



関西学院大学リポジトリ

Kwansai Gakuin University Repository

反応拡散移流系に対する多次元の分岐解析

著者	青木 崇明
学位名	博士（理学）
学位授与機関	関西学院大学
学位授与番号	34504甲第662号
URL	http://hdl.handle.net/10236/00027323

反応拡散移流系に対する多余次元の分岐解析

2017年12月

青木 崇明

目次

1	序論	3
2	分岐理論に関する基本事項	9
2.1	関数空間	9
2.2	線形写像と表現行列	12
2.3	分岐問題	13
2.4	Lyapunov-Schmidt 還元	14
2.5	Crandall-Rabinowitz の分岐定理	17
2.6	Ambrosetti-Prodi の分岐定理	23
3	吸着質誘導相転移系に対する分岐解析	27
3.1	吸着質誘導相転移系	27
3.2	非自明解の存在証明	29
3.3	まとめ	43
4	走化性・増殖系に対する分岐解析	45
4.1	走化性・増殖系	46
4.2	走化性・増殖系の分岐方程式	47
4.3	余次元 2 の非自明解の分岐	50
4.4	余次元 3 の非自明解の分岐	60
4.5	まとめ	70
5	総括	71
	謝辞	75
	参考文献	77

第 1 章 序論

何気なく過ごしている日々の生活の中で、少し意識をすると様々なパターンが存在していることにふと気付くことがある。例えば、水面の波紋模様や鯖の体表に見られる縞や迷路のような模様が挙げられる。パターン形成のメカニズムには複雑なものがあり、様々な模様は複数の効果の相互作用によって起こっている。

生物のパターン形成の効果の一つとして「生物が化学物質に引き寄せられて運動する」というものが知られており、しばしば「走化性」と呼ばれる。一つの例として、大腸菌のコロニー形成が挙げられる。大腸菌は化学物質を分泌しており、餌が少なくなると化学物質の濃度が高い所に一定の間隔を空けて集まることで空間パターンを形成する。一方で、吸着質のパターン形成の効果の一つとして「物体表面のオーダパラメータに依存して移動する」ものが知られている。表面化学反応の例として、白金表面に吸着した一酸化炭素分子のパターン形成があげられる。一酸化炭素分子が吸着しにくい表面構造から吸着しやすい表面構造へと移動することで、吸着質の濃淡により空間パターンが形成される。今日では、このようなパターンの形成現象に対して、数学的な観点からそのメカニズムを捉えようとする研究がなされている。

Budrene と Berg [3, 4] は走化性をもつ大腸菌 (*Escherichia coli*) が巨視的で規則性をもった特徴的な空間パターンを形成することを発見した。その現象は拡散、走化性及び増殖などの相互作用により引き起こされる。三村と辻川 [16] はその分布パターンの形成過程のメカニズムを明らかにするために数理モデルとして走化性・増殖系を提案した。三村と辻川 [16] は特異摂動法により走化性・増殖系の界面方程式を導き出し、大腸菌の集合が 120 度回転対称の三つ叉に枝分かれするメカニズムや網目状に広がるパターン形成について研究した。この研究において、走化性パラメータの強度に依存して回転対称解が不安定化することが明らかになった。具体的には、走化性パラメータの強度が弱い場合には対称解は安定であるが、一方で強度が十分強い場合には網目状に広がる力を要因とした先端

分裂不安定性によって対称性の崩壊が引き起こされる。

走化性・増殖系のような巨視的な走化性モデルでは，走化性の効果により各生物個体が大量に集中するため，走化性バクテリアに対応した濃度関数は爆発してしまう．実際，粘菌の集中現象を表した Keller-Segel の走化性系 [10] は集中現象を抑制する効果をもたないため，走化性に起因して解が爆発する数理モデルとして知られている [6, 8, 23] ．

一方，大崎等 [17] は，走化性・増殖系に対して，空間 2 次元の場合における時間大域解とそれらにより引き起こされる力学系に対するグローバルアトラクター，および指数アトラクターの存在を証明した．これはロジスティック増殖による 2 次減衰の作用が解軌道を有界に留め，走化性に起因した集中現象を抑制することを示している．Winkler [22] は，空間一般次元の系に対して，2 次減衰項の係数 μ を十分大きくとることで走化性・増殖系の解の時間大域存在を証明した．ここで指数アトラクターとは，1) グローバルアトラクターを含むコンパクト集合で有限なフラクタル次元を有し，2) 正不変集合であり，3) すべての軌道を指数的に引き寄せるといふ 3 つの性質をもつ力学系における集合である．

無限次元力学系の理論において，任意の有界集合を出発した全ての解が有限時刻である集合に含まれるとき，この集合を吸収集合と呼ぶ．吸収集合はそれ自身から出発した解も有限時刻でまた包含してしまうことから，正不変集合を定義することができる．そしてこの正不変集合のオメガリミットセットこそがグローバルアトラクターである（例えば，[20]）．解のパターン形成の観点から改めてグローバルアトラクターのことを考えると，アトラクター内部に周期軌道が存在せず，さらに不安定モードも存在しない場合，グローバルアトラクターは単純で，定数定常解の 1 点からなるシングルトンとなる．すなわち，このような場合には平衡状態の近傍においてパターン形成は起こらない．解が有界に留まる状況下で不安定モードが発生してこそパターン形成が起こりうるといえる．反応拡散系に見られる拡散誘導不安定化においては，各パラメータ，特に拡散係数の大きな比を分岐パラメータ，領域サイズをコントロールパラメータとして，限られた不安定モードが不安定化を引き起こす．その際，形を表すのがチューリングパターンである．一方，我々が考える走化性・増殖系において，自明解周りの線形化解析を行ってみると，不安定モードが走化性係数を分岐パラメータとし，領域サイズをコントロールパラメータとして不安定化が

起きる。これは時に、走化性不安定化と引用される。不安定化するモードがわかれば、分岐解の候補がわかる。また、その候補が安定であれば、対応したモード（波長）をもった空間パターンが発生してくる。さらに、力学系に指数アトラクターが存在するとき、系の構造的な安定性が示される。このことは、パターン形成に代表される自己組織化におけるロバスト性との関連を示唆する。実際、相田等 [1] は走化性・増殖系に対する数値シミュレーションにおいて、走化性パラメータを大きくしていくことで、空間一様な解が不安定化を起し、ハニカムやストライプ、そしてカオティックな振る舞いをする解が現れることを示している。

一方、倉田等 [11] は、空間 1 次元の場合において、狙ったモードが発生することを線形化解析と数値シミュレーションによって示している。さらには、時空間パターンの発生がホップ分岐によって起こりうることも分岐解析ソフト AUTO によって数値的に示し、それに対応する時間発展解の存在も数値計算によって確かめている。さらに、Painter と Hillen [18] は、分岐パラメータが大きい領域では、カオティックな振る舞いをする周期解が存在することを示した。空間 2 次元においては、久藤等 [12] が、1 方向のみのフーリエモードを固有関数とする分岐解、すなわちストライプパターンや、2 方向のフーリエモードを固有関数とする分岐解、すなわち四角形パターンが存在しうることを Crandall と Rabinowitz [5] による古典的分岐理論を用いて証明している。これらは 1 つの固有関数によって表現される解であるため、余次元が 1 の分岐と呼ばれる。久藤等 [12] は、論文の中で正六角形パターン解の存在も示しているが、これは 2 つの固有関数の複合モードであり、余次元が 2 の分岐解である。このとき用いられた手法は、余次元が 1 の分岐と同様に、Crandall-Rabinowitz の分岐定理であるが、この定理には十分条件として余次元が 1 であることが課されている。久藤等 [12] は、この定理を適用するため、舞台となる関数空間を複合モードが張る 1 次元の固有空間に制限する工夫を行うことで分岐解の存在を示した。この 1 次元の固有空間は 120 度回転対称性をもった閉部分空間である。久藤等 [12] の論文においては、空間 2 次元の場合においても、周期解の分岐現象が起こることが数値的に証明されている。

一方で、Jakubith 等 [9] が明らかにした白金を触媒とした一酸化炭素の酸化反応におけ

るパターン形成現象に対して，Hildebrand 等 [7] は白金表面の構造変化と表面構造に依存した吸着一酸化炭素分子の移動効果を含んだ吸着質誘導相転移系を導入した．辻川等 [21] は，吸着質誘導相転移系に対して，空間 2 次元の場合における時間大域解とそれらにより引き起こされる力学系に対するグローバルアトラクター，および指数アトラクターの存在を証明した．また，久藤と辻川 [13] はこの数理モデルに対して Crandall-Rabinowitz の分岐定理の適用を試みた．久藤と辻川 [13] は，空間 2 次元において，1 方向のみのフーリエモードを固有関数とする分岐解，及び 2 方向のフーリエモードを固有関数とする分岐解の存在を証明した．さらに，舞台となる関数空間を複合モードが張る 1 次元の固有空間に制限することで正六角形パターン解の存在も示した．

本研究では，空間 2 次元の走化性・増殖系の定常パターン解の分岐問題について取り組む．特に，余次元が 2 以上の分岐において，固有空間を 1 次元に制限することなく分岐解の存在を示すことを目指す．方法として，本研究では Ambrosetti と Prodi [2] による，Lyapunov-Schmidt 還元 [14, 15, 19] に基づいた分岐定理を用いる．Lyapunov-Schmidt 還元については次章でその概略を述べる．Ambrosetti と Prodi の手法は，余次元が 1 という制限をもたないため，古典的分岐定理より優れていると考えられる．なぜならば，久藤等 [12] の研究のような，複数の固有関数の複合モードの対称性を事前に知っておく必要がないからである．実際，Ambrosetti-Prodi の分岐定理により，余次元が 2 の正六角形パターン解の存在を，舞台となる関数空間をそのまま示すことができる．さらに，久藤等 [12] が示していなかった余次元 3 の分岐に対応したパターン解の存在証明を目指す．そして，Ambrosetti-Prodi の分岐定理で課される条件は，Crandall-Rabinowitz の分岐定理と比較して単純なものであるため，定常パターンの分岐問題に取り組む上で，より有効な定理であると考えられる．吸着質誘導相転移系と比較して走化性・増殖系はより単純な項で構成されているため，本研究では走化性・増殖系を研究の主な対象として選択した．

余次元が 2 以上の分岐は，久藤等 [12] のように固有空間の次元を 1 次元に制限する方法や対称性の崩壊現象に着目した同変分岐定理などがあるが，それらは初めから対称性に注目して解に狙いをつけてからその存在を示す方法である．一方の Ambrosetti-Prodi のスキームでは，アルゴリズムが単純な上，そういった対称性に事前に気づいていなくて

も，十分条件を調べていくことで，固有関数の複合モードを抽出できるというメリットがある．これらのメリットは，例えばコンピュータプログラムなどにアルゴリズムを搭載する際に，役立つと考えられる．

以下で，本論文の構成について簡単に説明する．第 2 章では，後の章への準備として，関数空間及び，分岐解析の基本事項について概説する．また，線形写像と表現行列に関する定理についても概説する．第 3 章では，吸着質誘導相転移系における非自明解の存在について記述する．3.1 節では吸着質誘導相転移系を導入する．3.2 節では，Crandall-Rabinowitz の分岐定理による，余次元が 1 の分岐解の存在証明について記述する．特に，定数定常解が唯一つであるための Proposition を新たに与えている．第 4 章では，走化性・増殖系における非自明解の存在について記述する．4.1 節では走化性・増殖系の導入を行う．4.2 節では走化性・増殖系の分岐方程式を得るため，境界値定常問題に対して分岐問題を考える．また，分岐パラメータが第一分岐点となるための必要十分条件を与える．4.3 節では余次元が 2 の問題に対する Ambrosetti-Prodi の定理の応用とその結果について記述する．4.4 節では余次元が 3 の問題に対する Ambrosetti-Prodi の定理の応用とその結果について記述する．第 5 章では，本論文の内容をまとめ，今後の研究課題について考える．

第 2 章 分岐理論に関する基本事項

本章では、続く章で用いる関数空間及び、分岐解析の基本事項について概説する。また、線形写像と表現行列に関する定理についても概説する。2.1 節では、本論文で扱う関数空間について概説する。2.2 節では、第 4 章で用いる線形写像と表現行列の関係について概説する。2.3 節では、分岐理論で扱う非線形方程式及び分岐点に関する基本事項を記述する。2.4 節では、Lyapunov [14, 15] と Schmidt [19] による無限次元方程式の還元方法について概説する。後に詳しく述べるが、Lemma 2.3 より λ^* が分岐点であるためには線形化作用素が上への 1 対 1 写像であってはならない。このような条件の下では、陰関数の定理より、定数定常解から分岐するような非自明解を一意的に決定することができない。Lyapunov-Schmidt 還元はこの問題に対応するために導入された手法である。2.5 節では、Crandall と Rabinowitz [5] により導入された、 $\text{codim } R = 1$ という仮定の下で議論される、古典的分岐定理及びその証明について概説する。2.6 節では、余次元が 2 以上の分岐に対応した分岐方程式とそれに対する分岐定理について概説する。これら分岐方程式と分岐定理は、Lyapunov-Schmidt 還元に基づいて、Ambrosetti と Prodi[2] によって導入されたものである。

2.1 関数空間

線形空間 X が \mathbb{K} 上の線形空間であるとは、集合 X の任意の要素 u, v に対して u と v の和 $u + v \in X$ 、及び X の任意の要素 u と任意の複素数（または実数） α に対して、 α と u との積 $\alpha u \in X$ が定義されていて、次の条件 (i) から (viii) が成り立つことである。

- (i) $(u + v) + w = u + (v + w)$,
- (ii) $u + v = v + u$,
- (iii) $\tilde{u} \in X$ が存在して、任意の $u \in X$ に対して $u + \tilde{u} = u$ が成り立つ,

2.1 節 関数空間

- (iv) 任意の $u \in X$ に対して, $u' \in X$ が存在して $u + u' = \tilde{u}$ が成り立つ,
- (v) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$,
- (vi) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$,
- (vii) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$,
- (viii) $1u = u$.

ここで, (iii) を満たす \tilde{u} を $\tilde{u} = 0$ と表す.

ノルム空間 X を \mathbb{K} 上の線形空間とする. X で定義される実数値をとる関数 $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ が X のノルムであるとは, 任意の $u, v \in X$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して, 次の条件 (i) から (iv) が成り立つことである.

- (i) $\|u\| \geq 0$,
- (ii) $\|u\| = 0 \iff u = 0$,
- (iii) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$,
- (iv) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

X が線形空間であり, ノルムが定義されているとき, X はノルム空間であるという.

点列の収束 X をノルム空間とする. X の点列 $\{u_n\} (n = 1, 2, \dots)$ が $u \in X$ に収束するとは,

$$\|u_n - u\| \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つときである. このとき, u を $\{u_n(x)\}$ の極限といい,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \quad \text{もしくは,} \quad u_n \rightarrow u$$

と表す.

Banach 空間 ノルム空間 X の点列 $\{x_n\} (n = 1, 2, \dots)$ が Cauchy 列をなすとは,

$$x_n - x_m \longrightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

が成り立つこと，すなわち，

$$\|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

が成り立つことである．また，ノルム空間の任意の収束列は Cauchy 列をなす．

任意の Cauchy 列が収束列であるような空間は完備であるといわれ，完備なノルム空間のことを Banach 空間と呼ぶ．

内積空間 線形空間 X の任意の 2 つの要素 u, v に複素数 (u, v) が対応していて，任意の $u, v, w \in X$ と任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，次の条件 (i) から (v) が満たされているとき， X に内積が定義されているといい， (u, v) を u, v の内積という．

- (i) $(u, v) = \overline{(v, u)}$,
- (ii) $(\alpha u, v) = \alpha(u, v)$,
- (iii) $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$,
- (iv) $(u, u) \geq 0$,
- (v) $(u, u) = 0 \iff u = 0$.

線形空間 X に内積が定義されているとき， X は内積空間であるという．

Hilbert 空間 内積空間 X について，その内積から導かれたノルムに関して完備であるとき， X は Hilbert 空間であるという．すなわち，完備な内積空間が Hilbert 空間である．Hilbert 空間の係数体 \mathbb{K} が $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であるか $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ であるかに応じて， X は実 Hilbert 空間，あるいは複素 Hilbert 空間と呼ばれる．

関数空間 $L^p(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ を境界 $\partial\Omega$ をもつ開集合とする． $1 \leq p < \infty$ のとき p 乗可積分な Ω 上の Lebesgue 可測関数全体，そして $p = \infty$ のとき本質的に有界な関数全体の集合として定義する．この空間は

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess.sup}_{x \in \Omega} |u(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

2.2 節 線形写像と表現行列

をノルムとして Banach 空間となる．特に， $p = 2$ のとき $L^2(\Omega)$ は

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)} dx, \quad u, v \in L^2(\Omega)$$

を内積として備えた Hilbert 空間となる．

関数空間 $H^l(\Omega)$ l を自然数とする．このとき，関数 u が $H^l(\Omega)$ に属するとは， u の l 階以下のすべての一般化された偏導関数 $D^\alpha u$ ($|\alpha| \leq l$) が，すべて $L^2(\Omega)$ に属することである．すなわち，

$$H^l(\Omega) = \{u = u(x) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq l\}.$$

関数空間 $H^l(\Omega)$ は

$$\|u\|_{H^l(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

をノルムとして，Banach 空間 (Hilbert 空間) である．

2.2 線形写像と表現行列

V と W をそれぞれ有限次元な線形空間とする．線形空間 V から線形空間 W への線形写像 f が全単射であるとき， f を V から W への同型写像という．そして， $f : V \rightarrow W$ が同型写像であるとき， f の逆写像 $f^{-1} : W \rightarrow V$ が存在する．このとき， f^{-1} は全単射であるため， f^{-1} は線形写像である．

同型写像 $f : V \rightarrow W$ が存在するとき， V は W に同型であるという．線形空間 V, W が同型るとき， V と W は線形空間として同じ構造をもつと考えられる．ここで，線形空間 V, W において， V と W が同型であるための必要条件は $\dim V = \dim W$ となることである．以下に，第 4 章で用いる，同型写像 $f : V \rightarrow W$ と f の表現行列との関係に関する定理を記述しておく．

Theorem 2.1 ([24], 定理 6.11.4.). V, W を線形空間， $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m$ をそれぞれ V, W の基底とする．ここで， $n = \dim V$ と $m = \dim W$ ，線形写像 $f : V \rightarrow W$

に対して，上記基底に関する f の表現行列を A とするとき，次は同値である．

- (1) f は同型写像
- (2) $n = m$ かつ A は正則行列

そして，同型写像 f について f^{-1} の表現行列は A^{-1} である．

2.3 分岐問題

分岐理論とは，実数パラメータ λ を伴う Banach 空間 X 上の非線形方程式

$$F(\lambda, u) = 0, (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X \quad (2.1)$$

について， λ を変化させたときに非自明解が自明解から分岐するときの λ の値を調べるものである．

まず 2.3 節，2.4 節及び 2.5 節で扱う問題として以下のものを与える．写像 $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ は C^2 級であり，(2.1) は

$$F(\lambda, 0) = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

を満たすとする．

このとき，分岐点の定義は次の通りである．

Definition 2.2 (分岐点). 方程式 (2.1) に対して， $\lambda^* \in \mathbb{R}$ が自明解 $u = 0$ からの分岐点であるとは，

$$\begin{aligned} &u_n \neq 0 \text{ かつ } F(\lambda_n, u_n) = 0, \\ &\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n, u_n) = (\lambda^*, 0) \text{ in } \mathbb{R} \times X \end{aligned}$$

を満たすような点列の集合 $\{(\lambda_n, u_n)\} \subset \mathbb{R} \times X$ が存在することをいう．

また，分岐点であるための必要条件は次のように与えられる．

Lemma 2.3. 方程式 (2.1) に対して， $\lambda^* \in \mathbb{R}$ が分岐点ならば， $F_u(\lambda^*, 0) : X \rightarrow Y$ は上への 1 対 1 写像ではない．すなわち， $\text{Ker } F_u(\lambda^*, 0) \neq \{0\}$ である．

Proof. $F_u(\lambda^*, 0)$ を上への 1 対 1 写像であると仮定する．このとき， $F(\lambda^*, 0) = 0$ を満たしているため陰関数の定理が適用でき， $(\lambda^*, 0)$ の近傍 $\Theta \times V$ において

$$F(\lambda, u) = 0, (\lambda, u) \in \Theta \times V$$

を満たすような $\tilde{u} = u(\lambda)$ が存在する．ただし， \tilde{u} は C^1 級の関数である．しかしながら，(2.2) を満たすため， $\lambda \in \Theta$ において $\tilde{u} = 0$ と決定される．したがって，(2.1) は $(\lambda^*, 0)$ の近傍で自明解しかもたないため， λ^* は分岐点ではない． \square

2.4 Lyapunov-Schmidt 還元

$F_u(\lambda^*, 0)$, $\text{Ker } L$ および $\text{Range } L$ を次のように表しておく：

$$\begin{aligned} L &:= F_u(\lambda^*, 0), \\ V &:= \text{Ker } L, \\ R &:= \text{Range } L. \end{aligned} \tag{2.3}$$

そして，線形化作用 L に対して次のことを仮定する：

- (V) V は $V \neq \{0\}$ かつ有限次元 ($1 \leq \dim V < \infty$) である，
- (R) R は閉であり，有限余次元 ($1 \leq \text{codim } R < \infty$) である．

このとき， V と R の位相的補空間が存在する．ここで， V と R の位相的補空間をそれぞれ W , Z とすると， X と Y は次のように分解される：

$$\begin{aligned} X &= V \oplus W (V \cap W = \{0\}, W \text{ は閉部分空間}), \\ Y &= R \oplus Z (R \cap Z = \{0\}, Z \text{ は閉部分空間}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

このとき，任意の $u \in X$ は

$$u = v + w; \quad v \in V, w \in W \tag{2.5}$$

と一意的に表される．

これより，(2.1) を有限次元の問題へと還元していく． P と $Q (= I - P)$ をそれぞれ射影作用素とし，

$$P : Y \rightarrow Z, \quad Q : Y \rightarrow R$$

と与える．このとき，(2.5) を考慮すると，(2.1) を次のような方程式系へ分解できる：

$$\begin{cases} PF(\lambda, v + w) = 0, \\ QF(\lambda, v + w) = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

仮定 (R) と (2.4) より， $PF(\lambda, v + w)$ は有限次元空間 Z の成分を表し， $QF(\lambda, v + w)$ は無限次元空間 R の成分を表していることがわかる．以降の議論を考慮して，(2.1) の左辺を

$$F(\lambda, u) := Lu + \varphi(\lambda, u) \quad (2.7)$$

と表す．このとき，(2.5) と V の定義より，(2.7) は

$$F(\lambda, v + w) = Lw + \varphi(\lambda, v + w)$$

と与えられる．この $F(\lambda, v + w)$ について方程式系 (2.6) を考えていく． Lw は R の要素と考えられるため， $QLw = Lw$ と表せる．よって，(2.6) の第 2 式は

$$Lw + Q\varphi(\lambda, v + w) = 0 \quad (2.8)$$

と書き換えられる．方程式 (2.8) の左辺を

$$\Phi(\lambda, v, w) := Lw + Q\varphi(\lambda, v + w)$$

と表す．ただし， $\Phi \in C^2(\mathbb{R} \times V \times W, R)$ であり， $\Phi(\lambda, v, w)$ の $(\lambda, v, w) = (\lambda^*, 0, 0)$ における w 方向の偏微分は次の通りである：

$$\Phi_w(\lambda^*, 0, 0) : w \rightarrow Lw + Q\varphi_u(\lambda^*, 0)w.$$

ここで， $F(\lambda, u) = Lu + \varphi(\lambda, u)$ と定義していたため，両辺を $(\lambda, u) = (\lambda^*, 0)$ において u で微分すると，次の結果が得られる：

$$\varphi_u(\lambda^*, 0) = F_u(\lambda^*, 0) - L = L - L = 0.$$

よって， $\varphi_u(\lambda^*, 0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ は零写像である．すなわち，

$$\Phi_w(\lambda^*, 0, 0) : w \rightarrow Lw$$

であり, $\Phi_w(\lambda^*, 0, 0) = L|_W$ は同型写像である. 実際, $w \in W$ に対して $\Phi_w(\lambda^*, 0, 0)w = Lw = 0$ とすると, $w \in V$ となる. よって, $w \in V \cap W = \{0\}$ となるため, $w = 0$ でなくてはならない. つまり, $\Phi_w(\lambda^*, 0, 0)$ は単射である. また, 任意の $y \in R$ に対して, 適当な $u \in X$ が存在して, $y = \Phi_w(\lambda^*, 0, 0)u = Lu$ と表せると仮定する. このとき, $u = v + w$ を代入すると, $y = L(v + w) = Lw$ を満たすため, $\Phi_w(\lambda^*, 0, 0)$ は全射である. したがって, $\Phi_w(\lambda^*, 0, 0) = L|_W$ は同型写像であることが確かめられた. 陰関数の定理より, $(\lambda, v, w) = (\lambda^*, 0, 0)$ の近傍 $N(\Lambda \times \mathcal{V} \times \mathcal{W})$ において, 正数 δ および関数 $\gamma \in C^2(B_\delta(\lambda^*, 0), W)$ が存在して, $\Phi(\lambda, v, w) = 0$ の非自明解の集合は

$$\{(\lambda, v, w) \in \mathcal{N}; w = \gamma(\lambda, v), (\lambda, v) \in B_\delta(\lambda^*, 0)\} \quad (2.9)$$

と一意的に表される. ただし, $B_\delta(\lambda^*, 0) = \{(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V : \|v\|_X + |\lambda - \lambda^*| < \delta\}$ である. 関数 $\Phi(\lambda, v, w) = QF(\lambda, v + w)$ に対して, 陰関数 $w = \gamma(\lambda, v)$ は

$$QF(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = L\gamma(\lambda, v) + Q\varphi(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)), \quad \forall (\lambda, v) \in B_\delta(\lambda^*, 0) \quad (2.10)$$

を満たす. さらに, (2.2) より

$$\Phi(\lambda, 0, 0) = QF(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

と表せるため,

$$\gamma(\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda \in (\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta) \quad (2.11)$$

とわかる. また,

$$\gamma_v(\lambda^*, 0) = 0 \quad (2.12)$$

が求まる. 実際, $\Gamma := \gamma_v(\lambda^*, 0)$ とおき, (2.10) を $(\lambda, u) = (\lambda^*, 0)$ について v 微分すると

$$L\Gamma\tilde{v} + Q\varphi_u(\lambda^*, \gamma(\lambda^*, 0))[\tilde{v} + \Gamma\tilde{v}] = 0, \quad \forall \tilde{v} \in V$$

を得る. ここで, $\gamma(\lambda^*, 0) = 0$ と $\varphi_u(\lambda^*, 0) = 0$ より $L\Gamma\tilde{v} = 0$ ($\forall \tilde{v} \in V$) を得る. つまり, $\Gamma\tilde{v} \in V \cap W$ となるため, $\Gamma\tilde{v} = \gamma_v(\lambda^*, 0)\tilde{v} = 0$ ($\forall \tilde{v} \in V$) とわかる. よって, $\gamma_v(\lambda^*, 0) = 0$ と求まる. 式 (2.9) で与えられた $w = \gamma(\lambda, v)$ を (2.6) の第 1 式に代入することで, (2.1) は

$$PF(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) = 0 \quad (2.13)$$

という未知関数 $(\lambda, v) \in \Lambda \times \mathcal{V}$ についての有限次元の方程式へと還元される。ただし，解空間の次元は $v \in V$ より $\dim V$ 以下となる。また，射影作用素 P は $P : Y \rightarrow Z$ であるため，(2.13) の方程式の本数は $\text{codim } R$ である。先ほど得られた (2.13) はしばしば分岐方程式と呼ばれる。

以上の議論をまとめることで，分岐点の必要十分条件は次のように与えられる。

Lemma 2.4. 方程式 (2.1) に対して， $\lambda^* \in \mathbb{R}$ が分岐点であるための必要十分条件は，分岐方程式 (2.13) が $(\lambda^*, 0)$ の近傍で非自明解をもつことである。

2.5 Crandall-Rabinowitz の分岐定理

方程式 (2.1) に対する Crandall-Rabinowitz の分岐定理は次の通りである。

Theorem 2.5 (Crandall-Rabinowitz の分岐定理). C^2 級写像 $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ は (2.2) と次の仮定を満たすとする：

- (V1) V の次元は 1 である。つまり，ある $u^* \in X$ ($u^* \neq 0$) に対して $V = \{su^* : s \in \mathbb{R}\}$ と表せる，
- (R1) R は閉で，余次元が 1 である，
- (T) $M := F_{u\lambda}(\lambda^*, 0)$ に対して $Mu^* \notin R$ 。

このとき，分岐点を $\lambda = \lambda^*$ と表すと， $(\lambda^*, 0) \in \mathbb{R} \times X$ の近傍 $\mathcal{N}(\subset \mathbb{R} \times X)$ において非自明解の集合は次のような C^1 級の曲線で表される：

$$\{(\lambda, u) = (\lambda^* + \mu(s), s(u^* + w(s))) : s \in (-\delta, \delta)\}. \quad (2.14)$$

ただし， $\delta > 0$ は十分小さなものとする。また， $(\mu(s), w(s)) \in \mathbb{R} \times W$ は $(\mu(0), w(0)) = (0, 0)$ を満たす C^1 級の関数とする。

Proof. 分岐方程式 (2.13) の左辺は R の位相的補空間 Z の成分であることに注意する。 R は Y の閉部分空間であるため，Hahn-Banach の定理より，

$$\langle \psi, r \rangle = 0 \quad (\forall r \in R)$$

2.5 節 Crandall-Rabinowitz の分岐定理

を満たすような Y 上の連続線形汎関数 $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する．ただし， $\psi \in Y^*$ で， $\psi \neq 0$ である．このとき， R は連続線形汎関数 ψ を用いて次のような集合で表せる：

$$R = \{y \in Y : \langle \psi, y \rangle = 0\}. \quad (2.15)$$

分岐方程式 (2.13) の左辺は $F(\lambda, v + \gamma(\lambda, v))$ の Z 方向成分に対応しているため，部分空間 Z に属する成分は 0 と考えられる．よって，(2.13) は (2.15) を用いて

$$\langle \psi, F(\lambda, v + \gamma(\lambda, v)) \rangle = 0 \quad (2.16)$$

と書き換えられる．ここで，仮定 (V1) より $v = su^*$ ($s \in \mathbb{R}$) と表せる．そして， $\lambda = \lambda^* + \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$) とおくことで，(2.16) は次のように表される：

$$\langle \psi, F(\lambda^* + \mu, su^* + \gamma(\lambda^* + \mu, su^*)) \rangle = 0. \quad (2.17)$$

ここで，(2.17) は未知数 $(\mu, s) \in \mathbb{R}^2$ に関する方程式へと帰着されていることに注意しておく．このとき，原点 $(\mu, s) = (0, 0)$ の近傍における (2.17) の解の振る舞いが分岐点近傍における (2.1) の非自明解の様子に反映される．すなわち，(2.17) の原点近傍における解の振る舞いを調べればよい．

方程式 (2.17) の左辺を 2 変数実数値関数を用いて次のように表す：

$$\beta(\mu, s) := \langle \psi, F(\lambda^* + \mu, su^* + \gamma(\lambda^* + \mu, su^*)) \rangle. \quad (2.18)$$

後の議論で用いるため，次の 4 つの計算について確かめておく：

$$(\beta 1) \quad \beta(\mu, 0) = 0 \quad (\forall \mu \in \{\mu \in \mathbb{R} : \lambda^* + \mu \in \Lambda\}),$$

$$(\beta 2) \quad \beta_s(0, 0) = 0,$$

$$(\beta 3) \quad \beta_{s\mu}(0, 0) = \langle \psi, Mu^* \rangle,$$

$$(\beta 4) \quad \beta_{ss}(0, 0) = \langle \psi, F_{uu}(\lambda^*, 0)[u^*, u^*] \rangle.$$

まずは $(\beta 1)$ を確かめる．実数値関数 (2.18) に $s = 0$ を代入すると次のようになる：

$$\beta(\mu, 0) = \langle \psi, F(\lambda^* + \mu, \gamma(\lambda^* + \mu, 0)) \rangle. \quad (2.19)$$

ここで, (2.2) と (2.11) を満たすため, (2.19) は次のように変形される:

$$\begin{aligned}\beta(\mu, 0) &= \langle \psi, F(\lambda^* + \mu, \gamma(\lambda^* + \mu, 0)) \rangle \\ &= \langle \psi, F(\lambda^* + \mu, 0) \rangle \\ &= \langle \psi, 0 \rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

したがって, 任意の $\mu \in \{\mu \in \mathbb{R} : \lambda^* + \mu \in \Lambda\}$ に対して (2.19) が成り立つため, (β1) は示された. 次に, (β2) を確かめる. $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ が連続な線形汎関数であることから, $\beta(\mu, s)$ の s に関する偏導関数は次のように与えられる:

$$\beta_s(\mu, s) = \langle \psi, F_u(\lambda^* + \mu, su^* + \gamma(\lambda^* + \mu, su^*)) [u^* + \gamma_v(\lambda^* + \mu, su^*)u^*] \rangle. \quad (2.20)$$

式 (2.20) に $(\mu, s) = (0, 0)$ を代入すると,

$$\beta_s(0, 0) = \langle \psi, F_u(\lambda^*, \gamma(\lambda^*, 0)) [u^* + \gamma_v(\lambda^*, 0)u^*] \rangle \quad (2.21)$$

であるため, (2.11) と (2.12) より

$$\beta_s(0, 0) = \langle \psi, F_u(\lambda^*, 0) [u^*] \rangle = \langle \psi, Lu^* \rangle$$

と表される. ここで, $u^* \in V$ であったので $Lu^* = 0$ となり, $\beta_s(0, 0) = \langle \psi, 0 \rangle = 0$ と求まる. よって, (β2) は示された. 次に, (β3) を確かめる. 式 (2.20) に $s = 0$ を代入すると, $\gamma(\lambda^* + \mu, 0) = 0$ を満たすため,

$$\begin{aligned}\beta_s(\mu, 0) &= \langle \psi, F_u(\lambda^* + \mu, \gamma(\lambda^* + \mu, 0)) [u^* + \gamma_v(\lambda^* + \mu, 0)u^*] \rangle \\ &= \langle \psi, F_u(\lambda^* + \mu, 0) [u^* + \gamma_v(\lambda^* + \mu, 0)u^*] \rangle\end{aligned} \quad (2.22)$$

と求まる. 式 (2.22) の両辺を μ で微分すると,

$$\beta_{s\mu}(\mu, 0) = \langle \psi, F_{u\lambda}(\lambda^* + \mu, 0) [u^* + \gamma_v(\lambda^* + \mu, 0)u^*] + F_u(\lambda^* + \mu, 0) [\gamma_{v\lambda}(\lambda^* + \mu, 0)u^*] \rangle \quad (2.23)$$

を得る. 式 (2.23) に $\mu = 0$ を代入することで, $\beta_{s\mu}(0, 0)$ は次のように与えられる:

$$\begin{aligned}\beta_{s\mu}(0, 0) &= \langle \psi, F_{u\lambda}(\lambda^*, 0) [u^* + \gamma_v(\lambda^*, 0)u^*] + F_u(\lambda^*, 0) [\gamma_{v\lambda}(\lambda^*, 0)u^*] \rangle \\ &= \langle \psi, F_{u\lambda}(\lambda^*, 0) [u^*] + L[\gamma_{v\lambda}(\lambda^*, 0)u^*] \rangle.\end{aligned} \quad (2.24)$$

2.5 節 Crandall-Rabinowitz の分岐定理

ここで, $w = \gamma(\lambda, v) \in W$ より $\gamma_{v\lambda}(\lambda^*, 0) : V \rightarrow W$ であるため, $L[\gamma_{v\lambda}(\lambda^*, 0)u^*] \in R$ とわかる. したがって, (2.15) より $\langle \psi, L[\gamma_{v\lambda}(\lambda^*, 0)u^*] \rangle = 0$ を満たし, (2.24) は $\beta_{s\mu}(0, 0) = \langle \psi, F_{u\lambda}(\lambda^*, 0)[u^*] \rangle$ と求まる. よって, (β3) が示された. 最後に (β4) を確かめる. 式 (2.20) に $\mu = 0$ を代入すると,

$$\beta_s(0, s) = \langle \psi, F_u(\lambda^*, su^* + \gamma(\lambda^*, su^*)) [u^* + \gamma_v(\lambda^*, su^*)u^*] \rangle \quad (2.25)$$

を得る. 式 (2.25) の両辺を s で微分すると $\beta_{ss}(0, s)$ は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} \beta_{ss}(0, s) &= \langle \psi, F_{uu}(\lambda^*, su^* + \gamma(\lambda^*, su^*)) [u^* + \gamma_v(\lambda^*, su^*)u^*, u^* + \gamma_v(\lambda^*, su^*)u^*] \rangle \\ &\quad + \langle \psi, F_u(\lambda^*, su^* + \gamma(\lambda^*, su^*)) \gamma_{vv}(\lambda^*, su^*) [u^*, u^*] \rangle. \end{aligned} \quad (2.26)$$

ここで, (2.26) に $\mu = 0$ を代入すると, (2.11) と (2.12) より,

$$\begin{aligned} \beta_{ss}(0, 0) &= \langle \psi, F_{uu}(\lambda^*, \gamma(\lambda^*, 0)) [u^* + \gamma_v(\lambda^*, 0)u^*, u^* + \gamma_v(\lambda^*, 0)u^*] \rangle \\ &\quad + \langle \psi, F_u(\lambda^*, \gamma(\lambda^*, 0)) \gamma_{vv}(\lambda^*, 0) [u^*, u^*] \rangle \\ &= \langle \psi, F_{uu}(\lambda^*, 0) [u^*, u^*] \rangle + \langle \psi, L\gamma_{vv}(\lambda^*, 0) [u^*, u^*] \rangle \end{aligned} \quad (2.27)$$

と求まる. $w = \gamma(\lambda, v) \in W$ より $L\gamma_{vv}(\lambda^*, 0) [u^*, u^*] \in R$ を満たすため, (2.15) より $\langle \psi, L\gamma_{vv}(\lambda^*, 0) [u^*, u^*] \rangle = 0$ とわかる. したがって, $\beta_{ss}(0, 0) = \langle \psi, F_{uu}(\lambda^*, 0) [u^*, u^*] \rangle$ と求まり, (β4) が示された.

2変数実数値関数 $\beta(\mu, s)$ は, (β1) 及び (β2) より, 作用素 $\beta_\mu(0, 0)$, $\beta_s(0, 0)$ は逆をもたない. このとき, 陰関数の定理を用いて $\beta(\mu, s) = 0$ の原点近傍における非自明解の集合を一意的に表すことができない. そこで, 次のような s に関する関数 $h(\mu, s)$ を用意して, $\beta(\mu, s) = 0$ の原点近傍における解の振る舞いを調べる:

$$h(\mu, s) = \begin{cases} \frac{\beta(\mu, s)}{s} & (s \neq 0), \\ \beta_s(\mu, 0) & (s = 0). \end{cases} \quad (2.28)$$

以降で, Theorem 2.5 の仮定 (T) を満たすときに $\beta(\mu, s) = 0$ の非自明解の集合が C^1 級の曲線で表されることを確かめる. 初めに, (2.28) は原点近傍で C^1 級である. 実際, 写像 F を C^2 級と考えていたため, $\beta(\mu, s)$ は C^2 級である. さらに, (β1) より $\beta(\mu, 0) = 0$ であるため, $s \neq 0$ のとき, (2.28) より

$$\lim_{s \rightarrow 0} h(\mu, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta(\mu, s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta(\mu, s) - \beta(\mu, 0)}{s} = \beta_s(\mu, 0) = h(\mu, 0)$$

とわかる．よって， $h(\mu, s)$ は $s = 0$ において連続である．また， $s \neq 0$ のとき， $h(\mu, s)$ の s 微分は

$$h_s(\mu, s) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\beta(\mu, s)}{s} \right) = \frac{\beta_s(\mu, s)s - \beta(\mu, s)}{s^2}$$

であるため，l'Hôpital の定理より， $h_s(\mu, 0)$ が

$$\lim_{s \rightarrow 0} h_s(\mu, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta_s(\mu, s)s - \beta(\mu, s)}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta_{ss}(\mu, s)s}{2s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta_{ss}(\mu, s)}{2} = \frac{\beta_{ss}(\mu, 0)}{2} \quad (2.29)$$

と求まる．一方， μ 微分は

$$h_\mu(\mu, s) = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\beta(\mu, s)}{s} \right) = \frac{\beta_\mu(\mu, s)}{s} \quad (2.30)$$

であり，(β1) より $\beta_\mu(\mu, 0) = 0$ とわかるため， $h_\mu(\mu, 0)$ は

$$\lim_{s \rightarrow 0} h_\mu(\mu, s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\beta_\mu(\mu, s) - \beta_\mu(\mu, 0)}{s} = \beta_{s\mu}(\mu, 0) \quad (2.31)$$

と求まる．これらの結果より，(β4) と (2.29) 及び (β3) と (2.31) がそれぞれ対応関係にあることがわかる．よって， $h_s(\mu, s)$ 及び $h_\mu(\mu, s)$ は原点 $(\mu, s) = (0, 0)$ において連続であることがわかるため， $h(\mu, s)$ は C^1 級とみなせる．特に，原点における $h(\mu, s)$ の微分係数を実数 a, b を用いて次のように定義することで， $h_s(0, 0) = b$ ， $h_\mu(0, 0) = a$ と表せる：

$$\begin{cases} a := \langle \psi, Mu^* \rangle, \\ b := \frac{1}{2} \langle \psi, F_{uu}(\lambda^*, 0)[u^*, u^*] \rangle. \end{cases} \quad (2.32)$$

もし， $a = h_\mu(0, 0) \neq 0$ ならば，陰関数の定理より， $h(\mu, s) = 0$ の解集合は原点近傍において $\mu = \mu(s)$ と一意的に表せる．ここで， $a \neq 0$ という条件は仮定 (M) と同値であると考えられる．実際，(2.15) より

$$a = \langle \psi, Mu^* \rangle \neq 0 \iff Mu^* \notin R = \{y \in Y : \langle \psi, y \rangle = 0\}$$

と考えられるからである．よって，仮定 (M) を満たすとき， $h(\mu, s) = 0$ の解集合は原点近傍 $\tilde{N} (\subset \mathbb{R}^2)$ において，正数 δ および C^1 級の実数値関数 $\mu(s)$ ($-\delta < s < \delta$) が存在して，

$$\{(\mu, s) \in \tilde{N} : h(\mu, s) = 0\} = \{(\mu, s) \in \tilde{N} : \mu = \mu(s), s \in (-\delta, \delta)\}$$

と表される．ここで，(2.28) が $s = 0$ で連続であることから， $h(\mu, s) = 0$ の零点集合は $\beta(\mu, s) = 0$ の零点集合と一致する．さらに， $\beta(\mu, s) = 0$ は分岐方程式 (2.13) と同値であるため， $\beta(\mu, s) = 0$ の解集合は (2.13) の解集合でもある．よって， $v = su^*$ 及び $\lambda = \lambda^* + \mu$ としたとき，未知数が (μ, s) である方程式

$$PF(\lambda^* + \mu, su^* + \gamma(\lambda^* + \mu, su^*)) = 0 \quad (2.33)$$

の原点近傍 \tilde{N} 内の解集合は $\{(\mu, s) \in \tilde{N} : \mu = \mu(s), s \in (-\delta, \delta)\}$ と表せる．ここで，

$$\varepsilon(s) := \gamma(\lambda^* + \mu(s), su^*) \in W, s \in (-\delta, \delta)$$

と表し， $\varepsilon(s)$ が C^1 級であることを確かめる．式 (2.11) より，

$$\varepsilon(0) = \gamma(\lambda^*, 0) = 0 \quad (2.34)$$

を満たす．次に， $\varepsilon(s) = \gamma(\lambda^* + \mu(s), su^*)$ を s について微分することで，

$$\varepsilon'(s) = \gamma_\lambda(\lambda^* + \mu(s), su^*)\mu'(s) + \gamma_v(\lambda^* + \mu(s), su^*)u^*$$

を得る．式 (2.11) より，任意の $\lambda \in (\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta)$ に対して $\gamma(\lambda, 0) = 0$ であるため，

$$\gamma_\lambda(\lambda^*, 0) = 0$$

とわかる．また，(2.12) より $\gamma_v(\lambda^*, 0) = 0$ を満たすため， $\varepsilon'(0)$ は

$$\varepsilon'(0) = \gamma_\lambda(\lambda^*, 0)\mu'(0) + \gamma_v(\lambda^*, 0)u^* = 0 \quad (2.35)$$

と求まる．よって， $\varepsilon(s)$ は C^1 級である．ここで， $\varepsilon(s) = sw(s)$ とおくと，

$$\varepsilon(0) = 0 \cdot w(0) = 0,$$

$$\varepsilon'(0) = w(0) + 0 \cdot w'(0) = w(0) = 0$$

を満たす．そして， $\varepsilon(s) = \gamma(\lambda^* + \mu(s), su^*) \in C^1((-\delta, \delta), W)$ であるため， $\varepsilon'(s) = w(s) + sw'(s)$ は $s \in (-\delta, \delta)$ で連続な関数でなければならず， $w(s) \in C^1((-\delta, \delta), W)$ と求まる．したがって，分岐点 $(\lambda^*, 0) \in \mathbb{R} \times X$ の近傍 \tilde{N} において，自明解から分岐する (2.1) の非自明解の集合は次のような C^1 級の曲線で表される：

$$\{(\lambda, u) = (\lambda^* + \mu(s), s(u^* + w(s))) : s \in (-\delta, \delta)\}. \quad (2.36)$$

よって，Theorem 2.5 は証明された． □

2.6 Ambrosetti-Prodi の分岐定理

本節では F を $F \in C^\infty((\lambda_1, \lambda_2), X; Y)$ であるような非線形写像とする．ここで， X と Y は Banach 空間であり， (λ_1, λ_2) は \mathbb{R} 内の开区間を表す．Banach 空間 Y において，次のような関数方程式に対する分岐問題を考える：

$$F(\lambda, u) = 0 \in Y. \quad (2.37)$$

方程式 (2.37) は任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ において自明解 $u = 0$ をもつと仮定する．つまり，(2.37) は $F(\lambda, 0) = 0, \forall \lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ を満たす．

以降では，2.4 節に基づいた議論を展開する．分岐点を $\lambda = \lambda^*$ としておく．このとき， $(\lambda, u) = (\lambda^*, 0)$ のまわりでの $F(\lambda, u)$ の線形化作用素を $L := F_u(\lambda^*, 0) \in \mathcal{L}(X; Y)$ と表すと， L は 1 対 1 写像ではなく， $V := \text{Ker } L \neq \{0\}$ を満たす．また，(2.3) と同様に， $R := \text{Range } L$ と表しておく． V は X 内に位相的補空間 W をもつと仮定し，さらに R は閉で Y 内に位相的補空間 Z をもつと仮定することで，Banach 空間 X と Y は次のように分解される：

$$X = V \oplus W, \quad Y = R \oplus Z.$$

$(\lambda, u) = (\lambda^*, 0)$ のまわりでの $F(\lambda, u)$ の Taylor 展開は， $\lambda = \lambda^* + \mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$) とおくことで，次のように与えられる：

$$\begin{aligned} F(\lambda^* + \mu, u) &= F(\lambda^*, 0) + Lu + \mu F_\lambda(\lambda^*, 0) \\ &\quad + \mu Mu + \frac{1}{2} \mathcal{B}[u, u] + \frac{1}{2} \mu^2 F_{\lambda\lambda}(\lambda^*, 0) + \psi(\mu, u) \\ &= Lu + \mu Mu + \frac{1}{2} \mathcal{B}[u, u] + \psi(\mu, u). \end{aligned} \quad (2.38)$$

ただし， $M := F_{u\lambda}(\lambda^*, 0)$ と $\mathcal{B} := F_{uu}(\lambda^*, 0)$ である．また， $\psi(\mu, u)$ は $\psi(\mu, 0) \equiv 0$ ， $\psi_u(0, 0) = 0$ ， $\psi_{uu}(0, 0) = 0$ ，及び $\psi_{\lambda u}(0, 0) = 0$ をそれぞれ満たすような滑らかな関数である．関数 $F(\lambda, u)$ は任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $F(\lambda, 0) \equiv 0$ を満たすため， $F(\lambda, 0)$ を n 階微分したものは全て 0 であることを注意しておく．考えるべき解を $u = \mu(v + w)$ と設定し，分岐方程式の導出を進めていく．ただし， v と w はそれぞれ V と W の元である．解

2.6 節 Ambrosetti-Prodi の分岐定理

$u = \mu(v + w)$ を (2.38) へ代入すると, V の性質より $Lv = 0$ であるため,

$$F(\lambda^* + \mu, \mu(v + w)) = \mu Lw + \mu^2 M(v + w) + \frac{1}{2} \mu^2 \mathcal{B}[v + w, v + w] + \psi(\lambda^* + \mu, \mu(v + w)) = 0 \quad (2.39)$$

を得る. 射影作用素として P と Q を, 2.4 節と同様に, 次のように与える:

$$P : Y \rightarrow Z, \quad Q : Y \rightarrow R.$$

このとき, (2.39) を次のような方程式系へ分解できる:

$$\begin{aligned} \mu^2 PM(v + w) + \frac{1}{2} \mu^2 P\mathcal{B}[v + w, v + w] + P\psi(\mu, \mu(v + w)) &= 0, \\ \mu Lw + \mu^2 QM(v + w) + \frac{1}{2} \mu^2 Q\mathcal{B}[v + w, v + w] + Q\psi(\mu, \mu(v + w)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

ただし, (2.40) の第 1 式は $PF(\lambda^* + \mu, \mu(v + w))$ に対応し, 第 2 式は $QF(\lambda^* + \mu, \mu(v + w))$ に対応している. ここで, $\psi(\mu, u)$ の性質を考慮すると,

$$\psi(\mu, \mu(v + w)) = \mu^3 \tilde{\psi}(\mu, v, w)$$

と書き換えられる. ただし, $\tilde{\psi}(\mu, v, w)$ は滑らかな関数である. したがって, $\mu \neq 0$ において, (2.40) は次のように書き換えられる:

$$PM(v + w) + \frac{1}{2} P\mathcal{B}[v + w, v + w] + \mu P\tilde{\psi}(\mu, v, w) = 0, \quad (2.41)$$

$$\tilde{\Phi}(\mu, v, w) := Lw + \mu QM(v + w) + \frac{1}{2} \mu Q\mathcal{B}[v + w, v + w] + \mu^2 Q\tilde{\psi}(\mu, v, w) = 0. \quad (2.42)$$

特に, $\tilde{\Phi}(\mu, v, w)$ は

$$\tilde{\Phi}(0, v, 0) = 0 \quad (\forall v \in V), \quad \tilde{\Phi}_w(0, v, 0) = L$$

を満たしている. 実際, $\tilde{\Phi}(0, v, 0) = 0$ は明らかである. また, $\tilde{\Phi}_w(0, v, 0)$ は

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left[\tilde{\Phi}(\mu, v, w + t\tilde{w}) - \tilde{\Phi}(\mu, v, w) \right] \Big|_{(\mu, v, w) = (0, v, 0)} \\ &= L\tilde{w} + \mu QM\tilde{w} + \mu^2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Q\tilde{\psi}(\mu, v, w + t\tilde{w}) - Q\tilde{\psi}(\mu, v, w)}{t} \Big|_{(\mu, v, w) = (0, v, 0)} \\ &= L\tilde{w} \end{aligned}$$

であるため, $\tilde{\Phi}_w(0, v, 0) = L \neq 0$ と求まる. このとき, $\tilde{\Phi}_w(0, v, 0)$ を空間 W 上に制限すると, $\tilde{\Phi}_w(0, v, 0) = L|_W : W \rightarrow R$ は同型写像となる. 実際, $\tilde{\Phi}_w(0, v, 0)w = Lw = 0$ のとき, $w \in V$ となるため, $w \in V \cap W = \{0\}$ より $w = 0$ を満たす. よって, $\tilde{\Phi}_w(0, v, 0) : W \rightarrow R$ は単射である. また, 任意の $r \in R$ に対して適当な $u \in X$ が存在して $r = \tilde{\Phi}_w(0, v, 0)u$ と表せると仮定する. 解を $u = \mu(v + w)$ としていたため, $r = \mu L(v + w) = \mu Lw = \mu \tilde{\Phi}_w(0, v, 0)w$ と表すことができ, $\tilde{\Phi}_w(0, v, 0) : W \rightarrow R$ は全射とわかる. したがって, 無限次元の方程式 (2.42) を $(\mu, v, w) = (0, v^*, 0)$ の近傍 $\Lambda \times \mathcal{V} \times \mathcal{W}$ で w について一意的に解くことができる. ただし, $v^* \in V$ は固定された適当な元である. このとき, w は v^* に依存した滑らかな関数 $\tilde{\gamma}$ を用いて, $(\mu, v) \in \Lambda \times \mathcal{V}$ において, $w = \tilde{\gamma}(\mu, v) \in \mathcal{W}$ と一意的に表される. ここで, (2.42) を満たすためには, 任意の $v \in \mathcal{V}$ において $\tilde{\gamma}(0, v) = 0$ でなければならない. よって, $\tilde{\gamma}(0, v)$ の v についての n 階微分は 0 となるため, $(0, v^*)$ のまわりで Taylor 展開を考えると, $\tilde{\gamma}(\mu, v)$ は μ について少なくとも 1 次以上であることがいえる. 上述のことから, w を $(\mu, v) \in \Lambda \times \mathcal{V}$ において $w = \mu\gamma(\mu, v) \in \mathcal{W}$ と置き換えられる. ただし, $\gamma(\mu, v)$ は滑らかな関数である. これを (2.41) へ代入することで, $\Lambda \times \mathcal{V}$ の近傍において有限次元の方程式は滑らかな関数 $N(\mu, v)$ を用いて次のように書き換えられる:

$$N(\mu, v) := PM(v + \mu\gamma(\mu, v)) + \frac{1}{2}PB[v + \mu\gamma(\mu, v), v + \mu\gamma(\mu, v)] + \mu P\tilde{\psi}(\mu, v, \mu\gamma(\mu, v)) = 0 \in Z. \quad (2.43)$$

式 (2.43) が Ambrosetti と Prodi の議論により得られる分岐方程式である. ここで, $Z \subset Y$ が有限次元であるときに分岐方程式 (2.43) を構成する方程式の本数は有限次元であることに注意する.

この分岐方程式に対して Ambrosetti と Prodi が導入した多余次元の分岐定理は次の通りである:

Theorem 2.6 (Ambrosetti-Prodi の分岐定理). 核空間 $V = \text{Ker } L$ が X 内に位相的補空間をもつこと, 及び $R = \text{Range } L$ は閉で Y 内に位相的補空間をもつことを仮定する. また, 非線形方程式 (2.43) に対して次の 2 つの条件を満たすような $v^* \in V, v^* \neq 0$ が存

在すると仮定する：

(a) $N(0, v^*) = PMv^* + \frac{1}{2}PB[v^*, v^*] = 0,$

(b) 線形作用素 $N_v(0, v^*) := S : V \rightarrow Z$ は, $Sv = PMv + PB[v^*, v]$ であり, 逆をもつ.

このとき, $(\lambda^*, 0)$ から分岐する (2.37) の非自明解が存在して

$$\lambda = \lambda^* + \mu, \quad u = \mu[v^* + \mu\tilde{w}(\mu)]$$

と表される. ただし, $\tilde{v}(\mu)$ は μ について滑らかな関数で, 非自明解 $u(\mu)$ は $u(0) = 0$ と $u'(0) = 0$ を満たす.

Proof. 条件 (a) と (b) を満たすような v^* が存在するとき, 陰関数の定理より, 非線形方程式 (2.43) を $(\mu, v) = (0, v^*)$ の近傍 $\Lambda \times \mathcal{V}$ で v について一意的に解くことができる. このとき, 滑らかな関数 $\tilde{v}(\mu)$ を用いて $v = v^* + \tilde{v}(\mu)$ と表せる. ここで, $u = \mu(v + w)$ という解を考えていたため, $u = \mu[v^* + \tilde{v}(\mu) + \mu\gamma(\mu, v^* + \tilde{v}(\mu))]$ を得る. $u'(0) = 0$ でなければならないため, \tilde{v} は $\tilde{v}(0) = 0$ と $\tilde{v}'(0) = 0$ を満たしており, 滑らかな関数 $\tilde{\tilde{v}}(\mu)$ を用いて, $\tilde{v} = \mu\tilde{\tilde{v}}(\mu)$ と書き換えられる. よって, $\tilde{w}(\mu) := \tilde{\tilde{v}}(\mu) + \gamma(\mu, v^* + \mu\tilde{\tilde{v}}(\mu))$ とおくことで $u = \mu[v^* + \mu\tilde{w}(\mu)]$ が得られる. □

第 3 章 吸着質誘導相転移系に対する分岐解析

本章では、反応拡散移流系の一様である吸着質誘導相転移系の非自明解の存在について記述する。これは久藤と辻川 [13] により証明された結果である。久藤と辻川は Crandall-Rabinowitz の分岐定理を用いることでストライプや四角形に対応した非自明解の存在を示した。ここで、Crandall-Rabinowitz の分岐定理では核空間の次元が 1 (余次元が 1) という仮定の下で適用できる定理であり、核空間の次元が 2 (余次元が 2) 以上となる問題には直接適用することができない。本章のまとめで、久藤と辻川の研究に対して第 4 章の結果を踏まえた考察を述べる。3.1 節では吸着質誘導相転移系を導入する。3.2 節では吸着質誘導相転移系に対する定数定常解が唯一つであるための十分条件の導入、そして久藤と辻川 [13] による Crandall-Rabinowitz の分岐定理を用いた余次元が 1 の分岐解析について概説する。

3.1 吸着質誘導相転移系

吸着質誘導相転移系は、白金を触媒とした一酸化炭素 (CO) 分子の酸化反応において確認される、吸着 CO 分子のパターン形成現象を記述した偏微分方程式系である。この数理モデルは吸着 CO 分子による微小なスケールにおける空間パターンの形成現象を明らかにするために Hildebrand 等 [7] により提案されたものである。吸着質誘導相転移系は白金表面の構造変化と表面構造に依存した吸着 CO 分子の移動現象に着目した数理モデルであり、それらの現象は吸着 CO 分子がパターンを形成する上で重要な効果であると考えられている。白金の表面上では、CO 分子と酸素原子の吸着及び脱離、CO 分子と酸素原子の酸化反応が起きている。その酸化反応では、吸着 CO 分子と吸着酸素原子が結合することで白金表面上から二酸化炭素が放出される。表面構造の特徴は 1×1 構造と 1×2 構造という二つの構造をもつ点である。白金表面の構造は吸着物質の表面被覆率に依存して決定され、その変化と共に相転移が引き起こされる。ここで吸着質の数が多い、すなわ

3.1 節 吸着質誘導相転移系

ち表面被覆率の値が大きい場合に白金表面は 1×1 構造をとり，表面被覆率の値が小さい場合に 1×2 構造をとる．さらに， 1×2 構造の表面へ吸着した CO 分子は最も近い 1×1 構造の表面領域へ移動する．これらの性質を踏まえて，吸着酸素原子が常に白金表面上に存在するという仮定の下で，白金表面の構造と吸着 CO 分子の空間分布に対する時間変化を記述した吸着質誘導相転移系は次のように与えられる：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a\Delta u + du(u+v-1)(1-u) - \zeta(u - \frac{1}{2}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = b\Delta v + c\nabla \cdot \{v(1-v)\nabla\chi(u)\} \\ \quad - fe^{\alpha\chi(u)}v - gv + h(1-v), \quad \mathbf{x} \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

ここで， Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ \mathbb{R}^2 内の有界領域である．係数 $a, b, c, d, f, g, h, \alpha$ は正の定数であり， ζ は非負の定数である．未知関数 $u(x, t)$ 及び $v(x, t)$ は位置 $x \in \Omega$ と時刻 t における白金表面構造のオーダパラメータと吸着 CO 分子の表面被覆率をそれぞれ表す．ここで，オーダパラメータとは白金表面の構造状態を表す物理量であり， 1×2 構造及び 1×1 構造に対して $0, 1$ という値をそれぞれ割り当てて表面を粗視化することで得られる表面上での連続量である． $\chi(u)$ は化学ポテンシャルであり， u の関数として次のように与えられる：

$$\chi(u) = -u^2(3 - 2u).$$

これより，(3.1) の第 1 式と第 2 式における各項の効果を記述する．第 1 式の $a\Delta u$ は拡散項で， $du(u+v-1)(1-u)$ は表面構造の相転移現象に対応する．また， $\zeta(u - \frac{1}{2})$ は熱力学的な視点から導入された項である．第 2 式の $b\Delta v$ は拡散項で， $c\nabla \cdot \{v(1-v)\nabla\chi(u)\}$ は $\chi(u)$ の傾きに依存した吸着 CO 分子の移流現象に対応した移流項である．また， $fe^{\alpha\chi(u)}$ は $\chi(u)$ の値に依存した吸着 CO 分子の熱脱離に対応する．第 4 項の gv 及び第 5 項の $h(1-v)$ は化学反応による吸着 CO 分子の減少率と増加率をそれぞれ表す．

3.2 非自明解の存在証明

2.4 節で導入した Lyapunov-Schmidt 還元では，無限次元の方程式系から有限次元の方程式系へと還元することで分岐方程式を導出していた．Crandall-Rabinowitz の分岐定理は，この還元に対して，Banach 空間 X の部分空間 V と Banach 空間 Y の部分空間 Z の次元が 1 という仮定の下で定数定常解から分岐する非自明解の存在を保証する定理である．この分岐定理では分岐点より分岐する非自明解の集合は C^1 級の曲線で表される．久藤と辻川 [13] は吸着質誘導相転移系の定常問題に対して， $\dim V = \dim Z = 1$ という場合に限り，Crandall-Rabinowitz の分岐定理を適用することで四角形やストライプといった多角形パターンに対応した非自明解の存在を証明した．

吸着質誘導相転移系 (3.1) の境界値定常問題は次のように表される：

$$\begin{cases} a\Delta u + df(u, v) - \zeta \left(u - \frac{1}{2} \right) = 0 & \text{in } \Omega, \\ b\Delta v + c\nabla \cdot \{v(1-v)\nabla\chi(u)\} - (fe^{\alpha\chi(u)} + \bar{g})v + h = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

ただし，表記の簡略化のために $f(u, v) := u(u+v-1)(1-u)$ と $\bar{g} := g+h$ と表している．このとき，(3.2) の定数定常解は次の方程式系より与えられる：

$$\begin{cases} df(u, v) = \zeta \left(u - \frac{1}{2} \right), \\ v = \frac{h}{fe^{\alpha\chi(u)} + \bar{g}}. \end{cases} \quad (3.3)$$

式 (3.3) の定数定常解を (\bar{u}, \bar{v}) と表す．ここで，定数定常解の唯一性について，久藤と辻川とは異なる，十分条件を導入する． $0 < u < 1$ において定数定常解が唯一であるための十分条件は次の通りである．

Lemma 3.1. 係数 α が関係式 $\alpha > \frac{32}{27} W \left(\frac{45}{64} \right)$ を満たし，さらに係数 d と ζ が関係式 $\frac{\zeta}{d} \geq \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\alpha e^{\frac{27}{32}\alpha}$ を満たすとき， $0 < u < 1$ において定数定常解 (\bar{u}, \bar{v}) は唯一つである．

3.2 節 非自明解の存在証明

このとき, \bar{v} は \bar{u} により決定できて, $\bar{v} = \frac{h}{fe^{\alpha\chi(\bar{u})}+g+h}$ ($\frac{1}{4} < \bar{u} < \frac{3}{4}$) となる. ただし, $W(\cdot)$ は Lambert の W 関数である.

Proof. 境界値定常問題 (3.2) の空間的な微分の項を 0 とした方程式系は次のように与えられる:

$$\begin{cases} du(1-u)(u+v-1) - \zeta(u - \frac{1}{2}) = 0, \\ -fe^{\alpha\chi(u)}v - gv + h(1-v) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

方程式系 (3.4) は $0 < u < 1$ において次のように変形できる:

$$\begin{cases} v = 1 - u + \frac{\zeta}{d} \frac{u - \frac{1}{2}}{u(1-u)} := V_1(u), \\ v = \frac{h}{fe^{\alpha\chi(u)} + g + h} := V_2(u). \end{cases} \quad (3.5)$$

関数 $V_1(u)$ の導関数は

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(u)}{du} &= -1 + \frac{\zeta}{d} \frac{u(1-u) - (u - \frac{1}{2})(-2u+1)}{u^2(1-u)^2} \\ &= \frac{-u^2(1-u)^2 - \frac{\zeta}{d}u(1-u) + \frac{1}{2}\frac{\zeta}{d}}{u^2(1-u)^2} \end{aligned}$$

である. 導関数 $\frac{dV_1(u)}{du}$ の分子は

$$-u^2(1-u)^2 - \frac{\zeta}{d}u(1-u) + \frac{1}{2}\frac{\zeta}{d} = -\left\{u(1-u) + \frac{\zeta}{2d}\right\}^2 + \frac{\zeta^2}{4d^2} + \frac{1}{2}\frac{\zeta}{d}$$

と変形できる. これが最小となるのは $\left|u(1-u) + \frac{\zeta}{2d}\right|$ ($0 < u < 1$) が最大のときである. すなわち, $\left|-(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} + \frac{\zeta}{2d}\right|$ が最大のときであるため, $u = \frac{1}{2}$ のとき $V_1(u)$ の導関数の分子は最小であり,

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(u)}{du} &\geq \frac{-\left(\frac{1}{4} + \frac{\zeta}{2d}\right)^2 + \frac{\zeta^2}{4d^2} + \frac{\zeta}{2d}}{u^2(1-u)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{\zeta}{d} - \frac{1}{4}\right)}{u^2(1-u)^2} \\ &= \frac{\frac{\zeta}{d} - \frac{1}{4}}{4u^2(1-u)^2} \quad (0 < u < 1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

と求まる．この結果から， $\frac{\zeta}{d} > \frac{1}{4}$ のとき関数 $V_1(u)$ は $0 < u < 1$ において狭義単調増加関数であることがわかる．

次に， $V_1(u) = 0$ を満たす u の存在範囲を求める．このとき，(3.4) より

$$-u(1-u)^2 = \frac{\zeta}{d} \left(u - \frac{1}{2} \right)$$

を満たす u の範囲が求める解となる．ここで， $0 < u < 1$ において左辺が負となるため， $\frac{\zeta}{d} > 0$ において $0 < u < \frac{1}{2}$ と求まる．特に， $\frac{\zeta}{d} > \frac{9}{16}$ のとき $0 < u < \frac{1}{2}$ において

$$-u(1-u)^2 = \frac{\zeta}{d} \left(u - \frac{1}{2} \right) < \frac{9}{16} \left(u - \frac{1}{2} \right)$$

と表せる．この式を変形すると次のような不等式が得られる：

$$\begin{aligned} -u(1-2u+u^2) - \frac{9}{16} \left(u - \frac{1}{2} \right) &< 0 \\ -u^3 + 2u^2 - \frac{25}{16}u + \frac{9}{32} &< 0 \\ u^3 - 2u^2 + \frac{25}{16}u - \frac{9}{32} &> 0 \\ \left(u - \frac{1}{4} \right) \left(u^2 - \frac{7}{4}u + \frac{18}{16} \right) &> 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで， $0 < u < \frac{1}{2}$ において

$$u^2 - \frac{7}{4}u + \frac{18}{16} = \left(u - \frac{7}{8} \right)^2 + \frac{23}{64} > 0$$

を満たしているため，不等式 (3.7) より $u - \frac{1}{4} > 0$ でなければならない．よって， $\frac{\zeta}{d} > \frac{9}{16}$ のとき， $\frac{1}{4} < u < \frac{1}{2}$ と求まる．続いて， $V_1(u) = 1$ を満たす u の存在範囲を調べる．このとき，(3.5) より

$$u^2(1-u) = \frac{\zeta}{d} \left(u - \frac{1}{2} \right)$$

を満たす u の範囲が求める解となる．仮定より $\frac{\zeta}{d} > 0$ を満たし， $0 < u < 1$ において左辺は正であるため， $\frac{1}{2} < u < 1$ と求まる．特に， $\frac{\zeta}{d} > \frac{9}{16}$ ならば $\frac{1}{2} < u < 1$ において

$$u^2(1-u) = \frac{\zeta}{d} \left(u - \frac{1}{2} \right) > \frac{9}{16} \left(u - \frac{1}{2} \right)$$

3.2 節 非自明解の存在証明

と表せる．この式を変形すると次のような不等式が得られる：

$$\begin{aligned} -u^3 + u^2 - \frac{9}{16}u + \frac{9}{32} &> 0 \\ u^3 - u^2 + \frac{9}{16}u - \frac{9}{32} &< 0 \\ \left(u - \frac{3}{4}\right) \left(u^2 - \frac{1}{4}u + \frac{3}{8}\right) &< 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

ここで， $\frac{1}{2} < u < 1$ において

$$u^2 - \frac{1}{4}u + \frac{3}{8} = \left(u - \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{23}{64} > 0$$

を満たしているため，(3.8) より $u - \frac{3}{4} < 0$ でなければならない．よって， $\frac{\zeta}{d} > \frac{9}{16}$ のとき $\frac{1}{2} < u < \frac{3}{4}$ と求まる．これらの結果から， $\frac{\zeta}{d} > \frac{9}{16}$ のとき

$$V_1(u) < 0 \quad (0 < u < \frac{1}{4}), \quad V_1(u) > 1 \quad (\frac{3}{4} < u < 1)$$

を満たしている．

次に，関数 $V_1(u)$ と関数 $V_2(u)$ の交点を調べる．関数 $V_2(u)$ は $0 < u < 1$ のとき

$$0 < V_2(u) < 1$$

を満たす．よって， $\frac{\zeta}{d} > \frac{9}{16}$ のとき， $0 < u < \frac{1}{4}$ において

$$V_1(u) < 0 \text{ かつ } 0 < V_2(u) < 1$$

であるため，関数 $V_1(u)$ と関数 $V_2(u)$ の交点は存在しない．また， $\frac{3}{4} < u < 1$ において

$$V_1(u) > 1 \text{ かつ } 0 < V_2(u) < 1$$

であるため，関数 $V_1(u)$ と関数 $V_2(u)$ の交点は存在しない．さらに， $\frac{1}{4} < u < \frac{1}{2}$ において $V_1(u) = 0$ を満たす u を u^* とおくと，

$$0 = V_1(u^*) < V_2(u^*); \quad \frac{1}{4} < u^* < \frac{1}{2} \quad (3.9)$$

を満たす．また， $\frac{1}{2} < u < \frac{3}{4}$ において $V_1(u) = 1$ を満たす u を u^{**} とおくと，

$$V_2(u^{**}) < V_1(u^{**}) = 1; \quad \frac{1}{2} < u^{**} < \frac{3}{4} \quad (3.10)$$

を満たす．したがって， $\frac{1}{4} < u < \frac{3}{4}$ において関数 $V_1(u)$ と関数 $V_2(u)$ の交点は少なくとも一つ存在する．

ここで，関数 $V_2(u)$ の導関数について考える．関数 $V_2(u)$ の導関数は

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(u)}{du} &= \frac{-hf\alpha\chi'(u)e^{\alpha\chi(u)}}{\{fe^{\alpha\chi(u)} + g + h\}^2} \\ &= \frac{hf\alpha 6(-u^2 + u)e^{\alpha\chi(u)}}{\{fe^{\alpha\chi(u)} + g + h\}^2} > 0; \quad 0 < u < 1 \end{aligned}$$

と求まる．ここで， $6(-u^2 + u) = -6(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2}$ の $0 < u < 1$ における最大値は $\frac{3}{2}$ ($u = \frac{1}{2}$) である．したがって，

$$\frac{dV_2(u)}{du} \leq \frac{3hf}{2\{fe^{\alpha\chi(u)} + g + h\}^2} \alpha e^{\alpha\chi(u)}; \quad 0 < u < 1$$

と表せる．また， $0 < u < 1$ において $-1 < \chi(u) < 0$ であるため，

$$\frac{1}{\{fe^{\alpha\chi(u)} + g + h\}^2} < \frac{1}{\{fe^{-\alpha} + g + h\}^2}$$

を満たす．したがって，

$$\frac{dV_2(u)}{du} < \frac{3hf}{2\{fe^{-\alpha} + g + h\}^2} \alpha e^{\alpha\chi(u)}; \quad 0 < u < 1$$

と表せる．ここで，

$$\frac{hfe^{-\alpha}}{\{fe^{-\alpha} + g + h\}^2} < 1$$

であるため，両辺に $\frac{3}{2}\alpha e^{\alpha(\chi(u)+1)}$ を掛けると

$$\frac{3hf}{2\{fe^{-\alpha} + g + h\}^2} \alpha e^{\alpha\chi(u)} < \frac{3}{2}\alpha e^{\alpha(\chi(u)+1)}; \quad 0 < u < 1$$

と表せる．さらに， $\frac{1}{4} < u < \frac{3}{4}$ において， $-\frac{27}{32} < \chi(u) < -\frac{5}{32}$ であるため，

$$\frac{dV_2(u)}{du} < \frac{3}{2}\alpha e^{\frac{27}{32}\alpha} \quad (3.11)$$

を満たす．後の議論のために，

$$\frac{1 + \frac{3}{2}\alpha e^{\frac{27}{32}\alpha}}{4} > \frac{9}{16}$$

3.2 節 非自明解の存在証明

を満たすように α を定める．このとき， α の範囲は

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\alpha e^{\frac{27}{32}\alpha} &> \frac{5}{4} \\ \frac{27}{32}\alpha e^{\frac{27}{32}\alpha} &> \frac{45}{64} \\ \alpha &> \frac{32}{27} W\left(\frac{45}{64}\right)\end{aligned}$$

と決まる．ただし， $W(\cdot)$ は Lambert の W 関数である． $\alpha > \frac{32}{27} W\left(\frac{45}{64}\right)$ において

$$\frac{\zeta}{d} \geq \frac{1 + \frac{3}{2}\alpha e^{\frac{27}{32}\alpha}}{4}$$

と仮定すると，(3.6) と (3.11) より，

$$\frac{dV_1(u)}{du} \geq 4 \left(\frac{\zeta}{d} - \frac{1}{4} \right) \geq \frac{3}{2}\alpha e^{\frac{27}{32}\alpha} > \frac{dV_2(u)}{du}; \quad \frac{1}{4} < u < \frac{3}{4} \quad (3.12)$$

という関係式が成り立つ．ここで， $\frac{\zeta}{d} \geq \frac{1 + \frac{3}{2}\alpha e^{\frac{27}{32}\alpha}}{4} > \frac{9}{16}$ のとき， $0 < u < \frac{1}{4}$ 及び $\frac{3}{4} < u < 1$ の範囲において $V_1(u)$ と $V_2(u)$ の交点は存在せず， $\frac{1}{4} < u < \frac{3}{4}$ において少なくとも1つの交点をもつことに注意する． $V_1(u)$ と $V_2(u)$ の交点の中で u の値が最も小さなものを \bar{u} とおく．このとき，(3.9) 及び (3.10) より， $\frac{1}{4} < u < \bar{u}$ において $V_1(u) < V_2(u)$ ， $\bar{u} < u < \frac{3}{4}$ において $V_2(u) < V_1(u)$ を満たす．また，(3.12) より $V_1(u)$ と $V_2(u)$ が再び交わることはないため， $V_1(u)$ と $V_2(u)$ の交点は $\frac{1}{4} < u < \frac{3}{4}$ において唯一つである．したがって， $\alpha > \frac{32}{27} W\left(\frac{45}{64}\right)$ を満たし，さらに $\frac{\zeta}{d} \geq \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\alpha e^{\frac{27}{32}\alpha}$ を満たすとき， $V_1(u)$ と $V_2(u)$ の交点は $0 < u < 1$ において $(\bar{u}, V_1(\bar{u}))$ の唯一つであることが示せた． \square

議論を戻して，境界値定常問題 (3.2) について定数定常解から分岐する非自明解の存在を調べる．ここで，2次元空間領域 Ω と空間 X, Y を設定する． \mathbb{R}^2 内の空間領域 Ω を次のように設定する：

$$\Omega = \left(0, \frac{\pi}{l}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{3}l}\right); \quad l > 0. \quad (3.13)$$

また， X と Y のそれぞれを $X = H_N^2(\Omega) \times H_N^2(\Omega)$ ，及び $Y = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ と定義された Hilbert 空間とする．ただし， $H_N^2(\Omega) := \{w \in H^2(\Omega); \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ である．定

常問題 (3.2) の第 1 式と第 2 式は写像 $F : X \times \mathbb{R} \rightarrow Y$ により

$$F(u, v, c) = \begin{bmatrix} a\Delta u + df(u, v) - \zeta(u - \frac{1}{2}) \\ b\Delta v + c\nabla \cdot \{v(1-v)\nabla\chi(u)\} - (fe^{\alpha\chi(u)} + \bar{g})v + h \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

と表すことができる．定数定常解 (\bar{u}, \bar{v}) は (3.3) と Lemma 3.1 より唯一つに定まる．このとき, (3.14) の関数 $F(u, v, c)$ の線形化作用素 $F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c)$ は

$$F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c) \begin{bmatrix} k \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\Delta - W & V \\ -cA\Delta + C & b\Delta - B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ h \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

と与えられる．ただし,

$$\begin{aligned} A &:= -\bar{v}(1-\bar{v})\chi'(\bar{u}), & B &:= fe^{\alpha\chi(\bar{u})} + \bar{g}, & C &:= -f\alpha\chi'(\bar{u})e^{\alpha\chi(\bar{u})}\bar{v}, \\ V &:= d\bar{u}(1-\bar{u}), & W &:= \zeta - df_u(\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

である．また, $\chi'(\bar{u}) < 0$ を満たし, 十分小な $\zeta > 0$ において (3.3) の第 1 式より $f_u(\bar{u}, \bar{v}) < 0$ となるため, A, B, C, V, W はそれぞれ正定数とわかる．核空間 $\text{Ker } F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c)$ の次元と基底を得るため, 次の問題について考える:

$$\begin{cases} F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c) \begin{bmatrix} k \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.17)$$

ここで,

$$\phi_m(x) := \cos(lmx), \quad \psi_n(y) := \cos(\sqrt{3}lny) \quad (3.18)$$

としておく．このとき, $\{\phi_m(x)\psi_n(y)\}_{m,n=0}^\infty$ は Hilbert 空間 $H_n^2(\Omega)$ の完全直交系である．実際, $\phi_m(x)\psi_n(y)$ と $\phi_{\bar{m}}(x)\psi_{\bar{n}}(y)$ の内積は

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}l}} \int_0^{\frac{\pi}{l}} \cos(lmx) \cos(\sqrt{3}lny) \cdot \cos(l\bar{m}x) \cos(\sqrt{3}l\bar{n}y) \, dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}l}} \cos(\sqrt{3}lny) \cos(\sqrt{3}l\bar{n}y) \, dy \int_0^{\frac{\pi}{l}} \cos(lmx) \cos(l\bar{m}x) \, dx \end{aligned}$$

3.2 節 非自明解の存在証明

と変形できる．ここで， $\int_0^{\frac{\pi}{l}} \cos(lmx) \cos(l\bar{m}x) dx$ に注目すると， $m \neq \bar{m}$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{l}} \cos(lmx) \cos(l\bar{m}x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{l}} \cos((m + \bar{m})lx) + \cos((m - \bar{m})lx) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(m + \bar{m})l} \sin((m + \bar{m})lx) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(m - \bar{m})l} \sin((m - \bar{m})lx) \right]_0^{\frac{\pi}{l}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である．また， $m = \bar{m}$ ならば

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{l}} \cos(lmx) \cos(l\bar{m}x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{l}} \cos(2mlx) + 1 dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2ml} \sin(2mlx) + x \right]_0^{\frac{\pi}{l}} \\ &= \frac{\pi}{2l} \end{aligned}$$

である．次に， $\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}l}} \cos(\sqrt{3}lny) \cos(\sqrt{3}l\bar{n}y) dy$ についても同様に考える． $n \neq \bar{n}$ のとき，

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}l}} \cos(\sqrt{3}lny) \cos(\sqrt{3}l\bar{n}y) dy = 0$$

と求まり， $n = \bar{n}$ のとき，

$$\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}l}} \cos(\sqrt{3}lny) \cos(\sqrt{3}l\bar{n}y) dy = \frac{\pi}{2\sqrt{3}l}$$

を得る．したがって，

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}l}} \int_0^{\frac{\pi}{l}} \cos(lmx) \cos(\sqrt{3}lny) \cdot \cos(l\bar{m}x) \cos(\sqrt{3}l\bar{n}y) dx dy \\ &= \begin{cases} 0, & (m, n) \neq (\bar{m}, \bar{n}); \\ \frac{\pi^2}{4\sqrt{3}l^2}, & (m, n) = (\bar{m}, \bar{n}) \end{cases} \end{aligned}$$

とまとめられる．よって， $\phi_m(x)\psi_n(y)$ と $\phi_{\bar{m}}(x)\psi_{\bar{n}}(y)$ は完全直交系である．方程式 (3.14) は線形偏微分方程式であり，斉次 Neumann 境界条件を考慮すると，(3.17) を満た

す $T[k(x, y) \ h(x, y)]$ は Fourier 級数を用いて次のように与えられる :

$$k(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} k_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y), \quad h(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} h_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y). \quad (3.19)$$

そして, (3.19) を (3.17) へ代入することで次のような方程式系を得る :

$$\begin{cases} \sum_{m,n=0}^{\infty} [-\{al^2(m^2 + 3n^2) + W\}k_{mn} + Vh_{mn}] \phi_m(x) \psi_n(y) = 0, \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} [\{cAl^2(m^2 + 3n^2) + C\}k_{mn} - \{bl^2(m^2 + 3n^2) + B\}h_{mn}] \phi_m(x) \psi_n(y) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

方程式系 (3.20) において, 適当な $(m, n, c) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{R}$ について

$$\begin{bmatrix} -al^2(m^2 + 3n^2) - W & V \\ cAl^2(m^2 + 3n^2) + C & -bl^2(m^2 + 3n^2) - B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{mn} \\ h_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

と表せる . 式 (3.21) を満たす非自明解 $T[k_{mn} \ h_{mn}]$ が存在するとき, すなわち適当な (m, n, c) に対して

$$\begin{vmatrix} -al^2(m^2 + 3n^2) - W & V \\ cAl^2(m^2 + 3n^2) + C & -bl^2(m^2 + 3n^2) - B \end{vmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

を満たすならば, (3.17) を満たす非自明解が存在する . したがって, (3.17) を満たす非自明解が存在するのは, (3.22) より, 任意の固定した (m, n) に対して

$$c = \frac{\{bl^2(m^2 + 3n^2) + B\}\{al^2(m^2 + 3n^2) + W\} - CV}{AVl^2(m^2 + 3n^2)} (=: c(m, n)) \quad (3.23)$$

なる $c(m, n)$ が存在するときに限る . この $c(m, n)$ を分岐点と呼ぶこととする .

ここで, $N(m, n) := m^2 + 3n^2$ とおき, $(m, n) \mapsto c(m, n)$ が 1 対 1 写像ではないことを確認する . 一つの例として, 任意の $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ に対して

$$N(i, i + 2j) = N(2i + 3j, j) = N(i + 3j, i + j)$$

は常に成り立つ . よって,

$$c(i, i + 2j) = c(2i + 3j, j) = c(i + 3j, i + j) \quad (3.24)$$

3.2 節 非自明解の存在証明

とわかる．このとき，(3.24) より $\dim \text{Ker } F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c(m, n)) \neq 1$ なる (m, n) の組み合わせが存在する：

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker } F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c^*) &= 2, \quad c^* = c(2, 0) = c(1, 1); \\ \dim \text{Ker } F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c^*) &= 3, \quad c^* = c(1, 3) = c(4, 2) = c(5, 1). \end{aligned} \quad (3.25)$$

境界値定常問題 (3.2) について，表記を簡略化するために

$$H(v) := v(1 - v), \quad G(u) := fe^{\alpha\chi(u)} + \bar{g}, \quad z(u) := u - \frac{1}{2}$$

とする．このとき，(3.2) は次のように書き換えられる：

$$\begin{cases} a\Delta u + df(u, v) - \zeta z(u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ b\Delta v + c\nabla \cdot \{H(v)\nabla\chi(u)\} - G(u)v + h = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.26)$$

核空間 $\text{Ker } F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c(m, n))$ の次元が 1 を満たす問題について考える． $\Phi(x, y) := \phi_m(x)\psi_n(y)$ と表す．分岐パラメータ c が (3.23) を満たしているとき，(3.19) は (3.17) の解となる．ここで， h_{mn} を $h_{mn} = 1$ とすると，(3.19) より

$$\text{Ker } F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c(m, n)) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} \bar{k}_{mn}\Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} \right\} \quad (3.27)$$

を得る．ただし， \bar{k}_{mn} は (3.21) より

$$\bar{k}_{mn} = \frac{V}{al^2(m^2 + 3n^2) + W} = \frac{bl^2(m^2 + 3n^2) + B}{cAl^2(m^2 + 3n^2) + C} (> 0) \quad (3.28)$$

と与えられる．ここで， (m, n) の選び方によりストライプパターンもしくは四角形パターンに対応した固有関数 $\Phi(x, y)$ が決定される．ストライプパターンとなる (m, n) の組み合わせは $mn = 0$ ($m \neq n$) を満たすものであり，四角形パターンとなる (m, n) の組み合わせは $mn \neq 0$ を満たすものである．このとき，(3.26) について，分岐点 $c(m, n)$ において自明解から分岐する非自明解は次のように与えられる：

Theorem 3.2. 分岐パラメータ c が (3.23) を満たすとする．ここで， $F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c) := L$ と $F_{(u,v)c}(\bar{u}, \bar{v}, c) := M$ とする．このとき， $\dim \text{Ker } L = 1$ なる (m, n) の組み合わせに

対して, $M \begin{pmatrix} k \\ h \end{pmatrix} \notin \text{Range } L$ を満たすならば, $(\bar{u}, \bar{v}, c(m, n)) \in X \times \mathbb{R}$ の近傍において (3.2) の非自明解 $(u(s), v(s), c(s))$ は次のように表される:

$$\begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \\ c(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ c(m, n) \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \bar{k}_{mn} \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) \\ 0 \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s) \\ \tilde{c}(s) \end{bmatrix}, \quad s \in (-\delta, \delta). \quad (3.29)$$

ただし, $\delta > 0$ は十分小で, $(\tilde{u}(s), \tilde{v}(s), \tilde{c}(s)) \in X \times \mathbb{R}$ は滑らかな関数である.

Proof. 分岐点 (3.23) と基底 (3.27) の下で Crandall-Rabinowitz の分岐定理を適用するには,

$$M \begin{bmatrix} \bar{k}_{mn} \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} \notin \text{Range } L \quad (3.30)$$

を示さなければならない. $F_{(u,v)c}(\bar{u}, \bar{v}, c)$ は, (3.15) より,

$$M = F_{(u,v)c}(\bar{u}, \bar{v}, c(m, n)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -A\Delta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

と求まる. よって,

$$M \begin{bmatrix} \bar{k}_{mn} \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ A\bar{k}_{mn} l^2 (m^2 + 3n^2) \Phi(x, y) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

を得る.

一方, $L = F_{(u,v)c}(\bar{u}, \bar{v}, c)$ の共役作用素を L^* とすると, L^* は次のように与えられる:

$$L^* = \begin{bmatrix} a\Delta - W & -cA\Delta + C \\ V & b\Delta - B \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

ただし, A, B, C, V, W は (3.16) と同一のものである. $\text{Ker } L^*$ について, $\text{Ker } L$ と同様に考えて,

$$k(x, y) = k_{mn}^* \sum_{m,n=0}^{\infty} \Phi(x, y), \quad h(x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \Phi(x, y)$$

と与える. これらを

$$L^* \begin{bmatrix} k \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\Delta - W & -cA\Delta + C \\ V & b\Delta - B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

3.2 節 非自明解の存在証明

へ代入することで次の方程式系を得る：

$$\begin{cases} \sum_{m,n=0}^{\infty} [-\{al^2(m^2 + 3n^2) + W\}k_{mn}^* + \{cAl^2(m^2 + 3n^2) + C\}]\Phi(x, y) = 0, \\ \sum_{m,n=0}^{\infty} [Vk_{mn}^* - \{bl^2(m^2 + 3n^2) + B\}]\Phi(x, y) = 0. \end{cases}$$

よって、適当な $(m, n, c) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{bmatrix} -al^2(m^2 + 3n^2) - W & cAl^2(m^2 + 3n^2) + C \\ V & -bl^2(m^2 + 3n^2) - B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{mn}^* \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

を満たす非自明解 k_{mn}^* が存在するならば、すなわち分岐パラメータ c が

$$\begin{vmatrix} -al^2(m^2 + 3n^2) - W & cAl^2(m^2 + 3n^2) + C \\ V & -bl^2(m^2 + 3n^2) - B \end{vmatrix} = 0$$

を満たすとき、(3.34) は非自明解をもつ。したがって、任意の固定した (m, n) に対して $\dim \text{Ker } L > 0$ なる分岐点 c が存在し、それは

$$c = \frac{\{bl^2(m^2 + 3n^2) + B\}\{al^2(m^2 + 3n^2) + W\} - CV}{AVl^2(m^2 + 3n^2)} \quad (:= c(m, n))$$

の場合に限る。このとき、適当な (m, n) において $\dim \text{Ker } L = 1$ を満たす k_{mn}^* が存在し、(3.33) へ分岐点 $c(m, n)$ を代入したものを L_{mn}^* と表すと、

$$\text{Ker } L_{mn}^* = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} k_{mn}^* \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} \right\} \quad (3.36)$$

と表せる。ただし、(3.35) より

$$k_{mn}^* = \frac{bl^2(m^2 + 3n^2) + B}{V} = \frac{cAl^2(m^2 + 3n^2) + C}{al^2(m^2 + 3n^2) + W} \quad (3.37)$$

と求まる。

Fredholm の択一定理より、 $L_{mn} := F_{(u,v)}(\bar{u}, \bar{v}, c(m, n))$ とすると、

$$\text{Range } L_{mn} = (\text{Ker } L_{mn}^*)^\perp \quad (3.38)$$

と表せる．ここで，(3.32) と (3.36) について L^2 -内積をとると次の結果が得られる：

$$Al^2(m^2 + 3n^2) \iint_{\Omega} \bar{k}_{mn} \phi_m^2(x) \psi_n^2(y) dx dy > 0. \quad (3.39)$$

よって，(3.32) と (3.36) は直交していないため，

$$F_{(u,v)c}(\bar{u}, \bar{v}, c(m, n)) \begin{bmatrix} \bar{k}_{mn} \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} \notin (\text{Ker } L_{mn}^*)^\perp$$

とわかる．したがって， $M_{mn} := F_{(u,v)c}(\bar{u}, \bar{v}, c(m, n))$ とすると，(3.38) より， $\dim \text{Ker } L_{mn} = 1$ を満たす任意の固定した (m, n) について

$$M_{mn} \begin{bmatrix} \bar{k}_{mn} \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} \notin \text{Range } L_{mn}$$

が示された．

したがって，Crandall-Rabinowitz の分岐定理が適用できて，(3.2) の非自明解 $(u(s), v(s), c(s))$ は $s \in (-\delta, \delta)$ において次のように与えられる：

$$\begin{bmatrix} u(s) \\ v(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \bar{k}_{mn} \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y) \end{bmatrix} + s^2 \begin{bmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{v}(s) \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

$$c(s) = c(m, n) + s\hat{c}(s). \quad (3.41)$$

ただし， $(\tilde{u}(s), \tilde{v}(s), \hat{c}(s))$ は滑らかな関数である．これより， $\hat{c}(s)$ が $s = 0$ において $\hat{c}(0) = 0$ を満たすことを示す．関数 $(\tilde{u}(s), \tilde{v}(s)) \in X$ は， $s \in (-\delta, \delta)$ において

$$\begin{aligned} \langle \Phi, \tilde{u}(s) \rangle &:= \iint_{\Omega} \Phi(x, y) \tilde{u}(x, y, s) dx dy = 0, \\ \langle \Phi, \tilde{v}(s) \rangle &:= \iint_{\Omega} \Phi(x, y) \tilde{v}(x, y, s) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (3.42)$$

を満たすことに注意しておく．簡単のため，これ以降は

$$k := \bar{k}_{mn}, \quad c^* := c(m, n)$$

と表す．式 (3.26) の第 2 式に非自明解 (3.40) 及び (3.41) を代入すると，

$$b\Delta v(s) + c(s)\nabla \cdot \{H(v(s))\nabla \chi(u(s))\} - G(u(s))v(s) + h = 0 \quad (3.43)$$

3.2 節 非自明解の存在証明

を得る．方程式 (3.43) の両辺を s について 2 階微分したものは次のように与えられる：

$$\begin{aligned}
& b\Delta v''(s) + c''(s)\nabla \cdot \{H(v(s))\nabla\chi(u(s))\} \\
& + 2c'(s)\nabla \cdot [H_v(v(s))v'(s)\nabla\chi(u(s)) + H(v(s))\nabla\{\chi_u(u(s))u'(s)\}] \\
& + c(s)\nabla \cdot [H_{vv}(v(s))v'(s)^2\nabla\chi(u) + H_v(v(s))v''(s)\nabla\chi(u) \\
& \quad + 2H_v(v(s))v'(s)\nabla\{\chi_u(u(s))u'(s)\}] \\
& \quad + H(v(s))\nabla\{\chi_{uu}(u(s))u'(s)^2 + \chi_u(u(s))u''(s)\}] \\
& - G_{uu}(u(s))u'(s)^2v(s) - G_u(u(s))u''(s)v(s) \\
& - 2G_u(u(s))u'(s)v'(s) - G(u(s))v''(s) = 0.
\end{aligned} \tag{3.44}$$

式 (3.40) と (3.41) より，関数 $(u(s), v(s), c(s))$ は次の 3 式を満たすことがわかる：

$$\begin{aligned}
(u(0), v(0), c(0)) &= (\bar{u}, \bar{v}, c^*), \\
(u'(0), v'(0), c'(0)) &= (k\Phi(x, y), \Phi(x, y), \hat{c}(0)), \\
(u''(0), v''(0)) &= (2\tilde{u}(0), 2\tilde{v}(0)).
\end{aligned} \tag{3.45}$$

よって，(3.45) より，(3.44) に $s = 0$ を代入すると次のようになる：

$$\begin{aligned}
& 2b\Delta\tilde{v}(0) + c''(0)\nabla \cdot \{H(\bar{v})\nabla\chi(\bar{u})\} \\
& + 2\hat{c}(0)\nabla \cdot [H_v(\bar{v})\Phi(x, y)\nabla\chi(\bar{u}) + H(\bar{v})\nabla\{\chi_u(\bar{u})k\Phi(x, y)\}] \\
& + c^*\nabla \cdot [H_{vv}(\bar{v})(\Phi(x, y))^2\nabla\chi(\bar{u}) + 2H_v(\bar{v})\tilde{v}(0)\nabla\chi(\bar{u}) \\
& \quad + 2H_v(\bar{v})\Phi(x, y)\nabla\{\chi_u(\bar{u})k\Phi(x, y)\}] \\
& \quad + H(\bar{v})\nabla\{k^2\chi_{uu}(\bar{u})(\Phi(x, y))^2 + 2\chi_u(\bar{u})\tilde{u}(0)\}] \\
& - G_{uu}(\bar{u})k^2(\Phi(x, y))^2\bar{v} - 2G_u(\bar{u})\tilde{u}(0)\bar{v} - 2G_u(\bar{u})k(\Phi(x, y))^2 - 2G(\bar{u})\tilde{v}(0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

ここで，定数の微分に対応した項を消去して整理すると，(3.46) は

$$\begin{aligned}
& 2b\Delta\tilde{v}(0) + 2kH(\bar{v})\chi_u(\bar{u})\hat{c}(0)\Delta\Phi(x, y) \\
& + 2c^*\{kH_v(\bar{v})\chi_u(\bar{u}) + k^2H(\bar{v})\chi_{uu}(\bar{u})\}\nabla(\Phi(x, y)\nabla\Phi(x, y)) + 2c^*H(\bar{v})\chi_u(\bar{u})\Delta\tilde{u}(0) \\
& - k^2\bar{v}G_{uu}(\bar{u})(\Phi(x, y))^2 - 2\bar{v}G_u(\bar{u})\tilde{u}(0) - 2kG_u(\bar{u})(\Phi(x, y))^2 - 2G(\bar{u})\tilde{v}(0) = 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

と表せる．よって，(3.47) と Φ の内積について整理すると，(3.42) より，

$$\begin{aligned} & 2\rho kH(\bar{v})\chi_u(\bar{u})\|\Phi\|_2^2 \hat{c}(0) \\ & = 2c^* \{kH_v(\bar{v})\chi_u(\bar{u}) + k^2H(\bar{v})\chi_{uu}(\bar{u})\} \{ \langle \Phi, |\nabla\Phi|^2 \rangle - \rho \langle \Phi, \Phi^2 \rangle \} \\ & \quad - (k^2\bar{v}G_{uu}(\bar{u}) + 2kG(\bar{u})) \langle \Phi, \Phi^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.48)$$

と表せる．ただし， ρ は $-\Delta\Phi = \rho\Phi$ in Ω を満たすような正定数である．ここで， $\langle \Phi, \Phi^2 \rangle = 0$ 及び $\langle \Phi, |\nabla\Phi|^2 \rangle = 0$ を満たすことに注意すると，(3.48) の右辺が 0 となるため $\hat{c}(0) = 0$ が求まる．つまり，滑らかな関数 $\tilde{c}(s)$ が存在して， $\hat{c}(s) = s\tilde{c}(s)$ と表せる．したがって，Theorem 3.2 は示された． \square

3.3 まとめ

本章では吸着質誘導相転移系の導入と非自明解の存在証明について記述した．特に，Lemma 3.1 は本研究において新たに導入した補題となる．吸着質誘導相転移系の定常問題について，得られる定数定常解の個数は各パラメータの関係により変化する．複数の定数定常解が存在した場合に，複数の分岐が同時に発生する可能性を含むため，狙った非自明解を正確に捉えられない恐れがある．よって，定数定常解の唯一性を保証するために導入している．

以下で Crandall-Rabinowitz の分岐定理の証明における主要な部分を記述する．1 点目は連続線形汎関数 $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ を用いた点である．分岐方程式を 2 変数実数値関数 $\beta(\mu, s) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ により定義しなおすことで実数の問題へ帰着させている．これにより仮定 (M) の証明は勾配関数を用いて議論することが可能となった．2 点目は勾配関数 $h(\mu, s)$ を用いた点である．これにより仮定 (M) を満たすときに $h(\mu, s)$ に対して陰関数の定理が適用できることを示している．これら 2 点により，非自明解の集合を C^1 級の曲線で表すことができた．

Crandall-Rabinowitz の分岐定理は空間 V と空間 R の位相的補空間 Z の次元がそれぞれ 1 の場合に限り適用できる定理であった．そのため，余次元が 2 以上となる問題に対して直接適用することができない．分岐する非自明解が収まるような（余次元が 1 となる）関数空間に制限して議論すれば，次元が 2 以上の問題であっても，Crandall-Rabinowitz

3.3 節 まとめ

の分岐定理を適用することは可能である。しかしながら、その手法では、存在を証明できる非自明解は捉えようとした解のみであり、定義された空間全体において、その他の非自明解の分岐を調べることはできない。実際、久藤と辻川 [13] の結果では、余次元が 2 の分岐において主要項は $v^* = \Phi_{20} + 2\Phi_{11}$ であったが、第 4 章の結果からわかるように、主要項が $v^* = \Phi_{20} - 2\Phi_{11}$ であるような非自明解の存在が推測できる。ただし、この主要項で構成された非自明解についても、余次元が 1 となるような関数空間を設定してやることで、Crandall-Rabinowitz の分岐定理を適用して存在を証明できると推測される。

空間 V, Z の次元がそれぞれ 2 以上となる問題に対して、解空間を制限することなく、定数定常解から分岐する全ての非自明解を捉えられる手法が必要となる。次の章では、走化性・増殖系に対する空間 V, Z の次元が 2 以上における分岐定理の適用について記述する。

第 4 章 走化性・増殖系に対する分岐解析

本章では反応拡散移流系の一種である走化性・増殖系の非自明解の存在について記述する．久藤等 [12] は Crandall-Rabinowitz の分岐定理を用いることで六角形パターンに対応した非自明解の存在を示した．六角形パターンは 2 つの Fourier モード解が，適当な存在比において，同時に分岐することで発生するが，それは核空間 V の次元が 2 であることを意味する．この問題に対して，久藤等 [12] は核空間の次元が 1 となるような関数空間を用意した．その関数空間は 120 度回転対称性をもったもので，この空間内に限って議論をすることで六角形パターンに対応した非自明解の存在が証明された．しかしながら，この手法は Fourier モード解の存在比が推測できる問題にしか適用できず，さらには狙った非自明解以外の存在については議論することができない．そこで，本研究では Ambrosetti と Prodi [2] により提案された分岐定理に着目した．

Ambrosetti-Prodi の分岐定理は核空間の次元が 2 以上となる問題に対応した分岐定理である．Crandall-Rabinowitz の分岐定理とは異なり，次元によらずに分岐方程式が導出されるという特徴をもつ．非自明解の存在を証明するために必要な仮定は 2 つあり，それらを満たすような $v^* \in V, v^* \neq 0$ が存在するとき，Fourier モード解の存在比が決定されて，非自明解の存在が示される．

4.1 節では走化性・増殖系の導入を行う．4.2 節では走化性・増殖系の分岐方程式を得るために，境界値定常問題に対して分岐問題を考える．また，分岐パラメータが第一分岐点となるための必要十分条件を与える．4.3 節では核空間 V の次元が 2 となる問題に対する Ambrosetti-Prodi の分岐定理の応用とその結果について報告する．4.4 節では核空間 V の次元が 3 となる問題に対する Ambrosetti-Prodi の分岐定理の応用とその結果について報告する．

4.1 走化性・増殖系

大腸菌 *E. coli* が、コロニー内において、巨視的で規則性をもった特徴的な空間パターンを形成することが、Budrene と Berg [3, 4] によって発見された。この現象は拡散や走化性そして増殖といったそれぞれの効果の相互作用により引き起こされる。三村と辻川 [16] は *E. coli* が形成する分布パターンの形成過程のメカニズムを明らかにするために数理モデルとして走化性・増殖系を提案した：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla \rho) + f(u) & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = \Delta \rho - b\rho + cu & \text{in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \rho(x, 0) = \rho_0(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

ここで、 Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ \mathbb{R}^2 内の有界領域である。 b, c, d と χ は正定数である。そして、未知関数 $u(x, t)$ 及び $\rho(x, t)$ は位置 $x \in \Omega$ と時刻 $t \in [0, \infty)$ における個体群密度と 1 個体が生成する化学物質の濃度をそれぞれ表す。各項の効果について以下に記述する。関数 $f(u) = au(1 - \mu u)$ は飽和効果をもつロジスティック成長関数であり、個体数の増加を表す。ただし、 a と μ は正定数である。第 1 式の第 1 項 $d\Delta u$ と第 2 式の第 1 項 $\Delta \rho$ はそれぞれバクテリアと化学物質の拡散を表す。第 1 式の第 2 項 $-\chi \nabla \cdot (u \nabla \rho)$ は走化性の項である。バクテリアの移流はバクテリアが分泌する化学物質の濃度に依存して決定される。ここで、走化性係数 χ はバクテリアの化学物質への反応強度に対応する。第 2 式の第 2 項 $-b\rho$ は自然崩壊による化学物質の減少に対応し、第 3 項 cu はバクテリアが化学物質を生成することによる増加に対応する。

4.2 走化性・増殖系の分岐方程式

次のような (4.1) の定常問題に対して分岐問題を考える：

$$(SE) \quad \begin{cases} d\Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla \rho) + au(1 - \mu u) = 0 & \text{in } \Omega, \\ \Delta \rho - b\rho + cu = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ u \geq 0, \rho \geq 0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

空間領域 Ω を次のように表す：

$$\Omega = \left(0, \frac{\pi}{l}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{3}l}\right). \quad (4.2)$$

ここで, $l > 0$ は分岐を制御するための制御パラメータである. Hilbert 空間 X と Y は

$$X = H_N^2(\Omega) \times H_N^2(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

と与えて, X と Y についてのノルムはそれぞれ

$$\|U\|_X := \sqrt{\|u\|_{H^2}^2 + \|\rho\|_{H^2}^2}, \quad \|U\|_Y := \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|\rho\|_{L^2}^2}, \quad U = {}^T[u \ \rho]$$

と定義する. ただし, $H_N^2(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega); \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ である. このとき, Y における内積は次の通りである：

$$\langle U_1, U_2 \rangle_Y := \langle u_1, u_2 \rangle_{L^2} + \langle \rho_1, \rho_2 \rangle_{L^2}, \quad U_1 = {}^T[u_1 \ \rho_1], \quad U_2 = {}^T[u_2 \ \rho_2] \in Y.$$

以上の設定の下で, (SE) の定数定常解 U^* から分岐する非自明解の存在を証明する. 定数定常解 U^* は, 直接計算より, 次のように与えられる：

$$U^* = \begin{bmatrix} u^* \\ \rho^* \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 1/\mu \\ c/(\mu b) \end{bmatrix}.$$

走化性係数 χ を分岐パラメータとする. また, 作用素 $F : (0, \infty) \times X \rightarrow Y$ に対して,

$$F(\chi, U) := \begin{bmatrix} d\Delta u - \chi \nabla \cdot (u \nabla \rho) + au(1 - \mu u) \\ \Delta \rho - b\rho + cu \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

4.2 節 走化性・増殖系の分岐方程式

とおく．このとき，(SE) についての分岐問題は次のように表される：

$$F(\chi, U) = 0 \in Y, \quad (\chi, U) \in (0, \infty) \times X.$$

式 (4.3) の $U = U^*$ のまわりでの線形化作用素

$$L := F_U(\chi_{\text{cr}}, U^*) \in \mathcal{L}(X; Y)$$

は次のように与えられる：

$$L \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\Delta h - \frac{\chi_{\text{cr}}}{\mu} \Delta k - ah \\ \Delta k + ch - bk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\Delta - a & -\frac{\chi_{\text{cr}}}{\mu} \Delta \\ c & \Delta - b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \in X. \quad (4.4)$$

また， $F(\chi, U)$ に対する 2 階偏微分 $F_{U\chi}(\chi_{\text{cr}}, U^*)$ 及び $F_{UU}(\chi_{\text{cr}}, U^*)$ の成分は

$$M \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = F_{U\chi}(\chi_{\text{cr}}, U^*) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} \Delta k \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} \left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{k} \end{bmatrix} \right) = F_{UU}(\chi_{\text{cr}}, U^*) \left(\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{k} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\chi_{\text{cr}} [\nabla \cdot (h \nabla \tilde{k}) + \nabla \cdot (\tilde{h} \nabla k)] - 2a\mu h \tilde{h} \\ 0 \end{bmatrix}$$

と与えられる．ただし， ${}^T[h \ k], {}^T[\tilde{h} \ \tilde{k}] \in X$ である．上記の計算より， $\chi = \chi_{\text{cr}} + \lambda$ 及び ε が十分小であるとするとき， $(0, v^*) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times V$ の近傍で (SE) についての分岐方程式 $N(\lambda, v) = 0$ が与えられる．ただし， $v^* \in V$ は固定された適当な元である．

分岐方程式 $N(\lambda, v) = 0$ を考えるにあたり，斉次 Neumann 境界条件の下で $L^2(\Omega)$ の直交基底を次のように与える：

$$\{\phi_m(x) \psi_n(y) \mid m, n \geq 0\}; \quad \phi_m(x) = \cos(lmx), \quad \psi_n(y) = \cos(\sqrt{3}lny).$$

このとき， Y の直交基底は

$$\left\{ {}^T [h_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y) \quad k_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y)] \mid m, n \geq 0 \right\}$$

と表せる．この事実から， X の直交基底は自然と Y の直交基底と同様のものになる．Hilbert 空間 X の直交基底に対して， $(0, U^*)$ から分岐するような (SE) の非自明解について考える．ここで， $v^* \neq 0$ であるような $v^* \in V$ が存在するための命題を与える：

Proposition 4.1. 線形化作用素 $L = F_U(\chi, U^*)$ に対して, $V = \text{Ker } L \neq \{0\}$ を満たすような分岐パラメータ χ は

$$\chi = \chi(m, n) := \frac{\mu}{c} \left[dl^2(m^2 + 3n^2) + \frac{ab}{l^2(m^2 + 3n^2)} + a + bd \right] \quad (4.5)$$

のときに限る. 加えて, $\chi(m, n)$ は制御パラメータ l を $l = l_{\text{cr}}(m, n) := \frac{1}{\sqrt{m^2 + 3n^2}} \left(\frac{ab}{d} \right)^{\frac{1}{4}}$ としたとき最小となる:

$$\chi(m, n) \geq \frac{\mu}{c} (\sqrt{a} + \sqrt{bd})^2 := \chi_{\text{cr}}. \quad (4.6)$$

Proof. $\partial\Omega$ 上で斉次 Neumann 境界条件 $\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial k}{\partial n} = 0$ を満たす線形化方程式 $L^T[k \ h] = 0$ について考える. このとき, $h(x, y)$ と $k(x, y)$ に関する Fourier 余弦級数:

$$\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = \sum_{m, n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} h_{mn} \\ k_{mn} \end{bmatrix} \phi_m(x) \psi_n(y) \quad (4.7)$$

を線形化方程式 $F_U(\chi, U^*)^T[h \ k] = 0$ へ代入することで

$$\sum_{m, n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -dl^2(m^2 + 3n^2) - a & \frac{\chi}{\mu} l^2(m^2 + 3n^2) \\ c & -l^2(m^2 + 3n^2) - b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{mn} \\ k_{mn} \end{bmatrix} \phi_m(x) \psi_n(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

を得る. このとき, $\{\phi_m(x) \psi_n(y)\}_{m, n=0}^{\infty}$ は直交基底であるため, 次の方程式を満たすような非自明な Fourier 係数 ${}^T[h_{mn} \ k_{mn}]$ を考えればよい:

$$\begin{bmatrix} -dl^2(m^2 + 3n^2) - a & \frac{\chi}{\mu} l^2(m^2 + 3n^2) \\ c & -l^2(m^2 + 3n^2) - b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{mn} \\ k_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad m, n \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

したがって, (4.8) の非自明解 ${}^T[h_{mn} \ k_{mn}]$ が存在するための必要十分条件は,

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} -dl^2(m^2 + 3n^2) - a & \frac{\chi}{\mu} l^2(m^2 + 3n^2) \\ c & -l^2(m^2 + 3n^2) - b \end{array} \right| \\ & = [dl^2(m^2 + 3n^2) + a][l^2(m^2 + 3n^2) + b] - \chi \frac{c}{\mu} l^2(m^2 + 3n^2) = 0. \quad (4.9) \end{aligned}$$

と与えられる. 式 (4.9) を分岐パラメータ χ について解くことで, (4.5) を得る.

4.3 節 余次元 2 の非自明解の分岐

一方, $\chi(m, n)$ は, (4.5) より, 次のように変形できる:

$$\begin{aligned}
 \chi(m, n) &= \frac{\mu}{c(m^2 + 3n^2)} \left[\frac{dl^4(m^2 + 3n^2)^2 + (a + bd)l^2(m^2 + 3n^2) + ab}{l^2} \right] \\
 &= \frac{\mu}{c(m^2 + 3n^2)} \left[dl^2(m^2 + 3n^2)^2 + \frac{ab}{l^2} + (a + bd)(m^2 + 3n^2) \right] \\
 &\geq \frac{\mu}{c(m^2 + 3n^2)} \left[2\sqrt{dl^2(m^2 + 3n^2)^2 \cdot \frac{ab}{l^2}} + (a + bd)(m^2 + 3n^2) \right] \\
 &= \frac{\mu}{c} \left[2\sqrt{abd} + (a + bd) \right] \\
 &= \frac{\mu}{c} (\sqrt{a} + \sqrt{bd})^2 \\
 &:= \chi_{\text{cr}}.
 \end{aligned}$$

制御パラメータ l が $dl^2(m^2 + 3n^2) = \frac{ab}{l^2(m^2 + 3n^2)}$ を満たすとき, 上記不等式の等号が成立する. したがって, この式を l について解くことで, $l = l_{\text{cr}}(m, n)$ を得る. \square

これ以降, X の直交基底を次のように与える:

$$\Phi_{mn} := \begin{bmatrix} 1 \\ \eta_{mn} \end{bmatrix} \phi_m(x)\psi_n(y).$$

ただし, η_{mn} は $h_{mn} = 1$ とすることで, (4.8) より,

$$\eta_{mn} := \frac{c}{l^2(m^2 + 3n^2) + b} (= k_{mn})$$

と与えられる.

4.3 余次元 2 の非自明解の分岐

核空間 V が 2 つの直交基底をもつような最小の Fourier モードは (m, n) が $(2, 0)$ と $(1, 1)$ のときである. 実際, $m^2 + 3n^2 = 2^2 + 3 \cdot 0^2 = 1^2 + 3 \cdot 1^2 = 4$ を満たしており, $m^2 + 3n^2 \leq 3$ において (m, n) の二重解は存在しない. 本節では, 核空間の次元が 2 となる (m, n) の組み $(2, 0)$ と $(1, 1)$ に対する, 余次元が 1 という制限のない, 非自明解の存在証明について記述する. 本研究では, 走化性・増殖系に対して核空間 V の次元が 2

以上の問題に対応する Theorem 2.6 の適用を試みた．結果として，Theorem 2.6 の条件 (a) と (b) を満たすような $v^* \in V$ が存在するとき，久藤等 [12] が捉えていなかった非自明解の存在を示すことができた．Proposition 4.1 より， $(m, n) = (2, 0), (1, 1)$ において， $l = l_{\text{cr}}(2, 0) = l_{\text{cr}}(1, 1) = \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{d} \right)^{\frac{1}{4}}$ のとき $\chi = \chi_{\text{cr}}$ となる．以降，本節内では表記の単純化のため， $l_{\text{cr}}(2, 0) = l_{\text{cr}}(1, 1)$ を l_{cr} と表すこととする．

核空間 V の次元は 2 であり，次のように表せる：

$$V = \text{span} \{ \Phi_{20}, \Phi_{11} \}.$$

Hilbert 空間 Y の部分空間 R と Hilbert 空間 X の部分空間 W は線形化作用素 $L|_W$ において同型であるため， R の位相的補空間 Z は X と同じ基底で張られる：

$$Z = \text{span} \{ \Phi_{20}, \Phi_{11} \}.$$

このとき，射影作用素 $P : Y \rightarrow Z$ は次のように導かれる：

$$\begin{aligned} P\Phi &= \frac{\langle \Phi, \Phi_{20} \rangle_Y}{\|\Phi_{20}\|_Y^2} \Phi_{20} + \frac{\langle \Phi, \Phi_{11} \rangle_Y}{\|\Phi_{11}\|_Y^2} \Phi_{11} \\ &= \frac{1}{1 + \eta_{20}^2} \left(\frac{\langle \Phi, \Phi_{20} \rangle_Y}{\|\phi_2(x)\psi_0(y)\|_{L^2}^2} \Phi_{20} + \frac{\langle \Phi, \Phi_{11} \rangle_Y}{\|\phi_1(x)\psi_1(y)\|_{L^2}^2} \Phi_{11} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2}{\pi^2(1 + \eta_{20}^2)} (\langle \Phi, \Phi_{20} \rangle_Y \Phi_{20} + 2\langle \Phi, \Phi_{11} \rangle_Y \Phi_{11}) \in Z, \quad \Phi \in Y. \end{aligned}$$

ただし， $\phi_m(x)\psi_n(y)$ の L^2 ノルムの一般形は，直接計算より，

$$\|\phi_m(x)\psi_n(y)\|_{L^2}^2 = \begin{cases} \frac{\pi^2}{4\sqrt{3}l^2}, & mn \neq 0; \\ \frac{\pi^2}{2\sqrt{3}l^2}, & mn = 0, (m, n) \neq (0, 0). \end{cases} \quad (4.10)$$

と与えられる．

これより，Theorem 2.6 の条件 (a) と (b) を満たすような $v^* \in V$ を求める．そこで， $v^* \in V$ を次のように与える：

$$v^* = \alpha \Phi_{20} + \beta \Phi_{11} := \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{bmatrix} \in V; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

4.3 節 余次元 2 の非自明解の分岐

まず, v^* が条件 (a) を満たすように α と β を決定する. 式 (4.11) より, Mv^* と $\mathcal{B}[v^*, v^*]$ は次のように計算できる:

$$\begin{aligned}
 Mv^* &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} \Delta v_2^* \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{\eta_{20}}{\mu} \Delta (\alpha \phi_2(x) + \beta \phi_1(x) \psi_1(y)) \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu} (\alpha \phi_2(x) + \beta \phi_1(x) \psi_1(y)) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}[v^*, v^*] &= \begin{bmatrix} -2 [\chi_{\text{cr}} (\nabla \cdot (v_1^* \nabla v_2^*)) + a\mu (v_1^*)^2] \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2 [\eta_{20} \chi_{\text{cr}} (\nabla \cdot (v_1^* \nabla v_1^*)) + a\mu (v_1^*)^2] \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{20} \chi_{\text{cr}} \left(2 \frac{\partial}{\partial x} (v_{1x}^* v_1^*) + 2 \frac{\partial}{\partial y} (v_{1y}^* v_1^*) \right) - 2a\mu (v_1^*)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{20} \chi_{\text{cr}} \left(\frac{\partial}{\partial x} (v_{1x}^* v_1^* + v_1^* v_{1x}^*) + \frac{\partial}{\partial y} (v_{1y}^* v_1^* + v_1^* v_{1y}^*) \right) - 2a\mu (v_1^*)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{20} \chi_{\text{cr}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} v_1^* v_1^* \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} v_1^* v_1^* \right) \right) - 2a\mu (v_1^*)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{20} \chi_{\text{cr}} \Delta (v_1^*)^2 - 2a\mu (v_1^*)^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

式 (4.12) より Mv^* と V の基底 Φ_{20} と Φ_{11} との内積は, 直接計算より, それぞれ次のように求まる:

$$\begin{aligned}
 \langle Mv^*, \Phi_{20} \rangle_Y &= \left\langle \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu} (\alpha \phi_2(x) + \beta \phi_1(x) \psi_1(y)), \phi_2(x) \psi_0(y) \right\rangle_{L^2} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}l}} \int_0^{\frac{\pi}{l}} \phi_2(x) \psi_0(y) \left[\frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu} (\alpha \phi_2(x) + \beta \phi_1(x) \psi_1(y)) \right] dx dy \\
 &= \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} \alpha}{\mu} \|\phi_2(x)\|_{L^2}^2 \\
 &= \frac{2\eta_{20} \pi^2}{\sqrt{3}\mu} \alpha,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle Mv^*, \Phi_{11} \rangle_Y &= \left\langle \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu} (\alpha \phi_2(x) + \beta \phi_1(x) \psi_1(y)), \phi_1(x) \psi_1(y) \right\rangle_{L^2} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}l}} \int_0^{\frac{\pi}{l}} \phi_1(x) \psi_1(y) \left[\frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu} (\alpha \phi_2(x) + \beta \phi_1(x) \psi_1(y)) \right] dx dy \\
 &= \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} \beta}{\mu} \|\phi_1(x) \psi_1(y)\|_{L^2}^2 \\
 &= \frac{\eta_{20} \pi^2}{\sqrt{3} \mu} \beta.
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 PMv^* &= \frac{2\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2}{\pi^2(1+\eta_{20}^2)} \left(\frac{2\eta_{20}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \alpha \Phi_{20} + 2 \frac{\eta_{20}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \beta \Phi_{11} \right) \\
 &= \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} (\alpha \Phi_{20} + \beta \Phi_{11}) \tag{4.14}
 \end{aligned}$$

を得る．一方，式 (4.13) より $\mathcal{B}[v^*, v^*]$ と V の各基底との内積は， Mv^* と同様の議論により，

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{B}[v^*, v^*], \Phi_{20} \rangle_Y &= \frac{(2\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} - a\mu) \pi^2}{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2} \beta^2, \\
 \langle \mathcal{B}[v^*, v^*], \Phi_{11} \rangle_Y &= \frac{(2\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} - a\mu) \pi^2}{2\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2} \alpha \beta
 \end{aligned}$$

と求まるため，

$$P\mathcal{B}[v^*, v^*] = \frac{2\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} - a\mu}{2(1+\eta_{20}^2)} (\beta^2 \Phi_{20} + 4\alpha\beta \Phi_{11}) \tag{4.15}$$

を得る．したがって，(4.14) と (4.15) より，Theorem 2.6 の条件 (a) は

$$\begin{aligned}
 PMv^* + \frac{1}{2} P\mathcal{B}[v^*, v^*] &= \frac{1}{4(1+\eta_{20}^2)\mu} [16l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} \alpha + \mu(2\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} - a\mu) \beta^2] \Phi_{20} \\
 &\quad + \frac{\beta}{(1+\eta_{20}^2)\mu} [4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} + \mu(2\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} - a\mu) \alpha] \Phi_{11} = 0 \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

と表される．固有関数 Φ_{20} 及び Φ_{11} は Hilbert 空間 Y において一次独立であるため，(4.16) より Theorem 2.6 の条件 (a) は次のような方程式系へと帰着する：

$$\begin{cases} 16l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} \alpha + \mu (2\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} - a\mu) \beta^2 = 0, \\ 4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} \beta + \mu (2\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} - a\mu) \alpha \beta = 0. \end{cases}$$

4.3 節 余次元 2 の非自明解の分岐

よって，上記方程式系より， $2\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{20} - a\mu \neq 0$ という条件の下で係数 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ が求まり，それらは $(\alpha, \beta) = (A, -2A), (A, 2A)$ である．ただし， $A = -\frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(2\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{20} - a\mu)}$ である．ここで， $(m, n) = (2, 0), (1, 1)$ において，直接計算より，

$$l_{\text{cr}}^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{ab}{d}}, \quad \chi_{\text{cr}} = \frac{\mu}{c}(\sqrt{a} + \sqrt{bd})^2, \quad \eta_{20} = \frac{c\sqrt{d}}{\sqrt{ab} + b\sqrt{d}}$$

と与えられる．このとき，

$$\begin{aligned} l_{\text{cr}}^2\eta_{20} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{ab}{d}} \cdot \frac{c\sqrt{d}}{\sqrt{ab} + b\sqrt{d}} = \frac{c}{4} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{bd}}, \\ \chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{20} &= \frac{\mu}{c}(\sqrt{a} + \sqrt{bd})^2 \cdot \frac{c\sqrt{a}}{4(\sqrt{a} + \sqrt{bd})} = \frac{\mu(a + \sqrt{abd})}{4} \end{aligned} \quad (4.17)$$

と求まる．式 (4.17) より， $2\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{20} - a\mu \neq 0$ は

$$2\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{20} - a\mu = \frac{\mu(\sqrt{abd} - a)}{2} = \frac{\mu\sqrt{a}(\sqrt{bd} - \sqrt{a})}{2} \neq 0$$

と表されるため，条件式は

$$a - bd \neq 0$$

と書き換えられる．同様に， $A = -\frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(2\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{20} - a\mu)}$ は

$$A = -\frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{bd}} \cdot \frac{2}{\mu^2\sqrt{a}(\sqrt{bd} - \sqrt{a})} = \frac{2c}{\mu^2(a - bd)}$$

と書き換えられる．したがって， $a - bd \neq 0$ という条件の下で，Theorem 2.6 の条件 (a) を満たすような v^* として次の 2 つの候補が挙げられる：

$$v^* = A(\Phi_{20} - 2\Phi_{11}), \quad A(\Phi_{20} + 2\Phi_{11}); \quad A = \frac{2c}{\mu^2(a - bd)}. \quad (4.18)$$

式 (4.18) のそれぞれの関数の形状を Figure 1 に表示しておく．ここで， $v^* = A(\Phi_{20} + 2\Phi_{11})$ は久藤等 [12] がすでに存在を証明した非自明解の主要項に対応している．条件 (a) について考えることで，新たに $v^* = A(\Phi_{20} - 2\Phi_{11})$ が主要項の候補として発見できた．これは久藤等 [12] が捉えていない非自明解の候補である．実際， $v^* = A(\Phi_{20} - 2\Phi_{11})$ は空間領域 Ω 内において 120 度回転対称性をもたないことが Figure 2 より確認できる．

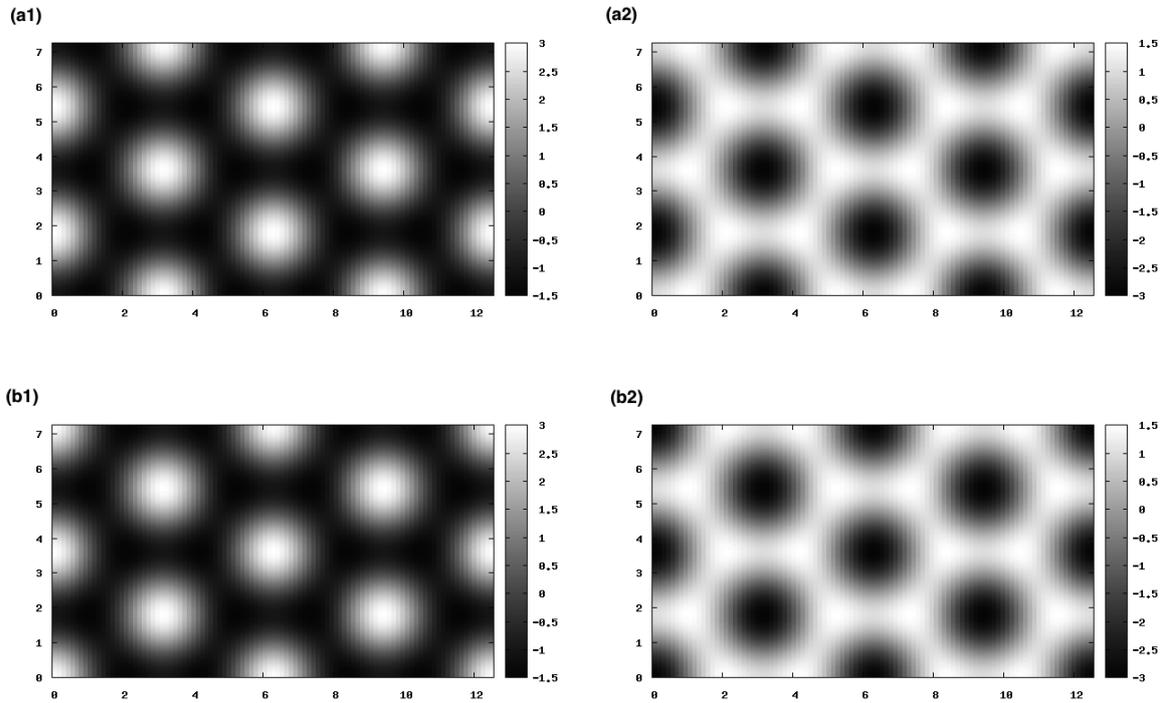


Figure 1: これらは 2 次元核空間 $V = \text{span}\{\Phi_{20}, \Phi_{11}\}$ に属する関数 v^* を表示したものである . 空間領域 Ω は $\Omega = (0, 4\pi) \times (0, 4\sqrt{3}\pi)$ と設定している . 単純化のために , A を 1 もしくは -1 と選択している . (a1) $A = 1 > 0$ における $v^* = A(\Phi_{20} - 2\Phi_{11})$. (a2) $A = -1 < 0$ における $v^* = A(\Phi_{20} - 2\Phi_{11})$. (b1) $A = 1 > 0$ における $v^* = A(\Phi_{20} + 2\Phi_{11})$. (b2) $A = -1 < 0$ における $v^* = A(\Phi_{20} + 2\Phi_{11})$

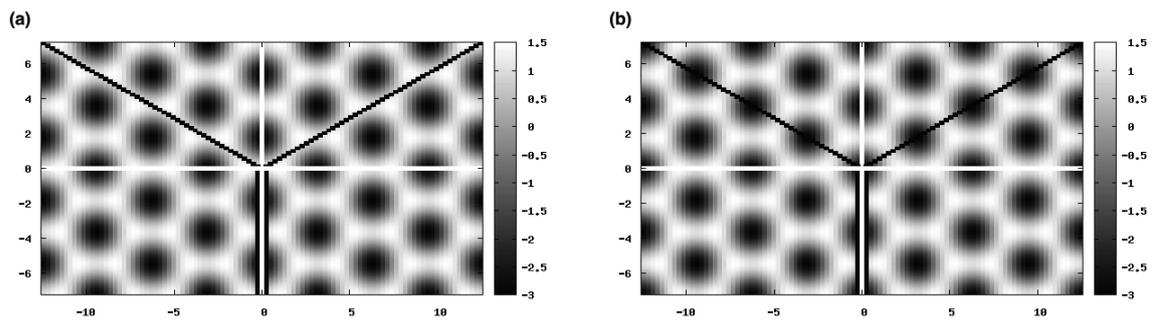


Figure 2: Figure 1 の (a2) と (b2) について空間領域を $(-4\pi, 4\pi) \times (-4\sqrt{3}\pi, 4\sqrt{3}\pi)$ へ拡張している . 図内の白い線は x 軸と y 軸にそれぞれ対応している . また , 図内の黒い線は $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$ の方向をそれぞれ表した補助線である . (a) $A = -1 < 0$ における $v^* = A(\Phi_{20} - 2\Phi_{11})$ で , 120 度回転対称性をもたない . (b) $A = -1 < 0$ における $v^* = A(\Phi_{20} + 2\Phi_{11})$ で , 120 度回転対称性をもつ .

4.3 節 余次元 2 の非自明解の分岐

続いて、条件 (b) について考える．具体的には、条件 (a) で求めた $v^* \in V$ の候補 (4.18) の中から 1 つ固定し、 $Sv = PMv + PB[v^*, v]$ と定義された作用素 $S : V \rightarrow Z$ が逆をもつことを示す．結論から述べると、(4.18) の全ての候補について、作用素 S が逆をもつことを示せる．このとき、(4.18) のどちらの候補 v^* に固定しても、同様の結果が導き出される．そこで、本論文では (4.18) の中から

$$v^* = A(\Phi_{20} - 2\Phi_{11}); \quad A = \frac{2c}{\mu^2(a - bd)}$$

に固定し、条件 (b) の証明について記述する．ここで、 $v^* = A(\Phi_{20} + 2\Phi_{11})$ についても、同様の議論により証明できることを注意しておく．まず、条件 (b) で扱う $v \in V$ を次のように与える：

$$v = \eta \Phi_{20} + \zeta \Phi_{11} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \quad \eta, \zeta \in \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

このとき、条件 (b) の Mv と $B[v^*, v]$ は次のように求まる：

$$\begin{aligned} Mv &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} \Delta v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\eta_{20}}{\mu} \Delta v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\eta_{20}}{\mu} \Delta [\eta \phi_2(x) + \zeta \phi_1(x) \psi_1(y)] \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4l_{cr}^2 \eta_{20}}{\mu} [\eta \phi_2(x) + \zeta \phi_1(x) \psi_1(y)] \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}[v^*, v] &= \begin{bmatrix} -\chi_{\text{cr}} [\nabla \cdot (v_1^* \nabla v_2) + \nabla \cdot (v_1 \nabla v_2^*)] - 2a\mu v_1^* v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{20} \chi_{\text{cr}} [\nabla \cdot (v_1^* \nabla v_1) + \nabla \cdot (v_1 \nabla v_1^*)] - 2a\mu v_1^* v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{20} \chi_{\text{cr}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (v_1^* v_{1x}) + \frac{\partial}{\partial y} (v_1^* v_{1y}) + \frac{\partial}{\partial x} (v_1 v_{1x}^*) + \frac{\partial}{\partial y} (v_1 v_{1y}^*) \right] - 2a\mu v_1^* v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{20} \chi_{\text{cr}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (v_1^* v_{1x} + v_1 v_{1x}^*) + \frac{\partial}{\partial y} (v_1^* v_{1y} + v_1 v_{1y}^*) \right] - 2a\mu v_1^* v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{20} \chi_{\text{cr}} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_1^* v_1) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (v_1^* v_1) \right] - 2a\mu v_1^* v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{20} \chi_{\text{cr}} \Delta (v_1^* v_1) - 2a\mu v_1^* v_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

式 (4.20) より Mv と V の基底 Φ_{20} と Φ_{11} との内積は、直接計算より、それぞれ次のように求まる：

$$\begin{aligned}
 \langle Mv, \Phi_{20} \rangle_Y &= \left\langle \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu} (\eta \phi_2(x) + \zeta \phi_1(x) \psi_1(y)), \phi_2(x) \psi_0(y) \right\rangle_{L^2} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}i}} \int_0^{\frac{\pi}{i}} \phi_2(x) \psi_0(y) \left[\frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu} (\eta \phi_2(x) + \zeta \phi_1(x) \psi_1(y)) \right] dx dy \\
 &= \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} \eta}{\mu} \|\phi_2(x)\|_{L^2}^2 \\
 &= \frac{2\eta_{20} \pi^2}{\sqrt{3}\mu} \eta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle Mv, \Phi_{11} \rangle_Y &= \left\langle \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu} (\eta \phi_2(x) + \zeta \phi_1(x) \psi_1(y)), \phi_1(x) \psi_1(y) \right\rangle_{L^2} \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}i}} \int_0^{\frac{\pi}{i}} \phi_1(x) \psi_1(y) \left[\frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20}}{\mu} (\eta \phi_2(x) + \zeta \phi_1(x) \psi_1(y)) \right] dx dy \\
 &= \frac{4l_{\text{cr}}^2 \eta_{20} \zeta}{\mu} \|\phi_1(x) \psi_1(y)\|_{L^2}^2 \\
 &= \frac{\eta_{20} \pi^2}{\sqrt{3}\mu} \zeta.
 \end{aligned}$$

4.3 節 余次元 2 の非自明解の分岐

よって,

$$\begin{aligned} PMv &= \frac{2\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2}{\pi^2(1+\eta_{20}^2)} \left(\frac{2\eta_{20}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \eta \Phi_{20} + 2\frac{\eta_{20}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \zeta \Phi_{11} \right) \\ &= \frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} (\eta\Phi_{20} + \zeta\Phi_{11}) \end{aligned} \quad (4.22)$$

を得る. 一方, 式 (4.21) より $\mathcal{B}[v^*, v]$ と V の各基底との内積は, Mv と同様の議論により,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}[v^*, v], \Phi_{20} \rangle_Y &= \frac{\sqrt{3}\eta_{20}\pi^2}{3\mu} \zeta, \\ \langle \mathcal{B}[v^*, v], \Phi_{11} \rangle_Y &= \frac{\sqrt{3}\eta_{20}\pi^2}{3\mu} (\eta - \zeta) \end{aligned}$$

と求まるため,

$$P\mathcal{B}[v^*, v] = \frac{2l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} [\zeta\Phi_{20} + 2(\eta - \zeta)\Phi_{11}] \quad (4.23)$$

を得る. (4.22) と (4.23) より, $PMv + P\mathcal{B}[v^*, v]$ における Φ_{20} と Φ_{11} のそれぞれについて係数をまとめておく. 固有関数 Φ_{20} の係数は

$$\frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} \eta + \frac{2l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} \zeta$$

と求まる. 一方, 固有関数 Φ_{11} の係数は

$$\begin{aligned} &\frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} \zeta + \frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} (\eta - \zeta) \\ &= \frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} \eta \end{aligned}$$

と求まる. したがって, Theorem 2.6 の条件 (b) の Sv は次のように与えられる:

$$\begin{aligned} Sv &= \left(\frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} \eta + \frac{2l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} \zeta \right) \Phi_{20} + \frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} \eta \Phi_{11} \\ &:= \left(\tilde{S}_{11}\eta + \tilde{S}_{12}\zeta \right) \Phi_{20} + \left(\tilde{S}_{21}\eta + \tilde{S}_{22}\zeta \right) \Phi_{11}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

ただし,

$$\tilde{S}_{11} := \frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)}, \quad \tilde{S}_{12} := \frac{2l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)}, \quad \tilde{S}_{21} := \frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)}, \quad \tilde{S}_{22} := 0$$

である．式 (4.24) において，作用素 S の表現行列を導出して逆をもつための条件を考える．式 (4.24) を変形することで，作用素 S の表現行列 \tilde{S} は次のように求まる：

$$\begin{aligned}
 Sv &= \left(\tilde{S}_{11}\eta + \tilde{S}_{12}\zeta \right) \Phi_{20} + \left(\tilde{S}_{21}\eta + \tilde{S}_{22}\zeta \right) \Phi_{11} \\
 &= \begin{bmatrix} \Phi_{20} & \Phi_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11}\eta + \tilde{S}_{12}\zeta \\ \tilde{S}_{21}\eta + \tilde{S}_{22}\zeta \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \Phi_{20} & \Phi_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \\
 &:= \begin{bmatrix} \Phi_{20} & \Phi_{11} \end{bmatrix} \tilde{S} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

ただし，

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} & \frac{2l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} \\ \frac{4l_{\text{cr}}^2\eta_{20}}{\mu(1+\eta_{20}^2)} & 0 \end{bmatrix}$$

である．表現行列 \tilde{S} が正則行列であるならば， $\dim V = \dim Z$ を満たしているため， $S : V \rightarrow Z$ は同型写像であることがいえる．すなわち， S は逆をもつことが示される．表現行列 \tilde{S} の行列式は，直接計算より，

$$\det \tilde{S} = -\frac{8l_{\text{cr}}^4\eta_{20}^2}{\mu^2(1+\eta_{20}^2)^2} \neq 0$$

であるため， \tilde{S} は正則行列となる．したがって， S は逆をもつことが示された．

これらの結果から， $(m, n) = (2, 0), (1, 1)$ において次のような定理にたどり着く：

Theorem 4.2. 固有関数 $v^* \in V$ を (4.18) で定義された関数とし， $l = l_{\text{cr}}(2, 0)$ 及び $\chi = \chi_{\text{cr}}$ とする．このとき，

$$a - bd \neq 0$$

という条件の下で， (χ_{cr}, U^*) から分岐する (SE) の非自明解 $(\chi(\lambda), U(\lambda)) \in (0, \infty) \times X$ が存在し，

$$\chi(\lambda) = \chi_{\text{cr}} + \lambda, \quad U(\lambda) = U^* + \lambda[v^* + \lambda\tilde{v}(\lambda)]$$

と表される．ただし， $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ は十分小で， $\tilde{v}(\lambda)$ は滑らかな λ の関数である．

4.4 余次元 3 の非自明解の分岐

核空間 V が 3 つの直交基底をもつような最小の Fourier モードは (m, n) が $(1, 3)$ と $(4, 2)$ と $(5, 1)$ のときである．実際, $m^2 + 3n^2 = 1^2 + 3 \cdot 3^2 = 4^2 + 3 \cdot 2^2 = 5^2 + 3 \cdot 1^2 = 28$ を満たしており, $m^2 + 3n^2 \leq 27$ において (m, n) の三重解は存在しない．本節では, 核空間 V の次元が 3 となる (m, n) の組み $(1, 3)$ と $(4, 2)$ と $(5, 1)$ に対する非自明解の存在証明について記述する．4.3 節と同様に, 走化性・増殖系に対して Theorem 2.6 を適用することで非自明解の存在について調べた．結果として, 核空間 V の次元が 3 において, 定数定常解から分岐する 4 本の非自明解が存在することを示すことができた．3 次元の分岐は久藤等 [12] によって解析されていない問題である．Proposition 4.1 より, $(m, n) = (1, 3), (4, 2), (5, 1)$ において, $l = l_{\text{cr}}(1, 3) = l_{\text{cr}}(4, 2) = l_{\text{cr}}(5, 1) = \frac{\sqrt{7}}{14} \left(\frac{ab}{d}\right)^{\frac{1}{4}}$ のとき $\chi = \chi_{\text{cr}}$ となる．以降, 本節内では表記の単純化のために $l_{\text{cr}}(1, 3) = l_{\text{cr}}(4, 2) = l_{\text{cr}}(5, 1)$ を l_{cr} と表すこととする．

核空間 V の次元は 3 であり, 次のように表せる：

$$V = \text{span} \{ \Phi_{13}, \Phi_{42}, \Phi_{51} \}.$$

Hilbert 空間 Y の部分空間 R と Hilbert 空間 X の部分空間 W は線形化作用素 $L|_W$ において同型であるため, R の位相的補空間 Z は X と同じ基底で張られる：

$$Z = \text{span} \{ \Phi_{13}, \Phi_{42}, \Phi_{51} \}.$$

このとき, 射影作用素 $P : Y \rightarrow Z$ は次のように導かれる：

$$\begin{aligned} P\Phi &= \frac{\langle \Phi, \Phi_{13} \rangle_Y}{\|\Phi_{13}\|_Y^2} \Phi_{13} + \frac{\langle \Phi, \Phi_{42} \rangle_Y}{\|\Phi_{42}\|_Y^2} \Phi_{42} + \frac{\langle \Phi, \Phi_{51} \rangle_Y}{\|\Phi_{51}\|_Y^2} \Phi_{51} \\ &= \frac{1}{1 + \eta_{13}^2} \left(\frac{\langle \Phi, \Phi_{13} \rangle_Y}{\|\phi_1(x)\psi_3(y)\|_{L^2}^2} \Phi_{13} + \frac{\langle \Phi, \Phi_{42} \rangle_Y}{\|\phi_4(x)\psi_2(y)\|_{L^2}^2} \Phi_{42} + \frac{\langle \Phi, \Phi_{51} \rangle_Y}{\|\phi_5(x)\psi_1(y)\|_{L^2}^2} \Phi_{51} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2}{\pi^2(1 + \eta_{13}^2)} (\langle \Phi, \Phi_{13} \rangle_Y \Phi_{13} + \langle \Phi, \Phi_{42} \rangle_Y \Phi_{42} + \langle \Phi, \Phi_{51} \rangle_Y \Phi_{51}) \in Z, \quad \Phi \in Y. \end{aligned}$$

ただし, $(m, n) = (1, 3), (4, 2), (5, 1)$ において $mn \neq 0$ であるため, (4.10) より,

$$\|\phi_1(x)\psi_3(y)\|_{L^2}^2 = \|\phi_4(x)\psi_2(y)\|_{L^2}^2 = \|\phi_5(x)\psi_1(y)\|_{L^2}^2 = \frac{\pi^2}{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2}$$

と求まる．

これより，Theorem 2.6 の条件 (a) と (b) を満たすような $v^* \in V$ を求める．そこで， $v^* \in V$ を次のように与える：

$$v^* = \alpha \Phi_{13} + \beta \Phi_{42} + \gamma \Phi_{51} := \begin{bmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{bmatrix} \in V; \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (4.26)$$

まず， v^* が条件 (a) を満たすように α と β と γ を決定する．式 (4.26) より， Mv^* と $\mathcal{B}[v^*, v^*]$ は次のように計算できる：

$$\begin{aligned} Mv^* &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} \Delta v_2^* \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\eta_{13}}{\mu} \Delta (\alpha \phi_1(x) \psi_3(y) + \beta \phi_4(x) \psi_2(y) + \gamma \phi_5(x) \psi_1(y)) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu} (\alpha \phi_1(x) \psi_3(y) + \beta \phi_4(x) \psi_2(y) + \gamma \phi_5(x) \psi_1(y)) \\ 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}[v^*, v^*] &= \begin{bmatrix} -2 [\chi_{\text{cr}} (\nabla \cdot (v_1^* \nabla v_2^*)) + a\mu (v_1^*)^2] \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 [\eta_{13} \chi_{\text{cr}} (\nabla \cdot (v_1^* \nabla v_1^*)) + a\mu (v_1^*)^2] \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\eta_{13} \chi_{\text{cr}} \Delta (v_1^*)^2 - 2a\mu (v_1^*)^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

式 (4.27) より Mv^* と V の基底 Φ_{13} と Φ_{42} と Φ_{51} との内積は，直接計算より，それぞれ次のように求まる：

$$\begin{aligned} \langle Mv^*, \Phi_{13} \rangle_Y &= \left\langle \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu} (\alpha \phi_1(x) \psi_3(y) + \beta \phi_4(x) \psi_2(y) + \gamma \phi_5(x) \psi_1(y)), \phi_1(x) \psi_3(y) \right\rangle_{L^2} \\ &= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \alpha}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}l}} \int_0^{\frac{\pi}{l}} [\phi_1(x) \psi_3(y)]^2 dx dy \\ &= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \alpha}{\mu} \|\phi_1(x) \psi_3(y)\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{7\eta_{13} \pi^2}{\sqrt{3}\mu} \alpha, \end{aligned}$$

4.4 節 余次元 3 の非自明解の分岐

$$\begin{aligned}
 \langle Mv^*, \Phi_{42} \rangle_Y &= \left\langle \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu} (\alpha \phi_1(x) \psi_3(y) + \beta \phi_4(x) \psi_2(y) + \gamma \phi_5(x) \psi_1(y)), \phi_4(x) \psi_2(y) \right\rangle_{L^2} \\
 &= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \beta}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3i}}} \int_0^{\frac{\pi}{l}} [\phi_4(x) \psi_2(y)]^2 dx dy \\
 &= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \beta}{\mu} \|\phi_4(x) \psi_2(y)\|_{L^2}^2 \\
 &= \frac{7\eta_{13} \pi^2}{\sqrt{3}\mu} \beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle Mv^*, \Phi_{51} \rangle_Y &= \left\langle \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu} (\alpha \phi_1(x) \psi_3(y) + \beta \phi_4(x) \psi_2(y) + \gamma \phi_5(x) \psi_1(y)), \phi_5(x) \psi_1(y) \right\rangle_{L^2} \\
 &= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \gamma}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3i}}} \int_0^{\frac{\pi}{l}} [\phi_5(x) \psi_1(y)]^2 dx dy \\
 &= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \gamma}{\mu} \|\phi_5(x) \psi_1(y)\|_{L^2}^2 \\
 &= \frac{7\eta_{13} \pi^2}{\sqrt{3}\mu} \gamma.
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 PMv^* &= \frac{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2}{\pi^2(1+\eta_{13}^2)} \left(\frac{7\eta_{13}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \alpha \Phi_{13} + \frac{7\eta_{13}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \beta \Phi_{42} + \frac{7\eta_{13}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \gamma \Phi_{51} \right) \\
 &= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu(1+\eta_{13}^2)} (\alpha \Phi_{13} + \beta \Phi_{42} + \gamma \Phi_{51}) \tag{4.29}
 \end{aligned}$$

を得る. 一方, 式 (4.28) より $\mathcal{B}[v^*, v^*]$ と V の各基底との内積は, Mv^* と同様の議論により,

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{B}[v^*, v^*], \Phi_{13} \rangle_Y &= \frac{(14\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} - a\mu)\pi^2}{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2} \beta \gamma, \\
 \langle \mathcal{B}[v^*, v^*], \Phi_{42} \rangle_Y &= \frac{(14\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} - a\mu)\pi^2}{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2} \gamma \alpha, \\
 \langle \mathcal{B}[v^*, v^*], \Phi_{51} \rangle_Y &= \frac{(14\chi_{\text{cr}} l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} - a\mu)\pi^2}{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2} \alpha \beta
 \end{aligned}$$

と求まるため，

$$\begin{aligned} P\mathcal{B}[v^*, v^*] &= \frac{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2}{\pi^2(1+\eta_{13}^2)} \cdot \frac{(14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu)\pi^2}{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2} (\beta\gamma\Phi_{13} + \gamma\alpha\Phi_{42} + \alpha\beta\Phi_{51}) \\ &= \frac{14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu}{1 + \eta_{13}^2} (\beta\gamma\Phi_{13} + \gamma\alpha\Phi_{42} + \alpha\beta\Phi_{51}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

を得る．したがって，(4.29) と (4.30) より，Theorem 2.6 の条件 (a) は次のように表される：

$$\begin{aligned} PMv^* + \frac{1}{2}P\mathcal{B}[v^*, v^*] &= \frac{1}{2\mu(1+\eta_{13}^2)} ([56l_{\text{cr}}^2\eta_{13}\alpha + \mu(14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu)\beta\gamma]\Phi_{13} \\ &\quad + [56l_{\text{cr}}^2\eta_{13}\beta + \mu(14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu)\gamma\alpha]\Phi_{42} \\ &\quad + [56l_{\text{cr}}^2\eta_{13}\gamma + \mu(14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu)\alpha\beta]\Phi_{51}) = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

固有関数 Φ_{13} ， Φ_{42} 及び Φ_{51} は Hilbert 空間 Y において一次独立であるため，(4.31) より，Theorem 2.6 の条件 (a) は次のような方程式系へと帰着する：

$$\begin{cases} 56l_{\text{cr}}^2\eta_{13}\alpha + \mu(14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu)\beta\gamma = 0, \\ 56l_{\text{cr}}^2\eta_{13}\beta + \mu(14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu)\gamma\alpha = 0, \\ 56l_{\text{cr}}^2\eta_{13}\gamma + \mu(14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu)\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

よって，上記方程式系より， $14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu \neq 0$ という条件の下で係数 $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ が求まり，それらは $(\alpha, \beta, \gamma) = (\tilde{A}, \tilde{A}, \tilde{A})$ ， $(\tilde{A}, -\tilde{A}, -\tilde{A})$ ， $(-\tilde{A}, \tilde{A}, -\tilde{A})$ ， $(-\tilde{A}, -\tilde{A}, \tilde{A})$ である．ただし， $\tilde{A} := -\frac{56l_{\text{cr}}^2\eta_{13}}{\mu(14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu)}$ である．ここで， $(m, n) = (1, 3)$ ， $(4, 2)$ ， $(5, 1)$ において，直接計算より，

$$l_{\text{cr}}^2 = \frac{1}{28}\sqrt{\frac{ab}{d}}, \quad \chi_{\text{cr}} = \frac{\mu}{c}(\sqrt{a} + \sqrt{bd})^2, \quad \eta_{13} = \frac{c\sqrt{d}}{\sqrt{ab} + b\sqrt{d}}$$

と与えられる．このとき，

$$\begin{aligned} l_{\text{cr}}^2\eta_{13} &= \frac{1}{28}\sqrt{\frac{ab}{d}} \cdot \frac{c\sqrt{d}}{\sqrt{ab} + b\sqrt{d}} = \frac{c}{28} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{bd}}, \\ \chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} &= \frac{\mu}{c}(\sqrt{a} + \sqrt{bd})^2 \cdot \frac{c\sqrt{a}}{28(\sqrt{a} + \sqrt{bd})} = \frac{\mu(a + \sqrt{abd})}{28} \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.4 節 余次元 3 の非自明解の分岐

と求まる．式 (4.32) より， $14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu \neq 0$ は

$$14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu = \frac{\mu(a + \sqrt{abd})}{2} - a\mu = \frac{\mu(\sqrt{abd} - a)}{2} = \frac{\mu\sqrt{a}(\sqrt{bd} - \sqrt{a})}{2} \neq 0$$

と表されるため，条件式は

$$a - bd \neq 0$$

と書き換えられる．同様に， $\tilde{A} = -\frac{56l_{\text{cr}}^2\eta_{13}}{\mu(14\chi_{\text{cr}}l_{\text{cr}}^2\eta_{13} - a\mu)}$ は

$$\tilde{A} = -\frac{2c\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{bd}} \cdot \frac{2}{\mu^2\sqrt{a}(\sqrt{bd} - \sqrt{a})} = \frac{4c}{\mu^2(a - bd)}$$

と書き換えられる．したがって， $a - bd \neq 0$ という条件の下で，Theorem 2.6 の条件 (a) を満たすような v^* として次の 4 つの候補が挙げられる：

$$v^* = \tilde{A}(\Phi_{13} + \Phi_{42} + \Phi_{51}), \quad \tilde{A}(\Phi_{13} - \Phi_{42} - \Phi_{51}), \\ \tilde{A}(-\Phi_{13} + \Phi_{42} - \Phi_{51}), \quad \tilde{A}(-\Phi_{13} - \Phi_{42} + \Phi_{51}); \quad \tilde{A} = \frac{4c}{\mu^2(a - bd)}. \quad (4.33)$$

式 (4.33) のそれぞれの関数の形状を Figure 3 から Figure 6 に表示しておく．条件 (a)

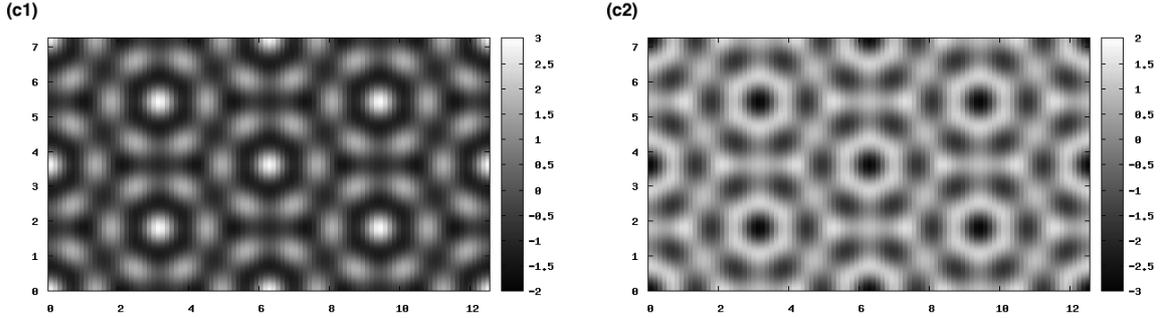


Figure 3: 空間領域 Ω は $\Omega = (0, 4\pi) \times (0, 4\sqrt{3}\pi)$ である．単純化のために \tilde{A} を $\tilde{A} = 1$ もしくは $\tilde{A} = -1$ と与える．(c1) $\tilde{A} = 1 > 0$ における $v^* = \tilde{A}(\Phi_{13} + \Phi_{42} + \Phi_{51})$ ．(c2) $\tilde{A} = -1 < 0$ における $v^* = \tilde{A}(\Phi_{13} + \Phi_{42} + \Phi_{51})$ ．

より得られた主要項の候補 (4.33) は久藤等 [12] が解析していないものである．ここで，Figure 3 の (c2) と Figure 5 の (e2) は六角形の入れ子構造を表していることが確認できる．特に， $v^* = \tilde{A}(\Phi_{13} + \Phi_{42} + \Phi_{51})$ のみ 120 度回転対称性をもつことが Figure 7 より確認できる．

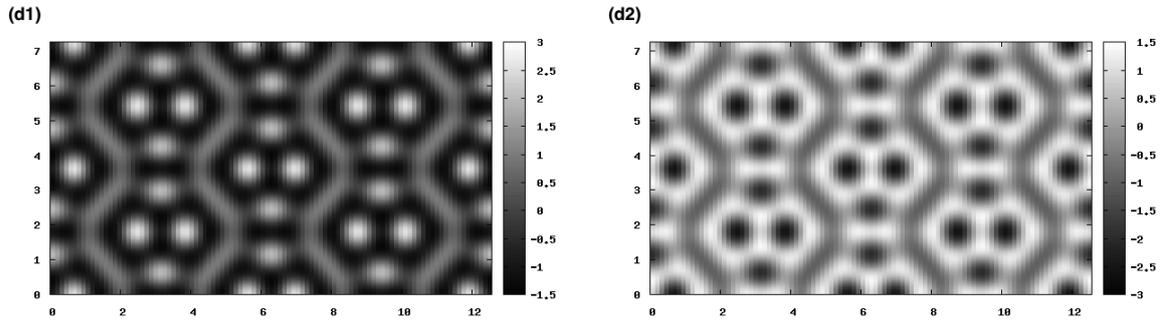


Figure 4: 空間領域 Ω は $\Omega = (0, 4\pi) \times (0, 4\sqrt{3}\pi)$ である．単純化のために \tilde{A} を $\tilde{A} = 1$ もしくは $\tilde{A} = -1$ と与える．(d1) $\tilde{A} = 1 > 0$ における $v^* = \tilde{A}(\Phi_{13} - \Phi_{42} - \Phi_{51})$ ．(d2) $\tilde{A} = -1 < 0$ における $v^* = \tilde{A}(\Phi_{13} - \Phi_{42} - \Phi_{51})$ ．

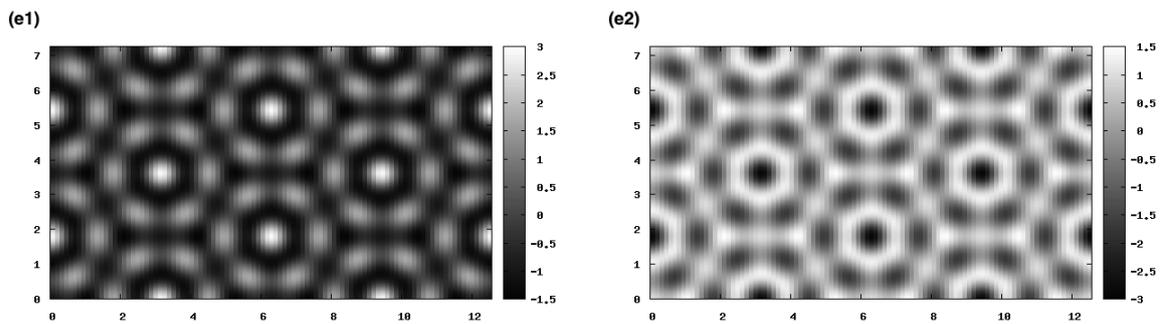


Figure 5: 空間領域 Ω は $\Omega = (0, 4\pi) \times (0, 4\sqrt{3}\pi)$ である．単純化のために \tilde{A} を $\tilde{A} = 1$ もしくは $\tilde{A} = -1$ と与える．(e1) $\tilde{A} = 1 > 0$ における $v^* = \tilde{A}(-\Phi_{13} + \Phi_{42} - \Phi_{51})$ ．(e2) $\tilde{A} = -1 < 0$ における $v^* = \tilde{A}(-\Phi_{13} + \Phi_{42} - \Phi_{51})$ ．

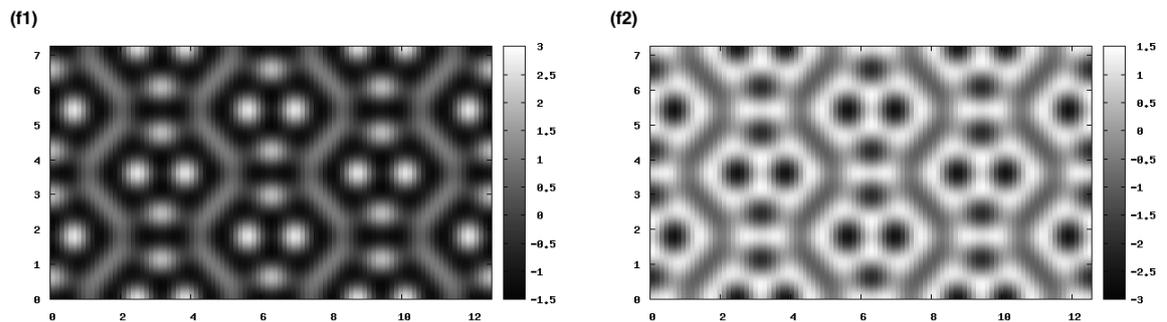


Figure 6: 空間領域 Ω は $\Omega = (0, 4\pi) \times (0, 4\sqrt{3}\pi)$ である．単純化のために \tilde{A} を $\tilde{A} = 1$ もしくは $\tilde{A} = -1$ と与える．(f1) $\tilde{A} = 1 > 0$ における $v^* = \tilde{A}(-\Phi_{13} - \Phi_{42} + \Phi_{51})$ ．(f2) $\tilde{A} = -1 < 0$ における $v^* = \tilde{A}(-\Phi_{13} - \Phi_{42} + \Phi_{51})$ ．

4.4 節 余次元 3 の非自明解の分岐

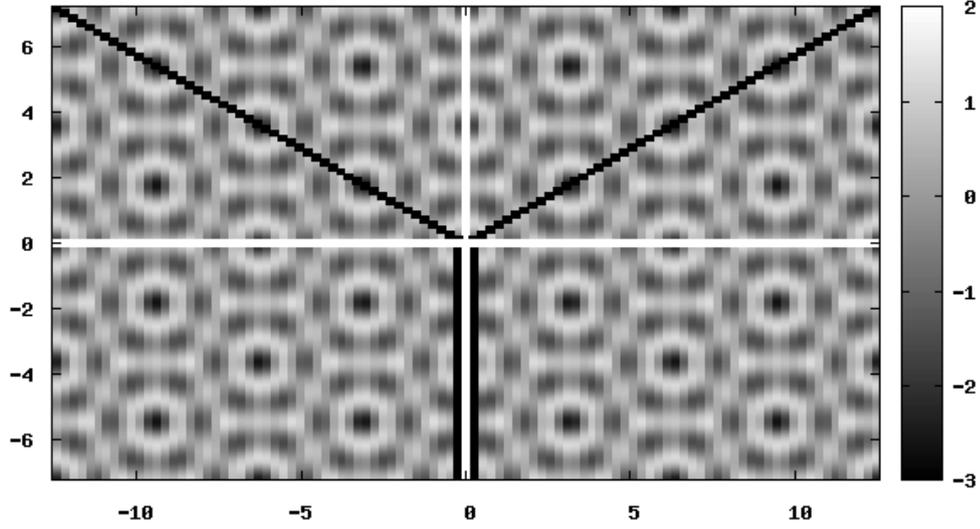


Figure 7: 空間領域は $(-4\pi, 4\pi) \times (-4\sqrt{3}\pi, 4\sqrt{3}\pi)$ である．白い線は x 軸と y 軸にそれぞれ対応し，黒い線はそれぞれ $\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$ の方向を表した補助線である． $A = -1 < 0$ における $v^* = \tilde{A}(\Phi_{13} + \Phi_{42} + \Phi_{51})$ で， 120 度回転対称性をもつ．

続いて，条件 (b) について考える．4.3 節と同様に考えて，条件 (a) で求めた $v^* \in V$ の候補 (4.33) の中から 1 つ固定し， $Sv = PMv + PB[v^*, v]$ と定義された作用素 $S: V \rightarrow Z$ が逆をもつことを示す．結論から述べると，(4.33) の全ての候補について作用素 S が逆をもつことを示せる．このとき，(4.33) のどの候補 v^* に固定しても，同様の結果が導き出される．そこで，本論文では v^* を

$$v^* = \tilde{A}(\Phi_{13} + \Phi_{42} + \Phi_{51}); \quad \tilde{A} = \frac{4c}{\mu^2(a - bd)}$$

に固定した際の条件 (b) の証明について記述する．ここで，(4.33) の他の v^* についても同様の議論により証明できることを注意しておく．まず，条件 (b) で扱う $v \in V$ を次のように与える：

$$v = \eta \Phi_{13} + \zeta \Phi_{42} + \xi \Phi_{51} := \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}; \quad \eta, \zeta, \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

このとき，条件 (b) の Mv と $\mathcal{B}[v^*, v]$ は次のように求まる：

$$\begin{aligned}
 Mv &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\mu} \Delta v_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{\eta_{13}}{\mu} \Delta v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{\eta_{13}}{\mu} \Delta [\eta \phi_1(x) \psi_3(y) + \zeta \phi_4(x) \psi_4(y) + \xi \phi_5(x) \psi_1(y)] \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu} [\eta \phi_1(x) \psi_3(y) + \zeta \phi_4(x) \psi_4(y) + \xi \phi_5(x) \psi_1(y)] \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}[v^*, v] &= \begin{bmatrix} -\chi_{\text{cr}} [\nabla \cdot (v_1^* \nabla v_2) + \nabla \cdot (v_1 \nabla v_2^*)] - 2a\mu v_1^* v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{13} \chi_{\text{cr}} [\nabla \cdot (v_1^* \nabla v_1) + \nabla \cdot (v_1 \nabla v_1^*)] - 2a\mu v_1^* v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\eta_{13} \chi_{\text{cr}} \Delta (v_1^* v_1) - 2a\mu v_1^* v_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.36)
 \end{aligned}$$

式 (4.35) より Mv と V の基底 Φ_{13} と Φ_{42} と Φ_{51} との内積は，直接計算より，それぞれ次のように求まる：

$$\begin{aligned}
 \langle Mv, \Phi_{13} \rangle_Y &= \left\langle \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu} (\eta \phi_1(x) \psi_3(y) + \zeta \phi_4(x) \psi_2(y) + \xi \phi_5(x) \psi_1(y)), \phi_1(x) \psi_3(y) \right\rangle_{L^2} \\
 &= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \eta}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}i}} \int_0^{\frac{\pi}{i}} [\phi_1(x) \psi_3(y)]^2 dx dy \\
 &= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \eta}{\mu} \|\phi_1(x) \psi_3(y)\|_{L^2}^2 \\
 &= \frac{7\eta_{13} \pi^2}{\sqrt{3}\mu} \eta,
 \end{aligned}$$

4.4 節 余次元 3 の非自明解の分岐

$$\begin{aligned}
\langle Mv, \Phi_{42} \rangle_Y &= \left\langle \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu} (\eta \phi_1(x) \psi_3(y) + \zeta \phi_4(x) \psi_2(y) + \xi \phi_5(x) \psi_1(y)), \phi_4(x) \psi_2(y) \right\rangle_{L^2} \\
&= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \zeta}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}i}} \int_0^{\frac{\pi}{i}} [\phi_4(x) \psi_2(y)]^2 dx dy \\
&= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \zeta}{\mu} \|\phi_4(x) \psi_2(y)\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{7\eta_{13} \pi^2}{\sqrt{3}\mu} \zeta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle Mv, \Phi_{51} \rangle_Y &= \left\langle \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu} (\eta \phi_1(x) \psi_3(y) + \zeta \phi_4(x) \psi_2(y) + \xi \phi_5(x) \psi_1(y)), \phi_5(x) \psi_1(y) \right\rangle_{L^2} \\
&= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \xi}{\mu} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}i}} \int_0^{\frac{\pi}{i}} [\phi_5(x) \psi_1(y)]^2 dx dy \\
&= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13} \xi}{\mu} \|\phi_5(x) \psi_1(y)\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{7\eta_{13} \pi^2}{\sqrt{3}\mu} \xi.
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
PMv &= \frac{4\sqrt{3}l_{\text{cr}}^2}{\pi^2(1+\eta_{13}^2)} \left(\frac{7\eta_{13}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \eta \Phi_{13} + \frac{7\eta_{13}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \zeta \Phi_{42} + \frac{7\eta_{13}\pi^2}{\sqrt{3}\mu} \xi \Phi_{51} \right) \\
&= \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu(1+\eta_{13}^2)} (\eta \Phi_{13} + \zeta \Phi_{42} + \xi \Phi_{51}) \tag{4.37}
\end{aligned}$$

を得る. 一方, 式 (4.36) より $\mathcal{B}[v^*, v]$ における V の各基底との内積は, Mv と同様の議論により,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{B}[v^*, v], \Phi_{13} \rangle_Y &= -\frac{7\sqrt{3}\eta_{13}\pi^2}{3\mu} (\zeta + \xi), \\
\langle \mathcal{B}[v^*, v], \Phi_{42} \rangle_Y &= -\frac{7\sqrt{3}\eta_{13}\pi^2}{3\mu} (\xi + \eta), \\
\langle \mathcal{B}[v^*, v], \Phi_{51} \rangle_Y &= -\frac{7\sqrt{3}\eta_{13}\pi^2}{3\mu} (\eta + \zeta)
\end{aligned}$$

と求まるため,

$$PB[v^*, v] = -\frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu(1+\eta_{13}^2)} [(\zeta + \xi)\Phi_{13} + (\xi + \eta)\Phi_{42} + (\eta + \zeta)\Phi_{51}] \tag{4.38}$$

を得る．(4.37) と (4.38) より， $PMv + PB[v^*, v]$ における Φ_{13} と Φ_{42} と Φ_{51} のそれぞれについて係数をまとめておく．固有関数 Φ_{13} の係数は

$$\frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu(1 + \eta_{13}^2)} [\eta - \zeta - \xi]$$

と求まる．一方，固有関数 Φ_{42} の係数は

$$\frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu(1 + \eta_{13}^2)} [-\eta + \zeta - \xi]$$

と求まる．そして，固有関数 Φ_{51} の係数は

$$\frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu(1 + \eta_{13}^2)} [-\eta - \zeta + \xi]$$

と求まる．ここで，

$$\widehat{S} := \frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu(1 + \eta_{13}^2)}$$

とすると，Theorem 2.6 の条件 (b) の Sv は次のように書き換えられる：

$$Sv = \widehat{S} ([\eta - \zeta - \xi] \Phi_{13} + [-\eta + \zeta - \xi] \Phi_{42} + [-\eta - \zeta + \xi] \Phi_{51}). \quad (4.39)$$

式 (4.39) を変形することで， S の表現行列 \widetilde{S} が与えられる：

$$\begin{aligned} Sv &= \begin{bmatrix} \Phi_{13} & \Phi_{42} & \Phi_{51} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{S}\eta - \widehat{S}\zeta - \widehat{S}\xi \\ -\widehat{S}\eta + \widehat{S}\zeta - \widehat{S}\xi \\ -\widehat{S}\eta - \widehat{S}\zeta + \widehat{S}\xi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{13} & \Phi_{42} & \Phi_{51} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{S} & -\widehat{S} & -\widehat{S} \\ -\widehat{S} & \widehat{S} & -\widehat{S} \\ -\widehat{S} & -\widehat{S} & \widehat{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \\ \xi \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} \Phi_{13} & \Phi_{42} & \Phi_{51} \end{bmatrix} \widetilde{S} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \\ \xi \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

ここで， \widetilde{S} が正則行列であるならば， $\dim V = \dim Z$ を満たしているため， $S : V \rightarrow Z$ は同型写像であることがいえる．すなわち， S は逆をもつことが示される．表現行列 \widetilde{S} の行列式は，直接計算より，

$$\det \widetilde{S} = -4\widehat{S}^3 = -4 \left(\frac{28l_{\text{cr}}^2 \eta_{13}}{\mu(1 + \eta_{13}^2)} \right)^3 \neq 0$$

4.5 節 まとめ

であるため、 \tilde{S} は正則行列となる。したがって、 S は逆をもつことが示された。

これらの結果から、 $(m, n) = (1, 3), (4, 2), (5, 1)$ において次のような定理にたどり着く：

Theorem 4.3. 固有関数 $v^* \in V$ を (4.33) で定義された関数とし、 $l = l_{\text{cr}}(1, 3)$ 及び $\chi = \chi_{\text{cr}}$ とする。このとき、

$$a - bd \neq 0$$

という条件の下で、 (χ_{cr}, U^*) から分岐する (SE) の非自明解 $(\chi(\lambda), U(\lambda)) \in (0, \infty) \times X$ が存在し、

$$\chi(\lambda) = \chi_{\text{cr}} + \lambda, \quad U(\lambda) = U^* + \lambda[v^* + \lambda\tilde{v}(\lambda)]$$

と表される。ただし、 $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ は十分小で、 $\tilde{v}(\lambda)$ は滑らかな λ の関数である。

4.5 まとめ

本章では、Ambrosetti-Prodi の分岐定理による、走化性・増殖系に対する分岐解析について記述した。余次元が 1 が課されていないため、久藤等 [12] の手法とは異なり、関数空間を制限することなく空間全体から非自明解の存在を調べることができた。実際、余次元が 2 の分岐では、久藤等 [12] が証明していない、120 度回転対称性をもたない非自明解の存在を証明することができた。特に余次元が 3 の分岐は久藤等 [12] が取り組んでいない問題であり、事前に核空間 V の基底の係数比を知らなくても非自明解の存在について議論することができた。余次元が上がるにつれて非自明解の主要項が形成する空間パターンは複雑となることが本研究の結果から推測される。また、核空間 V の基底の全ての係数比の組み合わせを事前に知ることは困難を極める。したがって、余次元が 2 以上の分岐に対して Ambrosetti-Prodi の分岐定理を用いた分岐解析は Crandall-Rabinowitz の分岐定理と比べて有効であると考えられる。

第 5 章 総括

本論文では，空間 2 次元の走化性・増殖系の定常パターン解の分岐問題に関する研究を行った．また，空間 2 次元の吸着質誘導相転移系に対して定数定常解が唯一つであるための十分条件を新たに与えた．本論文では，走化性・増殖系の余次元が 2 以上の分岐に対して Ambrosetti と Prodi [2] が提案した分岐定理の適用を試みた．Ambrosetti-Prodi の分岐定理は，Crandall-Rabinowitz の分岐定理 [5] とは異なり，余次元が 1 という仮定が課されていない．したがって，久藤等 [12] の研究のように舞台となる関数空間を複合モードが張る 1 次元の固有空間に制限する必要がない．このことが意味するのは，複数の固有関数の複合モードの対称性を事前に知っておく必要がないということである．

本研究において，Ambrosetti-Prodi の分岐定理は Crandall-Rabinowitz の分岐定理よりも優れていると考えられる点があった．実際，久藤等 [12] は，予めわかっていた係数の比に基づいた，複合モードが張る 1 次元の固有空間に制限するという工夫を行ったのに対し，Ambrosetti-Prodi の分岐定理を用いると，走化性・増殖系の余次元が 2 の分岐において，主要項 v^* は固有関数 Φ_{20} 及び Φ_{11} の係数の比が 1 対 2 である線形結合で与えられた．さらに，久藤等 [12] が取り組んでいなかった余次元が 3 の分岐に対して定数定常解から分岐する非自明解の存在を証明することができた．余次元が 3 の分岐では，Figure 3 から Figure 6 で確認できたように，主要項 v^* が複雑な空間パターンを表していた．余次元が大きくなるにつれ，空間パターンを推測すること及びそれに対応した複合モードが張る 1 次元の固有空間を定義することは困難を極める．これらを踏まえて，Ambrosetti-Prodi の分岐定理は余次元が 2 以上の分岐に対して主要項の候補を与えられるため，分岐解析において有効な手法であると考えられる．また，久藤等 [12] が存在を証明していなかった，固有関数 Φ_{20} と Φ_{11} の係数比が 1 と - 2 であるような主要項が与えられたことから，定数定常解から分岐する非自明解を舞台となる関数空間全体から探すことができるという点でも有効な手法であると考えられる．

以下で、改めて Ambrosetti-Prodi の分岐定理について概説しておく。Ambrosetti と Prodi [2] は Lyapunov-Schmidt 還元に基づいて非線形方程式の分岐方程式を導出した。 $u = \mu(v + w)$ という形の解について考えることでトランスクリティカル分岐に対応した非自明解を捉えることができた。また、Ambrosetti-Prodi の分岐定理において $v^* \in V$ に課される 2 つの条件 (a) と (b) は得られた分岐方程式の分岐点周りにおけるテイラー展開の項に対応していた。条件 (a) では、初項が 0 となるような v^* を導出していた。条件 (b) では、1 つ目の条件で得られた v^* に対して、1 次の微分の項が逆をもつことを調べていた。これらの条件を満たすような v^* が存在するとき、陰関数の定理より解を一意的に決定することができた。

以下に各章の内容をまとめる。

第 1 章では、走化性や移流といった効果を含んだ反応拡散移流系の紹介、分岐解析の手法など、本論文の背景となる事柄について概説した。

第 2 章では、関数空間、線形写像と表現行列に関する定理、及び分岐解析の基本事項についてまとめた。

第 3 章では、吸着質誘導相転移系における余次元が 1 の分岐について概説した。久藤と辻川 [13] は、Crandall-Rabinowitz の分岐定理を用いることで、吸着質誘導相転移系のストライプや四角形に対応した非自明解が分岐することを証明している。本論文では、吸着質誘導相転移系の定常問題に対して定数定常解が唯一つであるための十分条件として Lemma 3.1 を新たに与えている。これは久藤と辻川 [13] の論文では与えられていないものである。また、第 4 章の余次元が 2 の分岐の結果から、 $\Phi_{20} - 2\Phi_{11}$ において余次元が 1 となるような関数空間に制限することで、主要項が $v^* = \Phi_{20} - 2\Phi_{11}$ であるような非自明解の存在を Crandall-Rabinowitz の分岐定理を用いて証明できると推測できる。3.1 節では、吸着質誘導相転移系を導入した。3.2 節では、余次元が 1 が課された Crandall-Rabinowitz の分岐定理の概説、吸着質誘導相転移系の境界値定常問題に対して定数定常解が唯一つであるための十分条件の導入、及び分岐パラメータに依存した、四角形とストライプパターンに対応する、定数定常解から分岐する非自明解の存在証明を概説した。

第 4 章では，空間 2 次元の走化性・増殖系における余次元が 2 以上の分岐について，Ambrosetti-Prodi の分岐定理を適用した結果をまとめた．余次元が 1 の関数空間に制限するという工夫を必要としないため，事前に核空間を張る固有関数の係数比を知ることなく定数定常解から分岐する非自明解の存在を証明することができた．4.1 節では，走化性・増殖系を導入した．4.2 節では，走化性・増殖系の分岐方程式を考える上で必要となる基本的な設定を与え，境界値定常問題に対して分岐問題を考えていた．また，分岐パラメータ χ が第一分岐点となるための必要十分条件，及び分岐パラメータ χ と制限パラメータ l のクリティカルな値を与えた．4.3 節では，走化性・増殖系の余次元が 2 の分岐について，Ambrosetti-Prodi の分岐定理を適用することで，Neumann 境界条件の下で久藤等 [12] が証明していなかった非自明解の存在を示すことができた．この非自明解は $\Phi_{20} - 2\Phi_{11}$ という固有関数を主要項にもつ．4.4 節では，走化性・増殖系の余次元が 3 の分岐について，4.3 節と同様に考えて，非自明解の存在を示した．余次元が 3 の分岐については，久藤等 [12] は取り組んでおらず，得られた結果は全く新しいものであった．

今後の研究課題としては，以下が考えられる．まず，存在が証明された非自明解の安定性を調べることである．ただし，余次元が 2 の分岐において主要項 v^* が $\Phi_{20} + 2\Phi_{11}$ であるものは久藤等 [12] により，すでに安定性に関する考察がなされている．本研究では，Ambrosetti-Prodi の分岐定理を用いた分岐解析の手法を確立すること，及びその定理を用いて定数定常解から分岐する非自明解の存在を証明することを目指した．そのため，解の安定性まで議論を拡張していない．解の安定性を調べることで，余次元が 2 と 3 の分岐で存在が証明された非自明解から，固有関数のモードをもった空間パターンが発生するような解を決定できる．

更なる発展研究としては，本論文で扱った走化性・増殖系よりも大規模な反応拡散移流系に対する分岐解析が考えられる．そのような方程式系の 1 つに，社会性昆虫の造巣過程を記述する Deneubourg 系がある．実際，この方程式系は昆虫の密度と巣の材料となる堆積物の密度，及び昆虫が分泌する化学物質の濃度という 3 つの未知関数が含まれており，しばしば 3 因子系と呼ばれている．未知関数が増えることで，分岐点候補及び核空間を張る基底の決定に関する複雑さが増すが，本論文で用いた手法ならば分岐してくるような非

自明解の存在証明が期待できる．一方，空間の次元を3次元へ拡張させた問題に取り組むことも考えられる．特に，粘菌などのバクテリアは寒天表面だけではなく寒天内部にまで運動することから，空間3次元の走化性・増殖系に対して分岐解析を行うことで，実際の空間パターンと数学的な振る舞いによって得られる空間パターンの比較による評価が期待できる．

謝辞

本論文は，関西学院大学大学院理工学研究科数理科学専攻 博士課程後期課程において，大崎浩一教授の御指導の下，行った研究をまとめたものです．大崎教授は，本研究に携わる契機を与えて下さり，懇切丁寧に御指導して下さいました．謹んで感謝の意を表すとともに，厚く御礼申し上げます．

本大学大学院理工学研究科数理科学専攻 北原和明教授，昌子浩登准教授には，本論文作成にあたり，貴重な御意見を頂戴致しました．深く感謝の意を表します．

大阪大学名誉教授の八木厚志先生には，大阪大学大学院の学生との合同ゼミなどで有益な御助言を賜りました．深く感謝致します．

本学大学院理工学研究科数理科学専攻 博士課程前期課程 西丸奨真氏を始めとする後輩には，本論文作成にあたり数々の御協力を頂きました．ここに心から感謝致します．

本研究遂行にあたり，終始励まして下さいました方々に対して厚く御礼申し上げます．

参考文献

- [1] M. Aida, T. Tsujikawa, M. Efendiev, A. Yagi and M. Mimura, *Lower estimate of the attractor dimension for chemotaxis-growth model*, J. London Math. Soc. **74**(2) (2006), 453–474
- [2] A. Ambrosetti and G. Prodi, *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993.
- [3] E. O. Budrene and H. C. Berg, *Complex patterns formed by motile cells of Escherichia coli*, Nature **349** (1991) 630–633.
- [4] E. O. Budrene and H. C. Berg, *Dynamics of formation of symmetrical patterns of chemotactic bacteria*, Nature **376** (1995) 49–53.
- [5] M. G. Crandall and P. H. Rabinowitz, *Bifurcation from simple eigenvalues*, journal of functional analysis **8**, 321–340, 1972
- [6] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, *A blow-up mechanism for a chemotaxis model*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. IV **24** (1997) 633–683.
- [7] M. Hildebrand, M. Kuperman, H. Wio, A. S. Mikhailov and G. Ertl, *Self-Organized Chemical Nanoscale Microreactors*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1475–1478
- [8] D. Horstmann and G. Wang, *Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions*, European J. Appl. Math. **12** (2001) 159–177.
- [9] S. Jakubith, H. H. Rotermund, W. Engel, A. von Oertzen and G. Ertl, *Spatiotemporal Concentration Patterns in a Surface Reaction: Propagating and Standing Waves, Rotating Spirals, and Turbulence*, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 3013–3016.
- [10] E. F. Keller and L. A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol. **26** (1970) 399–415.
- [11] N. Kurata, K. Kuto, K. Osaki, T. Tsujikawa and T. Sakurai, *Bifurcation phenomena of pattern solution to Mimura-Tsujikawa model in one dimension*, GAKUTO

- Internat. Ser. Math. Sci. Appl.* **29** (2008) 265–278.
- [12] K. Kuto, K. Osaki, T. Sakurai and T. Tsujikawa, Spatial pattern formation in a chemotaxis-diffusion-growth model, *Physica D* **241** 1629–1639, 2012
- [13] K. Kuto and T. Tsujikawa, *Pattern formation for adsorbate-induced phase transition model*, RIMS Kokyuroku Bessatsu B3 (2007), 043-058
- [14] A. M. Lyapunov, Sur les figures d'équilibre peu différents des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation, *Zap. Akad. Nauk St. Petersburg* (1906), 1–225.
- [15] A. M. Lyapunov, Problème général de la stabilité du mouvement, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* **2** (1907), 203–474.
- [16] M. Mimura and T. Tsujikawa, Aggregating pattern dynamics in a chemotaxis model including growth, *Phys. A* **230** (1996) 499–543.
- [17] K. Osaki, T. Tsujikawa, A. Yagi and M. Mimura, Exponential attractor for a chemotaxis-growth system of equations, *Nonlinear Anal. TMA* **51** (2002) 119–144.
- [18] K. J. Painter and T. Hillen, Spatio-temporal chaos in a chemotaxis model, *Physica D* **240** (2011) 363–375.
- [19] E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, 3 Teil, *Math. Annalen* **65** (1908) 370–99.
- [20] R. Temam, *Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [21] T. Tsujikawa and A. Yagi, *Exponential attractor for an adsorbate-induced phase transition model*, *Kyushu J. Math.* **56** (2002)
- [22] M. Winkler, Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source, *Comm. Partial Differential Equations* **35** (2010) 1516–1537.
- [23] M. Winkler, Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional

Keller-Segel model, *J. Differential Equations* **248** (2010), 2889–2905.

[24] 川久保勝夫. 線形代数学. 日本評論社, 1999.