УДК 319.216

С. Лупенко, канд. техн. наук

Тернопільський державний технічний університет імені Івана Пулюя

ОПЕРАТОР ПЕРЕТВОРЕННЯ ШКАЛИ В ЗАДАЧАХ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗУ ЦИКЛІЧНИХ СИГНАЛІВ

У роботі дано означення ізоморфних відносно порядку та значень циклічних функціональних відношень, досліджено дію оператора перетворення шкали на циклічні детерміновані та випадкові функції, а також досліджено дві його форми – оператор динамічного масштабування та оператор динамічного зсуву. Записано аналітичні співвідношення між функціями ритму циклічних функціональних відношень, що пов'язані через закони динамічного зсуву та масштабування.

S. Lupenko

THE OPERATOR OF THE TRANSFORMATION OF THE SCALE IN THE TASKS OF MODELING AND ANALYSIS OF CYCLE SIGNALS

The definition of the isomorphous cycle functional relations in sense of order and the meanings is given in the papers. The action of the operator of scale transformation on the cycle determined and random functions is studied. Two its forms – the dynamical scaling operator and dynamical displacement operator are studied also. The analytical dependences between the functions of the rhythm of the cycle functional relations by the laws of the dynamical displacement and scaling are written in this work.

Вступ

При проектуванні інформаційних систем, в яких мають місце сигнали із циклічною структурою, важливими задачами є розробка нових математичних моделей, методів аналізу та комп'ютерної симуляції таких сигналів. В роботі [1] досліджено базові властивості циклічних функціональних відношень, що добре себе зарекомендували як математичні моделі циклічних сигналів, зокрема, кардіосигналів різної фізичної природи [2, 3]. В багатьох задачах моделювання та аналізу циклічних сигналів виникає потреба для заданої циклічної функції утворити (знайти) іншу циклічну функцію, яка є результатом дії певного оператора на задану функцію і відрізняється від неї лише своєю функцією ритму. Такі задачі можуть мати місце при спектральному аналізі, імітаційному моделюванні циклічних сигналів. Вирішення цих задач можливе лише за умови встановлення базових аналітичних закономірностей, що мають місце між функціями ритму заданої та утвореної циклічних функцій, а також параметрами оператора, що здійснює таке перетворення і який будемо називати оператором перетворення шкали. Подібні задачі можуть мати місце в теорії модуляції сигналів, як це є в роботах [4, 5].

У зв'язку із цим, у даній роботі дається означення, встановлюються властивості та досліджується дія оператора перетворення шкали та двох його різновидностей - операторів динамічного зсуву та масштабування на циклічне функціональне відношення.

Основна частина

Означення ізоморфних відносно порядку та значень функціональних відношень

Нехай маємо два функціональних відношення $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$, які приймають значення із деякого лінійного простору $\mathbf{\Psi}$, а області їх визначення $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$ є неперервними чи дискретними множинами дійсних чисел, як це є в роботі [1]. Області визначення $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$ в загальному не співпадають, тобто $\mathbf{W} \neq \mathbf{W}'$. Відзначимо, що в даній роботі суттєвим моментом є трактування функції (функціонального відношення) як упорядкованої множини пар

$\{(t, f(t)), t \in \mathbf{W}, f(t) \in \mathbf{\Psi}\}$, де упорядкованість цих пар індукується упорядкованістю множини $\mathbf{W}$. А тому, для так протрактованих функціональних відношень, є можливість говорити про їх ізоморфізм відносно упорядкування, здійснювати розбиття циклічного функціонального відношення на ізоморфні між собою цикли і т.д., тобто використовувати поняття, що характерні для теорії множин та відношень на них. Дамо таке означення.

Означення 1. Упорядковані за областями визначення функціональні відношення $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$ будемо називати ізоморфними відносно порядку та значень, якщо мають місце наступні факти.

1. Ізоморфізм стосовно відношення порядку між впорядкованими множинами $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$ (ізоморфізм між областями визначення функцій), тобто:

1.а) має місце бієкція між $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$ ($\mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{W}'$), тобто: будь-якому $t \in \mathbf{W}$, відповідає лише одне $t' \in \mathbf{W}'$ ($t \to t'$), а будь-якому $t' \in \mathbf{W}'$ співставляється лише одне $t \in \mathbf{W}$ ($t' \to t$), причому для будь-яких різних $t_1, t_2 \in \mathbf{W}$ їх образи $t_1', t_2' \in \mathbf{W}'$ є різними, і навпаки;

1.б) співпадає тип лінійного упорядкування множин $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$: тобто: $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{W}$, $\exists t_1', t_2' \in \mathbf{W}'$, що $t_1' \leftrightarrow t_1$, $t_2' \leftrightarrow t_2$ та має місце відношення порядку $t_2' > t_1'$, якщо $t_2 > t_1$, і навпаки.

2. Ізоморфізм відносно порядку функціональних відношень $f_1(t) \in \mathbf{\Psi}, t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t') \in \mathbf{\Psi}, t' \in \mathbf{W}'$, що зумовлено ізоморфізмом їх областей визначення, тобто:

2.а) внаслідок бієкції $\mathbf{W} \Leftrightarrow \mathbf{W}'$ областей визначення, має місце бієкція між функціональними відношеннями $f_1(t) \in \mathbf{\Psi}, t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t') \in \mathbf{\Psi}, t' \in \mathbf{W}'$, тобто для будь-яких $t \in \mathbf{W}$ та $t' \in \mathbf{W}'$, що перебувають у бієктивній пов'язаності ($t \leftrightarrow t'$), відповідні їм пари $(t, f_1(t))$ та $(t', f_2(t'))$ функціональних відношень $f_1(t) \in \mathbf{\Psi}, t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t') \in \mathbf{\Psi}, t' \in \mathbf{W}'$, також перебувають у бієктивній пов'язаності $(t, f_1(t)) \leftrightarrow (t', f_2(t'))$.

2.б) внаслідок співпадання типів упорядкування областей визначення $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$, співпадають типи упорядкування пар функціональних відношень $f_1(t) \in \mathbf{\Psi}, t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t') \in \mathbf{\Psi}, t' \in \mathbf{W}'$, тобто: для будь-яких різних пар $(t_1, f_1(t_1))$ та $(t_2, f_1(t_2))$, що перебувають у бієктивній пов'язаності із парами $(t_1', f_2(t_1'))$ та $(t_2', f_2(t_2'))$ ($(t_1', f_2(t_1')) \leftrightarrow (t_1, f_1(t_1))$, $(t_2', f_2(t_2')) \leftrightarrow (t_2, f_1(t_2))$), мають місце відношення порядку $(t_2', f_2(t_2')) > (t_1', f_2(t_1'))$ та $(t_2, f_1(t_2)) > (t_1, f_1(t_1))$, якщо $t_2' > t_1'$ та $t_2 > t_1$ ($t_1' \leftrightarrow t_1, t_2' \leftrightarrow t_2$).

3. Рівність значень функціональних відношень $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$, коли їх відповіді аргументи t та t' перебувають у бієктивній пов'язаності ($t' \leftrightarrow t$), тобто $\forall t \in \mathbf{W}$ та для бієктивно пов'язаного із ним $t' \in \mathbf{W}'$, має місце рівність:

$$f_1(t) = f_2(t'),\ t' \leftrightarrow t,\ t \in \mathbf{W},\ t' \in \mathbf{W}'. \tag{1}$$

Якщо функція $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ є циклічною, а деяка функція $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$ є ізоморфною їй відносно порядку та значень, то вона також є циклічною. Для ізоморфних відносно порядку та значень циклічних функцій $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$, коли їх відповіді аргументи t та t' перебувають у бієктивній пов'язаності ($t' \leftrightarrow t$), мають місце співвідношення:

$$f_1(t) = f_2(t'),\ f_1(t + T_1(t,n)) = f_2(t' + T_2(t',n)),\ n \in \mathbf{Z},$$

$$t' \leftrightarrow t \text{ та } t' + T_2(t',n) \leftrightarrow t + T_1(t,n). \tag{2}$$

Циклічні функціональні відношення $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$, що є ізоморфними відносно порядку та значень, відрізняються лише своїми ритмічними структурами (функціями ритму).

Відзначимо, що означення 1 наведено для досить широкого класу функціональних відношень, зокрема, циклічних функціональних відношень, які можуть приймати свої значення із певного абстрактного лінійного простору $\mathbf{\Psi}$. Якщо $\mathbf{\Psi} = \mathbf{R}$, то дані результати автоматично поширюються на детерміновані числові циклічні функції та циклічні детерміновані функції, що структурно подібні до майже періодичних функцій [2]. Якщо $\mathbf{\Psi}$ є простором випадкових величин, що задані на одному і тому ж імовірнісному просторі, то отримаємо аналогічні результати для циклічних випадкових процесів [2].

Означимо поняття ізоморфізму відносно порядку та значень двох циклічних випадкових процесів $\{\xi_1(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'\in\mathbf{W}'\}$.

Означення 2. Циклічний випадковий процес $\{\xi_1(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}\}$ із функцією ритму $T_1(t,n)$ та циклічний випадковий процес $\{\xi_2(\omega,t'), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'\in\mathbf{W}'\}$ із функцією ритму $T_2(t',n)$ будемо називати ізоморфними відносно порядку та значень, якщо мають місце наступні факти.

1. Ізоморфізм стосовно відношення порядку між впорядкованими множинами $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$ (ізоморфізм між областями визначення циклічних випадкових процесів), тобто:

1.а) має місце бієкція між $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$ ($\mathbf{W}\Leftrightarrow\mathbf{W}'$), тобто: будь-якому $t\in\mathbf{W}$, відповідає лише одне $t'\in\mathbf{W}'$ ($t\to t'$), а будь-якому $t'\in\mathbf{W}'$ співставляється лише одне $t\in\mathbf{W}$ ($t'\to t$), причому для будь-яких різних $t_1, t_2\in\mathbf{W}$ їх образи $t_1', t_2'\in\mathbf{W}'$ є різними, і навпаки;

1.б) зберігається тип лінійного упорядкування множин $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$: тобто: $\forall t_1, t_2\in\mathbf{W}$, $\exists t_1', t_2'\in\mathbf{W}'$, що $t_1'\leftrightarrow t_1$, $t_2'\leftrightarrow t_2$ та має місце відношення порядку $t_2' > t_1'$, якщо $t_2 > t_1$, і навпаки.

2. Ізоморфізм відносно порядку циклічних випадкових процесів $\{\xi_1(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'\in\mathbf{W}'\}$, що зумовлено ізоморфнізмом їх областей визначення, тобто:

2.а) внаслідок бієкції $\mathbf{W}\Leftrightarrow\mathbf{W}'$ областей визначення, має місце бієкція між випадковими процесами $\{\xi_1(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'\in\mathbf{W}'\}$, тобто для будь-яких $t\in\mathbf{W}$ та $t'\in\mathbf{W}'$, що перебувають у біктивній пов'язаності ($t\leftrightarrow t'$), відповідні їм пари $(t,\xi_1(\omega,t))$ та $(t',\xi_2(\omega,t'))$ циклічних випадкових процесів $\{\xi_1(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'\in\mathbf{W}'\}$, також перебувають у бієктивній пов'язаності $(t,\xi_1(\omega,t))\leftrightarrow(t',\xi_2(\omega,t'))$.

2.б) внаслідок співпадання типів упорядкування областей визначення $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$, співпадають типи упорядкування пар циклічних випадкових процесів $\{\xi_1(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'\in\mathbf{W}'\}$, тобто: для будь-яких різних пар $(t_1,\xi_1(\omega,t_1))$ та $(t_2,\xi_1(\omega,t_2))$, що перебувають у бієктивній пов'язаності із парами $(t_1',\xi_2(\omega,t_1'))$ та $(t_2',\xi_2(\omega,t_2'))$ ($(t_1',\xi_2(\omega,t_1'))\leftrightarrow(t_1,\xi_1(\omega,t_1))$, $(t_2',\xi_2(\omega,t_2'))\leftrightarrow(t_2,\xi_1(\omega,t_2))$), має місце відношення порядку $(t_2',\xi_2(\omega,t_2'))>(t_1',\xi_2(\omega,t_1'))$ та $(t_2,\xi_1(\omega,t_2))>(t_1,\xi_1(\omega,t_1))$, якщо $t_2' > t_1'$ та $t_2 > t_1$ ($t_1'\leftrightarrow t_1, t_2'\leftrightarrow t_2$).

3. З імовірністю одиниця значення випадкових процесів $\xi_1(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}$ та $\{\xi_2(\omega,t'), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'\in\mathbf{W}'\}$, коли їх відповідні аргументи $t\in\mathbf{W}$ та $t'\in\mathbf{W}'$, а також $t+T_1(t,n)$ та $t'+T_2(t',n), n\in\mathbf{Z}$ перебувають у бієктивній пов'язаності ($t\leftrightarrow t'$, $t'+T_2(t',n)\leftrightarrow t+T_1(t,n), n\in\mathbf{Z}$), є рівними, а саме:

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega,t)=\xi_2(\omega,t')\}=1\ ,\ \mathbf{P}\{\xi_1(\omega,t+T_1(t,n))=\xi_2(\omega,t'+T_2(t',n))\}=1,$$
$$t'\leftrightarrow t,\ t'+T_2(t',n)\leftrightarrow t+T_1(t,n),\ t\in\mathbf{W}, t'\in\mathbf{W}', n\in\mathbf{Z}. \tag{3}$$

Якщо ізоморфні відносно порядку та значень випадкові процеси $\{\xi_1(\omega,t), \omega\in\mathbf{\Omega}, t\in\mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'), \omega\in\mathbf{\Omega}, t'\in\mathbf{W}'\}$ є циклічними випадковими процесами із циклічними реалізаціями, то для них можна записати більш сильнішу властивість:

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega,t)=\xi_2(\omega,t')=\xi_1(\omega,t+T_1(t,n))=\xi_2(\omega,t'+T_2(t',n))\}=1,$$
$$t'\leftrightarrow t,\ t'+T_2(t',n)\leftrightarrow t+T_1(t,n),\ t\in\mathbf{W}, t'\in\mathbf{W}', n\in\mathbf{Z}. \tag{4}$$

Для ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів $\{\xi_1(\omega,t), \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'), \omega \in \mathbf{\Omega}, t' \in \mathbf{W}'\}$ має місце рівність їх (k-вимірних) функцій розподілу $F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k)$ та $F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,t_1',...,t_k')$, коли відповідні набори аргументів $t_1,...,t_k$ та $t_1',...,t_k'$, а також $t_i + T_1(t_i,n)$ та $t_i' + T_2(t_i',n), i=\overline{1,k}, n \in \mathbf{Z}$ перебувають у бієктивній пов’язаності, тобто мають місце такі співвідношення:

$$\begin{gathered}
F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k) = F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1+T_1(t_1,n),...,t_k+T_1(t_k,n)) = \\
= F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,t_1',...,t_k') = F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,t_1'+T_2(t_1',n),...,t_k'+T_2(t_k',n)), \\
x_1,...,x_k \in \mathbf{R}, t_1,...,t_k \in \mathbf{W}, t_1',...,t_k' \in \mathbf{W}', \\
t_i' \leftrightarrow t_i, t_i' + T_2(t_i',n) \leftrightarrow t_i + T_1(t_i,n), i=\overline{1,k}, n \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}.
\end{gathered} \tag{5}$$

У багатьох задачах моделювання та аналізу сигналів, зокрема циклічних сигналів, виникає потреба для заданої функції $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ утворити (знайти) іншу ізоморфну їй відносно порядку та значень функцію $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$. Такі задачі можуть мати місце при спектральному аналізі, імітаційному моделюванні сигналів. У зв’язку із цим, запропонуємо спосіб утворення ізоморфних відносно порядку та значень функціональних відношень, на основі використання оператора перетворення шкали.

Оператор перетворення шкали

Нехай маємо деяке упорядковане за областю визначення функціональне відношення $f_1(t), t \in \mathbf{W}$. Утворимо із нього нове складне функціональне відношення (складну функцію) $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$ із проміжним аргументом $t' = y(t), t \in \mathbf{W}, t' \in \mathbf{W}'$, шляхом дії деякого оператора $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$:

$$\mathbf{G}_{y(t)}[\{f_1(t), t \in \mathbf{W}\}] = \{f_2(t'), t' \in \mathbf{W}'\}, \tag{6}$$

причому:

$$\begin{cases} t' = y(t), \\ f_2(t') = f_1(t), t' \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}. \end{cases} \tag{7}$$

Встановимо необхідні та достатні умови, яким повинен задовольняти оператор $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$, щоб результатом його дії на функціональне відношення $f_1(t), t \in \mathbf{W}$, було б ізоморфне йому відносно порядку та значень функціональне відношення $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$. Перш за все, відзначимо, що всі властивості оператора $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$ визначатимуться властивістю функції $y(t) \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}$. Розглянемо ці властивості більш детально. Для цього сформулюємо таку теорему.

Теорема 1. Упорядковані за своїми областями визначення функціональні відношення $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$, що пов’язані через оператор $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$, будуть ізоморфними відносно порядку та значень, якщо функція $y(t) \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}$ задовольняє строгу нерівність:

$$y(t_2) = t_2' > t_1' = y(t_1), \text{ якщо } t_2 > t_1,\ t_1, t_2 \in \mathbf{W}. \tag{8}$$

Доведення. Оскільки функція $y(t) \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}$ є зростаючою числовою функцією, то різним $t_1, t_2 \in \mathbf{W}$ відповідають різні $t_1', t_2' \in \mathbf{W}'$, а, також $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{W}$, $\exists t_1', t_2' \in \mathbf{W}'$, що $t_1' = y(t_1)$, $t_2' = y(t_2)$ для яких має місце відношення строгого порядку $t_2' > t_1'$, якщо $t_2 > t_1$. Тобто функція $y(t) \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}$ встановлює ізоморфізм відносно порядку між областями визначення $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$, що є першою із умов ізоморфізму відносно порядку та значень функціональних відношень $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$.

Із ізоморфізму областей $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$, випливає ізоморфізм функціональних відношень $f_1(t) \in \mathbf{\Psi}, t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t') \in \mathbf{\Psi}, t' \in \mathbf{W}'$, оскільки вони мають той же порядковий тип, що і їх області визначення. А це є другою умовою ізоморфізму відносно порядку та значень функціональних відношень $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$.

Крім того, із системи рівностей (7), маємо рівність значень функціональних відношень $f_1(t) \in \mathbf{\Psi}, t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t') \in \mathbf{\Psi}, t' \in \mathbf{W}'$, коли їх відповідні аргументи перебувають у бієктивній пов'язаності, тобто: $f_2(t') = f_1(t), t' \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}$, якщо $t' \leftrightarrow t\ (t' = y(t))$, що є третьою умовою ізоморфізму відносно порядку та значень функціональних відношень $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t'), t \in \mathbf{W}'$.

Отже, як бачимо, умова (8) зростання числової функції $t' = y(t) \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}$ є необхідною та достатньою умовою, щоб упорядковані за своїми областями визначення функціональні відношення $f_1(t) \in \mathbf{\Psi}, t \in \mathbf{W}$ та $f_2(t') = f_2(y(t)) = f_1(t) \in \mathbf{\Psi}, t' \in \mathbf{W}'$ були функціональними відношеннями, що ізоморфні відносно порядку та значень. Теорему 1 доведено.

Оператор $\mathbf{G}_{y(t)}[\cdot]$, функція $y(t) \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}$ якого задовольняє умову (8), будемо називати оператором перетворення шкали функції $f_1(t), t \in \mathbf{W}$, а саму функцію $y(t)$ - функцією перетворення шкали.

Оскільки $y(t) \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}$ є ізоморфізмом, а отже, вона є і бієкцією, тому для неї існує і обернена функція $y^{-1}(t') \in \mathbf{W}, t' \in \mathbf{W}'$, ($y^{-1}(y(t)) = t \in \mathbf{W}$ та $y(y^{-1}(t')) = t' \in \mathbf{W}'$), яка також є ізоморфізмом, а отже, для неї має місце аналогічна до нерівності (8) нерівність:

$$y^{-1}(t_2') = t_2 > t_1 = y^{-1}(t_1'),\ \forall t_1', t_2' \in \mathbf{W}', \text{ якщо } t_2' > t_1'. \tag{9}$$

Тому із співвідношень (6) та (7) випливають такі співвідношення:

$$\mathbf{G}_{y^{-1}(t')}[\{f_2(t'), t' \in \mathbf{W}'\}] = \{f_1(t), t \in \mathbf{W}\}, \tag{10}$$

$$\begin{cases} t = y^{-1}(t'), \\ f_1(y^{-1}(t')) = f_2(t'), t \in \mathbf{W}, t' \in \mathbf{W}'. \end{cases} \tag{11}$$

Якщо $\mathbf{W}' = \mathbf{W}$, то області визначення та області значень функцій $y(t) \in \mathbf{W}, t \in \mathbf{W}$ та $y^{-1}(t) \in \mathbf{W}, t \in \mathbf{W}$ співпадають, а самі функції є автоморфізмами відносно порядку. У випадку, якщо $\mathbf{W}' = \mathbf{W} = \mathbf{R}$, то одночасно мають місце такі залежності між функціями $f_1(t), t \in \mathbf{R}$ та $f_2(t), t \in \mathbf{R}$:

$$f_2(y(t)) = f_1(t), t \in \mathbf{R}, \tag{12}$$

$$f_2(t) = f_1(y^{-1}(t)), t \in \mathbf{R}, \tag{13}$$

а самі функції $y(t) \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}$ та $y^{-1}(t) \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}$ є неперервними зростаючими функціями, тобто їх похідні більші за нуль.

Виходячи із наведеного вище, можна стверджувати, що множина всіх можливих ізоморфних відносно порядку та значень функціональних відношень утворює клас еквівалентності, елементи якого є функціональні відношення, що можуть відрізнятися лише своїми шкалами. Якщо шкали ізоморфних відносно порядку та значень функціональних відношень однакові, то вони є тотожними функціональними відношеннями.

Оператори динамічного масштабування та динамічного зсуву

Розглянемо два важливих типи операторів перетворення шкали – оператори динамічного зсуву та динамічного масштабування за аргументом перетворюваної функції, що за своєю суттю є різними формами подання оператора перетворення шкали. Оператором динамічного масштабуванням $\mathbf{G}_{\alpha(t)t}\{\cdot\}$ за аргументом функції $f_1(t), t \in \mathbf{W}$ будемо називати такий оператор $\mathbf{G}_{y(t)}\{\cdot\}$ перетворення шкали, коли функція перетворення шкали матиме вид $y(t) = \alpha(t) \cdot t \in \mathbf{W}', t \in \mathbf{W}$, тобто:

$$\mathbf{G}_{y(t)}\left[\{f_1(t),\, t\in\mathbf{W}\}\right]=\mathbf{G}_{\alpha(t)\cdot t}\left[\{f_1(t),\, t\in\mathbf{W}\}\right]=\{f_2(t'),\, t'\in\mathbf{W}'\}, \tag{14}$$

причому:

$$\begin{cases} t'=\alpha(t)\cdot t, \\ f_2(t')=f_1(t),\, t'\in\mathbf{W}',\, t\in\mathbf{W}, \end{cases} \tag{15}$$

де $\alpha(t)$ - задає закон динамічного масштабування за аргументом функції $f_1(t), t\in\mathbf{W}$.

Функція $\alpha(t)$ повинна задовольняти умову:

$$\alpha(t_2)\cdot t_2>\alpha(t_1)\cdot t_1, \text{ якщо } t_2>t_1,\ t_1,t_2\in\mathbf{W}, \tag{16}$$

що є наслідком загальної умови (8).

Нерівність (16) можна подати і так:

$$\frac{\alpha(t_2)\cdot t_2-\alpha(t_1)\cdot t_1}{t_2-t_1}>0, \text{ якщо } t_2>t_1,\ t_2,t_1\in\mathbf{W}. \tag{17}$$

Якщо $\mathbf{W}=\mathbf{R}$, то $\alpha(t)$ - неперервна функція, а із (17) випливає така строга нерівність:

$$\lim_{t_2-t_1\to 0}\frac{\alpha(t_2)\cdot t_2-\alpha(t_2)\cdot t_2}{t_2-t_1}=\frac{d(\alpha(t)\cdot t)}{dt}=(\alpha(t)\cdot t)'=\alpha'(t)\cdot t+\alpha(t)>0,\ t\in\mathbf{R}. \tag{18}$$

Тобто, масштабуюча функція $\alpha(t)$ повинна бути такою, щоб похідна від добутку $\alpha(t)\cdot t$ була додатною. Частинним випадком оператора динамічного масштабування за аргументом, коли закон масштабування є постійним, тобто, $\alpha(t)=\alpha=const$, є оператор $\mathbf{G}_{\alpha\cdot t}\{\cdot\}$ статичного масштабуванням або, як його часто називають, оператор масштабування (оператор розтягу-стиску).

Оператором динамічного зсуву $\mathbf{G}_{s(t)+t}\{\cdot\}$ за аргументом функції $f_1(t), t\in\mathbf{W}$, будемо називати такий оператор $\mathbf{G}_{y(t)}\{\cdot\}$ перетворення шкали, коли функція перетворення шкали матиме вид $y(t)=s(t)+t\in\mathbf{W}', t\in\mathbf{W}$, тобто:

$$\mathbf{G}_{y(t)}\{f_1(t)\}=\mathbf{G}_{s(t)+t}\{f_1(t)\}=f_2(t'),\, t'\in\mathbf{W}',\, t\in\mathbf{W}. \tag{19}$$

причому:

$$\begin{cases} t'=s(t)+t, \\ f_2(t')=f_1(t),\, t'\in\mathbf{W}',\, t\in\mathbf{W}, \end{cases} \tag{20}$$

де $s(t)$ - задає закон динамічного зсуву за аргументом функції $f_1(t), t\in\mathbf{W}$. Функція $s(t)$ повинна задовольняти умову:

$$s(t_2)+t_2>s(t_1)+t_1, \text{ якщо } t_2>t_1,\ t_1,t_2\in\mathbf{W}, \tag{21}$$

що є наслідком умови (8).

Умову (21) можна записати і так:

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}>-1, \text{ якщо } t_2>t_1, t_2,t_1\in\mathbf{W}. \tag{22}$$

Якщо $\mathbf{W}=\mathbf{R}$, то $s(t)$ - неперервна функція, а із умови (22) випливає строга нерівність:

$$\lim_{t_2-t_1\to 0}\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{ds(t)}{dt}=s'(t)>-1,\ t\in\mathbf{R}. \tag{23}$$

Тобто функція динамічного зсуву $s(t)$ повинна бути такою, щоб її похідна була більшою за -1. Частинним випадком оператора динамічного зсуву за аргументом, коли $s(t)=s=const$, є оператор статичного зсуву $\mathbf{P}_{s+t}\{\cdot\}$ або, як його часто називають, оператор зсуву.

Використання цих операторів, із точки зору практики, є доцільним, оскільки для них легко знайти обернені оператори, що не завжди просто зробити для більш загального оператора $\mathbf{G}_{y(t)}\{\cdot\}$ перетворення шкали. Позначимо обернений оператор до оператора $\mathbf{G}_{\alpha(t)t}\{\cdot\}$ так: $\mathbf{G}_{y^{-1}(t')}\{\cdot\}=\mathbf{G}_{\hat{\alpha}(t')t'}\{\cdot\}$, а обернений оператор до оператора $\mathbf{G}_{s(t)+t}\{\cdot\}$ позначимо так: $\mathbf{G}_{y^{-1}(t')}\{\cdot\}=\mathbf{G}_{t'+\hat{s}(t')}\{\cdot\}$.

Пошук обернених операторів у цих випадках зводиться до пошуку аналітичної залежності між відповідними законами (динамічного зсуву чи масштабування) прямого та оберненого операторів. Встановимо такі залежності. Для цього у випадку прямого та оберненого операторів динамічного зсуву запишемо таку системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} t' = y(t) = t + s(t), \\ t = y^{-1}(t') = t' + \hat{s}(t'),\ t \in \mathbf{W},\ t' \in \mathbf{W}'. \end{cases} \tag{24}$$

Із неї випливають такі залежності між $s(t)$та $\hat{s}(t')$:

$$\hat{s}(t') = \hat{s}(t + s(t)) = -s(t),\ t \in \mathbf{W},\ t' \in \mathbf{W}', \tag{25}$$

$$s(t) = s(t' + \hat{s}(t')) = -\hat{s}(t'),\ t \in \mathbf{W},\ t' \in \mathbf{W}'. \tag{26}$$

У випадку прямого та оберненого операторів динамічного масштабування запишемо таку системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} t' = y(t) = \alpha(t)\cdot t, \\ t = y^{-1}(t') = \hat{\alpha}(t')\cdot t',\ t \in \mathbf{W},\ t' \in \mathbf{W}'. \end{cases} \tag{27}$$

Із неї випливають такі залежності між $\alpha(t)$та $\hat{\alpha}(t')$:

$$\hat{\alpha}(t') = \hat{\alpha}(\alpha(t)\cdot t) = \frac{1}{\alpha(t)},\ \alpha(t) \neq 0,\ t \in \mathbf{W},\ t' \in \mathbf{W}', \tag{28}$$

$$\alpha(t) = \alpha(\hat{\alpha}(t')\cdot t') = \frac{1}{\hat{\alpha}(t')},\ \hat{\alpha}(t') \neq 0,\ t \in \mathbf{W},\ t' \in \mathbf{W}'. \tag{29}$$

Розглянемо питання взаємозв'язку між законами динамічного зсуву та масштабування.

Взаємозв'язок між законами динамічного зсуву та динамічного масштабування

Встановимо взаємозв'язок між законом динамічного масштабування $\alpha(t)$ оператора $\mathbf{G}_{\alpha(t)t}\{\cdot\}$ та законом динамічного зсуву $s(t)$ оператора $\mathbf{G}_{s(t)+t}\{\cdot\}$, за умови, що результатом дії цих операторів на деяку вхідну функцію $f_1(t),\ t \in \mathbf{W}$, буде одна і та ж вихідна функція $f_2(t'),\ t' \in \mathbf{W}'$. Іншими словами, необхідно знайти взаємозв'язок між такими $\alpha(t)$ та $s(t)$, які б задовольняли систему таких двох рівнянь:

$$\begin{cases} t' = \alpha(t)t, \\ t' = s(t) + t,\ t \in \mathbf{W},\ t \in \mathbf{W}'. \end{cases} \tag{30}$$

Відзначимо, що у першому рівнянні системи (30) при $t=0$ для будь-якого значення $\alpha(0) \in \mathbf{R}$ його ліва частина завжди рівна нулеві, тобто $t'=0$, а для другого рівняння цієї системи для будь-яких $t \in \mathbf{W}$ та $t' \in \mathbf{W}'$ можна завжди підібрати необхідне значення $s(t)$, яке б перетворювало t в t'. Тобто, для точки $t=0$ зв'язок між $\alpha(t)$ та $s(t)$, у загальному випадку, однозначно встановити неможливо. Такий факт певним чином обмежує використання оператора динамічного масштабування, щодо перетворень функції $f_1(t),\ t \in \mathbf{W}$ у функцію $f_2(t'),\ t' \in \mathbf{W}'$. Проте ця особливість є лише при одному значенні аргументу $t=0$.

Із системи рівнянь (30) випливають такі залежності між $\alpha(t)$ та $s(t)$:

$$s(t) = \alpha(t)t - t,\ t \in \mathbf{W}, \tag{31}$$

$$\alpha(t) = \frac{s(t)+t}{t},\ t \neq 0,\ t \in \mathbf{W}. \tag{32}$$

Для "особливої" точки $t=0$ можна умовно прийняти, що $\alpha(0)=1$, тоді $s(0)=0$.

Встановлені співвідношення (31) та (32) дають змогу говорити про взаємозамінність (з точністю до врахування обмеження при $t=0$) операторів $\mathbf{G}_{\alpha(t)t}\{\cdot\}$ та $\mathbf{G}_{s(t)+t}\{\cdot\}$ при перетвореннях функціональних відношень.

Дія оператора перетворення шкали на циклічні функціональні відношення

Встановимо взаємозв'язок між структурними функціями $y_1(t,n)$ та $y_2(t',n)$ ізоморфних відносно порядку та значень циклічних функціональних відношень $f_1(t)\in\mathbf{\Psi}, t\in\mathbf{W}$ та $f_2(t')\in\mathbf{\Psi}, t'\in\mathbf{W}'$, які пов'язані через оператори $\mathbf{G}_{y(t)}\{\cdot\}$ та $\mathbf{G}_{y^{-1}(t)}\{\cdot\}$, за умови, що для проміжного аргумента $y(t)\in\mathbf{W}', t\in\mathbf{W}$ виконується нерівність (8), а для проміжного аргумента $y^{-1}(t')\in\mathbf{W}, t'\in\mathbf{W}'$ виконується нерівність (9).

Оскільки множини $\mathbf{W}$ та $\mathbf{W}'$ є ізоморфними відносно порядку, то для будь-якого $t\in\mathbf{W}_{ц_m}\subset\mathbf{W}$ ($\mathbf{W}_{ц_m}$ - область визначення m-го циклу) та для будь-якого $y_1(t,n)\in\mathbf{W}_{ц_{m+n}}\subset\mathbf{W}$ існують бієктивно пов'зані із ними $t'\in\mathbf{W}'_{ц_m}\subset\mathbf{W}'$ ($\mathbf{W}_{ц_{m+n}}$ - область визначення $m+n$-го циклу) та $y_2(t',n)\in\mathbf{W}'_{ц_{m+n}}\subset\mathbf{W}'$, що відповідно рівні:

$$t'=y(t),\ t'\in\mathbf{W}', t\in\mathbf{W}, \tag{33}$$

$$y_2(t',n)=y_2(y(t),n)=y(y_1(t,n)),\ t'\in\mathbf{W}', t\in\mathbf{W},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{34}$$

При цих значеннях аргументів функції $f_1(t), t\in\mathbf{W}$ та $f_2(t'), t'\in\mathbf{W}'$ мають рівні значення, тобто:

$$f_2(t')=f_2(y(t))=f_1(t),$$

$$f_2(y_2(t',n))=f_2(y(y_1(t,n)))=f_1(y_1(t,n)), t\in\mathbf{W}, t'\in\mathbf{W}, n\in\mathbf{Z}. \tag{35}$$

Із співвідношень (33) – (35) випливають такі співвідношення:

$$t=y^{-1}(t'),\ t'\in\mathbf{W}', t\in\mathbf{W}, \tag{36}$$

$$y_1(t,n)=y_1(y^{-1}(t'),n)=y^{-1}(y_2(t',n)),\ t'\in\mathbf{W}', t\in\mathbf{W},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{37}$$

$$f_1(t)=f_1(y^{-1}(t'))=f_2(t'),$$

$$f_1(y_1(t,n))=f_1(y^{-1}(y_2(t',n)))=f_2(y_2(t',n)), t\in\mathbf{W}, t'\in\mathbf{W}, n\in\mathbf{Z}. \tag{38}$$

Отже, виходячи із співвідношень (34) та (37), між структурними функціями $y_2(t',n)$ та $y_1(t,n)$ мають місце такі залежності:

$$y_2(y(t),n)=y(y_1(t,n)), t\in\mathbf{W}, n\in\mathbf{Z}, \tag{39}$$

$$y_1(y^{-1}(t'),n)=y^{-1}(y_2(t',n)), t'\in\mathbf{W}', n\in\mathbf{Z}. \tag{40}$$

Залежність (39) дає змогу визначити структурну функцію $y_2(t',n)$ циклічної функції $f_2(t'), t'\in\mathbf{W}'$, якщо відома структурна функція $y_1(t,n)$ циклічної функції $f_1(t), t\in\mathbf{W}$ та відома функція перетворення шкали $y(t)\in\mathbf{W}', t\in\mathbf{W}$. Залежність (40) дає змогу визначити функцію $y_1(t,n)$ циклічної функції $f_1(t), t\in\mathbf{W}$, якщо відома функція $y_2(t',n)$ циклічної функції $f_2(t'), t'\in\mathbf{W}'$ та відома функція перетворення шкали $y^{-1}(t')\in\mathbf{W}, t\in\mathbf{W}'$.

Якщо $\mathbf{W}'=\mathbf{W}=\mathbf{R}$, то у співвідношення (40) замість аргумента t' можна підставити аргумент t, тобто:

$$y_1(y^{-1}(t),n)=y^{-1}(y_2(t,n)), t\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{Z}. \tag{41}$$

В частинному випадку, коли функція $y(t)=t$, рівність (39) перетвориться на тотожність:

$$y_2(t,n)=y_1(t,n), t\in\mathbf{W}, n\in\mathbf{Z}, \tag{42}$$

тобто отримаємо тотожні функції та, відповідно, тотожні функціональні відношення $f_1(t), t\in\mathbf{W}$ та $f_2(t'), t'\in\mathbf{W}'$ ($f_1(t)\equiv f_2(t')$, $\mathbf{W}=\mathbf{W}'$).

Оскільки функція ритму циклічного функціонального відношення рівна $T(t,n)=y(t,n)-t$, то із співвідношень (39), (40), що встановлені для структурних функцій $y_1(t,n)$ та $y_2(t',n)$, випливають такі співвідношення між функціями ритму $T_1(t,n)$ та $T_2(t',n)$ ізоморфних відносно порядку та значень циклічних функціональних відношень $f_1(t)\in\mathbf{\Psi}, t\in\mathbf{W}$ та $f_2(t')\in\mathbf{\Psi}, t'\in\mathbf{W}'$:

$$T_2(y(t),n)=y(t+T_1(t,n))-y(t),\ t\in\mathbf{W},\ n\in\mathbf{Z}, \tag{43}$$

$$T_1(y^{-1}(t'),n)=y^{-1}(t'+T_2(t',n))-y^{-1}(t'),\ t'\in\mathbf{W}',\ n\in\mathbf{Z}. \tag{44}$$

Якщо $\mathbf{W}'=\mathbf{W}=\mathbf{R}$, то у співвідношення (44) замість аргумента t' можна підставити аргумент t, тобто:

$$T_1(y^{-1}(t),n)=y^{-1}(t+T_2(t,n))-y^{-1}(t),\ t\in\mathbf{W},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{45}$$

У частинному випадку, коли функція $y(t)=t$, рівність (43) перетвориться на тотожність:

$$T_2(t,n)=t+T_1(t,n)-t=T_1(t,n),\ t\in\mathbf{W},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{46}$$

У випадку, коли функція $f_1(t)$ має стабільний ритм ($T_1(t,n)=n\cdot T_1$), то співвідношення (43) спроститься і буде мати вигляд:

$$T_2(y(t),n)=y(t+n\cdot T_1)-y(t),\ t\in\mathbf{W},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{47}$$

У випадку, коли вихідна функція $f_2(t)$ буде мати стабільний ритм ($T_2(t,n)=n\cdot T_2$), то співвідношення (43) буде мати такий вигляд:

$$n\cdot T_2=y(t+T_1(t,n))-y(t),\ t\in\mathbf{W},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{48}$$

Оскільки оператори $\mathbf{G}_{\alpha(t)t}\{\cdot\}$ та $\mathbf{G}_{s(t)+t}\{\cdot\}$ є частинними випадками оператора $\mathbf{G}_{y(t)}\{\cdot\}$, то можна легко поширити результати, що отримані нами вище для більш загального оператора $\mathbf{G}_{y(t)}\{\cdot\}$, на випадок операторів $\mathbf{G}_{\alpha(t)t}\{\cdot\}$ та $\mathbf{G}_{s(t)+t}\{\cdot\}$. Так, підставивши в (43) функцію $y(t)=s(t)+t$, отримаємо залежність між функціями ритму $T_2(t',n)$ та $T_1(t,n)$, а саме:

$$T_2(t+s(t),n)=s(t+T_1(t,n))+T_1(t,n)-s(t),\ t\in\mathbf{W},\ s(t)\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{49}$$

Підставивши в (43) функцію $y(t)=\alpha(t)\cdot t$, отримаємо залежність між функціями ритму $T_2(t,n)$ та $T_1(t,n)$, а саме:

$$T_2(\alpha(t)\cdot t,n)=\alpha(t+T_1(t,n))\cdot(t+T_1(t,n))-\alpha(t)\cdot t,\ t\in\mathbf{W},\ \alpha(t)\in\mathbf{R},\ n\in\mathbf{Z}. \tag{50}$$

Розглянемо особливості динамічних зсувних та масштабуючих перетворень циклічних випадкових процесів. Нехай маємо циклічний випадковий процес $\{\xi_1(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{W}\}$ із функцією ритму $T_1(t,n)$, на який діє оператор динамічного масштабування $\mathbf{G}_{\alpha(t)t}\{\cdot\}$, закон масштабування $\alpha(t)$ якого задовольняє умову (16), тоді результатом такої дії буде ізоморфний йому відносно порядку та значень циклічний випадковий процес $\{\xi_2(\omega,t'),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t'=\alpha(t)\cdot t\in\mathbf{W}'\}$ із функцією ритму $T_2(\alpha(t)\cdot t,n)$. Тобто, з імовірністю одиниця значення випадкових процесів $\{\xi_1(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t'\in\mathbf{W}'\}$, коли їх відповідні аргументи $t\in\mathbf{W}$ та $t'=\alpha(t)\cdot t\in\mathbf{W}'$, а також $t+T_1(t,n)$ та $t'+T_2(t',n)=\alpha(t)\cdot t+T_2(\alpha(t)\cdot t,n),\ n\in\mathbf{Z}$ перебувають у бієктивній пов'язаності ($t\leftrightarrow t'$, $t'+T_2(t',n)\leftrightarrow t+T_1(t,n),\ n\in\mathbf{Z}$), є рівними, а саме:

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega,t)=\xi_2(\omega,\alpha(t)\cdot t)\}=1, \tag{51}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega,t+T_1(t,n))=\xi_2(\omega,\alpha(t)\cdot t+T_2(\alpha(t)\cdot t,n))\}=1,\ t\in\mathbf{W},\ n\in\mathbf{Z},\ \alpha(t)\in\mathbf{R}. \tag{52}$$

Для циклічних випадкових процесів $\{\xi_1(\omega,t),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t\in\mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'),\ \omega\in\mathbf{\Omega},\ t'=\alpha(t)\cdot t\in\mathbf{W}'\}$ має місце рівність їх (k-вимірних) функцій розподілу, коли відповідні набори аргументів $t_1,...,t_k$ та $t'_1=\alpha(t_1)\cdot t_1,...,t'_k=\alpha(t_k)\cdot t_k$, а також

$t_i + T_1(t_i, n)$ та $t'_i + T_2(t'_i, n) = \alpha(t_i) \cdot t_i + T_2(\alpha(t_i) \cdot t_i, n),\ i = \overline{1,k},\ n \in \mathbf{Z}$ перебувають у бієктивній пов'язаності ($t'_i \leftrightarrow t_i$, $t'_i + T_2(t'_i, n) \leftrightarrow t_i + T_1(t_i, n),\ i = \overline{1,k},\ n \in \mathbf{Z}$), тобто мають місце такі співвідношення:

$$\begin{gathered} F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k) = F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1 + T_1(t_1,n),...,t_k + T_1(t_k,n)) = \\ = F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,\alpha(t_1)\cdot t_1,...,\alpha(t_k)\cdot t_k) = \\ = F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,\alpha(t_1)\cdot t_1 + T_2(\alpha(t_1)\cdot t_1,n),...,\alpha(t_k)\cdot t_k + T_2(\alpha(t_k)\cdot t_k,n)), \\ x_1,...,x_k \in \mathbf{R},\ t_1,...,t_k \in \mathbf{W},\ n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{N},\ \alpha(t) \in \mathbf{R}. \end{gathered} \tag{53}$$

Нехай маємо циклічний випадковий процес $\{\xi_1(\omega,t),\ \omega \in \mathbf{\Omega},\ t \in \mathbf{W}\}$ із функцією ритму $T_1(t,n)$, на який діє оператор динамічного зсуву $\mathbf{P}_{s(t)+t}\{\cdot\}$, закон зсуву $s(t)$ якого задовольняє умову (20), тоді результатом такої дії буде ізоморфний йому відносно порядку та значень циклічний випадковий процес $\{\xi_2(\omega,t'),\ \omega \in \mathbf{\Omega},\ t' = t + s(t) \in \mathbf{W}'\}$ із функцією ритму $T_2(t + s(t), n)$. Тобто, з імовірністю одиниця значення випадкових процесів $\{\xi_1(\omega,t),\ \omega \in \mathbf{\Omega},\ t \in \mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'),\ \omega \in \mathbf{\Omega},\ t' \in \mathbf{W}'\}$, коли їх відповідні аргументи $t \in \mathbf{W}$ та $t' = t + s(t) \in \mathbf{W}'$, а також $t + T_1(t,n)$ та $t' + T_2(t',n) = t + s(t) + T_2(t + s(t), n),\ n \in \mathbf{Z}$ перебувають у бієктивній пов'язаності ($t \leftrightarrow t'$, $t' + T_2(t',n) \leftrightarrow t + T_1(t,n),\ n \in \mathbf{Z}$), є рівними, а саме:

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega,t) = \xi_2(\omega, t + s(t))\} = 1, \tag{54}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1(\omega, t + T_1(t,n)) = \xi_2(\omega, t + s(t) + T_2(t + s(t), n))\} = 1,\ t \in \mathbf{W},\ n \in \mathbf{Z},\ s(t) \in \mathbf{R}. \tag{55}$$

Для циклічних випадкових процесів $\{\xi_1(\omega,t),\ \omega \in \mathbf{\Omega},\ t \in \mathbf{W}\}$ та $\{\xi_2(\omega,t'),\ \omega \in \mathbf{\Omega},\ t' = t + s(t) \in \mathbf{W}'\}$ має місце рівність їх (k-вимірних) функцій розподілу, коли відповідні набори аргументів $t_1,...,t_k$ та $t'_1 = t_1 + s(t_1),...,t'_k = t_k + s(t_k)$, а також $t_i + T_1(t_i,n),\ i = \overline{1,k}$ та $t'_i + T_2(t'_i,n) = t_i + s(t_i) + T_2(t_i + s(t_i), n),\ i = \overline{1,k},\ n \in \mathbf{Z}$ перебувають у бієктивній пов'язаності ($t'_i \leftrightarrow t_i$, $t'_i + T_2(t'_i,n) \leftrightarrow t_i + T_1(t_i,n),\ i = \overline{1,k},\ n \in \mathbf{Z}$), тобто мають місце такі співвідношення:

$$\begin{gathered} F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1,...,t_k) = F_{k_{\xi_1}}(x_1,...,x_k,t_1 + T_1(t_1,n),...,t_k + T_1(t_k,n)) = \\ = F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,t_1 + s(t_1),...,t_k + s(t_k)) = \\ = F_{k_{\xi_2}}(x_1,...,x_k,t_1 + s(t_1) + T_2(t_1 + s(t_1),n),...,t_k + s(t_k) + T_2(t_k + s(t_k),n)), \\ x_1,...,x_k \in \mathbf{R},\ t_1,...,t_k \in \mathbf{W},\ n \in \mathbf{Z},\ k \in \mathbf{N},\ s(t) \in \mathbf{R}. \end{gathered} \tag{56}$$

Встановлені нами залежності відкривають ряд можливостей для дослідження імовірнісних характеристик циклічного випадкового процесу шляхом аналізу ізоморфного йому відносно порядку та значень деякого іншого циклічного випадкового процесу, зокрема, стохастично періодичного процесу, якщо відомий оператор перетворення шкали одного процесу в інший.

Базуючись на отриманих у роботі співвідношеннях, можна сформулювати та запропонувати підходи до розв'язання ряду важливих науково-технічних задач імітаційного моделювання та спектрального аналізу циклічних сигналів. Так, імітаційне моделювання циклічних сигналів із змінним ритмом можна проводити шляхом дії оператора перетворення шкали на циклічне функціональне відношення із стабільним ритмом, алгоритм моделювання якого є відомим. Параметри оператора перетворення шкали підбираються, виходячи із апріорної інформації про функцію ритму модельованого циклічного сигналу, тобто на основі залежності (47) необхідно підібрати такий закон перетворення шкали деякої циклічної функції із стабільним ритмом, щоб результуюча функція була циклічною функцією із заданою функцією ритму.

На рисунку 1 подано приклади імітаційного моделювання числових циклічних функцій із змінним ритмом шляхом дії операторів перетворення шкали на породжуючі періодичні числові функції.

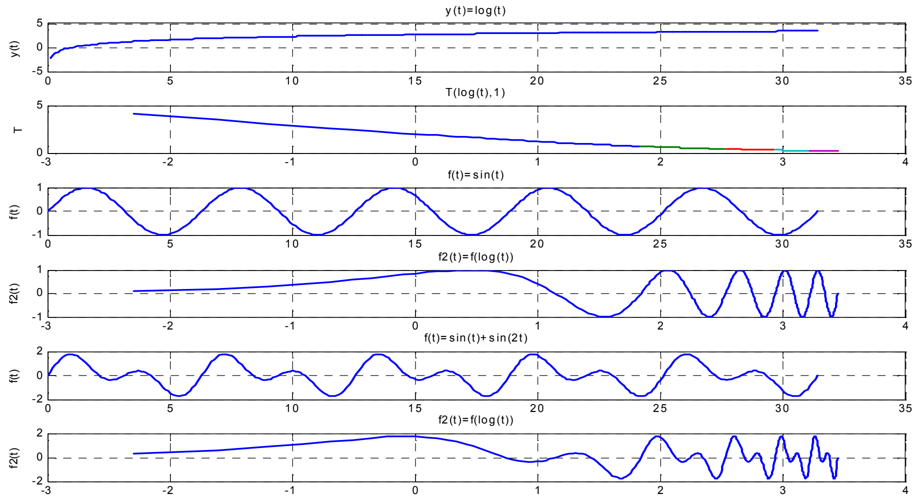

Рисунок 1 - Графіки (зверху-вниз): логарифмічна функція перетворення шкали, функція ритму змодельованої циклічної функції, перша породжуюча періодична функція, перша змодельована циклічна функція із змінним ритмом, друга породжуюча періодична функція, друга змодельована циклічна функція із змінним ритмом

Методи спектрального аналізу та синтезу циклічних сигналів із змінним ритмом, зводяться до методів спектрального аналізу та синтезу циклічних функцій із стабільним ритмом шляхом застосування операторів динамічного масштабування чи зсуву.

Висновки

1. Введено поняття ізоморфних відносно порядку та значень циклічних функціональних відношень, що дало змогу виділити клас еквівалентних циклічних функцій, які відрізняються лише своїми функціями ритму.
2. Досліджено дію оператора перетворення шкали та його двох форм – оператора динамічного зсуву та оператора динамічного масштабування на циклічну функцію. Встановлено аналітичний зв'язок між законами динамічного масштабування та динамічного зсуву.
3. Встановлено умови, яким повинні задовольняти закони динамічного масштабування та зсуву, щоб перетворювати одну циклічну функцію на іншу, яка ізоморфна їй відносно порядку та значень.
4. Встановлено аналітичні взаємозв'язки між функціями ритму двох циклічних функцій, що пов'язані через оператори динамічного зсуву та масштабування.
5. Досліджено імовірнісні характеристики ізоморфних відносно порядку та значень циклічних випадкових процесів, що дає змогу оцінити характеристики одного процесу за результатами аналізу іншого випадкового процесу.

Література

1. Лупенко С. Циклічне функціональне відношення як основа математичного формалізму теорії моделювання та аналізу циклічних сигналів //Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2007. -Т. 12, №3. -С.183-195.
2. Лупенко С., Студена Ю. Математичне моделювання сигналів серця в задачах технічної кардіометрії на базі їх моделі у вигляді циклічного випадкового процесу //Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2006. -Т. 11, №1. -С.134-142.

3. Литвиненко Я., Лупенко С., Студена Ю. Методи статистичної обробки сигналів серця на базі їх моделі у вигляді циклічного випадкового процесу із зонною часовою структурою //Вісник Тернопільського державного технічного університету.- 2006. -Т. 11, №4. -С.189-200.
4. Черницер В.М., Кадук Б.Г. Преобразователи временного масштаба.- М.: Сов. радио, 1972.-144с.
5. Виницкий А.С. Модулированные фильтры и следящий прием ЧМ сигналов. М.: Сов.радио, 1969.-548с.

Одержано 22.10.2007 р.