順位表に基づいた独立成分分析：rankICA

著者	高橋 弘太
雑誌名	電子情報通信学会論文誌. A, 基礎・境界
巻	J89-A
号	2
ページ	101-114
発行年	2006-02-01
URL	http://id.nii.ac.jp/1438/00008896/

論　文

順位表に基づいた独立成分分析：rank ICA

高橋　弘太[†a)]

Independent Component Analysis Based on Rank Tables: Rank ICA

Kota TAKAHASHI[†a)]

あらまし　順位情報に基づいた新しい独立成分分析法（rank ICA）を提案する．rank ICA とは，まず，2 信号の順位関係から順位表を作り，次に，順位表のすべてのデータペア間のマンハッタン距離のヒストグラムを作成し，最後に，そのヒストグラムをコントラスト関数で評価することで 2 信号間の独立性の尺度を得て独立成分分析を実行する方法である．本論文では，アルゴリズムの紹介をしたあと，どのようなコントラスト関数を用いるのが適当であるかを実験的に検討し，比較的良い結果が得られるコントラスト関数を提示する．また，既存の方法と本手法を比較し，データをその順位情報のみに置き換えても独立性判定の能力は下がらず，むしろ性能が良くなることもあること，そして，外れ値に対する耐性（ロバスト性）は向上することを示す．計算量の大きさを度外視すれば，rank ICA は，現存する独立成分分析法の中で最も良い信号分離を実現できる可能性を秘めている．

キーワード　独立成分分析，ブラインド信号分離，順位統計量，ロバスト性，マンハッタン距離

1. ま え が き

独立成分分析（ICA）の具体的方法としては，古くは H-J ネットワーク法に始まり，Infomax 法 [1]，Comon 法 [2]，FastICA 法 [3] など多数のアルゴリズムが提案されてきた．これらの方法には，原信号分布に関する先験的知識の必要性の有無や，バッチ処理とオンライン処理のどちらに親和性をもっているか，計算量と性能のどちらを優先するか，などの観点でそれぞれに特徴があり，用途に応じて使い分けられている．

本研究では，計算量よりも分離性能を重視し，既存の方法を超える新しい ICA の構築を目指す．

提案する ICA は，データ間の順位の関係から独立性の指標を得る方法であり，以下「rank ICA」と呼ぶ．

rank ICA では，独立性を調べたいデータに対し，まず順位関係を表に集計し，次にその表の特徴を確率分布の形式で抽出し，最後にこの確率分布をコントラスト関数で測って独立性の指標を得る．以下，問題を 2ch の実信号分離に絞って，rank ICA 法を紹介する．

† 電気通信大学電気通信学部，調布市
Department of Information and Communication Engineering, The University of Electro-Communications, 1–5–1 Chofugaoka, Chofu-shi, 182–8585 Japan
a) E-mail: kota@ice.uec.ac.jp

2. rank ICA の基本原理

2.1 順位表 R の作成

独立性を評価したい 2ch のデータが，$t = 1, 2, \ldots, S$ の S サンプル得られているとし，これを，$\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ と書くことにする．まず，$\{y_1(t)\}$ 内でソートを行い，$y_1(t)$ の順位を $R_1(t)$ とする．また，$\{y_2(t)\}$ 内でもソートを行い，$y_2(t)$ の順位を $R_2(t)$ とする．

$R_1(t)$ と $R_2(t)$ の関係から，2 信号の相関関係を調べる指標としては，スピアマンの順位相関係数 [4] やケンドールのタウ [4] などが有名である．しかし，これらは，増加/減少傾向程度の意味での相関関係の有無の判定には有効であるものの，独立性（高次の相関関係）までは判定できない．ICA のためには $R_1(t)$ と $R_2(t)$ の関係を更に詳細に調べる必要がある．

これを調べるために，本手法では，S 行 S 列の表を用意し，$t = 1, 2, \ldots, S$ について，表中の $R_1(t)$ 列 $R_2(t)$ 行のます目に黒印をつけたものを作る．この表を，以下では,「順位表」と呼ぶ．

ちなみに，順位表の黒印を 1，空白を 0 と置き換えて行列 $R = (R_{ij})$ を作ると，R の各列・各行には 1 が一つだけ並ぶことになるので，R は置換行列になる．すなわち，順位表は置換行列と同一視できる．そこで，以下では順位表を R と書き表すことにする．

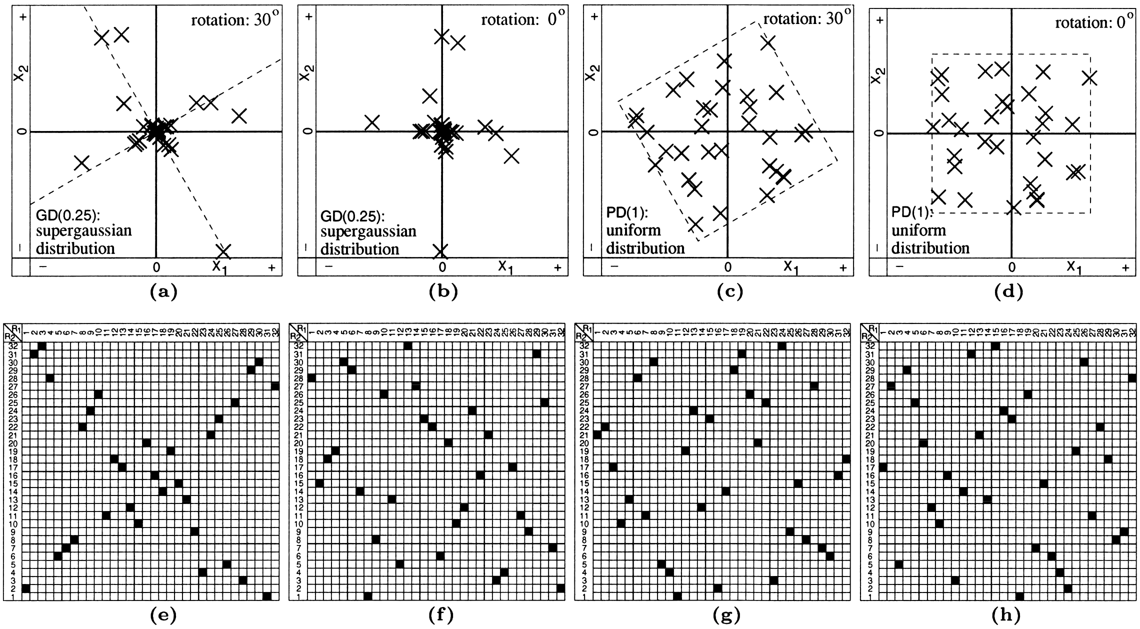

図 1　散布図と順位表（散布表）の例．上段が散布図で下段はそれぞれに対応する順位表．
Fig. 1　Examples of scattering plots (a)〜(d) and corresponding rank tables (e)〜(h).

さて，一般に，$t = 1, 2, \ldots, S$ について，二次元座標上に点 $(y_1(t), y_2(t))$ をプロットした図は，散布図（scattering plot）と呼ばれる．順位表は，順位付けで量子化したデータの散布図と見ることができるので，散布表（scattering table）と呼ぶこともできよう．

図 1 に，散布図と順位表の例を示す．図 1 の中で，(a) と (b) が，スーパガウス分布（付録の表 A·1 における GD(0.25)）を原信号としたときの散布図であり，(c) と (d) が，一様分布（同じく PD(1)）を原信号とした場合の散布図である．これらのうち，(a) と (c) は，30° 回転を与える回転行列を乗算することで 2 信号を混合している．一方，(b) と (d) は，回転角が 0° であり，完全に分離した信号の例になっている．

図 1 の (a)〜(d) を順位表に変換したのが (e)〜(h) である．これを観察すると，(e) では×字形に黒印が集中し，(g) では四隅付近の黒印が欠如している一方，独立な (f) と (h) では，黒印が均一に分布していることが分かる．これは，Infomax 法において，散布図を非線形関数で収縮させ周辺分布を一様分布化したとき，独立ならば，その散布図が二次元の一様分布に従うことに類似している．すなわち，順位表の各列・各行には 1 が一つだけ並ぶので，順位表を作ることは，Infomax 法における周辺分布の一様分布化と本質的に同一の意味をもつ作業であると考えられるのである．

以上の考察により，順位表をどのような観点で評価すればよいかは明らかである．黒印が表全体に均一に散らばっているか否かをもって，独立性の尺度（コントラスト関数）とすればよい．それでは，順位表の均一性は，どのように測ればよいのであろうか．

2.2　R の評価のための $P(d)$ と理論分布 $P_3(d)$

最も自然な考え方は，順位表の黒印を値 $\frac{1}{S}$，空白を値 0 に置き換えた後，適当なぼけ関数を用意して二次元の畳込みを行うことで順位表を平滑化し，これを確率分布と見てエントロピーを測り，エントロピーが高いほど独立性が高いとする方法であろう．

しかし，この方法を実際に試してみたところ，あまりうまくいかなかった．原因は，順位表が極度に疎であることにある．実際，順位表中での黒印の割合は $\frac{1}{S}$ であるので，データ数 S が大きくなるほど黒印の割合は小さくなってしまう．これを平滑化するためには大きなぼけ関数を使わなければならず，計算負荷が極端に重くなる．また，仮に計算負荷を無視して十分な平滑化（均一な順位表に対して，順位表のます目の値がほぼ等しくなるまでの平滑化）が行えたとしても，今度は不均一な順位表に対しても値がほぼ均一になってしまい，従属性の検出が困難になってしまう．

順位表の均一性を調べる別の可能性としては，乱数の検定手法が借用できるかもしれない．例えば，次のような手法である．

$[0,1]$ に一様分布する乱数を 2 個発生させ，それを 1 辺の長さ 1 の正方形内の点の縦・横座標としてプロットする．良好な乱数であれば，点の分布は二次元の一様分布に従うはずである．そこで，その一様性を調べるために，正方形を $L{\times}L$ の区画に区切り，各区画に含まれる点の数を数え，それを χ^2 統計量で検定する．この手法は広く知られている．順位表は，座標が離散値をとるということと，各列・各行に必ず一つ黒印があるということの二つの拘束がかかっているという点で，厳密には乱数による散布図とは違うが，順位表を $L{\times}L$ の区画に区切って得られた χ^2 統計量は，コントラスト関数の有力な候補となるだろう．

この方法も実際に試してみた．しかし，実際には良い結果は得られなかった．(結果は，**4.3** で示す)

そこで，別の方法を考える．rank ICA では，順位表 R を，いったん，ある分布 $P(d)$ に変換する．

$P(d)$ について説明する．まず，順位表から，黒印のペアを取り出す．ペアの片方の黒印を，$(R_1(t_i), R_2(t_i))$ とし，もう片方を，$(R_1(t_j), R_2(t_j))$ とする．そして，二つの黒印間の距離 $d(i,j)$ を，順位表の上でのマンハッタン距離で以下のように評価する．

$$d(i,j) = \Bigl|R_1(t_i){-}R_1(t_j)\Bigr| \;+\; \Bigl|R_2(t_i){-}R_2(t_j)\Bigr| \tag{1}$$

この距離評価をすべての $i,\ j\ (i \neq j)$ の組合せについて行い，それを集計して $d(i,j)$ のヒストグラムを作成する．こうして得られた経験分布が $P(d)$ である．

さて，$y_1(t)$ と $y_2(t)$ が独立のとき，$P(d)$ はどのような分布形になると期待できるか，考えてみよう．

まず，R_1 方向での距離成分を，$d_1{=}|R_1(t_i){-}R_1(t_j)|$ と定義し，d_1 の確率分布を $P_1(d_1)$ とする．$R_1(t_i)$ と $R_1(t_j)$ の組合せは ${}_S\mathrm{C}_2$ 通りあり，そのうち距離が d_1 である組合せは $S{-}d_1$ 通りあるので，$P_1(d_1)$ は，

$$P_1(d_1)=\begin{cases} \dfrac{S{-}d_1}{{}_S\mathrm{C}_2}=\dfrac{2(S{-}d_1)}{S(S{-}1)} & (1{\le}d_1{\le}S{-}1) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{2}$$

と書ける．R_2 方向についても，距離成分 d_2 と確率 $P_2(d_2)$ を定義すれば，上式と同様の式が成り立つ．ここで，R_1 と R_2 が独立なら，マンハッタン距離 $d = d_1 + d_2$ が生じる確率 $P_3(d)$ は，$P_1(d_1)$ と $P_2(d_2)$ の畳込み演算を使って，以下のように記述できる．

$$P_3(d) \;=\; \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_1(k)P_2(d-k) \tag{3}$$

$$=\sum_{k=\max[1,d-S+1]}^{\min[S-1,d-1]} P_1(k)P_2(d-k) \tag{4}$$

$$=\sum_{k=\max[1,d-S+1]}^{\min[S-1,d-1]} \frac{2(S-k)}{S(S-1)}\cdot\frac{2(S-(d-k))}{S(S-1)} \tag{5}$$

$$=\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{d-1} \frac{2(S-d)}{S(S-1)}\cdot\frac{2(S-(d-k))}{S(S-1)} & (2 \le d \le S) \\ \displaystyle\sum_{k=d-S+1}^{S-1} \frac{2(S-d)}{S(S-1)}\cdot\frac{2(S-(d-k))}{S(S-1)} & (S \le d \le 2S-2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{6}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2d^3{-}12Sd^2{+}2(6S^2{+}6S{-}1)d{-}12S^2}{3S^2(S{-}1)^2} & (2 \le d \le S) \\ \dfrac{-2d^3{+}12Sd^2{-}2(12S^2{-}1)d{+}4S(4S^2{-}1)}{3S^2(S{-}1)^2} & (S \le d \le 2S-2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{7}$$

2.3　規格化マンハッタン距離 h と漸近分布 $P_5(h)$

マンハッタン距離 d は，とり得る値の範囲がデータ数 S に依存してしまうので，理論的解析や記述には都合が悪い．そこで，d の代用として，規格化マンハッタン距離 h を，

$$h(d) = \frac{2d-3}{2S-3} \tag{8}$$

と定義しておこう．これにより，距離 h がとり得る範囲を，S にかかわらず，$0 < h < 2$ と固定できる．

次に，h を使って $P_3(d)$ の $S \to \infty$ の極限での形を求めよう．まず，$P_3(d)$ のパラメータを d から h に変数変換した分布 $P_4(h)$ を定義する．

$$P_4(h) = \frac{2S{-}3}{2}\,P_3\Bigl(\mathrm{round}\bigl(d(h)\bigr)\Bigr) \tag{9}$$

ここで，$d(h)$ は $h(d)$ の逆関数であり，round( ) は，

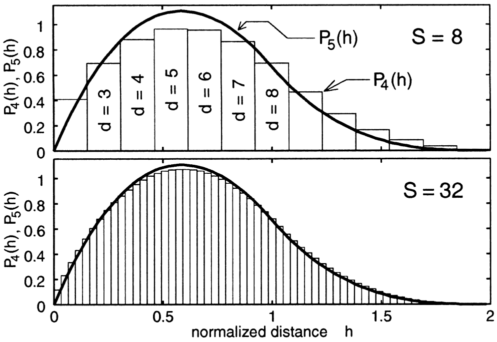

図 2　独立な 2 信号に対するマンハッタン距離の分布 $P_4(h)$ とその漸近分布 $P_5(h)$．上図は S=8，下図は S=32.

Fig. 2　Distributions of Manhattan distance for independent signals $P_4(h)$ and their asymptotic distributions $P_5(h)$. S=8(top), S=32(bottom).

与えられた実数に最も近い整数をとる関数である．また，$\frac{2S-3}{2}$ は，$\int P_4(h)dh = 1$ とするための補正である．式 (9) に式 (7) を代入し，$S \to \infty$ の極限 $P_5(h)$ を求めると，以下のようになる．

$$P_5(h) = \lim_{S\to\infty} P_4(h) \tag{10}$$

$$= \begin{cases} +\frac{2}{3}h^3 - 4h^2 + 4h & (0 \le h \le 1) \\ -\frac{2}{3}h^3 + 4h^2 - 8h + \frac{16}{3} & (1 \le h \le 2) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{11}$$

すなわち，$P_5(h)$ は，二つの三次関数を継ぎ足しただけの単純な形になる．$\int P_5(h)dh = 1$ であるので，$P_5(h)$ 自体が密度関数である．

図 2 に，S が 8 と 32 の場合について $P_4(h)$ に $P_5(h)$ を重ねて描いたグラフを示す．$S \ge 32$ であれば，$P_4(h)$（すなわち $P_3(d)$）の概形はほぼ $P_5(h)$ に等しいので，d の代わりに h を使い，$P_3(d)$ の代わりに $P_5(h)$ を使うことで，S に依存しない普遍的表現が可能となる．

2.4　$P(d)$ を評価するコントラスト関数

独立であれば，経験分布 $P(d)$ は理論分布 $P_3(d)$ に近いはずだ．具体例で見てみよう．図 3 の (a)〜(d) に，図 1 の順位表 (e)〜(h) に対する $P(d)$ を示す（横軸は d の代わりに h でとった．また，$P_3(d)$ も描いてある）．(a) と (c) が従属な場合であり，(b) と (d) が独立な場合である．(b) と (d) では，ばらつきはあるものの，ほぼ $P_3(d)$ に沿った形で分布していることが分かる．一方，(a) では，h<0.15 と h>1.7 の範囲で値が増加している．これは，順位表における黒印が×字形に局在化しているため，×の直線部分で h<0.15 における増加が起こり，×の対角部分（左上と右下のペア，または右上と左下のペア）で h>1.7 における増加が起こったものと理解できる．また，(c) では，h>1.5 の範囲で $P(d)$=0 になってしまっている．これは，順位表の四隅付近における黒印の欠如に起因している．以上より，$P(d)$ と $P_3(d)$ の距離を何らかの方法で測ることができれば，独立性を評価できそうだ．

表 1　テスト関数の具体例の一覧

Table 1　Summary of examples of testing functions.

関数名	関数形	備考
$f_1(h)$	$\frac{1}{h}$	$-f_1' = \frac{1}{h^2}$
$f_2(h)$	$-\frac{1}{2-h}$	f_1 と回転対称
$f_3(h)$	$\frac{1}{h} - \frac{1}{2-h}$	$f_1 + f_2$
$f_4(h)$	$-\log(h)$	$-f_4' = \frac{1}{h}$
$f_5(h)$	$\log(2-h)$	f_4 と回転対称
$f_6(h)$	$-\log(h) + \log(2-h)$	$f_4 + f_5$
$f_7(h)$	$h\log(h)$	f_8 と回転対称
$f_8(h)$	$-(2-h)\log(2-h)$	便宜的エントロピー
$f_9(h)$	$h\log(h) - (2-h)\log(2-h)$	$f_7 + f_8$
$f_{10}(h)$	$P_2(h-1)$	P_2 は二次のルジャンドル多項式
$f_{11}(h)$	$P_3(h-1)$	P_3 は三次のルジャンドル多項式
$f_{12}(h)$	$P_4(h-1)$	P_4 は四次のルジャンドル多項式
$f_{13}(h)$	$P_5(h-1)$	P_5 は五次のルジャンドル多項式

分布間の距離を測る尺度としては，Kullback 情報量をはじめ，いくつかの指標 [5] が知られている．しかし，**4.2** で示すように，これら既存の指標では良い結果は得られなかった．原因は，図 3 からも分かるように，ランダムな要因による $P(d)$ の凹凸が大きく，それが，非独立性に起因する $P(d)$ と $P_3(d)$ との差を覆い隠してしまっているからだと推察される．そこで，rank ICA では，以下のように $P(d)$ を評価する．

まず，前もって適当なテスト関数 $f(h)$ を決めておく．今回は，$f(h)$ の候補として，表 1 に挙げる 13 種の関数を採用した．これらの波形を付録の図 A･2 に挙げておく．また，偏角 θ_1 と偏角 θ_2 をもつ 2 直線を新しい座標軸にするような線形変換を $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)$ と書くことにして，$\boldsymbol{\theta}$ の r 番目の候補を，$\boldsymbol{\theta}_r$ (r=1, 2, ...) と書こう．今，$\boldsymbol{\theta}_r$ を施した 2 信号の独立性を評価したいとしたとき，変換後の 2 信号から $P(d)$ を求め，

$$e(\boldsymbol{\theta}_r) = \sum_{d=2}^{2S-2} f\bigl(h(d)\bigr)\bigl(P(d) - P_3(d)\bigr) \tag{12}$$

を計算する．$f(h)$ を変化の穏やかな波形とすれば，

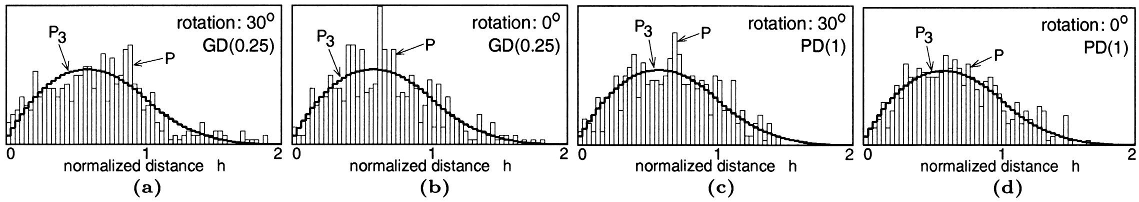

図 3　マンハッタン距離の経験分布 $P(d)$ と，独立を仮定したときの理論分布 $P_3(d)$.
Fig. 3　Empirical distributions $P(d)$ and their theoretical distributions $P_3(d)$.

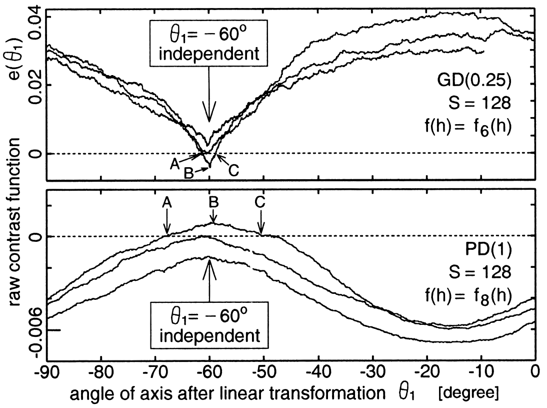

図 4　生のコントラスト関数 $e(\boldsymbol{\theta}_r)$ の軌跡の具体例
Fig. 4　Responses of the raw contrast function $e(\boldsymbol{\theta}_r)$.

$P(d)$ と $P_3(d)$ の差が平滑化され，両者の大局的な差のみが検出できるだろうというのが，式 (12) の意図である．そして，もし，$\boldsymbol{\theta}_r$ において $P(d)$ が $P_3(d)$ に近ければ，$e(\boldsymbol{\theta}_r)$ は，どのような $f(h)$ を用いようとも，ほぼ 0 になるはずである．すなわち，独立の必要条件が，$e(\boldsymbol{\theta}_r) \simeq 0$ となるわけだ．簡単には，$|e(\boldsymbol{\theta}_r)|$ を最小とする $\boldsymbol{\theta}_r$ を選べばよいということになる．

ところで，実際に座標回転を行いながら $e(\boldsymbol{\theta}_r)$ をプロットしていくと，図 4 のようになる．図 4 は，（**3.** で述べる方法により θ_2 は θ_1 から決定できるので）$\boldsymbol{\theta}$ の代わりに θ_1 を横軸にとり，GD(0.25) と PD(1) のそれぞれについて，30° の回転行列で混合した三つのデータセットについての $e(\boldsymbol{\theta}_r)$ の変化を描いたものである．図より，$e(\boldsymbol{\theta}_r)$ には，個々のデータセット固有のバイアスがのっており，独立が達成される $\theta_1 = -60°$ において，必ずしも 0 に届かないことがあることが分かる．また，逆に 0 を超えてオーバシュートすることもあるようだ．オーバシュートしたときに，$|e(\boldsymbol{\theta}_r)|$ を最小とする $\boldsymbol{\theta}$ を選んだのでは，図 4 の点 A や点 C が選ばれることになってしまい好ましくない．点 B が選ばれるようにするには，図 4（上）の場合には $e(\boldsymbol{\theta}_r)$ の最小値点を，図 4（下）の場合には $e(\boldsymbol{\theta}_r)$ の最大値点を選ぶようにすればよい．そこで，コントラスト関数 $\breve{e}(\boldsymbol{\theta}_r)$ を，改めて以下のように定義する．$\breve{e}(\boldsymbol{\theta}_r)$ の最小値を与える $\boldsymbol{\theta}_r$ が ICA 解である．

$$\breve{e}(\boldsymbol{\theta}_r) = \begin{cases} e(\boldsymbol{\theta}_r) & (|\min_{\boldsymbol{\theta}_r} e(\boldsymbol{\theta}_r)| \le |\max_{\boldsymbol{\theta}_r} e(\boldsymbol{\theta}_r)|) \\ -e(\boldsymbol{\theta}_r) & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{13}$$

3. アルゴリズム

白色化は，多くの ICA 法で，前処理として必要とされている．これに対し，rank ICA は，白色化を全く必要としないという大きな特長をもっている．また，探索すべき角度候補 $\boldsymbol{\theta}_r$ を，必要十分に列挙し効率的に評価できるという特徴もある．それらの利点に重点を置いて，アルゴリズムの概要を述べよう．

今，ICA したい 2ch 信号を，$\{x_1(t)\}$ と $\{x_2(t)\}$ とする．2 時点 t_i と t_j $(i \neq j)$ のすべての組合せについて，二次元平面上で，点 $(x_1(t_i), x_2(t_i))$ を起点とし，点 $(x_1(t_j), x_2(t_j))$ を終点とするベクトルを考える．そして，そのベクトルの偏角に $-\frac{\pi}{2}$ を加えた量を $\psi(i,j)$ とする．ここで，$-\frac{\pi}{2} < \psi(i,j) < \frac{\pi}{2}$ となるように，必要なら i と j を入れ換える．$\psi(i,j)$ の意味は，新しい座標軸の偏角を増加させていくとき，偏角が $\psi(i,j)$ を通過した瞬間に，t_i と t_j に対応する点のこの座標軸上での順位が入れ換わるということである．

次に，$\psi(i,j)$ を昇順にソートし，新しく三つの関数 $t_s(r)$, $t_e(r)$, $\phi(r)$ を，$\psi(i,j)$ の順位が r 位であったときに $t_s(r){=}i$, $t_e(r){=}j$, $\phi(r){=}\psi(i,j)$ となるよう定義する．組合せ総数を $S_c = \frac{S(S-1)}{2}$ と書くことにすると，これら三つの関数の定義域は $1 \le r \le S_c$ であるが，後の都合上，定義域を一つ拡張して，$t_s(S_c{+}1){=}t_e(1)$, $t_e(S_c{+}1){=}t_s(1)$, $\phi(S_c{+}1){=}\phi(1){+}\pi$ としておく．

図 5 に示すように，線形変換の新しい座標軸の第 1 軸を $\phi(1) < \theta_1 < \phi(2)$ の範囲で動かしても第 1 軸に

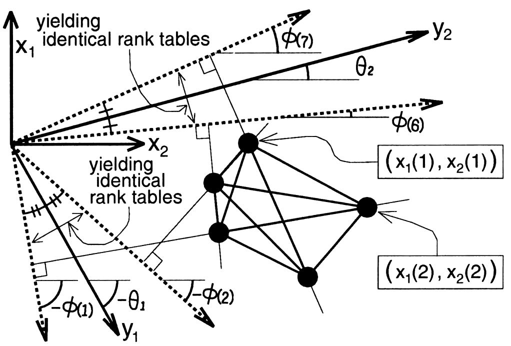

図 5　線形変換後の新しい座標軸 θ_1, θ_2 が，必要十分に決定できることの幾何学的説明．S=5 で r=1 の場合．
Fig. 5　Geometrical meanings of angles of linear transformations, θ_1,θ_2. (S=5, r=1)

射影された各サンプル値の順位は変わらない．すなわち，順位表は完全に同一であるので，独立性の評価はこの範囲では 1 回行えば十分である．そこで，第 1 軸の角度を $\theta_1 = \frac{\phi(1)+\phi(2)}{2}$ として最初の評価を行う．

一方，第 2 軸については，黒印 2 個のすべての組合せ（S_c 通り）に対する第 1 軸での観測順序のうち，半数（$\frac{S_c}{2}$ 通り）の組合せで順序逆転が起こる座標軸となるよう，第 1 軸に連動させて動かす．そうすれば，第 1 軸と第 2 軸の観測の間で，黒印 2 個の順序関係が独立（第 1 軸での大小関係を知っても第 2 軸の大小関係について情報が得られない）になるからである．

以上により，コントラスト関数の最小化は，この連動性の拘束のもとで行われることになる．この拘束を解けば，コントラスト関数を更に小さくできる可能性がある．しかし，探索の次元を二次元から一次元に簡略化できるという大きなメリットがあることと，順位情報に基づいた拘束であるので，その長所であるロバスト性は保たれると考え，この拘束を採用した．

なお，拘束しない探索も行い比較したが，原信号パターンによっては拘束の影響が認められるものもあった．今後の解析が必要だが，今回はその問題には踏み込まず，拘束を前提にした性能評価を行うこととした．

以上の方針に従い，第 2 軸の最初の角度を第 1 軸に連動させて $\theta_2 = (\phi(\frac{S_c}{2}+1)+\phi(\frac{S_c}{2}+2))/2$ とする（ここで，$\frac{S_c}{2}$ を整数とするためには，S=0 (mod 4)，若しくは，S=1 (mod 4) となるよう S を選べばよい）．

以上で求まった最初の角度 $\boldsymbol{\theta}_1 = (\theta_1, \theta_2)$ で $\{x_1(t)\}$ と $\{x_2(t)\}$ を座標回転して $\{y_1(t)\}$ と $\{y_2(t)\}$ を作る．次に，これらをソートして R を作り，R から $P(d)$ を算出し，$e(\boldsymbol{\theta}_1)$ を求める．

表 2　rank ICA のアルゴリズム
Table 2　An algorithm of rank ICA.

(1)	入力データセット $\{x_1(t)\}$，$\{x_2(t)\}$ を入力する
(2)	散布図上の 2 点の組合せすべてに対し $\psi(i,j)$ を算出
(3)	$\psi(i,j)$ をソートした後，$t_s(r)$，$t_e(r)$，$\phi(r)$ を算出
(4)	r=1 として，式 (14)，(15) より θ_1 と θ_2 を決定
(5)	θ_1, θ_2 で線形変換を行い $\{y_1(t)\}$，$\{y_2(t)\}$ を算出
(6)	$\{y_1(t)\}$，$\{y_2(t)\}$ をソートして，順位表 R を求める
(7)	$P(d)$ を求め，$P(d)$ から $e(\boldsymbol{\theta}_1)$ を求める
(8)	$r = r$+1 として，式 (14)，(15) より θ_1 と θ_2 を決定
(9)	$R_1(t_s(r))$ と $R_1(t_e(r))$ を交換
(10)	$R_2(t_s(S_c/2+r))$ と $R_2(t_e(S_c/2+r))$ を交換
(11)	これらの交換に基づいて $P(d)$ を修正し $e(\boldsymbol{\theta}_r)$ を算出
(12)	$r < S_c/2$ であれば，(8) に戻る
(13)	$\breve{e}(\boldsymbol{\theta}_r)$ を求め，これを最小とする $\boldsymbol{\theta}_r$ を ICA 解とする

以後，r=2, 3, ... $\frac{S_c}{2}$ について，二つの軸を，

$$\theta_1 = \frac{\phi(r)+\phi(r+1)}{2} \tag{14}$$

$$\theta_2 = \frac{\phi(\frac{S_c}{2}+r)+\phi(\frac{S_c}{2}+r+1)}{2} \tag{15}$$

として評価を行っていく．上式により，順位交換が頻繁に起こる角度ではきめ細かく，そうでない角度では粗くステップをとり，効率良く評価していくことができる．刻み幅などの設定に頭を悩ませる必要はない．

ところで，一つ一つの $\boldsymbol{\theta}_r$ に対して，いちいちソート処理が必要であるのは大変であると思われるかもしれない．しかし，実は，$r = 2$ 以降での評価では，以下の工夫によりソート処理から逃れることができる．すなわち，第 1 軸の偏角が $\frac{\phi(r-1)+\phi(r)}{2}$ から $\frac{\phi(r)+\phi(r+1)}{2}$ に変化することで起こる順位表への影響は，順位 $R_1(t_s(r))$ と順位 $R_1(t_e(r))$ の交換だけにすぎない．この性質を利用して $t_s(r)$ と $t_e(r)$ だけを手掛りに $P(d)$ を直接修正してしまうことが可能である．もちろん，第 2 軸についても同様の工夫が成立する．この工夫によって計算量が大幅に削減できる．

このようにして求めた $e(\boldsymbol{\theta}_r)$ $(r = 1, 2, \ldots, \frac{S_c}{2})$ を式 (13) で $\breve{e}(\boldsymbol{\theta}_r)$ に変換し，その最小値から最適角を決める．以上述べたアルゴリズムを，表 2 にまとめる．

ところで，2 信号 ICA での白色化の目的の一つは，決定すべき複数の変量を単一の回転角に絞って探索の効率を上げることにある．表 2 のアルゴリズムは，この効率化を，第 2 軸を第 1 軸に連動させることで実現しており，白色化は不要である．白色化の欠点は，外れ値に弱いということである．rank ICA は白色化を必要としないため，外れ値に強いと期待できる．

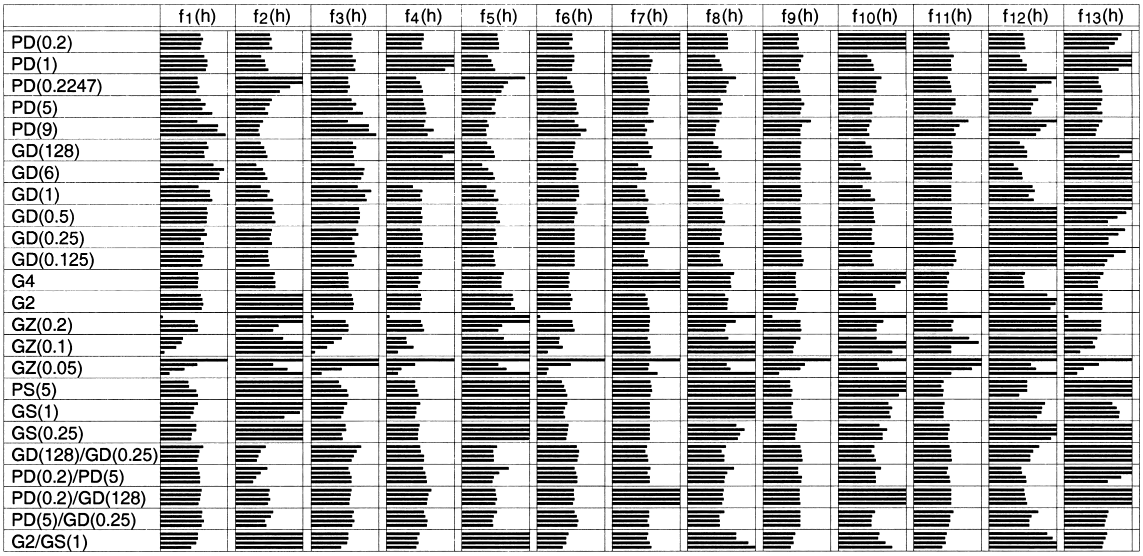

図 6　テスト関数 $f_1(h)$〜$f_{13}(h)$ の性能比較，13 種類のテスト関数と 24 種類の原信号パターンから決まるマスの中に描いてある 4 本の棒は，上から，S = 128，256，512，1024 での角度誤差 E_Δ を，横 13 個間での相対的な大きさの比として示したもの．

Fig. 6　Performance Comparison of 13 testing functions. Four bars in each table cell indicate relative values of angular errors E_Δ for S = 128, 256, 512, 1024.

4. 数 値 実 験

良好な特性を有するテスト関数 $f(h)$ を探すためと，既存の ICA 法との性能比較を行うために，数値実験を行った．まず，実験条件について述べる．

原信号としては，表 A·1 に挙げた 19 種類の分布を用い，同一分布同士の混合のほか，異なる分布の混合 5 パターンを加えて，計 24 の原信号パターンを用意した．

1 回の ICA 実験は，混合行列を発生するところから始まる．混合行列は,「ランダムに選んだ 2 軸が新しい軸になるように線形変換を行った後，全体を x_1 軸方向にランダムな 0.1〜2.0 の定数で伸縮させる行列」として，そのつど生成する．次に，原信号を混合行列で混合し，ICA を行った後，得られた分離行列を解析して，ICA が推定した座標軸の角度 2 個を読み取り，真の角度との差をとる．そして，この差 2 個の RMS 値を，その回の ICA の誤差 e_Δ とした．

以上の操作を，原信号生成と混合行列生成の乱数の種を変えて 1000 回行い，e_Δ のメジアンを最終的な角度誤差 E_Δ とした．

4.1　テスト関数 $f(h)$ の比較

表 1 で紹介した 13 個のテスト関数の性能を比較した．結果を図 6 に示す．

図 6 では，横軸にテスト関数をとり，縦軸に 24 種類の原信号パターンをとっている．これらの組合せで決まるますの中にある 4 本の棒グラフは，上から，サンプル数 S が，128, 256, 512, 1024 の場合の角度誤差 E_Δ の大きさを示している．棒の長さは，比較すべき横 1 列の E_Δ の値 13 個のメジアンが，ます幅の 0.5 倍となる縮尺で算出し，ます幅の 0.9 倍を超えたときには，ます幅の 0.9 倍に飽和させた．また，E_Δ が 13° を超えたときにも，ます幅の 0.9 倍の棒とした．

図 6 より，原信号パターンとサンプル数の全組合せにわたって性能が良いのは，$f_6(h)$ であると分かる．そこで，テスト関数を $f_6(h)$ に決定し実験を進めた．

4.2　既存の分布間距離を使う方法との比較

$P(d)$ と $P_3(d)$ の差を測るのに，テスト関数を使わず，既存の分布間距離を使うと，どうなるだろうか．

図 7 に，既存の分布間距離 [5] として，Kullback 情報量，Hellinger 距離，Kolmogorov 計量，χ^2 距離を用いた場合を，テスト関数 $f_6(h)$ による場合と比較して示す．特定の原信号パターンに対してはテスト関数を上回る性能を発揮することもあるが，総合的には，テスト関数による方法が優れていることが分かる．

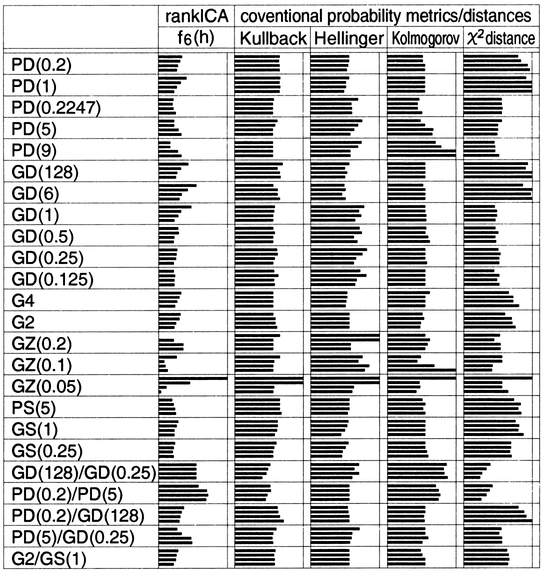

図 7　経験分布 $P(d)$ を評価するとき，テスト関数 $f_6(h)$ を用いる代わりに，既存の分布間距離尺度（Kullback 情報量，Hellinger 距離，Kolmogorov 計量，χ^2 距離）を用いた場合の性能比較．棒の長さで，角度誤差 $E_\triangle$ の横 5 個間での相対的な大きさの比を示す．

Fig. 7　Methods using conventional distances for evaluating $P(d)$ are compared to rank ICA with testing function $f_6(h)$.

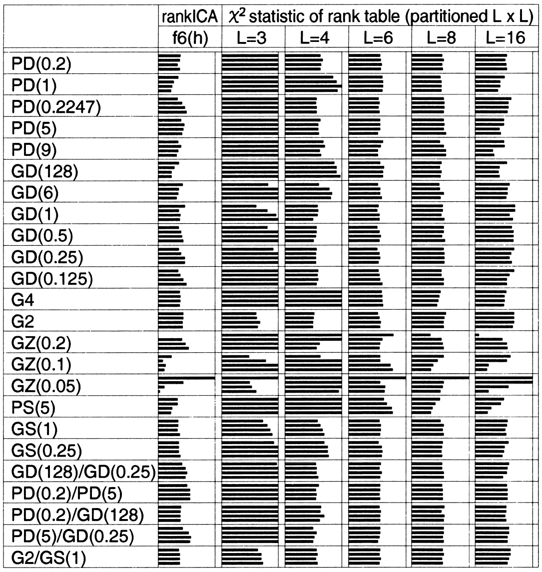

図 8　順位表 R を評価するとき，$P(d)$ を用いる代わりに，R を $L \times L$ の区画に分割して計算された χ^2 統計量を用いた場合の性能比較．棒の長さで，角度誤差 $E_\triangle$ の横 6 個間での相対的な大きさの比を示す．

Fig. 8　Comparison between rank ICA and the methods using χ^2 statistics of a rank table partitioned $L \times L$ subregions.

4.3　χ^2 統計量による順位表評価法との比較

更に，$P(d)$ によらずに，順位表を別の方法で直接評価したら，どうなるだろうか．ここでは，乱数の検定手法（**2.2**）で ICA を構成し，比較してみよう．

まず，順位表をできるだけ均等に縦方向に L 分割した．同じように横方向にも L 分割し，順位表を，$L\times L$ の区画に分割した．そして，各区画に含まれる黒印の数を集計して χ^2 統計量を作り，それをコントラスト関数として ICA した結果を，図 8 に示す．

ごく少数の条件（例えば，PD(9) で S=512 で L=16，など）で，rank ICA よりわずかに良い $E_\triangle$ が出現するが，総合的には rank ICA の方が優れている．

4.4　既存の ICA 法との比較

既存の ICA 法との比較を，図 9 に示す．既存の ICA 法としては，(1) FastICA-1（FastICA で非線形関数に tanh 型を用いたもの），(2) FastICA-2（ガウス型を用いたもの），(3) FastICA-3（3 乗型を用いたもの）[3]，(4) Comon 法 [2]，(5) ML 法（最ゆう法）[3]，を用いた．ただし，最ゆう法では，原信号分布を未知とし，非線形関数に $-2\tanh(y)$ を用いたものと $\tanh(y)-y$ を用いたものの両方を試し，良好な方を結果とした．その他，ロバストな ICA の代表として，(6) RADICAL 法 [6] についても比較した．

図 9 より，rank ICA は，比較した他のどの方法よりも性能が良いことが分かる．順位統計学の分野では，データ値を順位情報に変換することで起こる情報の損失が意外なほど少ないことはよく知られている [4]．これが ICA においても成り立つということは驚くことではない．しかし，散布図を使うより順位表を使う方が，むしろ性能が良くなるという点は注目に値する．

PD(9)，PD(5)，PS(5)，GZ(0.2) については性能に差がありすぎて図 9 では比較できない．そこで，S と $E_\triangle$ の関係図として詳しく比較したのが 図 10 である．一般的に，S の増加に伴って $E_\triangle$ は -10dB/dec の傾斜で減少する傾向が見られるが，rank ICA では，そのレートを超えて突出した性能を示す場合がある（図 10 (a)〜(e)）．非常に尖度が高い分布や，PD(9) に代表されるように部分的に値の集中が激しい分布のときにこのようなことが起こる．つまり，rank ICA が最も得意とする分布である．

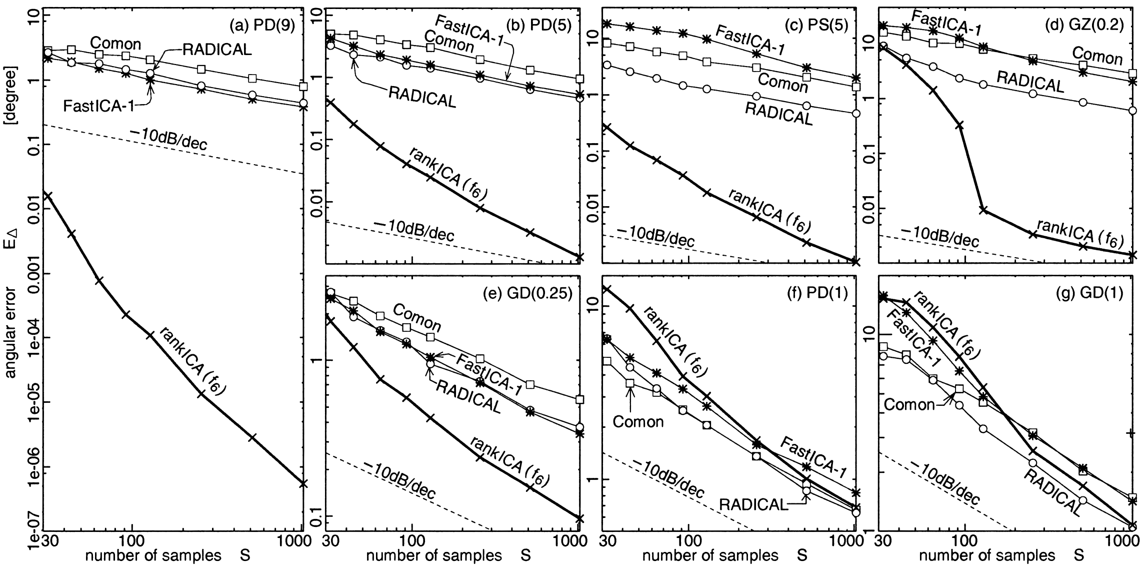

図 10　rank ICA と既存の ICA を，サンプル数 S に対する角度誤差 $E_{\triangle}$ の関係で比較
Fig. 10　S–$E_{\triangle}$ relationship comparison between rank ICA and other methods.

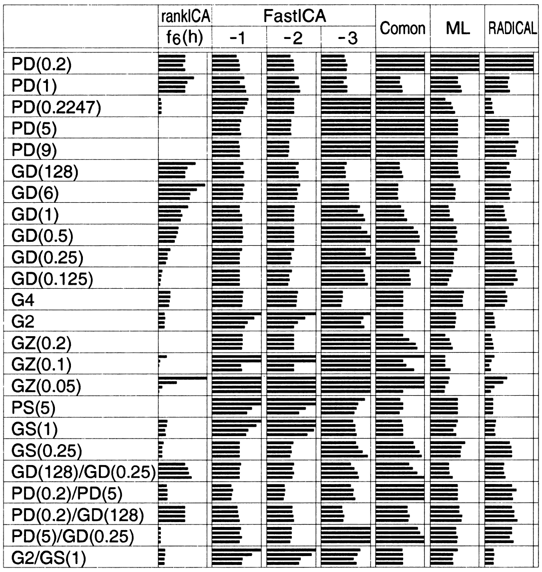

図 9　rank ICA と既存 ICA の性能比較．棒の長さは，角度誤差 $E_{\triangle}$ の横 7 個間での相対的な大きさの比．
Fig. 9　Summary of comparison of angular errors $E_{\triangle}$ of rank ICA and those of other methods.

一方，図 10 (f)，(g) に示す一様分布やラプラス分布は，値の集中が存在せず，rank ICA が苦手とする分布である．例えば，一様分布の場合，$h{>}1.5$ での $P(d)$ の値の不足をもって従属と判定するわけだが，図 2 の $P_5(h)$ の形を見ても分かるとおり，$h{>}1.5$ の範囲では

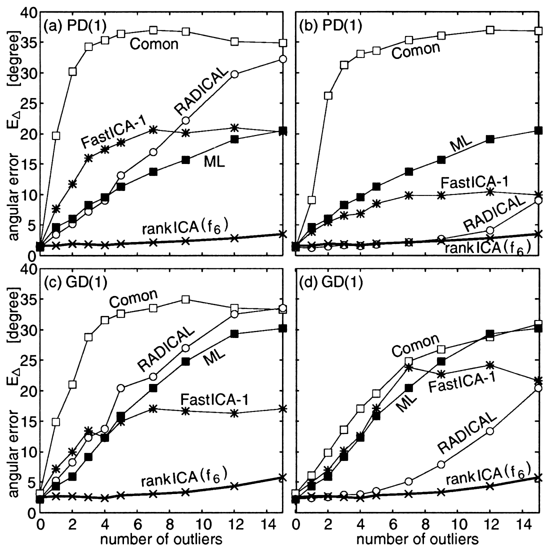

図 11　ロバスト性の検証．外れ値の数の角度誤差への影響．
Fig. 11　Robustness to various numbers of outliers.

理論値そのものが非常に小さい．このことから，小さな S に対しては，独立性判定が困難になると考えられる．実際，$S{\leq}256$ では rank ICA が最も悪い．しかし，$S{=}1024$ では平均以上の成績となっている，

図 11 に，rank ICA のロバスト性を示す．図では，横軸に外れ値の数をとり，縦軸に $S{=}256$ での角度誤差 $E_{\triangle}$ をとっている．外れ値は，x_1 若しくは x_2 に，

+5 若しくは −5 の値を加えるという操作によって発生させた．図 11 (a) が原信号に PD(1) を使ったもの，図 11 (c) は GD(1) を使ったものである．

rank ICA は，ロバストを特長とする RADICAL 法よりも更にロバストである．ただし，FastICA，Comon 法，RADICAL 法には，前処理として白色化を含んでおり，非ロバストな白色化で不利になってしまった可能性がある．そこで，この 3 手法については，白色化後に外れ値を加えるよう修正した実験も行った．図 11 (a)，(c) を修正した結果を，図 11 (b)，(d) に示す．差は縮まるが，rank ICA の優位性は揺らがない．

5. 考　　察

5.1 13 種類のテスト関数の意味

本節では，テスト関数の解釈について論じ，表 1 の 13 個の関数を選んだ理由を明らかにする．

第一の解釈は，ポテンシャル的解釈である．順位表上で距離 h だけ離れている二つの黒印があったときのエネルギーを $f(h)$ とすると，順位表がもつ総エネルギーは，$\sum f(h(d))P(d)$ に比例する．これを，式 (12) と比較すると，差は定数のみであるので，式 (12) の最小化はポテンシャルエネルギーの最小化とみなすことができる．ここで，$f(h)$ を微分し符号反転させたものは，二つの黒印間に働く力に相当すると考えると，$f_1(h)$ では距離の 2 乗に反比例した力が働き，$f_4(h)$ では距離に反比例した力が働いていることになる．二つの黒印が近いほど反発し合うので，エネルギーの最小化をすれば，順位表の中での黒印の一様分布化が達成できそうだ．これが，$f_1(h)$ と $f_4(h)$ のねらいである．

ところで，$f_1(h)$ と $f_4(h)$ は，図 A·2 からも分かるように，$h \simeq 0$ 付近を重点的に評価する関数である．ところが，一様分布 PD(1) の場合などは，図 3 (c) でも示されているように，$h \simeq 2$ 付近を調べなくては独立性が判定できない．そこで，$f_1(h)$ と $f_4(h)$ の関数形を回転させ，$h \simeq 2$ 付近を重点的に評価する（黒印を順位表の四隅に強く押しやる）ことをねらったのが，それぞれ，$f_2(h)$ と $f_5(h)$ である．更に，両者を加算して対応範囲を広げたのが，$f_3(h)$ と $f_6(h)$ である．

第二の解釈は，エントロピー的解釈である．実は，$f_8(h)$ だけは特別で，$f_8(h)$ による ICA は，順位表 R を，あるぼけ関数 G により平滑化し，その表のエントロピーをコントラスト関数として ICA をすることと等価である（略証は付録 **3.**）．ただし，そのぼけ関数 G が，図 A·3 (a) に示される特殊な形（十字形，すなわち滑らかでない）であるため，平滑化は不十分であり，R の真のエントロピー推定というにはほど遠いものではある．なお，$f_8(h)$ を回転させたのが $f_7(h)$ であり，$f_7(h)$ と $f_8(h)$ を加算したのが $f_9(h)$ である．

残りの候補（$f_{10}(h)$〜$f_{13}(h)$）には，ルジャンドル多項式を採用した．付録 **2.** で証明するように，rank ICA では，$f(h)$ の二次以上の成分のみが有効である．そこで，二次以上の成分の自然な直交基底であるルジャンドル多項式を候補として選んだのである．

フーリエ級数基底も試みたが，結果は芳しくなかった．更に，これらの直交基底による評価 $e_1(\boldsymbol{\theta}_r), e_2(\boldsymbol{\theta}_r), \ldots$ を複数組み合わせて $\sum_i e_i(\boldsymbol{\theta}_r)^2$ や $\sum_i \breve{e}_i(\boldsymbol{\theta}_r)$ のような複合コントラスト関数を構成してみたが，計算量増加に見合うほどの性能改善は得られなかった．

総合的に見て $f_6(h)$ が最も良好であるので，原信号分布に関しての先験的知識がない場合には $f_6(h)$ を使うのが適切と考えている．しかし，$f_6(h)$ を使っても，特定の分布に対して分離度が著しく劣化する可能性は残る．複合コントラスト関数のテクニックは，そのような悪化を未然に防ぐのには有効であると考えられる．

5.2 d^2- 検定との関係

2.2 では，乱数の検定における χ^2 検定法について述べ，**4.3** では，実際に順位表の一様性評価に利用することを試みた．ところで，乱数の検定の別の方法として，1951 年の文献 [7] の中に，「d^2- 検定」という手法が紹介されている．これは，辺の長さ 1 の正方形内に乱数で位置を決めた 2 点を打ち，その 2 点間のユークリッド距離の 2 乗（d^2 と書くことにする）の経験分布を作り，これを理論分布と比較することで検定を行う方法である．[7] には，d^2 の理論分布が分布関数の形式で記述されているが，それを密度関数 $P_{d^2}(d^2)$ として書き直すと以下のようになる．

$$P_{d^2}(d^2) = \begin{cases} d^2 - 4\,d + \pi & (0 \leq d^2 \leq 1) \\ -d^2 + 4\sqrt{d^2 - 1} & \\ \quad -4\sec^{-1}(d) + \pi - 2 & (1 \leq d^2 \leq 2) \end{cases} \tag{16}$$

rank ICA は，d^2- 検定と本質的には同一の仕組みで順位表の一様性を評価しているとみなすことができる．すなわち，rank ICA における式 (7) や式 (11) は，d^2- 検定における式 (16) に相当するものといってよい．両者の差は，rank ICA が，散布図の代わりに順位表を用い，ユークリッド距離の 2 乗の代わりに，マンハッ

タン距離を用いることから生じている．

d^2- 検定と rank ICA は，経験分布と理論分布の比較の仕方においても違いがある．d^2- 検定では，χ^2 統計量を使うが，rank ICA では，テスト関数を使う．乱数の検定問題では，どのような規則性が現れるか予測できない．これに対して，ICA では，非独立になったときに順位表がどのような変化を受けるかが，(データ分布に対する先験的知識がなくても）ある程度限定されると考えられる．例えば，図 1 で示したように，黒印が直線上に並ぶ傾向や，四隅付近の黒印の欠如傾向である．このため，非独立になったというこれらの変化を感度良く検出できるテスト関数をうまく選択することが効果的になってくる．今回，高性能な ICA が実現できたのは，数値実験の積み重ねによって，良いテスト関数を見つけられたからだといえるだろう．

6. む す び

順位統計量に基づいた rank ICA を提案し，既存の方法と比較して高い性能をもっていることを実証した．

これによって，順位表は，高次の独立性に関しても散布図に劣らないだけの情報を有していることが示されただけでなく，評価の方法を工夫すれば，従来法を超える ICA 法を生み出せる可能性を有していることが示された．また，順位統計量本来の特長であるロバスト性も，期待どおり受け継がれていることも示された．

本論文では 2ch 問題のみを扱った．rank ICA を多チャネルに拡張するには，今のところ Comon 法のように 2ch ずつ組合せを変えながら独立にしていくしかない．また，複素数に対しては「自然な順序」が存在しないため，複素信号用に拡張するには，もうひと工夫必要である．また，他の多くの ICA 法がそうであるように，rank ICA も独立の必要条件を頼りにしているにすぎない．更なる研究の発展が望まれる．

文　　献

[1] A.J. Bell and T.J. Sejnowski, “An information-maximization approach to blind separation and blind deconvolution,” Neural Comput., vol.7, pp.1129–1159, 1995.

[2] P. Comon, “Independent component analysis, A new concept?,” Signal Process., vol.36, pp.287–314, 1994.

[3] A. Hyvärinen, J. Karhunen, and E. Oja, Independent Component Analysis, John Wiley & Sons, 2001.

[4] E.L. Lehmann, Nonparametrics: Statical Methods Based on Ranks, Holden-Day, San Francisco, 1975.（鍋谷清治，刈屋武昭，三浦良造（訳），ノンパラメトリックス：順位にもとづく統計的方法，森北出版，1978.）

[5] A.L. Gibbs and F.E. Su, “On choosing and bounding probability metrics,” International Statistical Review, vol.70, no.3, pp.419–435, 2002.

[6] E.G. Learned-Miller and J.W. Fisher III, “ICA using spacings estimations of entropy,” J. Machine Learning Research, vol.4, pp.1271–1295, 2003.

[7] F. Gruenberger and A.M. Mark, “The d^2 test of random digits,” Mathematical Tables and Other Aids to Computation, vol.5, pp.109–110, 1951.

付　　録

1. 数値実験で用いた不規則信号の定義

本研究の原信号としては，表 A·1 と図 A·1 に挙げた 19 種類の分布をもつ iid 不規則信号を用いた．信号は，すべて，平均 0 で，分散 1 である．表中で「50%幅」とあるのは，上側四分位点と下側四分位点の差（すなわち中心部分でデータ点の 50%が含まれる部分の幅，いわゆる四分範囲）を意味し，「25%幅」も同様の意味である．以下，各分布について簡単に述べておく．

1.1 一般化したガウス分布 GD(ν)

パラメータ ν をもつ一般化したガウス分布 GD(ν) の密度関数を，$p(x) = C\exp(-\frac{|x|^\nu}{D})$ と定義する [3]．ここで，C, D は定数であり，$\int p(x)dx = 1$ という要請と，$p(x)$ の分散を 1 にするという要請から，

$$\left(C, D\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma(\frac{3}{\nu})}{\nu\Gamma(1+\frac{1}{\nu})^3}},\ \left[\frac{\nu\Gamma(1+\frac{1}{\nu})}{\Gamma(\frac{3}{\nu})}\right]^{\frac{\nu}{2}}\right) \tag{A·1}$$

表 A·1　実験で原信号として用いた不規則信号の一覧表
Table A·1　Summary of random signals as sources.

分布名	尖度	50%幅	25%幅	備考
PD(0.2)	−1.91	2.06	1.79	2 峰性
PD(1)	−1.20	1.73	0.866	**一様分布**
PD(2.2247)	0.00	0.998	0.213	尖度 0
PD(5)	2.76	0.207	0.00648	
PD(9)	6.75	0.0170	0.0000332	原点に高集中
GD(128)	−1.19	1.73	0.865	ほぼ一様分布
GD(6)	−1.00	1.65	0.822	
GD(1)	3.00	0.980	0.407	**両側指数分布**
GD(0.5)	22.2	0.514	0.169	
GD(0.25)	455	0.141	0.0320	
GD(0.125)	153000	0.0106	0.00139	尖度が大きい
G4	−1.33	ガウス分布 4 個の均等な混合分布		
G2	1.76	ガウス分布 2 個の非対称な混合分布		
GZ(0.2)	0.74	標準偏差 $\frac{1}{10000}$ の分布を 20%混合		
GZ(0.1)	0.33	標準偏差 $\frac{1}{10000}$ の分布を 10%混合		
GZ(0.05)	0.16	標準偏差 $\frac{1}{10000}$ の分布を 5%混合		
PS(5)	1.71	PD(5) の右半分のみをとったもの		
GS(1)	6.00	GD(1) の右半分．**片側指数分布**		
GS(0.25)	491	GD(0.25) の右半分．		

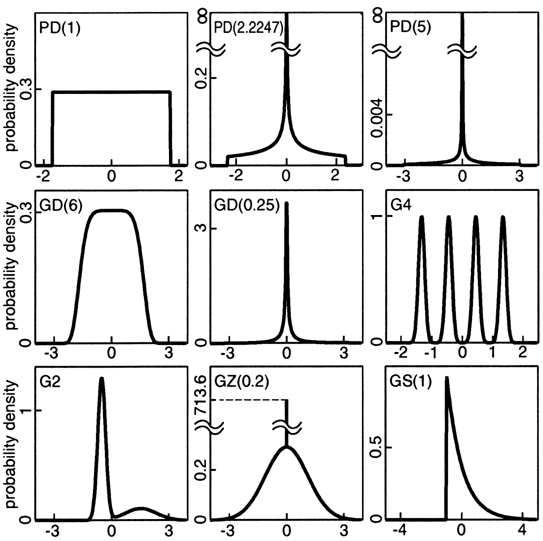

図 A·1　実験に用いた不規則信号の確率密度関数の一部
Fig. A·1　Typical PDFs of random signals as sources.

と決定できる．GD(2) はガウス分布であり，GD(1) は，両側指数分布（ラプラス分布）である．GD(ν) の尖度は，$\mathrm{kurt}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\nu})\Gamma(\frac{5}{\nu})}{\Gamma(\frac{3}{\nu})^2} - 3$ で表され，$0 < \nu < \infty$ のパラメータ変化で実現可能な尖度の範囲は，$\infty > \mathrm{kurt(x)} > -1.2$ である．

1.2　一様分布変数を ν 乗した確率変数 PD(ν)

Y を 0 から 1 の範囲の一様分布確率変数とし，Z を -1 と $+1$ を等確率でとる確率変数としたとき，$X = Z\sqrt{2\nu+1}\,Y^{\nu}$ で定義される確率変数である．ここで，$\sqrt{2\nu+1}$ は，X の分散を 1 にするための定数であり，Z は X を対称分布とするための符号反転用であるので，「一様分布変数を ν 乗する」という操作が本質である．この方法で得られる信号を，以下では PD(ν) と書くことにする．PD(ν) の密度関数は，

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\nu(2\nu+1)^{\frac{1}{2\nu}}}|x|^{\frac{1}{\nu}-1} & (|x| \le \sqrt{2\nu+1}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{A·2}$$

で与えられ，尖度は $\mathrm{kurt}(x) = \frac{4\nu^2-8\nu-2}{4\nu+1}$ であり，50%幅は $\frac{2\sqrt{2\nu+1}}{2^{\nu}}$，25%幅は $\frac{2\sqrt{2\nu+1}}{4^{\nu}}$ である．すなわち，ν の増加に対して尖度の増加はほぼ線形であるにもかかわらず，50%幅や 25%幅は指数関数的に急速に狭まり，中心付近に値が激しく集中する．rank ICA では，順位をとることによる周辺分布の一様分布化と，式 (14)，(15) の機構により，この集中を「切り開く」ことができる．このため，PD(5) や PD(9) の分離は，rank ICA の最も得意とするところとなるのである．

1.3　非対称分布 GS(ν)，PS(ν)

GD(ν) と PD(ν) の $x>0$ 部分を取り出し，改めて平均 0，分散 1 に調整したものを，それぞれ GS(ν) と PS(ν) と呼ぶことにする．非対称性の強い分布である．

1.4　ガウス分布の混合 G4, G2, GZ(ν)

G4 は，平均値を等間隔に並べた四つのガウス分布を均等に混ぜた混合分布で，4 値ディジタル信号を模擬している．G2 は，二つのガウス分布の混合であるが，分散と混合の比率に差異を付けた非対称な分布である．GZ(ν) は，音声データを模擬するために用意したもので，平均 0 の第一のガウス分布に，平均 0 で標準偏差が 1 万分の 1 の第二のガウス分布（無音区間に相当する）を，割合 ν 混合したものである．

2.　$P(d)$ の平均値が確定値であることの証明

以下の計算で示されるように，$P(d)$ の平均値（一次モーメント）は，常に一定値に確定している．

$$\begin{aligned}\sum_{d=2}^{2S-2} d\,P(d) &= \frac{2}{S(S-1)}\sum_{i,j} d(i,j) \\ &= \frac{2}{S(S-1)}\sum_{i,j}\Big(|R_1(t_i)-R_1(t_j)|+|R_2(t_i)-R_2(t_j)|\Big) \\ &= \frac{2}{S(S-1)}\left(\sum_{i=1}^{s-1} i\,(S-i) + \sum_{i=1}^{s-1} i\,(S-i)\right) \\ &= \frac{2}{3}(S+1) \end{aligned} \tag{A·3}$$

データが従属であるとき，順位表上で黒印同士が接近し距離が近くなるから，$P(d)$ の平均値の減少から従属性が簡単に検出できそうに感じられるが，上式はそれが不可能であることを示している．これに加えて，$\sum P(d)$ も 1 に確定しているので，テスト関数 $f(h)$ は，その二次以上の成分のみが有効である．

図 A·2 に，本論文で用いたテスト関数 $f_1(h)$〜$f_{13}(h)$ を図示するが，以上の理由より，0 次と一次の成分を取り除いて有効成分のみを描いてある．

3.　$f_8(h)$ とエントロピー規範の等価性の略証

まず，二次元分布 $\widetilde{R}=(\widetilde{R_{ij}})$（$i,j$ は整数）を，$1 \le i,j \le S$ のとき $\widetilde{R_{ij}}=R_{ij}$，それ以外のとき $\widetilde{R_{ij}}=0$ であるものとして定義する．次に，ぼけ関数 $G=(G_{ij})$（i,j は整数）を，天下りに，以下のように定義する．

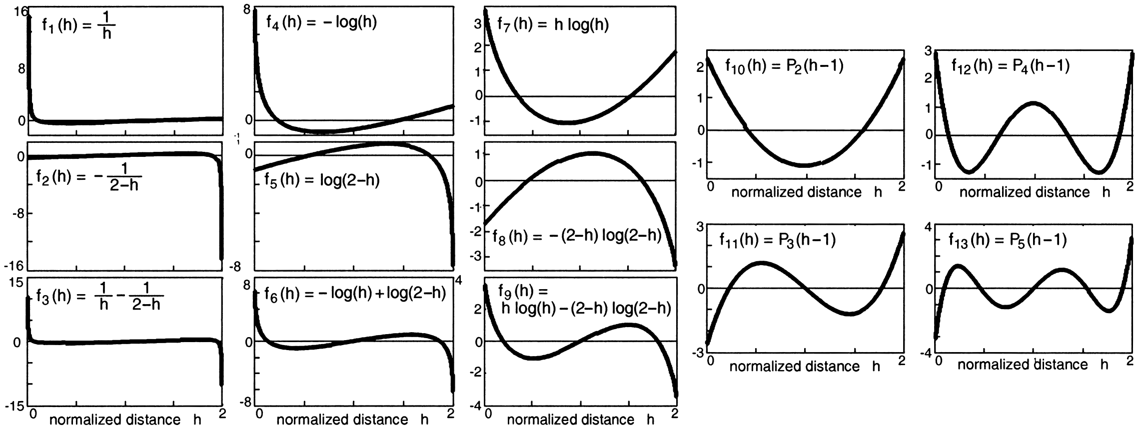

図 A·2　本論文で候補として用いたテスト関数 $f_1(h)$〜$f_{13}(h)$ の有効成分の波形
Fig. A·2　Waveforms of $f_1(h) \sim f_{13}(h)$ used as candidates of testing functions.

$$G_{ij} = \begin{cases} \dfrac{3(4S-3)-12\,|\,i+j\,|}{16S^3-30S^2+17S} & (i=0 \text{ または } j=0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$\widetilde{R}$ に G を二次元畳込みすれば，順位表にぼけを加える（平滑化する）ことになる．そこで，畳込み結果の ij 成分のうち，$1 \le i,j \le S$ 部分を取り出して（つまり，順位表の範囲からはみだした部分を除去して），$\widehat{R}=(\widehat{R}_{ij})$ を作成し，これを平滑化順位表と呼ぼう．

図 A·3 (a) に示すように，G_{ij} は (i,j) 座標上で十字形に非 0 値が並ぶ．すなわち，G は，同一行若しくは同一列のみに値をにじませるので，図 A·3 (b)，(c) に示すように，$R_{ij}=0$ である i,j に対する $\widehat{R}_{ij}$ は，i 行に必ず 1 個のみ存在する黒印（その列番号を $j+d_1$ とする）と，j 列に必ず 1 個のみ存在する黒印（その行番号を $i+d_2$ とする）の二つからの寄与だけで決まり，

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{ij} &= \frac{3(4S-3)-12\,|d_1|}{16S^3-30S^2+17S} + \frac{3(4S-3)-12\,|d_2|}{16S^3-30S^2+17S} \\ &= \frac{6(4S-3)-12\,d}{16S^3-30S^2+17S} \end{aligned} \tag{A·4}$$

と書ける．ここで $d=|d_1|+|d_2|$ は，その二つの黒印間のマンハッタン距離である．

以上の準備のもと，$\sum_{ij}\widehat{R}_{ij}$ を計算してみると，式 (A·3) と式 (A·4) を使って $\sum_{ij}\widehat{R}_{ij}=1$ が得られる．総和が 1 であることから，$\widehat{R}$ は確率分布とみなせる．よって，エントロピーが定義できる．そこで，エントロピー $H(\widehat{R})$ を，式 (A·4) を使って計算すると，

$$H(\widehat{R}) = \sum_{ij} \widehat{R}_{ij} \log(\widehat{R}_{ij})$$

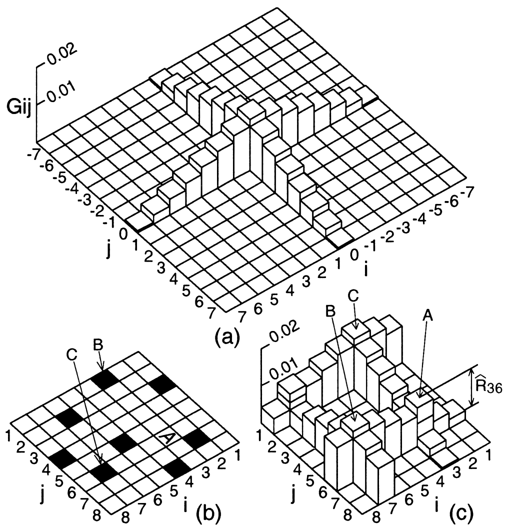

図 A·3　S=8 の場合のぼけ関数 G_{ij} を (a) に示す．G_{ij} を (b) に示す順位表に畳み込んだ結果のうち，位置 A のますに対する値 $\widehat{R}_{36}$ は，A と同じ行にある黒印 B の列番号と，同じ列にある黒印 C の行番号だけから決まる．その様子を (c) に示す．
Fig. A·3　(a) Smoothing function G_{ij} for S=8. (b) Smoothed value on A, $\widehat{R}_{36}$, depends on the locations of the mark B and C. (c) Illustration of the effect of the smoothing function.

$$= \alpha(S) \sum (2-h)\log(2-h) \;+ \beta(S) \tag{A·5}$$

となる．ここで，$\alpha(S)$, $\beta(S)$ は，S のみに依存する定数である．一方，式 (12) に $f(h)=f_8(h)$ を代入しても，$\alpha(S)$, $\beta(S)$ は異なるものの，式 (A·5) になる．

つまり，$f_8(h)$ を使う rank ICA は，平滑化順位表 $\widehat{R}$ のエントロピーを測っていることと等価である．

（平成 17 年 3 月 30 日受付，7 月 10 日再受付，
10 月 11 日最終原稿受付）

高橋　弘太　（正員）

1984 東大・工・計数工卒．1986 同大大学院修士課程了．同年，東京大学工学部助手．1994 同大講師．同年，電気通信大学講師．1996 同大助教授．博士（工学）．統計的信号処理，センサ信号のディジタル信号処理，マイクロホンアレーや独立成分分析などに特化した実時間センシングシステムの DSP の並列処理による実現，映像と音響情報によるマン・マシンインタフェースの研究に従事．日本音響学会，IEEE 各会員．