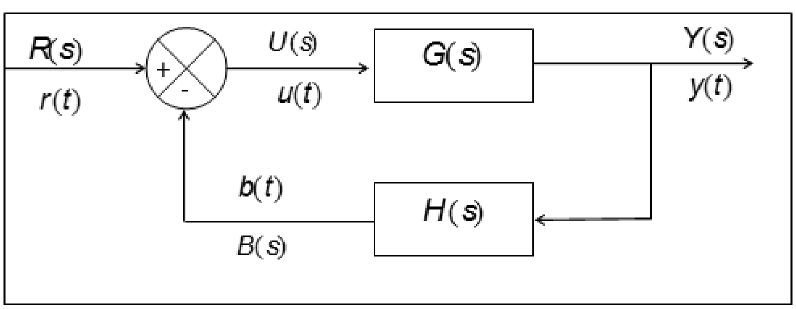

Figura 3. Diagrama de bloques en un sistema en lazo cerrado. (Kuo, 1996, p. 86)

Es decir, en un sistema de control en lazo cerrado se busca que la señal de salida $Y(s)$ tienda a comportarse como la señal de entrada $R(s)$. Para esto se hace uso de la retroalimentación, y es por ello que, la señal de salida se realimenta del punto suma ($U(s)=R(s)-B(s)$). Donde $B(s)=H(s)\times Y(s)$ (Convolución compleja en el dominio de Laplace). Cabe aclarar, que $G(s)$ es la función de transferencia directa y expresa la ecuación diferencial que relaciona la transformada de Laplace de la variable de salida con la transformada de Laplace de la variable de entrada $G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}$ (Kuo, 1996). En otras palabras, el sistema de control tiene como objetivo que la tendencia en el comportamiento de $Y(s)$ sea hacia $R(s)$.

Si definimos el diseño de sistemas de control, como la situación específica propia de la CCM(IB) en el escenario escolar, podemos evidenciar que la situación fundamental que rige los usos de conocimiento matemático del ingeniero es la Situación de Transformación (Cordero, 2011) y que emergen significaciones, procedimientos, instrumentos y argumentaciones propias de la situación específica y por tanto de la CCM(IB) (Ver Tabla 1).

A continuación, vamos a evidenciar lo señalado en la Tabla 1, con una de las prácticas desarrolladas por el ingeniero docente y de esa manera analizar los usos de conocimiento matemático de la estabilidad en la situación específica (*Se*) del diseño de sistemas de control.

	Situación Fundamental	**Situación específica**
Construcción de lo matemático	Transformación	Diseño de sistemas de control
Significaciones	Patrones de comportamiento gráfico y analíticos	Comportamiento de la señal de entrada y la señal de salida
Procedimientos	Variación de parámetros	$U(s)=R(s)-B(s)$ Realimentación de $G(s)$
Instrumento	Instrucción que organiza comportamientos	La ecuación diferencial modela el comportamiento de las señales y así la estabilidad del sistema
Argumentación/ Resignificación	Comportamiento tendencial / Reproducción de Comportamientos	Tendencia del comportamiento de $Y(s)$ a $R(s)$

Tabla 1. Situaciones fundamental y específica. Transformación y sistemas de control

La práctica la hemos denominado *Control de la temperatura del foco* donde el objetivo principal es que dado un valor de referencia para la temperatura del foco, éste lo alcance. Para ello, los estudiantes arman un modelo físico con los siguientes elementos: Arduino board, foco, Relay de estado sólido AC y sensor de temperatura (ver figura 4).

Figura 4. Esquema de conexión foco, Relay y Arduino.

En el desarrollo de la práctica, inicialmente los estudiantes analizaron la dinámica del sistema, es decir, *el comportamiento de la señal de salida en el sistema* (la temperatura del foco) y concluyen que es un sistema de primer orden dadas las gráficas que el simulador arrojó. El profesor dibuja en el pizarrón, escribe algunas expresiones y recalca lo siguiente:

> "La temperatura debe de mantenerse dentro de cierto rango, ¿sí? Recuerden que si esto lo modelamos como un sistema de primer orden, lo que vamos a ver es una asíntota que correspondería a la temperatura máxima que puede alcanzar el foco" (Observación de clase, 2016)

En la afirmación anterior, el profesor relaciona la temperatura máxima del foco con el comportamiento asintótico de la curva que modela el sistema de primer orden (en el sentido de los sistemas de control). De esta manera caracterizan la dinámica de un fenómeno estable para luego expresar el modelo matemático.

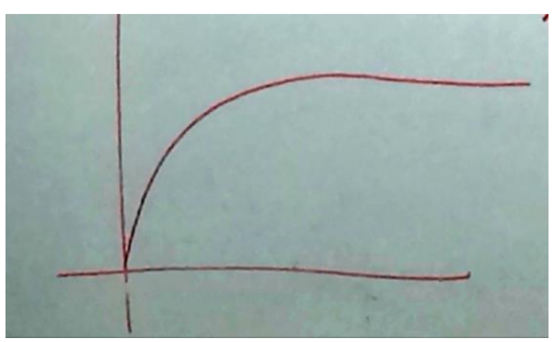

Figura 5. Gráfica del comportamiento de la señal de salida y Función de transferencia de la planta.

$P(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{k}{ts+1}$ donde K es la ganancia del sistema y τ la constante de tiempo del sistema.

$P(s)$ es la función de transferencia que relaciona la transformada de Laplace de la señal de salida con la transformada de Laplace de la señal de entrada o señal actuante.

Caracterizado el sistema, los estudiantes deben ajustar los parámetros K y τ de $P(s)$, con base en la gráfica que aporta el software del Arduino permitiendo que alcance su máxima temperatura, a lo que un grupo de estudiantes comenta:

> A1. Por eso te digo, va en 77 grados, tengo que ponerlo en …
> A2. Y ¿cuántos iban?
> A1. 8000 uy no
> A2. Ahhhh todavía le faltó estabilizarse
> A1. Te dije
>
> (Observación de clase, 2016)

El párrafo anterior, alude a que la temperatura no había llegado a su máximo, por ello el comentario de: *faltó estabilizarse* pues ellos no ven, en la imagen arrojada por el simulador, la curva asintótica mencionada por el docente.

Finalmente, buscan controlar la temperatura del foco haciendo uso del controlador ON-OFF, en la figura 6, se observa cómo la curva, que representa el comportamiento de la señal de salida, en ciertos intervalos de tiempo sobrepasa el valor de referencia y en otros no. Esto se debe al mecanismo de control como el profesor lo expresa a continuación:

> …Van a dar un valor de referencia que este va a ser θ_{ref},…, esta sería temperatura θ, va a subir la temperatura y seguramente va a haber un sobrepaso, pero en este momento ya el foco se habrá apagado, ¿si estamos de acuerdo? (Lo que está en rojo significa la energía en el foco, o el voltaje, … o el efecto de apagar el foco). La temperatura va a variar más o menos de esta forma. La cuestión es que esto va a estar oscilando... Es decir, si la temperatura es mayor o igual que, entonces prende, si no apaga… (Observación de clase, 2016)

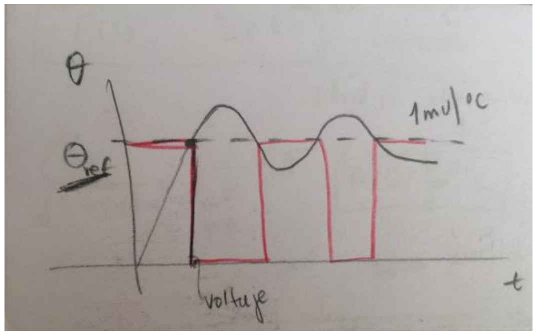

Figura 6. Gráfica de la señal de salida utilizando el control on-off

Así, en el diseño de un sistema de control se observan tres momentos: M_1: Dinámica del sistema, M_2: Ajuste de la función de transferencia o modelo de comportamiento, M_3: Control de la señal de salida y estabilidad. Cada uno de estos momentos, está sujeto a la *Reproducción de un Comportamiento* deseado, es decir, que la señal de salida tienda a comportarse como el valor de referencia o señal de entrada. De esta manera la estabilidad se *significa* en el comportamiento de las señales de entrada y salida, provocando *procedimientos* como la comparación entre la señal de salida y el valor de referencia, modificando los parámetros de la ecuación diferencial que modela el sistema y significándola como un *instrumento* que se encarga de modelar la estabilidad de la señal de salida y así lograr que se reproduzca el comportamiento inicialmente propuesto.

A manera de epílogo. La CCM(IB) subyace en un plano compuesto por dos ejes: la institucionalización y la identidad. En ese sentido la *resignificación de usos* deberá corresponder a su *tradición, cultura* e *historia*, en el seno de la comunidad de esos ingenieros. Su *función*, como comunidad (*ingenieros biónicos del IPN*), será *mantener los entornos* de esos usos en su jerga disciplinar (*la localidad*); la *resignificación* se generará por el compromiso mutuo disciplinar (*la reciprocidad*); y la *categoría reproducción de comportamientos* emergerá en el seno de esa comunidad (*la intimidad*).

5. CONCLUSIONES

Por una parte, los elementos que estructuran una transversalidad de usos de conocimiento matemático de la estabilidad de un sistema de control, en nuestro caso, resultaron ser dos: *la estabilidad del movimiento y la estabilidad de las señales*, delimitados en el escenario de la Obra Matemática y el Académico-Escolar (profesión y formación). Y, por otra, son elementos constitutivos de la base epistemológica para diseñar situaciones escolares de socialización acorde a los objetivos de formación matemática de los ingenieros.

En ese sentido, el escenario de la Obra Matemática, con el trabajo de Lyapunov, ofrece una resignificación del uso de la estabilidad al problematizar *la relación entre dos movimientos;* no se puede hablar del uno sin el otro; de hecho, esta interpretación da pie para construir comportamientos deseables, es decir, *conocido un comportamiento buscar otro que se parezca a ese;* en otras palabras, *reproducir un comportamiento* (Cordero et al., 2016). Mientras que el escenario escolar de la CCM(IB), nos ofrece una transversalidad del uso de la estabilidad del movimiento a la *Reproducción de un Comportamiento en un Sistema de Control*, donde se problematiza su diseño (la instrucción que organiza comportamientos). Esto compone *una epistemología de usos*, la cual se confronta con la matemática escolar. *Reproducción de comportamientos es una categoría de modelación que expresa una matemática funcional;* en ese sentido ecuaciones diferenciales, como $ay' = f - y$, *son el modelo de la reproducción de comportamientos; es el objeto con sus entornos de usos y significados: no se trata de "*encontrar la solución que no se conoce*",* sino la ecuación diferencial es *la instrucción que organiza comportamientos* (Cordero et al., 2016; Mendoza et al., en prensa).

Entonces, categorías como estas, podrían ser núcleos de las bases para diseñar *la situación escolar de socialización que trastocará y transformará la matemática escolar* para crear la *relación recíproca entre la matemática de la escuela y el cotidiano de las realidades* (Cordero, 2001, 2016a).

Esta categoría de modelación no aparece en el escenario de la matemática habitual para ingenieros, pero sí apareció en esta comunidad de conocimiento matemático de ingenieros biónicos CCM(IB); y subyace en la Obra Matemática de Lyapunov. Este hecho tiene un significado para el *programa socioepistemológico de la matemática educativa*, en el cual la *categoría* es un proceso que acompaña a la pluralidad epistemológica y la *transversalidad de saberes, lo que conlleva definir la funcionalidad matemática*. La *categoría* es la argumentación de la situación en cuestión que sucede dentro de las comunidades de conocimiento. Es decir, *la categoría es un eslabón que conectará a la realidad del que aprende con la matemática escolar*. Otras perspectivas socioculturales contribuyen con orientaciones similares. Por ejemplo, Orey y Rosa (2015) se proponen rescatar las formas culturales de la matemática, que se pierden en el desarrollo innovador de las sociedades, para tal fin reconocen que se tiene que valorar (epistemológicamente) la matemática fuera de la escuela la cual para los fines de la educación de la matemática le llaman etnomodelación. Mientras que Barbosa (2009) afirma que, para usar modelos matemáticos, que mejoren la educación de la ciencia, se requiere de no considerar a la matemática sólo como un instrumento o un lenguaje de las ciencias, más bien como el entorno de la modelación que favorezca que el estudiante tenga la oportunidad de discutir y experimentar las circunstancias para representar la matemática en cuestión. Nuestros resultados de investigación, como el que aquí hemos discutido, nos ofrecen elementos para instalar la matemática funcional en la educación. En ese sentido, la categoría es la modelación matemática que debemos poner en juego en los programas educativos. Quizá la tensión entre las perspectivas mencionadas consiste en el abordaje epistemológico del constructo modelación matemática. En la teoría socioepistemológica desarrollamos una epistemología *del objeto (resignificación de la estabilidad) al uso del conocimiento (la reproducción de comportamientos)* para impactar en la educación de la matemática en los diferentes niveles educativos.

Para finalizar, como una reflexión, creemos que lograr el impacto educativo de estos nuevos estatus epistemológicos se requiere constituir *programas que deberán ser sistemas* para favorecer la funcionalidad del conocimiento matemático (Cordero, 2017). Cada vez creemos, habrá que hacer más investigación donde la inmersión en las Comunidades de Conocimiento Matemático será fundamental para lograr la *horizontalidad de los saberes*. Los resultados de nuestras investigaciones nos convencen cada vez más que *la epistemología de usos del conocimiento matemático* es una ampliación al *Marco de Referencia* que favorecerá el aprendizaje de los significados de la matemática. Pero también, habrá que ir generando un constructo de *diálogo* entre las diferentes visiones socioculturales, de tal suerte que las diferencias no acentúen lo antagónico de las investigaciones sino sean ampliaciones para contribuir a mejorar el aprendizaje de la matemática en el mundo.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación está financiada por CONACYT con el Proyecto Una categoría de modelación matemática. La pluralidad epistemológica y la transversalidad de saberes: los aprendizajes de los significados de la matemática en las ingenierías y en los diferentes niveles educativos**.** Clave 0284259.

REFERENCIAS

Barbosa, J.C. (2009). Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. *Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *2*(2), 69-85.

Boyce, W., y Diprima, R. (1992). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Editorial Limusa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre la construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Carraher, T., Carraher, D., y Schliemann, A. (1997). *En la vida diez, en la escuela cero*. (4 ed.). México: Siglo XXI.

Cirillo, M., Pelesko, J., Felton-Koestler, M., & Rubel, L. (2016). Perspectives on Modeling in school Mathematics. In C. Hirsh, & A. R. McDuffie, (Eds). *Annual Perspectives in Mathematics Education: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics* (pp. 3-16). USA: National Council of Teachers of Mathematics.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *4*(2), 103-128.

Cordero, F. (2006). La modellizzazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matemática. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 59-79.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México, D.F.: Díaz de Santos-CLAME A.C.

Cordero, F. (2011). La modelación y la graficación en la matemática escolar. En L. Rodríguez-Salazar, R. Quintero-Zazueta, A. Hernández (Coords.), *Razonamiento Matemático. Epistemología de la Imaginación. (Re-pensando el papel de la Epistemología en la Matemática Educativa* (pp. 377-399). España-México: Gedisa-Cinvestav.

Cordero, F. (2015). *La ciencia desde el niñ@. Porque el conocimiento también se siente*. Primera Edición. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2016a). Modelación, funcionalidad y multidisciplinaridad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones* *latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 59-88). Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella, M. Goizueta, C. Guerrero, A. Mena-Lorca, J. Mena-Lorca, E. Montoya, A. Morales, M. Parraguez, E. Ramos, P. Vásquez, P., y D. Zakaryan, (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemátic*a (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F (2017). *La matemática y lo matemático. Transversalidad y modelación: un programa socioepistemológico*. Manuscrito en preparación.

Cordero, F., y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F., Mena, J., y Montalto, M.E. (2010). Il uolo della giustificazione funzionale in una situazione di risignifcazione dell'asintoto, *I'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 33B*(4), 457 – 488.

Cordero, F., Mena, J., y Huincahue, J. (2017). A category of modeling: functional mathematics of other domains of knowledge and the learning of mathematics. Enviado para publicación.

Cordero, F., y Silva-Crocci, H. (2012). Matemática Educativa, Identidad y Latinoamerica: el quehacer y la usanza del conocimiento disciplinar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 15*(3), 295-318.

Cordero, F., y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo.* Segunda edición. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F., Solís, M., Buendía, G., Zaldívar, D., y Mendoza, E.J. (2016). *El comportamiento con tendencia, lo estable y las ecuaciones diferenciales lineales. Una argumentación gráfica*. Barcelona, España: Gedisa.

Pérez-Oxté, I., y Cordero, F. (2016). Una epistemología basada en la transversalidad de los usos de la gráfica de una comunidad de ingenieros químicos industriales. En F. Rodríguez, R. Rodríguez y L. Sosa (Eds.), *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, (pp. 24-30). Oaxaca, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.

Gómez-Osalde, K. (2015). *El fenómeno de opacidad y la socialización del conocimiento. Lo matemático de la Ingeniería Agrónoma* (Tesis de doctorado no publicada). DME-CINVESTAV, México.

Guber, R. (2001). *La etnografía. Método, Campo y Reflexividad*. Ed. Norma: Bogotá.

IPN (s.f.). *Ingeniería Biónica*, Ciudad de México: SEP. Recuperado: http://www.ipn.mx/educacionsuperior/Paginas/Ing-Bionica.aspx

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik, 38*(3), 302-310.

Kuo, B. (1996). *Sistemas de control automático*. 7ª Edición. Prentice- Hall Hispanoamericana, S.A.: México.

Lyapunov, A.M. (1922). The general problem of the stability of motion. En Fuller, A.T. (Ed.) *The general problem of the stability of motion.* Taylor & Francis: London.

Mendoza, E.J. (2017). *La matemática funcional en una comunidad de conocimiento de ingenieros. El caso de la estabilidad en la electrónica* (Memoria Predoctoral no publicada). DME-CINVESTAV, México.

Mendoza, E.J., y Cordero, F. (2014). Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. Una situación de acumulación en la formación de ingenieros civiles. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1557-1563.

Mendoza, E.J., y Cordero, F. (2015). Matemática funcional en una comunidad de conocimiento. El caso de la estabilidad. 1-14. *Memorias del III Coloquio de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa*. Cinvestav. México

Mendoza, E.J., Cordero, F., Gómez, K., y Solís, M. (En prensa). El uso del conocimiento matemático en las comunidades de ingenieros. Del objeto a la funcionalidad matemática. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*.

Morales, A., Mena, J., Vera, F., y Rivera, R. (2012). El rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 237- 256.

Miralles, M., y Giuliano, G. (2008). Biónica: eficacia versus eficiencia en la tecnología natural y artificial. *Scientiae Studia*, *6*(3), 359-370.

Orey, D. C., y Rosa, M. (2015). Three approaches in the research field of ethnomodeling: emic (local), etic (global), and dialogical (local). *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 8*(2), 364-380.

Pollak, H. (2003). A history of the teaching of Modeling. En G. M. A. Stanic y J. Kilpatrick, (Eds.), *A History of School Mathematics* (pp. 647–69). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Rodrigo, M. J. (1997). El hombre de la calle, el científico y el alumno: ¿un solo constructivimos o tres? *Novedades Educativas*, *76*, 59-65.

Suárez, L. (2014). *La Modelación-Graficación para la Matemática Escolar*. México: Díaz Santos.