УДК 539.3

Г.Сулим[1], докт. фіз.-мат. наук; В.Опанасович[1], канд. фіз.-мат. наук; П.Герасимчук[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка
[2]Луцький державний технічний університет

ДВОБІЧНИЙ ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ І ШАЙБОЮ ЗА ПОВНОГО ГЛАДКОГО ЛІНІЙЧАТОГО КОНТАКТУ СКЛАДОВИХ

У роботі досліджено задачу про двобічний згин ізотропної пластини розподіленими згинальними моментами на нескінченності за існування у пластині кругового отвору, в який вставлена без натягу кругова шайба із матеріалу пластини. Під дією зовнішнього навантаження береги шайби і отвору приходять у гладкий контакт уздовж колової лінії на одній з основ пластини. Розв'язок задачі подано у вигляді суперпозиції двох розв'язків: плоскої задачі теорії пружності і задачі згину пластини з використанням класичної теорії. За допомогою методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів задачу зведено до низки задач лінійного спряження, на основі яких отримано явні вирази для комплексних потенціалів, контактного зусилля між берегами шайби й отвору. З'ясовано межі зміни відношення згинальних моментів на нескінченності, коли існує розв'язок задачі у такій постановці. Подано графічні залежності для контактного зусилля між берегами кругового отвору і шайби, на основі яких можна виявити, де і за яких умов береги шайби і кругового отвору пластини відставатимуть.

H.Sulym, V.Opanasovych, P.Herasymchuk

BILATERAL BENDING OF THE PLATE WITH A CIRCULAR HOLE AND A DISK IN PRESENCE OF A FULL SMOOTH LINEAR CONTACT OF COMPONENTS

This paper concerns with the problem of the bilateral bending of an isotropic plate with the bending moments distributed on infinity at presence of a circular hole in a plate into which the circular disk from a plate material is inserted without a tension. Under the influence of external loading, the edges of a disk and a hole come into a smooth contact along a circular curve on one of plate bases. The problem solution is presented in the form of superposition of two solutions: a plane problem of elasticity and a problem of bending of a plate with the use of a classical theory. Using the complex variable method and complex potentials the problem is reduced to a number of problems of linear conjugation, based on which the explicit expressions for complex potentials and contact force between the disk and the hole edge are received. The limits of the bending moments ratio on infinity when there exists the problem solution in such formulation are determined. The graphic dependences for contact force between the edge of a circular hole and a disk are presented. Based on them it is possible to detect where and under what conditions the edges of a disk and a circular hole in a plate will lag behind.

Згин пластини з тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів за умови, що пластина перебуває під дією розподілених згинальних моментів на нескінченності досліджено у публікаціях [1-3]. В даній роботі такий підхід поширюється на випадок, коли у пластині є круговий отвір, у який встановлена без натягу кругова шайба із матеріалу пластини, причому береги шайби і отвору внаслідок дії рівномірно розподілених згинальних моментів на нескінченності приходять у гладкий контакт по коловій лінії на одній з основ пластини. За допомогою методів теорії функцій комплексної змінної знайдено аналітичний розв'язок поставленої задачі.

Формулювання задачі. Дослідимо двосторонній згин ізотропної пластини завтовшки $2h$ рівномірно розподіленими згинальними моментами на нескінченності (рис. 1). У пластині існує круговий отвір радіуса R, у який вставлена без натягу кругова шайба із матеріалу пластини. Вважаємо, що під дією зовнішнього навантаження береги отвору і шайби приходять у гладкий контакт уздовж колової лінії на одній з основ пластини.

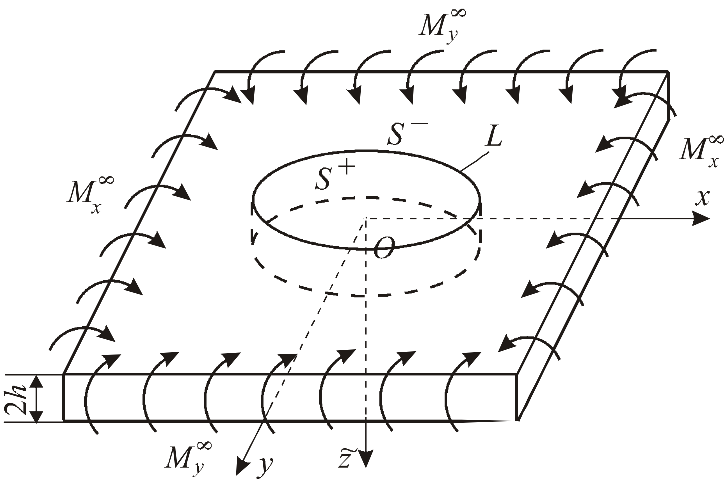

Рисунок 1 - Схема навантаження пластини з отвором і шайбою

У серединній площині пластини виберемо координатну площину Oxy декартової системи координат $Oxy\tilde z$ з початком у центрі кругового отвору. Коло радіуса R у серединній площині пластини позначимо через L, область всередині кола – через S^+, зовні – S^-.

Подібно до робіт [1-3], внаслідок контакту берегів шайби і отвору розв'язок поставленої задачі подамо у вигляді розв'язку двох задач: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину, використавши класичну теорію згину пластин. Отже, матимемо такі крайові умови:

$$\sigma_{rr}^{\pm}=-\frac{N_r}{2h},\ \sigma_{r\theta}^{\pm}=0 \quad \text{на} \quad L; \tag{1}$$

$$M_r^{\pm}=M_r,\ P_r^{\pm}=0 \quad \text{на} \quad L; \tag{2}$$

$$M_r=hN_r,\ v_r^{+}-v_r^{-}+h\left(\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^{+}-\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^{-}\right)=0 \quad \text{на} \quad L, \tag{3}$$

де N_r – контактне зусилля між отвором і шайбою; σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ та v_r і v_θ – компоненти тензора напружень та компоненти вектора переміщення в полярній системі координат r і θ з полюсом в точці O і полярною віссю Ox для плоскої задачі теорії пружності; M_r і P_r – згинальний момент та узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила в тій же системі координат; w – прогин пластини; індексами "+" і "–" позначено граничне значення функції при прямуванні точки до лінії L із областей S^+ і S^-.

Побудова розв'язку задачі. Для розв'язку плоскої задачі теорії пружності введемо комплексні потенціали $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ [4], тоді для визначення напружено-деформованого стану пластини будемо мати такі формули:

$$\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}=4\operatorname{Re}\Phi(z),$$

$$\sigma_{rr}+i\sigma_{r\theta}=\Phi(z)-\frac{R^2}{r^2}\Omega\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)+f(r)\left[\overline{\Phi(z)}-\bar z\overline{\Phi'(z)}\right], \tag{4}$$

$$2r\mu\left(v_r+iu_\theta\right)=\bar z\left[\kappa\varphi(z)+\omega\left(\frac{R^2}{\bar z}\right)-zf(r)\overline{\Phi(z)}\right],$$

де μ і υ – відповідно модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластини; $\kappa=(3-\upsilon)/(1+\upsilon)$, $z=x+iy$; x і y – координати точки, для якої знаходимо шукані величини; $i^2=-1$, $r=|z|$, $f(r)=1-R^2r^{-2}$, $\varphi'(z)=\Phi(z)$, $\omega'(z)=\Omega(z)$, $\bar{\Phi}\left(R^2/z\right)=\overline{\Phi\left(R^2/\bar{z}\right)}$.

Якщо для функцій $\Phi(z)$ і $\Omega(z)$ слушні розвинення

$$\Phi(z)=\begin{cases}A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots,z\to 0,\\ \dfrac{a_2}{z^2}+\dfrac{a_3}{z^3}+\ldots,z\to\infty;\end{cases}\qquad \Omega(z)=B_0+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\ldots,z\to\infty, \tag{5}$$

то мають виконуватися умови [4]

$$B_1=0,\ B_0=-\bar{A}_0. \tag{6}$$

У формулі (5) A_j, a_j, B_j – невідомі коефіцієнти.

Для розв'язування задачі згину пластини введемо комплексні потенціали $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$ [5] та скористаємося залежностями

$$M_r+M_\theta=4\,\mathrm{Re}\,\Phi_3(z),$$

$$m\left[M_r+iP_r(s)+ic'\right]=\tilde{\kappa}\Phi_3(z)+\frac{R^2}{r^2}\Omega_3\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)-f(r)\left[\overline{\Phi_3(z)}-\bar{z}\overline{\Phi_3'(z)}\right], \tag{7}$$

$$r\left(\frac{\partial w}{\partial r}+i\frac{\partial w}{\partial s}\right)=\bar{z}\left[\varphi_3(z)-\omega_3\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)+zf(r)\overline{\Phi_3(z)}\right],$$

де s – дугова координата; c' – дійсна стала; $\tilde{\kappa}=(3+\upsilon)/(1-\upsilon)$, $m=-3(1+\upsilon)/\left(2Eh^3\right)$.

Якщо функції $\Phi_3(z)$ і $\Omega_3(z)$ можна розвинути у ряд [5]

$$\Phi_3(z)=\begin{cases}A_0'+A_1'z+A_2'z^2+\ldots,z\to 0,\\ \tilde{\Gamma}+\dfrac{a_1'}{z^2}+\dfrac{a_2'}{z^3}+\ldots,z\to\infty;\end{cases}\qquad \Omega(z)=\begin{cases}\dfrac{\tilde{\Gamma}'R^2}{z^2}+b_0'+b_1'z+\ldots,z\to 0,\\ B_0'+\dfrac{B_1'}{z}+\dfrac{B_2'}{z^2}+\ldots,z\to\infty,\end{cases} \tag{8}$$

то виконуються залежності

$$B_1'=0,\ A_0'=-\bar{B}_0', \tag{9}$$

де A_j', a_j', B_j', b_j' – невідомі коефіцієнти; M_x^∞, M_y^∞ – розподілені згинальні моменти на нескінченості;

$$\tilde{\Gamma}=-\frac{3(1-\upsilon)(1+\tilde{\mu})}{8Eh^3}M_x^\infty,\ \tilde{\Gamma}'=\frac{3(1+\upsilon)(\tilde{\mu}-1)}{4Eh^3}M_x^\infty,\ \tilde{\mu}=\frac{M_y^\infty}{M_x^\infty}.$$

Крайові умови (1) і (2) подамо у вигляді

$$\left(\sigma_{yy}-i\sigma_{xy}\right)^+=\left(\sigma_{yy}-i\sigma_{xy}\right)^-\ \text{ на }\ L,$$

$$m\left(M_y+ic'+iP_r(s)\right)^+=m\left(M_y+ic'+iP_r(s)\right)^-\ \text{ на }\ L. \tag{10}$$

Якщо врахувати (4) і (7), то (10) можна переписати так:

$$\left(\tilde{\kappa}\Phi_3(t)-\Omega_3(t)\right)^+-\left(\tilde{\kappa}\Phi_3(t)-\Omega_3(t)\right)^-=0\quad (t\in L).$$

$$\left(\Phi(t)+\Omega(t)\right)^+-\left(\Phi(t)+\Omega(t)\right)^-=0\quad (t\in L). \tag{11}$$

Розв'язуючи задачі лінійного спряження (11), отримаємо

$$\Omega(z)=-\bar{A}_0-\Phi(z),\quad \Omega_3(z)=\tilde{\kappa}\Phi_3(z)-D_0'-\frac{P}{2z^2},\ D_0'=\tilde{\kappa}\tilde{\Gamma}+\bar{A}_0',P=-2\tilde{\Gamma}'R^2. \tag{12}$$

Якщо тепер врахувати (12), то з крайових умов (1), (2) та залежностей (4) і (7) матимемо

$$\Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t)=-\frac{N_r}{2h}-\bar{A}_0 \quad (t\in L),$$

$$\Phi_3^{+}(t)+\Phi_3^{-}(t)=\frac{1}{\tilde{\kappa}}\left(m\left(hN_r+ic'\right)+D_0'+\frac{P}{2t^2}\right) \quad (t\in L). \tag{13}$$

З крайової умови (3) та залежностей (4), (7), (12) одержимо таку задачу лінійного спряження:

$$F^{+}(t)+F^{-}(t)=0 \quad (t\in L), \tag{14}$$

де

$$F(z)=\Phi(z)-z\Phi'(z)-\bar{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{R^2}{z}\bar{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right)+\beta\left[\Phi_3(z)-z\Phi_3'(z)-\bar{\Phi}_3\left(\frac{R^2}{z}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{R^2}{z}\bar{\Phi}_3'\left(\frac{R^2}{z}\right)\right],\quad \beta=\frac{2h\mu\left(1+\tilde{\kappa}\right)}{1+\kappa}. \tag{15}$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (14), матимемо

$$F(z)=-\bar{A}_0+\beta\left(\Gamma-\bar{A}_0'\right). \tag{16}$$

Додавши граничні значення функції $F(z)$ на L, та врахувавши (15) і (13), отримаємо рівняння для знаходження контактного зусилля між шайбою та отвором

$$\frac{\partial N_r}{\partial\theta}=-3i\delta_1\left(\frac{t^2}{R^2}-\frac{R^2}{t^2}\right)-c\,(t\in L), \tag{17}$$

$$\operatorname{Re}A_0+\beta\operatorname{Re}A_0'=\beta\Gamma. \tag{18}$$

Тут

$$\delta_1=-\frac{\tilde{\Gamma}'\beta h}{2m\beta h^2-\tilde{\kappa}},\quad c=\frac{2\beta h}{2m\beta h^2-\tilde{\kappa}}\left(\operatorname{Im}D_0'+mc'-\tilde{\kappa}\operatorname{Im}A_0'\right).$$

Зінтегрувавши (17) по θ, одержимо

$$N_r=A-1.5\delta_1\left(\frac{R^2}{t^2}+\frac{t^2}{R^2}\right)-c\theta \quad (t\in L), \tag{19}$$

де A – невідома дійсна стала.

Внаслідок симетрії задачі з (19) випливає, що $c=0$, тому

$$\operatorname{Im}A_0'=\frac{m}{1+\tilde{\kappa}}c'. \tag{20}$$

Підставляючи (19) у (13), та розв'язавши отримані задачі лінійного спряження, матимемо

$$\Phi(z)=\begin{cases}-\dfrac{A}{2h}-\bar{A}_0+\dfrac{3\delta_1}{4hR^2}z^2 & \left(z\in S^{+}\right),\\[2mm] \dfrac{3\delta_1R^2}{4hz^2} & \left(z\in S^{-}\right);\end{cases} \tag{21}$$

$$\Phi_3(z)=\begin{cases}-\tilde{\Gamma}+\dfrac{1}{\tilde{\kappa}}\left[m\left(Ah+ic'\right)+D_0'\right]+\dfrac{3hm\delta_1}{2\tilde{\kappa}}\dfrac{z^2}{R^2} & \left(z\in S^{+}\right),\\[2mm] \tilde{\Gamma}+\left(P-3mh\delta_1R^2\right)\Big/\left(2\tilde{\kappa}z^2\right) & \left(z\in S^{-}\right).\end{cases} \tag{22}$$

Оскільки згідно з (5) і (8), на початку координат $\Phi(0)=A_0$, то на основі (21) знаходимо

$$A_0 = -\frac{A}{4h}. \tag{23}$$

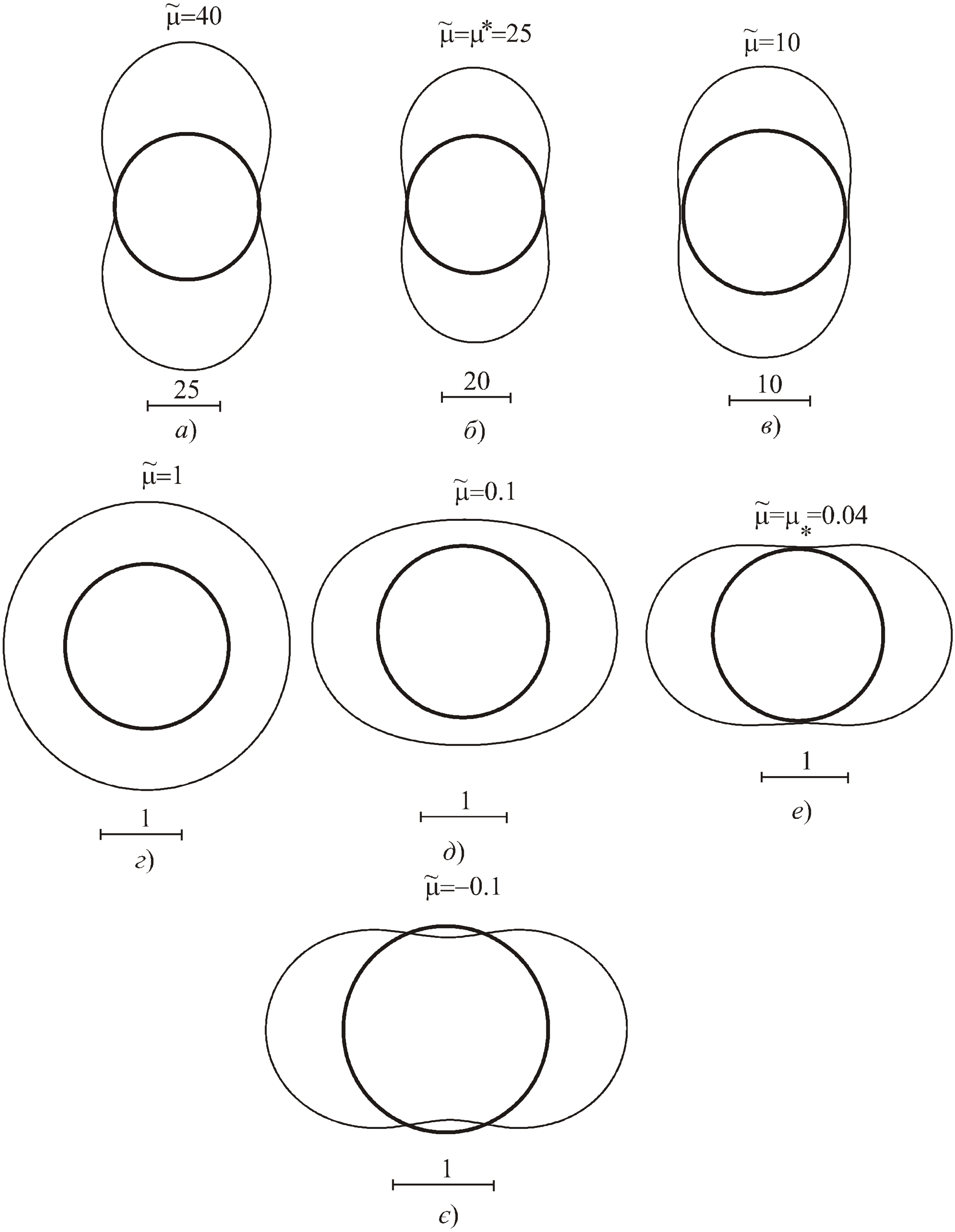

Рисунок 2 - Графічна залежність зведеного контактного зусилля $N_r^* = N_r h / M_x^\infty$ між отвором і круговою шайбою за різних значень $\tilde{\mu}$

З умови однозначності прогину при обході колового отвору

$$\mathrm{Re}\left\{\int_L \frac{1}{t}\left(\Phi_3^+(t)+\Phi_3^-(t)\right)dt\right\}=0$$

випливає, що повинна виконуватись умова

$$\mathrm{Im}\,A_0'=0\,. \tag{24}$$

Врахувавши (24), із залежності (20) отримаємо

$$c'=0\,. \tag{25}$$

Підставляючи (25) у (22), на основі (8) матимемо

$$A_0'=\frac{mhA}{\tilde{\kappa}-1}\,. \tag{26}$$

Для знаходження сталої A скористаємося залежністю (18), врахувавши при цьому вирази (26) та (23). Після деяких перетворень одержимо остаточно

$$A=-h\beta\tilde{\Gamma}\,. \tag{27}$$

Таким чином, отримано аналітичний розв'язок поставленої задачі.

Числовий аналіз та висновки. Числовий аналіз задачі здійснено для коефіцієнта Пуассона матеріалу пластини $\upsilon=0.3$ при різних значеннях $\tilde{\mu}$ (рис. 2). Помітно, що якщо $\tilde{\mu}$ задовольняє нерівність $1/25=\mu_*\le\tilde{\mu}\le\mu^*=25$, то відбуватиметься контакт берегів шайби і отвору без відставання. При $\tilde{\mu}>\mu^*$ береги шайби і отвору відставатимуть у точках $\theta=0$ і $\theta=\pi$, а при $\mu_*>\tilde{\mu}$ – у точках $\theta=\pi/2$ і $\theta=3\pi/2$. Зазначимо, що для довільного υ ці закономірності зберігаються, причому $\mu^*=\dfrac{1}{\mu_*}=\dfrac{6+5\upsilon}{\upsilon}$.

Література

1. Герасимчук П.В., Божидарнік В.В., Опанасович В. К. Односторонній згин пластини з тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2003. – С. 57-63.
2. Божидарнік В.В., Опанасович В.К., Герасимчук П.В. Двосторонній згин ізотропної пластини з наскрізною тріщиною по дузі кола з рахуванням контакту її берегів // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій Під. заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України. – 2004. – С. 213-218.
3. Божидарнік В.В., Опанасович В.К., Герасимчук П.В. Двосторонній згин пластини з несиметричною наскрізною тріщиною по дузі кола з урахуванням контакту її берегів // Проблемы прочности. – 2006, № 5 (383). – С. 135-141.
4. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. - Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1962. – 200 с.
5. Прусов И.А. Метод сопряжения в теории плит. - Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.

Одержано 04.02.2008 р.