

УДК 539.3

А.Сяський, докт. техн. наук; Н.Шевцова

Рівненський державний гуманітарний університет

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ КОНТУРОМ, ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИМ СИСТЕМОЮ ТРЬОХ НЕСИМЕТРИЧНИХ РЕБЕР

Досліджується напружено-деформований стан на контурі криволінійного отвору, частково підсиленого системою трьох несиметричних ребер змінної жорсткості, в нескінченній пластинці, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану і циліндричного згину. Побудовано систему восьми сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних напружень в зоні підсилення. Встановлено структуру її наближеного розв'язку. Для трикутного отвору розглянуто числовий приклад.

A.Syasky, N.Shevtsova

THE ELASTIC EQUILIBRIUM PLATE WITH CURVILINEAR CONTOUR THE PARTIAL STRENGTHENED BY THE SYSTEM OF THE THREE ASYMMETRICAL RIBS

The mode of deformation contour the curvilinear hole the partial strengthened of the three asymmetrical ribs of varying stiffness in a infinite plate is analyze. The plate to be of generalized plane stress state and cylindrical bend. The system of eight singular integral-differential equations with cores of Hilbert for definition contact tensions in the area of strengthened is constructed. The structure of approximate solution of this system is explored. For the triangular hole numerical illustration is considered.

Пластинки, послаблені отворами, знаходять широке застосування в інженерній практиці. Часткове підсилення контурів отворів тонкими пружними елементами дозволяє знайти оптимальний розв'язок двох суперечливих проблем сучасного машинобудування та будівництва – підвищення надійності та зниження металомісткості машин і споруд.

Дослідженню впливу часткового підсилення контуру отвору тонкими пружними ребрами змінної жорсткості, які розміщені симетрично відносно середньої площини пластинки, присвячені роботи [1–4].

Задачі про несиметричне часткове підсилення криволінійного контуру одним або двома ребрами змінної жорсткості розглянуто в [5–7].

В даній роботі пропонується розв'язок задачі про часткове підсилення контуру криволінійного отвору пластинки, яка перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану і циліндричного згину, системою трьох пружних ребер змінної жорсткості, розміщених несиметрично відносно середньої площини пластинки.

Постановка і математична модель задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з криволінійним отвором, гладкий контур якого L має форму правильного N -кутника із закругленими кутами. Пластинка перебуває в умовах двостороннього розтягу (стиску) зусиллями p і q та циліндричного згину моментами M_1 і M_2 , прикладеними на нескінченності (рис.1). Систему прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат оберемо так, щоб вісь Ox і полярна вісь співпадали з віссю симетрії отвору та визначали напрямок дії зусиль p та моментів M_1 .

Допустимо, що три симетричні відносно осі Ox ділянки $L_1 = [-\beta_1^*; -\alpha_1^*] \cup [-\alpha_0^*; \alpha_0^*] \cup [\alpha_1^*; \beta_1^*]$ контуру L підсилені тонкими пружними ребрами змінної жорсткості на розтяг (стиск) $E_0 F(s)$ і згин $A(s)$ (s – дуга на L ; $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \beta_1^*$ – полярні кути торців зон підсилення). Спільна вісь Γ підсилювальних

елементів зміщена відносно середньої площини пластинки на величину z_0 . Підсилення моделюємо пружними лініями [8] і будемо нехтувати їх жорсткостями на згин в площині Γ та кручення. Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних зусиль T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ і моментів M_ρ , P в зоні підсилення, кільцевих зусиль T_λ і моментів M_λ на контурі L та поздовжніх сил N_λ і згинаючих моментів L_ρ в підсиленнях.

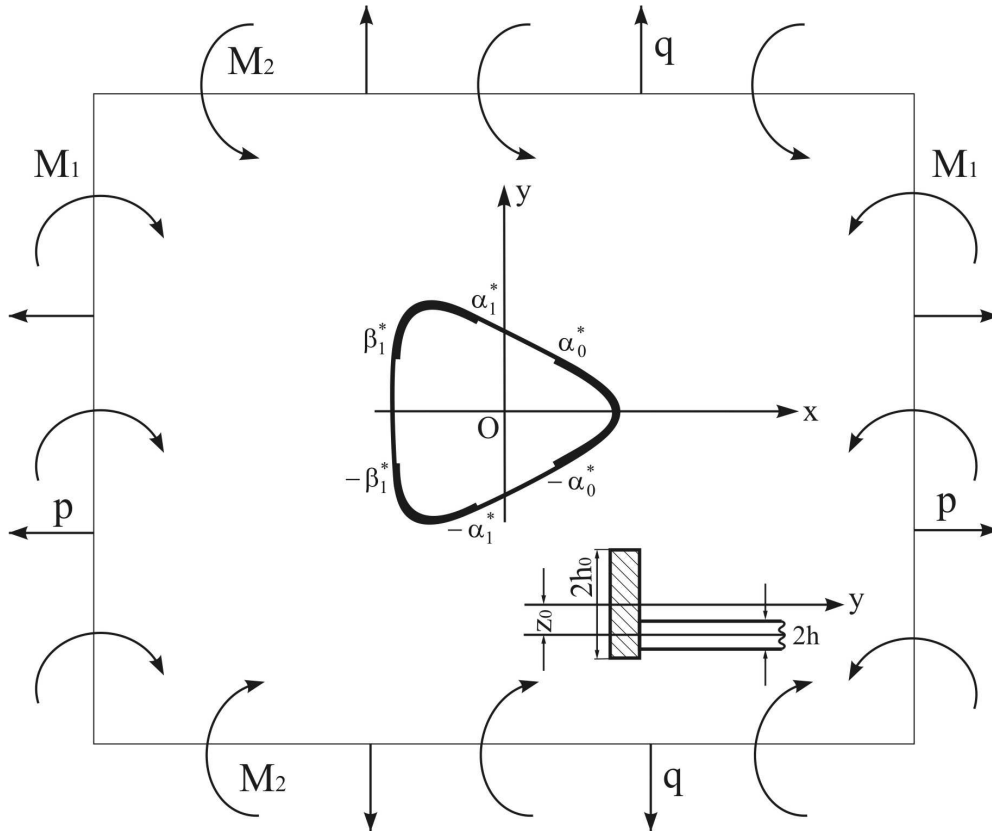


Рисунок 1 – Розрахункова схема пластинки

Граничні умови задачі на ділянках підсилення на підставі [5] запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 T_\rho^0 &= \frac{E_0 F(s)}{\tilde{\rho}} \varepsilon_\lambda + 3 \left(\frac{z_0}{h_0} \right)^2 \frac{M_\rho^0 + z_0 T_\rho^0}{z_0}; & S_{\rho\lambda}^0 &= -\frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho} T_\rho^0); \\
 M_\rho^0 &= -\frac{A(s)}{\tilde{\rho}} X - z_0 T_\rho^0; & P^0 &= -\frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho} M_\rho^0); \\
 & & \delta &\in [-\alpha_0^*; \alpha_0^*]; \\
 \tilde{T}_\rho &= \frac{E_0 F(s)}{\tilde{\rho}} \varepsilon_\lambda + 3 \left(\frac{z_0}{h_0} \right)^2 \frac{\tilde{M}_\rho + z_0 \tilde{T}_\rho}{z_0}; & \tilde{S}_{\rho\lambda} &= -\frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho} \tilde{T}_\rho); \\
 \tilde{M}_\rho &= -\frac{A(s)}{\tilde{\rho}} X - z_0 \tilde{T}_\rho; & \tilde{P} &= -\frac{\partial}{\partial s} (\tilde{\rho} \tilde{M}_\rho); \\
 & & \delta &\in [-\beta_1^*; -\alpha_1^*] \cup [\alpha_1^*; \beta_1^*],
 \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$(M_\rho, P, T_\rho, S_{\rho\lambda}) = \begin{cases} (M_\rho^0, P^0, T_\rho^0, S_{\rho\lambda}^0), & \delta \in [-\alpha_0^*; \alpha_0^*]; \\ (\tilde{M}_\rho, \tilde{P}, \tilde{T}_\rho, \tilde{S}_{\rho\lambda}), & \delta \in [-\beta_1^*; -\alpha_1^*] \cup [\alpha_1^*; \beta_1^*]; \end{cases}$$

$2h_0$ – товщина підсилення; X, ε_λ – приріст кривини та відносне видовження контуру L пластинки; $\tilde{\rho}(s)$ – радіус його кривини.

Вирази для компонент тензора деформації точок контуру L з урахуванням симетричності задачі відносно осі Ox на підставі [5] можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
 X(\lambda) = & \frac{k}{(3+\nu)(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1+\nu)(\alpha^2 + \beta^2)M_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_1(\lambda, t)M_\rho^0(t)dt - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_2(\lambda, t)P^0(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_3(\lambda, t)\tilde{M}_\rho(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_4(\lambda, t)\tilde{P}(t)dt + \alpha X_0^* - \beta Y_0^* \right\}; \\
 \varepsilon_\lambda = & \frac{1}{2Eh(\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)T_\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_1(\lambda, t)T_\rho^0(t)dt + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_2(\lambda, t)S_{\rho\lambda}^0(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_3(\lambda, t)\tilde{T}_\rho(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_4(\lambda, t)\tilde{S}_{\rho\lambda}(t)dt + \alpha\varepsilon_\lambda^0 + \beta\nu^0 \right\}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Тут введено позначення

$$K_1(\lambda, t) = R(\lambda, t) - Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2}; \quad K_2(\lambda, t) = Q(\lambda, t) + R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2};$$

$$K_3(\lambda, t) = K_1(\lambda, -t) + K_1(\lambda, t); \quad K_4(\lambda, t) = K_2(\lambda, -t) + K_2(\lambda, t);$$

$$R(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad Q(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t);$$

$$X_0^* = -\left[\frac{3+\nu}{1+\nu} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \varepsilon(N-1) \cos N\lambda \right] (M_1 + M_2) - 2(M_2 - M_1) \cos 2\lambda;$$

$$Y_0^* = \frac{1-\nu}{1+\nu} \varepsilon(N-1) \sin N\lambda (M_1 + M_2) - 2(M_2 - M_1) \sin 2\lambda;$$

$$\varepsilon_\lambda^0 = [1 + \varepsilon(N-1) \cos N\lambda] (p+q) - 2(p-q) \cos 2\lambda;$$

$$\nu^0 = -\varepsilon(N-1) \sin N\lambda (p+q) + 2(p-q) \sin 2\lambda;$$

$$\alpha + i\beta = \omega'(\sigma); \quad \sigma = e^{i\lambda}; \quad (3)$$

$\omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^{N-1}} \right)$ – функція, яка здійснює конформне відображення зовнішності

одичного кола в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область, яку займає пластинка; $\gamma_1 = [-\alpha_0; \alpha_0] \cup [-\beta_1; -\alpha_1] \cup [\alpha_1; \beta_1]$ – образ зони підсилення при відображенні $\omega(\xi)$;

$k = \frac{1}{D(1-\nu)}$; D – циліндрична жорсткість пластинки на згин; E, ν – модуль Юнга та

коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки.

Підставляючи (2), (3) з врахуванням співвідношень [2]

$$ds = |\omega'(\sigma)| d\lambda = \tilde{\rho} d\theta; \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{\Omega(\lambda)}{|\omega'(\sigma)|^2}; \quad \Omega(\lambda) = (1-N)(\alpha^2 + \beta^2) + N\lambda \quad (4)$$

в граничні умови (1), одержимо після певних перетворень систему восьми сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних зусиль $T_\rho^0, S_{\rho\lambda}^0, \tilde{T}_\rho, \tilde{S}_{\rho\lambda}$ і моментів $M_\rho^0, P^0, \tilde{M}_\rho, \tilde{P}$ в зоні підсилення

$$\begin{aligned}
 M_{\rho}^0(\lambda) + z_0 T_{\rho}^0(\lambda) &= -\frac{A(\lambda)\Omega(\lambda)k}{(3+\nu)|\omega'(\sigma)|^5} \left\{ (1+\nu)(\alpha^2 + \beta^2)M_{\rho}^0(\lambda) + \alpha X_0^* - \beta Y_0^* + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_1(\lambda, t)M_{\rho}^0(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_2(\lambda, t)P^0(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_3(\lambda, t)\tilde{M}_{\rho}(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_4(\lambda, t)\tilde{P}(t)dt \right\}; \\
 P^0(\lambda) &= -\frac{\partial M_{\rho}^0(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{\Omega(\lambda)} - M_{\rho}^0(\lambda) \frac{(|\omega'(\sigma)|^2(1-2N) - 3\alpha N)\beta N}{\Omega^2(\lambda)}; \\
 T_{\rho}^0(\lambda) - 3\left(\frac{z_0}{h_0}\right)^2 \frac{M_{\rho}^0(\lambda) + z_0 T_{\rho}^0(\lambda)}{z_0} &= \frac{E_0 F(\lambda)\Omega(\lambda)}{2Eh|\omega'(\sigma)|^5} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)T_{\rho}^0(\lambda) + \alpha \varepsilon_{\lambda}^0 + \beta \nu^0 - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_1(\lambda, t)T_{\rho}^0(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_2(\lambda, t)S_{\rho\lambda}^0(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_3(\lambda, t)\tilde{T}_{\rho}(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_4(\lambda, t)\tilde{S}_{\rho\lambda}(t)dt \right\}; \\
 S_{\rho\lambda}^0(\lambda) &= -\frac{\partial T_{\rho}^0(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{\Omega(\lambda)} - T_{\rho}^0(\lambda) \frac{(|\omega'(\sigma)|^2(1-2N) - 3\alpha N)\beta N}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\
 \tilde{M}_{\rho}(\lambda) + z_0 \tilde{T}_{\rho}(\lambda) &= -\frac{A(\lambda)\Omega(\lambda)k}{(3+\nu)|\omega'(\sigma)|^5} \left\{ (1+\nu)(\alpha^2 + \beta^2)\tilde{M}_{\rho}(\lambda) + \alpha X_0^* - \beta Y_0^* + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_1(\lambda, t)M_{\rho}^0(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_2(\lambda, t)P^0(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_3(\lambda, t)\tilde{M}_{\rho}(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_4(\lambda, t)\tilde{P}(t)dt \right\}; \\
 \tilde{P}(\lambda) &= -\frac{\partial \tilde{M}_{\rho}(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{\Omega(\lambda)} - \tilde{M}_{\rho}(\lambda) \frac{(|\omega'(\sigma)|^2(1-2N) - 3\alpha N)\beta N}{\Omega^2(\lambda)}; \tag{5} \\
 \tilde{T}_{\rho}(\lambda) - 3\left(\frac{z_0}{h_0}\right)^2 \frac{\tilde{M}_{\rho}(\lambda) + z_0 \tilde{T}_{\rho}(\lambda)}{z_0} &= \frac{E_0 F(\lambda)\Omega(\lambda)}{2Eh|\omega'(\sigma)|^5} \left\{ (1-\nu)(\alpha^2 + \beta^2)\tilde{T}_{\rho}(\lambda) + \alpha \varepsilon_{\lambda}^0 + \beta \nu^0 - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_1(\lambda, t)T_{\rho}^0(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} K_2(\lambda, t)S_{\rho\lambda}^0(t)dt - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_3(\lambda, t)\tilde{T}_{\rho}(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K_4(\lambda, t)\tilde{S}_{\rho\lambda}(t)dt \right\}; \\
 \tilde{S}_{\rho\lambda}(\lambda) &= -\frac{\partial \tilde{T}_{\rho}(\lambda)}{\partial \lambda} \frac{|\omega'(\sigma)|^2}{\Omega(\lambda)} - \tilde{T}_{\rho}(\lambda) \frac{(|\omega'(\sigma)|^2(1-2N) - 3\alpha N)\beta N}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in [\alpha_1; \beta_1]
 \end{aligned}$$

Крім системи (5), повинні виконуватися умови рівноваги кожного підсилення як жорстких цілих

$$\begin{aligned}
 \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (T_{\rho}^0 + iS_{\rho\lambda}^0) e^{i\theta} ds &= 0; & \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} (M_{\rho}^0 + iP^0) e^{i\theta} ds &= 0; \\
 \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (\tilde{T}_{\rho} + i\tilde{S}_{\rho\lambda}) e^{i\theta} ds &= 0; & \int_{\alpha_1}^{\beta_1} (\tilde{M}_{\rho} + i\tilde{P}) e^{i\theta} ds &= 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Якщо розв'язок системи (5), який задовольняє умовам (6), стане відомим, то кільцеві зусилля T_{λ} та моменти M_{λ} на L можна визначити за формулами

$$T_\lambda = \nu T_\rho + 2Eh\varepsilon_\lambda; \quad M_\lambda = \nu M_\rho - \frac{1+\nu}{k} X. \quad (7)$$

Для визначення поздовжніх сил $N_\lambda(\lambda)$ і згинальних моментів $L_\rho(\lambda)$ в поперечних перерізах підсилень використовуються формули [8]:

$$N_\lambda(\lambda) = E_0 F(\lambda) \left[\frac{T_\lambda - \nu T_\rho}{2Eh} - \frac{k}{1+\nu} (M_\lambda - \nu M_\rho) \right]; \quad L_\rho(\lambda) = A(\lambda) (M_\lambda - \nu M_\rho) \quad (8)$$

Співвідношення (3), (5)-(8) повністю визначають напружено-деформований стан на контурі отвору пластинки і в підсиленнях.

Зауважимо, що у випадку $z_0 = 0$ (симетричне розміщення підсилень відносно середньої площини пластинки) розглянута задача розпадається на дві незалежні задачі для узагальненого плоского напруженого стану [2, 3] і циліндричного згину [4].

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок задачі (5),(6) знайти неможливо. Для побудови наближеного розв'язку системи (5) необхідно встановити структуру контактних зусиль і моментів в околі торців підсилення.

Використовуючи диференціальні залежності із граничних умов (1), співвідношення (6) можна перетворити до вигляду

$$M_\rho^0(\pm \alpha_0) = 0; \quad T_\rho^0(\pm \alpha_0) = 0; \\ \tilde{M}_\rho(\alpha_1) = \tilde{M}_\rho(\beta_1) = \tilde{T}_\rho(\alpha_1) = \tilde{T}_\rho(\beta_1) = 0. \quad (9)$$

Залежності (9) приводять до висновку, що при відсутності у підсилень жорсткості на згин у площині Γ і жорсткості на кручення, нормальні контактні зусилля T_ρ і моменти M_ρ на торцях зон підсилення дорівнюють нулю. На підставі диференціальних залежностей (1) дотичні контактні зусилля $S_{\rho\lambda}$ і моменти P в цих точках можуть мати кореневу особливість.

Враховуючи структуру контактних зусиль та моментів, числову реалізацію задачі можна здійснити методом колокації, запропонованим в роботах [1–3].

На рис.2 - 4 наведено результати числового розрахунку компонентів напруженого стану на контурі трикутного ($N = 3$; $\varepsilon = 0.2$) отвору, контур якого підсилено трьома одноковими пружними ребрами з параметрами

$$\frac{h_0}{h} = 2; \quad \frac{E_0}{E} = 1; \quad \frac{b_0}{\rho_0} = 0.05; \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{6}; \quad \lambda_1 = \frac{\pi}{12};$$

$$b(\lambda) = \frac{b_0}{2} \begin{cases} 1 + \sin\left(\left(\lambda + \frac{\lambda_1 + \alpha_0}{2}\right) \frac{\pi}{\alpha_0 - \lambda_1}\right), & \lambda \in [-\alpha_0; -\lambda_1]; \\ 2, & \lambda \in [-\lambda_1; \lambda_1]; \\ 1 - \sin\left(\left(\lambda - \frac{\lambda_1 + \alpha_0}{2}\right) \frac{\pi}{\alpha_0 - \lambda_1}\right), & \lambda \in [\lambda_1; \alpha_0], \end{cases}$$

в пластинці, яка перебуває в умовах циліндричного згину моментами M_2 , прикладеними на нескінченності. Суцільні лінії побудовано для випадку $\frac{z_0}{h_0} = 0$ (симетричне підсилення); штрихові – $\frac{z_0}{h_0} = \frac{1}{4}$; штрихпунктирні – $\frac{z_0}{h_0} = \frac{1}{2}$.

Всі розрахунки проводилися із використанням 100 точок колокації на кожній із ділянок підсилення. Зауважимо, що компоненти напруженого стану практично не змінюються, починаючи з 24 точок колокації. Це свідчить про достатню збіжність методу розв'язку.

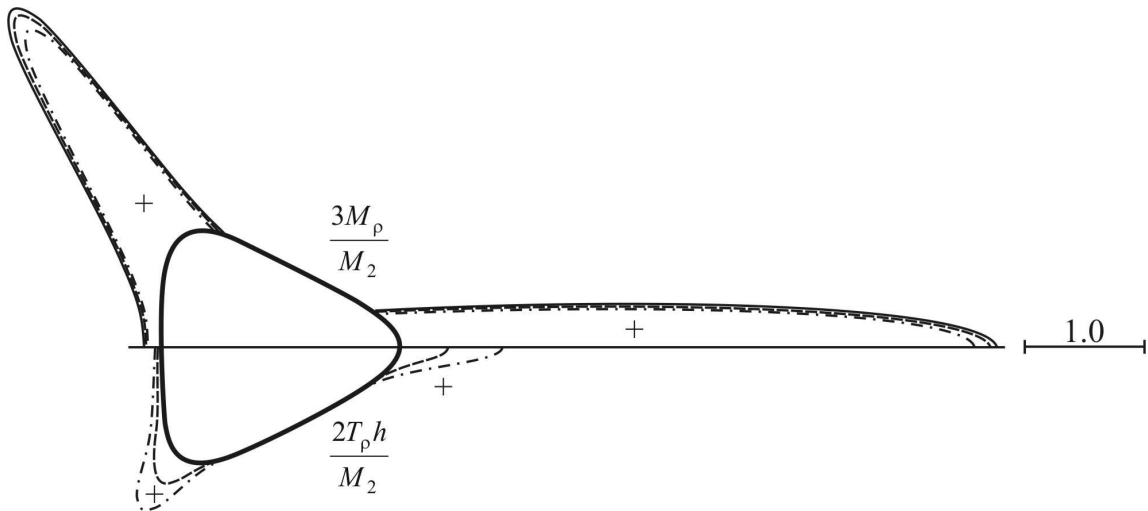


Рисунок 2 – Епюри розподілу нормальних зусиль T_p та моментів M_p

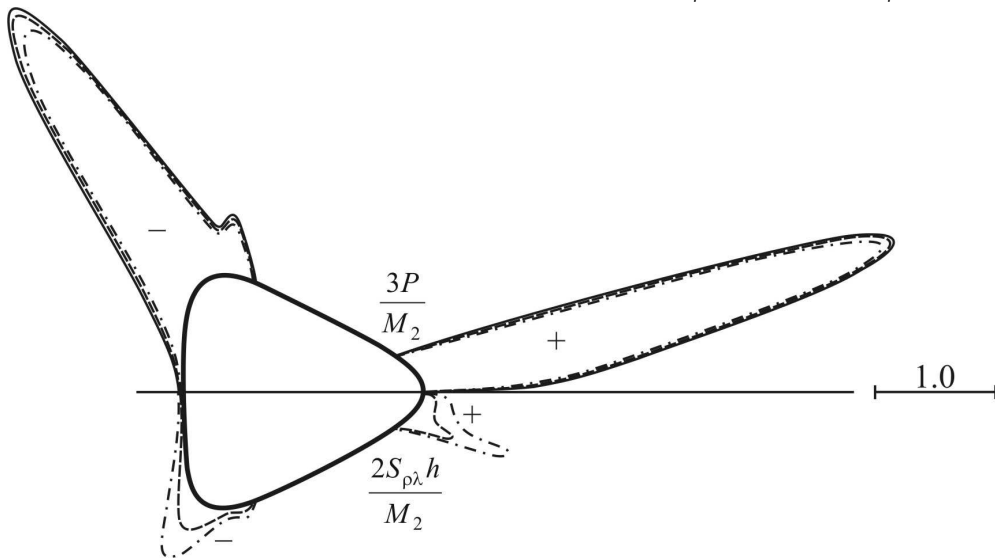


Рисунок 3 – Епюри розподілу дотичних зусиль $S_{p\lambda}$ та моментів P

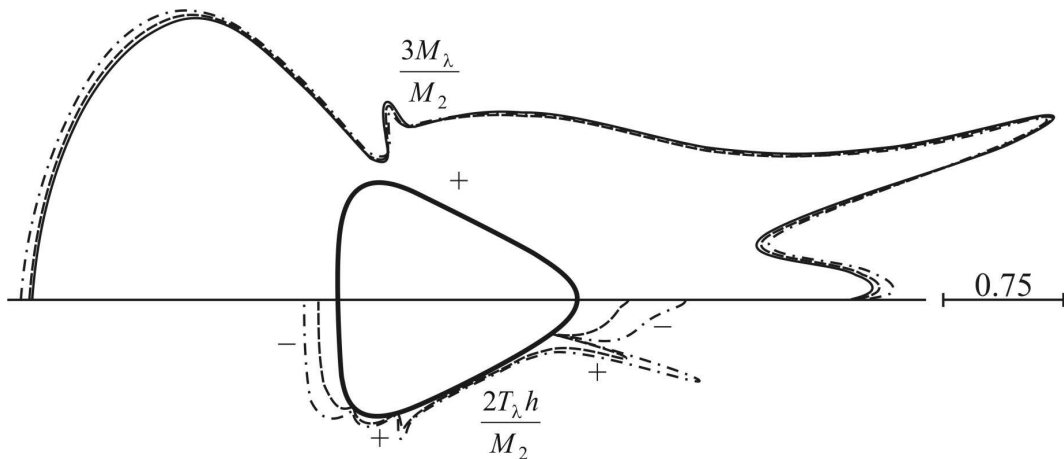


Рисунок 4 – Епюри розподілу кільцевих зусиль T_λ та моментів M_λ

Аналізуючи одержані результати, приходимо до висновків:

- несиметричність підсилень відносно середньої площини пластинки, яка перебуває в умовах циліндричного згину, практично не впливає на величину моментних напружень на контурі отвору. В той же час її вплив на величину мембранних напружень суттєвий (особливо в околі торців підсилення);
- використання в якості підсилень тонких пружних стрижнів із закругленими торцями дозволяє різко зменшити концентрацію напружень на ділянках контуру L з найменшою кривиною і усунути особливості напружень в торцях зони контакту.

Література

1. Сяський А.А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным отверстием// Прикладная математика и механика. – Т.50, №2. – 1986. – С. 247-254.
2. Сяський А.О., Батишкіна Ю.В. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці// Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Т.9, №2. – 2004.–С. 5-12.
3. Батишкіна Ю.В. Часткове підкріплення криволінійних отворів в пластинках тонкими пружними стрижнями змінної жорсткості// Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів. – 2003. – С. 316-318.
4. С.М. Гаврюсєв Часткове підсилення криволінійного отвору нескінченної пластинки при її циліндричному згині// Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій. Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції пам'яті акад. В.І. Моссаковського. – Дніпропетровськ: ДНУ. –2007. – С. 100-102.
5. Сяський А., Шевцова Н. Контактна взаємодія пластин з криволінійними отворами і розіркнених несиметричних ребер змінної жорсткості// Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Т. 11, № 3. – 2006. – С.20-26.
6. А.О. Сяський, Н.В. Шевцова Дослідження контактної взаємодії контуру пластинки з несиметричним розіркненим ребром змінної жорсткості// Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій. Тези доповідей Міжнародної науково-технічної конференції пам'яті акад. В.І. Моссаковського. – Дніпропетровськ: ДНУ. –2007. – С. 138-140.
7. Шевцова Н.В. Математичне моделювання контактної взаємодії пластин з отворами і розіркнених несиметричних ребер змінної жорсткості// Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи. Матеріали науково-технічної конференції молодих науковців та спеціалістів ФМІ. –Львів: ФМІ. – 2007. – С. 113-116.
8. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. – Киев: Наук. думка, 1964.– 384с.

Одержано 05.02.2008 р.