División proporcional con múltiples referencias. Aplicación al caso de agregación y actualización de probabilidades

López Sánchez, A.D.; Hinojosa Ramos, M.A.; Contreras Rubio, I.
Universidad Pablo de Olavide
Mármol Conde, A.M.
Universidad de Sevilla

RESUMEN

En este trabajo se considera una extensión de los problemas clásicos de reparto en los que las referencias relevantes de cada agente están expresadas por un vector, es decir, problemas de división con múltiples referencias. Nuestro propósito es definir una regla que, permitiendo que se reduzca el número de agentes, se comporte como una regla de división no manipulable y satisfaga algunas propiedades deseables en este tipo de problemas. Como aplicación se analizan los problemas de agregación y actualización de probabilidades.

Palabras clave: Agregación de probabilidades; actualización de probabilidades; regla proporcional; problemas de división con múltiples referencias.

***Área temática*:** Métodos estadísticos

ABSTRACT

In this paper, we consider an extension of classic division problems in which the relevant references of each agent are represented by a vector, that is, division problems with multiple references. We define a non-manipulable division rule satisfying some desirable properties in the class of multi-issue allocation problems. As an application we analyze the probability aggregation problem and the probability updating problem.

***Keywords**:* Probability aggregation; probability updating; proportional rule; multi-issue allocation problems.

Acknowledgments:

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por le proyecto SEJ2007-62711 del Ministerio de Ciencia y Tecnología y por el proyecto de la Consejería de Innovación de la Junta de Andalucía P06-SEJ-01801.

1. INTRODUCCIÓN

Un problema clásico de reparto consiste en cómo dividir una cantidad de recurso entre un conjunto de agentes, teniendo en cuenta una “referencia” para cada uno de ellos. Un ejemplo es el problema de bancarrota, donde la referencia de cada agente (los agentes son los acreedores de la empresa) es la reclamación (derecho consolidado) que este hace sobre el valor de liquidación de la empresa en bancarrota. Otro ejemplo es el problema de reparto de excedentes, que aparece, por ejemplo, cuando hay que dividir los beneficios de un negocio entre los inversores de acuerdo a las cantidades que respectivamente invirtieron (referencias). Estos modelos han sido muy estudiados en la literatura (ver por ejemplo Thomson 2003).

Nuestra investigación no se restringe a problemas de bancarrota o problemas de reparto de excedentes sino que propone un modelo en el que caben los dos tipos de problemas, en el sentido de que la suma total de las referencias de los agentes puede estar por encima o por debajo de la cantidad total a distribuir. Además, se extiende este modelo para poder representar y analizar situaciones de la vida cotidiana de una manera más realista. En concreto, el modelo que se aborda representa situaciones con múltiples referencias. Algunas situaciones reales que pueden representarse mediante este modelo son:

1. El valor de liquidación de una firma que ha quebrado (el estado) se divide entre sus acreedores (los agentes), y las reclamaciones de cada acreedor son clasificadas por distintos tipos de activos (las referencias).
2. El presupuesto de la Unión Europea (el estado) se divide en diferentes partidas, tales como agricultura y recursos naturales, seguridad y justicia, programas ciudadanos, relaciones exteriores, etc., y los países miembros de la Unión Europea (los agentes) pueden tener distintas necesidades en las diferentes partidas (las referencias).
3. Los servicios centrales de una universidad han de asignar una cantidad de dinero (el estado) a diferentes bibliotecas (las referencias) localizadas en diferentes facultades; cada departamento (cada agente) está implicado en varias facultades y tiene un número de reclamaciones sobre el estado.

Las referencias múltiples pueden también representar las distintas evaluaciones que hacen diferentes expertos de las necesidades o derechos que tienen unos agentes. Por ejemplo, situaciones en las que hay que repartir fondos para investigación entre distintos grupos y las necesidades de estos son evaluadas por varios expertos.

El modelo también es apropiado para representar problemas en los que hay incertidumbre sobre las referencias. Por ejemplo si varios acreedores tienen derecho a recibir de una empresa, en una fecha futura, ciertas cantidades de activos financieros y la empresa deudora quiebra antes de cumplir con esta obligación, entonces para dividir el valor de liquidación de la empresa entre los acreedores se podrían tener en cuenta distintos escenarios económicos futuros. La incertidumbre sobre las reclamaciones de los acreedores se podría incluir en el modelo considerando los valores de los activos en diferentes escenarios. Estos valores serían las referencias a tener en cuenta en el reparto.

El modelo ha sido estudiado en Ju et al., 2007, donde se proporciona una caracterización axiomática de las reglas que son no manipulables por transferencia entre las referencias de los agentes. También, las contribuciones de Pulido et al. (2002, 2008) pueden considerarse casos particulares del modelo que aquí proponemos estudiar, con sólo dos vectores de referencias y donde uno de ellos domina al otro. En un sentido diferente al que aquí se propone, en Branzei et al. (2004), puede verse un modelo parecido con incertidumbre sobre las referencias (pertenecen a un intervalo).

En este trabajo se relaja el modelo anterior en el sentido de que uno o varios de los agentes finalmente no participan en el reparto y su asignación se reparte entre el resto de los agentes. Por ejemplo, en una asignación de fondos a grupos de investigación concedida por un ente público, que se ha realizado teniendo en cuenta la valoración realizada por varios expertos sobre las necesidades de cada grupo, resulta que, una vez hecho el reparto, alguno o algunos de los grupos no recibe finalmente su asignación porque cuando se pide justificación de los datos expuestos en la solicitud se comprueba que en realidad estos grupos no cumplen los requisitos de la convocatoria. Los fondos que en principio se iban a asignar a estos grupos se reparten entre el resto de los solicitantes.

Proponemos una regla que contemple de antemano y de manera general esta posibilidad de eliminación de agentes, intentando adaptar las reglas clásicas de problemas de división con múltiples referencias y manteniendo en la medida de lo posible las propiedades de este tipo de reglas.

Un caso particular del modelo previamente expuesto surge cuando se cambian “agentes" por “estados de la naturaleza" y “asignaciones" por “probabilidades". En este caso lo que se reparten son probabilidades entre estados de la naturaleza y el problema con referencias múltiples consiste en un problema de agregación de probabilidades (Rubinstein and Fishburn, 1986). Las referencias pueden considerarse como las predicciones de varios expertos y el problema consiste en obtener un único vector de probabilidades teniendo en cuenta todas las predicciones. Por ejemplo, varios expertos en bolsa tienen sus propias predicciones o probabilidades sobre los distintos estados de la bolsa en el futuro y la regla agrega estas predicciones en una sola. Un bien conocido sistema de agregación consiste en hacer una media ponderada de las distribuciones de probabilidad, lo que se conoce en la literatura como linear opinion pools (McConway, 1981).

El problema de la agregación de probabilidades se puede estudiar también en relación con el problema de actualización de probabilidades (updating), ver por ejemplo Gilboa and Schmeidler (1993). Actualizar probabilidades significa que inicialmente hay una distribución de probabilidad sobre un conjunto de estados de la naturaleza, pero la situación cambia cuando aparece información de que un suceso (un subconjunto propio del conjunto de estados de la naturaleza) ocurre. Las componentes del vector inicial correspondientes a este suceso tienen que actualizarse para convertirse en un vector de probabilidades. En esta situación lo que propone la regla de Bayes (Majundar, 2004) es utilizar las probabilidades proporcionales a las referencias que constituyen las componentes del vector inicial correspondientes al suceso que ha ocurrido.

La regla que se propone en este trabajo permite agregar probabilidades en los casos en que una actualización de las mismas sea necesaria. Téngase en cuenta, como se pone de manifiesto en la Sección 3, que utilizar la regla de Bayes para actualizar las referencias múltiples (probabilidades) y luego agregarlas mediante una media ponderada no proporciona el mismo resultado que si primero se agregan las referencias y luego se actualiza el vector agregado mediante la regla de Bayes.

El trabajo se estructura como sigue. En la Sección 2 se explica el modelo, se define la regla que proponemos y se comentan sus principales propiedades. El caso particular de agregación y actualización de probabilidades se analiza en la Sección 3. Las conclusiones y las líneas futuras de investigación se exponen en la Sección 4.

2. REGLA PROPORCIONAL AGREGADA CON ELIMINACIÓN DE AGENTES

Consideremos una situación en la que una cantidad, $E \in \mathbb{R}_{++}$,[1] de un bien homogéneo e infinitamente divisible (el estado), tiene que dividirse entre n agentes (denotamos por $N = \{1,2,\ldots,n\}$ al conjunto finito de agentes). Una asignación del estado E es un vector $x \in \mathbb{R}_{+}^{n}$, que satisface la propiedad de eficiencia $\sum_{i \in N} x_i = E$, esto es, se reparte la totalidad del estado. Sea $X(E) \subseteq \mathbb{R}_{+}^{n}$ el conjunto de asignaciones.

En el reparto se tienen en cuenta m vectores de referencias distintos (denotamos por $M = \{1,2,\ldots,m\}$ al conjunto de referencias para el reparto). Sea $C \in \mathbb{R}_{+}^{n\times m}$ la matriz de referencias. Por c_i^j se denota al elemento de la matriz C correspondiente al i-ésimo agente y a la j-ésima referencia. Para cada $i \in N$, $c_i \in \mathbb{R}_{+}^{n}$, representa las distintas referencias del agente i-ésimo. Para cada $j \in M$, $c^j \in \mathbb{R}_{+}^{m}$ representa la referencia j-ésima para cada uno de los agentes.

Además, puede que no todos los agentes participen finalmente en el reparto. Sea $P \subseteq 2^N$ el conjunto de las posibles coaliciones no vacías que pueden participar

[1]Se denota por $\mathbb{R}_{++}$ al conjunto de todos los números reales positivos, por $\mathbb{R}_{+}$ al conjunto de todos los números reales no negativos y por $\mathbb{R}_{+}^{n}$ y $\mathbb{R}_{+}^{n\times m}$, respectivamente, al conjunto de vectores n-dimensionales y matrices de dimensión $n \times m$ compuestos por elementos de $\mathbb{R}_{+}$.

finalmente en el reparto. Supondremos que P es no vacío.

Un problema de división con múltipes referencias y estructura de coaliciones P es una terna (C,E,P). La clase de todos los problemas de división con múltiples referencias que se asocian con el conjunto de agentes N, el conjunto de referencias M y la estructura de coaliciones P se denota por $\mathsf{C}(N,M,P)$ (en adelante simplemente C).

Una regla de reparto sobre C es una función, f, que asocia con cada $(C,E,P)\in\mathsf{C}$, una asignación $x^S\in X(E)$ para cada $S\in P$ de forma que $x_r^S=0$ si $r\notin S$.

A continuación se define una regla para resolver los problemas de división con múltipes referencias donde se permite que el número de agentes pueda reducirse.

Definición 2.1 (Regla proporcional agregada con eliminación de agentes.) Para cada problema $(C,E,P)\in\mathsf{C}$ y para cada $S\in P$,

$$f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E,P)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{c_r^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}E+\beta_r^S\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{\sum_{k\in N\setminus S}c_k^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}E & si\ r\in S\\ 0 & si\ r\notin S\end{cases}$$

donde $\alpha\in\Delta_+^M=\{\alpha\in\mathsf{R}_+^m:\sum_{j\in M}\alpha^j=1\}$ y $\beta\in\mathsf{R}_+^{n\times|P|}$ es una matriz tal que la columna β^S correspondiente a la coalición $S\in P$ cumple:

1. $\beta_r^S\geq 0\ \ \forall r\in S$, siendo $\beta_r^N=0\ \ \forall r\in N.$
2. $\beta_r^S=0\ \ \forall r\notin S.$
3. Si $S\subset N$, $\sum_{r\in S}\beta_r^S=1.$

El vector $\alpha\in\mathsf{R}_+^m$ representa los pesos que se utilizan para agregar las asignaciones proporcionales correspondientes a cada vector de referencias. La matriz $\beta\in\mathsf{R}_+^{n\times|P|}$ representa la proporción del recurso inicialmente asignado a los agentes de $N\setminus S$ que le corresponde a cada uno de los agentes de S, esto es, la forma de repartir la cantidad asignada a los agentes que finalmente no participan en el reparto entre los agentes que si participan.

Ejemplo 2.2 *Aplicar la regla proporcional agregada con eliminación de agentes para repartir un estado de* $E = 5$. *Las referencias vienen dadas por la siguiente matriz:*

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$$

y la estructura de coaliciones es $P = 2^N \setminus \emptyset$.

Supongamos que los pesos que se utilizan para agregar las asignaciones proporcionalmente son $\alpha^1 = 0.5$ y $\alpha^2 = 0.5$.

La matriz β es la forma de repartir la cantidad que le pertenece a los agentes que finalmente no participan en el reparto entre los agentes que si participan. Así pués, las tres primeras columnas indican que si únicamente se queda un agente se le asignará todo el estado. Las tres siguientes columnas nos indican el caso en que finalmente sólo participen en el reparto dos agentes, en cuyo caso, si se va el tercer agente se reparte el 25% al primer agente y el 75% al segundo agente, si se va el segundo agente o si se va el primer agente se reparte la misma proporción a los agentes que permanecen. Y por último, si todos los agentes participan en el reparto la columna estará compuesta por ceros.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & N \end{array} \\ \beta = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Para los pesos y las proporciones anteriores, si se aplica la regla proporcional agregada con eliminación del tercer agente se obtiene la siguiente solución:

$$f_1^{\{1,2\};\alpha,\beta}(C,E,P) = 0.5 \cdot \frac{4}{20} \cdot 5 + 0.5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{20} \cdot 5 + 0.5 \cdot \frac{5}{10} \cdot 5 + 0.5 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{10} \cdot 5 = 2.1875$$

$$f_2^{\{1,2\};\alpha,\beta}(C,E,P)=0.5\cdot\frac{8}{20}\cdot 5+0.5\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{20}\cdot 5+0.5\cdot\frac{2}{10}\cdot 5+0.5\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{10}\cdot 5=2.8125$$

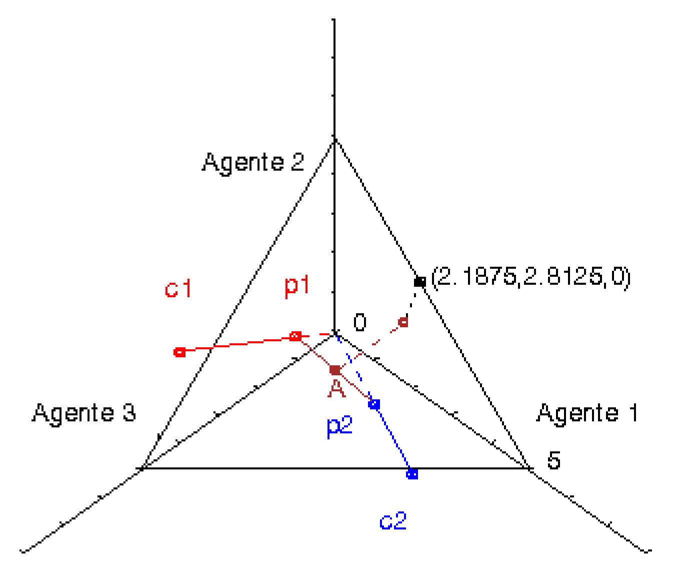

Figura 1. Regla proporcional agregada con eliminación de agentes.

En la Figura 1 se representa la asignación que proporciona la regla, así como el procedimiento seguido para su obtención: las asignaciones proporcionales respecto a las referencias $c^1=(4,8,8)^t$ y $c^2=(5,2,3)^t$ son respectivamente $p^1=(1,2,2)^t$ y $p^2=(2.5,1,1.5)^t$; la agregación de estas asignaciones con pesos $\alpha^1=0.5$ y $\alpha^2=0.5$ da como resultado $A=(1.75,1.5,1.75)$; finalmente, la cantidad asignada al tercer agente se reparte entre el primero y el segundo con arreglo al vector $\beta^{\{1,2\}}=(1/4,3/4,0)$ obteniéndose como solución $f_1^{\alpha,\beta}(C,E;\{1,2\})=2.1875$ y $f_2^{\alpha,\beta}(C,E;\{1,2\})=2.8125$.

A continuación se estudiarán algunas propiedades de los problemas de división con múltiples referencias. Comenzaremos por la propiedad de *no manipulabilidad*. Una regla de reparto de dice que es no manipulable si ningún grupo contenido en el conjunto de agentes que finalmente participan en el reparto, puede mejorar su resultado global mediante transferencias de las referencias entre los agentes del grupo.

Definición 2.3 (No manipulabilidad.) *Para cada* $(C,E,P)\in \mathrm{C}$, *cada* $S\in P$ *y* $S^{*}\subseteq S$, *y cada* $C'\in \mathrm{R}^{n\times m}$ *tal que,* $\sum_{r\in S^{*}} c'_r=\sum_{r\in S^{*}} c_r$ *y* $c'_r=c_r \;\; \forall r\in N\setminus S^{*}$, *se verifica:*

$$\sum_{r\in S^{*}} f_r^{S;\alpha,\beta}(C',E,P)=\sum_{r\in S^{*}} f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E,P).$$

Proposición 2.4 *La regla proporcional agregada con eliminación de agentes verifica la propiedad de no manipulabilidad.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{r\in S^{*}} f_r^{S;\alpha,\beta}(C',E,P) &= \sum_{r\in S^{*}}\sum_{j\in M}\alpha^{j}\frac{E}{\sum_{i\in N} c_i^{j}}\left(c_r^{j}+\beta_r^{S}\sum_{k\in N\setminus S} c_k^{j}\right)=\\
&=\sum_{j\in M}\alpha^{j}\frac{E}{\sum_{i\in N} c_i^{j}}\sum_{r\in S^{*}}\left(c_r^{j}+\beta_r^{S}\sum_{k\in N\setminus S} c_k^{j}\right)=\\
&=\sum_{j\in M}\alpha^{j}\frac{E}{\sum_{i\in N} c_i^{j}}\left(\sum_{r\in S^{*}} c_r^{j}+\sum_{r\in S^{*}}\beta_r^{S}\sum_{k\in N\setminus S} c_k^{j}\right)=\\
&=\sum_{j\in M}\alpha^{j}\frac{E}{\sum_{i\in N} c_i^{j}}\left(\sum_{r\in S^{*}} c_r^{'j}+\sum_{r\in S^{*}}\beta_r^{S}\sum_{k\in N\setminus S} c_k^{j}\right)=\\
&=\sum_{r\in S^{*}} f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E,P).
\end{aligned}$$

■

La propiedad de *aditividad sobre el estado* significa que cuando aumenta la cantidad a repartir se obtiene el mismo resultado si se reparte dicho aumento añadiéndolo a la asignación anterior, que si se hace un nuevo reparto de la cantidad total aumentada. Esta propiedad se llama *composition up* en Thomson 2003.

Definición 2.5 (Aditividad sobre el estado.) *Para cada* $(C,E,P)\in \mathrm{C}$, *cada* $S\in P$ *y cada* $E'\in \mathrm{R}_{++}$, $f^{S;\alpha,\beta}(C,E+E',P)=f^{S;\alpha,\beta}(C,E,P)+f^{S;\alpha,\beta}(C,E',P)$.

Proposición 2.6 *La regla proporcional agregada con eliminación de agentes verifica la propiedad de aditividad sobre el estado.*

Demostración.

$$f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E+E',P)=\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{c_r^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}(E+E')+\beta_r^S\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{\sum_{k\in N\setminus S}c_k^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}(E+E')$$

$$=\left(\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{c_r^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}E+\beta_r^S\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{\sum_{k\in N\setminus S}c_k^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}E\right)+$$

$$+\left(\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{c_r^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}E'+\beta_r^S\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{\sum_{k\in N\setminus S}c_k^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}E'\right)$$

$$=f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E,P)+f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E',P),\forall r\in S.\qquad\blacksquare$$

La propiedad de *monotonía en el estado* afirma que cuando aumenta la cantidad a repartir no disminuye la asignación de ningún agente.

Definición 2.7 (Monotonía en el estado.) *Para cada* $(C,E,P)\in\mathcal{C}$*, cada* $S\in P$ *y cada* $E>E'$*, entonces,* $f^{S;\alpha,\beta}(C,E',P)\geq f^{S;\alpha,\beta}(C,E,P)$.

Proposición 2.8 *La regla proporcional agregada con eliminación de agentes verifica la propiedad de monotonía en el estado.*

Demostración.

Como $E'>E$ y $\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{c_r^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}+\beta_r^S\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{\sum_{k\in N\setminus S}c_k^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}\geq 0$

$$E'\left(\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{c_r^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}+\beta_r^S\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{\sum_{k\in N\setminus S}c_k^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}\right)\geq$$

$$\geq E\left(\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{c_r^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}+\beta_r^S\sum_{j\in M}\alpha^j\frac{\sum_{k\in N\setminus S}c_k^j}{\sum_{i\in N}c_i^j}\right)$$

Por tanto,

$$f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E',P) \geq f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E,P), \forall r \in S. \qquad \blacksquare$$

La propiedad de *homogeneidad* afirma que el resultado es independiente de las unidades en las cuales los datos del problema han sido medidos.

Definición 2.9 (Homogeneidad.) *Para cada* $(C,E,P) \in \mathcal{C}$ *y cada* $S \in P$, *si* $\lambda > 0$, $f^{S;\alpha,\beta}(\lambda C, \lambda E, P) = \lambda f^{S;\alpha,\beta}(C,E,P)$.

Proposición 2.10 *La regla proporcional agregada con eliminación de agentes verifica la propiedad de homogeneidad.*

Demostración.

$$\begin{aligned} f_r^{S;\alpha,\beta}(\lambda C, \lambda E, P) &= \sum_{j \in M} \alpha^j \frac{\lambda E}{\sum_{i \in N} \lambda c_i^j} \left(\lambda c_r^j + \beta_r^S \sum_{k \in N \setminus S} \lambda c_k^j \right) = \\ &= \lambda E \sum_{j \in M} \frac{\alpha^j}{\lambda \sum_{i \in N} c_i^j} \lambda \left(c_r^j + \beta_r^S \sum_{k \in N \setminus S} c_k^j \right) = \\ &= \lambda E \sum_{j \in M} \frac{\alpha^j}{\sum_{i \in N} c_i^j} \left(c_r^j + \beta_r^S \sum_{k \in N \setminus S} c_k^j \right) = \\ &= \lambda f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E,P), \forall r \in S. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

La regla proporcional agregada con eliminación de agentes verifica, además de las anteriores, la propiedad de **anonimato** que significa que el nombre de los agentes es irrelevante.

Si las asignaciones de los agentes que finalmente no participan en el reparto se distribuyen a partes iguales entre el resto de los agentes, es decir, $\beta^S = \frac{1}{s}$, $\forall S \subset N$ se cumplen otras propiedades como **conservación de orden**, que significa que si el vector de referencias de un agente es mayor o igual que el de otro, entonces dicho agente no obtendrá una asignación menor que la del otro; **uniforme tratamiento de uniformes**, que significa que si todos los agentes tienen el mismo vector de referencias entonces todos reciben la misma cantidad; e **igual tratamiento de iguales**, que es una propiedad que implica uniforme tratamiento de uniformes, y que significa que cualquier par de agentes con el mismo vector de referencias recibe la misma asignación.

3. AGREGACIÓN Y ACTUALIZACIÓN DE PROBABILIDADES

A partir de ahora nos centraremos en el caso citado en la introducción que surge cuando los agentes son estados de la naturaleza y las referencias y asignaciones son probabilidades.

En primer lugar se verá el caso de actualización de probabilidades, que significa que inicialmente hay una distribución de probabilidad sobre un conjunto de estados de la naturaleza, pero la situación cambia cuando aparece la información de que un suceso (un subconjunto propio del conjunto de estados de la naturaleza) ocurre. Las componentes del vector inicial correspondientes a este estado de la naturaleza tienen que actualizarse para convertirse en un vector de probabilidades. Esta situación puede resolverse mediante el cálculo de probabilidades condicionadas usando la regla de Bayes. Veamos un ejemplo de actualización de probabilidades.

Ejemplo 3.1 *Un experto en bolsa predice una subida en el mercado con probabilidad* 0.5*; un mantenimiento de la cotización con probabilidad* 0.2 *y una bajada con probabilidad* 0.3*. Una inesperada noticia en el ámbito político hace que la posibilidad de que el mercado baje quede anulada, por consiguiente, se deben actualizar las probabilidades y esto se hace calculando probabilidades condicionadas mediante la regla de Bayes.*

En este problema las probabilidades de los estados de la naturaleza U (subida en el mercado), I (mantenimiento de la cotización) y B (bajada en el mercado) juegan el papel de referencias.

$$C = \begin{pmatrix} P[U] \\ P[I] \\ P[B] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

Aplicando la regla de Bayes se obtiene:

$$P[U|_{\overline{B}}] = \frac{P[U]\cdot P[\overline{B}|_U]}{P[U]\cdot P[\overline{B}|_U] + P[I]\cdot P[\overline{B}|_I]} = \frac{p_1 \cdot 1}{p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 1} = p_1 + \frac{p_1}{p_1 + p_2} p_3 = \frac{5}{7}$$

$$P[I|_{\overline{B}}] = \frac{P[I]\cdot P[\overline{B}|_I]}{P[U]\cdot P[\overline{B}|_U] + P[I]\cdot P[\overline{B}|_I]} = \frac{p_2 \cdot 1}{p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 1} = p_2 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} p_3 = \frac{2}{7}$$

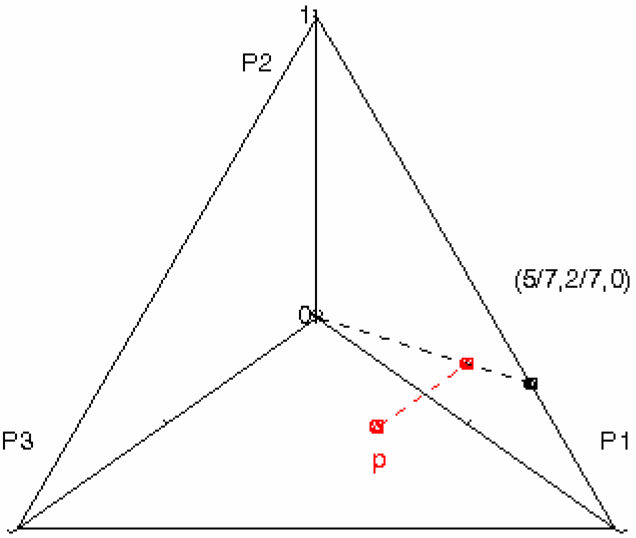

Figura 2. Actualización de probabilidades.

Obsérvese que el resultado obtenido coincide con la asignación de la regla proporcional agregada con eliminación de agentes (estados de la naturaleza) donde $N = \{1,2,3\}$, $S = \{1,2\}$ y β viene dado por la siguiente matriz:

$$\begin{array}{c} \\ \beta = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & N \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{p_1}{p_1+p_2} & \dfrac{p_1}{p_1+p_3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dfrac{p_2}{p_1+p_2} & 0 & \dfrac{p_2}{p_2+p_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dfrac{p_3}{p_1+p_3} & \dfrac{p_3}{p_2+p_3} & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Cuando hay varias distribuciones de probabilidad que proporcionan distintos expertos sobre un conjunto de estados de la naturaleza y nos interesa obtener como resultado una única distribución de probabilidad, tenemos un problema de agregación de probabilidades. Un método para combinar la opinión de todos los expertos es realizar una media ponderada de las distribuciones de probabilidad. Veamos un ejemplo de agregación de probabilidades.

Ejemplo 3.2 *Supongamos que la predicción sobre los movimientos en el mercado bursátil (subida, matenimiento y bajada) vienen dados por dos expertos diferentes. La matriz de referencias es la siguiente:*

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Además, la opinión de los expertos tiene la misma importancia, es decir, $\alpha^1 = 0.5$ y $\alpha^2 = 0.5$. Agregando las probabilidades mediante una media ponderada la solución es la siguiente:

$$P[U] = 0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.35$$

$$P[I] = 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.2 = 0.30$$

$$P[B] = 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.35$$

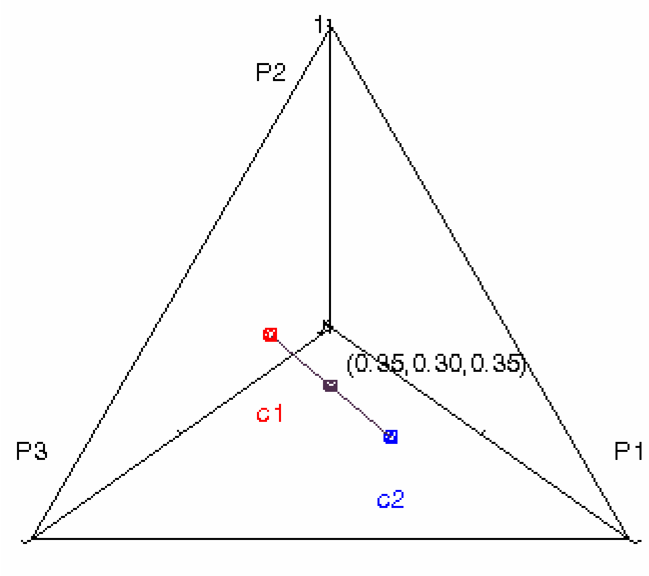

Figura 3. Agregación de probabilidades.

Obsérvese que el resultado obtenido coincide con el obtenido mediante la regla proporcional agregada con eliminación de agentes (estados de la naturaleza) en la que no hay certeza de que ningún suceso (subconjunto propio de los estados de naturaleza) haya ocurrido y donde $\alpha = (0.5, 0.5)^t$. Obsérvese asimismo, que en estos casos la regla proporciona el mismo resultado cualquiera que sea el vector β.

A continuación se estudiará el problema de agregación de probabilidades en relación con el problema de actualización de probabilidades.

Hay que resaltar que no es lo mismo agregar primero todas las probabilidades y luego actualizar la distribución agregada teniendo en cuenta que un determinado suceso ha ocurrido, que actualizar primero todas las probabilidades y luego agregar las probabilidades actualizadas.

Ejemplo 3.3 *Supóngase ahora que con las predicciones anteriores proporcionadas por los dos expertos se tiene además que es imposible que el mercado baje.*

$$C = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

¿Cuál será la predicción final si en primer lugar se actualiza cada predicción y luego agregamos?

$$p_1 = 0.5 \cdot \frac{0.2}{0.6} + 0.5 \cdot \frac{0.5}{0.7} = 0.524$$

$$p_2 = 0.5 \cdot \frac{0.4}{0.6} + 0.5 \cdot \frac{0.2}{0.7} = 0.476$$

En la Figura 4 se representa el resultado obtenido.

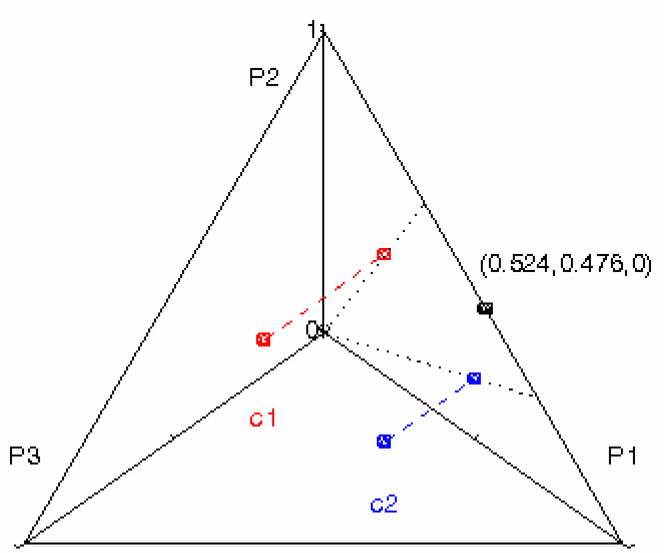

Figura 4. Actualización + Agregación.

¿Cuál será la predicción final si primero agregamos y luego actualizamos la distribución obtenida?

$$p_1 = \frac{0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.5}{0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.2} = 0.538$$

$$p_2 = \frac{0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.2}{0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.2} = 0.462$$

En la Figura 5 se representa el resultado obtenido.

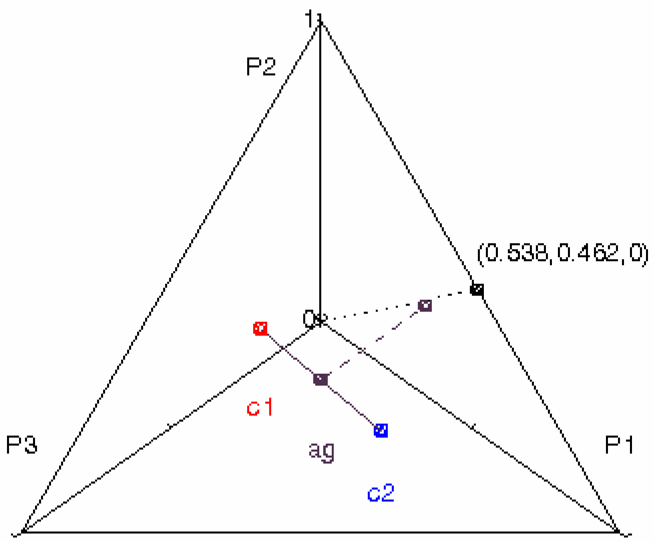

Figura 5. Agregación + Actualización.

Obsérvese que en el segundo caso (agregación + actualización), el resultado obtenido coincide con el de la regla proporcional agregada con eliminación de agentes (estados de la naturaleza) cuando los agentes que finalmente participan en el reparto son el primero y el segundo y $\alpha = (0.5, 0.5)^t$. Además, para cada $S \subset N = \{1,2,3\}$ y cada $r \in S$,

$$\beta_r = \frac{\alpha^1 p_r^1 + \alpha^2 p_r^2}{\sum_{r \in S}(\alpha^1 p_r^1 + \alpha^2 p_r^2)}$$

y $\beta_r^S = 0$ si $r \notin S$. Para este ejemplo los valores son:

$$\begin{array}{cccccccc} & \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & N \\ \beta = & \multicolumn{7}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{35}{65} & \frac{35}{70} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{30}{65} & 0 & \frac{30}{65} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{35}{70} & \frac{35}{65} & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Sin embargo, en el primer caso (actualización + agregación) no se está aplicando la regla proporcional agregada con eliminación de agentes (estados de la naturaleza) a las dos predicciones de los expertos conjuntamente sino a cada una de ellas por separado, utilizando, en cada predicción $j=1,2$, la matriz $\beta_r^S = \frac{p_r^j}{\sum_{i\in S} p_i^j}$, es decir, la matriz β para la primera predicción es la siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & N \end{array} \\ \beta = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{6} & 0 & \frac{4}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{4}{8} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

y la matriz β para la segunda predicción es la siguiente:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \{1\} & \{2\} & \{3\} & \{1,2\} & \{1,3\} & \{2,3\} & N \end{array} \\ \beta = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{5}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{8} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

En el siguiente resultado se prueba que cuando cuando realizamos en primer lugar la agregación de las predicciones y en segundo lugar actualizamos las probabilidades se obtiene el mismo resultado que con la regla proporcional agregada con eliminación de agentes (estados de la naturaleza) para una determinada matriz β.

Proposición 3.4 *La regla proporcional agregada con eliminación de agentes con*

$$\beta_r^S = \begin{cases} \dfrac{\sum_{j\in M} \alpha^j p_r^j}{\sum_{j\in M}\sum_{i\in S} \alpha^j p_i^j} & si\ r \in S \\ 0 & si\ r \notin S \end{cases}$$

proporciona el mismo resultado que agregando en primer lugar y luego actualizando la distribución resultante.

Demostración. Denotemos por $p_1^j, p_2^j, ..., p_N^j$ a las probabilidades iniciales de los estados de la naturaleza, además, consideremos que posteriormente se tiene información de que el subconjunto de estados de la naturaleza $S \subseteq N$ ha ocurrido. Si realizamos en primer lugar agregación de probabilidades y posteriormente actualizamos la distribución resultante se obtiene la siguiente solución:

$$p_r = \frac{\sum_{j \in M} \alpha^j p_r^j}{\sum_{j \in M} \sum_{i \in S} \alpha^j p_i^j}.$$

La regla proporcional agregada con eliminación de agentes es la siguiente:

$$f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E,P) = \sum_{j \in M} \alpha^j \frac{c_r^j}{\sum_{i \in N} c_i^j} E + \beta_r^S \sum_{j \in M} \alpha^j \frac{\sum_{k \in N \setminus S} c_k^j}{\sum_{i \in N} c_i^j} E.$$

Como $\sum_{i \in S} p_i^j = 1, \forall j \in M$ y $E = 1,$ sustituyendo el valor β_r^S,

$$f_r^{S;\alpha,\beta}(C,E,P) = \sum_{j \in M} \alpha^j p_r^j + \frac{\sum_{j \in M} \alpha^j p_r^j}{\sum_{j \in M} \sum_{i \in S} \alpha^j p_i^j} \sum_{j \in M} \sum_{k \in N \setminus S} \alpha^j p_k^j =$$

$$= \frac{\sum_{j \in M} \alpha^j p_r^j \left[\sum_{j \in M} \sum_{i \in S} \alpha^j p_i^j + \sum_{j \in M} \sum_{k \in N \setminus S} \alpha^j p_k^j \right]}{\sum_{j \in M} \sum_{i \in S} \alpha^j p_i^j} =$$

$$= \frac{\sum_{j \in M} \alpha^j p_r^j}{\sum_{j \in M} \sum_{i \in S} \alpha^j p_i^j}.$$

Un caso particular de la proposición anterior es la actualización de probabilidades mediante el cálculo de probabilidades usando la regla de Bayes.

Corolario 3.5 *Cuando* $|M|=1$, *la regla proporcional agregada con eliminación de agentes coincide con la regla de Bayes, si y sólo si, la matriz* β está formada por los siguientes vectores de pesos:

$$\beta_r^S = \begin{cases} \dfrac{p_r}{\sum_{i \in S} p_i} & si\ r \in S \\ 0 & si\ r \notin S \end{cases}$$

4. CONCLUSIONES

Los problemas de división con mútiples referencias se están estudiando cada vez más porque se ajustan de una forma adecuada a problemas reales. Estos problemas se pueden analizar de dos formas diferentes. Una forma es proceder en dos pasos: En el primero se agregan las referencias de los agente en cada concepto ("issue") y se reparte la cantidad total entre dichas referencias agregadas. En un segundo paso, cada una de estas asignaciones se reparten entre los agentes. Este análisis es el que se sigue en Lorenzo-Freire et al. (2009), Moreno-Ternero (2009) y Bergantiños et al.(2008, 2010). La otra forma de analizar estos problemas es la que se ha seguido en este trabajo, utilizando directamente la matriz de referencias para obtener una asignación directa a cada agente. Así se aborda el problema también en los trabajos de Calleja et al.(2005), González-Alcon et al. (2007) y Ju et al. (2007).

La principal virtud del modelo que se presenta en este trabajo es que acomoda diversas situaciones reales como la bancarrota, el reparto de incentivos, el reparto de excedentes o situaciones de reparto bajo incertidumbre. Además, las referencias múltiples pueden interpretarse en muchas de esas situaciones como las distintas evaluaciones de las necesidades o derechos de los agentes que llevan a cabo diferentes expertos o árbitros.

El trabajo desarrollado da pie a posibles líneas futuras de investigación. En nuestro punto de mira está estudiar, entre otras, la asignación proporcional al maximal de los vectores de probabilidad, cuando se considera un punto de vista optimista y la asignación proporcional al minimal, bajo un punto de vista pesimista. Otro objetivo mas ambicioso es plantear el modelo en el caso de que el objeto a repartir no sea infinitamente divisible sino que se trate de una cantidad de un bien en el que las unidades son indivisibles.

Se han estudiado dos situaciones realmente especiales que tienen cabida en el modelo propuesto, el problema de la agregación de probabilidades y el problema de la actualización de probabilidades. El análisis de estos problemas bajo la nueva perspectiva que proporciona el modelo que presentamos abre una nueva línea de investigación en el ámbito de la estadística. Las principales líneas futuras de esta investigación en relación al problema de la agregación de probabilidades son a) investigar otros métodos de agregación siguiendo las mismas ideas de las reglas para problemas de reparto con múltiples referencias, b) estudiar sus propiedades estadísticas en relación a las reglas de agregación habituales.

Se persigue también proponer otras reglas que permitan agregar probabilidades en los casos en que sea necesaria una actualización, y analizar sus propiedades estadísticas en relación a la regla que aquí se propone.

5 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bergantiños G., Lorenzo L., Lorenzo-Freire S. (2010). A characterization of the proportoinal rule in multi-issue allocation situations. *Operations Research Letters,* **38** pp. 17-19.
- Bergantiños G., Lorenzo L., Lorenzo-Freire S. (2008). New characterizations of the constrained equal awards rule in multi-issue allocation situations. *Mimeo, University of Vigo*.
- Branzei R., Dimitrov D., Pickl S. and Tijs S. (2004). How to cope with division problems under interval uncertainty claims?. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **12** pp. 191-200.
- Calleja P., Borm P. and Hendrickx R. (2005). Multi-issue allocation situations.

European Journal of Operational Research **164** pp. 730-747.

- Gilboa I. and Schmeidler D. (1993) Updating ambiguous beliefs. *J. Econ. Theory* **59** pp. 33-49.
- González-Alcón C., Borm P. and Hendrickx R. (2007). A composite run to the bank rule for multi-issue allocation situations. *Mathematical Methods of Operations Research* **65** pp. 339-352.
- Ju B-G., Miyagawa E. and Sakai T. (2007). Non-manipulable division rules in claim problems and generalizations. *Journal of Economic Theory* **132** pp. 1-26.
- Lorenzo-Freire S., Casas-Méndez B. and Hendrickx R. (2009). The two-stage constrained equal awards and losses rules for multi-issue allocation situations. *Top.*
- Majumdar D. An axiomatic charaterization of Bayes´ rule. *Math. Soc. Sci.* **47** (2004) 261-273.
- McConway; K.J. (1981). Marginalization and Linear Opinion Pools. *J. Amer. Statis. Assoc.* **76** pp. 410-414.
- Moreno-Ternero J. (2009). The proportional rule for multi-issue banckrupty problems. *Economics Bulletin* **29** pp. 483-490.
- Pulido M., Sánchez-Soriano J. and Llorca N. (2002). Game theory techniques for university management: an extended bankruptcy model. *Annals of Operations Research* **109** pp. 129-142.
- Pulido M., Borm P., Hendrickx R., Llorca N. and Sánchez-Soriano J. (2008). Compromise solutions for bankruptcy situations with references. *Annals of Operations Research* **158** pp. 133-141.
- Rubinstein A. and Fishburn P.C. (1986). Algebraic aggregation theory. *J. Econ. Theory* **38** pp. 63-77.
- Thomson W. (2003) How to divide when there isn´t enough: from the Talmud to modern game theory. *University of Rochester*.