View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Repository of Faculty of Science, University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Paula Stopić

# RAČUNANJE I ANALIZA MATRIČNE FUNKCIJE DRUGI KORIJEN

Diplomski rad

Zagreb, 2016.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Paula Stopić

# RAČUNANJE I ANALIZA MATRIČNE FUNKCIJE DRUGI KORIJEN

Diplomski rad

Voditelj rada:

Doc.dr.sc Nela Bosner

Zagreb, 2016.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _________________________________, predsjednik
2. _________________________________, član
3. _________________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _________________________________
2. _________________________________
3. _________________________________

# Sadržaj

# Uvod

Funkcije matrica se danas naširoko primjenjuju u znanosti i tehnici. Ovaj rad će približiti jednu takvu matričnu funkciju, a to je funkcija drugi korijen.

Matrični drugi korijen je jedna od najčešće korištenih matričnih funkcija. Najviše se koristi u kontekstu simetričnih pozitivno definitnih matrica, kod problema svojstvenih vrijednosti ili polarne dekompozicije. Susrećemo ju i kod rješavanja diferencijalnih jednadžbi drugog reda, kod rješavanja nelinearnih matričnih jednadžbi te kod rješavanja nekih linearnih krutih rubnih problema.

U slijedećem primjeru ju vidimo kao rješenje diferencijalne jednadžbe drugoga reda. Problem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ay = 0 \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0',$$

ima rješenje

$$y(t) = cos(\sqrt{A}t)y_0 + (\sqrt{A})^{-1}sin(\sqrt{A}t)y_0',$$

gdje $\sqrt{A}$ označava bilo koji drugi korijen matrice $A$. Ovo rješenje postoji za bilo koju matricu $A$.

Drugi primjer bih izdvojila gdje koristimo matrični drugi korijen za rješavanje nelinearnih matričnih jednadžbi. Npr. uzmimo specijalan slučaj Riccatijeve jednadžbe:

$$XAX = B, \qquad A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}.$$

Ona ima rješenje

$$X = B(AB)^{-\frac{1}{2}},$$

ako $AB$ nema svojstvenih vrijednosti na $\mathbf{R}^-$.

Prvi dio mog rada je sastavljen od manjih poglavlja koja će definirati važna svojstva ili rezultate za moj rad. Sve objašnjene pojmove iz uvoda ću koristiti kasnije u daljnjim poglavljima. Većinu pojmova sam susretala na raznim kolegijima na studiju kao što su *Linearna algebra, Matematička analiza, Vektorski prostori, Numerička matematika* te *Numeričke metode u* *financijskoj matematici*, dok sam druge pronašla u literaturi koju sam koristila te ih tako definirala.

U nastavku rada sam objasnila definiciju općenite matrične funkcije te se orijentirala baš na funkciju drugi korijen. Veliki je izbor metoda za izračun matričnog drugog korijena, sa širokim spektrom različitih svojstava numeričke stabilnosti. U ovom radu sam predstavila 2 metode za izračun matričnog drugog korijena. To su Schurova metoda i Newtonova metoda sa nekim svojim verzijama. Osim samih metoda, dala sam analizu stabilnosti i točnosti za te metode te algoritme za izračun funkcije drugi korijen pomoću tih metoda.

Na kraju sam dala uvid u nekoliko specijalnih matrica koje su, zbog svojih svojstava dobre za izračun matričnog drugog korijena. Objasnila sam zašto su one dobre i kako se pomoću njih računa drugi korijen na nešto jednostavniji način.

# 1 Osnovni pojmovi

Prilikom definiranja općenite matrične funkcije te, specijalno, matrične funkcije drugi korijen trebat će nam, prvenstveno, znanje o matricama i funkcijama, a s time i o ostalim pojmovima koje ćemo susretati. Neka takva svojstva i definicije ću spomenuti i objasniti u narednom tekstu te ću ih kao takve koristiti u daljnjem pisanju. Definicije i rezultati koje ću koristiti u ovom radu su:

- Kažemo da je $\lambda_0$ svojstvena vrijednost matrice $A$, ako postoji vektor $v \neq 0$ takav da vrijedi $Av = \lambda_0 v$. Taj $v$ se zove svojstveni vektor za pripadnu vrijednost $\lambda_0$.
- Karakteristični polinom matrice $A$ je definiran s $k_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$. Nultočke karakterističnog polinoma su svojstvene vrijednosti matrice $A$.
- Skup svih svojstvenih vrijednosti nazivamo spektar matrice $A$, a označavamo ga sa $\sigma(A)$.
- Minimalni polinom matrice $A$ je normirani polinom najmanjeg stupnja koji poništava $A$, tj. $m(A) = 0$.
- Minimalni polinom $m$ od $A$ dijeli karakteristični polinom $k_A$.
- Minimalni polinom $m$ od $A$ dijeli bilo koji polinom $r$ kojeg poništava $A$ tj. za kojeg vrijedi $r(A) = 0$.
- Algebarska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_0$ je kratnost $\lambda_0$ u karakterističnom polinomu $k_A(\lambda)$, tj. $l$ takav da $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda)$, $p(\lambda_0) \neq 0$.
- Geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda_0$ je dimenzija prostora $Ker(A - \lambda_0 I)$, gdje $Ker$ označava jezgru tj. $Ker(A) = \{v \in \mathbf{C}^n : Av = 0\}$.
- Algebarska kratnost od $\lambda_0$ je suma dimenzija od Jordanovih blokova u kojima se $\lambda_0$ pojavljuje.
- Geometrijska kratnost od $\lambda_0$ je broj Jordanovih blokova u kojima se $\lambda_0$ pojavljuje.
- Matrica $A$ se može dijagonalizirati ako i samo ako su geometrijska i algebarska kratnost svih svojstvenih vrijednosti matrice $A$ jednake.
- Desna poluravnina kompleksne ravnine označava dio ravnine s desne strane imaginarne osi tj. dio ravnine gdje je realni dio kompleksnog broja

pozitivan.

- Matrica $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ je ortogonalna ako vrijedi $AA^T = A^TA = I$ gdje je $A^T$ transponirana matrica.
- Matrica $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ je unitarna ako vrijedi $AA^* = I$ gdje je $A^*$ adjungirana matrica (transponirana i konjugirana).
- Za dvije matrice $A, B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ kažemo da su slične ako postoji neka regularna matrica $S \in \mathbf{C}^{n\times n}$ takva da vrijedi $A = S^{-1}BS$.
- Slične matrice imaju jednak rang, defekt, karakteristični i minimalni polinom te svojstvene vrijednosti s jednakim algebarskim kratnostima.
- Ako je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ Hermitska pozitivno definitna matrica, onda vrijedi $x^TAx > 0$ za $x \neq 0$ te $A = A^*$.

Neke stvari su preopširne da bi ih stavila pod gornje točke tako da slijedi par poglavlja u kojima definiram ostale važne pojmove. U njima ću osim nekih definicija, dati i teoreme koji će nam pomoći u daljnjem razumijevanju.

## 1.1 Podijeljene razlike

**Definicija 1.1** Podijeljene razlike funkcije $f$ u točkama $x_k$ su definirane kao:

$$f[x_k] = f(x_k)$$

$$f[x_k, x_{k+1}] = \begin{cases} \dfrac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k} & x_k \neq x_{k+1} \\ f'(x_{k+1}) & x_k = x_{k+1} \end{cases}$$

$$f[x_0, \dots, x_{k+1}] = \begin{cases} \dfrac{f[x_1, \dots, x_{k+1}] - f[x_0, \dots, x_k]}{x_{k+1} - x_0} & x_0 \neq x_{k+1} \\ \dfrac{f^{(k+1)}(x_{k+1})}{(k+1)!} & x_0 = x_{k+1} \end{cases}$$

## 1.2 Schurova dekompozicija

Zbog svojstava sličnih matrica, razumno je za računanje svojstvenih vrijednosti i drugih karakteristika matrice $A$ naći neke transformacije sličnosti kojima ćemo dobiti matricu $B$ takvog oblika iz kojeg ćemo lakše izračunati svojstvene vrijednosti. Unitarna transformacija $A = S^*BS$ je dobra u tom slučaju jer se inverz unitarne matrice lako računa i numerički je stabilna. Schurovom dekompozicijom možemo pojednostaviti matricu $A$.

**Teorem 1.2** Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ i neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od $A$. Tada postoji unitarna matrica $Q \in \mathbf{C}^{n\times n}$ i gornje trokutasta matrica $T \in \mathbf{C}^{n\times n}$ takve da vrijedi $A = QTQ^*$ i $t_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$. Ako je $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ i ako su sve svojstvene vrijednosti od $A$ realne, onda je $T$ također realna i $U$ se može odabrati da bude ortogonalna. Dekompoziciju $A = QTQ^*$ zovemo Schurova dekompozicija od $A$, a $T$ zovemo Schurova forma od $A$.

*Dokaz*

Dokazujemo matematičkom indukcijom po $n$.

Baza: za $n = 1$ imamo $A = QTQ^*$ koja je skalar jer je $T$ $1 \times 1$ matrica pa je i gornje trokutasta te postoji $Q = 1$ koja je unitarna matrica ($1^* = 1$).

Pretpostavka: Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ i pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za $(n-1) \times (n-1)$ matricu.

Korak: Promatramo svojstvenu vrijednost $\lambda_1$ i njen svojstveni vektor $q_1$ tako da vrijedi $Aq_1 = \lambda_1 q_1$, $||q_1||_2 = 1$. Skup $\{q_1\}$ nadopunimo do ortonormirane baze $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ za $\mathbf{C}^n$. Definirajmo ortonormiranu matricu $U_2 = [q_2 \dots q_n] \in \mathbf{C}^{n\times(n-1)}$. Tada je matrica $Q_1 = [q_1\ U_2] \in \mathbf{C}^{n\times n}$ unitarna za koju vrijedi

$$Q_1^* A Q_1 = \begin{bmatrix} q_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Aq_1 & AU_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 q_1 & AU_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & q_1^* A U_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

gdje je $A_2 = U_2^* A U_2 \in \mathbf{C}^{(n-1)\times(n-1)}$.
Iz činjenice

$$det(A - \lambda I_n) = det(Q_1^* A Q_1 - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda) det(A_2 - \lambda I_{n-1})$$

slijedi da su $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti od $A_2$. Po pretpostavci indukcije postoji unitarna matrica $Q_2 \in \mathbf{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ i gornje trokutasta matrica $T_2 \in \mathbf{C}^{(n-1)\times(n-1)}$ sa $\lambda_2, \dots, \lambda_n$ na dijagonali takve da $A_2 = Q_2 T_2 Q_2^*$.
Definirajmo sada $Q = Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{n\times n}$ za koju vrijedi sljedeće:

$$Q^* Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^* \end{bmatrix} Q_1^* Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^* Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = I_n.$$

Stoga je $Q$ unitarna matrica sa svojstvom:

$$\begin{aligned} Q^* A Q &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^* \end{bmatrix} Q_1^* A Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & q_1^* A U_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & q_1^* A U_2 Q_2 \\ 0 & A_2 Q_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & q_1^* A U_2 Q_2 \\ 0 & Q_2^* A_2 Q_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 & q_1^* A U_2 Q_2 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \\
&= T
\end{aligned}
$$

pa tvrdnja vrijedi za $n \times n$ matricu što smo i trebali pokazati.

$\square$

## 1.3 Newtonova metoda

Newtonova metoda je metoda za pronalaženje najboljih aproksimacija nultočaka neke funkcije $f$. U slučaju jedne dimenzije promatramo $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Izaberemo početnu aproksimaciju $x_0$ te razvijemo funkciju $f$ u Taylorov red u okolini točke $x_0$:

$$
f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...
$$

Zadržimo se na linearnom članu. Tako smo funkciju $f$ aproksimirali linearnom funkcijom

$$
f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)
$$

čiji graf je tangenta na graf funkcije $f$ u $x_0$. Rješenje jednadžbe $f_1(x) = 0$ označimo s $x_1$ i definiramo $x_1 := x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Ponavljajući postupak dobivamo niz $x_0, x_1, \ldots$ zadan rekurzivno sa $x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n = 0, 1, \ldots$

Neka je $\alpha$ jednostruka nultočka od $f$ i neka je $f \in C^2(I)$ na nekom segmentu $I$ koji sadrži nultočku $\alpha$. Ako je početna točka $x_0$ dovoljno blizu nultočke $\alpha$, onda je Newtonova metoda dobro definirana ($f'(x_n) \neq 0$) i niz $x_n$ konvergira prema $\alpha$ i to (barem) kvadratno.

Newtonova metoda za sustave nelinearnih jednadžbi, se kao i kod jednodimenzionalnog slučaja, dobiva pronalaženjem nultočaka afine aproksimacije funkcije $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ u trenutnoj točki $x_k$. Promotrimo jednakost

$$
F(x_k + p) = F(x_k) + \int_{x_k}^{x_k + p} J(z)\,dz,
$$

gdje je $J = DF$ Jacobijeva matrica tj. za $F = (f_1, \ldots, f_n)^T$ je $J(x)_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$.
U prethodnom izrazu integral aproksimiramo sa linearnim izrazom $J(x_k)p$, čime dobijemo afinu aproksimaciju $M$ od $F$ u perturbaciji $p$ točke $x_k$,

$$M_k(x_k + p) = F(x_k) + J(x_k)p.$$

Zatim tražimo korak $s_k$ za koji je $M_k(x_k + s_k) = 0$ te na taj način dobivamo Newtonovu iteraciju za naš sustav jednadžbi. Dakle, počevši od točke $x_0$, u svakoj iteraciji računamo

$$J(x_k)s_k = -F(x_k),$$

$$x_{k+1} = x_k + s_k$$

sve dok nismo našli zadovoljavajuću aproksimaciju nultočke.

Ovdje metoda, također, kvadratno konvergira ako izaberemo početnu točku $x_0$ dovoljno blizu nultočke $\alpha$ i ako je $J(\alpha)$ regularna.

## 1.4 Kroneckerov produkt, suma i Sylvesterova jednakost

**Definicija 1.3** Kroneckerov produkt od $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ i $B \in \mathbf{C}^{p\times q}$ je blok matrica

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \ldots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \ldots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{mp\times nq}.$$

**Definicija 1.4** *Vec* operator slaže stupce matrice u jedan dugačak vektor. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

onda je

$$vec(A) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Vrijedi: $vec(AXB) = (B^T \otimes A)vec(X)$.

**Propozicija 1.5** Ako $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_r$, a $B \in \mathbf{C}^{m\times m}$ $\mu_s$ tada vrijedi

$$\sigma\left(\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} A^i \otimes B^j\right) = \sum_{i,j=1}^{k} c_{ij} \lambda_r^i \mu_s^j\ ,\ r = 1,\ldots,n, s = 1,\ldots,m.$$

**Definicija 1.6** Kroneckerova suma od $A \in \mathbf{C}^{m\times m}$ i $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ je $A \oplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B$.

**Definicija 1.7** Sylvesterova jednakost je linearna matrična jednakost

$$AX - XB = C,$$

gdje su $A \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$ dane, dok $X \in \mathbf{R}^{m\times n}$ treba odrediti.

**Propozicija 1.8** Primjenimo li *vec* operator na Sylvesterovu jednakost, možemo ju pisati i kao

$$(I_n \otimes A - B^T \otimes I_m)vec(X) = vec(C).$$

***Dokaz:***

Zbog $vec(AXB) = (B^T \otimes A)vec(X)$ imamo

$$vec(AX) = vec(AXI_n) = (I_n^T \otimes A)vec(X)$$

$$vec(XB) = vec(I_m XB) = (B^T \otimes I_m)vec(X)$$

iz čega slijedi

$$AX - XB = C \ \ / \ vec$$
$$vec(AX) - vec(XB) = vec(C)$$
$$(I_n^T \otimes A)vec(X) - (B^T \otimes I_m)vec(X) = vec(C)$$
$$(I_n \otimes A - B^T \otimes I_m)vec(X) = vec(C).$$

□

## 1.5 Matrična norma

**Definicija 1.9** Matrična norma na $\mathbf{C}^{m\times n}$ je funkcija $|| \ || : \mathbf{C}^{m\times n} \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava slijedeće uvijete:

1. $||A|| \geq 0$.
2. $||A|| = 0$ ako i samo ako $A = 0$.
3. $||\alpha A|| = |\alpha| \ ||A||$ za sve $\alpha \in \mathbf{R}$, $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$.
4. $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$ za sve $A, B \in \mathbf{C}^{m\times n}$.

**Definicija 1.10** Neka je $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$. Vrste matričnih normi su:

- 1−norma: $||A||_1 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$.
- Spektralna (2−norma): $||A||_2 = \sqrt{\rho(A^*A)}$ gdje je
$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \ \lambda \in \sigma(A)\}.$$
- Frobeniusova norma: $||A||_F = \sqrt{tr(A^*A)}$.
- ∞−norma: $||A||_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

**Definicija 1.11** Neka su $A \in \mathbf{C}^{m\times n}$ i $B \in \mathbf{C}^{n\times p}$. Ako vrijedi $||AB|| \leq ||A|| \ ||B||$ za sve matrice $A, B$ onda je ta norma konzistentna.

Norme iz definicije 1.10 su konzistentne, a međusobno su ekvivalentne s nekim konstantnim faktorom $\big(||A||_p \leq \alpha_{pq}||A||_q\big)$, $\alpha_{pq} = const$. Zbog toga vrijede slijedeće propozicije.

**Propozicija 1.12** Za bilo koju konzistentnu normu i matrice $A \in \mathbf{C}^{r\times m}$, $B \in \mathbf{C}^{m\times n}$ i $C \in \mathbf{C}^{n\times s}$ vrijedi $||ABC|| \leq ||A||_2||B||||C||_2$.

**Propozicija 1.13** Za bilo koju normu i matrice $A \in \mathbf{C}^{m\times m}$ i $B \in \mathbf{C}^{n\times n}$ vrijedi $||A \otimes B|| = ||A||\, ||B||$ i $||A \oplus B|| \leq ||A|| + ||B||$.

Norma $||\ ||$ se odnosi na neku od normi opisanih u definiciji 1.10. Dok nije točno naznačeno o kojoj normi se radi, smatramo da ta tvrdnja vrijedi za bilo koju od tih opisanih.

## 1.6 Definicija matrične funkcije

**Definicija 1.14** Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$, $Z$ regularna matrica, $n, p$ prirodni brojevi te $n = m_1 + \cdots + m_p$. Matrica $A$ izražena u Jordanovoj kanonskoj formi je

$$A = ZJZ^{-1} = Zdiag(J_1, \ldots, J_p)Z^{-1},$$

gdje je

$$J_i = J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ & \ldots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^{m_i\times m_i},\ i = 1, \ldots, p.$$

$J_i$ se naziva Jordanov blok, a $J$ je jedinstvena do na raspored blokova $J_i$.

**Definicija 1.15** Neka su svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, $s \leq p$ sve međusobno različite te neka $n_k$ označava veličinu najvećeg Jordanovog bloka u kojem se pojavljuje $\lambda_k$. Za funkciju $f$ kažemo da je definirana na spektru od $A$ ako postoje vrijednosti $f^{(j)}(\lambda_j),\ j = 0, \ldots, n_k - 1,\ k = 1, \ldots, s$.

U mom radu pod matričnom funkcijom ću podrazumijevati skalarnu funkciju $f$ koja djeluje na matricu $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ i preslikava ju u $f(A)$. Ta $f(A)$ će biti matrica istih dimenzija kao i $A$. Primarna matrična funkcija je ona koja će slijediti iz slijedeće definicije, dok je neprimarna ona koju nije moguće izraziti preko te definicije. Ima više različitih definicija matričnih funkcija. Ja ću se osloniti na slijedeću definiciju:

**Definicija 1.16** Neka je $f$ definirana na spektru od $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ te neka $A$ ima Jordanovu kanonsku formu. Tada definiramo

$$f(A) := Zf(J)Z^{-1} = Zdiag(f(J_i))Z^{-1},$$

gdje je

$$f(J_i) := \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dots & \dfrac{f^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & \dots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix}.$$

**Napomena 1.17** Primijetimo da ako je $A$ dijagonalizabilna, Jordanova forma od $A$ se reducira na $A = ZDZ^{-1} = Zdiag(\lambda_i)Z^{-1}$ gdje stupci od $Z$ predstavljaju svojstvene vektore od $A$. Tada bi se definicija 1.16 prilagodila kao $f(A) := Zf(D)Z^{-1} = Zdiag(f(\lambda_i))Z^{-1}$. Nadalje, za dijagonalizabilne matrice, $f(A)$ ima iste svojstvene vektore kao i matrica $A$ i svojstvene vrijednosti od $f(A)$ se računaju tako da se primjeni $f$ na svojstvene vrijednosti od $A$.

Slijedi alternativna definicija definiciji 1.16.

**Definicija 1.18** Neka je funkcija $f$ definirana na spektru od $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ i $m_A$ minimalan polinom od $A$ te neka $n_i$ označava veličinu najvećeg Jordanovog bloka u kojem se pojavljuje svojstvena vrijednost $\lambda_i$ od $A$. Tada definiramo

$$f(A) := p(A)$$

gdje je $p$ polinom stupnja manjeg od $deg(m_A) = \sum_{i=1}^{s} n_i$ koji zadovoljava interpolacijske uvijete

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i),$$

$j = 0, \dots, n_i - 1,\ i = 1, \dots, s$. Takav $p$ je jedinstven i zove se Hermitski interpolacijski polinom.

**Teorem 1.19** Neka su $z$ i $q$ polinomi te $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Vrijedi: $z(A) = q(A)$ ako i samo ako $z$ i $q$ poprimaju iste vrijednosti na spektru od $A$.

***Dokaz:***

$\Rightarrow$ Neka je $z(A) = q(A)$. Tada vrijedi $r(A) := z(A) - q(A) = 0$ pa je $r$ polinom poništen matricom $A$. Vrijedi

$$m(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{n_i}, \tag{1.1}$$

gdje su za $\lambda_i,\ i = 1, \dots, s$ svojstvene vrijednosti od $A$, a $n_i$ označava veličinu najvećeg Jordanovog bloka u kojem se pojavljuje svojstvena vrijednost $\lambda_i$.

Očito je da je $m$ jednak 0 na spektru od $A$ jer $m(\lambda_i) = 0,\ \forall\ i = 1, \ldots, s$. Budući da minimalni polinom $m$ od $A$ dijeli polinom $r$ kojeg poništava $A$, tada i $r$ poprima vrijednost 0 na spektru od $A$ pa slijedi da $z$ i $q$ poprimaju iste vrijednosti na spektru od $A$.

$\Leftarrow$ Neka $z$ i $q$ poprimaju iste vrijednosti na spektru od $A$. Definiramo $d := z - q$. Tada je $d$ jednak 0 na spektru od $A$ jer $d(\lambda_i) = z(\lambda_i) - q(\lambda_i) = 0$ pa ga $m$ dan iznad u dokazu (1.1) mora dijeliti.
Vrijedi

$$z(A) - q(A) = d(A) = m(A)p(A) = 0$$

za neki polinom $p$ pa je

$$z(A) = q(A).$$

□

Naredni teorem pokazuje da su gornje dvije definicije matrične funkcije ekvivalentne.

**Teorem 1.20** Definicija 1.16 i definicija 1.18 su ekvivalentne.

*Dokaz*

Definicija 1.18 kaže da $f(A) = p(A)$ gdje je $p$ Hermitski interpolacijski polinom koji zadovoljava interpolacijske uvijete $p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i)$, $j = 0, \ldots, n_i - 1,\ i = 1, \ldots, s$, za $\lambda_i$ svojstvene vrijednosti od $A$. Ako $A$ ima Jordanovu formu definiranu u 1.14, onda zbog osnovnih svojstava matričnih polinoma vrijedi

$$f(A) = p(A) = p(ZJZ^{-1}) = Zp(J)Z^{-1} = Zdiag(p(J_i))Z^{-1}.$$

Specijalno, za $p(x) = x^n$ vrijedi:

$$p(J_i) = J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & n\,\lambda_i^{n-1} & \ldots & \frac{n\cdots(n-m_i+2)}{(m_i-1)!}\lambda_i^{n-m_i+1} \\ 0 & \lambda_i^n & \ldots & \frac{n\cdots(n-m_i+3)}{(m_i-2)!}\lambda_i^{n-m_i+2} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & n\,\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_i^n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} p(\lambda_i) & p'(\lambda_i) & \frac{p"(\lambda_i)}{2} & \dots & \frac{p^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!} \\ 0 & p(\lambda_i) & p'(\lambda_i) & \dots & \frac{p^{(m_i-2)}(\lambda_i)}{(m_i-2)!} \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & p'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Budući da gornja jednakost vrijedi za proizvoljan polinom, vrijedi i za općeniti Hermiteov polinom. Zbog uvjeta interpolacije zaključujemo da vrijedi

$$p(J_i) = f(J_i)$$

pa su definicije ekvivalentne.

$\square$

**Teorem 1.21** Neka je funkcija $f$ definirana na spektru od $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$. Tada vrijedi:

1) $f(A)$ komutira s $A$

2) $f(A^T) = f(A)^T$

3) $f(XAX^{-1}) = Xf(A)X^{-1}$

4) svojstvene vrijednosti od $f(A)$ su $f(\lambda_i)$, gdje su $\lambda_i$ svojstvene vrijednosti od $A$

5) ako $X$ komutira s $A$, onda komutira i s $f(A)$

6) ako je $A = [A_{ij}]$ blok trokutasta matrica, onda je $F = f(A)$ blok trokutasta matrica sa istom strukturom kao i $A$ i vrijedi $F_{ii} = f(A_{ii})$

7) ako je $A = diag(A_{11}, \dots, A_{mm})$ blok dijagonalna matrica, onda je $f(A) = diag(f(A_{11}), \dots, f(A_{mm}))$

8) $f(I_m \otimes A) = I_m \otimes f(A)$

9) $f(A \otimes I_m) = f(A) \otimes I_m$

*Dokaz*

1) Definicija 1.18 govori da je $f(A)$ polinom od $A$, $p(A)$. Tada vrijedi $f(A)A = p(A)A = Ap(A) = Af(A)$.

2) $f(A)^T = p(A)^T = p(A^T) = f(A^T)$ gdje zadnja jednakost slijedi iz tvrdnje da su vrijednosti od $f$ na spektru od $A$ iste kao i vrijednosti od $f$ na spektru od $A^T$ pa možemo koristiti definiciju 1.18.

3) Slijedi direktno iz definicije 1.16 jer

$$f(XAX^{-1}) = f(XZJZ^{-1}X^{-1}) = XZf(J)Z^{-1}X^{-1} = Xf(A)X^{-1}.$$

4) Slijedi direktno iz definicije 1.16 jer je dijagonalna blok matrica u rastavu $f(A)$ definirana sa $f(\lambda_i)$ na dijagonali što daje svojstvene vrijednosti od $f(A)$.

5) Slijedi pomoću definicije 1.18: $Xf(A) = Xp(A) = p(A)X = f(A)X$ gdje druga jednakost vrijedi zbog toga što $X$ komutira s $A$.

6) $f(A) = p(A)$ je očito blok trokutasta matrica jer je $p(A)$ blok trokutasta i $i$-ti dijagonalni blok je $p(A_{ii})$. Jer $p$ interpolira $f$ na spektru od $A$, interpolira i na spektru od svakog bloka $A_{ni}i$ i vrijedi $p(A_{ii}) = f(A_{ii})$.

7) Slijedi iz 6) za specijalnu $A = diag(A_{11}, \dots, A_{mm})$.

8) Slijedi iz 7) jer $I_m \otimes A = diag(A, \dots, A)$ pa je

$$f(I_m \otimes A) = f(diag(A, \dots, A)) = diag(f(A), \dots, f(A)) = I_m \otimes f(A).$$

9) Pomoću 8) imamo $A \otimes B = \Pi(B \otimes A)\Pi^T$ za permutacijsku matricu $\Pi$ (matrica dobivena tako što su retci jedinične matrice permutirani tako da u svakom retku i stupcu ima točno jednu jedinicu, ostalo su nule) i vrijedi

$$f(A \otimes I_m) = f(\Pi(I_m \otimes A)\Pi^T) = \Pi f(I_m \otimes A)\Pi^T = \Pi(I_m \otimes f(A))\Pi^T = f(A) \otimes I_m.$$

$\square$

Matrične funkcije se uglavnom primjenjuju za rješavanje nelinearnih sustava jednadžbi, $g(X) = A$. Razlikujemo primarne i neprimarne matrične funkcije.

**Definicija 1.22** Neka je $\lambda$ svojstvena vrijednost algebarske kratnosti $k$. Označimo ih sa $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}$. Primarna matrična funkcija $f$ preslikava te svojstvene vrijednosti iz različitih Jordanovih blokova u istu vrijednost tj. $f(\lambda^{(1)}) = f(\lambda^{(2)}) = \cdots = f(\lambda^{(k)})$.

**Definicija 1.23** Neka je $\lambda$ svojstvena vrijednost algebarske kratnosti $k$. Označimo ih sa $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(k)}$. Neprimarna matrična funkcija $g$ preslikava te svojstvene vrijednosti iz različitih Jordanovih blokova u različite vrijednosti za neke $i \neq j,\ i, j = 1, \dots, k$.

Primarne matrične funkcije se mogu dobiti iz definicija 1.16 i 1.18. Za razliku od primarnih matričnih funkcija, neprimarne funkcije nije moguće izraziti preko matričnih polinoma, no, moguće je naći neke neprimarne matrične funkcije pomoću definicije 1.16.

U većini slučajeva primarna matrična funkcija je od interesa te se sva teorija i metode oslanjaju na nju. U daljnjem radu, ako se ne kaže drugačije, $f(A)$ označava primarnu matričnu funkciju.

## 1.7 Broj uvjetovanosti

Slijedeća definicija nam objašnjava značenje simbola $O(||E||)$ ili $o(||E||)$, za neku matricu $E$, što ću koristiti često u daljnjem radu.

**Definicija 1.24** Neka su $X$ i $E$ proizvoljne matrice. Tada oznaka $X = O(||E||)$ označava $||X|| \leq c||E||$, za neku konstantu $c$ i za sve dovoljno male $||E||$, dok $X = o(||E||)$ označava da $\dfrac{||X||}{||E||} \to 0$, ako $E \to 0$.

Jedan rezultat koji ću koristiti u daljnjem radu navodim u slijedećoj propoziciji.

**Propozicija 1.25** Ako je $X$ regularna i $||X^{-1}E|| < 1$ tada je $X + E$ regularna i $(X + E)^{-1} = X^{-1} - X^{-1}EX^{-1} + O(||E||^2)$.

*Dokaz*

Neka je $X+E = X(I+X^{-1}E)$. Vidimo da je regularnost $X+E$ osigurana ako pokažemo da je $I + X^{-1}E$ regularna matrica. Zbog uvjeta $||X^{-1}E|| < 1$ vrijedi da $\sigma(I + X^{-1}E) = 1 + \sigma(X^{-1}E)$ ne sadrži nulu pa možemo zaključiti da je $I + X^{-1}E$ regularna, a s time i $X + E$.

Koristeći Taylorov razvoj funkcije $f(y) = \dfrac{1}{1-y}$ dobijemo $\dfrac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$, za $|y| < 1$. Prenesemo li to na matrice, imamo

$$(I - Y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} Y^n = I + Y + Y^2 + \dots$$

za $||Y|| < 1$.
Sada dobijemo

$$\begin{aligned}
(X + E)^{-1} &= (X(I + X^{-1}E))^{-1} \\
&= (I + X^{-1}E)^{-1}X^{-1} \\
&= (I - (-X^{-1}E))^{-1}X^{-1} \\
&= (I - X^{-1}E + (-X^{-1}E)^2 + \dots)X^{-1} \\
&= X^{-1} - X^{-1}EX^{-1} + O(||E||^2).
\end{aligned}$$

□

Razlikujemo relativni i apsolutni broj uvjetovanosti. Ukoliko je broj uvjetovanosti velik kažemo da je funkcija loše uvjetovana, u suprotnom je dobro uvjetovana.

**Definicija 1.26** Relativni broj uvjetovanosti za funkciju $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definiramo kao

$$cond_{rel}(f,x) := \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{|\Delta x| \leq \epsilon |x|} \left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\epsilon f(x)} \right|.$$

On računa koliko neke male promjene u ulaznim podacima mogu utjecati na vrijednost funkcije, a da su pri tome obje veličine mjerene u relativnim veličinama.
Da bi pojednostavili definiciju, pretpostavimo da je $f$ dva puta diferencijablina. Iz teorema srednje vrijednosti slijedi, za $\theta \in < 0, 1 >$:

$$\begin{aligned}
f(x+\Delta x) - f(x) &= f'(x)\Delta x + \frac{f''(x+\theta\Delta x)}{2!}\Delta x^2 \\
f(x+\Delta x) - f(x) &= f'(x)\Delta x + O(\Delta x^2) \\
\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)} &= \left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)\frac{\Delta x}{x} + O(\Delta x^2) \\
\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)\epsilon} &= \left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)\frac{\Delta x}{x\epsilon} + \frac{O(\Delta x^2)}{\epsilon}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \left|\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)\epsilon}\right| &= \left|\left(\frac{xf'(x)}{f(x)}\right)\frac{\Delta x}{x\epsilon} + \frac{O(\Delta x^2)}{\epsilon}\right| \\
&\leq \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\frac{\Delta x}{x\epsilon}\right| + \left|\frac{O(\Delta x^2)}{\epsilon}\right| \\
&\leq \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|\frac{\epsilon}{\epsilon} + \frac{O(\epsilon^2)}{\epsilon} \\
&= \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| + O(\epsilon)
\end{aligned}$$

gdje prva nejednakost vrijedi zbog nejednakosti trokuta, druga jer je $\epsilon$ jednak $\sup\limits_{|\Delta x| \leq \epsilon |x|} \dfrac{|\Delta x|}{|x|}$, a zadnja jednakost jer je $\dfrac{O(\epsilon^2)}{\epsilon} = O(\epsilon)$.

Dakle, vrijedit će

$$cond_{rel}(f,x) = \lim_{\epsilon \to 0} \sup_{|\Delta x| \leq \epsilon |x|} \left| \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{f(x)\epsilon} \right| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$$

Definiciju relativnog broja uvjetovanosti možemo primijeniti na matrične funkcije.

**Definicija 1.27** Neka je $f : \mathbf{C}^{n\times n} \to \mathbf{C}^{n\times n}$ matrična funkcija. Relativni broj uvjetovanosti za matričnu funkciju $f$ definiramo kao

$$cond_{rel}(f, X) := \lim_{\epsilon\to 0} \sup{}_{||E||\le\epsilon||X||} \frac{||f(X+E) - f(X)\,||}{\epsilon\,||f(X)||},$$

gdje je norma u izrazu bilo koja matrična norma.

Kao što sam definirala relativni broj uvjetovanosti, prvo za običnu funkciju pa nakon toga za matričnu, isto mogu učiniti i za apsolutni broj uvjetovanosti. No, pošto se u radu orijentiram na matrične funkcije iznosim definiciju primijenjenu na matrične funkcije.

**Definicija 1.28** Neka je $f : \mathbf{C}^{n\times n} \to \mathbf{C}^{n\times n}$ matrična funkcija. Apsolutni broj uvjetovanosti za matričnu funkciju $f$ definiramo kao

$$cond_{abs}(f, X) := \lim_{\epsilon\to 0} \sup{}_{||E||\le\epsilon} \frac{||f(X+E) - f(X)\,||}{\epsilon}.$$

On računa koliko neke male promjene u ulaznim podacima mogu utjecati na vrijednost funkcije, a da su pri tome obje veličine mjerene u apsolutnim veličinama.

**Napomena 1.29** Primijetimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
cond_{rel}(f, X) &= \lim_{\epsilon\to 0} \sup{}_{||E||\le\epsilon||X||} \frac{||f(X+E) - f(X)\,||}{\epsilon||f(X)||} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \sup{}_{||E||\le\epsilon||X||} \frac{||f(X+E) - f(X)\,||}{\epsilon} \frac{1}{||f(X)||} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \sup{}_{||E||\le\epsilon||X||} \frac{||f(X+E) - f(X)\,||}{\epsilon\,||X||} \frac{||X||}{||f(X)||} \\
&= \lim_{\eta\to 0} \sup{}_{||E||\le\eta} \frac{||f(X+E) - f(X)\,||}{\eta} \frac{||X||}{||f(X)||} \\
&= cond_{abs}(f, X) \frac{||X||}{||f(X)||}
\end{aligned}$$

pa se ova dva broja razlikuju samo za neki konstantni faktor.

Obično je relativni broj uvjetovanosti zanimljiviji za proučavanje, no rezultati se uglavnom izražavaju preko apsolutnog broja.

Spomenimo još jednu mjeru koju ćemo koristiti kako bi odredili koliko je neka funkcija osjetljiva na promjene.

**Definicija 1.30** Uzmimo matricu $X \in \mathbf{C}^{n\times n}$ i pertubiramo ju kao $\tilde{X} = X + E$ za $||E|| \to 0$. Relativni rezidual definiramo kao

$$\frac{||f(X) - f(\tilde{X})||}{||f(X)||}$$

za bilo koju normu.

## 1.8 Fréchetova derivacija

**Definicija 1.31** Fréchetova derivacija matrične funkcije $f : \mathbf{C}^{n\times n} \to \mathbf{C}^{n\times n}$ u točki $X \in \mathbf{C}^{n\times n}$ je linearno preslikavanje iz $\mathbf{C}^{n\times n} \to \mathbf{C}^{n\times n}$, $E \to L(X, E)$, takvo da za svaki $E \in \mathbf{C}^{n\times n}$ vrijedi

$$f(X + E) - f(X) - L(X, E) = o(||E||).$$

$L(X, E)$ se čita kao Fréchetova derivacija od $f$ u $X$ u smjeru $E$. Ako ne izražavamo određen smjer pišemo samo $L(X)$. U slučaju $n = 1$ imamo trivijalno $L(x, e) = f'(x)e$.

**Definicija 1.32** Definiramo normu Fréchetove derivacije kao

$$||L(X)|| = \max_{Z \neq 0} \frac{||L(X, Z)||}{||Z||}.$$

**Teorem 1.33** Apsolutni i relativni broj uvjetovanosti je dan kao:

$$cond_{abs}(f, X) = ||L(X)||$$

$$cond_{rel}(f, X) = \frac{||L(X)||\,||X||}{||f(X)||}$$

*Dokaz*

Iz definicije apsolutnog broja uvjetovanosti 1.28 i definicije Fréchetove derivacije 1.31 te korištenja linearnosti preslikavanja $L$ slijedi:

$$
\begin{aligned}
cond_{abs}(f,X) &= \lim_{\epsilon\to 0}\sup{}_{||E||\le\epsilon}\frac{||f(X+E)-f(X)\,||}{\epsilon}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\sup{}_{||E||\le\epsilon}\left|\left|\frac{L(X,E)+o(||E||)}{\epsilon}\right|\right|\\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\sup{}_{||E||\le\epsilon}\left|\left|L\left(X,\frac{E}{\epsilon}\right)+\frac{o(||E||)}{\epsilon}\right|\right|\\
&= \sup_{||Z||\le 1}||L(X,Z)||\\
&= \max_{||Z||\le 1}||L(X,Z)||\\
&= ||L(X)||
\end{aligned}
$$

Superior može biti zamijenjen s maksimum jer radimo na kompaktnom skupu, a maksimum će se postići na rubu u $||Z|| = 1$ iz čega pomoću definicije norme Fréchetove derivacije 1.32 slijedi tvrdnja za apsolutni broj. Sada iz napomene 1.29 lako dobijemo tvrdnju za relativni broj:

$$
cond_{rel}(f,X) = cond_{abs}(f,X)\frac{||X||}{||f(X)||} = ||L(X)||\frac{||X||}{||f(X)||}.
$$

□

Svojstva Fréchetove derivacije:

1) Ako su $g$ i $h$ Fréchet diferencijabilne u $A$, tada je i $f = \alpha g+\beta h$ Fréchet diferencijabilna u $A$ i vrijedi

$$
L_f(A,E) = \alpha L_g(A,E) + \beta L_h(A,E).
$$

2) Ako su $g$ i $h$ Fréchet diferencijabilne u $A$, tada je i $f = gh$ Fréchet diferencijabilna u $A$ i vrijedi

$$
L_f(A,E) = L_g(A,E)h(A) + g(B)L_h(A,E).
$$

3) Neka su $h$ i $g$ Fréchet diferencijabilne u $A$ i $h(A)$, respektivno te neka je $f = g\circ h$. Tada je $f$ Fréchet diferencijabilna u $A$ i vrijedi $L_f = L_g \circ L_h$ što je

$$
L_f(A,E) = L_g(h(A), L_h(A,E))
$$

.

4) Neka $f$ i $f^{-1}$ obje postoje i neprekidne su u okolini $X$ i $f(X)$, respektivno i neka $L_f$ postoji i regularna je u $X$. Tada postoji i $L_{f^{-1}}$ u $Y = f(X)$ i vrijedi

$$
L_{f^{-1}}(Y,E) = L_f^{-1}(X,E)
$$

što je ekvivalentno $L_f(X, L_{f^{-1}}(Y, E)) = E$. Nadalje, vrijedi $||L_{f^{-1}}(Y)|| = ||L_f^{-1}(X)||$.

5) Neka je $f$ $2n-1$ puta neprekidno diferencijabilna na $D$. Za $X \in \mathbf{C}^{n\times n}$ sa spektrom na $D$, Fréchetova derivacija $L_f(X, E)$ postoji i neprekidna je u varijablama $X$ i $E$.

6) Svojstvene vrijednosti Fréchetove derivacije $L_f$ u $X$ su dane kao $f[\lambda_i, \lambda_j]$, $i, j = 1, \ldots, n$ gdje su $\lambda_i$ svojstvene vrijednosti od $X$.

Pretpostavljajući da vrijede gornja svojstva Fréchetove derivacije možemo istaknuti neka ograničenja za brojeve uvjetovanosti.

**Definicija 1.34** Neka je $\lambda$ svojstvena vrijednost i $E$ odgovarajući svojstveni vektor od $L(X)$. Tada je $L(X, E) = \lambda E$ i vrijedi (iz definicije 1.32),

$$||L(X)|| \geq \lambda.$$

**Teorem 1.35** Za bilo koju normu vrijedi:

$$cond_{abs}(f, X) \geq \max_{\lambda,\mu\in\sigma(X)} |f[\lambda, \mu]|.$$

*Dokaz*

Iz teorema 1.33 slijedi da je $cond_{abs}(f, X) = ||L(X)||$ pa iz definicije 1.34 vidimo da je apsolutni broj uvjetovanosti ograničen odozdo svojstvenom vrijednošću Fréchetove derivacije $\alpha$:

$$cond_{abs}(f, X) = ||L(X)|| \geq \alpha.$$

Nakon što djelujemo apsolutnom vrijednošću na izraz te maksimiziramo po svim svojstvenim vrijednostima Fréchetove derivacije $\alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$ i na kraju iskoristimo svojstvo 6) iz gornjih svojstava Fréchetove derivacije dobijemo

$$cond_{abs}(f, X) \geq \max_{\alpha_i\in\sigma(L(X))} |\alpha_i| = \max_{\lambda,\mu\in\sigma(X)} |f[\lambda, \mu]|.$$

$\square$

Teorem nam govori kako možemo ograničiti apsolutni broj uvjetovanosti odozdo. Uz još neke specijalne uvijete mogli bi ga ograničiti i odozgo sa istom granicom tako da bi imali

$$cond_{abs}(f, X) = \max_{\lambda,\mu\in\sigma(X)} |f[\lambda, \mu]|.$$

No, to vrijedi samo za neke određene matrice pa nije praktično za korištenje.

## 1.9 Stabilnost iteracija i granica točnosti

Sa $L^i(X)$ označavamo $i$-tu kompoziciju Fréchetove derivacije $L$ u $X$. (npr. $L^3(X,E) = L(\ X, L(X, L(X,E)))\ )$.

**Definicija 1.36** Neka je $X_{k+1} = g(X_k)$ iteracija s fiksnom točkom $X$. Pretpostavimo da je $g$ Fréchet diferencijabilna u $X$. Iteracija je stablina u okolini od $X$ ako je Fréchetova derivacija $L_g^i(X)$ ograničena, tj. postoji konstanta $c$ takva da $||L_g^i(X)|| \leq c, \ \forall\ i$. (Ako je $E$ određen, onda vrijedi $||L_g^i(X,E)|| \leq c||E||, \ \forall\ i$)

Neka je $X_0 = X + E_0$, gdje je $E_0$ proizvoljan s dovoljno malom normom te neka su zadani kao $E_k := X_k - X$. Tada po definiciji Fréchetove derivacije 1.31 slijedi

$$X_k = g(X_{k-1}) = g(X + E_{k-1}) = g(X) + L_g(X, E_{k-1}) + o(||E_{k-1}||).$$

Za fiksnu točku $X$ ($g(X) = X$) vrijedi

$$E_k = X_k - X = g(X) + L_g(X, E_{k-1}) + o(||E_{k-1}||) - X = L_g(X, E_{k-1}) + o(||E_{k-1}||),$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}
E_k &= L_g(X, E_{k-1}) + o(||E_{k-1}||) \\
&= L_g\big(X, L_g(X, E_{k-2}) + o(||E_{k-2}||)\big) + o(||E_{k-1}||) \\
&= L_g\big(X, L_g(X, E_{k-2})\big) + L_g\big(X, o(||E_{k-2}||)\big) + o(||E_{k-1}||) \\
&= L_g^2(X, E_{k-2}) + L_g\big(X, o(||E_{k-2}||)\big) + o(||E_{k-1}||) \\
&= L_g^2\big(X, L_g(X, E_{k-3}) + o(||E_{k-3}||)\big) + L_g\big(X, o(||E_{k-2}||)\big) + o(||E_{k-1}||) \\
&= L_g^3(X, E_{k-3}) + L_g^2\big(X, o(||E_{k-3}||)\big) + L_g\big(X, o(||E_{k-2}||)\big) + o(||E_{k-1}||) \\
&= \dots \\
&= L_g^k(X, E_0) + \sum_{i=0}^{k-1} L_g^i\big(X, o(||E_{k-1-i}||)\big)
\end{aligned}$$

pa za stablinu iteraciju vrijedi

$$
\begin{aligned}
||E_k|| &\leq ||L_g^k(X, E_0)|| + \sum_{i=0}^{k-1} ||L_g^i\big(X, o(||E_{k-1-i}||)\big)|| \\
&= ||L_g^k(X)|| \, ||E_0|| + \sum_{i=0}^{k-1} ||L_g^i(X)|| \, ||o(||E_{k-1-i}||)|| \\
&\leq c||E_0|| + \sum_{i=0}^{k-1} c \, o(||E_{k-1-i}||) \\
&\leq c||E_0|| + kc \, o(||E_0||).
\end{aligned}
$$

Dakle, definicija 1.36 osigurava da u stabilnoj iteraciji dovoljno male greške (definirane kao odmak od fiksne točke) ograničene.

Slijedeća propozicija nam daje korisnu činjenicu za stabilnu iteraciju.

**Propozicija 1.37** Linearni operator na $\mathbf{C}^{n\times n}$ ima ograničene potencije ako je njegov spektralni radijus manji od 1.

*Dokaz*

Neka je $\delta^{-1}A = XJX^{-1} = X(\delta^{-1}D + M)X^{-1}$ Jordanova kanonska forma od $\delta^{-1}A$, gdje je $\delta > 0$, $D = diag(\lambda_i)$, $\lambda_i$ svojstvene vrijednosti matrice $A$ i $M$ nedijagonalan dio Jordanove forme. Tada

$$A = X(D + \delta M)X^{-1}$$

pa je $A^k = X(D + \delta M)^k X^{-1}$ i vrijedi

$$||A^k||_p = ||X(D+\delta M)^k X^{-1}||_p = ||X||_p ||X^{-1}||_p ||D+\delta M||_p^k \leq \kappa_p(X)(\rho(A)+\delta)^k$$

za bilo koju $p = 1, 2,$ ili $\infty$ normu. Ako je $\rho(A) < 1$ možemo izabrati $\delta > 0$ takav da $\rho(A) + \delta < 1$ i $||A^k||_p$ je ograničen za svaki $k$.

$\square$

**Definicija 1.38** Za Fréchetovu derivaciju $L_g(X)$ kažemo da je idempotentna ako vrijedi

$$L_g^2(X, E) = L_g(X, L_g(X, E)) = L_g(X, E).$$

**Napomena 1.39** Ukoliko je Fréchetova derivacija idempotentna, tada je svaka $i$-ta kompozicija jednaka baš $L_g(X, E)$, iz čega slijedi da je norma svake $i$-te kompozicije ograničena $||L_g(X)||$.

**Definicija 1.40** Neka je $X_{k+1} = g(X_k)$ iteracija s fiksnom točkom $X$ i pretpostavimo da je $g$ Fréchet diferencijabilna u $X$. Relativna granica točnosti te iteracije je definirana kao $u||L_g(X)||$, gdje $u$ označava jedinicu zaokruživanja greške.

Granicu točnosti možemo smatrati kao najmanju pogrešku koju možemo očekivati da ćemo postići u aritmetici pomične točke jednom kada iteracija uđe u $O(u)$ okolinu fiksne točke. Ona je asimptotičko svojstvo.

Dok se stabilnost podudara sa ograničenosti potencija od $L_g(X)$, što ovisi jedino o svojstvenim vrijednostima od $L_g(X)$, granica točnosti ovisi o normi $L_g(X)$ pa dvije stabilne iteracije mogu imati dosta različitu granicu točnosti. Nestabilna iteracija može nikad ne postići svoju granicu točnosti jer ju nestabilnost može spriječiti da dosegne područje oko rješenja čiju veličinu mjeri granica točnosti.

# 2 Matrična funkcija drugi korijen

Kao što sam i prije spomenula, matrične funkcije se uglavnom primjenjuju za rješavanje nelinearnih sustava jednadžbi, $f(X) = A$. U mom slučaju funkcija je $f = {}^2$. Svako rješenje od $X^2 = A$ ćemo zvati drugim korijenom od $A$.

Razliku primarnih i neprimarnih matričnih funkcija spomenutih u definicijama 1.22 i 1.23 ću pokazati na slijedećem primjeru.

**Primjer 2.1** Pretpostavimo da želimo naći druge korijene od

$$A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješavamo jednadžbu $X^2 = A$. Dvostruka svojstvena vrijednost matrice $A$ je 1.

Kada uzmemo $f(t) = \sqrt{t}$, interpolacijski uvjeti iz definicije 1.18 gdje je $s = 1$ i $n_1 = 1$ daju $p(1) = \sqrt{1}$. Interpolacijski polinom je onda $p(t) = 1$ ili $p(t) = -1$, što se odnosi na dva druga korijena od 1 te daje $I$ i $-I$ kao druge korijene od $A$. Primijetimo, oba ova druga korijena su polinomi od $A$.

Pogledamo li definiciju 1.16, matrica $A$ je već u Jordanovoj formi sa dva $1 \times 1$ Jordanova bloka svojstvene vrijednosti 1. Dakle, imamo

$$f(A) = Zdiag(f(J_i))Z^{-1} = Zdiag(f(1))Z^{-1}$$

iz čega slijedi

$$f(A) = \begin{cases} ZIZ^{-1}, & f(1) = 1 \\ Z(-I)Z^{-1}, & f(1) = -1 \end{cases} = \begin{cases} I, & f(1) = 1 \\ -I, & f(1) = -1 \end{cases}$$

pa ta definicija također daje prethodno izračunata dva druga korijena. Ovdje smo koristili primarnu matričnu funkciju.

No, to ipak nisu sva rješenja. Koristeći neprimarnu matričnu funkciju dobivamo još neka rješenja. Pogledajmo još dva druga korijena naše matrice $A$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Njih dobijemo kada funkcija od dvije svojstvene vrijednosti 1 daje različite druge korijene $-1$ i 1. Po definiciji 1.16, jer je $A = ZIZ^{-1}$ Jordanova kanonska forma za proizvoljnu regularnu matricu $Z$, postoje drugi korijeni oblika

$$Z \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Z^{-1},\ Z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} Z^{-1}.$$

Vidimo da drugih korijena zapravo ima beskonačno mnogo.

**Primjer 2.2** Nije moguće sve neprimarne matrične funkcije izraziti iz Jordanove forme kao gore. Npr.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ima drugi korijen

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a $X$ je Jordanov blok veći od $1 \times 1$ Jordanovih blokova od $A$. Ovaj primjer također pokazuje da neprimarne funkcije mogu imati isti spektar kao i primarne pa neprimarna funkcija ne može biti prepoznata gledajući samo spektar.

## 2.1 Postojanje drugog korijena

Ako je $A$ regularna ili singularna sa svojstvenom vrijednosti nula koja ima istu algebarsku i geometrijsku kratnost, tada je funkcija drugi korijen definirana na spektru od $A$ te primarni drugi korijen postoji. Primijetimo da ako svojstvena vrijednost ima istu algebarsku i geometrijsku kratnost onda se pojavljuje jedino u Jordanovim blokovima veličine $1 \times 1$.

Ako je $A$ singularna sa svojstvenom vrijednosti nula koja nema istu algebarsku i geometrijsku kratnost, tada, iako ne mora imati primarnih drugih korijena, može imati neprimarnih.

Postojanje drugog korijena bilo koje vrste može biti okarakterizirano preko jezgre potencija matrice $A$. Slijede dva iskaza teorema o postojanju drugog korijena.

**Teorem 2.3** Matrica $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ima drugi korijen ako i samo ako u nizu cijelih brojeva $d_1, d_2, \ldots$ definirani kao $d_i = dim(Ker(A^i)) - dim(Ker(A^{i-1}))$ niti jedna dva broja nisu isti neparan cijeli broj.

**Primjer 2.4** Neka je $J \in \mathbf{C}^{m\times m}$ Jordanov blok svojstvene vrijednosti nula.

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},\ J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, J^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$dim(Ker(J^0)) = 0,\ dim(Ker(J^1)) = 1, \ldots, dim(Ker(J^m)) = m.$
Slijedi da je niz cijelih brojeva $d_i$ jednak $1\ 1 \ldots 1\ 0\ 0\ 0 \ldots$ pa po teoremu 2.3 zaključujemo da ne postoji drugi korijen ove matrice osim ako nije $m = 1$.

**Primjer 2.5** Neka je zadana matrica $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Slijedi $A^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $i = 2, 3, \ldots$

Niz cijelih brojeva $d_i$ je $2\ 1\ 0\ 0 \ldots$ pa po teoremu zaključujemo da postoji drugi korijen matrice $A$.

**Teorem 2.6** Matrica $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ima realan drugi korijen ako i samo ako zadovoljava uvjet teorema 2.3 i $A$ ima paran broj Jordanovih blokova svake veličine za svaku negativnu svojstvenu vrijednost.

**Korolar 2.7** Ako $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ ima neku negativnu svojstvenu vrijednost, onda je primaran drugi korijen nerealan.

*Dokaz*

Promotrimo realnu Schurovu dekompoziciju matrice $A$, $Q^T AQ = R$, gdje je $Q$ ortogonalna, a $R$ gornje blok trokutasta. Slijedi da je $f(A)$ realna ako i samo ako $Q^T f(A)Q = f(R)$ je realna, i primarna matrična funkcija $f(R)$ je blok gornje trokutasta sa blokovima na dijagonali $f(R_{ii})$. Ako $A$ ima negativnu svojstvenu vrijednost, tada je i neki $R_{ii}$ veličine $1 \times 1$ negativan te je onda $f(R_{ii})$ nerealna za funkciju $f$ drugi korijen.

□

**Definicija 2.8** Za funkciju drugi korijen $f$ i $\lambda_k \neq 0$ pišemo

$$L_k^{(j_k)} = L_k^{(j_k)}(\lambda_k) = f(J_k(\lambda_k)),$$

gdje je $f(J_k(\lambda_k))$ objašnjen u definiciji 1.16 i gdje $j_k = 1$ *ili* 2 označava granu od $f$. Vrijedi $L_k^{(1)} = -L_k^{(2)}$.

**Teorem 2.9** Neka regularna matrica $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ima Jordanovu kanonsku formu $A = ZJZ^{-1}$. Tada su sva rješenja od $X^2 = A$ dana sa

$$X = ZU diag(L_1^{(j_1)}, L_2^{(j_2)}, \ldots, L_p^{(j_p)})U^{-1}Z^{-1},$$

gdje je $Z$ regularna matrica, $U$ proizvoljna regularna matrica koja komutira s $J$, a $L_k^{(j_k)}$ su definirane u definiciji 2.8.

*Dokaz*

Neka je $X$ bilo koji drugi korijen matrice $A$. Jer je $A$ regularna, slijedi da je i $X$. Tada svojstvene vrijednosti od $X$ nisu nula pa derivacija funkcije $x^2$ $(= 2x)$ nije nula u svojstvenim vrijednostima od $X$. Iz teorema 1.21 svojstvo 3), možemo zaključiti da ako $A$ ima Jordanovu formu

$$J = diag(J_1(\lambda_1), \ldots, J_p(\lambda_p)),$$

onda $X$ ima Jordanovu formu

$$J_X = diag(J_1(\mu_1), \ldots, J_p(\mu_p)),$$

gdje su $\mu_k^2 = \lambda_k,\ k = 1, \ldots, p$.

Sada pogledajmo matricu

$$L = diag(L_1^{(j_1)}, L_2^{(j_2)}, \ldots, L_p^{(j_p)})$$

gdje biramo $j_k$ takav da $L_k^{(j_k)}$ ima svojstvenu vrijednost $\mu_k$, $\forall\, k$.
Jer je $L$ drugi korijen od $J$ po definiciji 2.8 za funkciju $f$ drugi korijen, iz istog razloga kao i gore $L$ mora imati Jordanovu kanonsku formu $J_X$. Stoga $X = WLW^{-1}$ za neku regularnu $W$ jer je sličan $L$.

Iz $X^2 = A$ imamo $A = WLW^{-1}WLW^{-1} = WL^2W^{-1}$ pa vrijedi jer je $J$ Jordanova forma od $A$

$$WJW^{-1} = WL^2W^{-1} = ZJZ^{-1}$$

što možemo pisati u obliku

$$(Z^{-1}W)J = J(Z^{-1}W)$$

iz čega slijedi da ako uzmemo $U = Z^{-1}W$ tada $U$ komutira s $J$.

Nadalje, imamo

$$Z^{-1}XZ = Z^{-1}WLW^{-1}Z = ULU^{-1}$$

$$X = ZULU^{-1}Z^{-1}$$

što je i tvrdnja teorema.

$\square$

Iz prethodnog teorema će slijediti:

**Korolar 2.10** Neka regularna matrica $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ima Jordanovu kanonsku formu sa $p$ blokova te neka je s broj različitih svojstvenih vrijednosti matrice $A$, $s \leq p$. Tada $A$ ima točno $2^s$ drugih korijena koji su primarne matrične funkcije od $A$. To su

$$X_j = Zdiag(L_1^{(j_1)}, L_2^{(j_2)}, \dots, L_p^{(j_p)})Z^{-1},\ j = 1, \dots, 2^s,$$

koji odgovaraju svim mogućim odabirima $j_1, j_2, \dots, j_p$, gdje je $j_k = 1$ ili 2, te se podrazumijeva da $j_i = j_k$ kad je $\lambda_i = \lambda_k$.

Ako je $s < p$, $A$ ima neprimarne druge korijene te oni čine parametrizirane familije

$$X_j(U) = ZUdiag(L_1^{(j_1)}, L_2^{(j_2)}, \dots, L_p^{(j_p)})U^{-1}Z^{-1},\ j = (2^s + 1), \dots, 2^p,$$

gdje je $j_k = 1$ ili 2, $U$ je proizvoljna regularna matrica koja komutira s $J$ i za svaki $j$, postoje $i, k$ koji ovise o $j$ takvi da vrijedi je $\lambda_i = \lambda_k$ dok $j_i \neq j_k$.

**Napomena 2.11** Korolar pokazuje da se drugi korijen regularne matrice dijeli u dvije klase.

Prva klasa sadrži konačno mnogo primarnih drugih korijena koji su izolirani i okarakterizirani s time da zbroj bilo koje dvije njihove svojstvene vrijednosti nije nula.

Druga klasa može biti i prazna, no, ako nije, onda sadrži konačan broj parametriziranih familija matrica, od kojih svaka familija sadrži beskonačno mnogo drugih korijena koji dijele isti spektar.

## 2.2 Glavni drugi korijen

Neka $\mathbf{R}^-$ označava zatvorenu realnu negativnu os.

**Teorem 2.12** Neka matrica $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ nema svojstvenih vrijednosti na $\mathbf{R}^-$. Tada postoji jedinstven drugi korijen $X$ od $A$, čije sve svojstvene vrijednosti leže u otvorenoj desnoj poluravnini i to je primarna matrična funkcija od $A$. Smatramo $X$ glavnim drugim korijenom od $A$ te pišemo $X = A^{\frac{1}{2}}$.

*Dokaz*

Primijetimo prvo da, ako postoji, neprimaran drugi korijen od $A$ mora imati svojstvene vrijednosti $\mu_i$ i $\mu_j$ takve da vrijedi $\mu_i = -\mu_j$ ($\mu_i^2 = \lambda_i \Rightarrow \pm\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$) te tako ne mogu sve ležati u otvorenoj desnoj poluravnini.

Slijedi da samo primaran drugi korijen može imati spektar u otvorenoj desnoj poluravnini. Jer $A$ nema svojstvenih vrijednosti na $\mathbf{R}^-$, jasno je iz korolara 2.10 da $A$ ima $1 = (2^0)$ drugi korijen koji je primarna funkcija od $A$ i kojem sve svojstvene vrijednosti leže u desnoj poluravnini. Time je pokazana egzistencija i jedinstvenost.

□

**Korolar 2.13** Hermitska pozitivno definitna matrica $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ima jedinstveni Hermitski pozitivno definitni drugi korijen.

*Dokaz*

Budući da je matrica $A$ Hermitska pozitivno definitina, slijedi da ima sve svojstvene vrijednosti pozitivne. Stoga, po teoremu 2.12, jedini mogući jedinstven Hermitski pozitivno definitni drugi korijen matrice $A$ je $A^{\frac{1}{2}}$. Neka je

$$A = QDQ^*$$

spektralna dekompozicija tj. $Q$ je unitarna, a $D$ dijagonalna sa pozitivnim svojstvenim vrijednostima matrice $A$ na dijagonali. Tada $A^{\frac{1}{2}}$ možemo napisati kao

$$A^{\frac{1}{2}} = QD^{\frac{1}{2}}Q^*$$

po teoremu 1.21 4) i to je Hermitska pozitivno definitna matrica jer je $A$ takva.

□

U principu ćemo koristiti glavni drugi korijen i označavat ćemo ga s $A^{\frac{1}{2}}$. S druge strane, sa $\sqrt{A}$ ćemo označavati proizvoljan drugi korijen koji ne mora biti glavni.

## 2.3 Osjetljivost matričnog drugog korijena

Za analizu osjetljivosti matričnog drugog korijena, pretpostavljat ćemo da u okolini svojstvenih vrijednosti matrice koju promatramo funkcija drugog korijena ima fiksiran odabir grana korijena, jer je u protivnom drugi korijen prekidan. Mi ćemo promatrati primarne druge korijene, s obzirom na to da neprimarni pripadaju parametriziranoj familiji drugih korijena (korolar 2.10) te se smatraju beskrajno osjetljivim.

Neka je $g(X) = X^2$. Tada vrijedi

$$g(X+E)-g(X) = (X+E)^2-X^2 = X^2+XE+EX+E^2-X^2 = XE+EX+E^2,$$

iz čega slijedi

$$L_g(X,E) = g(X+E) - g(X) - o(||E||) = XE + EX. \tag{2.1}$$

S druge strane, pogledajmo Fréchetovu derivaciju $L_f = L_f(A,E)$ od $X = f(A) = \sqrt{A}$. $L_f$ je inverz Fréchetove derivacije $L_g$ od funkcije $g(X) = X^2$ i vrijedi po svojstvu 4) Fréchetove derivacije $L_f(A,E) = {L_g}^{-1}(X,E)$ odnosno

$$L_g(X, L_f(A,E)) = E.$$

Sada iskoristimo izraz (2.1) pa dobijemo

$$E = L_g(X, L_f(A,E)) = XL_f(A,E) + L_f(A,E)X$$

tj. Fréchetova derivacija $L_f$ je rješenje jednadžbe

$$XL_f + L_fX = E.$$

Koristeći propoziciju 1.8 za Sylvesterovu jednakost, možemo pisati gornju jednadžbu u formi

$$(I \otimes X + X^T \otimes I)vec(L) = vec(E)$$

$$vec(L) = (I \otimes X + X^T \otimes I)^{-1}vec(E)$$

iz čega možemo izvesti, koristeći definiciju norme Fréchetove derivacije 1.32 i činjenicu $||vec(X)||_2 = ||X||_F$ za neku matricu $X$,

$$||L(A)||_F = \max_{E\neq 0} \frac{||L(A,E)||_F}{||E||_F} = \max_{E\neq 0} \frac{||vec(L(A,E))||_2}{||vec(E)||_2} = ||(I\otimes X+X^T\otimes I)^{-1}||_2.$$

Po teoremu 1.33, relativni broj uvjetovanosti matričnog drugog korijena od $A$ preko Frobeniusove norme je

$$\kappa_{sqrt}(X) = \frac{||(I \otimes X + X^T \otimes I)^{-1}||_2||A||_F}{||X||_F},$$

gdje argument od $\kappa_{sqrt}$ označava drugi korijen koji promatramo. Slijedi da je

$$\kappa_{sqrt}(X) \geq \frac{1}{\min_{i,j=1,\ldots,n} |\mu_i + \mu_j|} \frac{||A||_F}{||X||_F},$$

gdje su $\mu_j$ svojstvene vrijednosti od $X = \sqrt{A}$. Ona je zanimljiva jer otkriva dvije različite situacije kada $\kappa_{sqrt}$ mora biti velik tj. kada je funkcija loše uvjetovana.

Prva je kad $A$ (pa s njom i $\sqrt{A}$) ima svojstvenu vrijednost malog modula jer će tada prvi nazivnik biti jako malen. Druga situacija je kad je drugi korijen glavni i realna $A$ ima par kompleksno konjugiranih svojstvenih vrijednosti koje su blizu negativne realne osi. Neka su to $\lambda = re^{i(\pi - \epsilon)}$, $0 < \epsilon \ll 1$ i $\overline{\lambda} = re^{i(\epsilon - \pi)}$. Koristeći $e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$ i $|x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
|\lambda^{\frac{1}{2}} + \overline{\lambda}^{\frac{1}{2}}| &= \left| r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i(\pi-\epsilon)}{2}} + r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-i(\pi-\epsilon)}{2}} \right| \\
&= r^{\frac{1}{2}} \left| e^{\frac{i(\pi-\epsilon)}{2}} + e^{\frac{-i(\pi-\epsilon)}{2}} \right| \\
&= r^{\frac{1}{2}} \left| e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{-i\epsilon}{2}} + e^{\frac{-i\pi}{2}} e^{\frac{i\epsilon}{2}} \right| \\
&= r^{\frac{1}{2}} \left| \left( cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) e^{\frac{-i\epsilon}{2}} + \left( cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right) e^{\frac{i\epsilon}{2}} \right| \\
&= r^{\frac{1}{2}} \left| ie^{\frac{-i\epsilon}{2}} - ie^{\frac{i\epsilon}{2}} \right| \\
&= r^{\frac{1}{2}} |i| \left| e^{\frac{-i\epsilon}{2}} - e^{\frac{i\epsilon}{2}} \right| \\
&= r^{\frac{1}{2}} \left| e^{\frac{-i\epsilon}{2}} - e^{\frac{i\epsilon}{2}} \right| \\
&= r^{\frac{1}{2}} \left| cos\left(\frac{-\epsilon}{2}\right) + isin\left(\frac{-\epsilon}{2}\right) - cos\left(\frac{\epsilon}{2}\right) - isin\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= r^{\frac{1}{2}}\left| -2i\sin\frac{\epsilon}{2}\right| \\
&= r^{\frac{1}{2}} 2\sin\frac{\epsilon}{2} \\
&= r^{\frac{1}{2}} O(\epsilon)
\end{aligned}
$$

tako da je nazivnik opet jako malen.

Neka je $\tilde{X} = X + E$ aproksimacija drugog korijena $X$ od $A$, gdje je $||E|| \leq \epsilon||X||$. Tada je $\tilde{X}^2 = A + XE + EX + E^2$ što nas vodi do granice za rezidual (definicija 1.30)

$$
\begin{aligned}
\frac{||A - \tilde{X}^2||}{||A||} &= \frac{||-XE - EX - E^2||}{||A||} \\
&\leq \frac{||XE|| + ||EX|| + ||E^2||}{||A||} \\
&\leq (2\epsilon + \epsilon^2)\alpha(X)
\end{aligned}
$$

gdje je $\alpha(X) = \frac{||X||^2}{||A||} = \frac{||X||^2}{||X^2||} \geq 1$. Ukoliko je $\alpha(X)$ velik, tada i mala perturbacija od $X$ može imati relativni rezidual puno veći nego veličinu relativne perturbacije.

# 3 Metode za izračun matričnog drugog korijena

## 3.1 Schurova metoda za matrični drugi korijen

**Za A regularnu:** Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ regularna i neka $f(A)$ označava bilo koji primarni korijen od $A$. Za danu Schurovu dekompoziciju $A = QTQ^*$, gdje je $Q$ unitarna matrica i $T$ gornjetrokutasta dobijemo $f(A) = Qf(T)Q^*$. Iz toga vidimo da se računanje drugih korijena od $A$ svodi na računanje drugih korijena od $U = f(T)$ što je jednostavnije jer je $T$ gornjetrokutasta pa je i $U$ također trokutasta.
Za jednadžbu $U^2 = T$ vrijedi:

$$u_{ii}^2 = t_{ii}$$

$$(u_{ii} + u_{jj})u_{ij} = t_{ij} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{ik}u_{kj},\ j > i$$

Nemoguće je da bude $0 = u_{ii} + u_{jj} = f(t_{ii}) + f(t_{jj})$ zbog $t_{ii} \neq 0$ jer se radi o gornjetrokutastim regularnim matricama pa su $f(t_{ii}) \neq 0$, a $f$ kao primarna matrična funkcija iz definicije 1.22 preslikava iste $t_{ii}$ u istu vrijednost. Stoga možemo izračunati dijagonalne elemente od $U$ te nakon toga i $u_{ij}$ tako da prvo računamo elemente iznad glavne dijagonale (na superdijagonali) pa elemente iznad superdijagonale i tako dalje prema posljednjem elementu u prvom redu. Taj izračun nam pokazuje slijedeći algoritam.

**Algoritam 3.1** Za danu regularnu $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ovaj algoritam računa $X = \sqrt{A}$ pomoću Schurove dekompozicije. ($\sqrt{A}$ označava bilo koji primaran drugi korijen matrice $A$).

1. Izračunaj Schurovu dekompoziciju $A = QTQ^*$
2. for $i = 1 : n \quad u_{ii} = \sqrt{t_{ii}}$

3. for $j = 2 : n$ {
for $i = j - 1 : -1 : 1$ {

$$u_{ij} = \frac{t_{ij} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{ik}u_{kj}}{u_{ii} + u_{jj}}$$

}
}
4.$X = QUQ^*$

Algoritam koristi $25n^3$ operacija za izračun Schurove dekompozicije plus $\dfrac{n^3}{3}$ operacija za izračun $U$ te još $3n^3$ operacija za izračun $X$ što je $\dfrac{85}{3}n^3$ operacija ukupno. Dakle, složenost algoritma je $O(n^3)$.

**Za $A$ singularnu:** Neka je $A$ singularna matrica sa svojstvenom vrijednosti nula koja ima jednaku algebarsku i geometrijsku kratnost $k$. Tada se algoritam 3.1 može prilagoditi tako da Schurova dekompozicija bude takva da u matrici $T$ svojstvene vrijednosti 0 budu na posljednjih $k$ dijagonalnih mjesta. $T$ bi tada izgledala ovako:

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{M}^{(n-k)+k \times (n-k)+k}.$$

Vrijedi da je $rang(T) = n-k$ , pa je i $T_{11}$ regularna. Ako bi neki elementi od $k \times k$ bloka bili različiti od nule tada bi rang od $T$ bio veći od $n-k$, a zbog toga što je nula svojstvena vrijednost kratnosti $k$, to se ne može dogoditi nego je $rang(T) = n - k$. Iz teorema 1.21 6) zaključujemo da matrica $U = f(T)$ ima istu strukturu kao i $T$. Algoritam 3.1 u tom slučaju računa drugi korijen, sa jedinom promjenom da stavimo $u_{ij} = 0$, za $i, j > n - k$ pa te $u_{ij}$ neće trebati računati te se neće dogoditi da moramo podijeliti s nulom.

**Za A realnu sa nerealnim svojstvenim vrijednostima:** Ako je $A$ realna matrica s nekim nerealnim svojstvenim vrijednostima, tada Algoritam 3.1 koristi kompleksnu aritmetiku. Koristeći realnu Schurovu dekompoziciju možemo izbjeći to složenije računanje.
Neka $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ ima realnu Schurovu dekompoziciju $A = QRQ^T$, gdje je $Q$ ortogonalna matrica i $R$ je gornje blok trokutasta (matrica sa dijagonalnim blokovima $1 \times 1$ koje su realne svojstvene vrijednosti od $A$ i $2 \times 2$ koje imaju par kompleksno konjugiranih svojstvenih vrijednosti od $A$) . Tada je $f(A) = Qf(R)Q^T$ , pa je $U = f(R)$ gornje blok trokutasta matrica sa istom strukturom blokova kao i $R$ $\big($teorem 1.21 6)$\big)$.

Za jednadžbu $U^2 = R$ vrijedi:

$$\begin{aligned} U_{ii}^2 &= R_{ii} \\ U_{ii}U_{ij} + U_{ij}U_{jj} &= R_{ij} - \sum_{k=i+1}^{j-1} U_{ik}U_{kj}, j > i \end{aligned} \tag{3.1}$$

U slučaju da $U_{ii}$ i $U_{jj}$ nisu skalari, izraz (3.1) se može riješiti tako da ga napišemo, pomoću propozicije 1.8, u formi

$$(I \otimes U_{ii} + U_{jj}^T \otimes I)vec(U_{ij}) = vec(R_{ij} - \sum_{k=i+1}^{j-1} U_{ik}U_{kj})$$

što je linearan sustav $Ax = b$.

**Lema 3.2** Neka $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ ima različite kompleksne konjugirane svojstvene vrijednosti. Tada $A$ ima 4 druga korijena koja su primarne funkcije od $A$. Dva od njih su realni drugi korijeni, sa kompleksno konjugiranim svojstvenim vrijednostima, a dva su čisto imaginarni, sa svojstvenim vrijednostima koje nisu kompleksno konjugirane.

*Dokaz*

Pošto $A$ ima različite svojstvene vrijednosti $\theta \pm i\mu$, po korolaru 2.10 slijedi da $A$ ima $4 = (2^2)$ druga korijena koji su svi funkcije od $A$. Da ih nađemo zapišimo $A$ pomoću Jordanove forme

$$Z^{-1}AZ = diag(\theta + i\mu, \theta - i\mu) = \theta I + i\mu K, K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tada je $A = \theta I + \mu W$, gdje je $W = iZKZ^{-1}$ i jer su $\theta, \mu \in \mathbf{R}$ i $A$ je realna slijedi da je $W \in \mathbf{R}^{2\times 2}$.

Ako je $(\alpha + i\beta)^2 = \theta + i\mu$, tada 4 druga korijena od $A$ su dana preko $X = ZDZ^{-1}$ (korolar 2.10), gdje je

$$D = \pm diag(\alpha + i\beta, \pm(\alpha - i\beta)),$$

što je $D = \pm(\alpha I + i\beta K)$ ili $D = \pm(\alpha K + i\beta I) = \pm i(\beta I - i\alpha K)$. Dakle

$$X = \pm(\alpha I + \beta W)$$

što su dva realna druga korijena sa svojstvenim vrijednostima

$$\pm(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta),$$

ili

$$X = \pm i(\beta I - \alpha W)$$

što su dva čisto imaginarna druga korijena sa svojstvenim vrijednostima

$$\pm(\alpha + i\beta, -\alpha + i\beta).$$

$\square$

Slijedeći algoritam računa drugi korijen pomoću realne Schurove dekompozicije.

**Algoritam 3.3** Dana je $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ koja nema svojstvenih vrijednosti na $\mathbf{R}^-$. Algoritam računa $X = \sqrt{A}$ pomoću realne Schurove dekompozicije ($\sqrt{A}$ označava bilo koji primaran realan drugi korijen matrice $A$).

1. Izračunaj realnu Schurovu dekompoziciju $A = QRQ^T$, gdje je $R$ blok dimenzije $m \times m$
2. for $i = 1 : m$ $U_{ii} = \sqrt{R_{ii}}$
3. for $j = 2 : m$ {
   for $i = j-1 : -1 : 1$ {
   $$\text{riješi } U_{ii}U_{ij} + U_{ij}U_{jj} = R_{ij} - \sum_{k=i+1}^{j-1} U_{ik}U_{kj} \text{ za } U_{ij}$$
   }
   }
4. $X = QUQ^T$

Algoritam ima također $\dfrac{85}{3}n^3$ operacija. Složenost algoritma je $O(n^3)$.

Poglavlje završavamo s teoremom koji objedinjuje rezultate koje smo do sada imali.

**Teorem 3.4** Neka je $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ regularna matrica. Ako $A$ ima negativnu realnu svojstvenu vrijednost, tada $A$ nema realnih drugih korijena koji su primarne funkcije od $A$. Ako $A$ nema negativnih realnih svojstvenih vrijednosti, tada postoji točno $2^{r+c}$ realnih primarnih drugih korijena od $A$, gdje je $r$ broj različitih realnih svojstvenih vrijednosti, a $c$ broj različitih kompleksno konjugiranih parova svojstvenih vrijednosti.

*Dokaz*

Neka $A$ ima realnu Schurovu dekompoziciju $A = QRQ^T$. Zbog $f(A) = Qf(R)Q^T$, zaključujemo da je $f(A)$ realna ako i samo ako je $f(R)$ realna.

Ako $A$ ima negativnu realnu svojstvenu vrijednost, tada je $f(R_{ii})$, gdje je $R_{ii} = (r_{ii})$, nužno nerealna jer drugi korijen iz negativnog broja je imaginaran.

Ukoliko $A$ nema negativnih realnih svojstvenih vrijednosti, uzimajući u obzir $2^s$ primarnih drugih korijena od $A$ koji su opisani u korolaru 2.10, imamo $s = r + 2c$. Pomoću leme 3.2, zaključujemo da od realnih svojstvenih vrijednosti imamo $2^r$ drugih korijena iz $r$ $1 \times 1$ blokova, dok konjugirano kompleksni parovi dolaze u $c$ $2 \times 2$ blokova od kojih svaki daje 2 realna korijena, ukupno $2^c$. Dakle, ukupno je $2^{r+c}$ realnih primarnih drugih korijena od $A$.

□

## 3.2 Newtonova metoda za matrični drugi korijen

### 3.2.1 Newtonova iteracija

Newtonova metoda za rješavanje jednadžbe $X^2 = A$ se može izvesti na slijedeći način. Neka je $X_k$ aproksimativno rješenje te jednadžbe u koraku $k$. Definiramo rješenje u slijedećem koraku kao $X_{k+1} := X_k + E_k$, gdje je $E_k$ perturbacija, $||E_k|| \to 0$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

Tada slijedi $A = X_{k+1}^2 = (X_k + E_k)^2 = X_k^2 + X_k E_k + E_k X_k + E_k^2$. Budući da je $E_k$ malen, onda je $E_k^2$ još manji pa ga možemo zanemariti. Slijedi Newtonova iteracija:

$$\begin{aligned} X_0 &\text{ je dano} \\ X_k E_k + E_k X_k &= A - X_k^2 \qquad (3.2) \\ X_{k+1} &= X_k + E_k, \; k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Svaka iteracija (3.2) mora biti riješena za $E_k$. Kada bi koristili Schurovu metodu za izračun gornje iteracije, imali bi jako puno operacija. Slijedeća lema nam omogućava da to popravimo.

**Lema 3.5** Pretpostavimo da u Newtonovoj iteraciji (3.2) $X_0$ komutira s $A$ i da su sve iteracije dobro definirane. Tada $X_k$ komutira s $A$, za svaki $k$ te vrijedi $X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1} A)$.

*Dokaz*

Tvrdnja se dokazuje indukcijom.

Baza indukcije: Za $k = 0$ tvrdnja vrijedi jer je pretpostavka da $X_0$ komutira s $A$.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $k$. Imamo $X_k A = A X_k$ i neka je $X_k = \frac{1}{2}(X_{k-1} + X_{k-1}^{-1} A)$.

Korak indukcije: Uzmimo matricu $F_k = \frac{1}{2}(X_k^{-1} A - X_k)$ te se lako vidi da ona zadovoljava $X_k F_k + F_k X_k = A - X_k^2$:

$$\begin{aligned} X_k F_k + F_k X_k &= \frac{1}{2}(X_k X_k^{-1} A - X_k X_k) + \frac{1}{2}(X_k^{-1} A X_k - X_k X_k) \\ &= \frac{1}{2}(X_k X_k^{-1} A - X_k X_k) + \frac{1}{2}(X_k^{-1} X_k A - X_k X_k) \\ &= \frac{1}{2}(A - X_k^2) + \frac{1}{2}(A - X_k^2) = A - X_k^2. \end{aligned}$$

Dakle, slijedi iz Newtonove iteracije (3.2) $F_k = E_k$ i vrijedi za $X_{k+1}$:

$$X_{k+1} = X_k + F_k = X_k + \frac{1}{2}(X_k^{-1} A - X_k) = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1} A).$$

Treba još pokazati da $X_{k+1}$ komutira s $A$. Budući da $X_k$ komutira s $A$ po pretpostavci indukcije, slijedi da i $X_k^{-1}$ komutira s $A$:

$$X_k^{-1} / \quad X_k A = A X_k \quad / X_k^{-1} \Longleftrightarrow A X_k^{-1} = X_k^{-1} A.$$

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} X_{k+1} A &= \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1} A) A \\ &= \frac{1}{2}(X_k + A X_k^{-1}) A \\ &= \frac{1}{2}(X_k A + A X_k^{-1} A) \\ &= \frac{1}{2}(A X_k + A X_k^{-1} A) \\ &= \frac{1}{2} A (X_k + X_k^{-1} A) \\ &= A X_{k+1} \end{aligned}$$

pa je teorem dokazan.

$\square$

**Napomena 3.6** Gornja lema pokazuje da, ako je $X_0$ izabran tako da komutira s $A$, tada će s $A$ komutirati i svi $X_k$ i $E_k$ u (3.2). Nadalje, komutirat će i $E_k$ s $X_k$:

$$\begin{aligned}
X_k E_k &= X_k \frac{1}{2}(X_k^{-1}A - X_k) \\
&= \frac{1}{2}(A - X_k^2) \\
&= \frac{1}{2}(X_k^{-1}X_k A - X_k^2) \\
&= \frac{1}{2}(X_k^{-1}A X_k - X_k^2) \\
&= \frac{1}{2}(X_k^{-1}A - X_k)X_k \\
&= E_k X_k
\end{aligned}$$

Također vrijedi komutacija inverza s $A$ što smo pokazali u dokazu.

Zbog komutativnosti, iteraciju (3.2) možemo pojednostaviti. Najbolji izbor je $X_0 = A$. Iz toga slijedi jednostavnija Newtonova iteracija koju ćemo koristiti:

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}A), \; X_0 = A. \tag{3.3}$$

**Za A regularnu matricu:** Ako je $A$ regularna matrica, standardna teorija konvergencije Newtonove metode (odjeljak 1.3. u prvom poglavlju) nam dopušta da, za $X_0$ dovoljno blizu drugom korijenu, ostvarimo kvadratnu konvergenciju (3.2) prema primarnom drugom korijenu.

Slijedeći teorem pokazuje neuvjetovanu kvadratnu konvergenciju od (3.3) prema glavnom drugom korijenu. Da bi ga dokazala, trebat će mi kvadratna konvergencije Newtonove iteracije za *sign* funkciju. Stoga ću iskazati taj teorem, ali ga neću dokazivati.

**Teorem 3.7** Neka $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ nema čisto imaginarnih svojstvenih vrijednosti. Tada Newtonova iteracija za *sign* funkciju $S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1}), \; S_0 = A$ konvergira kvadratno prema $S = sign(S_0)$.

**Teorem 3.8** Neka $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ nema svojstvenih vrijednosti na $\mathbf{R}^-$. Newtonove iteracije drugog korijena $X_k$ iz (3.3) sa bilo kojom $X_0$ koja komutira s $A$ su ekvivalentne sa Newtonovim iteracijama funkcije predznaka:

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1}), \; S_0 = A^{-\frac{1}{2}}X_0$$

sa $X_k = A^{\frac{1}{2}} S_k$. Dakle, pod uvjetom da $A^{-\frac{1}{2}} X_0$ nema čistih imaginarnih svojstvenih vrijednosti, $X_k$ su definirani i $X_k$ konvergira kvadratno prema $A^{\frac{1}{2}}\ sign(A^{-\frac{1}{2}} X_0)$.

*Dokaz*

Primijetimo prvo da bilo koja matrica koja komutira s $A$ komutira i s $A^{\pm\frac{1}{2}}$ po teoremu 1.21 5). Dokazujemo po indukciji da vrijedi $X_k = A^{\frac{1}{2}} S_k$ i da $S_k$ komutira s $A$.

Baza indukcije: $X_0 = A^{\frac{1}{2}} S_0$ i vrijedi

$$AS_0 = AA^{-\frac{1}{2}} X_0 = A^{-\frac{1}{2}} AX_0 = A^{-\frac{1}{2}} X_0 A = S_0 A$$

pa $S_0$ komutira s $A$.

Pretpostavka indukcije: Neka vrijedi $X_{k-1} = A^{\frac{1}{2}} S_{k-1}$ i $S_{k-1}$ komutira s $A$.

Korak indukcije: Po pretpostavci indukcije, jer $S_{k-1}$ komutira s $A$, onda i $S_{k-1}$ komutira s $A^{\frac{1}{2}}$ (pa i $S_{k-1}^{-1}$) i vrijedi

$$\begin{aligned}
X_k &= \frac{1}{2}(X_{k-1} + X_{k-1}^{-1} A) \\
&= \frac{1}{2}(A^{\frac{1}{2}} S_{k-1} + S_{k-1}^{-1} A^{-\frac{1}{2}} A) \\
&= \frac{1}{2}(A^{\frac{1}{2}} S_{k-1} + S_{k-1}^{-1} A^{\frac{1}{2}}) \\
&= \frac{1}{2}(A^{\frac{1}{2}} S_{k-1} + A^{\frac{1}{2}} S_{k-1}^{-1}) \\
&= A^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}(S_{k-1} + S_{k-1}^{-1}) \\
&= A^{\frac{1}{2}} S_k.
\end{aligned}$$

Također vrijedi

$$\begin{aligned}
AS_k &= A\frac{1}{2}(S_{k-1} + S_{k-1}^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}(AS_{k-1} + AS_{k-1}^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}(S_{k-1}A + S_{k-1}^{-1}A) \\
&= \frac{1}{2}(S_{k-1} + S_{k-1}^{-1})A \\
&= S_k A.
\end{aligned}$$

pa $S_k$ komutira s $A$. Dakle, tvrdnja indukcije je dokazana.

Treba još pokazati da $X_k$ konvergira kvadratno prema $A^{\frac{1}{2}}\ sign(A^{-\frac{1}{2}}X_0)$. Koristeći iskazan teorem 3.7 vrijedi:

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{\frac{1}{2}} \lim_{k\to\infty} S_k = A^{\frac{1}{2}} sign(S_0) = A^{\frac{1}{2}} sign(A^{-\frac{1}{2}}X_0)$$

pa smo dokazali teorem.

□

**Za A singularnu matricu:**

**Lema 3.9** Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ singularna matrica sa svojstvenom vrijednosti nula, koja ima jednaku geometrijsku i algebarsku kratnost. Ostale svojstvene vrijednosti nisu nula i ne leže na $\mathbf{R}^-$. Tada postoji drugi korijen čije nenul svojstvene vrijednosti leže u otvorenoj desnoj poluravnini.

*Dokaz*

Možemo pisati Jordanovu formu od matrice $A$ kao $A = Zdiag(J_1, 0)Z^{-1}$ gdje se $J_1$ sastoji od Jordanovih blokova koji odgovaraju nenul svojstvenim vrijednostima. Neka je $f$ funkcija drugog korijena. Tada bilo koji primarni drugi korijen od $A$ ima formu

$$f(A) = Zf(diag(J_1, 0))Z^{-1} = Zdiag(f(J_1), f(0))Z^{-1} = Zdiag(f(J_1), 0)Z^{-1}.$$

Po teoremu 2.12 slijedi da je $f(J_1) = J_1^{\frac{1}{2}}$ jedinstven drugi korijen od $J_1$ čije sve svojstvene vrijednosti leže u otvorenoj desnoj poluravnini i to je primarna funkcija od $A$. Dakle, $Zdiag(J_1^{\frac{1}{2}}, 0)Z^{-1}$ je jedinstven drugi korijen od gornje forme.

□

Uz uvijete gornje leme 3.9 slijedi da je Newtonova iteracija (3.3) primjenjiva pod uvjetom da počnemo s iteracijom $X_1 = \frac{1}{2}(I + A)$. Slijedeći teorem pokazuje konvergenciju u tom slučaju.

**Teorem 3.10** Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ singularna matrica sa svojstvenom vrijednosti nula, koja ima jednaku geometrijsku i algebarsku kratnost. Ostale svojstvene vrijednosti nisu nula i ne leže na $\mathbf{R}^-$. Iteracije $X_k$ iz (3.3) koje počinju sa $X_1 = \frac{1}{2}(I + A)$ su regularne i konvergiraju linearno prema $A^{\frac{1}{2}}$, reda konvergencije

$$||X_k - A^{\frac{1}{2}}|| = O(2^{-k}).$$

*Dokaz*

Jordanovu kanonsku formu matrice $A$ možemo pisati kao $Zdiag(J_1, 0)Z^{-1}$, gdje $J_1$ sadrži Jordanove blokove koji odgovaraju nenul svojstvenim vrijednostima pa je $J_1$ regularna. Tada je

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{2}(I + A) \\
&= \frac{1}{2}(I + Zdiag(J_1, 0)Z^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}Z(I + diag(J_1, 0))Z^{-1} \\
&= \frac{1}{2}Z(diag((J_1 + I), I))Z^{-1} \\
&= Zdiag(\frac{1}{2}(J_1 + I), \frac{1}{2}I)Z^{-1}
\end{aligned}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}
X_2 &= \frac{1}{2}(X_1 + X_1^{-1}A) \\
&= \frac{1}{2}\left(Zdiag(\frac{1}{2}(J_1 + I), \frac{1}{2}I)Z^{-1} + \left(Zdiag(\frac{1}{2}(J_1 + I), \frac{1}{2}I)Z^{-1}\right)^{-1} A\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Zdiag(\frac{1}{2}(J_1 + I), \frac{1}{2}I)Z^{-1} + Zdiag(2(J_1 + I)^{-1}, 2I)Z^{-1}Zdiag(J_1, 0)Z^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Zdiag(\frac{1}{2}(J_1 + I), \frac{1}{2}I)Z^{-1} + Zdiag(2(J_1 + I)^{-1}, 2I)diag(J_1, 0)Z^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Zdiag(\frac{1}{2}(J_1 + I), \frac{1}{2}I)Z^{-1} + Zdiag(2(J_1 + I)^{-1}J_1, 0)Z^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(Zdiag(\frac{1}{2}(J_1 + I) + 2(J_1 + I)^{-1}J_1, \frac{1}{2}I)Z^{-1}\right) \\
&= Zdiag(\frac{1}{4}(J_1 + I) + (J_1 + I)^{-1}J_1, \frac{1}{4}I)Z^{-1} \\
&= Zdiag(J_1^{(2)}, 2^{-2}I)Z^{-1}
\end{aligned}$$

Ako nastavimo računati dalje dobivamo da $X_k$ ima formu

$$X_k = Zdiag(J_1^{(k)}, 2^{-k}I)Z^{-1},$$

gdje su $J_1^{(k)}$ Newtonove iteracije za $J_1^{\frac{1}{2}}$ tj. $J_1^{(k)} = \frac{1}{2}(J_1^{(k-1)} + J_1^{(k-1)^{-1}}J_1)$.

Dakle, koristeći teorem 3.8, imamo

$$\lim_{k\to\infty} X_k = \lim_{k\to\infty} Zdiag(J_1^{(k)}, 2^{-k}I)Z^{-1} = Zdiag(J_1^{\frac{1}{2}}, 0)Z^{-1} = A^{\frac{1}{2}}$$

i vrijedi

$$||X_k - A^{\frac{1}{2}}|| \leq \kappa(Z)||diag(J_1^{(k)} - J_1^{\frac{1}{2}}, 2^{-k}I)|| = O(2^{-k}).$$

□

### 3.2.2 Verzije Newtonove iteracije

Iz gore definirane Newtonove iteracije (3.3) izvodimo slijedeće njene verzije:

- **Deanman and Beaversova iteracija**

Definiram $Y_k := A^{-1}X_k$ pa slijedi:

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + Y_k^{-1}),\ X_0 = A$$

$$Y_{k+1} = \frac{1}{2}(Y_k + X_k^{-1}),\ Y_0 = I$$

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{k\to\infty} Y_k = A^{-\frac{1}{2}}$$

- **Produktna forma Deanman and Beavers iteracije**

Definiram $M_k := X_k Y_k$ pa slijedi:

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= X_{k+1}Y_{k+1} \\ &= \frac{1}{2}(X_k + Y_k^{-1})\frac{1}{2}(Y_k + X_k^{-1}) \\ &= \frac{1}{4}(2I + X_kY_k + Y_k^{-1}X_k^{-1}) \\ &= \frac{1}{4}(2I + M_k + M_k^{-1}) \end{aligned}$$

$$M_{k+1} = \frac{1}{2}\left(I + \frac{M_k + M_k^{-1}}{2}\right),\ M_0 = A$$

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}(I + M_k^{-1})X_k,\ X_0 = A$$

$$Y_{k+1} = \frac{1}{2}Y_k(I + M_k^{-1}),\ Y_0 = I$$

$$\lim_{k\to\infty} M_k = I$$

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{k\to\infty} Y_k = A^{-\frac{1}{2}}$$

Pomoću slijedeće relacije definirat ćemo narednu verziju Newtonove iteracije:

$$\begin{aligned}
E_{k+1} &= \frac{1}{2}(X_{k+1}^{-1}A - X_{k+1}) = \frac{1}{2}X_{k+1}^{-1}(A - X_{k+1}^2) \\
&= \frac{1}{2}X_{k+1}^{-1}(A - \frac{1}{4}(X_k + X_k^{-1}A)^2) \\
&= \frac{1}{2}X_{k+1}^{-1}\frac{(2A - X_k^2 - X_k^{-2}A^2)}{4} \\
&= -\frac{1}{2}X_{k+1}^{-1}\frac{(X_k - X_k^{-1}A)^2}{4} \\
&= -\frac{1}{2}X_{k+1}^{-1}E_k^2 \\
&= -\frac{1}{2}E_k X_{k+1}^{-1}E_k
\end{aligned}$$

gdje napomena 3.6 opravdava zadnju jednakost.

- **CR iteracija**

Definiram $Y_k := 2E_k$ i $Z_k := 4X_{k+1}$ pa slijedi:

$$Y_{k+1} = -Y_k Z_k^{-1} Y_k,\ Y_0 = I - A$$

$$Z_{k+1} = Z_k + 2Y_{k+1},\ Z_0 = 2(I + A)$$

$$\lim_{k\to\infty} Y_k = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} Z_k = 4A^{\frac{1}{2}}$$

- **IN iteracija**

Definiram $X_k := \frac{1}{4}Z_k$ i $E_k := \frac{1}{2}Y_{k+1}$ te to uvrstimo u CR iteraciju.

$$X_{k+1} = X_k + E_k,\ X_0 = A$$

$$E_{k+1} = -\frac{1}{2}E_k X_{k+1}^{-1} E_k,\ E_0 = \frac{1}{2}(I - A)$$

$$\lim_{k\to\infty} X_k = A^{\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{k\to\infty} E_k = 0$$

Jedna razlika između CR i IN iteracija od ostalih je ta da ove iteracije ne invertiraju $A$ u prvom koraku pa mogu biti iskorištene za singularnu $A$. Stoga je teorem 3.8 primjenjiv i na CR i IN iteraciju.

Iteracije u ovom odjeljku su matematički ekvivalentne, no nisu ekvivalentne u konačnoj aritmetici. U nastavku ćemo vidjeti da zapravo imaju vrlo različita svojstva stabilnosti.

# 4 Stabilnost i granica točnosti matrične funkcije drugi korijen

Standardna teorija konvergencija za Newtonovu metodu za nelinearne sustave garantira kvadratičnu konvergenciju prema rješenju pod pretpostavkom da je Jacobijeva matrica regularna za rješenje i da je početna točka dovoljno blizu rješenja (odjeljak 1.3 u prvom poglavlju). Uz te uvjete greška zaokruživanja u jednom koraku će biti prigušena u drugom jer ju Newtonova metoda shvaća kao perturbaciju iteracije dok ne dođemo do zadovoljavajuće aproksimacije. Zbog toga iteracija (3.2) nije pretjerano pogođena greškama zaokruživanja.

To se ne može nužno reći za (3.3) i ostale verzije Newtonove iteracije. U prisutnosti zaokruživanja, uvjeti komutativnosti (iz Leme 3.5 i drugdje gdje ih koristimo pri izvođenju iteracija) više ne vrijede i greške zaokruživanja potencijalno mogu biti povećane iteracijama. Greške zaokruživanja mogu poremetiti te iteracije tako da teorem 3.8 nije primjenjiv i ne možemo se pozvati na lokalnu kvadratičnu konvergenciju Newtonove metode.

U daljnjem tekstu smatramo da $A$ nema svojstvene vrijednosti na $\mathbf{R}^-$.

## 4.1 Newtonova iteracija

Za Newtonovu iteraciju (3.3) definiramo funkciju iteracije

$$g(X) = \frac{1}{2}(X + X^{-1}A).$$

Za Fréchetovu derivaciju, pomoću propozicije 1.25 za dovoljno mali $||X^{-1}E||$, slijedi:

$$\begin{aligned}
g(X+E)-g(X) &= \frac{1}{2}\big(X+E+(X+E)^{-1}A\big)-\frac{1}{2}(X+X^{-1}A)\\
&= \frac{1}{2}\big(X+E+X^{-1}A-X^{-1}EX^{-1}A+O(||E||^2)A)\\
&\qquad -\frac{1}{2}(X+X^{-1}A\big)\\
&= \frac{1}{2}\big(E-X^{-1}EX^{-1}A+O(||E||^2)A\big)
\end{aligned}$$

pa vrijedi

$$L_g(X,E)=\frac{1}{2}(E-X^{-1}EX^{-1}A)$$

jer $\frac{1}{2}O(||E||^2)A=o(||E||)$ za $||E||\to 0$.

Vrijedi:

$$\frac{1}{2}(X+X^{-1}A)=X\Rightarrow \frac{1}{2}X^{-1}A=\frac{1}{2}X\Rightarrow X^{-1}A=X\Rightarrow A=X^2$$

pa je $X=A^{\frac{1}{2}}$ fiksna točka od $g$, za koju vrijedi $L_g(A^{\frac{1}{2}},E)=\frac{1}{2}(E-A^{-\frac{1}{2}}EA^{\frac{1}{2}})$.

Kada na $L_g(A^{\frac{1}{2}},E)$ primijenimo *vec* operator iz definicije 1.4, dobijemo:

$$\begin{aligned}
vec(L_g(A^{\frac{1}{2}},E)) &= \frac{1}{2}(vec(E)-vec(A^{-\frac{1}{2}}EA^{\frac{1}{2}}))\\
&= \frac{1}{2}(vec(E)-(A^{\frac{1}{2}T}\otimes A^{-\frac{1}{2}})vec(E))\\
&= \frac{1}{2}(I-A^{\frac{1}{2}T}\otimes A^{-\frac{1}{2}})vec(E).
\end{aligned}$$

Tako da svojstvene vrijednosti od $L_g(A^{\frac{1}{2}},E)$ možemo dobiti kao svojstvene vrijednosti od

$$\frac{1}{2}(I-A^{\frac{1}{2}T}\otimes A^{-\frac{1}{2}}).$$

Da bismo izračunali $\sigma\left(\frac{1}{2}(I-A^{\frac{1}{2}T}\otimes A^{-\frac{1}{2}})\right)$, primijenimo definiciju 1.5 pa dobijemo (za $k=1,\ c_{11}=1,\ A=A^{\frac{1}{2}T}$ te $B=A^{-\frac{1}{2}}$):

$$\sigma\left(\frac{1}{2}(I-A^{\frac{1}{2}T}\otimes A^{-\frac{1}{2}})\right)=\frac{1}{2}\left(1-\sigma(A^{\frac{1}{2}T}\otimes A^{-\frac{1}{2}})\right)=\frac{1}{2}(1-\lambda_i^{\frac{1}{2}}\lambda_j^{-\frac{1}{2}}),$$

gdje su $\lambda_i$ svojstvene vrijednosti od $A$ pa po teoremu 1.21 4) $\lambda_i^{\frac{1}{2}}$ od $A^{\frac{1}{2}}$.

Da bi nam iteracija bila stabilna, koristeći propoziciju 1.37, mora vrijediti $\max_{i,j} \frac{1}{2}|1 - \lambda_i^{\frac{1}{2}} \lambda_j^{-\frac{1}{2}}| < 1$.

Dakle, Newtonova iteracija je nestabilna za $A^{\frac{1}{2}}$ osim u slučaju kada su svojstvene vrijednosti $\lambda_i$ od $A$ grupirane međusobno vrlo blizu, točnije kada $\lambda_i^{\frac{1}{2}} \lambda_j^{-\frac{1}{2}}$ leže u kugli radijusa 2 oko $z = 1$ u kompleksnoj ravnini, $\forall\, i, j$. Ako gornji uvjet nije zadovoljen, Newtonova iteracija 3.3 može divergirati makar početnu točku izaberemo proizvoljno blizu željenom drugom korijenu.

Iz relacije za $L_g(A^{\frac{1}{2}}, E)$ slijedi

$$\begin{aligned} ||L_g(A^{\frac{1}{2}}, E)|| &= ||\frac{1}{2}(E - A^{-\frac{1}{2}} E A^{\frac{1}{2}})|| \\ &\leq \frac{1}{2}||E|| + ||A^{-\frac{1}{2}}||\ ||E||\ ||A^{\frac{1}{2}}|| \\ &\leq \frac{1}{2}(1 + \kappa(A^{\frac{1}{2}}))||E|| \end{aligned}$$

što nam daje procjenu za relativnu granicu točnosti iz definicije 1.40 od

$$\frac{1}{2}\big(1 + \kappa(A^{\frac{1}{2}})\big)u.$$

## 4.2 DB iteracije

Iteracijska funkcija je dana s

$$G(X, Y) = G\left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X + Y^{-1} \\ Y + X^{-1} \end{bmatrix}.$$

Fréchetova derivacija od $G$ u $(X, Y)$ u smjeru $(E, F)$ je

$$L_G(X, Y; E, F) = L_G\left( \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E - Y^{-1} F Y^{-1} \\ F - X^{-1} E X^{-1} \end{bmatrix},$$

jer vrijedi

$$
\begin{aligned}
&G\left(\begin{bmatrix} X+E \\ Y+F \end{bmatrix}\right) - G\left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}\right) = \\
&\quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X+E+(Y+F)^{-1} \\ Y+F+(X+E)^{-1} \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X+Y^{-1} \\ Y+X^{-1} \end{bmatrix} \\
&\quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X+E+Y^{-1}-Y^{-1}FY^{-1}+O(||F||^2) \\ Y+F+X^{-1}-X^{-1}EX^{-1}+O(||E||^2) \end{bmatrix} \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X+Y^{-1} \\ Y+X^{-1} \end{bmatrix} \\
&\quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} E-Y^{-1}FY^{-1} \\ F-X^{-1}EX^{-1} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} O(||F||^2) \\ O(||E||^2) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vrijedi:

$$
\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} X+Y^{-1} \\ Y+X^{-1} \end{bmatrix} \Longleftrightarrow X = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y^{-1} \text{ i } Y = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}X^{-1}
$$

$$
\Longleftrightarrow \frac{1}{2}X = \frac{1}{2}Y^{-1} \text{ i } \frac{1}{2}Y = \frac{1}{2}X^{-1} \Longleftrightarrow X = Y^{-1} \text{ i } Y = X^{-1}
$$

pa bilo koja točka oblika $(X, Y) = (B, B^{-1})$ je fiksna točka od $G$ i vrijedi

$$
L_G(B, B^{-1}; E, F) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} E-BFB \\ F-B^{-1}EB^{-1} \end{bmatrix}.
$$

Može se pokazati da je $L_G(B, B^{-1}; E, F)$ idempotentan.

$$
\begin{aligned}
&L_G(B, B^{-1}; E, F) \circ L_G(B, B^{-1}; E, F) = \\
&\quad = L_G(B, B^{-1}; L_G(B, B^{-1}; E, F)) \\
&\quad = L_G\left(\begin{bmatrix} B \\ B^{-1} \end{bmatrix}; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} E-BFB \\ F-B^{-1}EB^{-1} \end{bmatrix}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E-BFB) - B\frac{1}{2}(F-B^{-1}EB^{-1})B \\ \frac{1}{2}(F-B^{-1}EB^{-1}) - B^{-1}\frac{1}{2}(E-BFB)B^{-1} \end{bmatrix} \\
&\quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}BFB - \frac{1}{2}BFB + \frac{1}{2}BB^{-1}EB^{-1}B \\ \frac{1}{2}F - \frac{1}{2}B^{-1}EB^{-1} - \frac{1}{2}B^{-1}EB^{-1} + \frac{1}{2}B^{-1}BFBB^{-1} \end{bmatrix} \\
&\quad = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} E-BFB \\ F-B^{-1}EB^{-1} \end{bmatrix} \\
&\quad = L_G(B, B^{-1}; E, F).
\end{aligned}
$$

Tada je, iz napomene 1.39, DB iteracija stabilna u fiksnoj točki $(A^{\frac{1}{2}}, A^{-\frac{1}{2}})$ jer svaku kompoziciju možemo ograničiti istom granicom kojom ograničimo $L_G(A^{\frac{1}{2}}, A^{-\frac{1}{2}}; E, F)$. Uzmimo

$$\begin{aligned} B &= A^{\frac{1}{2}}, \\ ||E|| &\leq u||A^{\frac{1}{2}}||, \\ ||F|| &\leq u||A^{-\frac{1}{2}}||. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Iz gornje definicije Fréchetove derivacije za $(B, B^{-1})$, koristeći oznake u (4.1), imamo

$$\frac{1}{2}||E - BFB|| \leq \frac{1}{2}\Big(||A^{\frac{1}{2}}|| + ||A^{\frac{1}{2}}||^2||A^{-\frac{1}{2}}||\Big)u = \frac{1}{2}||A^{\frac{1}{2}}||\big(1 + \kappa(A^{\frac{1}{2}})\big)u,$$

$$\frac{1}{2}||F - B^{-1}EB^{-1}|| \leq \frac{1}{2}\Big(||A^{-\frac{1}{2}}|| + ||A^{-\frac{1}{2}}||^2||A^{\frac{1}{2}}||\Big)u = \frac{1}{2}||A^{-\frac{1}{2}}||\big(1 + \kappa(A^{\frac{1}{2}})\big)u.$$

Iz gornjih ograničenja (4.1), možemo procijeniti relativnu granicu točnosti (definicija 1.40). Ona iznosi

$$\frac{1}{2}u\big(1 + \kappa(A^{\frac{1}{2}})\big)$$

kao i za Newtonovu iteraciju.

## 4.3 Produktna forma DB iteracije

Iteracijska funkcija produktne forme DB iteracije je dana s

$$G(M, X) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} I + \frac{1}{2}(M + M^{-1}) \\ (I + M^{-1})X \end{bmatrix}.$$

Fréchetova derivacija je

$$L_G(M, X; E, F) = L_G\left(\begin{bmatrix} M \\ X \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E - M^{-1}EM^{-1}) \\ (I + M^{-1})F - M^{-1}EM^{-1}X \end{bmatrix}$$

jer vrijedi

$$
\begin{aligned}
G\Bigg( \begin{bmatrix} M+E \\ X+F \end{bmatrix} \Bigg) - G\Bigg( \begin{bmatrix} M \\ X \end{bmatrix} \Bigg)& \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I + \frac{1}{2}(M+E+(M+E)^{-1}) \\ (I+(M+E)^{-1})(X+F) \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I + \frac{1}{2}(M+M^{-1}) \\ (I+M^{-1})X \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I + \frac{1}{2}(M+E+M^{-1}-M^{-1}EM^{-1}+O(||E||^2)) \\ (I+M^{-1}-M^{-1}EM^{-1}+O(||E||^2))(X+F) \end{bmatrix} \\
&\qquad - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I + \frac{1}{2}(M+M^{-1}) \\ (I+M^{-1})X \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E-M^{-1}EM^{-1}) + \frac{1}{2}O(||E||^2) \\ (I+M^{-1})F - M^{-1}EM^{-1}X + O(||E||^2) - M^{-1}EM^{-1}F \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E-M^{-1}EM^{-1}) + o(||E||) \\ (I+M^{-1})F - M^{-1}EM^{-1}X + o(\max\{||E||, ||F||\}) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(E-M^{-1}EM^{-1}) \\ (I+M^{-1})F - M^{-1}EM^{-1}X \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} o(||E||) \\ o(\max\{||E||, ||F||\}) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Vrijedi:

$$
\begin{bmatrix} M \\ X \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} I + \frac{1}{2}(M+M^{-1}) \\ (I+M^{-1})X \end{bmatrix} \iff M = \frac{1}{2}I + \frac{1}{4}M + \frac{1}{4}M^{-1} \text{ i}
$$

$$
X = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}M^{-1}X \iff \frac{1}{2}X = \frac{1}{2}M^{-1}X \iff I = M^{-1} \iff M = I
$$

pa bilo koja točka oblika $(I, X)$ je fiksna točka od $G$ i vrijedi

$$
L_G(I, X; E, F) = \begin{bmatrix} 0 \\ F - \frac{1}{2}EX \end{bmatrix}.
$$

Može se pokazati da je $L_G(I, X; E, F)$ idempotentan.

$$
\begin{aligned}
L_G(I, X; E, F) \circ L_G(I, X; E, F) &= \\
&= L_G(I, X; L_G(I, X; E, F)) \\
&= L_G\Bigg( \begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 \\ F - \frac{1}{2}EX \end{bmatrix} \Bigg) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ F - \frac{1}{2}EX \end{bmatrix} \\
&= L_G(I, X; E, F)
\end{aligned}
$$

Dakle, pomoću napomene 1.39, produktna forma DB iteracije je stabilna u $(M, X) = (I, A^{\frac{1}{2}})$.

Uzmimo

$$\begin{aligned} ||E|| &\leq u, \\ ||F|| &\leq u||A^{\frac{1}{2}}||. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Vrijedi da možemo ograničiti

$$||F - \frac{1}{2}EA^{\frac{1}{2}}|| \leq u||A^{\frac{1}{2}}|| + \frac{1}{2}u||A^{\frac{1}{2}}|| = \frac{3}{2}||A^{\frac{1}{2}}||u.$$

Time dobivamo procjenu relativne granice točnosti

$$\frac{3}{2}u$$

što je neovisno od $A$.

## 4.4 CR iteracija

Iteracijska funkcija je

$$G(Y, Z) = \begin{bmatrix} -YZ^{-1}Y \\ Z - 2YZ^{-1}Y \end{bmatrix}.$$

Zapis Fréchetove derivacije je jako kompleksan, stoga ću ju navesti samo u fiksnoj točki, što nam je jedino i potrebno.

Vrijedi:

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -YZ^{-1}Y \\ Z - 2YZ^{-1}Y \end{bmatrix} \Longleftrightarrow Y = -YZ^{-1}Y \text{ i } Z = Z - 2YZ^{-1}Y$$
$$\Longleftrightarrow \; Z = Z + 2Y \Longleftrightarrow 0 = 2Y \Longleftrightarrow Y = 0$$

pa bilo koja točka oblika $(0, Z)$ je fiksna točka od $G$ i vrijedi

$$L_G(0, Z; E, F) = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}.$$

$L_G(0, Z)$ je idempotenta jer

$$\begin{aligned} L_G(0, Z; E, F) \circ L_G(0, Z; E, F) &= L_G(0, Z; L_G(0, Z; E, F)) \\ &= L_G(0, Z; 0, F) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \\ &= L_G(0, Z; E, F) \end{aligned}$$

pa pomoću napomene 1.39, CR iteracija je stabilna u $(0, 4A^{\frac{1}{2}})$.

Uzmimo

$$\begin{aligned} ||E|| &\leq u, \\ ||F|| &\leq u||A^{\frac{1}{2}}||. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Zbog gornjih nejednakosti (4.3), možemo zaključiti da je relativna granica točnosti trivijalna i iznosi $u$.

## 4.5 IN iteracija

Iteracijska funkcija je

$$G(X, H) = \begin{bmatrix} X + H \\ -\dfrac{1}{2}H(X+H)^{-1}H \end{bmatrix}.$$

Ovdje je Fréchetova derivacija isto kompliciranog zapisa pa ću ju navesti samo u fiksnoj točki.

Vrijedi

$$\begin{bmatrix} X \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X + H \\ -\frac{1}{2}H(X+H)^{-1}H \end{bmatrix}$$

$$\iff X = X + H \text{ i } H = -\frac{1}{2}H(X+H)^{-1}H \iff H = 0$$

pa bilo koja točka oblika $(X, 0)$ je fiksna točka od $G$. Specijalno, $(A^{\frac{1}{2}}, 0)$ i vrijedi

$$L_G(A^{\frac{1}{2}}, 0; E, F) = \begin{bmatrix} E + F \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix}.$$

$L_G(A^{\frac{1}{2}}, 0)$ je idempotenta jer

$$\begin{aligned} L_G(A^{\frac{1}{2}}, 0; E, F) &\circ L_G(A^{\frac{1}{2}}, 0; E, F) \\ &= L_G(A^{\frac{1}{2}}, 0; L_G(A^{\frac{1}{2}}, 0; E, F)) \\ &= L_G(A^{\frac{1}{2}}, 0; E + F, 0) \\ &= \begin{bmatrix} E + F \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= L_G(A^{\frac{1}{2}}, 0; E, F) \end{aligned}$$

pa, pomoću napomene 1.39, IN iteracija je stabilna u $(A^{\frac{1}{2}}, 0)$.

Uzmimo

$$\begin{aligned} ||E|| &\leq u \\ ||F|| &\leq u. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Vrijedi da možemo ograničiti

$$||E + F|| \leq 2u.$$

Uz pomoć ograničenja u izrazu (4.4), relativna granica točnosti je opet trivijalna i iznosi $2u$.

# 5 Specijalne matrice

U ovom odjeljku ću se osvrnuti na neke metode za računanje drugog korijena specijalnih klasa matrica. Uvodimo neke linearno konvergentne iteracije gdje su matrična množenja laka za implementirati.

## 5.1 Binomna iteracija

**Definicija 5.1** Definiramo binomnu ekspanziju za matricu $C \in \mathbf{C}^{n\times n}$:

$$(I-C)^{\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} (-C)^j = I - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j C^j, \ \alpha_j > 0,$$

za koju mora vrijediti $\rho(C) < 1$ da bi red potencija konvergirao.

Dakle, kada bi stavili $A = I - C$, onda za $\rho(A-I) < 1$ možemo akproksimirati $A^{\frac{1}{2}}$. Kada $\rho(A-I)$ prekorači 1, možemo pisati $A = s(I-C)$ i probati naći $s$ takav da $\rho(C) < 1$.

Neka $A$ ima realne pozitivne svojstvene vrijednosti, $0 < \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1$. Slijedi da su $\mu_i = 1 - \dfrac{\lambda_i}{s}$, $i = 1, \ldots, n$ svojstvene vrijednosti od $C$. Vrijedi

$$\rho(C) = \max_i |\mu_i| = \max\{|1 - \frac{\lambda_1}{s}|, |1 - \frac{\lambda_n}{s}|\}$$

$$a)\ |1 - \frac{\lambda_1}{s}| \geq |1 - \frac{\lambda_n}{s}| \rightarrow min$$

$$b)\ |1 - \frac{\lambda_n}{s}| > |1 - \frac{\lambda_1}{s}| \rightarrow min.$$

Želimo spektar rasporediti što ravnomjernije oko ishodišta jer će onda $\rho(C)$ biti manji. Slijedi

$$1 - \frac{\lambda_1}{s} = -(1 - \frac{\lambda_n}{s}) \Longleftrightarrow s = \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}.$$

Nadalje, uvrstimo $s$ u svojstvene vrijednosti $\mu_1$ i $\mu_n$.

$$\mu_1 = 1 - \frac{\lambda_1}{s} = \frac{s-\lambda_1}{s} = \frac{\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2} - \lambda_1}{\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}} = \frac{\lambda_1+\lambda_n-2\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_n} = \frac{\lambda_n-\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_n},$$

$$\mu_n = 1 - \frac{\lambda_n}{s} = \frac{s-\lambda_n}{s} = \frac{\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2} - \lambda_n}{\frac{\lambda_1+\lambda_n}{2}} = \frac{\lambda_1+\lambda_n-2\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n} = \frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}.$$

Jer je $\rho(C) \geq 0$ uzimamo

$$\rho(C) = \frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}.$$

Sada možemo smatrati da je $\rho(C) < 1$.

Iterativna metoda može biti izvedena tako da definiramo $I - P := (I - C)^{\frac{1}{2}}$. Kvadrirajući tu jednakost dobijemo $I-C = (I-P)^2 = I^2-2IP+P^2 = I - 2P + P^2$, iz čega slijedi

$$-C = P^2 - 2P.$$

Svojstva matrice $P$:

1) $P = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j C^j$.

2) Svojstvene vrijednosti od $P$ su dane s $\lambda_i(P) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_i(C)^j$.

3) $\rho(P) \leq \rho(C) < 1$ jer vrijedi

$$\rho(P) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \rho(C)^j = 1 - (1-\rho(C))^{\frac{1}{2}} \leq \rho(C) < 1.$$

4) $||P|| \leq ||C|| < 1$.

5) Za sve $I - Q$ koji su svi drugi korijeni od $I - C$, glavni drugi korijen je $I - Q$ za kojeg vrijedi $\rho(Q) < 1$ (jer će za $\rho(Q) < 1$ spektar od $I - Q$ ležati u otvorenoj desnoj poluravnini).

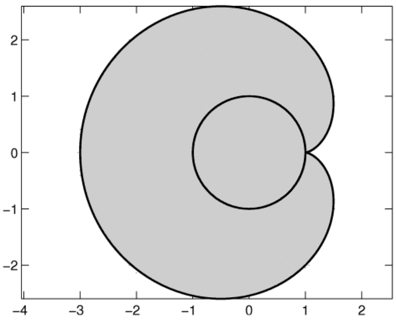
**Definicija 5.2** Binomnu iteraciju definiramo kao

$$P_{k+1} = \frac{1}{2}(C + P_k^2), \; P_0 = 0.$$

Ako svojstvene vrijednosti matrice $C$ leže u kardiodi

$$D = \{2z - z^2 : z \in \mathbf{C}, \; |z| < 1\},$$

onda $I - P := (I - C)^{\frac{1}{2}}$ postoji i u binomnoj iteraciji iz def 5.2 $P_k$ teži prema $P$ linearno. Iako binomna ekspanzija neće konvergirati za $\rho(C)$ veći od 1, binomna iteracija će svejedno konvergirati izvan tog radijusa dok god su svojstvene vrijednosti unutar kardiode.




Slika 5.1: Kardioda i jedinični krug

## 5.2 $M$-matrice i $H$-matrice

$M$-matrice su podskup realnih, kvadratnih matrica sa nepozitivnim vandijagonalnim elementima.

**Definicija 5.3** $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ je regularna $M$-matrica ako vrijedi $A = sI - B$, $B \geq 0$, $s > \rho(B)$.

U definiciji $s$ može biti proizvoljan, tako da forma nije jedinstvena. Primjer jednog $s$ vidimo u slijedećem primjeru.

**Primjer 5.4** Možemo uzeti $s = \max_i a_{ii}$:

Neka je $A = sI - B$ gdje je $B \geq 0$ i $s > \rho(B)$. Zbog $0 \leq diag(B) = diag(s - a_{ii})$, mora vrijediti $s \geq \max_i a_{ii}$.

Neka je $\alpha = \max_i a_{ii}$. Tada je $A = \alpha I - C$, gdje je $C = B + (\alpha - s)I$. Sada, $C \geq 0$ jer s jedne strane vrijedi $c_{ij} = b_{ij} \geq 0$, za $i \neq j$ i s druge strane $c_{ii} = \alpha - a_{ii} \geq 0$. Jer su $B \geq 0$ i $C \geq 0$, $\rho(B)$ je svojstvena vrijednost od $B$ i $\rho(C)$ je svojstvena vrijednost od $C$. Dakle, $\rho(C) = \rho(B) + \alpha - s < \alpha$. Stoga možemo uzeti $s = \alpha = \max_i a_{ii}$.

**Teorem 5.5** Za bilo koju regularnu $M$-matricu, glavni drugi korijen postoji, $M$-matrica je, i jedini je drugi korijen koji je $M$-matrica.

*Dokaz*

Neka su $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ svojstvene vrijednosti od $A$, a $\mu_i = \gamma_i + i\delta_i$ od $B$. Vrijedi $\lambda_i = s - \mu_i$, tj. $\alpha_i + i\beta_i = s - \gamma_i - i\delta_i$ iz čega slijedi $\alpha_i = s - \gamma_i$, a zbog $s > \rho(B) \geq |\mu_i| = \sqrt{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \geq \gamma_i$ slijedi da je $\alpha_i = s - \gamma_i > 0$. Dakle, definicija 5.3 osigurava da sve svojstvene vrijednosti od $A$ imaju pozitivan realan dio pa po teoremu 2.12 postoji glavni drugi korijen $M$-matrice čiji spektar leži u otvorenoj desnoj poluravnini. Za bilo koju regularnu $M$-matricu $A$ možemo pisati

$$A = s(I - C),\ C = s^{-1}B \geq 0,\ \rho(C) < 1$$

pa za drugi korijen $A^{\frac{1}{2}} = (s(I-C))^{\frac{1}{2}} = s^{\frac{1}{2}}(I-C)^{\frac{1}{2}}$ možemo koristiti binomnu ekspanziju iz definicije 5.1. Također, vrijedi $P \geq 0$ jer je $C \geq 0$ i $\rho(P) \leq \rho(C) < 1$ iz svojstva 3) matrice $P$, pa slijedi da je $I - P$ $M$-matrica pa i stoga $A^{\frac{1}{2}}$. Jedinstvenost slijedi iz toga da bilo koja $M$-matrica ima spektar u otvorenoj desnoj poluravnini, a jer po teoremu 2.12 postoji točno jedan drugi korijen s tim svojstvom, slijedi da je jedinstven.

$\square$

Klasa matrica koja uključuje i $M$-matrice je definirana kao $M(A) = (m_{ij})$, gdje je

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j \\ -|a_{ij}|, & i \neq j \end{cases}.$$

**Definicija 5.6** $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ je regularna $H$-matrica ako je $M(A)$ regularna $M$-matrica.

**Teorem 5.7** Za bilo koju regularnu $H$-matricu $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ sa pozitivnim dijagonalnim elementima, glavni drugi korijen $A^{\frac{1}{2}}$ postoji i jedinstven je drugi korijen koji je $H$-matrica.

*Dokaz*

Jer je $M(A)$ $M$-matrica, vrijedi $M(A) = sI - B$, $B \geq 0$, $s > \rho(B)$. Jedan od odabira $s$ za taj zapis može biti $s = \max_i a_{ii}$ (Primjer 5.4). Tada vrijedi $A = sI - \tilde{C}$, gdje je $|\tilde{C}| = B$ i $\rho(\tilde{C}) \leq \rho(|\tilde{C}|) = \rho(B) < s$.

Neka su $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$ svojstvene vrijednosti od $A$, a $\mu_i = \gamma_i + i\delta_i$ od $\tilde{C}$. Vrijedi $\lambda_i = s - \mu_i$, tj. $\alpha_i + i\beta_i = s - \gamma_i - i\delta_i$ iz čega slijedi $\alpha_i = s - \gamma_i$, a zbog $s > \rho(\tilde{C}) \geq |\mu_i| = \sqrt{\gamma_i^2 + \delta_i^2} \geq \gamma_i$ slijedi da je $\alpha_i = s - \gamma_i > 0$ pa slijedi da svojstvene vrijednosti od $A$ leže u otvorenoj desnoj poluravnini pa $A^{\frac{1}{2}}$ postoji i jedinstven je po teoremu 2.12.

Trebamo još pokazati da je $A^{\frac{1}{2}}$ $H$-matrica. Neka je sada $A = s(I - C)$, $C = \dfrac{\tilde{C}}{s}$, $\rho(C) < 1$ pa možemo primijeniti binomnu ekspanziju iz definicije 5.1. Imamo

$$A^{\frac{1}{2}} = s^{\frac{1}{2}}(I - C)^{\frac{1}{2}} = s^{\frac{1}{2}}(I - P)$$

gdje je $P = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j C^j$, $\alpha_j > 0$. i vrijedi pomoću svojstva 3) za $P$,

$$\rho(P) \leq \rho(|P|) \leq \rho(|C|) = s^{-1}\rho(|\tilde{C}|) < s^{-1}s = 1.$$

$M(A^{\frac{1}{2}}) = s^{\frac{1}{2}}(I - |P|)$, $\rho(|P|) < 1$ je regularna $M$-matrica, po teoremu 5.5, pa je $A^{\frac{1}{2}}$ $H$-matrica.

□

## 5.3 Hermitska pozitivno definitne matrice

Kod izvođenja verziija Newtonove iteracije, za $A$ koja je Hermitska i pozitivno definitna, prednost može biti ta da su sve iteracije Hermitske pozitivno definitne.

**Napomena 5.8** Spomenimo još dvije faktorizacije koje će nam trebati u ovom odjeljku:

1) Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ Hermitska i pozitivno definitna matrica. Faktorizaciju oblika

$$A = LL^*,$$

ili, ekvivalentno

$$A = RR^*,$$

gdje je $L$ donjetrokutasta matrica, a $R$ gornjetrokutasta s pozitivnim dijagonalnim elementima zovemo faktorizacija Choleskog matrice $A$.

2)Neka je $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ matrica. Faktorizaciju oblika

$$A = UP,$$

gdje je $U$ unitarna matrica, a $P$ pozitivno semidefinitna Hermitska matrica zovemo polarna faktorizacija matrice $A$.

Naša najbolja iteracija je bazirana na činjenici da Hermitsko pozitivno definitni drugi korijen $H$ od $A$ je Hermitski polarni faktor od Cholesky faktora od $A$ tj. ako je $A = R^*R$, gdje je $R = UH$ polarna dekompozicija, onda je

$$A = HU^*UH = H^2$$

.

Za danu Hermitsku pozitivno definitnu matricu $A \in \mathbf{C}^{n\times n}$ algoritam računa $H = A^{\frac{1}{2}}$.

1. $A = R^*R$, faktorizacija Choleskog.
2. Izračunaj Hermitski polarni faktor $H$ od $R$.

# Literatura


[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] N. Bosner, *Problem svojstvenih vrijednosti*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nmfmpredavanja/nmfm_svojstvene_vrijednosti.pdf

[3] T. Bosner, *Rješavanje nelinearnih sustava*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/nmf/nelin_sustavi.pdf

[4] Z. Drmač, *Numerička Matematika*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~drmac/na001.pdf (studeni 2010.)

[5] N. J. Higham, *Functions of Matrices: Theory and Computation*, SIAM, Philadelphia, 2008.

[6] S. Singer, *Numerička matematika*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_mat/

[7] M. Stojić, *Jordanova forma*, dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/vekt/VP-2-Jordanova-forma.pdf (studeni 2014.)

# Sažetak

Općenitu matričnu funkciju sam definirala pomoću Jordanove forme matrice. Ukoliko je definirana na spektru neke matrice, matrična funkcija ima vrlo dobra svojstva koja su korisna dok radimo sa matričnom funkcijom drugi korijen. To su npr. komutacija matrične funkcije sa matricom, blok trokutasta matrica se preslikava u blok trokutastu, blok dijagonalna u blok dijagonalnu, svojstvene vrijednosti u svojstvene vrijednosti funkcije itd.

Svako rješenje od

$$X^2 = A$$

zovemo drugim korijenom od $A$. Ako je matrica $A$ regularna ili singularna sa svojstvenom vrijednosti nula koja ima istu algebarsku i geometrijsku kratnost, funkcija drugi korijen je definirana na spektru od $A$. Ako je matrica singularna sa svojstvenom vrijednosti nula koja nema istu geometrijsku i algebarsku kratnost, drugi korijeni ne moraju postojati.

Drugi korijen regularne matrice se dijeli u dvije klase. Prva sadrži konačno mnogo primarnih drugih korijena, dok druga može biti prazna ili sadrži beskonačno mnogo drugih korijena koji dijele isti spektar.

Glavni drugi korijen se definira za matrice koje nemaju svojstvenih vrijednosti na $R^-$. Taj drugi korijen je jedinstven i njegove svojstvene vrijednosti leže u otvorenoj desnoj poluravnini.

Za Schurovu metodu je dan algoritam za računanje drugog korijena posebno za regularnu matricu gdje je složenost $O(n^3)$, te posebno za singularnu sa svojstvenom vrijednosti nula koja ima istu algebarsku i geometrijsku kratnost gdje se računanje drugog korijena svodi na rješavanje linearnog sustava.

Za Newtonovu metodu sam koristila i neka svojstva matrične funkcije *sign*. Newtonova metoda je također opisana za regularnu matricu gdje konvergira kvadratno prema

$$A^{\frac{1}{2}} sign(A^{-\frac{1}{2}} X_0),$$

dok sam za singularnu matricu dokazala da postoji drugi korijen uz određene uvjete na matricu.

Iteracije koje sam opisala imaju različita svojstva stabilnosti. Newtonova iteracija je u principu nestabilna u $A^{\frac{1}{2}}$ osim ako svojstvene vrijednosti od $A$ nisu vrlo blizu grupirane. Ostale izvedene verzije Newtonove iteracije su sve stabilne u $A^{\frac{1}{2}}$.

Nadalje sam prikazala nekoliko posebnih matrica koje imaju dobra svojstva za izračun matričnog drugog korijena. Binomna ekspanzija koju sam prikazala sa $(I - C)^{\frac{1}{2}}$ neće konvergirati za $\rho(C) > 1$, no binomna iteracija će konvergirati i izvan tog radijusa dok god su joj svojstvene vrijednosti unutar kardiode.

Uz binomnu iteraciju objasnila sam što su M-matrice i H-matrice te pokazala da za te regularne matrice postoji jedinstveni glavni drugi korijen koji je istog svojstva kao i dana matrica.

Na kraju vidimo i kako je Hermitskoj pozitivno definitnoj matrici jednostavno računati matrični drugi korijen pomoću faktorizacije Choleskog i polarne dekompozicije.

# Summary

General matrix function is defined via Jordan canonical form. If function is defined on the spectrum of some matrix, matrix function has some very good properties which are useful for matrix square root like commutation of matrix function and matrix, block triangular matrix is mapped in block triangular matrix, block diagonal matrix is mapped in block diagonal matrix, eigenvalues of matrix are mapped in eigenvalues of function of that matrix and so on.

Every solution of equation

$$X^2 = A$$

is called a square root of $A$. If matrix $A$ is nonsingular or singular with a semisimple zero eigenvalue, the matrix square root is defined on the spectrum of $A$. In other cases matrix square root doesn't have to exist at all.

The square roots of a nonsingular matrix fall into two classes. The first class comprises finitely many primary square roots and second class may be empty or it comprises a finite number of square roots which are sharing the same spectrum.

The principal square root is defined for matrices which have no eigenvalues on $R^-$. It is a unique square root all of whose eigenvalues lie in the open right half-plane.

I gave the algorithms for computing the square root via a Schur decomposition especially when a matrix is nonsingular where complexity is $O(n^3)$, and especially when a matrix is singular with a semisimple zero eigenvalue where computing the square root can be solved by solving a linear system.

Through Newton's method I used some properties of matrix sign function. Newton's method is also described for a nonsingular matrix where iteration converges quadratically to

$$A^{\frac{1}{2}} sign(A^{-\frac{1}{2}} X_0),$$

while for a singular matrix is proven that the square root exists if matrix is under some conditions.

The iterations which I described have different stability properties. The Newton iteration is unstable at $A^{\frac{1}{2}}$ unless the eigenvalues of $A$ are very closely clustered. The other versions of Newton's iteration are all stable at $A^{\frac{1}{2}}$.

Further I showed few special matrices which all have good properties to compute matrix square root. Altough the binomial expansion which I described with $(I-C)^{\frac{1}{2}}$ does not converge for $\rho(C) > 1$, the iteration nevertheless continues to converge when the eigenvalues of $C$ lie outside the unit disk but within the cardioid.

Except the binomial iteration, I explained what are M-matricces and H-matrices and I showed that for that kind of regular matrices the principal square root exists and it is also M or H-matrix.

At the end we can see also how Hermitian positive definite matrix is good for computing the square root via Cholesky factorization and polar decomposition.

Životopis

## OSOBNE INFORMACIJE


# Stopić Paula

Šulekova 15, 10000 Zagreb (Hrvatska)

paulastopic.68@hotmail.com


## OBRAZOVANJE I OSPOSOBLJAVANJE

rujan 2014–danas

Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb (Hrvatska)

Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika

rujan 2011–srpanj 2014

### univ. bacc. math.

Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb (Hrvatska)

Preddiplomski sveučilišni studij Matematika

rujan 2007–srpanj 2011

XV. gimnazija, Zagreb (Hrvatska)

Informatičko-matematički smjer

## OSOBNE VJEŠTINE

Materinski jezik: hrvatski

Ostali jezici

| | RAZUMIJEVANJE | | GOVOR | | PISANJE |
|---|---|---|---|---|---|
| | Slušanje | Čitanje | Govorna interakcija | Govorna produkcija | |
| engleski | C1 | B2 | B1 | B2 | C1 |

Stupnjevi: A1 i A2: Početnik - B1 i B2: Samostalni korisnik - C1 i C2: Iskusni korisnik
Zajednički europski referentni okvir za jezike

Digitalna kompetencija

Dobro poznavanje rada na računalu.

Programiranje u C-u, Matlab-u, R-u.

Rad na bazama podataka u MySQL-u.

Ostale vještine

Profesionalno bavljenje rukometom od 2003.

Vozačka dozvola

B


© Europska unija, 2002-2015 | http://europass.cedefop.europa.eu