UNIVERSITAT DE VALÈNCIA

Máster en Investigación en Didácticas Específicas

FRACCIONES EN LA RECTA NUMÉRICA: UN ACERCAMIENTO DIDÁCTICO USANDO APPLETS

Memoria de Trabajo de Fin de Máster presentado por:

Carlos Valenzuela García

Tutores

Dr. David Arnau Vera

Dr. Juan Gutiérrez Soto

Departamento de Didáctica de la Matemática

Valencia, 30 de Junio de 2016

Ficha técnica

Máster: Máster en Investigación en Didácticas Específicas por la Universitat de València

Especialidad: Matemáticas

Autor: Apellidos: Valenzuela García

Nombre: Carlos

Título de la memoria: Fracciones en la recta numérica: Un acercamiento didáctico usando applets

Tutor 1: Apellidos: Arnau Vera

Nombre: David

Departamento: Didáctica de las Matemáticas

Tutor 2: Apellidos: Gutiérrez Soto

Nombre: Juan

Departamento: Didáctica de las Matemáticas

Fecha de la defensa:

Calificación: (numérica y Matr. de Honor si procede)

Palabras clave: Enseñanza y aprendizaje, fracciones, modelo de la recta numérica, entornos tecnológicos.

Códigos Unesco: 12 (Matemáticas), 1299 (Didáctica de las Matemáticas)

Resumen

En este trabajo de investigación se planteó como objetivo general diseñar un modelo de enseñanza basado en el uso de entornos virtuales (applets) para enseñar fracciones, usando el modelo de la recta numérica, a alumnos de los últimos cursos de educación primaria y primeros de secundaria con bajo rendimiento académico. En este caso, la experimentación se llevó acabo en cuatro grupos de educación secundaria y se organizó en cuatro etapas. Los resultados muestran que los estudiantes inicialmente no tienen conocimientos sobre aspectos de las fracciones como puntos en la recta numérica. Se observó que las actuaciones de los estudiantes sí fueron modificadas favorablemente después de la implementación de la secuencia de enseñanza. Pese a las limitaciones durante el desarrollo experimental y el poco éxito para ampliar un catálogo de las actuaciones de los estudiantes, esta experimentación permite mejorar la estructura del modelo de enseñanza diseñado.

Índice

Introducción

El tema de las fracciones y los números racionales ha sido objeto de estudio de numerosas investigaciones desde hace más de cuatro décadas. Pese a los resultados obtenidos y las implicaciones que estos han tenido en la educación, se siguen reportando dificultades que los estudiantes enfrentan en tareas que requieren el uso de esos conceptos, ver por ejemplo Petit, Laird y Marsden (2010).

Por otro lado, la inclusión de herramientas tecnológicas para la enseñanza de las matemáticas se ha potenciado en las últimas décadas debido a las ventajas cognitivas que se han reportado, ver por ejemplo Drijver (2013) y Salat (2012). En este sentido, en esta investigación se tiene como objetivo diseñar un modelo de enseñanza basado en el uso de herramientas tecnológicas (applets), con el propósito de mejorar los objetos mentales (en el sentido de Freudenthal, 1983) que tienen los estudiantes de los últimos años de educación primaria y primeros años de educación secundaria.

Como marco de referencia teórico y metodológico para el desarrollo de esta investigación se utilizan los Modelos Teóricos Locales (MTLs) desarrollado por Filloy (ver Filloy, Rojano, Puig y Rubio, 1999). En el capítulo dos de este documento se muestran los resultados de la construcción de los componentes de competencia formal, enseñanza, cognición y comunicación, considerados en el MTL sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones que en esta investigación se construye. La construcción de estos componentes se considera como la primera etapa de la investigación.

En el capítulo tres se describe el diseño de la secuencia de enseñanza, la cual está formada por siete etapas y cada una tiene un applet construido con GeoGebra. En este mismo capítulo se describe el diseño de un pretest y postest, los cuales permiten caracterizar el conocimiento previo que tienen los alumnos y contrastar su desempeño antes y después de la interacción con el applet diseñado. Estos resultados forman parte de la fase tres de la investigación.

En la fase cuatro se lleva a cabo la experimentación. La secuencia de enseñanza se ha puesto a prueba en cinco sesiones con cuatro grupos naturales de un instituto de educación secundaria de la Comunidad Valencia. La población y el método de implementación se detallan en el capítulo cuatro.

Los resultados obtenidos en la fase de experimentación se clasifican como la fase cinco de la investigación, y se muestran en el capítulo cinco. Dichos resultados se reportan en tres apartados: primero se hace el análisis de las actuaciones de los estudiantes que completaron el pretest; posteriormente se hace una caracterización de las respuestas generadas durante la interacción estudiante/applet; finalmente se hace una comparación entre los resultados del pretest y postest de los estudiantes que completaron la fase experimental, a fin de identificar el efecto que pudo tener la secuencia de enseñanza en los objetos mentales de estos estudiantes.

Finalmente, a partir de los resultados obtenidos se busca dar respuesta a las preguntas de investigación planteada en el capítulo uno. Así mismo, se hace referencia al trabajo futuro que se podría continuar a partir de los resultados obtenidos en esta investigación.

1. Planteamiento del problema y objetivos de investigación

La problemática que se refiere a la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y los números racionales ha sido estudiada desde diferentes enfoques por muchos investigadores en las últimas cuatro décadas. Entre las contribuciones que datan de esa época se encuentran las de Kieren (1976; 1988; 1992), Usiskin (1979), Freudenthal (1983), Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Figueras (1988) y Streefland (1991). Otras más recientes son las de Contreras (2010), Steffe y Olive (2010), Brousseau (2014), Real y Figueras (2015) y las que se han desarrollado más recientemente como parte del Proyecto de los Números Racionales (*Rational Number Project*) en Estados Unidos[1].

Los resultados de las investigaciones referenciadas y los de otros investigadores han permitido identificar: (1) modelos para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones; (2) la estructura y relación que tienen las fracciones con otros objetos matemáticos; (3) así como algunas tendencias cognitivas que los alumnos tienen respecto al mencionado concepto. Esto ha favorecido la reestructuración de la enseñanza de ese contenido en la educación obligatoria en muchos países. Sin embargo, en las investigaciones recientes las fracciones se siguen considerando como uno de los conceptos más complejos para tratar en clase, cuyo aprendizaje enfrenta grandes dificultades para la mayoría de los estudiantes (ver por ejemplo Petit, Laird y Marsden, 2010).

Las pruebas nacionales e internacionales que evalúan el rendimiento de los estudiantes en cuanto a matemáticas ponen de manifiesto la afirmación anterior. Por ejemplo, en los resultados de la prueba Excale 2009[2] que aplica el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación en México a los alumnos de sexto grado de primaria, se encontró que a nivel nacional el porcentaje de aciertos correctos correspondientes a la mayoría de los contenidos evaluados sobre las fracciones están por debajo del 50%, mientras que la mayoría de los contenidos evaluados referentes a los números naturales están por encima del 50% (INEE, 2009).

Estos resultados analizados desde distintas perspectivas dejan ver que persiste el problema sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones desde edades tempranas.

[1] Para consultar un mayor número de investigaciones desarrolladas por este grupo de investigadores, visitar la página web: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/

[2] Para consultar con más detalle los resultados, de la prueba Excale 2011 visitar http://www.inee.edu.mx/explorador

Además, un gran número de las investigaciones sobre el tema destacan la importancia del estudio del conocimiento que tienen los alumnos sobre las fracciones desde la educación básica como una plataforma necesaria de organizar la investigación y la innovación educativa. Como consecuencia, se mantiene la necesidad de favorecer una constitución de mejores objetos mentales de las fracciones desde la educación primaria.

Desde un punto de visto más teórico y siguiendo ideas de Freudenthal (1983), las fracciones son el recurso fenomenológico de los números racionales. No sólo son distintas maneras de representar al mismo racional, sino que son expresiones que "viven mucho más sus propias vidas" (pp. 133). Por ejemplo, al comparar dos animales resulta la expresión "El cordero es la mitad de grande que la vaca", aquí se hace alusión a la fracción 1/2, y usar la fracción 5/10 no tendría sentido en la situación descrita a pesar de que ambos representan al mismo número racional. Esto es así porque la expresión "el cordero es cinco décimas partes de alto que la vaca" no resulta de la comparación directa entre ambos animales, donde incluso la medida de comparación es la altura de la vaca. Empero, es importante mencionar que en algún momento la didáctica de las fracciones debe tomar en cuenta la relación que esas fracciones tienen, y así dar paso a la equivalencia de las fracciones y posteriormente a la construcción de los números racionales.

En la red ideal para la construcción del conocimiento personal de los números racionales que elabora Kieren (1988), se observa que el conocimiento ideal de dichos números es creciente. El autor hace hincapié en la idea de que en los primeros niveles de la red se ubican los mecanismos constructivos relacionados con las fracciones, a saber, la partición, la equivalencia en un sentido cuantitativo y la formación de unidades divisibles, como bases para la construcción del conocimiento ideal de los números racionales como un campo de cocientes.

Como consecuencia de los puntos de vista de los autores antes citados y otros, se puede afirmar que las fracciones son la forma de introducir a los números racionales, por lo que es importante su estudio. Además es importante que las fracciones y los números racionales sean enseñados porque el conocimiento de éstos "son una parte rica de las matemáticas que da ideas a las personas más allá de los números enteros, y es un vehículo para relacionar esos conocimientos de números con muchos aspectos de las matemáticas y sus aplicaciones" (Kieren, 1992, p. 327).

Asociado a lo anterior, el conocimiento de las fracciones se ha caracterizado como uno de los predictores del desempeño en matemáticas de alumnos egresados de primaria hasta el bachillerato (Siegler *et al*. 2012).

En las investigaciones desarrolladas se ha reconocido otro tema importante, éste se refiere a la pluralidad de significados, usos o subconstructos que se le han asignado a las fracciones y a los números racionales, siendo esto uno de los factores por los que la enseñanza de este concepto tiene severas implicaciones. Autores como Behr, Harel, Post, y Lesh (1992) afirmaron que, entre otras cosas, la falta de un consenso de los conceptos de número racional y fracciones es uno de los motivos por los que el aprendizaje de los números racionales es un serio obstáculo en el desarrollo matemático de los niños, ya que desde un punto de vista matemático se es capaz de formular definiciones claras y precisas de esos conceptos, pero cuando éstos se incluyen en problemas de la vida real desde un punto de vista didáctico, aparecen varios significados de ellos.

Los subconstructos de los números racionales que Kieren (1976; 1988) ha distinguido son: medida, cociente, razón y operador, y Behr, Lesh, Post y Silver (1983) consideran además la relación parte-todo como la base para entender dichos subconstructos. Mientras que, Freudenthal (1983) distingue aspectos principales de las fracciones, tales como: las fracciones como fracturador, las fracciones como comparador, la fracción como medidora, el operador fracción y la fracción como número racional. La distinción que hace este último autor se hace partiendo desde expresiones que se usan en el lenguaje cotidiano hasta su formalización, es decir, las fracciones como elementos de clases de equivalencia.

Persiste la idea de que la enseñanza de las fracciones se sigue enfocando en el modelo de la “división del pastel” o modelo de áreas, tal como lo sostenía Freudenthal (1983) y como más recientemente lo señalan Siegler, Fazio, Bailey y Zhou (2013). Pese a que dicho modelo tiene sus propias características y potencialidades, también puede incluir ciertas limitaciones que impidan la creación de objetos mentales suficientemente ricos. El hecho de que se crea que los alumnos aprenden con este único enfoque podría tener como consecuencia que en niveles educativos más avanzados se introduzca inmediatamente al estudiante al trabajo abstracto con cantidades y valores de magnitudes, poniendo el énfasis en el aprendizaje de algoritmos para operar con estas cantidades, pero sin tener en cuenta las debilidades conceptuales sobre las fracciones que se podrían haber desarrollado a través del uso de otros modelos que potencializan el aprendizaje de éstas.

Otro aspecto a tener en cuenta que se enmarca en la problemática sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones se refiere a los efectos que las investigaciones desarrolladas han tenido en las reformas educativas, ya que se han incorporado en el currículo diversos métodos y modelos de enseñanza que incluyen diferentes usos y significados de las fracciones. En esta misma dirección, otro de los cambios curriculares en las últimas décadas se refiere a la inclusión de herramientas tecnológicas como recurso para enseñar matemáticas, debido a que hay evidencias de que éstas son un recurso cognitivo para el aprendizaje (ver por ejemplo Kieran y Yerushalmy, 2004; Santos-Trigo, 2004).

Existen en la red una cantidad considerable de applets con aspectos diversos en su diseño, dirigidos a apoyar la constitución de mejores objetos mentales de los estudiantes que cursan la educación primaria y secundaria. Sin embargo, hay registro escaso sobre la implementación y efectos que éstos han tenido en la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. De hecho los applets suelen diseñarse como elementos de interacción estudiante-computadora de los que el profesor (o investigador) no suele recibir retroalimentación de las actuaciones de los estudiantes.

En suma, los aspectos descritos ponen de manifiesto la necesidad de continuar investigando sobre la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, ya que pese a la gran cantidad de investigaciones desarrolladas, los alumnos aún enfrentan dificultades para usar las fracciones, y más aún, siguen sin respuesta numerosas preguntas de investigación sobre cómo mejorar los objetos mentales que tienen los alumnos sobre dicho concepto, ya sea usando las nuevas tecnologías o no. En este estudio se busca responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Qué objetos mentales sobre la idea de fracción poseen estudiantes de primeros cursos de secundaria con serias dificultades en el aprendizaje de las matemáticas?
2. ¿Cómo modifica a los objetos mentales de los estudiantes una enseñanza apoyada sobre el modelo de la recta numérica en un entorno informático dinámico (applets)?

Para responder a las preguntas formuladas se llevan a cabo las siguientes fases, mismas que se detallan en los capítulos siguientes.

1. Construcción de un MTL sobre las fracciones y su enseñanza.

2. Diseño de una secuencia de enseñanza basada en applets, los cuales son construidos bajo ciertos lineamentos. En esta mima fase se diseñan un pretest y postest.

3. Experimentación de la secuencia de enseñanza y la aplicación del pretest y postest.

4. Análisis y caracterización de las actuaciones de los estudiantes.

2. Marco teórico metodológico

La investigación que en este documento se presenta se estructura mediante la construcción de un MTL. De acuerdo con Filloy *et al*. (1999) y las interpretaciones que hacen Fernández y Puig (2002), la construcción de un MTL en una investigación permite una estructuración teórica y metodológica.

Desde el punto de vista teórico, los MTLs sirven para caracterizar el tipo de investigación, su alcance y su fundamento (Fernández y Puig, 2002). Con éstos se puede enfocar el objeto de estudio a través de cuatro componentes interrelacionados:

1. Componente de competencia formal
2. Componente de enseñanza
3. Componente de cognición o procesos cognitivos
4. Componente de comunicación.

La fenomenología didáctica de las fracciones desarrollada por Freudenthal (1983) se toma como referente teórico para elaborar el componente de competencia formal (ver apartado 2.1). Este componente constituye el marco teórico de referencia para caracterizar los modelos de enseñanza existentes y los que se diseñen, ya que permite tener un panorama amplio sobre los usos y aspectos de las fracciones.

Para el desarrollo del componente de enseñanza, el cual se detalla en el apartado 2.2, se hace la revisión de los planes y programas de estudio del nivel básico, con especial énfasis en los contenidos referentes a las fracciones que aparece en el plan de trabajo de sexto grado de primaria y primeros años de educación secundaria; también se realiza un análisis de algunos applets para la enseñanza de las fracciones que se encuentran en internet. Los resultados de esos análisis y el fundamento teórico del componente formal permiten elaborar un modelo de enseñanza basado en el uso de applet.

En el componente de cognición se describen algunos errores y dificultades que enfrentan los estudiantes cuando usan las fracciones, específicamente cuando se usa el modelo de la recta numérica. Así mismo, se describen las ventajas y limitaciones que podría tener el uso de este modelo en el aprendizaje de los estudiantes (ver apartado 2.3).

El componente de comunicación, el cual se describe de manera general en el apartado 2.4, está relacionado con el intercambio de información que se da durante la interacción estudiante/applet. Por un lado se toma en cuenta la información que los diseñadores de los applets pretenden comunicar a los estudiantes, y por otro lado se consideran las actuaciones registradas de los estuantes durante la interacción con dicho recurso.

Hasta ahora se ha descrito el rol que juegan los MTLs como marco teórico. Sin embargo, desde un punto de vista metodológico, por medio de éstos también se puede organizar la investigación. En la Figura 2.1 se muestra la estructura y las distintas fases de la investigación que aquí se reporta, dicha estructura toma como referencia los esquemas que se diseñan en los trabajos de Filloy *et al*. (1999) y Fernández (2009).

En el esquema se distinguen principalmente cuatro fases. Considerando en la medida de lo posible la notación que usa Filloy *et al*. (1999), se ha denotado a la primera fase como la observación experimental, en la cual se identifica la problemática, se construyen los componentes del MTL y se plantean proposiciones de hipótesis que posteriormente serán contrastadas con las observaciones resultantes de la fase experimental.

La segunda fase se refiere al diseño de la experimentación, aquí se construye una secuencia de enseñanza para las fracciones basada en el uso de applets construidos con GeoGebra; así como el diseño de dos cuestionarios, un pretest y un postest, que evalúan diferentes aspectos de las fracciones.

En la tercera fase se desarrolla la experimentación de la secuencia de enseñanza llevada a cabo con los alumnos de cuatro grupos naturales de un instituto de educación secundaria ubicados en la ciudad de Valencia. Por último se describen los resultados de dicha experimentación, de manera que éstos permitan dar respuesta a los objetivos de la investigación; modificar y mejorar las herramientas diseñadas para el trabajo futuro con otros estudiantes; y el diseño de un nuevo MTL que incluya las conclusiones del trabajo.

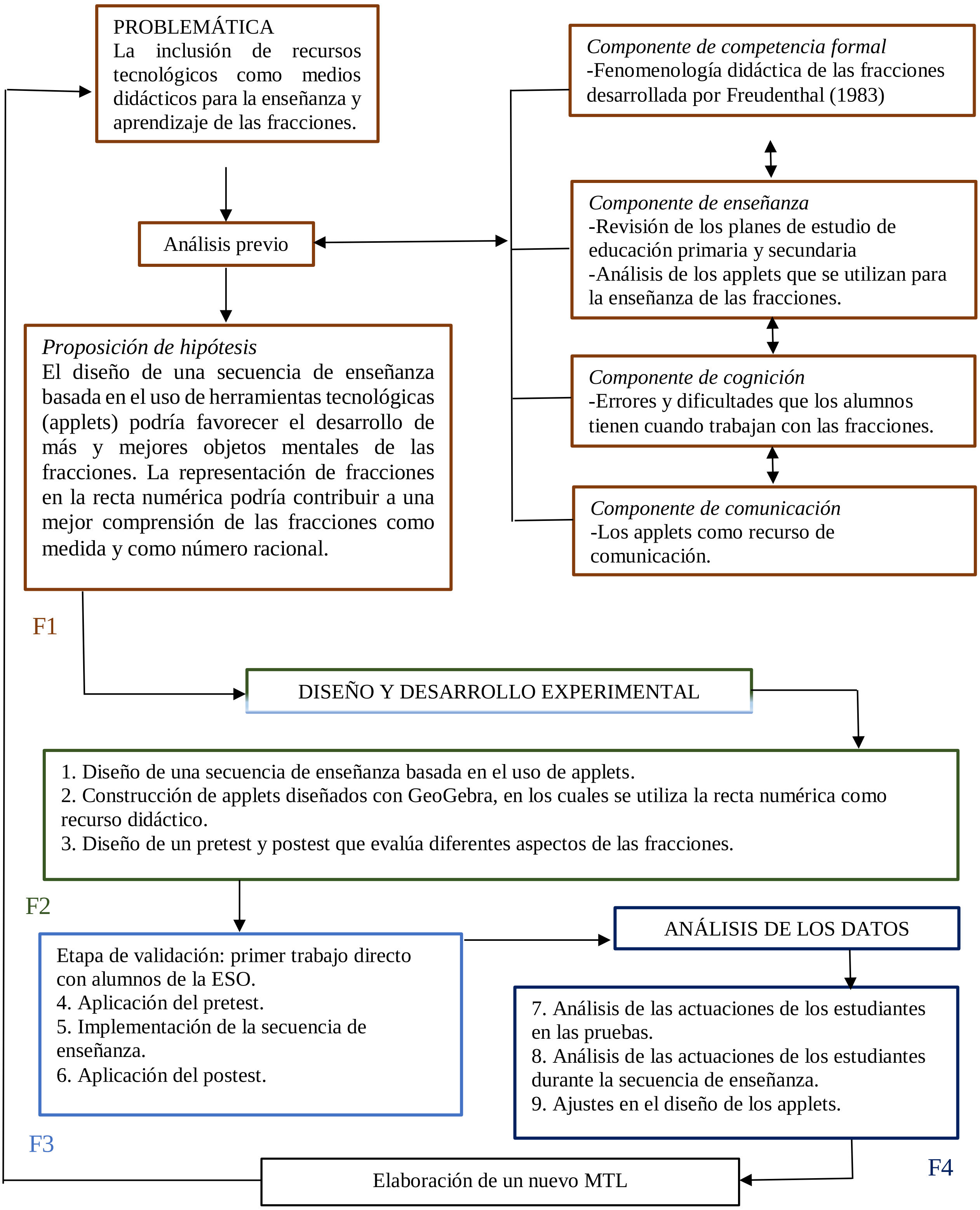


Figura 2.1. Esquema del MTL sobre la enseñanza y aprendizaje de las fracciones

Un aspecto importante en el proceso de elaboración de MTLs se refiere a su recurrencia, ya que los fenómenos observados en el análisis del desarrollo experimental de un primer MTL, pueden ser vistos ahora como fenómenos de una primera fase de un nuevo MTL.

2.1. Componente formal del MTL

Como ya se ha mencionado, el prototipo de fenomenología didáctica de las fracciones desarrollada por Freudenthal (1983) sirve como base para la elaboración de este componente. El cual constituye el marco teórico de referencia para caracterizar los modelos de enseñanza existentes y los que se diseñen. En términos generales se define la fenomenología de un concepto matemático, una estructura matemática o una idea matemática como:

> La descripción de un *noumenon* en su relación con los *phainomena* para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los *phainomena* para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos. (Freudenthal, 1983, pp. 27)

Desprendiéndose un poco de esos términos, se entiende que al hacer una fenomenología didáctica se pretende describir aquellos fenómenos que son organizados por medio de unos determinados conceptos, estructuras o ideas matemáticas. Tales fenómenos se pueden encontrar ya sea dentro o fuera del ámbito matemático y además, como menciona Puig (1997), están presentes en el mundo de los alumnos y se proponen en la enseñanza. La relación "fenómenos - medios de organización" marca el uso que posteriormente se empleará cuando el análisis fenomenológico se lleve a la enseñanza: se plantearán los fenómenos que deben ser organizados con la intención de que los estudiantes vayan elaborando objetos mentales lo más rico posible de estos medios de organización.

Siguiendo esa idea, en la fenomenología didáctica de las fracciones que desarrolla Freudenthal se parte desde los usos de las fracciones en el lenguaje vernáculo, hasta la descripción de la teoría matemática de los números racionales. Sin embargo, el análisis fenomenológico que aquí se presenta no se extiende hasta la teoría matemática de los números racionales, sino que se limita a detallar los aspectos de las fracciones que se emplean tanto en el lenguaje común, como en el ámbito de las matemáticas que se estudian en el nivel básico. Es decir, se distinguen aspectos principales de las fracciones, tales como: las fracciones como fracturador, las fracciones como comparador, la fracción como medidora y solo una parte de la fracción como número racional.

2.1.1. El uso de las fracciones en el lenguaje cotidiano

Freudenthal distingue algunas expresiones que se emplean de manera natural en la vida cotidiana, en las cuales aparecen las fracciones como parte del lenguaje vernáculo, escritas de esa misma manera o de forma simbólica. Algunas de las frases que el autor exhibe, y que además son tomadas de la traducción al castellano que realizó Puig (1994), son: *la mitad de*… o *un tercio de*… que se combinan con palabras como, camino, pastel, canicas, largo, pesado, etc. También propone otras expresiones menos usuales como *dos y un tercio veces de*…. En ambos tipos de expresiones se pueden formar múltiplos, por ejemplo *dos tercios de…*, *dos y tres tercios de….*

Otras proposiciones más elaboradas de las fracciones que aparecen en el lenguaje son: *rodar 1½ veces una rueda*, *girar 3 y 1/3 veces la llave en la cerradura*, *5¼ veces de largo que*…. En este caso se están describiendo o comparando procesos cíclicos o periódicos, mientras que por medio de las expresiones: *35 millas por galón*, *3 de 5 partes*, *cada tercer lote gana*, *dos tazas de harina por una taza de leche*, se están describiendo razones.

Las expresiones enunciadas se usan principalmente para describir o comparar, ya sea cantidades o valores de magnitud, y en casos más elaborados procesos cíclicos o periódicos y razones. Esto idea se sintetiza en la Figura 2.2.

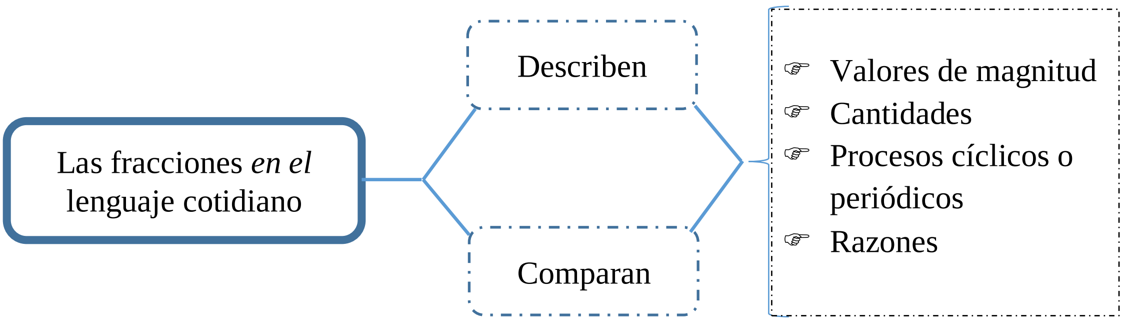


Figura 2.2. Las fracciones en el lenguaje cotidiano

Cabe mencionar que aunque el autor no lo explica, se entiende que las expresiones que se usan en el lenguaje vernáculo se pueden usar de manera consciente o inconsciente e incluso que su uso implica comprender la relación entre algunas fracciones, pero no ser capaz de generalizarlo a otras.

2.1.2. Las fracciones como fracturador

Este aspecto de la fracción se refiere al proceso de producir fracciones (fracturar), por medio del cual se relacionan las partes con un todo. Existen distintos métodos para causar fracciones, desde métodos primitivos como la estimación de las partes a ojo, por dobleces, hasta métodos más sofisticados como distribución de volumen o área por medio de simetría o congruencia. El proceso de causar fracciones podría surgir a partir del reparto equitativo, la distribución y de dividir cantidades o magnitudes con o sin resto. Fracturar puede ser irreversible, reversible o simbólico. En adelante, al proceso de causar fracciones se denota con la palabra "partir", por su relación con la palabra "partes". Solo en casos específicos se hará explicito si se refiere a un reparto, a una distribución o una división.

En la relación del todo y las partes, el todo puede ser discreto o continuo, definido o indefinido, estructurado o carente de estructura. En este proceso de fractura la atención puede ser hacia una parte, un cierto número de partes o incluso a todas las partes. Las partes pueden estás conectadas o desconectadas, y el modo de partir puede ser estructurado o no estructurado. Este aspecto de la fracción se sintetiza en la Figura 2.3.

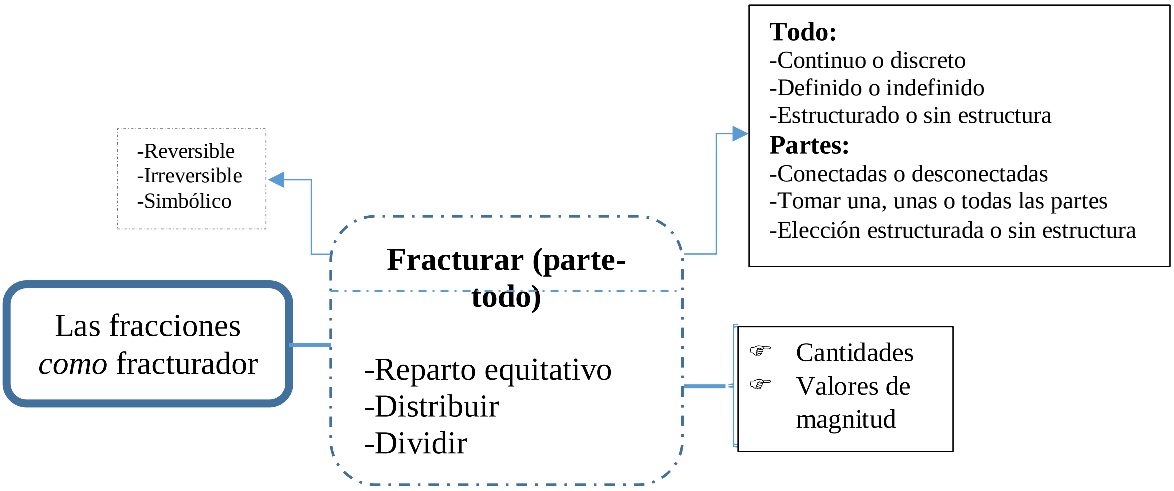


Figura 2.3. Las fracciones como fracturador

Freudenthal hace notar la diferencia entre algo que está siendo partido y algo que ya está partido. En este sentido se entiende que si se presenta un todo continuo ya partido y con piezas desconectadas, se puede observar entonces una transición de un todo continuo a uno discreto. Por ejemplo, si se tiene una barra de pan -un todo continuo- y al causar las fracciones las piezas se separan, entonces habrá una transición del todo continuo (la barra de pan) a un todo discreto (la cantidad de rebanadas de pan). Por otro lado existen también transiciones entre el todo discreto y continuo, en ocasiones hay objetos que pueden ser tan pequeños que hacen que el todo parezca continuo, como es el caso de los granos de arena fina, de alpiste, los granos de arroz y de azúcar.

2.1.3. Las fracciones como comparador

Las fracciones sirven también para comparar cantidades, magnitudes u objetos que se separan unos de otros, ya sea por experimentación o de forma imaginaria. Dicha comparación se puede hacer de manera directa o indirecta. Además, estas comparaciones se pueden hacer entre los objetos respecto al número o valor de la magnitud, como por ejemplo, la silla es la mitad de alta que la mesa, o entre los propios números o valores de magnitud, como por ejemplo, la altura de la silla es la mitad de la altura de la mesa.

En la medida en que el énfasis mental o experimental esté en algo dinámico o estático, la fracción aparece en un *operador* o en una *relación*: “partiendo por la mitad” –dinámico–, “la mitad de grande” –estático–. Esto se relaciona con la aclaración que se hizo en el proceso de fracturar y se detalla a continuación.

Tanto el *operador fracción,* como la *relación fracción* pueden actuar respectivamente sobre objetos y relacionar entre sí objetos, cantidades y valores de magnitudes. Si los objetos que se comparan son el todo y sus partes (la fracción como fracturador), o al menos así se considera, entonces la fracción aparece en el *operador fracturante* (dinámico) o *relación de fractura* (estático). El operador fracturante actúa sobre objetos concretos rompiéndolos en partes equivalentes, por ejemplo, “partiendo en cuatro partes iguales un todo” y la fracción surge al establecer la relación de las partes con el todo. La relación de fractura relaciona las partes con el todo que ya fue dividido, por ejemplo, “tengo un cuarto de pan, cuyo pan ya estaba dividido en cuatro partes iguales”.

Si los objetos que se comparan están separados y un tercer objeto, digamos una vara de medir, un metro, o una magnitud media entre los dos objetos siendo transferida de uno a otro, o considerado como si se transfiriera, entonces se habla de la *fracción como relación de razón*.

Para tratar de esclarecer lo anterior se plantean dos ejemplos: (1) para comparar la longitud de dos cables, se puede utilizar un tercer objeto, el metro, tal que un cable mide 10 metros y otro 2, entonces se puede decir que la longitud del cable más pequeño es un quinto de la longitud del más grande, ya que la relación 2 es a 10 es la misma que 1 es a 5, o sea que las fracciones 1/5 y 2/10 representan la relación razón entre la longitud de los cables. (2) para comparar las alturas de dos árboles se utiliza una vara de medir, un árbol mide 3 varas, y el otro mide 5 varas, entonces la altura del árbol más pequeño es

3/5 de la altura del árbol grande, por lo que la fracción 3/5 representa la relación razón entre las alturas de los árboles.

Cuando se comparan cantidades y valores de magnitud y se establece una razón entre ellas, la cual se utiliza posteriormente para transformar un número, una longitud, o un peso en otro, entonces la fracción aparece en el *operador razón*. Por ejemplo, de la relación razón 1/5 establecida entre las longitudes de los cables de uno de los ejemplos anteriores, la fracción 1/5 aparece en el operador razón que transforma 30 m en 6 m, o 15 m en 3 m, colocando a esas magnitudes en una razón.

De la relación razón establecida entre objetos se puede pasar al operador razón, mediante un estadio intermedio de la *fracción en el transformador*, como por ejemplo, prolongando 2 ½ veces una magnitud o cantidad. Esta operación se realiza sobre el objeto mismo, aunque no por ruptura como en el caso de operador fracturante, sino como aplicación y deformación. En el ejemplo de relación razón sobre la longitud de los cables se puede observar este estadio intermedio, ya que una vez establecida la relación razón, se puede pasar a operador razón, transformando 1/5 de 10 metros en 2 metros. Para sintetizar lo descrito en este apartado se muestra la siguiente figura.

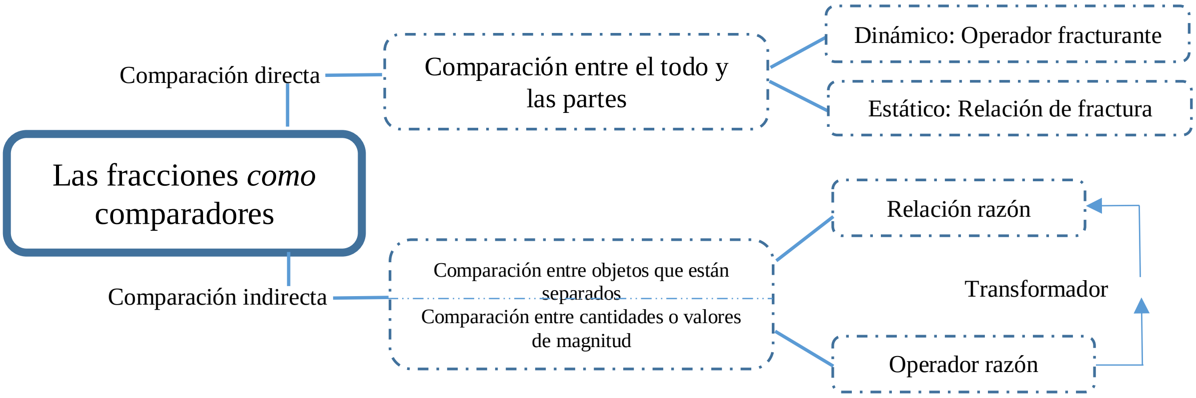


Figura 2.4. Las fracciones como comparadores

Se observa que el proceso de comparación directa entre el todo y las partes recae en el aspecto de la fracción como fracturador que se ha descrito en el apartado anterior, por lo que se conservan las características descritas, pero ahora se hace la distinción de cuando el proceso es dinámico (operador fracturante) o estático (relación de fractura).

En este mismo proceso, cuando se hace la comparación entre cantidades o valores de magnitud, tal que subyace la fracción en un operador razón, éstas se refieren comúnmente a una magnitud asociada a un objeto, ya que si se refiere a un dominio puro de los números, entonces aparece el *operador fracción* formalmente definido en el campo de los números, el cual se explica en el siguiente apartado.

2.1.4. La fracción como medidora, el operador fracción y la fracción como número racional

Sobre los aspectos que se resumen en este apartado, Freudenthal considera que se alejan paso a paso de la esfera concreta que rodea a las fracciones y se acercan cada vez más al mundo de los números, de manera que los considera aspectos formalmente definidos en el campo de los números.

La *fracción como medidora* aparece precediendo una magnitud, la cual puede ser una unidad de medida convencional (metros, kilogramos, litros, segundos, etc.) o no convencional (barra de chocolate, docena de huevos, botella, pasos, cuartas, entre otras), también puede no preceder una unidad, como es el caso de 1/2, 1/6, 1¼,… que miden segmentos sobre la recta numérica. Es importante mencionar que para identificar las fracciones que preceden dichas magnitudes, quizá en el proceso fue necesario usar las fracciones en su aspecto de operador razón u operador fracturante.

Se puede distinguir otro aspecto de la fracción, el *operador fracción*, considerado como el inverso del operador multiplicación, es decir, el operador fracción actúa en el puro dominio del número, donde satisface la necesidad de inversos de los multiplicadores. La fracción que actúa como *operador fracción* pudo haber surgido al aplicar cualquier aspecto de operador de la fracción (operador razón o fracturarante) a una unidad.

Por último, en la fenomenología didáctica que desarrolla Freudenthal se presenta también la teoría matemática del número racional, en donde se identifica a las fracciones como elementos de clases de equivalencias del campo de cocientes que define al conjunto de los números racionales. Por lo que esta fenomenología se puede extender hacia este ámbito más abstracto y formal de la matemática.

2.2. Componente de enseñanza

Para construir este componente se hace una revisión del currículo establecido en el Decreto 126/2014 de la Comunidad Valenciana (Conselleria d'Educació, Cultura i Esport, 2014). De éste se reportan los contenidos referentes a las fracciones que se proponen en el plan de estudios del último grado de la educación primaria. También se toma como referente la revisión que realizó Real (2013) sobre el currículo de la Escuela

Secundaria Obligatoria (ESO) en la Comunidad Valenciana, en donde se reportan los contenidos referentes a las fracciones que se proponen para la enseñanza en ese nivel educativo.

Dicha revisión permite identificar los aspectos de las fracciones que subyacen en dichos contenidos, así como determinar el contenido que se instruye en la secuencia de enseñanza que se experimenta en esta investigación.

Como parte de este componente también se realiza un análisis de applets para la enseñanza de las fracciones que son de uso libre y que se encuentran en internet. Esto se hace con doble intencionalidad: (1) identificar los aspectos y contenidos de las fracciones que se consideran para el diseño de dichas herramientas, e (2) identificar los applets que pudieran favorecer la constitución de mejores objetos mentales de los alumnos sobre las fracciones. De esta manera se definen lineamientos para el diseño de los applets que se construyen como parte de la secuencia.

2.2.1 Revisión de los planes de estudio

La organización de la enseñanza en la escuela primaria en la Comunidad Valenciana contempla el curso de Matemáticas como una de las asignaturas troncales, y por ello se enseña durante los 6 años que comprende este nivel. Los contenidos de dicha asignatura se agrupa en cinco bloques: (1) procesos, métodos y actitudes en matemáticas, (2) número, (3) medida, (4) geometría y (5) estadística y probabilidad. Cabe recordar que en esta investigación solo se revisan los contenidos que se proponen en el plan de estudios del último grado. Dicha revisión se reporta en la tabla 2.1, posteriormente se comentan los aspectos de las fracciones que pudieran aparecer durante el estudio de estos contenidos.

Contenido	Bloque
1. Fracciones propias e impropias. Representación gráfica. 2. Representación de números naturales, enteros, decimales y fracciones en la recta numérica. 3. Comparación y ordenación de números naturales, enteros, decimales y fracciones. 4. Relación decimal, fracción y porcentaje. 5. Fracciones equivalentes, reducción de dos fracciones a común denominador utilizando las tablas de multiplicar (no pasar de 100) para compararlas. 6. Suma y resta de fracciones. 7. Cálculo del producto de una fracción por un número. 8. Correspondencia entre fracciones, decimales porcentajes. 9. Cálculo de tantos por ciento sencillos en situaciones reales. 10. Aumentos y disminuciones porcentuales. 11. Proporcionalidad directa.	Número

12. Reconocimiento en los objetos y espacios las proporciones entre el dibujo y la realidad y su representación gráfica utilizando escalas.	Geometría

Tabla 2.1. Contenidos de la fracción propuestos en plan de estudios de 6° de primaria

En el proceso para hacer la representación gráfica del tipo de fracciones que se proponen en los puntos 1 y 2 subyace la fracción como fracturador. En el caso de que la partición esté establecida, la fracción aparece como una relación de fractura entre el todo y las partes (fragmento de recta, figuras geométricas u objetos, según el modelo que se elija); en el caso de que el alumno sea quien realiza el proceso de partición, entonces la fracción aparece como un operador fracturante.

En el contenido propuesto en el punto 2, se centra la atención sobre el aspecto de la fracción como número en la recta numérica. Pero debido a que la representación de la fracción m/n como punto en la recta también se puede determinar midiendo m veces la fracción unitaria $1/n$ (como medida), entonces la fracción actúa como medidora.

Una parte del contenido que se lista en el punto 3 se enfoca en el orden de las fracciones como número, por lo que se deben comparar cantidades. Para hacer dicha comparación se puede utilizar la recta numérica como recurso. Éste y el contenido del punto 5 introducen al estudio de los números racionales, ya que aparece la idea de equivalencia, orden y densidad.

En los puntos 4, 8, 9 y 10, la fracción aparece como número para comparar y operar. Pero, en el proceso para establecer la relación fracción-decimal-porcentaje, la fracción se utiliza como fracturador y surge además el operador fracción.

En los contenidos que se enuncian en los puntos 6 y 7, la fracción se usa como número para operar con cantidades. Principalmente para sumar y restar fracciones, aunque no se especifica la forma que tienen dichas fracciones; también se usan como número para multiplicar por un número natural, cuyo resultado se expresa en fracción. En el punto 11, la fracción aparece como número para operar, pero también se establece una relación de razón entre magnitudes o cantidades.

Referente al punto 12, el cual se ubica en el bloque de geometría. Aparece la fracción como relación razón, que establece la relación entre magnitudes o cantidades; una vez establecida esa relación, la fracción actúa como como un operador razón que transforma una cantidad en otra. Por ejemplo, supóngase que un mapa de 20×30 cm se tiene que reducir a un tamaño de 4×6 cm, entonces se debe establecer la relación razón entre 4/20 y 6/30 que es la misma que 1/5. Así una vez establecida esta razón, la fracción 1/5 sirve como operador razón que transforma el 20 en 4 al multiplicar $1/5 \times 20$ y de la misma manera al multiplicar $1/5 \times 30$ transforma ese valor en 6**.**

Cabe señalar que para una caracterización más detallada sobre los aspectos de las fracciones que subyacen en dichos contenidos, sería conveniente hacer un análisis de las actividades que se proponen en los libros de texto, tal como lo desarrolló Real (2013). Sin embargo, para el desarrollo de esta investigación basta una caracterización general del plan de estudios revisado.

Los contenidos sobre fracciones y números racionales que se proponen en el currículo de la ESO en la Comunidad Valenciana, se toman de la revisión hecha por Real (2013) y se describen a continuación.

-Para el primer curso, los contenidos propuestos son: (1) números fraccionarios y decimales; (2) relaciones entre fracciones y decimales; (3) comparación y orden en los números fraccionarios y decimales; (4) operaciones elementales; (5) aproximaciones y redondeo.

-Para el segundo curso se propone el siguiente contenido: (1) fracciones equivalentes; (2) simplificación de fracciones; (3) obtención de fracciones irreducibles equivalentes a otras dadas; (4) reducción a común denominador; (5) Porcentajes; (6) relaciones entre fracciones, decimales y porcentajes; (7) uso de estas relaciones para elaborar estrategias de cálculo práctico con porcentajes.

-Para el tercer curso se propone: (1) números racionales; (2) comparación, ordenación y representación sobre la recta; (3) decimales y fracciones; (4) transformación de fracciones en decimales y viceversa; (5) decimales exactos y periódicos; (6) fracción generatriz; (7) operaciones con fracciones y decimales.

Como se puede observar, los contenidos que en este nivel educativo se proponen están más asociados a las características propias de los números racionales. Sin embargo, las propiedades de orden, densidad y equivalencia se ven reflejados en los contenidos que se proponen desde el último curso de primaria hasta estos niveles educativos. En este sentido la secuencia de enseñanza que se diseña, tiene como propósito instruir a los estudiantes aspectos que se relacionan con estos contenidos.

2.2.2 Análisis de applets situados en la web

Como parte del análisis se hizo una búsqueda no exhaustiva de applets que son de uso libre en la red. La selección de applets para un análisis más detallado se fundamenta en el esquema que adapta Drijvers (2013, p. 3) sobre las tres funciones principales de la tecnología en la didáctica, que son: (a) las herramientas tecnológicas sirven para hacer matemáticas, esto se refiere a la externalización de trabajo, que también podría ser hecho con papel y lápiz, (b) para la práctica de habilidades, y (c) para fomentar el desarrollo de la comprensión conceptual (ver Figura 2.5). En concreto, se seleccionaron applets que se podían clasificar en el apartado (c) y que formaran parte de una colección de applets estructurada a la manera de una secuencia didáctica.

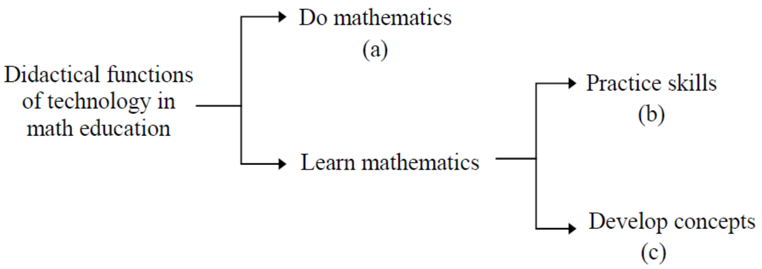


Figura 2.5. Función didáctica de la tecnología en educación matemática. Tomado de Drijvers (2013, p. 3)

En la Tabla 2.2 se muestra la información general de algunos de los applets que fueron consultados y clasificados según el esquema de la Figura 2.5 y su contenido.

Estructura del applet e información general	Contenido referente a las fracciones
Es una página web que reúne un conjunto de applets diseñados como juegos, no está estructurada como una secuencia de enseñanza. Sino que tiene diferentes juegos agrupados por grados escolares y por contenido matemáticos. La funcionalidad de este recurso es del tipo (b). El nombre de la página es: Math Playground "Play with math and give your brain workout" – "juega con matemáticas y ejercita tu mente". La dirección web: http://www.mathplayground.com/index.html	-Comparación y orden de fracciones -Suma de fracciones -Fracciones equivalentes -Fracciones a decimales -Fracciones, decimales y porcentajes -Representación gráfica de fracciones (recta numérica y figuras geométricas) -Multiplicación de fracciones -Resolución de problemas con fracciones
Aquí se reúnen un conjunto de applets ordenados por contenidos matemáticos. Los applets han sido desarrollados en el INTEF como parte de un proyecto (proyecto Gauss). Cada applet está estructurado como una secuencia de enseñanza, por lo que la funcionalidad de este recurso es del tipo (c). Los applets referentes a las fracciones se pueden consultar en la siguiente dirección web: http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/primaria/actividades/aritmetica_decimales.htm	-Representación de fracciones propias e impropias (modelo del pastel y recta numérica) -Suma y resta de fracciones -Multiplicación y división de fracciones -Orden y comparación de fracciones
Los applets que se reúnen en esta página web están ordenados por contenidos matemáticos, no están estructurados como una secuencia didáctica, pero la funcionalidad de los applets que aquí se proponen es del tipo (c). El nombre de la página es thatquiz y la dirección web es: http://www.thatquiz.org/	-Representación gráfica y simbólica de las fracciones -Operaciones con fracciones, -Comparación de fracciones, -La fracción como medida -Fracciones equivalentes

	-Resolución de problemas de probabilidad donde se usan las fracciones.

Tabla 2.2. Información general de applets encontrados en la web

Para ejemplificar cómo se llevó a cabo el análisis detallado de la estructura y diseño de los applets que se encontraron de forma gratuita en la web, se expone un caso (*Busca la fracción*). Este applet fue creado en el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (CNICE) del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España[3]. Los motivos de selección del applet que se expone son: porque en éste se usa la recta numérica como un medio de representación de las fracciones; y porque forma parte de un conjunto de applets estructurados como una secuencia de aprendizaje que incluye diferentes usos y aspectos de las fracciones, cuya funcionalidad es del tipo (c), de acuerdo con el esquema de Drijvers (2013).

La secuencia de enseñanza de la que forma parte el applet que se expone como ejemplo está compuesta por seis unidades y tres secciones adicionales; una de ellas está dirigida al profesor y las otras dos son de información para los usuarios. Cada unidad forma parte de una estructura integral denominada Menú, y versa sobre una temática: (1) Fracciones para medir, (2) Fracciones para comparar, (3) Fracciones equivalentes, (4) Ordenar fracciones, (5) Suma y resta, y (6) Multiplicar y dividir. Cada temática contiene cinco apartados: Contenidos, Actividades, Práctica, Test (un cuestionario de 15 preguntas que sirve de autoevaluación) y Ejercicios para imprimir. La estructura descrita se puede observar en la Figura 2.6.

Figura 2.6. Estructura del conjunto de applets al que pertenece la actividad *Busca la fracción.*

El applet que se analiza está incluido como una práctica de la unidad correspondiente al tema ordenar fracciones (Menú 4). El análisis llevado a cabo para el recurso seleccionado

[3] Para consultar la estructura completa de los applets que conforman el recurso didáctico diseñado en el CNICE vaya a la dirección web: http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/fracciones/menu.html

se compone de: (a) las indicaciones que aparecen en el applet, (b) el tipo de información que el applet proporciona al sujeto, (c) los aspectos de la fracción que están en juego, y (d) la tipificación de la interacción que puede tener el estudiante con el recurso informático. Finalmente se exponen algunas (e) reflexiones sobre el análisis de los applets.

a) Indicaciones

En la pantalla se muestra un segmento de recta con dos fracciones representadas como puntos en el segmento unidad y de forma simbólica. Aparece también la indicación “busca una fracción que esté en la zona rayada”, es decir, entre la dos fracciones dadas (ver la Figura 2.7). En la parte media de la pantalla aparece la frase “escribe la fracción” y una flecha señala los recuadros donde se deben introducir el numerador y el denominador de la fracción buscada. La frase “pincha en el patrón indicado y verás que fácil” se sugiere como apoyo, esto permite ver distintas particiones del segmento.

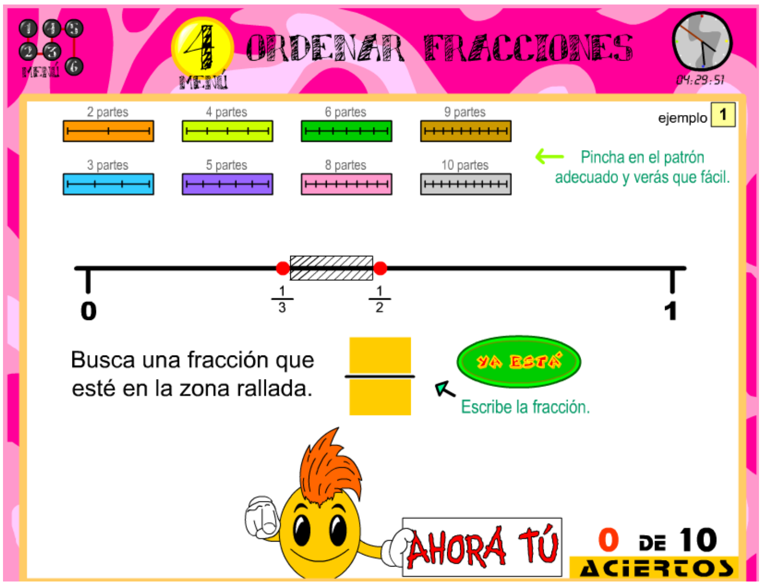


Figura 2.7. Primera pantalla del applet *Busca la fracción* (Menú 4)

b) El tipo de información que el applet proporciona al sujeto

Como ya se ha mencionado hay dos recuadros en el que se debe colocar el numerador y el denominador de la fracción para expresarla en forma simbólica. Aparecen en el segmento unidad dos puntos variantes con su representación como fracción para delimitar un intervalo del segmento unidad, denominado la “zona rayada”, en el que está ubicada la fracción que el usuario debe encontrar. La mayoría de las fracciones que se muestran en el applet para indicar una parte del segmento está expresada en forma reducida, es decir, el numerador y el denominador son primos relativos o dicho de otra manera, el máximo común divisor del numerador y el denominador es 1. Las opciones para partir el segmento unitario son 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 10 partes iguales.

Para confirmar que la fracción escrita es la correcta el usuario debe pinchar un botón que dice “ya está”. Si el resultado es correcto, aparece la leyenda: “muy bien”, y se muestra la opción de seguir con otro ejemplo. Si el resultado es erróneo aparece el aviso: “no es correcto”, y una opción para revisar la respuesta correcta. En el caso de oprimir el botón “solución”, en el applet se representa la fracción de forma gráfica y simbólica y al lado de esta última representación aparece la leyenda “por ejemplo, esta es una solución”, refiriéndose a la respuesta que en el applet se ha generado. Con la frase “esta es una solución” se pone de manifiesto que el recurso ha sido diseñado con la intención de permitir diferentes respuestas como solución, pero solo se debe escribir una de ellas.

El usuario puede explorar con las diferentes particiones y observar que existen más de una fracción en el intervalo indicado, pero el diseño del applet no permite saber si realmente hubo esta exploración. En el ejemplo que aparece en la pantalla de la Figura 2.7 se observa que cualquiera de las fracciones 2/5, 4/9, 4/10, 3/8 es una respuesta correcta, sin embargo, no hay manera de registrar o saber la fracción que ha escrito el usuario, ya sea correcta o incorrecta su respuesta.

El applet contiene 10 ejemplos; las fracciones que limitan a la fracción que el usuario debe encontrar son:

$$\frac{1}{3} y \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{5} y \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{2} y \frac{6}{8}, \quad \frac{1}{4} y \frac{2}{5}, \quad \frac{2}{3} y \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{8} y \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6} y \frac{1}{4}, \quad \frac{2}{9} y \frac{1}{2}, \quad \frac{6}{9} y \frac{8}{9}, \quad \frac{3}{4} y \frac{5}{6}$$

La mayoría de esas fracciones son unitarias y están escritas en forma reducida, sólo se han escrito dos fracciones cuyo máximo común divisor entre sus numeradores y denominadores es distinto de 1, estas son 6/8 y 6/9, quizá se expresan así porque las fracciones reducidas de éstas ya habían sido utilizadas. Solo dos pares de fracciones que representan el intervalo o espacio rayado tienen denominadores iguales, las demás tienen denominadores distintos.

Pese a que ninguna de las fracciones consideradas por los autores del applet como extremos del intervalo en el que se debe ubicar la fracción tiene denominador 7, y que tampoco se muestra como opción una partición en 7 partes iguales, el usuario podría escribir como respuesta una fracción con denominador 7. Por ejemplo, en el intervalo 1/3 y 1/2, una posible respuesta es 3/7, si el usuario escribe esta fracción, el applet reconoce la respuesta como correcta, pero no muestra la partición.

c) El aspecto de la fracción

En esta actividad se muestran gráficamente dos fracciones representadas como dos puntos en el segmento unidad. El diseño se enfoca en el orden de las fracciones de acuerdo con la posición que ocupa su representación en el segmento de recta, esto puede centrar la atención del estudiante sobre el aspecto de la fracción como número en la recta numérica, lo que Freudenthal llama aspecto formalmente definido. Debido a que se puede medir usando 'una regla graduada', la fracción actúa como medidora.

Para ubicar dicho punto se sugiere hacer una partición del segmento unitario en cierto número de partes iguales, por lo que la fracción subyace en un operador fracturante, ya que es el usuario quien decide la partición del segmento, la relación además es dinámica. Si el estudiante hace la aproximación a ojo, sin ayuda de las herramientas del applet, entonces la partición es simbólica. El todo –el segmento unitario– es definido, continuo y tiene estructura lineal. Las partes que se eligen deben ser contiguas para poder ubicar el punto que representa la fracción que se encuentra en el intervalo indicado.

d) La interacción del usuario con el applet

La interacción del usuario se limita a indicar las partes en que se puede dividir el segmento unitario, a fin de observar cuando alguna de las muescas que dividen la unidad en partes iguales queda dentro del intervalo limitado por las fracciones representadas en el segmento unidad.

El usuario podrá seleccionar cuantas veces quiera las particiones que se proporcionan en el applet como ayuda, así podría ver las fracciones que están dentro del intervalo según esas particiones, pero sólo puede escribir una de esas fracciones. También podría hacer una estimación y verificar usando las 'reglas graduadas' proporcionadas en la parte superior para verificar su aproximación, o bien proponer fracciones cuyo denominador es diferente de las particiones que se muestran. Por ejemplo, en el caso del segmento rayado que está entre 1/5 y 2/5, el applet acepta la fracción 30/100 y muestra el punto correspondiente dentro del intervalo determinado por esas fracciones, pero no la partición.

Al completar la actividad el usuario podrá leer la fracción escrita de forma simbólica y gráfica, así como comparar las tres fracciones a través de su representación en la recta numérica. Cabe mencionar que el usuario es quien verifica el resultado, porque él manipula el botón “ya está”. Sin embargo, a menos de que se observe externamente la exploración que hace el usuario en el applet, las respuestas del alumno no quedan registradas, tampoco la exploración que el alumno hace en el applet.

e) Reflexiones sobre el análisis de los applets encontrados en la web

El análisis de applets de uso libre encontrados en la web condujo a la identificación de fenómenos o situaciones considerados en el diseño que podrían ser familiares para los alumnos. Por medio de estos recursos informáticos se posibilita la representación visual de dichas situaciones a través de animaciones, símbolos, gráficas o lenguaje escrito. Estos escenarios pueden ser un elemento que motive a los estudiantes, tanto a usar la tecnología, como a reflexionar sobre los diferentes aspectos del conocimiento acerca de las fracciones. El diseño de los applets permite al usuario explorar con diversas herramientas y descubrir diferentes características de las fracciones, sin embargo el estímulo para llevar a cabo estas acciones no está incluido en la estructuración del recurso tecnológico analizado.

En términos generales, el uso de manipulativos virtuales posibilitan la visualización de acciones que se hacen sobre los objetos, por ejemplo: fracturar, comparar y ordenar.

Por otro lado, algunas restricciones del diseño del applet analizado se refieren a la interacción estudiante/applets. Aun cuando es posible hacer exploraciones con las herramientas de los applets, el usuario debe dar una respuesta determinada a pesar de que existan otras u otros medios para responder a los cuestionamientos formulados. Por ejemplo, en el applet los puntos que representan las fracciones en el segmento se encuentran siempre entre 0 y 1; por lo que solo se consideran fracciones propias.

De los resultados del análisis hecho, se toman como sugerencias para el diseño de los applets que en esta investigación se construyen: (1) considerar fracciones impropias y no limitarse al segmento unitario; (2) dejar a los usuarios que exploren la representación de fracciones en la recta numérica; (3) la representación gráfica de las fracciones no debiera restringirse a la ubicación del punto en la recta, sino que es importante propiciar una reflexión sobre los valores de longitud que se representan en la recta; (4) comparar fracciones en la recta numérica, dando pie a la propiedad de orden de las fracciones; y (5) propiciar la exploración de los estudiantes con respecto al uso de diferentes particiones con la intención de que visualicen fracciones equivalentes y su representación en la recta numérica.

Además, los applets analizados no están diseñados para registrar datos sobre los procesos seguidos por los usuarios para resolver una tarea. Como se mencionó durante el análisis, existen diversas maneras de responder a una tarea, y según cómo se responda subyace un uso particular de las fracciones. Tampoco es posible registrar el tipo de información o respuesta que los estudiantes encuentran durante el proceso de interacción estudiante/applet. Otra desventaja de los recursos tecnológicos analizados es que a pesar de ser de uso libre, su empleo requiere de una conexión a internet.

2.3. Componente de cognición

Como parte de este componente se hace referencia a errores, dificultades y actuaciones que se alejan de la competencia de los estudiantes cuando usan las fracciones, específicamente cuando se emplea la recta numérica como recurso didáctico. Estos resultados son tomados principalmente de los reportes de otras investigaciones, y tienen la intención de ofrecer un catálogo de observaciones empíricas que permitan explicar las actuaciones de los estudiantes que participan en el desarrollo experimental de este trabajo.

Se parte de algunas dificultades que los alumnos enfrentan cuando estudian las fracciones usando el modelo de áreas. Pese a que investigadores como Ni y Zhou (2005) y Siegler, Fazio, Bailey y Zhou (2013) consideran que dicho modelo es ampliamente utilizado para la enseñanza de las fracciones en la educación primaria, se han encontrado investigaciones que revelan algunas dificultades y errores que comenten los estudiantes cuando trabajan las fracciones con ese modelo. Por ejemplo, Saxe, Taylor, McIntosh y Gearhart (2005), han observado que los niños de educación primaria tienen dificultades para identificar la fracción que se representa en una figura cuya partición es parcial, es decir, cuando "aparentemente" las partes no son iguales. Dicha dificultad se atribuye al hecho de que los niños utilizan el razonamiento numérico para contar las partes sin tener en cuenta la relación entre el tamaño de las partes y el todo.

Además de lo anterior, en el compendio que presentan Petit, Laird y Marsden (2010) afirman que durante el proceso para establecer la relación entre las partes y el todo, los alumnos podrían tener dificultades para: (1) comparar fracciones cuya unidad o todo son de diferentes tamaños o incluso cuando el todo es del mismo tamaño, y (2) encontrar el todo cuando se da solamente una parte. Otra dificultad se refiere al trabajo con fracciones impropias, Tzur (1999) lo relaciona con el esquema de partición que tienen los estudiantes, ya que sus primeras experiencias en el procesos de partición se desarrollan usando modelos en los que se representan fracciones propias, es decir, modelos donde la elección de las partes no superan la totalidad de partes en las que se divide la unidad.

Las dificultades antes descritas no son el único problema al que se enfrentan los aprendices cuando estudian fracciones, ya que el enfoque puesto en el modelo de áreas limita los objetos mentales que tienen los alumnos, dejando de lado la comprensión de aspectos de las fracciones que se podrían desarrollar cuando se utilizan otros modelos. Esta idea es apoyada por Saxe, Shaughnessy, Shannon, Langer-Osuna, Chinn y Gearhart (2007), quienes proponen una enseñanza de las fracciones utilizando el modelo de la recta numérica, con la finalidad de potenciar el conocimiento de las fracciones que tienen los alumnos de educación media, particularmente para desarrollar conocimiento sobre las propiedades de orden, densidad y equivalencia de las fracciones.

Cabe señalar que aunque la recta numérica sea un recurso didáctico que permite ampliar el conocimiento de los alumnos hacia otras propiedades de las fracciones, es importante tomar en cuenta sus características y también las dificultades o errores que el uso de este modelo pudiera causar en el aprendizaje de los alumnos.

Respecto a las características del modelo de la recta numérica, Bright, Behr, Post y Wachsmuth (1988), afirman que este recurso didáctico difiere de los modelos de áreas y de conjuntos discretos en aspectos importantes, tales como:

i. En el modelo de la recta numérica la unidad está representada por una medida (longitud). Mientras que en los otros modelos la unidad es un área o un conjunto de objetos.
ii. En el modelo de la recta numérica no hay una separación visual entre las unidades consecutivas, es decir, el modelo es totalmente continuo. En los otros modelos se puede ver una separación, ya sea entre las partes o entre unidades.
iii. El modelo de la recta numérica requiere del uso de símbolos para transmitir parte del significado que se pretende, es decir, se requieren símbolos (numéricos) para definir la unidad, mientras que la unidad en los otros modelos está implícito.
iv. Además de sugerir una iteración de la unidad, las unidades en la recta numérica se pueden subdividir sin restricciones.

Otra característica que no mencionan los autores citados tiene que ver con la elección de las partes para representar la fracción en la recta numérica. El proceso de elección de las partes en este modelo debe ser contiguo y comenzar desde la elección de partes desde el cero, a diferencia del modelo de áreas o conjuntos, en donde la elección de las partes puede ser contiguo o no y se eligen las partes como se quiera.

Teniendo en cuenta estas características del modelo de la recta numérica, se debe entonces prestar atención a lo que los alumnos pudieran considerar como unidad. De acuerdo con Mitchell y Horne (2008), cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a la recta numérica con múltiples unidades, es común que representen la fracción considerando como el todo al segmento de recta que contiene las múltiples unidades, y no la fracción relativa a la unidad definida, este resultado también es reportado por Ni y Zhou (2010).

También se debe poner atención al proceso que siguen los alumnos para dividir el segmento unidad y ubicar la fracción en la recta numérica, ya que en el estudio que desarrollaron Mitchell y Horne (2008), encontraron que algunos niños cometían el error de contar las muescas que subdividen el segmento unidad, considerando el punto que representa al cero, en lugar de contar los espacios que hay entre cada muesca.

Otro error vinculado al proceso de partición que reportan los autores antes citados es que los niños siempre parten la unidad en 10 partes iguales para ubicar cualquier fracción en la recta numérica. Los autores vinculan ese error al "dominio de medición", ya que los alumnos que fueron instruidos en ese estudio usan de manera habitual instrumentos de medida y escalas.

La extensión de las propiedades de los números enteros a las fracciones también está presente como dificultad cuando se trabaja con el modelo de la recta numérica, en este caso, en las comunicaciones de los proyectos VMP OGAP desarrollados en los años 2005, 2006 y 2007 (citados en Petit, Laird y Marsden, 2010) se reporta que para ordenar las fracciones en la recta numérica, los alumnos se basan en la magnitud del numerador o denominador de la fracción, teniendo como resultado errores para ubicar las fracciones en la recta numérica.

Por último, además de las dificultades que los alumnos enfrentan cuando estudian las fracciones usando la recta numérica, vale la pena señalar que la mayoría de los autores referenciados en este apartado, ver por ejemplo, Mitchell y Horne, (2008), Bright *et al*, (1988) y Saxe *et al*, (2005; 2007), destacan algunos beneficios que puede aportar el trabajo con este recurso didáctico, en general éste recurso puede permitir a los alumnos:

i. Proveer un acercamiento a la noción de densidad de los racionales.

ii. Reconocer fracciones como representantes de una clase, es decir, como representantes de un número racional, fracciones equivalentes;

iii. Comparar fracciones a través de la posición que ocupan como puntos en la recta o a través de los valores de magnitud asociados a los segmentos que éstas representan, propiedad de orden;

iv. Visualizar de forma más natural las fracciones impropias;

v. Modelar operaciones básicas de números $\mathbb{N}, \mathbb{Z}\ y\ \mathbb{Q}$ y

i. Entender la relación entre las fracciones y los decimales.

Por otro lado, el uso de la recta numérica, así como de las fracciones como puntos de esa recta son conocimientos previos para el estudio de otros conceptos matemáticos, por ejemplo de geometría analítica, o bien de cálculo diferencial e integral. Asimismo, el conocimiento de la recta numérica es ampliamente usado en la vida cotidiana, ya que se emplea en la mayoría de los instrumentos que se usan para medir magnitudes, por ejemplo una regla o metro, el termómetro, el tensiómetro, el pluviómetro, una báscula no digital y en cierto sentido el reloj de manecillas.

Otro ámbito donde es ampliamente usado el conocimiento de la recta numérica se refiere a la investigación científica, ya que se usan instrumentos de medida más sofisticados y especializados. Actualmente la mayoría de estos instrumentos son digitales, sin embargo en donde se requieran escalas, se usará la recta numérica.

2.4. Componente de comunicación

Este componente se irá describiendo durante el diseño y desarrollo experimental, así como en los resultados obtenidos, mismos que se describe en los capítulos tres, cuatro y cinco respectivamente. Sin embargo, en este apartado se muestra un esquema general de cómo se ha constituido el componente de comunicación. Éste toma en cuenta, por un lado, la información que los diseñadores de los applets pretenden comunicar a los aprendices, y por otro lado las actuaciones de los estudiantes que se registran durante la interacción con dicho recurso.

La comunicación desde el applet hacia el estudiante se ofrece a través de tres medios. El primero se refiere a las indicaciones y preguntas que se plantean directamente en la pantalla del ordenador (Figura 2.8). El segundo se refiere a las modificaciones dinámicas tanto numéricas como gráficass que se producen en el applet como consecuencia de las interacciones del usuario. El tercero se refiere a las ventanas de aviso o alerta que emergen según la interacción que el alumno tenga con el applet (Figura 2.9). La comunicación de los estudiantes hacia el applet se realiza mediante los deslizadores y botones que se ofrecen y mediante las fracciones que introduce en las ventanas emergentes. Esta información es almacenada en una base de datos, la cual será recopilada, ordenada e interpretada por quienes desarrollan este proyecto de investigación. Como consecuencia, se centra el análisis en la comunicación del estudiante con el applet como respuesta a las acciones pre-programadas que realizará el applet.

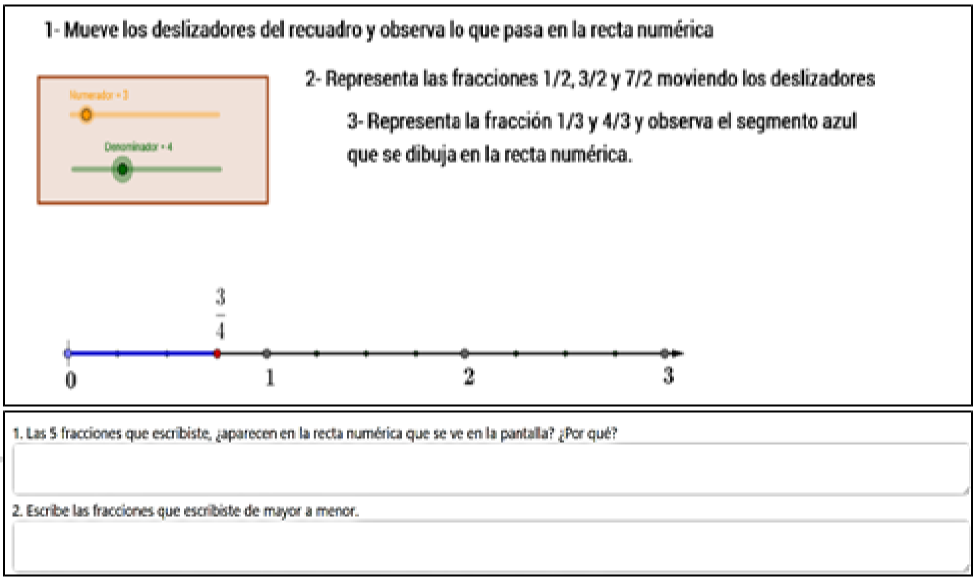


Figura 2.8. Información que se comunica al alumno a través de indicaciones y preguntas

Todos los applets diseñados en esta investigación tienen la misma estructura que el que se muestra en la Figura 2.8, es decir, en la parte superior aparece el interactivo con algunas indicaciones y en la parte inferior aparecen preguntas e indicaciones para que los alumnos exploren e interactúen con el applet, y que además reflexionen sobre diversas características de las fracciones.

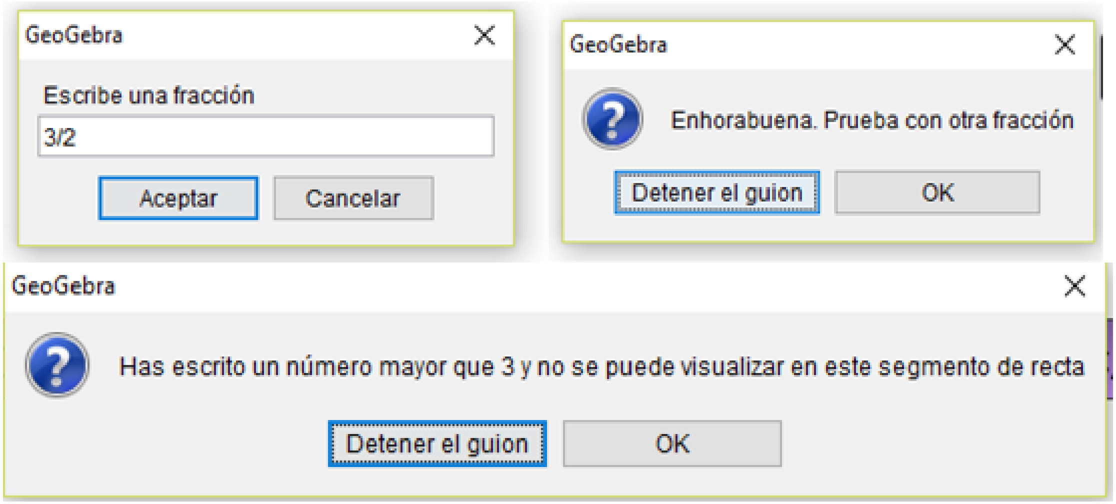


Figura 2.9. Ventanas para escribir información o avisos

En la Figura 2.9 se muestran algunas ventanas que apareen durante la interacción estudiante/applet, en la primera ventana el alumno debe escribir una fracción, la cual está condicionada de acuerdo con diseño del applet. Por ejemplo, si el alumno escribe una fracción mayor que tres, se emite otra ventana informando al alumno, este mensaje también se puede ver la Figura 2.9.

Finalmente, la información que escriben los alumnos se almacena en una base de datos, que como ya se mencionó, está será el recurso que proporciona las actuaciones de los estudiantes que participaron durante la etapa experimental del proyecto de investigación que se desarrolla.

3. Diseño de la experimentación

Como parte del desarrollo experimental se aplica a los alumnos un pretest antes de la implementación de la secuencia de enseñanza, y un posttest al finalizar la secuencia. Por ello en este capítulo se describen el diseño de dichas pruebas (se pueden consultar en el Anexo I) y de la secuencia de enseñanza fundamentada en el uso de applets construidos con GeoGebra.

Los contenidos que se evalúan en las pruebas forman parte de los contenidos de las fracciones que se estudian durante los últimos años de la escuela primaria, de acuerdo con el currículo establecido en el decreto 126/2014 de la Comunidad Valenciana, cuya revisión se describe en el apartado 2.2.1. El énfasis está en la representación gráfica de las fracciones en la recta numérica.

3.1. Diseño y estructura del pretest y postest

El pretest es una herramienta que permite caracterizar el conocimiento y dificultades previas a la instrucción que tienen los aprendices con la secuencia que se diseña, también sirve para contrastar junto con el postest el desempeño de los alumnos antes y después de la interacción estudiante/applet. Es decir, son herramientas de control de la experimentación.

La estructura del pretest se compone por las siguientes seis actividades:

1. Actividad 1: representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica, considerando modelos continuos.
2. Actividad 2: representación gráfica de fracciones a partir de su escritura simbólica, considerando modelos continuos.
3. Actividad 3: representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica, considerando modelos discretos.
4. Actividad 4: representación de fracciones como puntos en la recta numérica.
5. Actividad 5: identificación de fracciones en un intervalo y clasificación de fracciones propias e impropias.
6. Actividad 6: resolución de problemas donde subyacen distintos aspectos de las fracciones.

Para elaborar el postest solo se consideraron las actividades 2, 4 y 5. Las actividades 4 y 5 permanecieron en el postest porque permiten determinar el efecto de la enseñanza. La actividad 2 se dejó en la segunda prueba para tener indicador sobre la variación de los resultados entre los dos cuestionarios en una de los aspectos que no se consideró directamente en la secuencia, pero que sí se valora en el pretest.

Aun cuando lo idóneo hubiera sido diseñar el postest con la misma estructura que se consideró en el pretest, se optó por reducir el número de actividades por restricciones ligadas a la organización del centro y al calendario escolar. La última sesión de trabajo con los alumnos se programó un día antes de iniciar el periodo vacacional. Por otro lado se había observado que, aunque el pretest se había programado para una sesión de a lo sumo 45 minutos, hubo estudiantes que requirieron una sesión y media para completar dicha prueba. Como consecuencia, se corría el riesgo de que los alumnos no terminaran el postest si contenía las mismas preguntas que el pretest. Se tomó la decisión de priorizar que respondieran a las preguntas de las actividades 4 y 5, cuyo contenido se en la secuencia de enseñanza.

Para el diseño de cada una de las actividades de los tests se han tomado en cuenta diversos aspectos de la fracciones, expuestos en el componente formal del MTL. En los apartados siguientes se describe cada una de las actividades con la finalidad de detallar la estructura de ambas herramientas.

3.1.1. Actividad 1

La primera actividad corresponde a la representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica considerando modelos continuos. La actividad está compuesta por ocho incisos (ver Figura 3.1), de los cuales siete corresponden a la representación gráfica de fracciones propias y en uno se considera un modelo donde se podría identificar una fracción impropia, según lo que el alumno defina como la unidad. Se han tomado como referencia modelos definidos y continuos, es decir, superficies de figuras geométricas tales como círculo, cuadrado y rectángulo. La partición en cuatro de las ocho figuras no está totalmente definida, es decir, las partes en las que se divide el todo no son visualmente congruentes, ya que el proceso de partición no se ha completado. La elección de las partes sombreadas no es contigua en una de las figuras.

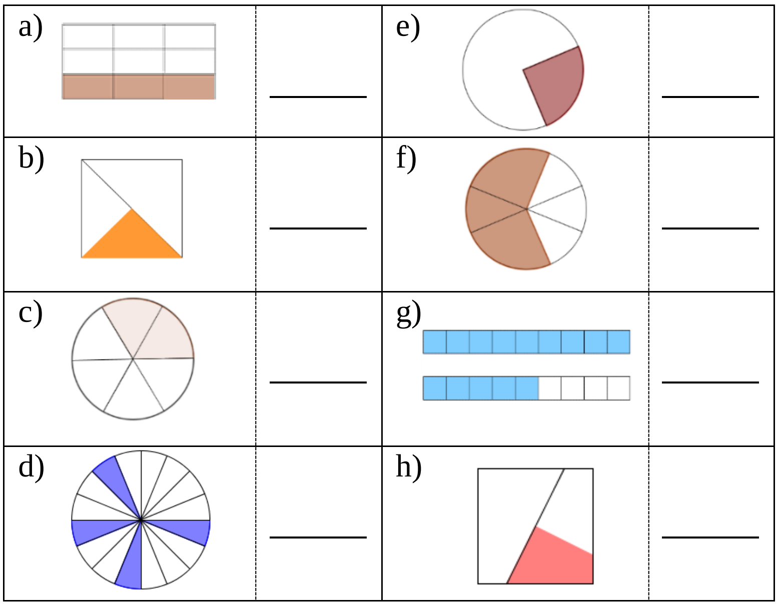


Figura 3.1. Actividad 1 del pretest

En los incisos (a) y (c) se han utilizado dos figuras comunes para hacer la representación gráfica. La partición está definida y se observa explícitamente que las partes son iguales. La fracción escrita en forma simbólica que se espera como respuesta por parte de los estudiantes se puede dar en términos de fracciones equivalentes, por ejemplo, en el inciso (a) se espera la respuesta 3/9 (tres de nueve rectángulos pequeños) o 1/3 (una de tres barras).

Se consideran particiones parciales en los incisos (b), (e), (f) y (h). En el inciso (d) el proceso de división está bien definida, pero la elección de las partes (partes coloreadas) no es contigua.

El inciso (g) se propone para: (1) identificar si el alumno reconoce fracciones impropias a partir de ese modelo gráfico; y (2) determinar dificultades ante el cambio de unidad, es decir, observar si los alumnos consideran al todo como las dos barras, o sólo formado por una barra, o si consideran el todo como algo discreto, es decir como un conjunto de cuadrados, lo que Freudenthal llama cambio de lo continuo a lo discreto.

En los ocho incisos de esta actividad la fracción aparece como fracturador. En los casos que está bien definida la partición la fracción aparece en una relación de fractura; en los casos donde la partición es parcial, la fracción aparece en el operador fracturante, ya que los alumnos son quienes completan dicha partición, ya sea de forma simbólica o no.

3.1.2. Actividad 2

La actividad 2, que versa sobre la representación gráfica de fracciones a partir de su escritura simbólica considerando modelos continuos, está incluida en ambos tests. En los dos cuestionarios se han considerado cuatro incisos, tres corresponden a la representación simbólica de fracciones propias y uno se refiere a una fracción impropia (ver Figuras 3.2 y 3.3). Para la representación gráfica que deben completar los alumnos se han utilizado modelos definidos y continuos, en este caso figuras planas: círculo, rectángulo y triángulo. La partición la define el alumno, y también determina la elección de las partes, pudiendo ser contiguas o no, por lo que la fracción aparece como fracturador.

En el pretest, el proceso de partición para responder al inciso (b) se considera el de menor dificultad en este conjunto, ver Figura 3.2. El proceso en los demás incisos es un poco más complejo. Por ejemplo, en el inciso (d) se pone una figura poco usada en la enseñanza para ejemplificar el proceso de partición con el "modelo del pastel" (esta pregunta fue considerada en el estudio de Figueras, 1988). En el inciso (c) se incluye solo un círculo a pesar de que es una fracción impropia, se espera que el alumno identifique que es una fracción de este tipo y sea él quien agregue lo que considere necesario para hacer la representación gráfica.

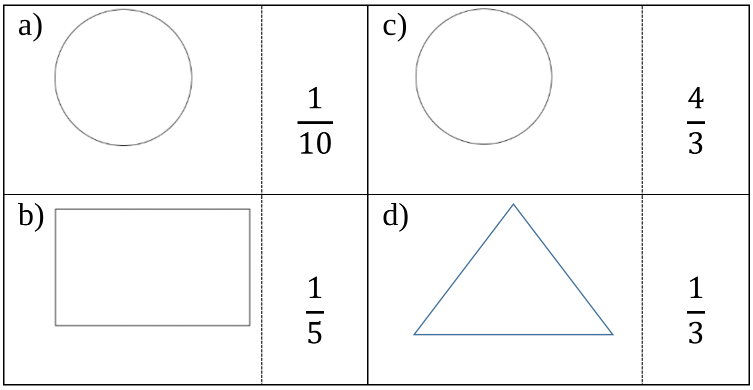


Figura 3.2. Actividad 2 del pretest

El proceso de partición para responder a los incisos (a), (b) y (c) de esta actividad en el postest se considera sencillo (ver Figura 3.3). Por ejemplo, en el inciso (c) el proceso de partición se puede hacer demediando. En el inciso (d), al igual que en el pretest, aparece una fracción impropia, pero se ilustra únicamente una barra con la finalidad de que el alumno complete lo necesario para hacer la representación gráfica. Las formas geométricas utilizadas en esta prueba varían un poco respeto a las que se utilizaron en el pretest, ya que aquí aparecen en los incisos (a) y (d) rectángulos delgados que se asemejen a un segmento de recta.

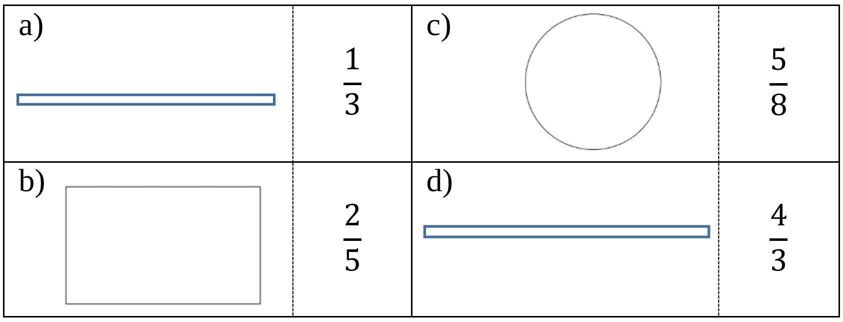


Figura 3.3. Actividad 2 del postest

Dos de las fracciones propias representadas de forma simbólica varían de una prueba a otra, la fracción propia 1/3 se dejó en ambas pruebas por la relación que ésta tiene con la fracción impropia 4/3, la cual también aparece en los dos tests. No obstante, sí se ha cambiado la representación gráfica de estas dos fracciones.

3.1.3. Actividad 3

Esta actividad solo se considera en el diseño del pretest y trata de la representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica, considerando modelos discretos definidos. En la pregunta se muestran dos cajas con bolas rojas y azules (ver pregunta 3 del Anexo I). La elección de las partes está estructurada de acuerdo con el color de las bolas y no respecto al tamaño, por ello se han puesto bolas de diferentes tamaños en una de las cajas.

Para cada dibujo hay dos oraciones que deben ser completadas por los alumnos. La primera se completa con la fracción de bolas rojas o azules que hay en la caja, por lo que la fracción aparece como un descriptor de una cantidad, en este caso la fracción de bolas de cierto color. Durante el proceso de identificar la fracción se debe hace una comparación entre el todo y las partes, así la fracción subyace en una relación fracturante. En la segunda oración se deben comparar las partes, por lo que la fracción surge en una relación razón. En ambas oraciones el alumno puede escribir como respuesta la fracción escrita de forma simbólica o en el lenguaje vernáculo.

3.1.4. Actividad 4

La actividad 4 está referida a la representación de fracciones como puntos en la recta numérica y forma parte de ambos tests. En el pretest la actividad está compuesta por 10 incisos, cada uno corresponde a una fracción que se debe representar como punto en la recta numérica.

Los incisos (a), (d), (e), (f) y (j) contienen fracciones propias, los incisos restantes se refieren a fracciones impropias, todas menores que tres, ya que el segmento de recta que aparece en la prueba va de cero a tres. Los denominadores de las fracciones propuestas tienen valores entre dos y diez, y no se repiten, solo una tiene doce como valor del denominador. Se han propuesto fracciones con denominadores distintos con la finalidad de que el alumno realice distintas particiones "a ojo", e identificar en cuál de esas particiones tienen mayor dificultad para precisar el tamaño de las partes. Las fracciones del inciso (a) y (j) son equivalentes, esto permite ver si los alumnos tienen conocimiento sobre este tipo de fracciones.

En el postest se ha reducido el número de incisos. Solo se consideran cinco de ellos, los correspondientes a las fracciones de los incisos (b), (d), (f), (h) y (j) del pretest. Hay tres fracciones propias y dos impropias.

Han permanecido las fracciones 6/5 y 8/7 de los incisos (b) y (h) respectivamente, porque son fracciones impropias relativamente cercanas entre ellas, donde incluso se puede observar la comparación entre las fracciones unitarias 1/5 y 1/7. Las fracciones 1/4 y 1/6 correspondientes a los incisos (f) y (j) respectivamente, se han dejado por la misma razón, son fracciones propias y unitarias muy cercanas entre ellas. La fracción 4/8 correspondiente al inciso (d) se conserva en el postest porque es una fracción equivalente a 1/2, fracción que se considera común para los estudiantes, pero escrita de esta forma permitirá ver si el estudiante reconoce la equivalencia entre éstas y logra su representación gráfica como punto en la recta numérica.

3.1.5. Actividad 5

Esta actividad se refiere a la identificación de fracciones en un intervalo y a la clasificación de fracciones propias e impropias, y forma parte de ambos tests. Para responder al pretest se han considerado cinco incisos. En el inciso (a) se deben escribir dos fraccionen que se ubiquen entre el 0 y el 1, con el propósito de comenzar a distinguir fracciones propias e impropias; por esta razón en el inciso (b) se pide a los alumnos que escriban dos fracciones entre 3 y 4, por un lado para que identifiquen características de las fracciones impropias, y por otro lado para que reconozcan fracciones mayores que 3, es decir, ampliar el esquema de la recta numérica que se utilizó en la actividad anterior.

En el inciso (c) se tienen que escribir fracciones entre un intervalo limitado por fracciones, estas son 7/8 y 8/9, fracciones que fueron consideradas en el estudio de Olvera-Ventura (2014). Para responder a los incisos (d) y (e) los alumnos deben recordar las características de las fracciones propias e impropias. Se ha planteado la pregunta en estos términos porque son los nombres que se utilizan en los contenidos curriculares. Pero quizá los estudiantes distingan estas fracciones por alguna de sus características, ya sea relación numerador-denominador o por la relación con la unidad.

En el postest, aparte de los 5 incisos del pretest mencionados anteriormente, se agregan otros dos, en cada uno se deben escribir fracciones con ciertas características. En el primero de los incisos agregados el alumno debe escribir fracciones que tengan numerador 7 y en el otro se requiere escribir fracciones con denominador 25. Lo anterior se ha agregado para observar si los alumnos identifican la estructura simbólica de las fracciones. Las fracciones que den como respuestas los estudiantes, en cualquiera de los incisos de las dos pruebas, pueden ser escritas de forma simbólica, grafica o en el lenguaje vernáculo.

La fracción como número en la recta numérica es el aspecto de la fracción que aparece en esta actividad. Pero también se considera la fracción como medidora, ya que mide segmentos sobre la recta numérica, cuyos segmentos dependen del número de partes elegidas entre las que se divida la unidad, por lo que en este proceso la fracción aparece también como fracturador.

3.1.6. Actividad 6

La última actividad solo fue considerada en el pretest y corresponde a la resolución de un problema en el que subyacen distintos aspectos de las fracciones. Se plantea una situación en la que se venden pizzas por trozos, en el enunciado aparece la fracción 3/8 para describir una parte de la cantidad de pizzas vendidas durante el día. Una vez planteada dicha situación se formulan cuatro preguntas (ver Anexo I).

En la pregunta que corresponde al inciso (a) la fracción subyace como una relación de fractura. El alumno debe interpretar la escritura simbólica de la fracción descrita en la situación para poder establecer la relación parte-todo y de ahí descifrar el número de partes en las que se divide cada pizza (ocho partes) y las partes que se vendieron (tres partes), así como las partes que faltaron para completar la venta de una pizza completa (cinco partes), que corresponde a la unidad o el todo.

En la pregunta correspondiente al inciso (b), la respuesta, o sea la fracción 3/8 describe la cantidad de pizza que comió una persona (Xavi). Para responder, el alumno debe interpretar la relación entre la escritura en el lenguaje vernáculo y el simbólico, después identificar la relación parte-todo, es decir, de un total de 8 partes (rebanadas de pizza), Xavi comió 3 partes (tres rebanadas de pizza).

En el inciso (c) la fracción 1/4 también aparece como descriptora de la cantidad de pizza que comió otra persona (Vanesa), en este caso la fracción aparece escrita en el enunciado de forma simbólica, ya que la atención está dirigida hacia la comparación entre las fracciones 3/8 y 1/4. La fracción 1/4 en este último inciso podría pensarse que subyace a partir de una relación de fractura distinta a la de la situación que se plantea en el problema, en este caso el número de trozos en los que se divide la pizza son cuatro y Vanesa solo se come un trozo, pero el todo sigue siendo una pizza. Se ha considerado de esta manera para identificar si los alumnos lograr reconocer la fracción 2/8 como fracción equivalente a 1/4 y a partir de esto hacer la comparación y deducir cuál de las dos fracciones es mayor.

Por último, en el inciso (d) aparece el operador fracción, ya que transforma una cantidad en otra. El alumno primeramente debe reconocer la fracción unitaria 1/8 a partir de la relación parte-todo que previamente ha identificado, esta fracción es la que actúa como operador ya que 1/8 de 64 es 8, es decir, transformó la cantidad 64 euros en 8 euros.

3.2. Diseño de la secuencia de enseñanza fundamentada en el uso de applets

A partir de los lineamientos establecidos como resultado del análisis de los applets que se detalla en el apartado 2.2.2, se ha decidido diseñar una secuencia de enseñanza fundamentada en el uso de applets construidos por quienes desarrollan esta investigación.

Como ya se ha mencionado, el contenido que se trata en dicha secuencia de enseñanza pone énfasis en temas referentes a las fracciones que se estudian durante los últimos cursos de la escuela primaria y primeros grados de secundaria. Específicamente se instruye sobre las características y representación gráfica de las fracciones propias e impropias, comparación y orden de las fracciones y fracciones equivalentes, esto se hace tomando como recurso didáctico a la recta numérica, por las razones que se exponen en la actividad 2.3.

Los aspectos de las fracciones que subyacen en el diseño de la secuencia de enseñanza se refiere principalmente a la fracción como número en la recta numérica, pero en los procesos de representación e identificación de las fracciones surgen también la fracción como medidora, la fracción como comparador y como fracturador. Estos aspectos se especifican en la descripción de cada etapa de la secuencia.

La secuencia de enseñanza está formada por siete etapas. Cada una se estructura usando un applet que tiene un componente de exploración/interacción. A la vez se proporciona información para que los alumnos identifiquen y utilicen representaciones simbólicas y gráficas; distingan características de las fracciones propias e impropias; comparen fracciones, y reconozcan otras particularidades que dependen del propósito de cada etapa.

Para la construcción de los applets se ha considerado GeoGebra. La herramienta es comúnmente utilizada para la enseñanza de la geometría por lo que se adapta al diseño de actividades sobre la recta numérica. Además, permite la generación de applets que se pueden incrustar en páginas web que pueden usarse tanto con conexión a internet como en modo local. Otro aspecto interesante de GeoGebra es la posibilidad de programar subrutinas en JavaScript que permiten comprobar la validez de las respuestas de los estudiantes, generar mensajes de error, dar ayudas. El potencial de las subrutinas de JavaScript se ve incrementado por la interacción que permite entre el propio applet y las páginas web que lo contienen.

Más allá de las posibilidades en la interacción estudiante/applet que ofrecen las subrutinas de JavaScript es de destacar el hecho de que permiten recoger de una manera no invasiva las acciones de los alumnos en tiempo real durante la interacción que éstos tienen con el applet. Dicho registro posibilita el análisis de las respuestas y los procesos usados por los aprendices durante la interacción estudiante/applet. Esta información puede emplearse para la caracterización de las actuaciones de los estudiantes; la determinación de cómo se modifican los objetos mentales de los alumnos, en caso de que así sea; y para la identificación de estrategias de resolución de los alumnos.

Pese a la popularidad del recurso digital seleccionado para el diseño, es factible que los alumnos no estén familiarizados con el uso de GeoGebra, por lo que posiblemente tengan dificultades al usar sus herramientas, tales como los deslizadores, botones, casillas, entre otros. Sin embargo, el diseño de los applets permite que a través de la exploración los alumnos puedan reconocer la función de cada herramienta.

En los apartados siguientes se detallan los aspectos tomados en cuenta para la construcción de los applets que constituye la secuencia de enseñanza. Se exponen: (a) el propósito de la etapa, (b) las indicaciones de la actividad, (c) los elementos del diseño, y (d) las cuestiones planteadas para llevar al alumno a una reflexión.

3.2.1. Applet de la primera etapa

En la primera etapa de la secuencia se desarrollan dos líneas de acción paralelas. A través de una de ellas el estudiante se empieza a familiarizar con el entorno interactivo, y por medio de la otra se introduce al estudiante a los procesos de representación de diferentes aspectos de la fracción en la recta numérica, así como en la asociación de ésos y el sistema matemático de signos de esos números, ver Figura 3.4. A continuación se exponen los componentes considerados para la construcción del applet que constituye la primera etapa.

a) Propósitos

La interacción que tiene el alumno con este applet permite:

1. Reconocer la estructura simbólica de la fracción, y relacionar numerador y denominador con el valor numérico que se asigna a los deslizadores.

2. Observar el efecto que producen los deslizadores en la representación gráfica y simbólica de la fracción. El alumno debe explorar y reconocer el software y sus componentes (en este caso el uso y los efectos de los deslizadores).

3. Observar las relaciones que existen entre el numerador, el denominador, los componentes de la representación simbólica, la posición de la fracción como punto en la recta numérica, el número de partes iguales en las que se divide la unidad y la magnitud del segmento azul que representa a la fracción.

b) Indicaciones

Tres son las indicaciones que se dan en este applet. Ver la Figura 3.4.

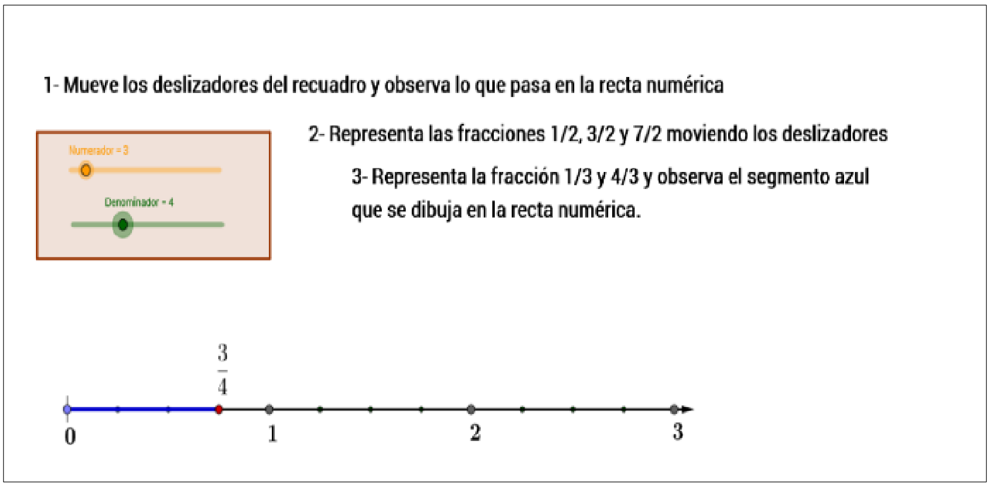


Figura 3.4. Applet de la primera etapa

La primera indicación tiene que ver con el propósito de observar los efectos que tiene los deslizadores y a su vez relacionar estos efectos con la escritura gráfica y simbólica de las fracciones.

En la segunda indicación se pide a los alumnos escribir 1/2 y 3/2 con la intención de representar primeramente fracciones que sí se pueden ver en el segmento de recta que se muestra en la pantalla, posteriormente se pide representar 7/2 para que reconozcan que hay otras fracciones mayores al segmento de longitud tres, y no se limiten a las fracciones que se pueden representar en el segmento de recta que se usa como modelo en el diseño de este primer applet. Se han elegido medios porque el proceso de partición para causar estas fracciones se considera trivial y conocido por los alumnos.

La tercera indicación se formula con la finalidad de no solo identificar el punto que representa la fracción en la recta, o sea la fracción como número en la recta, sino también fijar la atención en la magnitud de los segmentos azules que representan la fracción. De esta forma surge el aspecto de la fracción como medidora, teniendo en cuenta la relación parte/todo, es decir, el número de partes en que se divide la unidad (denominador) y el número de partes que se toman (numerador), por lo que surge la fracción en su aspecto de fracturador.

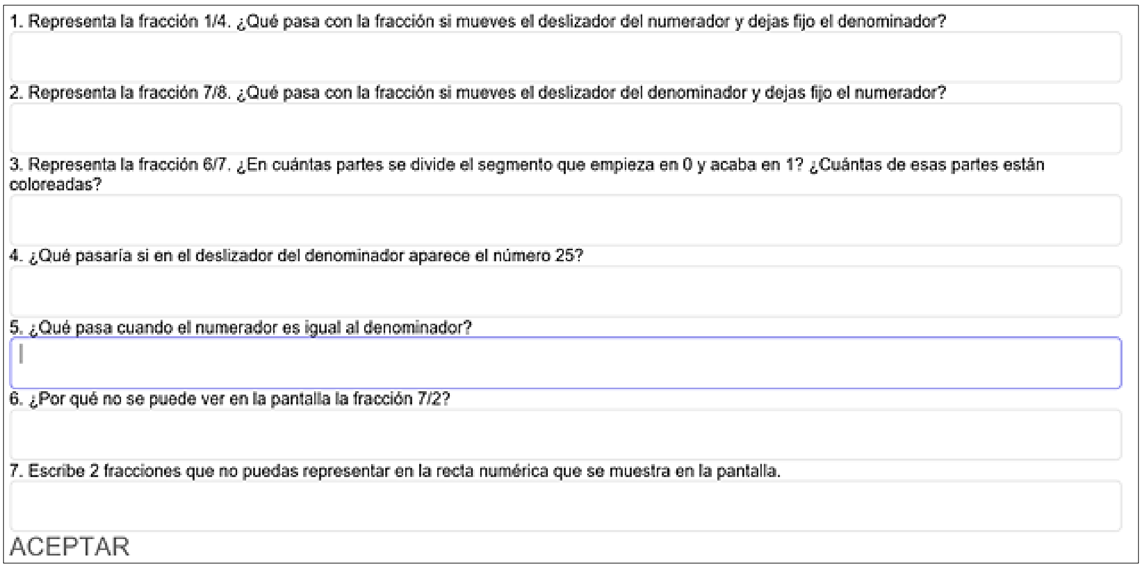
c) Elementos del diseño

En la representación gráfica aparece un segmento que mide tres unidades, de manera que las fracciones que se pueden representar en la recta y visualizar en la pantalla son las que se encuentran entre cero y tres y que además se pueden expresar con los valores asignados a los deslizadores. La recta tiene como origen el cero, y no expresa una flecha de continuidad hacia el lado izquierdo ya que no se pretende trabajar con números negativos. En cambio, en el otro extremo, el número tres, se expresa una flecha para indicar que la recta continúa. Se ha decido numerar la recta para dejar definida la unidad.

El valor mínimo del deslizador que representa al denominador es 1 y el máximo es 10, mientras que el numerador tiene al cero como valor mínimo y al 30 como máximo. Los valores que adopta el deslizador del numerador se podrían haber dejado dependiente del denominador, es decir, de la forma *3n*, donde *n* toma los valores del denominador. Sin embargo, se ha decidido que sea independiente para no limitarse a fracciones representadas en el intervalo [0, 3] que se puedan expresar con los valores de los deslizadores. Cabe señalar que no se hace la representación gráfica de fracciones mayores a 3, pero como ya se mencionó, con los deslizadores sí se pueden representar, siendo 30/2 la fracción mayor. Se plantea una pregunta para que el alumno reflexione sobre este suceso.

d) Cuestiones planteadas para llevar al alumno a una reflexión

Como puede verse en la Figura 3.5, se formulan siete cuestiones para que el estudiante reflexione sobre lo que ha observado durante la exploración e interacción con el applet. Se pretende que el estudiante al leer estas preguntas o indicaciones recurra cuantas veces sea necesario al applet para poder dar las respuestas.


1. Representa la fracción 1/4. ¿Qué pasa con la fracción si mueves el deslizador del numerador y dejas fijo el denominador?
2. Representa la fracción 7/8. ¿Qué pasa con la fracción si mueves el deslizador del denominador y dejas fijo el numerador?
3. Representa la fracción 6/7. ¿En cuántas partes se divide el segmento que empieza en 0 y acaba en 1? ¿Cuántas de esas partes están coloreadas?
4. ¿Qué pasaría si en el deslizador del denominador aparece el número 25?
5. ¿Qué pasa cuando el numerador es igual al denominador?
6. ¿Por qué no se puede ver en la pantalla la fracción 7/2?
7. Escribe 2 fracciones que no puedas representar en la recta numérica que se muestra en la pantalla.

ACEPTAR

Figura 3.5. Cuestiones de la primera etapa para llevar al alumno a una reflexión

En las preguntas 1 y 2 inicialmente el usuario debe mover los deslizadores correspondientes al numerador y al denominador para formar las fracciones 1/4 y 7/8 como puntos o segmentos en la recta. A continuación, debe desplazar los deslizadores que controlan el valor del numerador y denominador y observar el efecto. En la pregunta 1 se pretende que el alumno pueda observar aspectos como: dada una fracción con denominador n-fijo y un numerador m-variable, entonces conforme aumente m, "la fracción va aumentando, es más grade o mayor" porque "el segmento azul es cada vez más largo" o porque "el punto está más a la derecha o más adelante"; al disminuir el numerador "la fracción es menor, o va disminuyendo" porque "el segmento azul es menos largo" o "el punto está más a la izquierda o cercano a cero". En la pregunta 2 se plantea lo mismo pero ahora fijando el numerador.

Las preguntas 3, 4 y 5 se plantean para lograr el propósito tres de esta etapa, es decir, observar las relaciones que existen entre el numerador y el denominador (¿qué pasa cuando esos son iguales?), el número de partes iguales en las que se divide la unidad y la magnitud del segmento azul que representa a la fracción.

Las preguntas 6 y 7 advierten al alumno de que hay fracciones producidas por los deslizadores que no son visibles en el segmento de recta que se muestra en la pantalla debido a que son más grandes que 3, pero que si la recta se extendiera, entonces éstas sí se podrían representar. Los usuarios deben generalizar el proceso de partición en la recta numérica para poder representar fracciones fuera del intervalo que se muestra en el diseño del applet.

Una vez que el usuario haya respondido a las preguntas o seguido las indicaciones, debe hacer clic en la palabra "ACEPTAR", ésta se encentra hasta el final de las preguntas. Esto hará que las respuestas que haya producido se almacenen en una base de datos. Si alguna de las casillas no fue contestada, se emitirá un mensaje advirtiendo que no se ha completado la actividad, por lo que el alumno no podrá pasar a la siguiente etapa, esto se hace con la intención de evitar casillas sin respuesta, ya que en ocasiones se evade u omite información. Si el usuario no contesta porque no sabe la respuesta, se les pide que contesten "no sé", "no se me ocurre", "no me acuerdo" o una respuesta similar.

3.2.2. Applet de la segunda etapa

En esta etapa se despliegan dos líneas de acción. Por un lado se introduce una nueva forma de representación simbólica de las fracciones con el teclado del ordenador a través de una ventana que aparece en la pantalla, ver Figura 3.6. Al exigir a los estudiantes introduzcan las fracciones mediante teclado, los situamos en una forma de actuar más próxima al lápiz y papel, pero además permite registrar las fracciones que escriben en la base de datos. Por otro lado, a través de la interacción estudiante/applet, el alumno podrá reconocer características propias de las fracciones, con la finalidad de lograr el propósito de esta etapa. A continuación se exponen los componentes considerados para la construcción del applet que constituye esta etapa.

a) Propósito

El propósito de esta etapa es que los alumnos logren:

1. Asociar el orden de las fracciones con las longitudes de los segmentos azules. "una fracción es mayor que otra si el segmento azul que la representa es más largo que el segmento que representa a la otra fracción".

2. Asociar el orden de las fracciones de acuerdo con la posición que ocupa el punto que representa a la fracción en la recta. "la fracción mayor se encuentra en la recta numérica a la derecha de la menor".

3. Acercar al alumno a la propiedad de densidad de las fracciones, específicamente para referirse a la cantidad de fracciones que hay entre dos números enteros.

b) Indicaciones

En la pantalla principal aparece "clica el botón de INICIO", una vez hecho, aparece la indicación que se observa en la Figura 3.6.

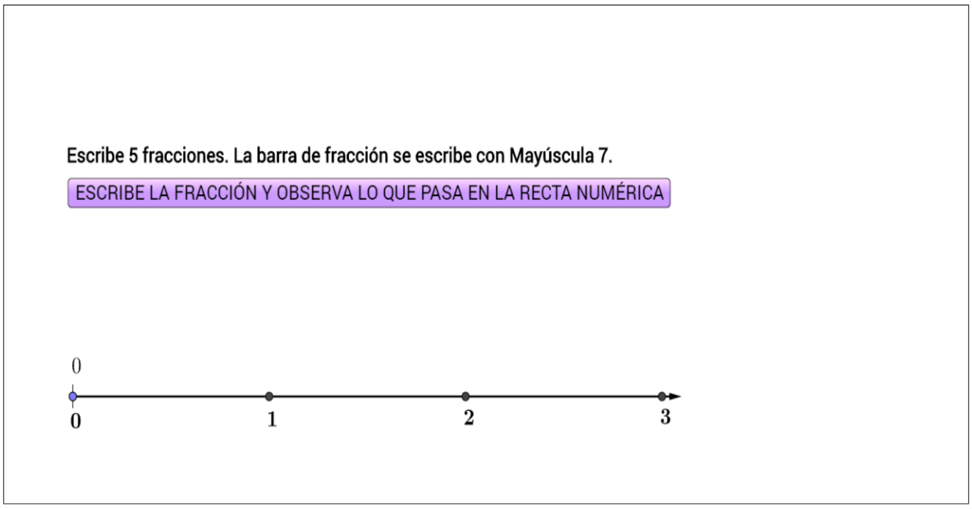


Figura 3.6. Applet de la segunda etapa

Se ha colocado como ayuda la oración "La barra de fracción se escribe con Mayúscula 7", considerando que algunos alumnos carecen del manejo de códigos de escritura con el teclado del ordenador. Dicha oración no forma parte de la indicación, por lo que debería estar ubicado en otro sitio del applet, pero se creyó conveniente dejarlo en esa posición para que sea más visible. De la misma manera, el botón donde se hace clic para introducir la fracción contienela instrucción "Escribe la fracción y observa lo que pasa en la recta numérica", esto con la intención de incitar al alumno a ver la representación gráfica una vez que haya escrito la fracción.

c) Elementos del diseño

En la representación gráfica aparece al igual que en el primer applet, un segmento de longitud de tres unidades teniendo en cuenta las mismas consideraciones de diseño. Se introduce una nueva herramienta en el applet, una ventana para introducir información. Se debe introducir la fracción con el teclado del ordenador usando el símbolo "/", una vez escrita por el usuario, la fracción se representa de forma gráfica y simbólica en la recta numérica, pero con la notación simbólica habitual que se usa para denotar las fracciones. Además solo se podrán representar cinco fracciones, que están limitadas a aquellas con denominador entre 2 y 10 y numerador entre 0 y 40, en caso de que el usuario escriba una fracción que no cumpla con estas características, aparecerá otra ventana que emite un mensaje, éste recomienda seguir las condiciones anteriores, tal como se muestra en la Figura 3.7.

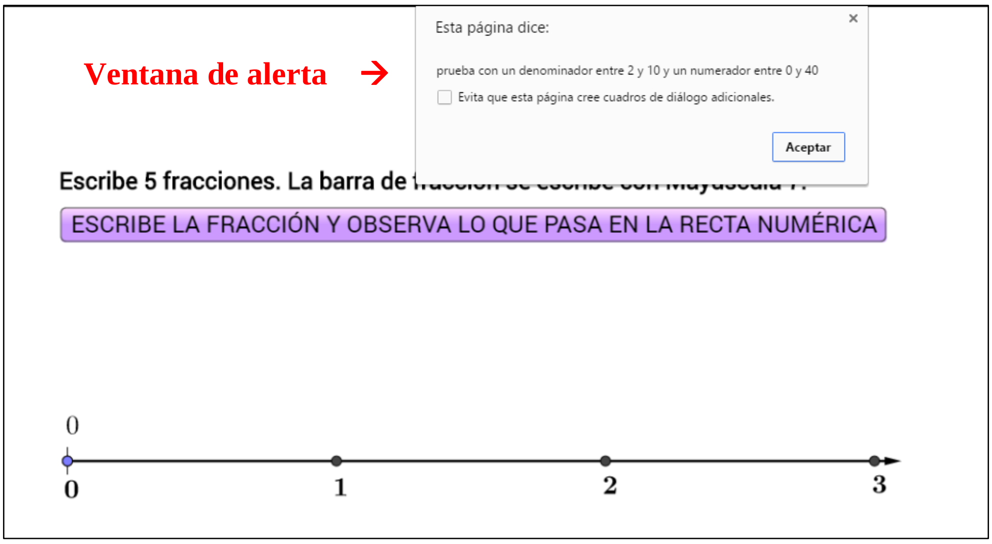


Figura 3.7. Ventana de alerta para escribir fracciones con determinadas características

Las fracciones escritas por el usuario dejan un rastro en forma de punto rojo y valor de la fracción. De esta forma se posibilita que los alumnos las puedan visualizar y apoyarse para responder a las preguntas que posteriormente se les plantea. Al introducir una fracción con denominador entre 2 y 10 y numerador entre 0 y 40, pero mayor que tres, entonces aparece otra ventana de alerta para indicar que esa fracción no se puede ver en el segmento de recta que aparece en la pantalla. Estas dos características se pueden observar en la Figura 3.8.

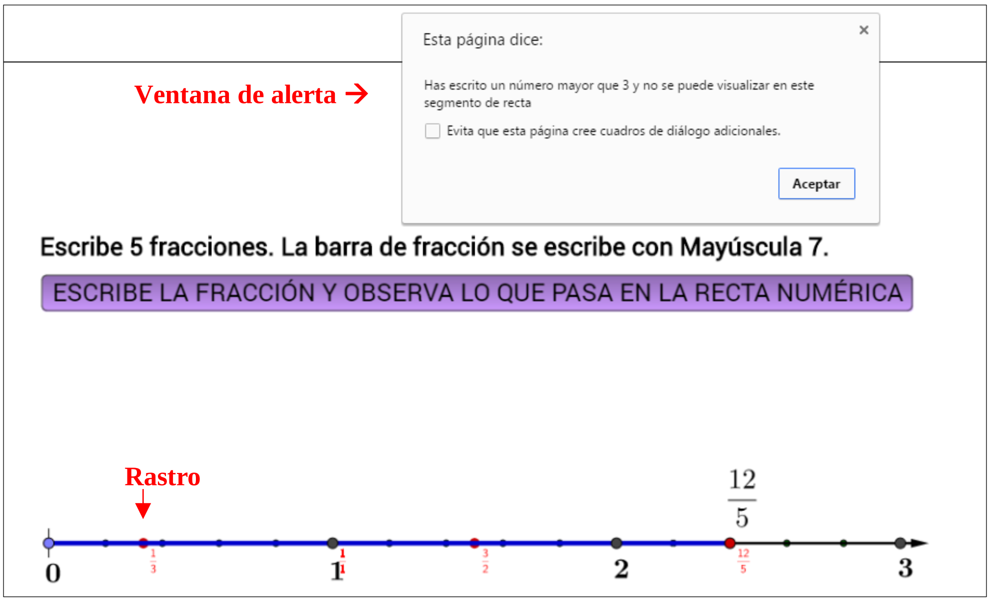
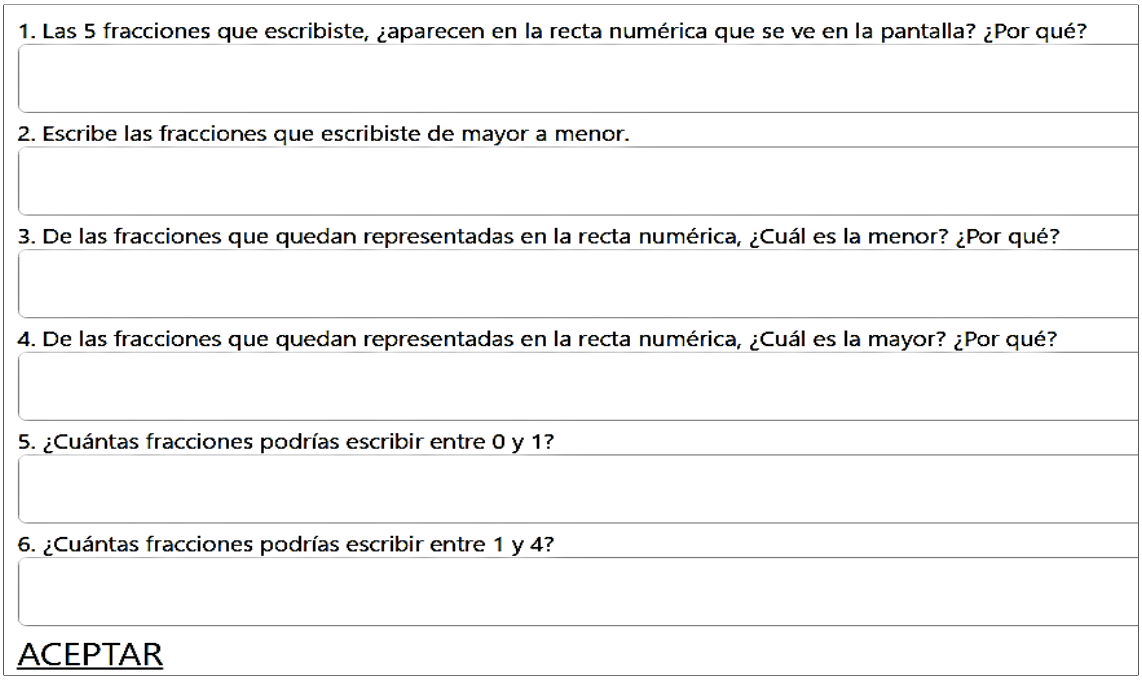


Figura 3.8. Rastro y ventana de alerta por escribir una fracción mayor que tres

Cuando el usuario haya escrito las cinco fracciones, se oculta el botón morado que muestra la indicación para escribir la fracción. Las fracciones escritas se guardan en una base de datos. Como ya se mencionó, el rastro que queda visible en la pantalla, sirve para que el alumno responda las siguientes cuestiones, aunque para las fracciones mayores que 3 no se podrá ver el rastro.

d) Cuestiones planteadas para llevar al alumno a una reflexión

En la Figura 3.9 se muestran las preguntas e indicaciones que se plantean para que los alumnos reflexionen sobre las fracciones escritas durante la interacción estudiante/applet.


1. Las 5 fracciones que escribiste, ¿aparecen en la recta numérica que se ve en la pantalla? ¿Por qué?

2. Escribe las fracciones que escribiste de mayor a menor.

3. De las fracciones que quedan representadas en la recta numérica, ¿Cuál es la menor? ¿Por qué?

4. De las fracciones que quedan representadas en la recta numérica, ¿Cuál es la mayor? ¿Por qué?

5. ¿Cuántas fracciones podrías escribir entre 0 y 1?

6. ¿Cuántas fracciones podrías escribir entre 1 y 4?

ACEPTAR

Figura 3.9. Cuestiones de la segunda etapa para llevar al alumno a una reflexión

La pregunta 1 se plantea para seguir el progreso que pudo tener el alumno para subdividir las unidades de la recta numérica, de manera que logre representar fracciones fuera del segmento de recta que se muestra en el diseño del applet. Las preguntas 2, 3 y 4 atienden al propósito de asociar el orden de las fracciones de acuerdo a su posición en la recta o la longitud del segmento que la representa. Las preguntas 5 y 6 permiten observar la idea que tienen los usuarios sobre la propiedad de densidad de las fracciones, en este caso se refiere a la cantidad de fracciones que hay entre dos números enteros no necesariamente consecutivos.

3.2.3. Applet de la tercera etapa

Los componentes considerados para la construcción del applet que constituye la etapa tres se exponen a continuación.

a) Propósito

Para esta etapa se propone que el alumno logre:

1. Recordar la estructura simbólica de la fracción a partir de la relación entre el numerador y denominador representados por los deslizadores.

2. Reconocer el segmento [0, 1] como unidad, para observar de manera explícita la relación parte-todo, es decir, la relación entre el número de partes iguales en las que se

divide la unidad y las partes que representan la fracción, ya sea a través del segmento azul o el punto rojo.

3. Generalizar y justificar el proceso de partición en el modelo de la recta numérica.

b) Indicaciones

En la pantalla aparecen tres indicaciones (ver Figura 3.10), las cuales están relacionadas con las preguntas que posteriormente se plantean.

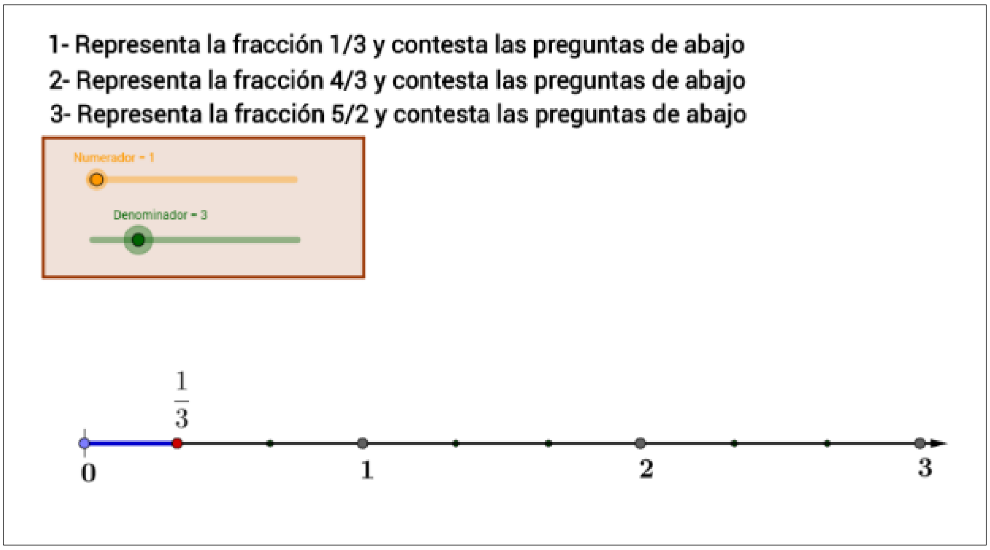


Figura 3.10. Applet de la tercera etapa

Se ha elegido la representación de las fracciones 1/3, 4/3 y 5/2 porque el proceso de partir en dos es simple mientras que el proceso de partir en tres no es tan trivial. En ambas particiones se generan fracciones comunes para los estudiantes, y además por el tamaño de las partes, esas particiones permiten observar más claramente la representación gráfica. Se han considerado una fracción propia y dos impropias.

c) Elementos del diseño

El segmento de recta numérica de este applet tiene las mismas características de diseño que en los applets 1 y 2. El valor mínimo del deslizador que representa al denominador es 1 y el máximo es 10. El numerador tiene 0 como valor mínimo y 30 como máximo. En este caso la representación simbólica y gráfica de las fracciones está guiada, es decir, se deben representar fracciones específicas, pero eso no limita al alumno a explorar con otras fracciones.

La actividad se ha enfocado a la representación gráfica y simbólica de tres fracciones, de manera que el usuario logre identificar que el denominador representa el número de partes en las que se divide el segmento [0, 1], siendo ésta la unidad o el todo, y que este proceso de partición se repite para cada iteración de la unidad, es decir los segmentos [1, 2], [2, 3]…. Que el numerador es el número de partes que se toman para representar la fracción y que ésta queda determinada por la longitud del segmento azul, o del número de puntos que se toman de la partición.

d) Cuestiones planteadas para llevar al alumno a una reflexión

En la Figura 3.11 se observan las preguntas que se han planteado para logran el propósito de esta etapa.

1. Cuando has representado la fracción 1/3, ¿en cuántas partes se ha dividido el segmento que empieza en 0 y acaba en 1?

2. Cuando has representado la fracción 1/3, ¿cuántas de esas partes mides el segmento azul?

3. Cuando has representado la fracción 4/3, ¿en cuántas partes se ha dividido el segmento que empieza en 0 y acaba en 1?

4. Cuando has representado la fracción 4/3, ¿cuántas de esas partes mides el segmento azul?

5. Cuando has representado la fracción 5/2, ¿en cuántas partes se ha dividido el segmento que empieza en 0 y acaba en 1?

6. Cuando has representado la fracción 5/2, ¿cuántas de esas partes mides el segmento azul?

ACEPTAR

Figura 3.11. Cuestiones de la tercera etapa para llevar al alumno a una reflexión

Las preguntas 1, 3 y 5 se plantean con la finalidad de identificar el número de partes en las que se ha divido la unidad. Se pone énfasis en el segmento que inicia en 0 y termina en 1 para enfatizar en este segmento como la unidad. Las preguntas 2, 4 y 6 se formulan para establecer la relación entre el número de partes en las que se divide la unidad y las partes que mide el segmento azul, con la finalidad de enfatizar en la representación de fracciones a partir de las magnitudes, es decir, en el aspecto de la fracción como medidora, aunque cabe señalar que en el proceso de partición la fracción subyace como fracturador.

3.2.4. Applet de la cuarta etapa

La construcción del applet que constituye la cuarta etapa de la secuencia de enseñanza considera los siguientes componentes.

a) Propósito

Para esta etapa se propone que el usuario logre:

1. Distinguir entre fracciones propias e impropias a partir de sus características, ya sea en relación con la unidad o respecto a la relación entre numerador y denominador.

2. Identificar la unidad escrita en la forma $\frac{m}{m}, m \in \mathbb{N}$.

3. Caracterizar a los enteros como fracciones.

4. Introducir la idea de fracciones equivalentes a partir de la equivalencia entre fracciones y números enteros.

b) Indicaciones

En la pantalla aparecen tres indicaciones, la primera se plantea de manera general para que el estudiante explore el recurso, y las otras dos son específicas, ver la Figura 3.12.

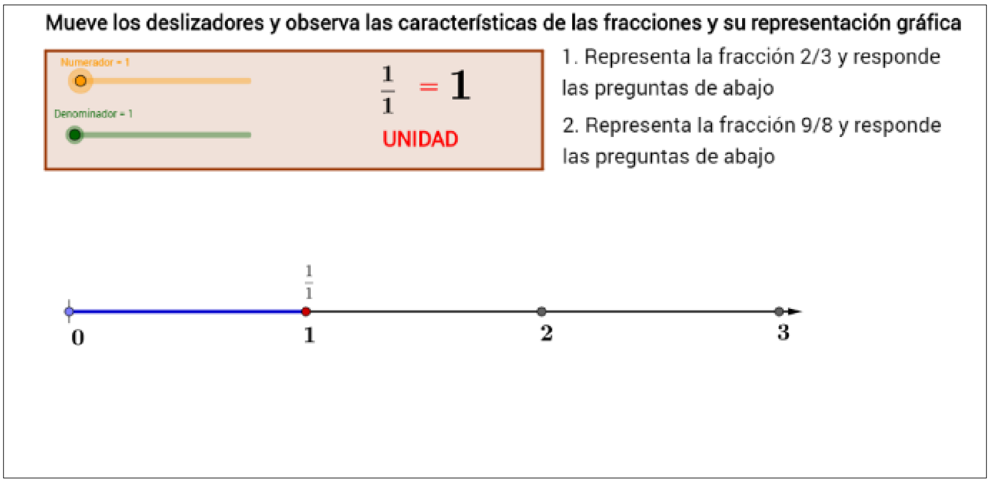


Figura 3.12. Applet de la cuarta etapa

Se ha elegido representar en la recta numérica las fracciones 2/3 y 9/8 para poder observar una fracción propia y otra impropia. Se han elegido con la característica de que el numerador y denominador en cada una de ellas sean números enteros consecutivos, esto con la finalidad de comparar el numerador con el denominador y que los alumnos logren identificar que: (1) las fracciones propias tienen denominador mayor que el numerador y (2) las fracciones impropias tienen denominador menor que el numerador.

c) Elementos del diseño

Es un applet de exploración en el cual el usuario puede representar gráfica y simbólicamente fracciones que se encuentren entre 0 y 3 y solo de manera simbólica aquellas fracciones que estén entre 3 y 30. En todos los casos la introducción de las fracciones se realiza mediante los deslizadores. El deslizador del numerador tiene como valor mínimo al 0 y máximo al 30, mientras que los valores del deslizador que representa al denominador están entre 1 y 10. Al moverse los deslizadores cambian los numeradores y los denominadores en la representación simbólica de la fracción, la cual se representa de forma simbólica a un lado de los deslizadores, ver Figura 3.13. También se incluye la información siguiente:

1. Cuando la fracción es menor que la unidad aparece el signo "menor que" seguido del número uno (la unidad), y a su vez aparece con letras rojas la frase "fracción propia" para caracterizar este tipo de fracciones (Figura 3.13).

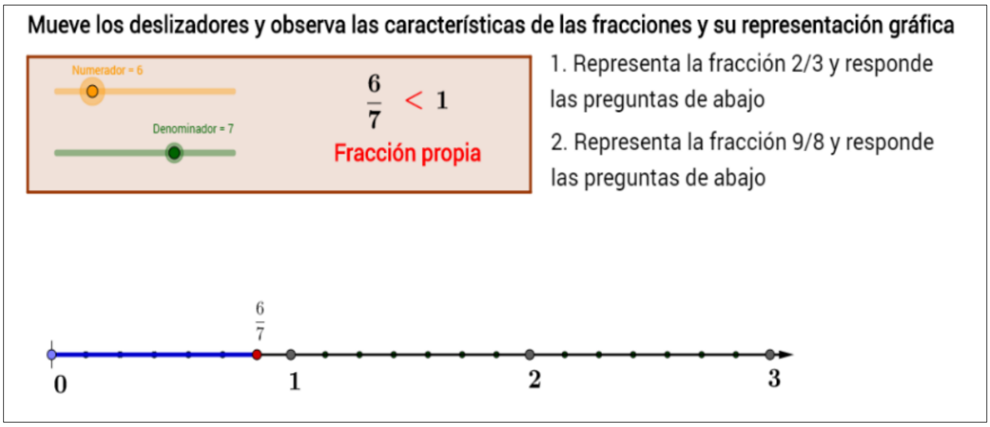


Figura 3.13. Caracterización de la fracción propia

2. Cuando la fracción es mayor que la unidad aparece el signo "mayor que" seguido del número uno, y en este caso aparece la frase "fracción impropia" para caracterizar este otro tipo de fracciones (Figura 3.14).

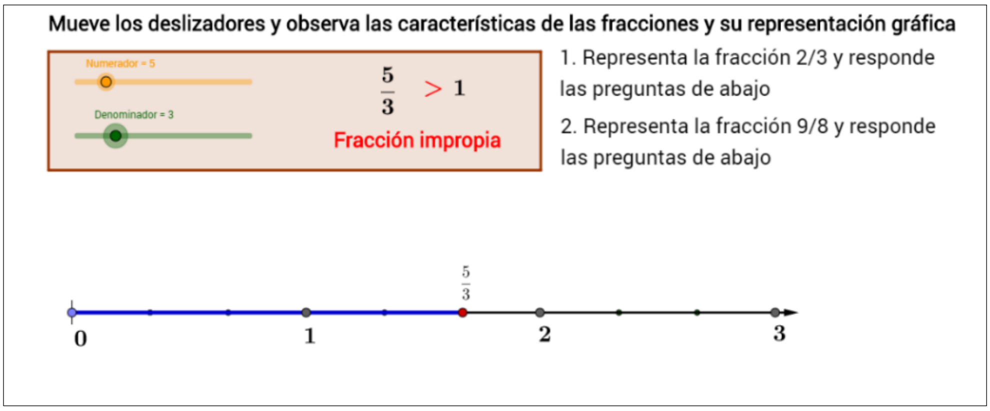


Figura 3.14. Caracterización de la fracción impropia

3. Cuando la fracción es igual a la unidad aparece el signo igual seguido del número uno, y en el texto aparece “unidad”, tal como se muestra en la siguiente figura.

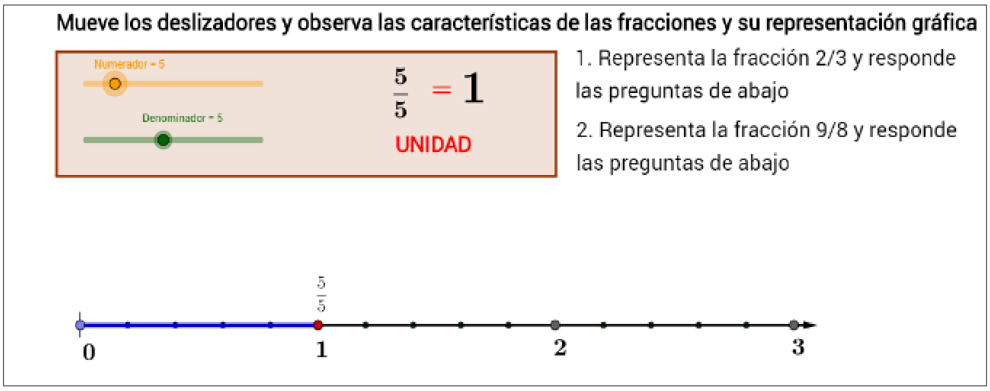


Figura 3.15. Caracterización de la fracción unidad

4. Cuando las fracciones se reducen a un número natural, entonces se pone del lado izquierdo el signo igual y el número natural al que es equivalente y en el lado derecho aparece el signo “mayor que” seguido de la unidad, también aparece el texto “fracción impropia” (Figura 3.16).

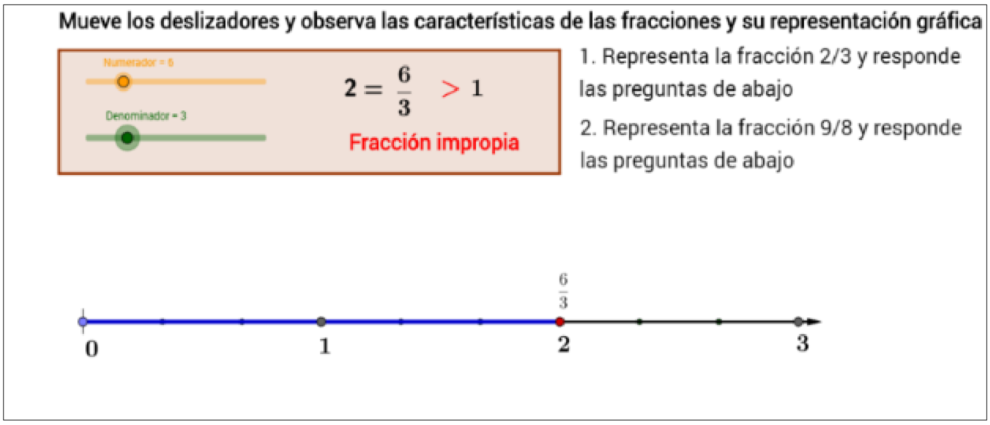


Figura 3.16. Caracterización de los enteros como fracción

Como ya se ha indicado, el diseño de este applet está más orientado hacia la exploración, de tal manera que la información que se comunica durante la interacción estudiante/applet sirve para responder a cuestionamientos de esta y las siguientes etapas.

d) Cuestiones planteadas para llevar al alumno a una reflexión

En este applet se formular siete cuestiones más para que el alumno interactúe con el recurso, y así se logre el propósito de la etapa, éstas se pueden observar en la siguiente figura.

1. ¿La fracción 2/3 es mayor que uno?.

2. ¿La fracción 9/8 es mayor que uno?.

3. En una fracción impropia, ¿el denominador es mayor o menor que el numerador? Usa los deslizadores si lo consideras necesario

4. ¿Hay fracciones impropias mayores que 3? Si contestaste que sí da un ejemplo.

5. Mueve los deslizadores para obtener 30/4. ¿Por qué no puedes ver la fracción representada como un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la pantalla? ¿Entre qué puntos de la recta numérica crees que se encuentra el punto que representa a la fracción 30/4?

6. Usando los deslizadores identifica las fracciones que representen al número 1. Escríbelas.

7. ¿Cómo le explicarías a tu compañero que los enteros también se pueden escribir como fracciones?

ACEPTAR

Figura 3.17. Cuestiones de la cuarta etapa para llevar al alumno a una reflexión

Las preguntas 1 y 2 se plantean con la intención de destacar la característica de las fracciones propias e impropias a partir de su relación con la unidad, en donde además resulta la comparación y orden de las fracciones. Mientras que en la pregunta 3 se destaca la característica de este mismo tipo de fracciones pero a partir de la relación que hay entre sus numeradores y denominadores.

Las preguntas 4 y 5 se plantean para generalizar lo que se observa en la pantalla durante la interacción con el applet, es decir, que las fracciones impropias no solo son aquellas que están entre uno y tres. También se ratifica la idea que en la recta numérica se pueden representar otras fracciones y no necesariamente que pueden observarse debido a las limitaciones de espacio del applet. Asimismo, los cuestionamientos 4 y 5 permiten verificar si el alumno realmente logra identificar fracciones mayores que tres.

Las preguntas 6 y 7 atienden a los propósitos 2 y 3 respectivamente, los cuales se refieren a representar la unidad y cualquier número entero como fracciones.

3.2.5. Applet de la quinta etapa

A continuación se exponen los componentes que se consideran para el diseño del applet que constituye la etapa cinco de la secuencia de enseñanza.

a) Propósito

Para esta etapa se propone lo siguiente:

1. Consolidar las características de las fracciones propias e impropias, de manera que el alumno logre clasificarlas a partir de tales características.

2. Acercar al alumno a la propiedad de densidad de las fracciones, específicamente para referirse a la cantidad de fracciones propias e impropias que se pueden representar en la recta numérica.

b) Indicaciones

En la pantalla principal aparece “Clica el botón de INICIO”, una vez realizada esta indicación, aparece otra que dice “Escribe cinco fracciones propias y cinco impropias”. Tal como se muestra en la Figura 3.18.

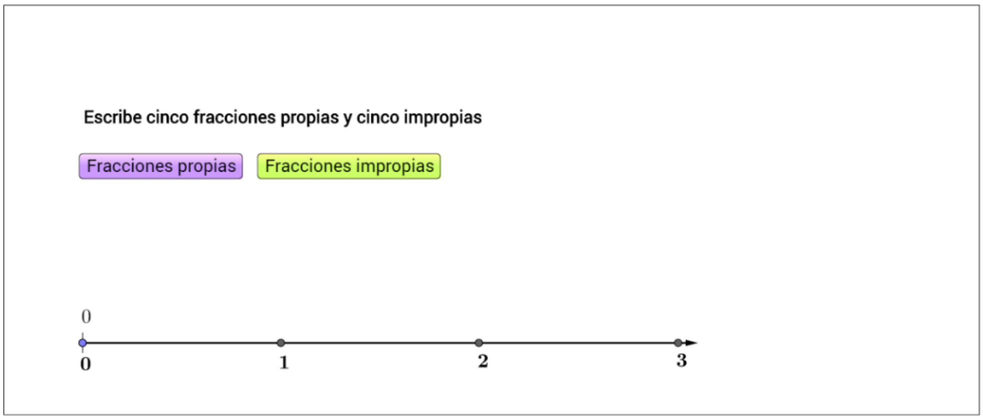


Figura 3.18. Applet de la quinta etapa

Para escribir las fracciones se tiene que hacer clic en el botón correspondiente e introducirlas en la ventana emergente (Figura 2.9). Una vez introducidas la totalidad de fracciones indicadas, el usuario debe completar la actividad con las preguntas de la parte inferior que aparece en la pantalla, por ejemplo la de la Figura 3.22.

c) Elementos del diseño

Al igual que en las etapas anteriores, la representación gráfica de las fracciones se hace en un segmento que tiene como longitud tres unidades, donde se tiene en cuenta las mismas consideraciones de diseño que en los applets anteriores.

Se utiliza una vez más la ventana como herramienta para introducir y emitir información. De la misma forma que en el applet de la etapa 2, se introduce la fracción escrita con el teclado del ordenador usando el símbolo “/”, solo que en esta etapa se debe distinguir entre fracciones propias e impropias, de acuerdo con las características que el usuario previamente ha observado.

El estudiante elige la fracción que quiere introducir de manera arbitraria. Al alcanzar las cinco fracciones de un tipo, desaparece el botón que permite introducirlas. Cuando el estudiante pulsa uno de los dos botones, aparece una ventana emergente que permite introducir la fracción mediante teclado. El applet evalúa la expresión y genera un mensaje que indica si la fracción que se ha introducido corresponde o no al tipo de fracciones que se han elegido. En caso de que sí se corresponda con el tipo de fracciones seleccionadas, ya sea propias o impropias, la ventana incluye un texto que invita al usuario a observar la representación gráfica y simbólica en la recta numérica tal como se muestra en las Figuras 3.19 y 3.20 (a primera figura corresponde a una fracción propia, y la segunda a una impropia).

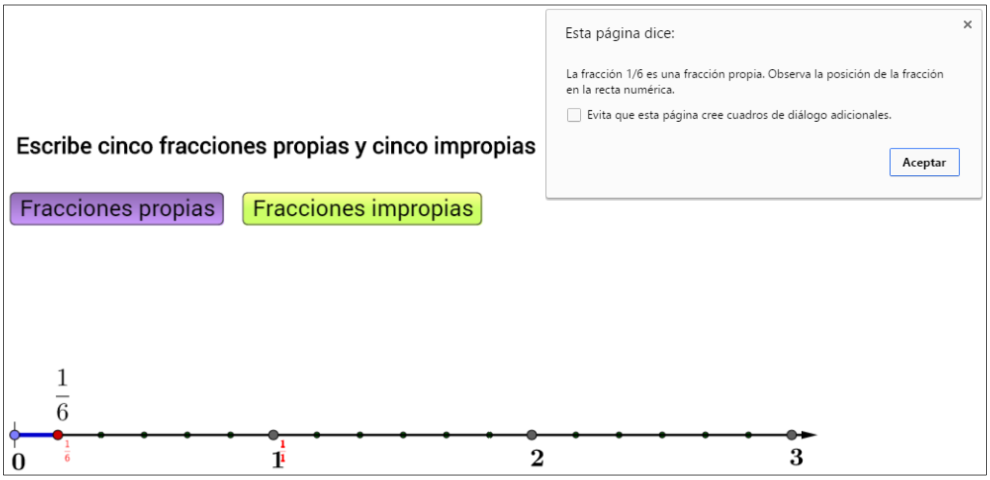


Figura 3.19. Ventana emitida al escribir una fracción propia

Cabe señalar que las fracciones se representan gráfica y simbólicamente en la recta numérica una vez que se haya hecho clic en el botón “Aceptar” de la ventana, pero en las figuras referidas se han representado antes para mostrar una mejor ilustración.

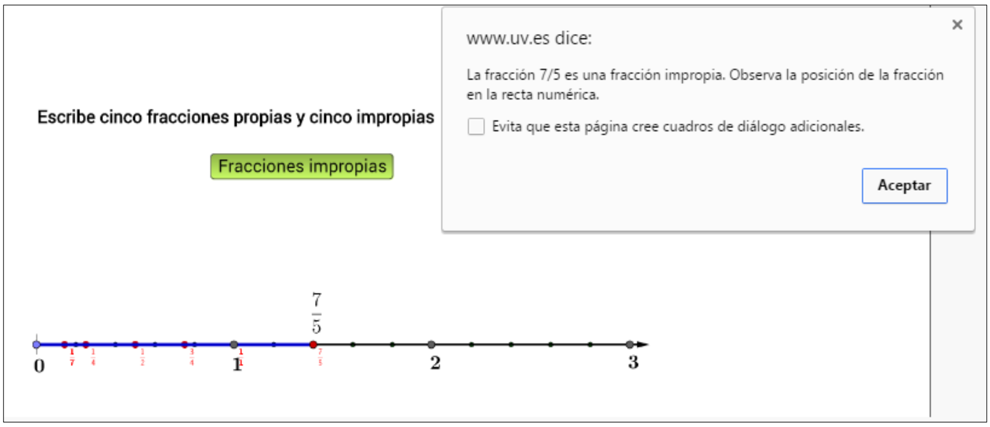


Figura 3.20. Ventana emitida al escribir una fracción impropia

Solo se pueden representar cinco fracciones de cada tipo, las cuales están limitadas a aquellas con denominador entre 2 y 10 y numerador entre 0 y 40. En caso de que el usuario escriba una fracción que no cumpla con estas otras características, aparecerá una ventana de alerta que recomienda seguir con las condiciones del diseño. Un mensaje de este tipo se puede consultar en la Figura 3.7 que se encuentra en la descripción de la segunda etapa.

Cuando el alumno haya escrito la totalidad de fracciones en cada botón, éstos desaparecen, para registrar solo las cinco fracciones que se piden. En la Figura 3.19 se puede observar cómo el botón donde se escriben las fracciones propias ha desaparecido y en la recta se observan como rastro las fracciones escritas.

En el caso de que la fracción escrita por el alumno no corresponda con el tipo de fracciones del botón que se ha seleccionado, entonces aparece una ventana donde se informa de esto, tal como se muestra en la Figura 3.21. Al hacer clic en el botón "Aceptar" aparece nuevamente la ventana para que se introduzca otra fracción que cumpla las características.

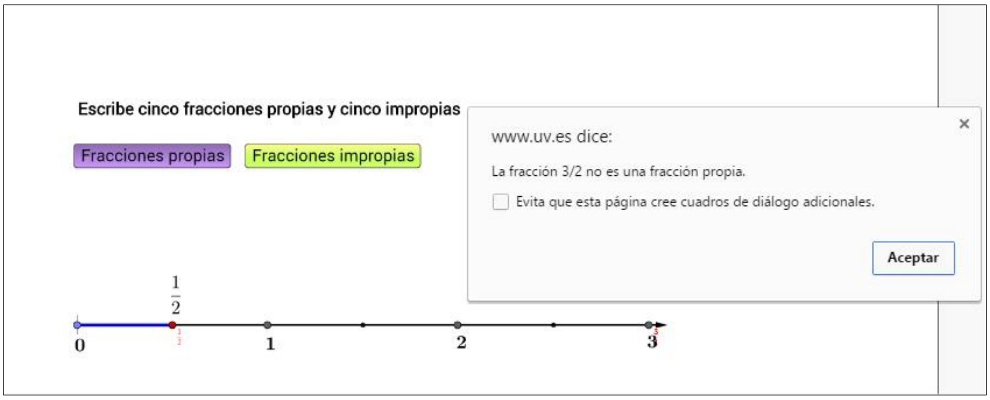
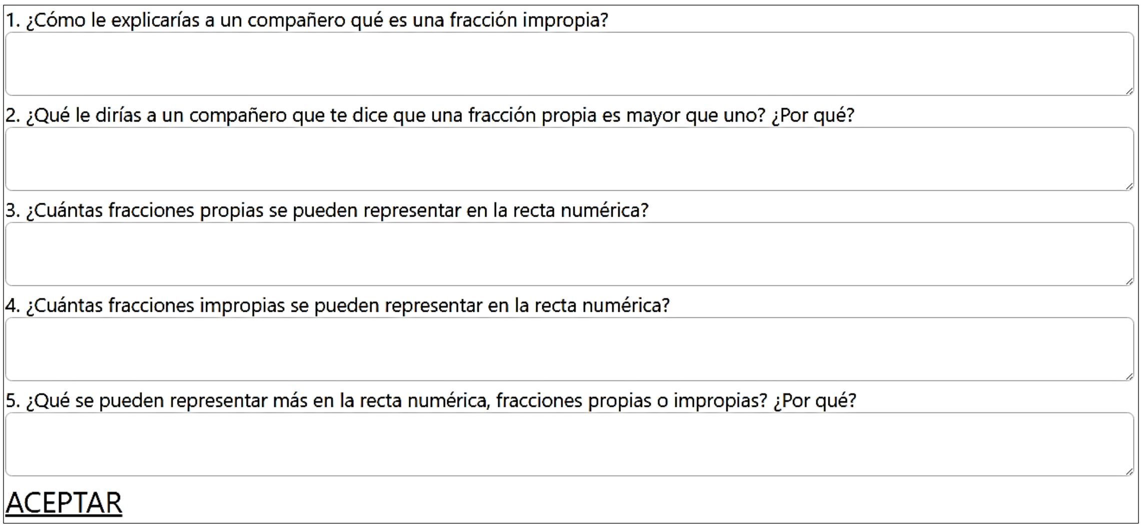


Figura 3.21. Ventana de alerta cuando se escriben fracción que no corresponden al botón

De la misma manera que en el applet 2, cuando el alumno introduce una fracción mayor a tres, aparece otra ventana de alerta para indicar que esa fracción no puede ser vista en el segmento de recta que aparece en la pantalla (ver Figura 3.8). El rastro de las fracciones se queda representado en la recta numérica con la intención de que el usuario pueda comparar las fracciones escritas, y como ayuda para responder a las preguntas e indicaciones que a continuación se enuncian.

d) Cuestiones planteadas para llevar al alumno a una reflexión

En la Figura 3.22 se pueden observar las preguntas que se han formulado para esta etapa de la secuencia.


1. ¿Cómo le explicarías a un compañero qué es una fracción impropia?

2. ¿Qué le dirías a un compañero que te dice que una fracción propia es mayor que uno? ¿Por qué?

3. ¿Cuántas fracciones propias se pueden representar en la recta numérica?

4. ¿Cuántas fracciones impropias se pueden representar en la recta numérica?

5. ¿Qué se pueden representar más en la recta numérica, fracciones propias o impropias? ¿Por qué?

ACEPTAR

Figura 3.22. Cuestiones de la quinta etapa para llevar al alumno a una reflexión

Las preguntas 1 y 2 permiten registrar si el alumno ha identificado las características de las fracciones propias e impropias durante la secuencia, de manera que logre formular una explicación que describa este tipo de fracciones. Las preguntas 3, 4 y 5 es un seguimiento a la idea que tienen los alumnos sobre la propiedad de densidad de las fracciones, en este caso para comparar la cantidad de fracciones propias e impropias que se pueden representar en la recta numérica.

3.2.6. Applet de la sexta etapa

En esta etapa se continúan utilizando las ventanas como herramienta para introducir y emitir información, y se supone que el alumno ya se encuentra familiarizado con su uso. Se exponen a continuación los componentes considerados para el diseño del applet que aquí se construye.

a) Propósito

Para esta etapa se propone lo siguiente:

1. Acercar al alumno a la propiedad de densidad de las fracciones, en este caso para representarlas gráficamente entre números enteros consecutivos y entre otras fracciones.

2. Comparar y ordenar fracciones a partir de las características de sus numeradores y denominadores, de la longitud de los segmentos o de los puntos que representan a las fracciones en la recta numérica.

3. Introducir la idea de fracciones equivalentes.

b) Indicaciones

En la pantalla principal aparece la oración “Clica el botón de INICIO”, una vez hecho aparece la indicación que se observa en la Figura 3.23.

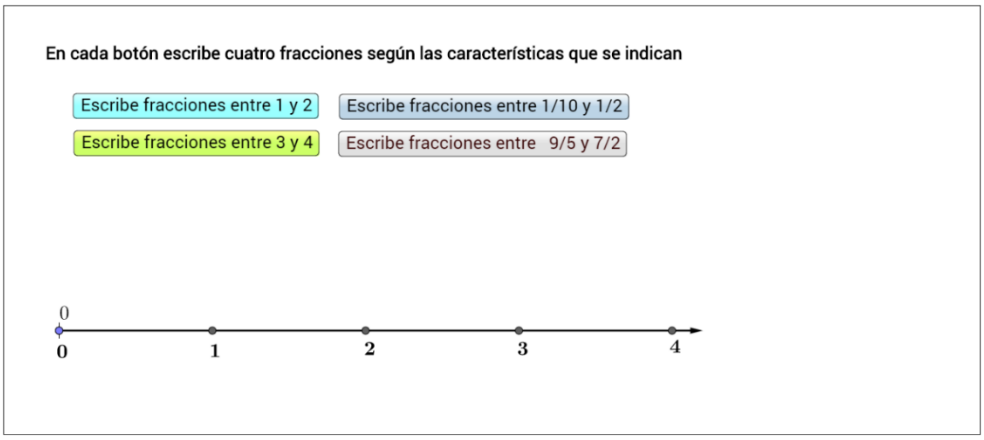


Figura 3.23. Applet de la sexta etapa

Para escribir las fracciones entre los intervalos que se indican se debe hacer clic en el botón correspondiente e introducirla en la ventana emergente. Se han elegido esos intervalos para que las fracciones que se escriban estén distribuidas en el segmento de recta que se muestra en la pantalla. Además se ha elegido el intervalo [3, 4] porque en el diseño de este applet se amplía el segmento de recta utilizado en las etapas anteriores. Una vez introducidas la totalidad de fracciones indicadas, el usuario debe responder a los cuestionamientos que se plantean.

b) Elementos del diseño

Como se mencionó antes, en este applet se amplía el segmento de recta en el que se hace la representación gráfica de las fracciones, ahora tiene como longitud cuatro unidades. Para el diseño de este segmento se tienen en cuenta las mismas consideraciones que en los applets anteriores.

De la misma forma que en los applet dos y cinco se escribe la fracción a través de una ventana que aparece en la pantalla. Para escribir dicho número se utiliza el símbolo “/” del teclado del ordenador. En este caso se debe reconocer el orden de las fracciones para escribirlas según el intervalo del botón que se seleccione.

Para escribir las fracciones, el alumno puede seleccionar los botones de forma arbitraria. Una vez introducida la fracción aparece su representación gráfica en el segmento de recta numérica que aparece en la pantalla, así como su representación simbólica. El applet genera una ventana que indica si la fracción que se ha introducido corresponde o no al intervalo que se ha elegido. En caso de que la fracción escrita sí esté en ese intervalo, en la ventana se muestra enunciado un texto que incita al alumno a observar el segmento azul que representa la fracción gráficamente, tal como se muestra en la Figuras 3.24.

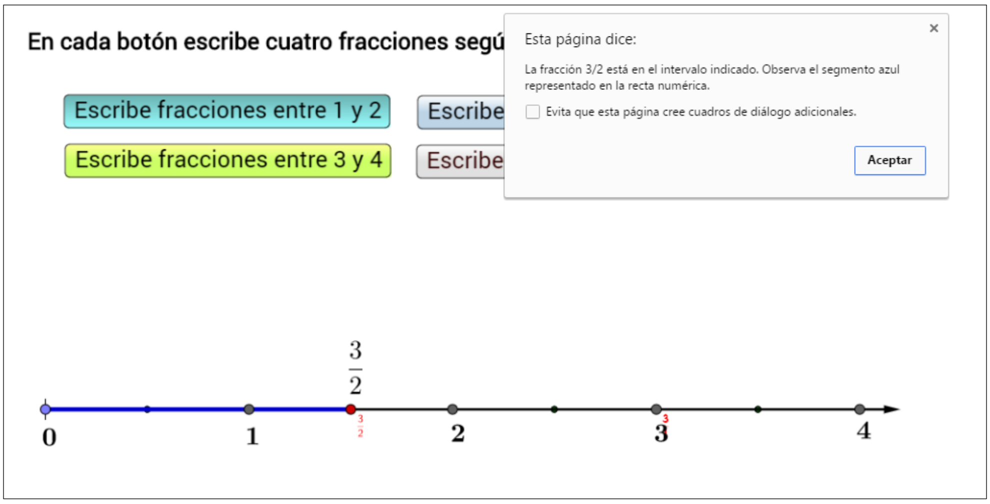


Figura 3.24. Ventana indicando que una fracción está en el intervalo indicado

En caso contrario, es decir, cuando la fracción escrita no está dentro del intervalo indicado, aparece otra ventana que lo indica, tal como se muestra en la Figura 2.25. Aunque la fracción escrita no esté en el intervalo, la fracción se representa gráfica y simbólicamente en el segmento de recta que aparece en la pantalla.

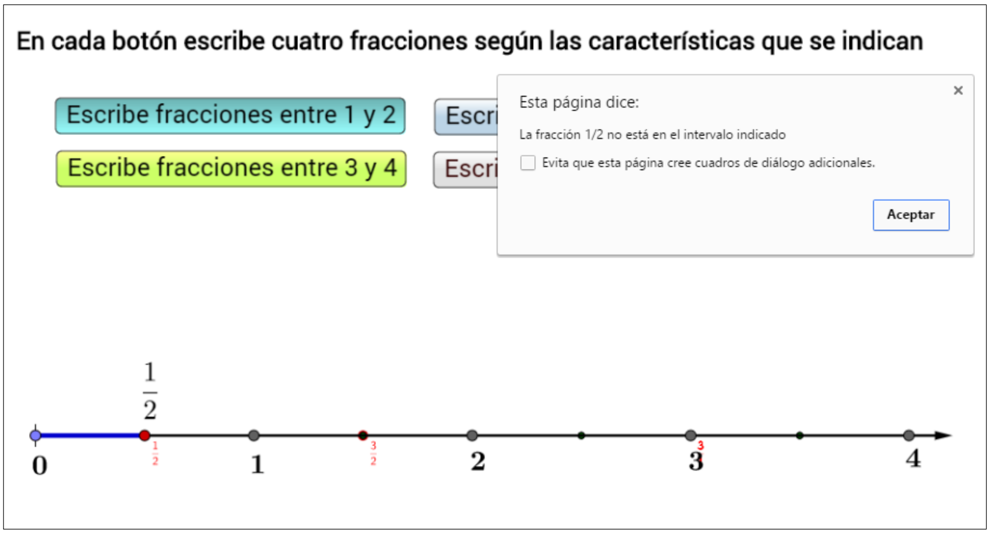


Figura 3.25. Ventana indicando que una fracción no está en el intervalo indicado

El diseño de este applet considera las mismas características para la escritura de las fracciones, las cuales fueron descritas en los applet correspondientes a las etapas dos y cinco. Es decir, cuando el alumno escribe una fracción mayor que tres o cuando escribe alguna fracción que no satisfaga las condiciones de numerador entre 0 y 40 y denominador entre 2 y 10, entonces aparece otra ventana de alerta para indicar que esa fracción no puede ser vista en el segmento de recta porque no cumple con tales características. El rastro de las fracciones también se queda representado en la recta numérica como ayuda para responder a las preguntas e indicaciones que a continuación se detallan.

d) Cuestiones planteadas para llevar al alumno a una reflexión

Los cuestionamientos que se han formulado para completar esta etapa aparecen en la siguiente figura.

1. ¿Cuál de las fracciones que escribiste entre 1 y 2 es mayor? ¿Por qué?

2. ¿Cuál de las fracciones que escribiste entre 3 y 4 es mayor que 1? ¿Por qué?

3. Elige una de las fracciones que escribiste entre 1/10 y 1/2. ¿Qué tendrías que cambiarle a la fracción para que el resultado estuviera entre 9/5 y 7/2?

4. Elige una de las fracciones que escribiste entre 3 y 4, escribe otra fracción que se represente con el mismo punto. ¿Cómo le explicarías a tu compañero que esas dos fracciones se representan con el mismo punto en la recta numérica?

Figura 3.26. Cuestiones de la sexta etapa para llevar al alumno a una reflexión

Las preguntas 1 y 2 permiten registrar las estrategias empleadas por los alumnos para determinar el orden de las fracciones, ya sea por las longitudes de los segmentos o los puntos que las representan. La pregunta 2 además permite identificar si el alumno logra dar su respuesta basándose en las características de las fracciones impropias y su relación con la unidad. Con la pregunta 3, aparte de caracterizar la idea que tienen los aprendices respecto a la comparación y orden de las fracciones, permite ver las estrategias que emplean para transformar una fracción en otra según las características planteadas en la pregunta. La pregunta 4 se formula con la intención de introducir al alumno el concepto de número racional a partir de las clases de equivalencia, es decir, como representantes de un mismo punto en la recta numérica. Asimismo se puede identificar la idea que los estudiantes tienen respecto a la equivalencia de fracciones.

3.2.7. Applet de la séptima etapa

El diseño del applet en esta etapa es un tanto diferente a los anteriores, aquí se introduce una nueva herramienta del software, en este caso el arrastre de objetos, específicamente de un punto. A continuación se exponen los componentes considerados para el diseño del applet que constituye la séptima etapa de la secuencia de enseñanza.

a) Propósito

Para esta etapa se propone lo siguiente:

1. Consolidar la instrucción de las etapas anteriores en cuanto a la representación de fracciones como puntos en la recta numérica.

2. Desarrollar la idea de orden y de equivalencia de fracciones a partir de las características del segmento de recta utilizado para el diseño del applet.

b) Indicaciones

En la pantalla se muestra la oración “clica el botón de INICIO”, una vez realizada la primera instrucción, aparece en la pantalla la indicación que se observa en la Figura 3.27.

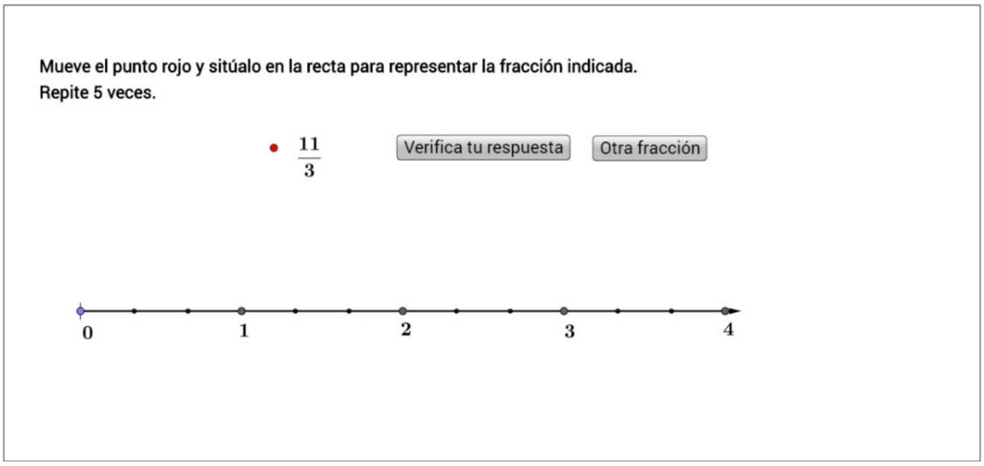


Figura 3.27. Applet de la séptima etapa

La primera fracción ofrecida para su representación gráfica en el segmento de recta aparece de forma aleatoria y ésta obedece las características que se detallan en el siguiente componente del diseño.

c) Elementos del diseño

El segmento de recta que se muestra en este applet tiene la misma forma que el de los applets de las otras etapas, solo que aquí el segmento mide cuatro unidades de longitud y no se muestra el segmento azul que representa a la fracción.

Como se menciona anteriormente, las fracciones que se deben representar como punto en el segmento de recta se generan de forma aleatoria bajo ciertas limitaciones, es decir, el denominador genera valores entre 1 y 10 y el numerador depende del valor generado por el denominador de tal forma que el numerador adquiere valores de la forma 4n, donde n adopta los valores del denominador. Esto con la intención de que no se generen fracciones mayores que 4.

Para representar gráficamente a la fracción que se muestra en la pantalla de forma simbólica, se debe arrastrar el punto rojo que aparece al lado de ella hacia el lugar que le corresponde en la recta numérica. Una vez colocado este punto se debe hacer clic en el botón "Verifica tu respuesta". Para verificar la respuesta se ha considera un margen de error de 0,05 entre la posición del punto rojo en la recta y la posición real (no visible). Si la distancia entre estos puntos es menor que el margen de error dado, entonces aparece una ventana como la que se observa en la figura siguiente.

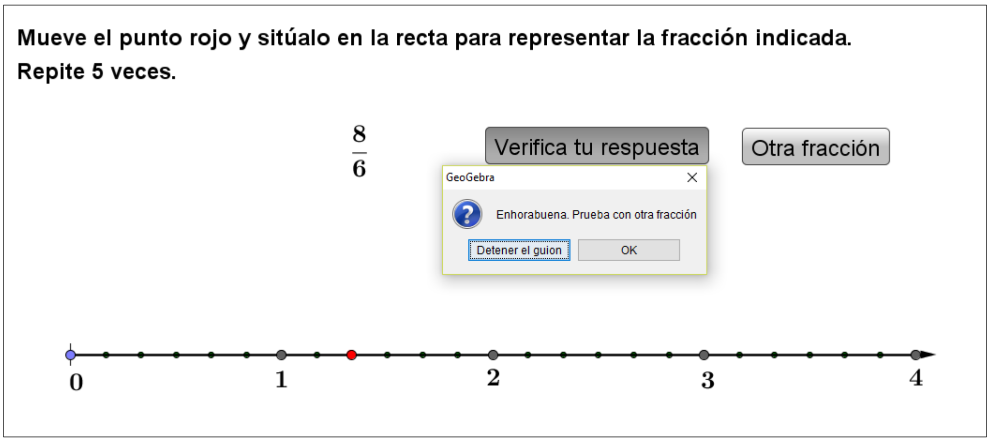


Figura 3.28. Ventana de aviso cuando la respuesta es correcta

Cuando la distancia entre la posición real del punto (no visible) y el punto rojo que se ubica en el segmento de recta es mayor que 0,05, entonces aparece una ventana como la que se observa en la Figura 3.29.

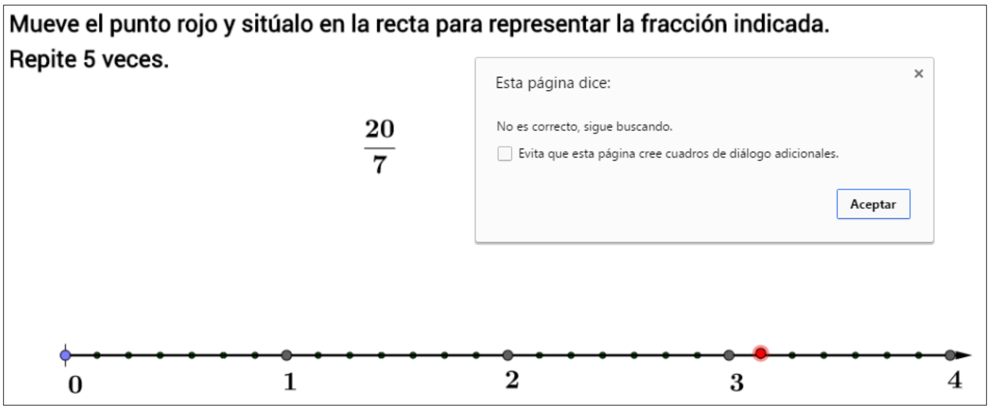
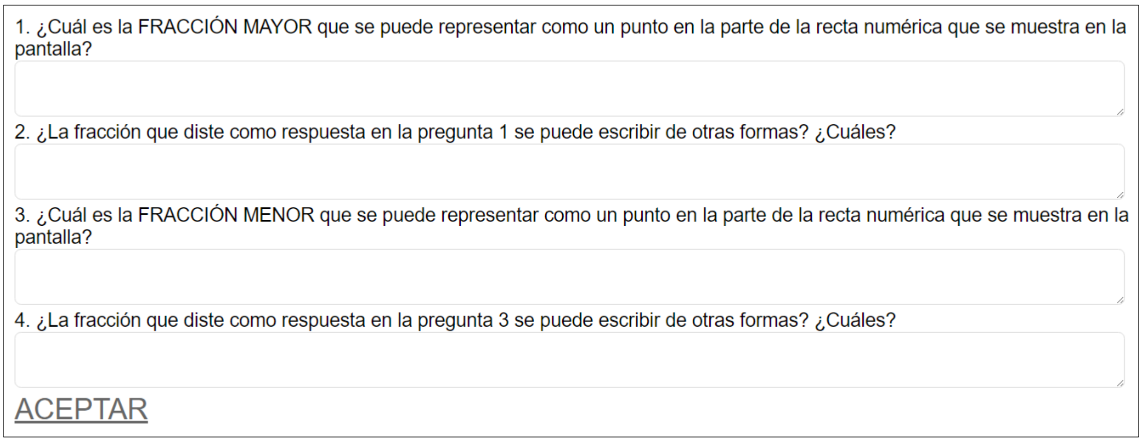


Figura 3.29. Ventana de aviso cuando la respuesta es incorrecta

Para seguir intentando se debe arrastrar el punto rojo hacia otra posición y oprimir nuevamente el botón "Verifica tu respuesta". Una vez dada la respuesta correcta se puede intentar ubicar otra fracción, para ello se debe hacer clic en el botón que dice "Otra fracción". Incluso si el alumno no logra ubicar alguna de las fracciones generadas, puede recurrir a este recurso y tratar de ubicar otra fracción. Las fracciones que se generan y los intentos de los alumnos se guardan en una base de datos.

d) Cuestiones planteadas para llevar al alumno a una reflexión

Las preguntas que se plantean en esta última etapa se muestran en la siguiente figura.



1. ¿Cuál es la FRACCIÓN MAYOR que se puede representar como un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la pantalla?

2. ¿La fracción que diste como respuesta en la pregunta 1 se puede escribir de otras formas? ¿Cuáles?

3. ¿Cuál es la FRACCIÓN MENOR que se puede representar como un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la pantalla?

4. ¿La fracción que diste como respuesta en la pregunta 3 se puede escribir de otras formas? ¿Cuáles?

ACEPTAR

Figura 3.30. Cuestiones para llevar al alumno a una reflexión correspondiente a la séptima etapa

Las preguntas 1 y 3 se plantean con doble intencionalidad. La primera se refiere al orden de las fracciones. La segunda permite ver si el alumno logra dar la respuesta expresada como un número natural o como fracción, e incluso ver si considera a los números 0 y 4 como una fracción. Las preguntas 2 y 4 ponen énfasis en la representación de fracciones equivalente, donde se espera que el alumno de más de una fracción equivalente.

4. Desarrollo de la experimentación

En esta fase del proyecto de investigación se realizó la primera versión del desarrollo experimental que se utilizó para caracterizar las actuaciones que tienen los alumnos durante el proceso de interacción estudiante/applet. También se validaron los instrumentos que se diseñan, los cuales se detallan en el capítulo tres. Esta validación permite ajustar y mejorar las herramientas de evaluación (pretest y postest) y la estructura general de la secuencia de enseñanza mediante la identificación del nivel de dificultad de las preguntas, la verificación de la adecuación de la forma en que se formulan las preguntas e indicaciones, o la comprobación del funcionamiento de los applets que se construyen. Todo con la finalidad de implementar futuras secuencias de enseñanza con otros grupos de estudiantes.

En este capítulo se describe la población y el método de implementación para llevar a cabo el desarrollo de la experimentación en esta primera versión.

4.1. Población

En la fase empírica participaron cuatro grupos naturales de un instituto público de educación secundaria que se ubica en la ciudad de Valencia. Tres de estos grupos son de primer grado, uno de ellos está conformado por 13 alumnos, los otros dos grupos tienen diez alumnos cada uno. El cuarto grupo está formado por doce alumnos de segundo grado y es considerado como un taller de regularización, en donde se trabajan contenidos matemáticos de primer curso de secundaria y otros contenidos que dependen de las necesidades de esos estudiantes. El rendimiento académico de los alumnos de los cuatro grupos se considera bajo, de acuerdo con los criterios de evaluación que sigue el profesor titular del curso de matemáticas. Además, los cuatro grupos presentan graves problemas de absentismo escolar.

En la experimentación participaron en total 45 estudiantes, pero por diferentes motivos, no todos completaron la secuencia de enseñanza o respondieron el pretest o postest. Hubo quienes solo realizaron alguno de éstos o, quienes solo participaron en las etapas iniciales o finales de la secuencia, entre otras variantes. La cantidad de alumnos que participaron en cada etapa o que respondieron a los cuestionarios se resume en la Tabla 4.1.

Pretest	Secuencia de enseñanza							Postest
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	
35	**34**	**27**	**31**	**31**	**30**	**23**	**22**	**35**

Tabla 4.1. Cantidad de alumnos que participaron en el desarrollo experimental

De los 45 estudiantes que participaron de maneras diversas en la experimentación, solo nueve completaron todo el proceso siguiendo el orden establecido. Como consecuencia el énfasis está puesto en las respuestas de esos nueve estudiantes y en especial en la parte del estudio relativo a analizar el efecto de la enseñanza. Sin embargo, se decidió conservar la mayor cantidad posible de sujetos en cada uno de los estadios de la secuencia, cuidando ciertos aspectos que debían asegurar la consistencia del análisis. En el apartado 5.2 se describe de manera precisa la forma en que se analizan los datos obtenidos durante la secuencia de enseñanza.

4.2. Método de implementación

Para los tres grupos de primer grado de secundaria la fase de experimentación se llevó a cabo en cinco sesiones, cada una de 45 minutos. La primera sesión se programó para contestar el pretest. Como hubo alumnos que requirieron más tiempo para terminar dicha prueba, se amplió el tiempo a una sesión y media. La secuencia de enseñanza se programó para tres sesiones, pero debido a los ajustes hechos solo quedaron dos sesiones y media para su desarrollo. El postest fue modificado como ya se expuso en la sección 3.1, con la finalidad de que los alumnos terminaran el test en una clase de 45 minutos, siendo esta la última sesión de trabajo.

El grupo de segundo grado trabajó durante 4 sesiones de 45 minutos cada una. La primera de estas sesiones se dedicó para contestar el pretest, dos para el desarrollo de la secuencia de enseñanza y en la última sesión se aplicó el postest. La diferencia en el número de sesiones respecto a los grupos de primer curso se debe a que se esperaba una mayor rapidez a la hora de responder por pertenecer a un curso superior.

Las sesiones de aplicación de los tests fueron desarrolladas solamente por el profesor titular de los alumnos, atendiendo las sugerencias de quienes diseñaron este trabajo de investigación. En las primeras dos sesiones donde se experimentó la secuencia de enseñanza participaron el profesor titular de los grupos y quienes diseñaron el proyecto.

Las interacciones de los estudiantes mientras usaban los applets fueron recogidas de una manera no invasiva. Evidentemente este método presenta ciertas desventajas respecto a la videograbación de las sesiones por lo que respecta a la cantidad de información que es posible recoger. Sin embargo, presenta ventajas como evitar la aparición de conductas atípicas propias del que se siente observado (Schoenfeld, 1985). No obstante, durante la experimentación se tomó nota de algunas observaciones hechas por los alumnos, principalmente dudas sobre la utilización del recurso tecnológico y comentarios generales sobre el contenido que se trata en la secuencia.

Las respuestas dadas por los estudiantes durante la interacción con el recurso tecnológico quedaron guardadas en los ordenadores proporcionados por quienes diseñaron la investigación. Al finalizar la etapa experimental se juntó y organizó la información almacenada para proceder a su análisis.

5. Resultados

Este capítulo se organiza en tres apartados. En el 5.1 se muestran los resultados obtenidos en la aplicación del pretest, considerando las respuestas de los 35 estudiantes que respondieron la prueba. En el apartado 5.2 se hace una caracterización de las respuestas de los estudiantes que participaron en la secuencia de enseñanza, y que en un principio siguieron el orden de la secuencia. Los resultados del postest y la comparación entre los resultados de éste y el pretest se describen en el apartado 5.3, enfocándose únicamente en las respuestas de los 9 estudiantes que completaron la experimentación.

5.1. Resultados de la aplicación del pretest

Para realizar el análisis del pretest se han codificado las respuestas de los estudiantes. Las correctas se han etiquetado con un 1 y las incorrectas con 0, en esta última categoría se han incluido aquellas preguntas que no fueron contestadas. Cabe señalar que si se quisiera hacer un análisis más detallado sobre el tipo de errores que cometen los alumnos, habría que centrarse en las respuestas incorrectas, por lo que dicha inclusión sería inadecuada. Los alumnos que participaron en la experimentación fueron codificados con la letra A seguida de un número, según el orden con el que se hizo la captura de datos.

En la Tabla 5.1 se muestra la frecuencia de respuestas correctas de los 35 estudiantes que completaron el pretest. La información está organizada para cada actividad; se incluye la relación entre el número de respuestas correctas a los distintos incisos de una misma actividad y el total de respuestas, también se indica el porcentaje de éxito.

Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5	Actividad 6
163/280	54/140	48/140	20/350	16/175	19/140
58,21%	38,57%	34,29%	5,71%	9,14%	13,57%

Tabla 5.1. Resultados del pretest

De manera general se observa que los alumnos tienen mayor éxito al responder cuestiones que se relacionan con la representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica, considerando modelos continuos y definidos (aspectos evaluados por medio de la actividad 1). Los educandos tienen menor éxito para identificar fracciones entre dos números enteros y clasificar fracciones como propias o impropias (aspectos evaluados mediante la actividad 5), así como para representar fracciones como puntos en la recta numérica (aspectos evaluados a través de la actividad 4). Se observa un descenso porcentual en cuanto al éxito obtenido que va del 58,21% en la actividad 1 hasta el 5,71% en la actividad 4.

Como ya se vio en el capítulo anterior (ver apartado 3.1), las actividades del pretest están formadas por varios incisos; el número de respuestas correctas varía en cada uno de ellos. Los resultados obtenidos para la actividad 1 se muestran en la Tabla 5.2. En ella la información obtenida sobre los ejercicios correspondientes a cada uno de los incisos está organizada de acuerdo con las características del aspecto de la fracción como fracturador que se consideraron en el diseño del cuestionario.

<table>
<tr><td colspan="8">Representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica (Modelos continuos)</td></tr>
<tr><td colspan="7">Fracciones propias</td><td>Fracciones impropias</td></tr>
<tr><td colspan="3">Partición definida</td><td colspan="4">Partición parcialmente definida</td><td>Partición definida</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elección de las partes contiguas</td><td>Elección de las partes no contiguas</td><td colspan="4">Elección de las partes contiguas</td><td>Elección de las partes contiguas</td></tr>
<tr><td>a)</td><td>c)</td><td>d)</td><td>b)</td><td>e)</td><td>f)</td><td>h)</td><td>g)</td></tr>
<tr><td>27/35</td><td>30/35</td><td>26/35</td><td>20/35</td><td>17/35</td><td>10/35</td><td>14/35</td><td>19/35</td></tr>
<tr><td>77,14%</td><td>85,71%</td><td>74,29%</td><td>57,14%</td><td>48,57%</td><td>28,57%</td><td>40,00%</td><td>54,29%</td></tr>
</table>

Tabla 5.2. Resultados de éxito de los ejercicios correspondientes a la actividad 1

Como se puede ver en el pretest, en el inciso (g) de la actividad 1 (ver Anexo I) se esperaba que los estudiantes identificaran una fracción impropia (considerando cada rectángulo como unidad). Sin embargo 16/19 alumnos respondieron la pregunta usando una fracción propia. Esa respuesta es una interpretación correcta de la representación gráfica debido a que se considera a los dos rectángulos como un todo, pero arroja una idea de sus tendencias de actuación.

Los ejercicios correspondientes a los incisos (a) y (c) se consideraron en el diseño del pretest como los más fáciles. Los resultados obtenidos prueban dicho supuesto. Además, el análisis de libros de texto de sexto grado de primaria (por ejemplo, González, Garín, Nieto, Ramírez, Bernabeu, Pérez, *et al.* 2015) y de primeros cursos de secundaria (ver trabajo de Real, 2013) muestra que, desde los libros de texto, los modelos más utilizados para la enseñanza de estos números corresponden al modelo de áreas, y las figuras más representativas son principalmente el círculo y el rectángulo, en ese orden. Así mismo, en las representaciones gráficas de las fracciones se usan con frecuencia particiones bien definidas con partes sombreadas contiguas. Este hecho, como un referente de la instrucción real que reciben los alumnos, podría reflejar los mejores resultados obtenidos en los incisos donde se utilizan estas figuras y las características de la representación gráfica de las fracciones mencionadas.

Como ya se mencionó, en las figuras que se utilizan en los libros de texto analizados no aparecen fracciones propias en donde la partición está definida y las partes sombreadas son discontinuas, pero este hecho no causa dificultades en los aprendices para identificar de forma simbólica fracciones con esas características, ya que los resultados obtenidos en el inciso (d) corresponden a aquellas preguntas con mayor número de respuestas correctas. Esto sugiere que la estrategia para identificar la fracción se relaciona con el proceso de conteo, ya que el énfasis está en el número de partes sombreadas y no en su posición o forma. En el proceso inverso, es posible que el alumno no represente una fracción usando partes no contiguas.

Pese a que en los libros de texto se han identificado ejercicios en los que se utilizan gráficas de sectores en cuya representación hay diversas unidades fraccionarias, los alumnos tienen poco éxito para responder preguntas en las cuales la partición del todo está parcialmente definida, especialmente cuando hay más de una unidad fraccionaria. Este hecho se relaciona con los resultados obtenidos en el inciso (f), cuyo porcentaje de éxito es el más bajo de la actividad 1, ya que solo 10 de los 35 alumnos respondieron correctamente.

Los resultados anteriores podrían estar vinculados al hecho de que los alumnos no están habituados a participar en el proceso de partición, sino que la mayoría de las veces se les muestra una imagen fracturada, donde ellos solo deben establecer la relación de fractura (relación parte-todo), y esto lo hacen recurriendo al proceso de conteo. Incluso cuando participan en el proceso de partición no se pone énfasis en que las partes sean iguales (Bezuk & Bieck, 1993, citado en Petit, Laird y Marsden, 2010).

Los resultados de los ejercicios propuestos en la actividad 2 del pretest (ver Anexo I) son evidencias de que los alumnos tienen mayor dificultad para hacer una partición de una figura plana y elegir una parte asociada a una fracción, que identificar la representación simbólica de la fracción a partir de una representación gráfica dada.

Comparando los resultados de los ejercicios de menor complejidad planteados en las actividades 1 y 2 incisos (a), (c) y (a), (b) respectivamente, se observa que hay un descenso de éxito en las respuestas correctas, ya que en la actividad 1 se logran 57 aciertos de 70 respuestas, mientras que en los incisos fáciles de la actividad 2 se obtienen 41 de

70. Esto puede ser debido a la falta de práctica en los procesos de partición. Asimismo, en la Figura 5.1 se puede ver un ejemplo que muestra las dificultades observadas a la hora de establecer las partes en el proceso de partición que hacen los alumnos en el pretest. Sin embargo, cabe señalar que las dificultades enfrentadas por los estudiantes en la partición (como es este caso) son más bien, técnicas que conceptuales, como apuntó Streefland (1993).

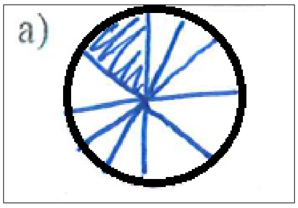


Figura 5.1. Representación gráfica de A4 correspondiente a la fracción 1/10 en la actividad 2 del pretest

En la Tabla 5.3 se observa que los alumnos tienen más o menos el mismo éxito al representar fracciones de forma gráfica en un modelo de áreas cuando se usa el círculo y rectángulo, resultados similares se obtuvieron en la actividad 1.

Representación gráfica de fracciones a partir de su escritura simbólica (MC)			
Fracciones propias			Fracciones impropias
Partición usual		Partición meno usual	
a)	b)	d)	c)
21/35	20/35	7/35	6/35
60,00%	57,14%	20,00%	17,14%

Tabla 5.3. Resultados de éxito de los ejercicios de la actividad 2

Los alumnos tienen poco éxito para representar gráficamente una fracción impropia utilizando círculos (inciso c), ver actividad 2 del Anexo I. Se puede ver en la Tabla 5.3 que hay un descenso porcentual mayor al 40% de éxito entre los incisos en los que se pide representar en un círculo una fracción propia (inciso (a)) y una impropia (inciso (c)). Estos resultados son evidencias que sustentan la idea de que el modelo de áreas favorece la representación de las fracciones propias y que esta capacidad no se transfiere de manera espontánea a la representación gráfica de fracciones impropias.

Para representar fracciones de forma simbólica se han considerado también modelos discretos. El uso de este tipo de modelos se evalúa por medio de la actividad 3. El porcentaje de respuestas correctas correspondiente a cada uno de los incisos de esa actividad se encuentran en la Tabla 5.4.

Representación simbólica de fracciones a partir de una representación gráfica (modelos discretos)			
Estructurada respecto al tamaño (caja 1)		No estructurada respecto al tamaño (caja 2)	
Descriptor	Comparador	Descriptor	Comparador
a)	b)	c)	d)
21/35	4/35	21/35	2/35
60,00%	11,43%	60,00%	5,71%

Tabla 5.4. Resultados de éxito de los ejercicios de la actividad 3

Los alumnos tienen más dificultad para representar fracciones de forma simbólica a partir de una representación gráfica usando un modelo discreto que cuando se utiliza un modelo continuo (aspecto evaluado por medio de la actividad 1). Cabe mencionar que en ambas situaciones aparece la fracción como fracturador. Pero, la diferencia recae en la forma de la unidad fraccionaria, ya que en los modelos discretos se refiere a colecciones de objetos clasificados por medio de ciertas características, mientras que en el modelo continuo las unidades fraccionarias son áreas congruentes determinadas por una partición. Resultados en esta misma línea fueron reportados por Figueras (1988).

En el modelo propuesto de esta misma actividad se han planteado situaciones en las que la fracción aparece como descriptor y comparador. Cuando la fracción subyace en una comparación entre las partes (relación parte-parte), los alumnos tienen menor éxito que cuando la fracción aparece en una relación de fractura (relación parte-todo), que sirve para describir la cantidad de objetos que comparten ciertas características.

En comparación con el resto de actividades incluidas en el pretest, la representación de fracciones en la recta numérica (ver actividad 4 del Anexo I) es una en la cual los estudiantes tuvieron menos éxito, ver Tabla 5.5. Para mejorar la comprensión de la tabla, en la fila tres se encuentran las fracciones que los estudiantes debían representar en la recta numérica, y en la fila cuatro aparece la frecuencia de respuestas correctas.

Representación de fracciones como puntos en la recta numérica									
Fracciones propias					Fracciones impropias				
2/12	4/8	2/10	1/4	1/6	6/5	7/3	5/2	8/7	12/9
1/35	0/35	2/35	3/35	1/35	3/35	4/35	2/35	2/35	2/35
2,86%	0%	5,71%	8,57%	2,86%	8,57%	11,43%	5,71%	5,71%	5,71%

Tabla 5.5. Resultados de éxito de los ejercicios de la actividad 4

Para evaluar las respuestas de los estudiantes a las preguntas de la actividad 4 no se ha considerado una ubicación 'exacta' de las fracciones en la recta, sino una estimación adecuada y pertinente al orden de las demás fracciones. La fracción propia que representaron 3 de los 35 alumnos es 1/4, esto se corresponde con el supuesto de que ésta es una de las fracciones más comunes para los estudiantes, pero aun así, el número de alumnos que la ubicaron en la recta numérica es muy bajo. De igual forma, 4 de 35 alumnos representaron correctamente la fracción impropia 7/3, aunque 5/2 es la fracción que se suponía fuese la más común para ellos. En general, los aprendices tuvieron mayor éxito al representar las fracciones impropias que las propias, aun cuando la diferencia no sea relevante.

Un dato interesante es el que corresponde a la respuesta de uno de los alumnos (ver Figura 5.2), quien pese a que no ubicó correctamente las fracciones, en su respuesta se pone de manifiesto una clasificación: todas las fracciones propias las ubicó en el intervalo (0, 1) y las impropias en el (1, 2).

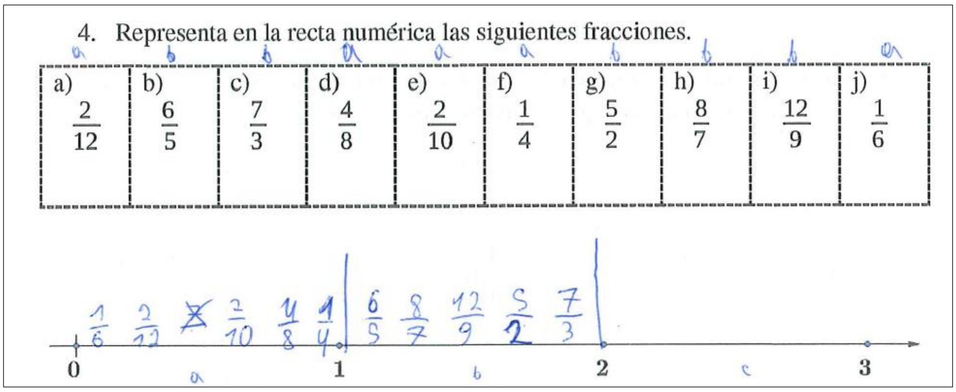


Figura 5.1. Resultado de la representación gráfica de fracciones en la recta numérica

Aun cuando los resultados corresponden a porcentajes de éxito muy bajos en los ejercicios que se evalúan en la actividad 4, se podrían considerar como elementos para sustentar la hipótesis de que el modelo de la recta numérica es apropiado para el estudio de las fracciones impropias.

Otra de las actividades del pretest con menor porcentaje de éxito es la actividad 5 (ver en el Anexo I). Ésta se refiere a la identificación de fracciones entre dos números enteros y entre dos fracciones, así como a la clasificación de fracciones propias e impropias. Los resultados de los diferentes incisos de la actividad se encuentran en la Tabla 5.6.

Identificación y clasificación de fracciones				
Entre 0 y 1	Entre 3 y 4	Entre 7/8 y 8/9	Fracciones propias	Fracciones impropias
5/35	3/35	0/35	3/35	5/35
14,29%	8,57%	0%	8,57%	14,29%

Tabla 5.6. Resultados de éxito de los ejercicios de la actividad 5

A partir de los resultados generales de esta actividad se puede afirmar que los alumnos no reconocen características de las fracciones propias e impropias tomando en cuenta su relación con la unidad, o bien, la comparación entre numerador y denominador. Solo un alumno pone de manifiesto que considera uno de esos criterios para identificarlas, ya que ha dado como respuesta 1+1/4 y 1+2/3 como ejemplos de fracciones impropias. Pese a que este contenido forma parte de los planes de estudio de sexto de primaria e incluso hay evidencia de que en algunos libros del mismo grado, por ejemplo el de Gonzales *et al* (2015), aparece enunciada la caracterización de las fracciones propias e impropias, los alumnos tienen poco éxito para distinguirlas.

El último contenido evaluado en el pretest se refiere a la resolución de problemas donde subyacen distintos aspectos de las fracciones. . Los resultados de la evaluación de esta actividad resultan de interés, ya que permiten confirmar que la resolución de problemas con datos numéricos en forma de fracción es otro tema en el cual los estudiantes tienen mayor dificultad. En la Tabla 5.7 se pueden consultar los resultados correspondientes a los incisos que se evaluaron como parte de la actividad 6.

Resolución de problemas			
(a) Fracción como fracturador	(b) Fracción como descriptor	(c) Fracción como comparador	(d) Operador fracción
6/35	6/35	3/35	4/35
17,14%	17,14%	8,57%	11,43%

Tabla 5.7. Resultados de éxito de los ejercicios de la actividad 6

Los alumnos tienen mayor éxito al responder cuestiones que se relacionan con el uso de la fracción como fracturador, específicamente donde se establece una relación de fractura (relación parte-todo). Este suceso se relaciona con los resultados obtenidos en la actividad 1. Aunque el número de estudiantes que respondieron los incisos, (a) y (b), donde aparece la fracción como fracturador en la actividad 6, es menor, solo 6 de 35 respondieron correctamente, esto se atribuye a las propias dificultades que conlleva la resolución de problemas. En el inciso (c), en el que subyace la fracción como comparador, los alumnos tienen menor éxito, solo 3 de los 35 estudiantes respondieron correctamente.

Para tratar de caracterizar similitudes entre estudiantes e incluso identificar tipos de estudiantes que comporten características según sus actuaciones en el pretest, se ha utilizado un procedimiento descrito por Cerdán (2007) que evita recurrir a procedimientos taxonómicos basados en medidas de proximidad y permite un mayor control del resultado.

> Se provee el artesano de unas tijeras y procede al despiece de la tabla en filas o columnas. A continuación procede a recomponer la tabla siguiendo el criterio de situar las filas encima o debajo unas de otras en función del criterio de homogeneidad en la distribución del color, con la intención de lograr un patrón o patrones de la distribución del color en la tabla que esta reconstruyendo. Si lo cree útil o preciso, recorta columnas con la misma finalidad de conseguir ver, con mayor facilidad, la distribución del color en la tabla -con los que jerarquiza estudiantes y problemas-. Cuando esto lo cree logrado, los patrones de color se utilizan como criterio de agrupamiento. (Cerdán, p. 264)

Para el análisis que aquí se realiza se ha tomado la decisión de mantener la contigüidad de las columnas que refieren a distintos incisos de una misma actividad, ya que estos esta agrupados de acuerdo con las características de las fracciones que se quiere observar. En la Tabla 5.8 se observa la agrupación hecha para los resultados de la aplicación del pretest. Se ha marcado con rojo el código para distinguir a los nueve alumnos que completaron todas las etapas de la fase experimental.

	Actividad 1								Actividad 2				Actividad 3				Actividad 4										Actividad 5					Actividad 6			
	a)	c)	d)	b)	e)	f)	h)	g)	a)	b)	d)	c)	a)	b)	c)	d)	2/12	4/8	2/10	1/4	1/6	6/5	7/3	5/2	8/7	12/9	a)	b)	c)	d)	e)	a)	b)	c)	d)
A3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A30	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A38	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A25	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A21	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A13	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A8	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A31	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A32	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A29	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
A7	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A34	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
A15	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
A33	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A19	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
A12	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
A16	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A22	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A28	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A9	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A2	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
A5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
A17	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A6	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A20	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A24	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A26	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A14	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A37	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1
A18	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
A23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.8. Resultados de los 35 alumnos que respondieron el pretest

De la agrupación de los datos se pueden clasificar, a *grosso modo*, los siguientes tres tipos de estudiante:

1. Los que tienen mayor éxito en las actividades 1, 2 y 3, pero nada de éxito en las actividades 4, 5 y 6. De los nueve que completaron la fase experimental, se ubican en este grupo los alumnos A3, A4, A1 y A8.

2. Los que tienen mediano o poco éxito en todas las actividades. Aquí se ubia A7.

3. Los que tienen nada de éxito en la actividad 1, mediano éxito en las actividades 2 y 3, y poco o nada de éxito en las actividades 4, 5 y 6. Los almnos A9, A2, A5 y A6 se ubican en este tipo de estudiantes.

Por último, se puede afirmar que los resultados generales del pretest previenen el bajo rendimiento que tienen los estudiantes sobre cuestiones relativos a las fracciones, específicamente sobre el contenido evaluado en las actividades 4 y 5, el cual se trata en la secuencia de enseñanza.

5.2. Resultados de la experimentación de la secuencia de enseñanza

Para hacer la caracterización de las respuestas de la mayoría de los estudiantes que participaron en la secuencia de enseñanza y tener una mejor interpretación del efecto que tuvo cada uno de los appets, se toman en cuenta las actuaciones de alumnos aunque no hayan completado la etapa experimental. Para la selección de los datos a tener en cuenta se considera el siguiente criterio: los datos de un estudiante serán analizados mientras no falle a una sesión de la secuencia de enseñanza, a partir de ese momento no se tendrán en cuenta. En la Tabla 5.9 se muestra cómo fue disminuyendo el número de alumnos que cumplían dicho criterio a medida que avanzaba la experimentación.

Etapas de la secuencia de enseñanza						
E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7
28	**25**	**23**	**21**	**19**	**14**	**11**

Tabla 5.9. Cantidad de alumnos que participaron en el desarrollo experimental siguiendo el orden de la secuencia de enseñanza.

Los tipos de respuestas que han dado los aprendices están condicionados por la forma en que se han planteado las preguntas, ya que algunas permiten respuestas muy generales que crean diversas interpretaciones, las respuestas de otras solo se clasifican como correctas o incorrectas, y otras de este último tipo pero que requieren una justificación. Otras respuestas se generan a partir de la información que los estudiantes escriben en las ventanas durante la interacción con el applet. Los tipos de pregunta se organizan atendiendo al tipo de respuesta que pueden producir:

a) Preguntas tipo i, caracterizadas por solicitar respuestas generales. Por ejemplo, "¿Por qué no se puede ver en la pantalla la fracción 7/2?" (pregunta 6 de la etapa 1)
b) Preguntas tipo ii, caracterizadas por solicitar respuestas concretas. Por ejemplo, "¿Cuántas fracciones podrías escribir entre 1 y 4?" (pregunta 6 de la etapa 2)
c) Preguntas tipo iii, caracterizadas por solicitar respuestas concretas con justificación. Ejemplo, "¿Hay fracciones impropias mayores que 3? Si contestaste que sí da un ejemplo" (pregunta 4 de la etapa 4)
d) Preguntas/indicaciones tipo iv, caracterizadas por solicitar respuestas generadas durante la interacción. Por ejemplo, "Escribe cinco fracciones" (indicación dada en el applet 2)

Para la caracterización de los resultados obtenidos en cada etapa se parte de un esquema de clasificación elaborado *ad hoc* del tipo de respuesta que se pudiera dar a partir de las preguntas planteadas en la sección de cuestionamientos. A partir de dicho esquema se hace el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes. La categorización de estas respuestas se resume en una tabla para cada uno de los applets. Para agrupar las actuaciones de los aprendices y tratar de distinguir tipos de estudiantes en cada etapa, en algunos casos se utiliza el procedimiento de agrupación por colores.

5.2.1. Resultados de la etapa uno

Las preguntas que se plantearon en esta etapa corresponden a los tipos i y ii (ver el Esquema 5.1). Las del primer tipo pueden dar lugar a respuestas orientadas hacia: lo que ocurre con la fracción: (1) respecto a su relación con otros números o entre numerador y/o denominador; (2) con la representación gráfica sobre la recta numérica; (3) con los dos aspectos anteriores. La interpretación que escriben los alumnos puede ser: (a) completa, cuando la respuesta contiene aspectos que atienden a los propósitos de la etapa (respuesta idónea); (b) incompleta, cuando solo aparecen algunos de los aspectos del planteamiento idóneo; (c) incorrecta o ambigua, cuando la respuesta no contiene ninguno de los aspectos que aparecen en la interpretación idónea o no responde a lo que se pide. Las respuestas ligadas a preguntas concretas, tipo ii, pueden ser también (a) correctas, (b) incompletas o (c) incorrectas o ambiguas.

Preguntas (1, 2, 4, 5 y 6) **tipo i**

Preguntas	Las respuestas pueden estar orientadas hacia:	La interpretación se considera:
1. Representa la fracción 1/4. ¿Qué pasa con la fracción si mueves el deslizador del numerador y dejas fijo el denominador? 2. Representa la fracción 7/8. ¿Qué pasa con la fracción si mueves el deslizador del denominador y dejas fijo el numerador? 4. ¿Qué pasaría si en el deslizador del denominador aparece el número 25? 5. ¿Qué pasa cuando el numerador es igual al denominador? 6. ¿Por qué no se puede ver en la pantalla la fracción 7/2?	1. Aspectos numéricos 2. Aspectos gráficos 3. Aspectos numéricos y gráficos. 4. No interpretable o no responde	a. Completa b. Incompleta c. Incorrecta o ambigua

Preguntas (3 y 7) **tipo ii**

Preguntas	Las respuestas están orientadas a observar la representación gráfica (segmento de recta) y pueden ser:
3. Representa la fracción 6/7. ¿En cuántas partes se divide el segmento que empieza en 0 y acaba en 1? ¿Cuántas de esas partes están coloreadas? 7. Escribe 2 fracciones que no puedas representar en la recta numérica que se muestra en la pantalla.	a. Completa b. Incompleta c. Incorrecta o ambigua

Esquema 5.1. Caracterización de las respuestas de la etapa uno

En las respuestas a las preguntas del tipo general (1, 2, 4, 5 y 6) que dan los estudiantes, ver Tabla 5.10, se observa que las respuestas se orientan hacia lo que ocurre en el segmento de recta que aparece en la pantalla. De las 140 respuestas (28 estudiantes x 5 preguntas), 63 se clasificaron dentro de este enfoque. De estas, ocho se consideran interpretaciones completas, 25 incompletas y 30 incorrectas o ambiguas. Dos ejemplos que se refieren a estos resultados se enuncian a continuación y sirven para ejemplificar la codificación.

- La respuesta que A5 dio a la pregunta 1(Representa la fracción 1/4. ¿Qué pasa con la fracción si mueves el deslizador del numerador y dejas fijo el denominador?) fue: "que la barrita se va para la derecha". Esta respuesta se ha clasificado como 2b porque el enfoque está en lo que ocurre en el segmento de recta. Específicamente se refiere al movimiento que se produce en el segmento azul que representa a la fracción cuando el deslizador se mueve hacia la derecha, es decir, cuando aumenta su valor, no se considera completa porque solo ha explorado hacia la derecha y no da una idea general de lo que ocurre.

- La respuesta que dio A3 a esa misma pregunta fue: "Que ai mas puntos entere numero (deominadores) en concreto 4 puntos entre numero"; en este caso, la respuesta del alumno también se enfoca en lo que ocurre en el segmento de recta, específicamente observa la partición que se produce (número de puntos), pero su interpretación se considera incorrecta o ambigua, ya que al parecer solo representó la fracción 1/4 y no movió los deslizadores, por ello se clasifica como 2c.

	Etapa 1						
	P1	P2	P4	P5	P6	P3	P7
A8	1c	1c	4c	1c	4c	b	b
A9	1c	1c	4c	1c	2c	b	b
A10	1c	1c	4c	1b	1c	b	a
A17	1c	3a	1b	1b	1c	c	a
A19	1b	3b	2a	3a	3a	a	a
A1	1b	1b	2b	2a	3b	c	b
A24	1c	2c	2c	2b	2c	c	b
A2	2c	1c	2c	3a	1c	a	c
A14	2b	1c	4c	4c	2b	b	b
A26	2b	2b	4c	2a	2b	b	c
A27	2c	2c	4c	4c	2c	a	b
A3	2c	2c	2c	2a	2c	b	a
A18	2b	2c	2b	2a	3b	c	a
A5	2b	2b	2b	4c	1b	b	c
A11	2c	2c	4c	4c	2c	a	b
A12	2b	2b	2c	1a	1c	b	b
A13	2b	2c	4c	1b	1c	b	a
A25	2b	3a	1c	2b	4c	c	c
A7	2c	3b	2c	1b	3b	c	c
A16	2c	1b	2b	2a	2b	c	b
A20	2c	2b	1c	1b	4c	c	b
A23	2c	2c	4c	1a	2c	c	b
A4	3b	2b	2b	2c	1c	a	a
A6	3b	3b	2c	2b	1c	a	c
A15	3b	3b	2b	2a	2b	a	b
A22	3b	3b	4c	1b	4c	b	b
A21	4c	1b	1c	4c	2c	b	a
A28	4c	2c	4c	2a	1b	a	b

Tabla 5.10. Resultados de la primera etapa de la secuencia de enseñanza

El enfoque en aspectos numéricos de la fracción se evidenció en 38 de las 140 respuestas dadas a las preguntas del tipo general (1, 2, 4, 5 y 6). De éstas, dos se consideraron completas, 14 incompletas y 22 incorrectas o ambiguas. Un ejemplo de este tipo de respuestas se expone a continuación:

-A17 respondió a la pregunta 6 (¿Por qué no se puede ver en la pantalla la fracción 7/2?) de la siguiente manera: "porque el denominardor es 2 ycomo es mas pequeño y el numerador es mas grande no se pude". El alumno se fija en los valores del numerador y denominador, hace una comparación entre los valores numéricos, y con eso justifica su respuesta, por ello se ha codificado como 1c.

El enfoque en aspectos numéricos y gráficos se puso de manifiesto solo en 17 respuestas de las 140 generadas en las preguntas del tipo general (1, 2, 4, 5 y 6). Cinco fueron clasificadas como completas, doce como incompletas y ninguna como incorrecta o ambigua. Un ejemplo de este tipo de respuestas es el siguiente:

-A19 dio como respuesta a la pregunta 6: “Porque en la recta solo pueden representarse los números entre el o y el 3, pero 7/2 da mas de 3”. Se observa que el alumno, se fija en la estructura de la recta numérica, es decir, en la representación gráfica, pero también hace alusión la fracción como un número.

Tres alumnos dieron una respuesta en donde se relacionan los componentes de la representación simbólica de la fracción con los deslizadores (numerador y denominador) o con su representación gráfica. Por ejemplo:- A4 dio la siguiente respuesta a la pregunta 4: “(En el deslizador no se puedo). Pero me imagino que si el denominador fuera 25, las lineas de la recta numerica se dividieran en partes cada vez mas pequeñas”. Se supone que la niña ha observado el efecto que tienen de los deslizadores (denominador) con las particiones que se generan en el segmento de recta.

Por lo que respecta a las preguntas de tipo concreto (3 y 7), en las respuestas a la pregunta 3 (Representa la fracción 6/7. ¿En cuántas partes se divide el segmento que empieza en 0 y acaba en 1? ¿Cuántas de esas partes están coloreadas?), se observa que solo ocho estudiantes logran identificar correctamente la relación parte-todo en el segmento de recta a partir de la representación de la fracción que se forma con los deslizadores; once solo identifican ya sea el número de partes en las que se divide el segmento unitario o las partes que se “colorean” de azul; nueve no contestan correctamente la pregunta.

Para responder a la pregunta 7 (Escribe 2 fracciones que no puedas representar en la recta numérica que se muestra en la pantalla), la mayoría de los alumnos se apoyaron de los deslizadores o de la pregunta 6 (esta pregunta hace alusión a que la fracción 7/2 no se ve en el segmento de recta), ya que hubo respuestas del tipo: “40/10”, “31/10” o “7/2”. Solo ocho alumnos logran identificar dos fracciones distintas fuera del segmento de recta que se representa en la pantalla, algunas son: “255/15” y “999/2” de A3 y “10/2” y “25/4” de A4.

De la clasificación hecha se puede observar que los estudiantes cuyas actuaciones están orientadas hacia aspectos numéricos y gráficos de manera simultánea, logran dar respuestas más completas y orientadas a los propósitos que se tienen en el desarrollo de esta etapa. O sea, logran observar las relaciones que existen entre el numerador, el denominador, los componentes de la representación simbólica, la posición de la fracción como punto en la recta numérica, el número de partes iguales en las que se divide la unidad y la magnitud del segmento azul que representa a la fracción.

Respecto a la dificultad y estructura de las preguntas planteadas, se ha observado que la pregunta 4 resultó la más complicada para los aprendices. Las preguntas 1 y 2 son muy generales y las respuestas se prestan a diversas interpretaciones, por lo que se propone replantear los cuestionamientos, para guiar de manera concreta hacia el propósito de la etapa. La pregunta 3 se considera la de menor dificultad. Sin embargo, en esta misma pregunta se puso de manifiesto uno de los errores que reportan Mitchell y Horne (2008), ya que algunos aprendices cometieron el error de contar las muescas que subdividen el segmento unitario considerando la muesca que representa al cero, en lugar de contar los espacios que hay entre cada muesca.

5.2.2. Resultados de la etapa dos

Para el análisis de las actuaciones de los estudiantes en esta etapa se tomaron en cuenta las respuestas de 25 de alumnos. Se plantearon preguntas del tipo i, ii y iv (ver Esquema 5.2). Las respuestas a las preguntas 1, 2, 3 y 4 dependen de las fracciones que el alumno escriba durante la interacción con el applet. La justificación de las preguntas 1, 3 y 4 podrían estar basada en aspectos numéricos de la fracción, gráficos o en ambos.

Aunque las preguntas 2, 5 y 6 generan respuestas del mismo tipo (concretas), la pregunta 2 está separada porque sus respuestas solo se caracterizan como correctas o incorrectas. Mientras que las preguntas 5 y 6 se plantean con la finalidad de propiciar una reflexión sobre la propiedad de densidad de los números racionales, y sus respuestas permiten conocer la idea que los alumnos tiene sobre está propiedad.

Pregunta (1) — **tipo i**

Pregunta	La justificación se basa en:	La respuesta puede ser:
1. Las 5 fracciones que escribiste, ¿Aparecen en la recta numérica que se ve en la pantalla? ¿Por qué?	1. Aspectos numéricos 2. Aspectos gráficos 3. Aspectos gráficos y numéricos 4. No interpretable o no responde	a. Sí b. No
3. De las 5 fracciones que escribiste, ¿Cuál es la menor? ¿Por qué? 4. De las 5 fracciones que escribiste, ¿Cuál es la mayor? ¿Por qué?		a. Correcta b. Incorrecta

Preguntas (2, 5 y 6) — **tipo ii**

Preguntas	Las respuestas están orientadas a observar la representación gráfica (segmento de recta) y pueden ser:
2. Escribe las fracciones que escribiste de mayor a menor.	a. Correcta b. Incorrecta c. Incompleta
5. ¿Cuántas fracciones podrías escribir entre el 0 y 1? 6. ¿Cuántas fracciones podrías escribir entre 1 y 4?	a. Finitas b. Infinitas, muchas, bastantes,… c. no sabe

Escribe 5 fracciones — **tipo iv**

Escribe 5 fracciones	Las fracciones escritas se pueden clasificar en:
El alumno debe escribir cinco fracciones	1. Propias 2. Impropias 3. Unidad

Esquema 5.2. Caracterización de las respuestas de la etapa dos

El tipo de fracciones que han escrito los estudiantes para dar respuesta a la tarea que se planteaba inicialmente en el applet se han clasificado en propias, impropias y unidad (ver Tabla 5.11). En las respuestas de los estudiantes, se han distinguido 56 fracciones propias, de las cuales 1/2, 2/4, 2/3 y 5/6 son las más habituales; se distinguieron 38 fracciones impropias, la mayoría son distintas, y 5 fracciones unidad, 2/2, 4/4, 5/5 y 7/7. Estos resultados podría apoyar la hipótesis de que para la enseñanza de las fracciones se utilizan mayormente modelos que favorecen el reconocimiento de fracciones propias, como es el caso del modelo de áreas.

En la Tabla 5.11 se observa que nueve de los 25 alumnos reconocieron que las cinco fracciones (pregunta 1) escritas por ellos durante la interacción sí son vistas en el segmento de recta numérica, mientras que 16 respondieron que las fracciones que escribieron no se ven en el segmento de recta. La mayoría de los aprendices no justificaron su respuesta, por ello se han codificado como respuestas del tipo 4a o 4b. Cuatro justificaron la respuesta basándose en aspectos numéricos de la fracciones, por ejemplo: “Si, menos una, porque tienen un numerador más bajo que el denominador”, “aparecen por que el numerador y el denominador son de muy poca distancia", respuestas de los alumnos A2 y A4 respectivamente. Cinco lo hicieron basándose en aspectos gráficos de las fracciones, por ejemplo: "si porque no son tan grandes para la recta numérica", respuesta de A24; otras respuestas de este tipo se refieren al rastro de la fracción que se queda en la representación gráfica, por ejemplo, "que se han hecho pequeñas y hay puntos rojos", respuesta de A7.

	Etapa 2								
	P1	**P3**	**P4**	**P2**	**P5**	**P6**	**Propias**	**Impropias**	**Unidad**
A1	2a	2a	2a	1	b	b	3	0	0
A16	2a	2b	4b	0	a	a	3	1	0
A9	4b	2b	2b	0	a	a	1	2	1
A17	4b	2b	2b	0	a	a	3	1	0
A13	4b	2a	4a	1	a	b	2	2	1
A3	2b	4b	4b	0	a	a	3	0	0
A7	2b	1b	4b	0	a	a	3	1	0
A18	2b	1a	1a	1	a	a	0	2	1
A2	1a	2a	1a	1	a	a	5	0	0
A19	1a	1a	2a	1	b	b	2	1	0
A4	1b	1b	1b	0	a	a	3	2	0
A20	1b	1b	1b	0	a	a	3	0	0
A12	4a	1a	2b	1	a	a	1	2	0
A5	4a	1a	1a	1	a	a	1	1	2
A21	4b	1a	1a	1	c	c	1	3	0
A8	4b	1b	1b	0	a	c	3	2	0
A11	4a	1a	4a	1	a	a	0	4	0
A10	4b	4b	4b	1	a	c	3	1	0
A6	4b	4a	4a	1	b	b	2	3	0
A14	4b	4b	4b	0	a	a	3	1	0
A15	4a	4b	4b	0	a	a	1	4	0
A22	4a	4b	4b	0	a	a	3	0	0
						Total	56	38	5

Tabla 5.11. Resultados de la segunda etapa de la secuencia de enseñanza

Como se mostró antes, A4 respondió que las fracciones que escribió sí se ven en la pantalla y justificó apoyándose de aspectos numéricos de la fracción. Sin embargo, al contrastar las fracciones que escribió en la pregunta 2 con las que se guardaron durante la interacción, se observa que dos de ellas no se corresponden. Este hecho se hizo notar porque el diseño del applet está limitado a escribir fracciones con denominador entre 1 y 10, pero A4 escribió 22/12 y 28/24 como parte de la repuesta a la pregunta dos. Las fracciones que realmente se registraron en la base de datos son 6/7 y 9/7. Poder revisar esta información es una ventaja que el diseño de los applets proporciona.

El rastro de las fracciones escritas que se ve en el segmento de recta numérica se consideró como una herramienta de ayuda para los alumnos. Sin embargo, se detectó un error sobre su funcionamiento, ya que en ocasiones se representaba 1/1 de manera automática, esto influyó en la respuesta de los alumnos A1, A14, A19 y A24, ya que consideraron 1/1 al momento de ordenar las fracciones.

Además, no todas las fracciones escritas son vistas como rastro en el segmento de recta como consecuencia de la equivalencia de fracciones, ya que solo se conserva la última fracción equivalente escrita sobre un punto. Las respuestas que dieran en la pregunta 1 podían dejar observar si los alumnos reconocían este hecho, pero no fue identificado por ninguno a pesar de que sí hubo estudiantes que escribieron fracciones equivalentes. Por ejemplo, A1 y A6 que escribieron 1/2 y 2/4 y A5 que escribió 7/7 y 2/2. Otro motivo se refiere a la escritura de fracciones mayores que 3, por ejemplo, 11/2 y 7/2, escritas por los alumnos 5 y 6 respectivamente.

Solamente once de los 25 estudiantes lograron responder correctamente a la pregunta 2, y este resultado influye a los de las preguntas 3 y 4, tal como se observa en la Tabla 5.10. Los alumnos que ordenaron correctamente las fracciones, hicieron de manera correcta la elección de la fracción menor o mayor que utilizan para responder las preguntas 3 y 4 respectivamente. Para justificar el orden de esas fracciones A1, por ejemplo, se apoyó de la magnitud del segmento azul que representa la fracción en la recta numérica; A2 se apoyó de la posición del punto que representa a la fracción en la recta numérica, es decir, aspectos gráficos de las fracciones; mientras que A5 y A18 se fijaron las características del numerador y denominador de la fracción, es decir, aspectos numéricos de la fracción.

La justificación de la mayoría de los alumnos que no responden correctamente a las preguntas 3 y 4 está basada en la comparación de los numeradores y denominadores de las fracciones. Dos de estos casos se enuncian a continuación:

- A8 eligió 8/3 como la fracción menor, *“porque el denominador es el mas pequeño”*. La comparación la hizo con las fracciones 4/10, 3/9 y 12/5. Además eligió 4/10 como la fracción mayor *“porque el denominador es el mas grande”*

- A7 eligió 2/3 como la fracción menor entre 5/4, 3/7, 3/4, *“pues por que son numeros mas bajos”*.

Este tipo de errores ya se ha documentado en el compendio de investigaciones que muestran Petit, Laird y Marsden (2010). En este caso se observa que A8 se fija en el valor del denominador para poder establecer el orden de las fracciones, mientras que A7 se fija tanto en el numerador como el denominador.

La mayoría de los alumnos que se centran en las características del numerador y denominador de las fracciones para establecer su orden tienen errores, excepto cuanto las fracciones tienen el mismo denominador y se comparan los numeradores. Por ejemplo: A21 ordenó las fracciones que escribió de la siguiente manera: 8/3, 5/3 y 4/3. Eligió 4/3 como la menor para responder a la pregunta 3, su respuesta es “La menor es 4/3.Porque 4 es menor que 5 y 8”. La pregunta 4 la respondió de la siguiente manera: “La mayor es 8/3.Porque 8 es mayor que 5 y 4”.

En cuanto a la idea que tienen los estudiantes sobre la propiedad de densidad de las fracciones, se observa que los alumnos A1, A6, A19 y A25, quienes además habían contestado correctamente las preguntas anteriores, manifiestan una idea relacionada a dicha propiedad, ya que algunas de las respuestas son: *“infinitas”*, *“muchas”*, *“bastantes”*.

5.2.3. Resultados de la etapa tres

Para el análisis que en este apartado se detalla, se seleccionaron las actuaciones de 23 alumnos. Todas las preguntas de esta etapa generan respuestas concretas, por ellos se han clasificado como del tipo ii, ver Esquema 5.3. La forma en que se plantean las preguntas promueve la observación de la representación gráfica de la fracción que se genera a partir de la interacción que el estudiante tiene con los deslizadores.

Preguntas (1 - 6)	**tipo ii**
1. Cuando has representado la fracción 1/3, ¿en cuántas partes se ha dividido el segmento que empieza en 0 y acaba en 1? 2. Cuando has representado la fracción 1/3, ¿cuántas de esas partes mide el segmento azul? 3. Cuando has representado la fracción 4/3, ¿en cuántas partes se ha dividido el segmento que empieza en 0 y acaba en 1? 4. Cuando has representado la fracción 4/3, ¿cuántas de esas partes mide el segmento azul? 5. Cuando has representado la fracción 5/2, ¿en cuántas partes se ha dividido el segmento que empieza en 0 y acaba en 1? 6. Cuando has representado la fracción 5/2, ¿cuántas de esas partes mide el segmento azul?	Las preguntas están orientadas a observar la representación gráfica (segmento de recta) y pueden ser: 1. Correcta 0. Incorrecta

Esquema 5.3. Caracterización de las respuestas de la etapa tres

Como se observar en la Tabla 5.12, los alumnos A1 y A5 y A19 se acercan al propósito de esta etapa, ya que responden correctamente a todas las preguntas, es decir, logran reconocer el número de partes en las que se divide el segmento [0, 1] al representar las fracciones 1/3, 4/3 y 5/2 con los deslizadores y en la recta numérica, así mismo, reconocen el número de partes que tiene el segmento azul que representa a dichas fracciones en la recta.

	Etapa 3					
	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
A1	1	1	1	1	1	1
A5	1	1	1	1	1	1
A19	1	1	1	1	1	1
A21	1	1	1	1	1	0
A16	1	1	0	1	1	1
A13	1	1	1	0	1	0
A3	1	1	1	0	1	0
A23	0	1	1	1	0	1
A4	0	1	1	1	1	1
A8	0	1	0	1	1	1
A10	0	1	0	1	1	1
A9	0	1	0	1	0	1
A17	0	1	0	1	0	0
A6	0	1	0	0	0	0
A2	0	1	0	0	0	0
A7	0	1	0	0	0	0
A15	0	1	0	0	0	0
A22	0	1	0	0	0	0
A11	0	0	0	0	0	0
A12	0	0	0	0	0	0
A14	0	0	0	0	0	0
A18	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.12. Resultados de la tercera etapa de la secuencia de enseñanza

De la agrupación hecha se logran distinguir cuatro tipos de alumnos: (1) los que logran identificar el número de partes en las que se divide el segmento [0, 1] y las partes que mide el segmento azul, tanto para fracciones propias (1/3) e impropias (4/3 y 5/2); (2) los que logran la identificación que se describe en el punto 1, pero solo para fracciones propias; (3) los que logran la identificación que se describe en el punto 1, pero solo para fracciones impropias; y (4) los que no logran la identificación descrita en el punto 1 para ningún tipo de fracción.

Además de la clasificación hecha, hay respuestas que permiten ver que los estudiantes lograron reconocer el segmento [0,1] como unidad, específicamente para observar de manera explícita la relación entre el número de partes iguales en las que se divide la unidad y las partes que representa la fracción a través del segmento azul (magnitud). Una respuesta de este tipo se expone a continuación:

-La pregunta 4 (Cuando has representado la fracción 4/3, ¿cuántas de esas partes mide el segmento azul?) fue contestada por A4 de la siguiente manera: *"3 partes y una mas que esta fuera del 0 al 1"*.

Los resultados obtenidos permiten asumir que los alumnos no logran identificar fácilmente la relación entre las partes y el todo cuando se hace la representación gráfica de fracciones en el modelo de la recta numérica. Como atención a este problema surge la necesidad de plantear instrucciones que posibiliten una exploración más profunda por parte de los aprendices.

5.2.4. Resultados de la etapa cuatro

El análisis de las actuaciones de los estudiantes se continúa con las respuestas de 21 alumnos. Dichas respuestas se codifican de acuerdo con lo que se plantea en el Esquema 5.4. Las preguntas que se plantean en esta etapa se clasifican como del tipo i, ii y iii. Es decir, las preguntas 5 y 7 admiten respuestas generales, que pueden estar orientadas hacia aspectos numéricos de las fracciones, gráficos o numéricos y gráficos. Las preguntas 1, 2, 3, 4 y 6 admite respuestas concretas, que pueden ser correctas o incorrectas, aunque las preguntas 4 y 6 requieren una justificación.

La forma en que se plantean todas las preguntas promueve la observación de la representación gráfica de la fracción que se genera a partir de la interacción que el estudiante tiene con los deslizadores.

Pregunta (7)	**tipo i**	
5. Mueve los deslizadores para obtener 30/4. ¿Por qué no puedes ver la fracción representada como un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la pantalla? ¿Entre qué puntos de la recta numérica crees que se encuentra el punto que representa a la fracción 30/4? 7. ¿Cómo le explicarías a tu compañero que los enteros también se pueden escribir como fracciones?	La explicación se basa en: 1. Aspectos numéricos 2. Aspectos gráficos 3. Gráficos y numéricos 4. No especifica	La interpretación se considera: a. Completa b. Incompleta c. Incorrecta o ambigua o no sabe

Preguntas (1, 2 y 3)	**tipo ii**
1. ¿La fracción 2/3 es mayor que uno? 2. ¿La fracción 9/8 es mayor que uno? 3. En una fracción impropia, ¿el denominador es mayor o menor que el numerador? Usa los deslizadores si lo consideras necesario	Las respuestas pueden ser: 1. Correcta 0. Incorrecta

Preguntas (4, 5 y 6)	**tipo iii**	
4. ¿Hay fracciones impropias mayores que 3? Si contestaste que sí da un ejemplo.	La respuesta puede ser: 1. Sí 2. No 3. No sabe	Los ejemplos dados son: a. Correcta b. Incorrecta
6. Usando los deslizadores identifica las fracciones que representen al número 1. Escríbelas.	1. Número de ejemplos finito 2. Deja expresado la idea de infinitos ejemplos 3. No sabe	

Esquema 5.4. Caracterización de las respuestas de la etapa cuatro

Los resultados de las preguntas 1 y 2, los cuales se muestran en la Tabla 5.13, no presentan dificultad para los estudiantes, ya que 19 de 21 alumnos respondieron correctamente en ambos casos. Pese a que estas preguntas tienen la intención de que los alumnos comiencen a reconocer la característica de las fracciones propias e impropias a partir de la relación que hay con la unidad, la forma en que se plantean no permite afirmar que el éxito tenido en las respuestas significa el reconocimiento de dicha característica de esas fracciones.

	Etapa 4						
	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7
A2	1	1	1	3	1c	3	4c
A3	1	1	1	1	4c	1a	4c
A4	1	1	1	1b	1b	1a	1a
A5	1	1	1	1b	1a	2a	2b
A15	1	1	1	2	1b	1a	4c
A6	1	1	1	1a	1c	1a	1b
A19	1	1	1	1b	2b	1a	1a
A13	1	1	1	3	2b	2a	2a
A1	1	1	0	3	3a	1b	4c
A8	1	1	0	1a	4c	1a	4c
A9	1	1	0	2	2b	1a	1c
A10	1	1	0	2	1b	1b	1a
A17	1	1	0	1	4c	1a	4c
A18	1	1	0	1a	1b	1a	1c
A12	1	1	0	2	1b	1b	1a
A21	1	1	0	1	4c	1a	4c
A11	0	1	1	3	4c	1b	4c
A20	0	1	1	1b	4c	3	1b
A7	1	0	0	3	2b	1b	4c
A16	1	0	0	1b	1c	1b	1c
A14	0	0	0	1	4c	1b	4c

Tabla 5.13. Resultados de la cuarta etapa de la secuencia de enseñanza

La pregunta 3 se ha planteado con la intención de que los estudiantes exploren más detenidamente el applet y logren reconocer la característica de las fracciones impropias a partir de la relación que hay entre sus numeradores y denominadores. Sin embargo, las respuestas permiten afirmar que hubo poca exploración por parte de los alumnos, en particular los alumnos A7 y A14 han respondido “no me acuerdo” o “no lo se” pese a que tuvieron la oportunidad de explorar el recurso. Solo diez alumnos respondieron correctamente a esta pregunta que se considera de poca dificultad. Como aspecto a considerar en el diseño de la secuencia, es necesario hacer más específica la pregunta, ya que seis alumnos respondieron con un “sí” o un “no”, al parecer no lograron interpretar la pregunta.

En las preguntas 4 y 6 se observa que hay estudiantes que contestaron de forma concreta, es decir, no justificaron su respuesta o viceversa. Por esta razón en algunas casillas de la Tabla 5.13 solo hay valores numéricos o alfabéticos. Por ejemplo, A3 responde que “sí” hay fracciones impropias mayores que 3, pero no da un ejemplo; este mismo alumno, responde que la fracción 30/4 está "en el cero", pero no justifica porqué esa fracción no puede verse en la pantalla.

Solamente los alumnos A6, A8 y A18 respondieron correctamente a la pregunta 4, es decir, reconocen que hay fracciones impropias mayores que 3 y dan un ejemplo correctamente. Los ejemplos que han dado de fracciones impropias mayores que 3 son: 10/3, 7/2 y 26/8.

Las respuestas que dieron los alumnos A1 y A5 a la pregunta 5 se consideraron completas, aunque su enfoque haya sido distinto. Para responder, A5 consideró solo aspectos numéricos y A1 consideró aspectos numéricos y gráficos. Por ejemplo, la respuesta de A1 es:

-"por que en la recta numerica esta dividido de punto a punto entre 4 que es el denominador no pueden haver 30 espacios, en el punto 7 espacio 2". El alumno se basa en lo que ocurre en la recta numérica, específicamente identifica las partes en las que se divide el segmento unitario estableciendo una relación parte - todo, y además reconoce la unidad fraccionaria, a la cual le llama espacios. Valdría la pena precisar si al decir "no pueden haver 30 espacios", se está refiriendo al segmento de recta utilizada en el diseño. Se supone que el alumno entiende este hecho, ya que al responder sobre el punto que representa a la fracción 30/4 lo hace correctamente, dicha respuesta es "en el punto 7 espacio 2". Se conjetura que el alumno logra generalizar y justificar el proceso de partición en las unidades iteradas del modelo de la recta numérica.

Doce estudiantes respondieron correctamente la pregunta 6. Diez de ellos escribieron un número finito de ejemplos, que al parecer están limitados por las características de los deslizadores, ya que representaron desde 1/1 hasta 10/10; este hecho también podría estar vinculado a lo que Mitchell y Horne (2008) llaman conteo decimal, en el sentido de que los alumnos podrían estar habituados al uso de instrumentos de medida (reglas) que tienen como base el sistema decimal. A3 y A13 escribibieron un número finito de ejemplos, pero al final de la última fracción A3 escribió la palabra "etc." y A13 puso tres puntos suspensivos; sería interesante indagar, si ese "etc." o "…" significan hasta llegar a 10/10 o continúa más allá.

La pregunta 7 es considerada como la de mayor dificultad, sin embargo siete alumnos logra dar una explicación considerada como completa, logrando uno de los propósitos de la etapa. Diez estudiantes no saben cómo explicar a sus compañeros que los números enteros también se pueden escribir como fracciones. Los alumnos A4, A10, A12 y A19 son algunos de los que dan una explicación completa basada en la división efectuada entre el numerador y denominador de la fracción, Por ejemplo:

-"dividiendo un número por otro y si el número no da decimales, es un número entero", respuesta codificada como 1a y dada por A19.

-"lo explicaria didiendole que tiene que dividir la fraccion y si le da una unidad significa que son enteros pero en division o fraccion". La idea que tiene A4 es interesante, faltaría precisar cómo él entiende los términos *"unidad"* y *"enteros"*.

Respecto a la necesidad de la precisión anterior, se ha observado que en el planteamiento de algunas preguntas se han utilizado palabras técnicas o términos matemáticos cuyo significado no es claro para los estudiantes. En este sentido, se plantea hacer cambios en el diseño de la secuencia de enseñanza por otros términos más comunes para los alumnos.

5.2.5. Resultados de la etapa cinco

En esta etapa solo se consideran las actuaciones de 19 alumnos. Durante la interacción con el applet que constituye esta etapa se responden preguntas de los tipos ii y iv, el análisis de las respuestas permiten identificar si los estudiantes realmente lograron reconocer las características de las fracciones propias e impropias que se estudiaron en la etapa anterior.

Las preguntas (3, 4 y 5) que se plantean para llevar a los aprendices a una reflexión continúan con el propósito de observar la idea que tienen los alumnos respecto a la propiedad de densidad de los números racionales, específicamente para identificar "la cantidad" de fracciones propias e impropias que se pueden representar en la recta numérica, .

Las respuestas dadas por los estudiantes en esta etapa se caracterizan de acuerdo con lo que se muestra en el Esquema 5.5.

Preguntas (1 - 5)	**tipo ii**
	Las respuestas se enfocan en/ o son:
1. ¿Cómo le explicarías a un compañero qué es una fracción impropia? 2. ¿Qué le dirías a un compañero que te dice que una fracción propia es mayor que uno? ¿Por qué?	1. La relación con la unidad 2. Relación entre numerador y denominador 3. Relaciona tanto la unidad como numerador y denominador 4. No sabe
3. ¿Cuántas fracciones propias se pueden representar en la recta numérica? 4. ¿Cuántas fracciones impropias se pueden representar en la recta numérica?	1. Finitas 2. Infinitas, muchas, bastantes 3. No sabe
5. ¿Qué se pueden representar más en la recta numérica, fracciones propias o impropias? ¿Por qué?	1. Propias 2. Impropias 3. Igual 4. No sabe

Escribe fracciones propias e impropias	**tipo iv**
	La clasificación hecha se pueden calificar como:
El alumno debe escribir 5 fracciones propias y cinco impropias	1. Correcta 0. Incorrecta

Esquema 5.5. Caracterización de las respuestas de la etapa cinco

En la Tabla 5.14, que resume los resultados de esta etapa, se ofrecen las fracciones que los estudiantes clasificaron como propias o impropias, esto se hace con la finalidad de comparar que hubo alumnos que hicieron bien la clasificación, pero solo escribieron una fracción de cada tipo, mientras que otros alumnos tuvieron incorrecta la clasificación pero escribieron las cinco fracciones y solo clasificaron de manera incorrecta a una de ellas, concretamente es el caso de A15.

	Etapa 5								
	P1	P2	P3	P4	P5	Fracciones escritas como propias		Fracciones escritas como impropias	
A1	2	4	3	1	3	1	1/2	1	5/3
A4	2	2	1	1	3	1	4/7, 3/7, 2/4, 9/10, 7/9	1	23/9, 4/2, 5/3, 7/5, 8/3, 9/5
A5	4	1	2	2	1	1	1/10	1	4/2
A11	4	4	1	1	4	1	1/2	1	3/1
A12	2	4	3	3	3	1	5/6, 5/8, 5/9, 4/7, 3/5, 2/5	1	8/6, 9/7, 8/7, 8/3, 9/8, 10/7
A16	2	4	1	1	2	1	3/4	1	4/3
A18	2	1	2	2	2	1	5/6	1	7/5
A7	4	4	1	1	1	1	2/4	0	No escribió
A9	1	1	2	2	4	1	3/4	0	No escribió
A15	2	4	1	4	1	0	1/7, 4/9, 3/6, 7/3, 2/6	1	36/6, 23/4, 12/2, 12/1, 12/4, 34/4
A8	4	4	3	3	4	0	No escribió	0	No escribió
A10	4	4	3	3	4	0	No escribió	0	No escribió
A6	2	3	1	1	4	0	No escribió	0	No escribió
A13	2	4	2	2	2	0	1/1, 4/1	0	1/3, 3/1
A17	2	4	1	1	1	0	4/3, 4/3, 6/4, 6/4, 4/3	0	4/6, 4/6, 2/4, 2/4, 5/8, 5/8, 6/8
A14	4	4	1	1	4	0	No escribió	0	No escribió
A2	1	1	3	3	1	0	No escribió	0	3/4, 5/7
A3	2	1	1	1	2	0	1/1, 4/4, 3/1, 3/4,	0	30/10, 30/1, 7/8, 4/5, 14/4
A19	4	4	3	3	4	0	No escribió	0	No escribió

Tabla 5.14. Resultados de la quinta etapa de la secuencia de enseñanza

Las respuestas de las preguntas 1 y 2 permiten observar que la mayoría de los alumnos lograron identificar las características de las fracciones propias e impropias que se trataron en la etapa anterior. Diez alumnos explican lo que es una fracción impropia a partir de la relación entre el numerador y denominador de la fracción, mientras que dos de ellos lo hacen en relación con la unidad.

Para la pregunta 1 se dan respuestas como: "que el numerador es mas grande que el denominador" (A1); "Numerador mayor que el denominador" (A3); "que si el denominador es mas pequeño que el numerador es una fraccion impropia" (A4); "una fraccion impropia es cuando el denominador es menor que el numerador" (A6).

La forma en que se plantea la pregunta 2 pone énfasis en la relación que tienen las fracciones propias con la unidad. Por ello las respuestas de los estudiantes están orientadas hacia esa relación (A2: "mallor que uno", A9: "la fraccions impropia es superior a 1"), aun así, A4 y A6 utilizaron la relación entre el numerador y el denominador de la fracción para responder a la pregunta. Por ejemplo, el alumno A4 ha respondido:

“Le diria que se equivoca. Porque , el numerador es menor que el denominador y para ser mayor que uno debe ser impropia”.
Para responder a las preguntas 3 y 4, algunos alumnos como A5, A9 y A13 respondieron que hay “muchas” fracciones propias e impropias, el resto de estudiantes respondieron ofreciendo un número concreto, que además en algunos casos era distinto entre sí. Es decir, afirmaban que el número de fracciones propias que se pueden representar en la recta numérica es distinto al número de fracciones impropias.

Se observa que los resultados anteriores influyen para responder a la pregunta 5. Por ejemplo, A3 ha escrito que en la recta numérica se pueden representar 3 fracciones propias y 7 impropias, esto para responder a las preguntas 3 y 4 respectivamente. Tal parece que esas cantidades sirven para dar la respuesta de la pregunta 5, ya que dice que hay más fracciones impropias porque 7 es más que 3.

Una respuesta interesante de esta última pregunta se refiere a la de A5, él justifica que se pueden representar más fracciones propias de la siguiente manera: “propias porque hay más posibilidades de hacer mas fracciones”. Sin embargo, en las preguntas 3 y 4 dice que se pueden representar *“muchas”* fracciones de ambos tipos, pero la respuesta 5 deja ver que la noción que tiene de *“muchas”* no es la misma en ambas respuestas. Los alumnos que dicen que se pueden representar en la recta numérica la misma cantidad de fracciones propias que impropias, es porque coincide la cantidad finita que han dado como respuesta en las preguntas 3 y 4.

Finalmente se destaca la poca interacción que tuvieron los alumnos con el recurso tecnológico en esta etapa, ya que solamente los alumnos A3, A4, A12, A15 y A17 escribieron el número de fracciones propias e impropias que se pedían en las indicaciones, o sea, cinco de cada tipo. Otros escribieron de ambos tipos de fracciones, pero escribieron menos de cinco. Hubo quienes escribieron solo de algún tipo de fracciones y quienes no escribieron ninguna.

Pese a la poca interacción que hubo, se destacan los resultados obtenidos de quienes sí utilizaron el recurso, ya que en general, los alumnos que escribieron alguna fracción en cualquiera de las clasificaciones, lo hicieron correctamente.

5.2.6. Resultados de la etapa seis

De acuerdo con el criterio esbozado anteriormente, en esta etapa únicamente se analizan las producciones de 14 alumnos. Esta etapa se califica como la de mayor complejidad, aquí se ponen de manifiesto algunas ideas que tienen los estudiantes sobre las propiedades de orden, densidad y equivalencia de fracciones.

A través de la interacción estudiante/applet se generan respuestas que se codifican según el Esquema 5.6. De las preguntas que se plantean para llevar a los aprendices a una reflexión se generan respuestas concretas que requieren una justificación.

Preguntas (1, 2, 3 y 4) **tipo iii**

1. ¿Cuál de las fracciones que escribiste entre 1 y 2 es mayor? ¿Por qué?
2. ¿Cuál de las fracciones que escribiste entre 3 y 4 es mayor que 1? ¿Por qué?
4. Elige una de las fracciones que escribiste entre 3 y 4, escribe otra fracción que se represente con el mismo punto. ¿Cómo le explicarías a tu compañero que esas dos fracciones se representan con el mismo punto en la recta numérica?

3. Elige una de las fracciones que escribiste entre 1/10 y 1/2. ¿Qué tendrías que cambiarle a la fracción para que el resultado estuviera entre 9/5 y 7/2?

La elección de la fracción/cambio es:

1. Correcta
0. Incorrecta (no escribió fracciones en ese intervalo)

La elección y/o cambio se basa en:

a. La magnitud del segmento
b. La posición del punto en la recta
c. Se fija en numerador y/o denominador
d. No especifica

a. Cambio de numerador y/o denominador
b. Sumar o multiplicar por algo
c. Cambio incorrecto o no hecho

Escribe fracciones en intervalos **tipo iv**

El alumno debe escribir 4 fracciones en cada intervalo: (1, 2), (3, 4), (1/10, 1/2), (9/5, 7/2).

La clasificación hecha se pueden calificar como:

1. Correcta
0. Incorrecta

Esquema 5.6. Caracterización de las respuestas de la etapa seis

Las respuestas proporcionadas por los alumnos dependen de las fracciones que escriban en cada uno de los intervalos de la recta numérica que se indican, así como de las ideas que tengan sobre orden, densidad y equivalencia.

En comparación con la etapa anterior se observa que aquí los alumnos escribieron más fracciones, por lo que se asume una mayor interacción con este applet. Sin embargo, como se muestra en la Tabla 5.15, hubo pocas respuestas correctas. En la primera columna de cada intervalo se muestran las fracciones escritas por los estudiantes, y en la segunda se muestran las fracciones que se clasifican como correctas, la letra N significa que ninguna fracción fue escrita en el intervalo correspondiente.

	Fracciones							
	Entre 1 y 2		Entre 3 y 4		Entre 1/10 y 1/2		Entre 9/5 y 7/2	
A1	1/2, 1/3, 2/4, 5/4	5/4	3/2, 3/2, 3/4, 13/4, 13/4	13/4	1/10, 3/10, 3/10, 3/10, 3/10	N	5/2, 5/2, 5/2, 5/2	N
A2	1/1	N	3/4, 3/3	N	1/9, 1/1	1/9	ninguna	N
A3	1/4, 1/9, 1/9	N	3/2, 3/9, 8/3, 7/3, 7/3	N	2/3, 2/1, 2/2, 2/1	N	2/3, 6/60, 6/6, 2/3	N
A4	1/2, 3/5, 2/1, 1/1, 3/2	3/2	2/4, 2/3, 4/3, 3/4, 3/5	N	2/10, 4/8, 8/4, 1/10	N	8/7, 7/8, 3/6, 7/2	N
A5	1/2	N	3/4, 2/2	N	1/5, 3/3	1/5	7/2, 6/2	6/2
A6	ninguna	N	ninguna	N	ninguna	N	ninguna	N
A7	5/3	5/3	10/3	10/3	5/8, 5/6	N	6/3, 6/2	6/2
A8	ninguna	N	ninguna	N	ninguna	N	ninguna	N
A9	6/4	6/4	16/4, 15/4	15/4	12/4	N	ninguna	N
A10	1/6, 1/1	N	3/3	N	ninguna	N	ninguna	N
A11	ninguna	N	ninguna	N	ninguna	N	ninguna	N
A12	1/6, 2/6, 1/2, 1/1	N	4/6, 4/1, 3/9, 3/2	N	1/10, 3/10, 5/10, 2/4	N	18/10, 14/4, 21/6, 35/10	N
A13	3/2, 3/2, 5/6, 3/2	3/2	6/3, 6/4, 3/3, 7/7	N	3/7, 7/3, 1/2	N	3/8	N
A14	ninguna	N	1/4, 3/4	N	1/7	1/7	2/9, 2/5	N

Tabla 5.15. Clasificación de las fracciones escritas en la etapa seis

Cabe señalar que A6, A8 y A11 no escribieron ninguna fracción durante la interacción con el applet, pero para responder a las preguntas tomaron como referencia otras fracciones, y en algunos casos lo hicieron correctamente, por ello fueron tomadas en cuenta sus respuestas. Para ditinguilar las respuestas de estos alumnos se ha puesto (*) a un lado de la codificación asignada y presentada en la Tabla 5.16.

En la pregunta 1 se pide a los estudiantes que, de las fracciones escritas entre los puntos que representan al 1 y 2 en la recta numérica, elijan la mayor y justifiquen por qué esa fracción es mayor que las demás escritas en ese mismo intervalo. Esta pregunta se ha planteado con la intención de identificar qué estrategia utilizan los estudiantes para comparar fracciones en la recta numérica, es decir, si las comparan a partir de la longitud del segmento o de la posición del punto que las representa.

Como se observa en la Tabla 5.16, cinco alumnos eligieron correctamente una fracción entre 1 y 2, pero no supieron justificar por qué esa fracción es la mayor. En este caso las respuestas de los alumnos A4, A7 y A9 se corresponden con la única fracción correcta que ubicaron en ese intervalo.

	Etapa 6			
	P1	**P2**	**P3**	**P4**
A1	0a	1a	0	1d
A2	0c	0	0	0
A3	0	0d	0	0
A4	1d	0d	0	0
A5	0c	0	0c	0
A6	1d*	1d*	0	0
A7	1d	0b	0	0
A8	1d*	1d*	1a*	0
A9	1b	1d	0	0
A10	1d	1d	1b	0d
A11	0a	0a	0c	0d
A12	1c	1b	0c	1d
A13	0a	0d	0c	0d
A14	0d	0d	0c	0d

Tabla 5.16. Resultados de la sexta etapa de la secuencia de enseñanza

En los resultados de la Tabla 5.16 se muestra que muy pocos alumnos logran identificar las fracciones en los intervalos indicados. De los siete alumnos que ubicaron correctamente una fracción entre el 1 y 2, solo A9 logra dar una justificación, la cual está basada en la posición del punto en la recta. Seis alumnos ubicaron correctamente una fracción entre 3 y 4, y solo A1 y A12 justificaron su respuesta; A1 se basa en la longitud del segmento azul y A12 en la posición del punto que representa a la fracción.

Para responder a las preguntas 3 y 4 se observa menor acierto en las respuestas que dan los estudiantes. El alumno A9 respondió a la pregunta 3 de la siguiente manera: “1/9, tendria que sumarle algo”. Aunque el alumno no termina el proceso y no escribe una nueva fracción que se ubique entre 9/5 y 7/2, se supone que él entiende que 1/9 es menor que las otras dos fracciones, por ello requiere “sumarle algo”.

En la última pregunta, dos alumnos eligen correctamente la fracción entre 3 y 4, pero ninguno escribe la fracción equivalente y mucho menos la justificación. Cabe señalar que la mayoría de los alumnos no utilizaron las fracciones escritas durante la interacción, sino que escribieron fracciones nuevas. Esto da pie a pensar una estrategia para que los alumnos se fijen más en el rastro que dejan las fracciones.

Una respuesta dada a la pregunta 4 que se vincula con el propósito de esta etapa y que resulta de interés porque pone de manifiesto la idea de equivalencia es la que da A2: “3/3, 4/4, Porque son iguales”. Aunque con su interpretación no dé una respuesta correcta a la pregunta planteada se rescata el hecho de que el alumno logró recordar que esas dos fracciones son iguales, es decir, la equivalencia.

5.2.7. Resultados de la etapa siete

Los alumnos que completan la secuencia de enseñanza son once, y sus actuaciones se consideran para el análisis que aquí se detalla. Las respuestas generadas durante la interacción estudiante/applet en esta etapa permiten identificar si los alumnos logran representar fracciones como puntos en la recta numérica. Las respuestas dadas por los alumnos permites seguir las ideas de orden y equivalencia de fracciones que ellos tienen. Las respuestas se caracterizan de acuerdo con lo que se muestra en el Esquema 5.7.

Preguntas (1 y 3) **tipo ii**

1. ¿Cuál es la FRACCIÓN MAYOR que se puede representar como un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la pantalla?
3. ¿Cuál es la FRACCIÓN MENOR que se puede representar como un punto en la parte de la recta numérica que se muestra en la pantalla?

La respuesta puede ser:

1. Correcta
0. Incorrecta

Preguntas (2 y 4) **tipo iii**

2. ¿La fracción que diste como respuesta en la pregunta 1 se puede escribir de otras formas? ¿Cuáles?
4. ¿La fracción que diste como respuesta en la pregunta 3 se puede escribir de otras formas? ¿Cuáles?

La respuesta puede ser:

1. Sí
2. No
3. No sabe

La(s) fracción (es) dada(s) pueden ser:

b. Incorrecta
a. Correcta

Ubica la fracción en la recta numérica **tipo iv**

El alumno debe ubicar en la recta numérica fracciones que se general de manera aleatoria.

Se identifica:

Las fracciones y el número de fracciones ubicadas correctamente como puntos en la recta.

Esquema 5.7. Caracterización de las respuestas de la etapa siete

La pregunta 3 se consideró como la de mayor dificultad en esta etapa, ya que en el segmento de recta numérica que se muestra en la pantalla está incluido el cero. Se pensó que esto podría traer dificultades a los alumnos al momento de identificar la fracción menor que se puede representar en el segmento de recta dado.

Las respuestas dadas en esta etapa dejan ver que no todos los estudiantes tuvieron interacción con el applet para representar fracciones. Como se observa en la Tabla 5.17 Solamente el alumno A7 siguió completa esta indicación, es decir, trató de representar en la recta numérica cinco fracciones. Cinco estudiantes solo trataron de representar entre una y cuatro fracciones y; otros cinco estudiantes no intentaron ubicar ninguna fracción. Las repuestas se muestran en parejas, de la forma (A, B), donde A es la fracción que genera el applet para que el alumno la represente en la recta numérica y B es la fracción que el alumno ubicó.

Se esperaba que los aprendices no tuvieran tantas dificultades para ubicar las fracciones en la recta numérica, ya que incluso en el diseño del applet se dejaron visibles las particiones generadas en el segmento de recta. Sin embargo, como se puede observar en la Tabla 5.17, A7 solamente pudo representar correctamente dos de las conco fracciones que tenía que ubicar. Para ubicar la primera, “7/2”, solo intentó una vez, falló y cambió de fracción, generándose “5/2”, la cual intentó ubicarla 4 veces y en ninguna acertó. Las fracciones que pudo representar al primer intento fueron 1/1 y 1/2, aunque esta última se volvió a generar inmediatamente y el alumno la ubico incorrectamente.

	Fracciones escritas en la etapa 7
A1	(22/6, 22/6) (1/5, 1/5) (21/6, 17/6) (1/1, 1/1)
A2	(13/8, 19/8) (13/8, 26/8) (9/9, 9/9)
A3	No escribió
A4	(24/9, 33/9) (24/9, 33/9) (5/2, 7/2) (8/6, 8/6)
A5	No escribió
A6	No escribió
A7	(7/2, 5/2) (5/2, 1/2) (5/2, 1/2) (5/2,1/2) (5/2, 0/2) (1/1, 1/1) (3/9, 36/9) (1/2,1/2) (1/2, 0/2)
A8	No escribió
A9	(7/2, 7/2)
A10	(7/8, 10/8)
A11	No escribió

Tabla 5.17. Fracciones que ubicaron los alumnos en la recta numérica durante la etapa 7

En la Tabla 5.18 se observa que en general los estudiantes tuvieron poco éxito para responder a las cuatro preguntas planteadas. Únicamente A1 y A2 respondieron correctamente la pregunta 1, ambos alumnos escribieron que la fracción mayor que se puede representar en el segmento de recta que se ve en la pantalla es “40/10”. Pero al momento de dar una fracción equivalente a esa, o sea, para responder la pregunta 2, solo A2 lo hizo correctamente, dando como respuesta “4/1”, mientras que A1 respondió “nose”. Se supone que la fracción escrita como respuesta está basada en la exploración que hicieron en las etapas previas, porque coincide con el valor numérico mayor que toman los deslizadores.

	Etapa 7				
	P1	P2	P3	P4	Fracciones
A1	1	0	0	0	(22/6, 22/6) (1/5, 1/5) (21/6, 17/6) (1/1, 1/1)
A2	1	1	0	0	(13/8, 19/8) (13/8, 26/8) (9/9, 9/9)
A3	0	0	0	0	No escribió
A4	0	0	0	0	(24/9, 33/9) (24/9, 33/9) (5/2, 7/2) (8/6, 8/6)
A5	0	0	0	0	No escribió
A6	0	0	0	0	No escribió
A7	0	0	0	0	(7/2, 5/2) (5/2, 1/2) (5/2, 1/2) (5/2,1/2) (5/2, 0/2) (1/1, 1/1) (3/9, 36/9) (1/2,1/2) (1/2, 0/2)
A8	0	0	0	0	No escribió
A9	0	0	0	0	(7/2, 7/2)
A10	0	0	0	0	(7/8, 10/8)
A11	0	0	0	0	No escribió

Tabla 5.18. Resultados de la séptima etapa de la secuencia de enseñanza

Los alumno A8 y A10 tiene presente que el número mayor que se puede representar en el segmento de recta numérica es el 4, pero no logra escribirlo como fracción, ya que su respuesta es: “no se poner el numero 4 en fraccion”. Esto deja ver que no se ha logrado uno de los propósito de la etapa 4 (representar los enteros como fracción).

Respecto a las preguntas 3 y 4, ningún estudiante logró responder correctamente, pero se observan ideas de interés. Los alumnos A4, A5 y A6 escribieron la fracción “1/2” como la menor (respuesta la pregunta 3), pero no logran dar una fracción equivalente (responder la pregunta 4). Este resultado podría estar vinculado con las dificultades que reportan Petit, Laird y Marsden (2010), que se refieren al hecho de que los niños extienden las propiedades de los naturales. En este caso los niños podrían estar considerando que 1 es el número menor del numerador y 2 el menor del denominador. Incluso estos resultados pueden estar vinculado a lo que ocurre con los valores de los deslizadores de las etapas anteriores.

Por otro lado, el alumno 2, sí identifica el cero como el número menor en el segmento de recta, pero para representarlo como una fracción lo ha hecho como “0/0”.

5.3. Resultados y comparación del postest y pretest

Para contrastar las respuestas dadas por los estudiantes en el pretests y postest se consideran únicamente las actuaciones de los nueve estudiantes que asistieron a todas las sesiones de la fase experimental (se han llamado A1, A2,…A9). Las respuestas se han codificado igual que en el pretest, es decir, las correctas se marcaron con 1 y las incorrectas con 0. El procedimiento de agrupación por colores se utiliza para agrupar estos resultados.

Como ya se mencionó en el apartado 3.1, en el postest solo se evaluaron tareas correspondientes a las actividades 2, 4 y 5 del pretest. De esta forma se evaluaron cuestiones referentes a: la representación gráfica de fracciones a partir de su escritura simbólica, considerando modelos continuos (actividad 2 del pretest y 1 del postest); la representación de fracciones como puntos en la recta numérica (actividad 4 del pretest y 2 del postest); y la identificación de fracciones en un intervalo y la clasificación de fracciones propias e impropias (actividad 5 del pretest y 3 del postest).

En las últimas dos actividades del postest se evaluaron contenidos que se trataron en la secuencia de enseñanza. Se pretende identificar cómo pudo influir dicha secuencia en los objetos mentales que han desarrollado los alumnos sobre las fracciones. Evidentemente, el hecho de que únicamente nueve estudiantes completaran todas las fases de la experimentación limita el potencial del análisis.

En la Tabla 5.19 se muestran las frecuencias y el porcentaje de éxito en las respuestas dadas por los nueve estudiantes que completaron la experimentación. La información está organizada para cada actividad (2pretest-1postest, 4pretest-2postest y 5pretest-3postest); también se incluyen los resultados del pretest en los que se evaluaron estas mismas actividades a los alumnos seleccionados.

	Acitividad 2pretest-1postest		**Actividad 4pretest-2postest**		**Actividad 5pretest-3postest)**	
Pretest	13/36	36,1 %	3/45	6,6 %	1/45	2.2 %
Postest	31/36	86.1 %	23/45	51,1 %	19/45	42,2%

Tabla 5.19. Comparación de los resultados generales del pretest y postest

De manera general, de la comparación entre los resultados de ambas pruebas se observa que hubo un aumento de respuestas correctas en todas las actividades planteadas en el postest. De las tres, se sigue teniendo mayor éxito en tareas que se refieren a la representación gráfica de fracciones a partir de su escritura simbólica usando modelos continuos; y se tiene menor éxito para identificar fracciones en un intervalo y clasificar fracciones propias e impropias..

Tal como se describió en el apartado 3.1, cada una de las actividades está formada por varios incisos, por lo que el número de respuestas correctas varía en cada uno de ellos. Para hacer una comparación más detallada se muestran los resultados de cada actividad. En la Tabla 5.20 se exponen por inciso los resultados de la actividad 2pretest-1postest. Cabe aclarar que en el postest se cambió el orden de los incisos que se tenían en el pretest, pero para hacer la comparación y mostrar los resultados en la tabla se han correlacionado según el nivel de complejidad y características que se consideraron en su diseño.

	Actividad 2pretest-1postest							
	a)		b)		c)		d)	
Pretest	7/9	77,7 %	3/9	33,3 %	1/9	3.3 %	2/9	22.2 %
Postest	9/9	100 %	7/9	77,9 %	6/9	66.6 %	9/9	100 %

Tabla 5.20. Comparación de resultados de la actividad 2pretest-1postest

Las fracciones que se debían representar en los incisos (c) y (d) fueron las mismas en ambas pruebas, 4/3 y 1/3 respectivamente, aunque la figura en la que se debía representar la fracción en el postest se cambió de un círculo a un rectángulo “delgado” que se asemeja a un segmento de recta. Al respecto se puede afirmar que usar esta última figura ayudó a los estudiantes a representar fracciones impropias, ya que 6 de los 9 alumnos lograron representar correctamente esta fracción usando este modelo, mientras que con el círculo, solo uno pudo hacer dicha representación. En la Figura 5.3 se muestran las representaciones gráficas de la fracción impropia 4/3 que hizo A7 en el pretest y postest..

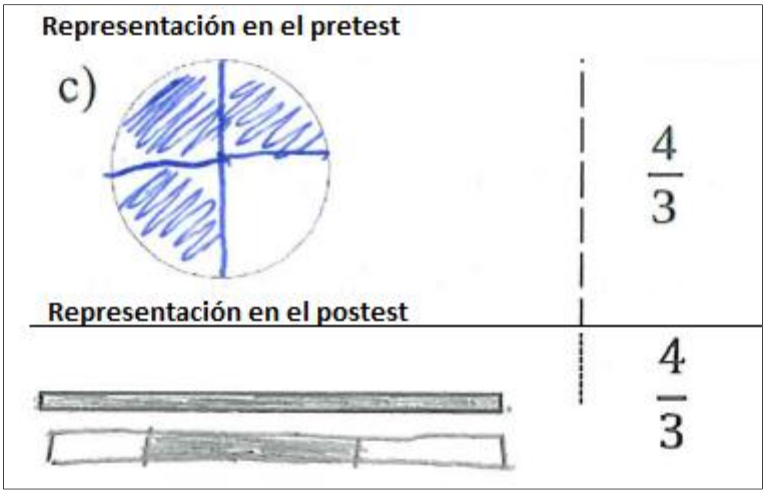


Figura 5.3. Respuestas de A7 para representar la fracción 4/3 en el pretest y postest

Los resultados de la actividad 4 se exponen en la Tabla 5.21. En el pretest se evaluó la representación en la recta numérica de 10 fracciones, pero en el postest solo se conservaronn 5 de ellas, por eso y para hacer la comparación se presentan solo esos resultados.

	Actividad 4pretest-2postest									
	4/8		1/4		1/6		6/5		8/7	
Pretest	0/9	0 %	2/9	22.2%	0/9	0 %	1/9	11.1%	0/9	0 %
Postest	6/9	66,6%	6/9	66,6 %	3/9	33,3%	6/9	66,6%	2/9	22.2 %

Tabla 5.21. Comparación de resultados de la actividad 4pretest-2postest

En los resultados del pretest se puede ver que ningún estudiante logró representar en la recta numérica las fracciones 4/8, 1/6 y 8/7, mientras que en el postest, los nueve estudiantes representaron correctamente al menos una fracción. Seis representaron correctamente las fracciones 4/8, 1/4 y 6/5. Esto permite ver que la secuencia de enseñanza tuvo algún efecto en los objetos mentales que tienen los estudiantes referentes a este tema. Las actuaciones de A5 se exponen en la Figura 5.4.

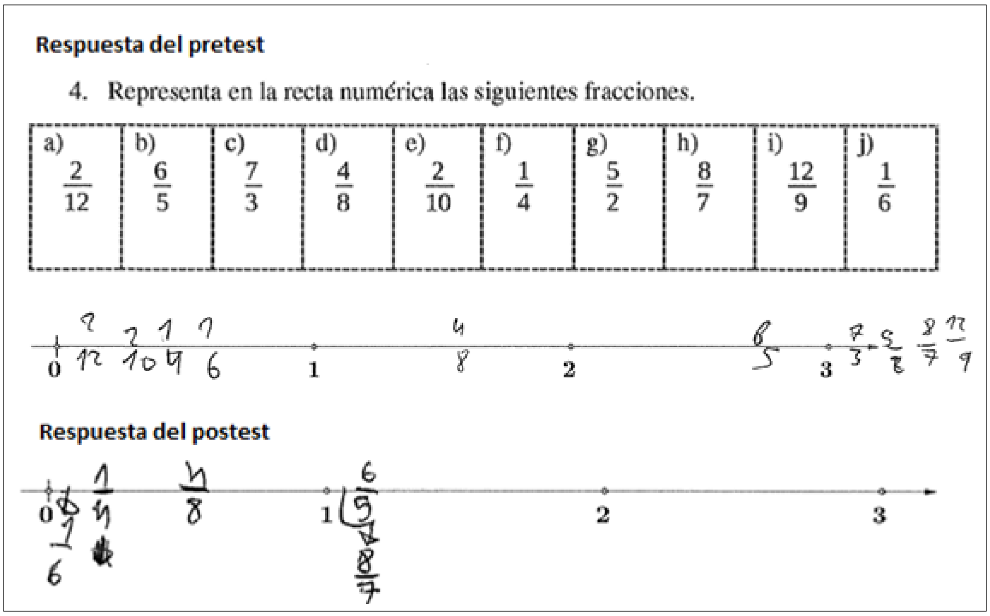


Figura 5.4. Respuestas de A5 dadas en el pretest y postest para representar fracciones en la recta

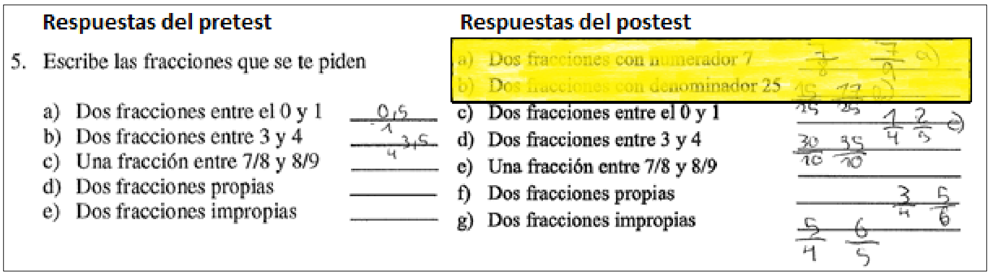
De las respuestas que el alumno dio en el pretest se pueden hacer varias interpretaciones. Sin embargo, solo se destaca el hecho de que el alumno hizo una clasificación entre fracciones propias e impropias, las propias las coloca entre 0 y 1 y las impropias entre 1 y 3, aunque cabe señalar que el orden y ubicación no son correctos. Respecto a las fracciones que se evalúan en ambas pruebas se observa que en el pretest no ubica ninguna correctamente, y en el postest ubica todas las fracciones de forma correcta. Aunque no es precisa la posición, se hace notar en el postest que el alumno reconoce que 8/7 es menor que 6/5 y que ambas se “acercan” a la unidad por la izquierda, y que 1/6 es menor que 1/4 y ambas “cercanas” a cero.

Los resultados de la actividad 5pretest-3postest se exponen en la Tabla 5.22. En el postest se agregaron dos incisos más que los que se tenían en el pretest, pero estos no son considerados para hacer la comparación de los resultados entre ambas pruebas.

	Actividad 5pretest-3postest)									
	a)		b)		c)		d)		e)	
Pretest	0/9	0 %	0/9	0 %	0/9	0 %	0/9	0 %	1/9	11.1 %
Postest	7/9	77.7%	3/9	33.3 %	0/9	0 %	4/9	44.4 %	5/9	55.5 %

Tabla 5.22. Comparación de resultados de la actividad 5pretest-3postest

Los resultados obtenidos en esto incisos fueron los más bajos, tanto en el pretest como en el postest. Aún así, se observa mayor éxito en las respuestas que dan los alumnos en el postest. El inciso (c) se considera de gran dificultad, por ello los estudiantes continuaron sin responderlo correctamente. Las actuaciones de A1 antes y después de la secuencia de enseñanza se exponen en la Figura 5.6.


Respuestas del pretest

5. Escribe las fracciones que se te piden

a) Dos fracciones entre el 0 y 1 0,5
b) Dos fracciones entre 3 y 4 3,5
c) Una fracción entre 7/8 y 8/9
d) Dos fracciones propias
e) Dos fracciones impropias

Respuestas del postest

a) Dos fracciones con numerador 7
b) Dos fracciones con denominador 25
c) Dos fracciones entre el 0 y 1
d) Dos fracciones entre 3 y 4
e) Una fracción entre 7/8 y 8/9
f) Dos fracciones propias
g) Dos fracciones impropias

Figura 5.6. Respuestas dadas por A1 en la actividad 5pretest-3postest

En las respuestas dadas en el pretest se observa que el alumno A1 no reconoce ninguna fracción entre los intervalos indicados; solamente en dos casos, incisos (a) y (b), usa números racionales en su expresión decimal para responder (ver Figura 5.6). En el postest responde correctamente a la mayoría de los incisos, excepto para escribir una fracción ente 7/8 y 8/9 y para escribir fracciones entre 3 y 4, donde utilizó una fracción ubicada en el límite inferior de este intervalo “30/10”.

Como parte de los resultados del pretest en el apartado 5.1 se mostró que el rendimiento de los estudiantes en la actividad 5fue muy bajo, solo 5 alumnos dieron ejemplos correctos de fracciones impropias. Una de estas respuestas se expone en la Figura 5.7. Las fracciones dadas son “6/4” y “4/2”.

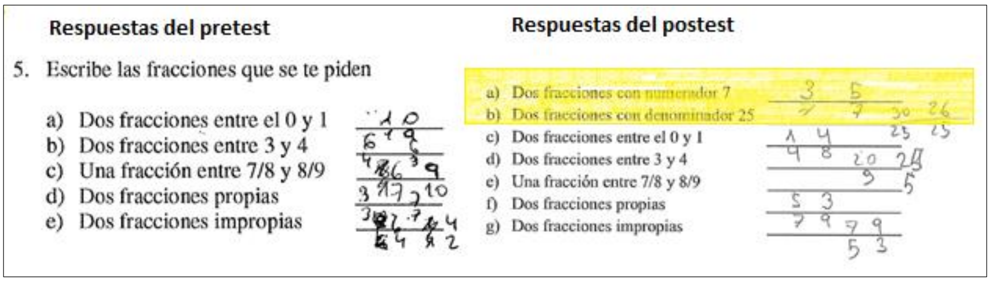


Figura 5.7. Respuestas dadas por A2 en la actividad 5pretest-3postest

En las respuestas dadas por A2 en el pretest no se interpreta claramente la estrategia utilizada para ejemplificar las fracciones propias e impropias, incluso este último tipo de fracciones no las ejemplifica correctamente, ya que da como respuestas “3/3” y “7/7”. En cambio, en las respuestas dadas en el postest, se observa una relación para la clasificación de esos dos tipos de fracciones. Da como ejemplos de fracciones propias “5/7” y “3/9” y para ejemplificar las fracciones impropias solo invierte el numerador por el denominador de cada fracción, teniendo así “7/5” y “9/3”. Esta respuesta supone que el alumno ha empleado la relación entre el numerador y denominador de la fracción para distinguir entre fracciones propias e impropias, por lo que se hace notar uno de los propósitos de la etapa 4 de la secuencia de enseñanza.

Como conclusiones de este análisis se hace notar que las actuaciones de los estudiantes que completaron la fase experimental de este proyecto fueron modificadas. Si bien, no todos los alumnos lograron tener éxito en todas sus respuestas, se observa en la Tabla 5.23 que todos menos A4 lograron responder correctamente al menos uno de los incisos evaluados en las actividades 4 y 5. En la tabla se ha eliminado la columna del inciso (c) de la actividad 5pretest-3postest porque no fue contestada de manera correcta por ningún estudiante.

	Acitividad 1postest				Actividad 2postest					Actividad 3postest)			
	a)	b)	c)	d)	4/8	1/4	1/6	6/5	8/7	a)	b)	d)	e)
A5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
A1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
A6	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1
A2	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
A7	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
A8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
A3	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
A9	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
A4	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 5.23. Resultados del postest de los 9 alumnos que completaron la fase experimental

De la agrupación hecha en la Tabla 5.8 como parte de los resultados del pretest en el apartado 5.1, se pudieron distinguir 3 tipos de estudiantes:

1. Los que tuvieron mayor éxito en las actividades 1, 2 y 3 del pretest, pero nada de éxito en las actividades 4, 5 y 6 del pretest. En este tipo, se ubicaron A3, A4, A1 y A8 (de los que completaron la secuencia). Después de la secuencia de enseñanza, se observa en la Tabla 5.23 que A4 continuo sin tener éxito en las actividades 4pretest-2postest y 5pretest-3postest; A3 y A8 tienen poco éxito en esas mismas actividades; mientras que los resultados de A1 se vieron modificados favorablemente, ya que logró responder correctamente 8 de 9 incisos que se evalúan en estas actividades.

2. Los que tienen mediano o poco éxito en todas las actividades del pretest, y aquí se ubicó al alumno A7. Después de la secuencia de enseñanza, aunque se vieron modificadas sus actuaciones, tal como se muestra en la Figura 5.3, el alumno se sigue clasificando en este tipo de estudiante.

3. Los que tienen nada de éxito en la actividad 1 del pretest, mediano éxito en las actividades 2 y 3 del pretest, y poco o nada de éxito en las actividades 4, 5 y 6 del pretest. Aquí se ubicaron A9, A2, A5 y A6. Después de la secuencia de enseñanza se observa en la Tabla 5.23 que los resultados de A5, A6 y A2 se modificaron favorablemente, siendo incluso los alumnos con resultados mayores en las actividades evaluadas en las actividades 2postest y 3postest; el alumno A9 se sigue clasificando en este tipo.

6. Conclusiones e implicaciones a futuro

Las conclusiones de esta investigación se dan en torno a las preguntas y el objetivo de investigación que se han planteado. El análisis de las respuestas que dieron los estudiantes en el pretest permiten responder a la primera pregunta (¿Qué objetos mentales sobre la idea de fracción poseen estudiantes de primeros cursos de secundaria con serias dificultades en el aprendizaje de las matemáticas?).

Como respuesta se puede afirmar que los alumnos mostraron serias dificultades para representar fracciones en la recta numérica, incluso la mayoría desconocían por completo este tema. Así mismo, mostraron falta de conocimiento para clasificar fracciones propias e impropias. En la resolución de problemas donde subyacen distintos aspectos de las fracciones también mostraron serias dificultades.

Los resultados confirman que pese a que en los planes y programas de estudio de los últimos años de la educación primaria se propone explícitamente el estudio de las fracciones utilizando la recta numérica como recurso didáctico, así como el estudio de las características de las fracciones propias e impropias, los alumnos no muestran conocimiento al respecto. Este resultado se atribuye al hecho de que estos aprendices han sido instruidos principalmente bajo el uso del modelo de áreas, ya que a pesar de que son alumnos de bajo rendimiento académico, mostraron tener conocimientos sólidos para representar fracciones propias cuando se usa dicho modelo, principalmente cuando se usan círculos o rectángulos.

La segunda pregunta (¿Cómo modifica a los objetos mentales de los estudiantes una enseñanza apoyada sobre el modelo de la recta numérica en un entorno informático dinámico (applets)?) se responde mediante el catálogo de actuaciones descrito a partir de sus interacciones con los applet y con los resultados de la comparación entre el pretest y el postest.

Como ya se reportó en el apartado 5.3, las actuaciones de los nueve alumnos que completaron todas las etapas de la secuencia de enseñanza se vieron modificadas favorablemente. Por un lado se ha observado un incremento en la competencia de los estudiantes a la hora de representar fracciones sobre la recta numérica. Evidentemente, el hecho de que la secuencia estuviera centrada sobre el uso de la recta numérica solo nos permite conluir que ha cumplido su objetivo inmediato actúando sobre las ideas concretas que se pretendían enseñar.

En la misma línea, también se incrementa la habilidad para poner en juego la definición de fracción propia e impropia, así como la capacidad para identificar fracciones dentro de un intervalo. No obstante, conviene señalar que tras la instrucción en la representación de fracciones en la recta numérica, los estudiantes parece que transfieren el conocimiento aprendido a la representación de fracciones impropias en modelos donde la unidad fraccionaria se define a partir del área. Esta observación reforzaría el potencial de la recta numérica como medio de representación para introducir y dar sentido a la fracción impropia, pero también pondría de manifiesto la posibilidad de que sirva como base para la transferencia de esta idea a otros modelos.

La puesta en marcha de la experimentación se topó con distintos problemas tales como: la inasistencia de los alumnos, el tiempo extra que se tomaron para contestar el pretest, la falta de interés de los alumnos por participar en la actividad, algunas limitaciones pedagógicas de los estudiantes, y el grado de dificultad de algunas preguntas que se plantearon en la secuencia. Esto condujo a que pocos estudiantes realizaron de manera completa la secuencia de enseñanza. Por ello, como líneas a futuro se pretende mejorar el diseño de la secuencia de enseñanza, los instrumentos de medida (pretest y postest) y el método de implementación. Todo con la finalidad de logran una mayor participación de los aprendices y tener un catálogo de actuaciones más amplio. Así, el desarrollo de la experimentación llevado a cabo en esta investigación, permitió identificar algunos puntos críticos sobre la estructura de la secuencia de enseñanza. Uno de ellos se refiere específicamente a los cuestionamientos que se plantean para que el alumno reflexione sobre aspectos de las fracciones que se tratan en la secuencia. Se requiere formular preguntas más concretas y con lenguaje menos técnico.

Por otro lado, una de las intenciones iniciales de la investigación era clasificar los estudiantes a partir de sus tendencias cognitivas y de los elementos que ponen en juego a la hora de comunicar sus pensamientos (por ejemplo, estudiantes con mayor tendencia a fundamentar sus respuestas sobre consideraciones gráficas o númericas) y relacionar si estas variables de individuo tenían relación con la forma en que sus ideas sobre la fracciones (erróneas, incompletas o inexistentes) evolucionaban a lo largo de la instrucción. Sin embargo, el elevado absentismo de los estudiantes de la población analizada ha hecho inapropiado realizar este estudio. Parte de la metodología de clasificación ha quedado reflejada en el trabajo mediante las técnicas de organización por colores de las tablas de respuestas, pero su uso se ha limitado a facilitar la lectura de las tablas.

Lejos de poder considerarse un error en la selección de los grupos, conviene recordar que el objetivo de la línea de investigación es abordar la problemática de la enseñanza de las matemáticas, y las fracciones en particular, a poblaciones desfavorecidas o con grandes dificultades académicas. Esto siempre implicará la existencia de una mayor influencia de variables concomitantes. De hecho, todas las mejoras que se pretenden llevar a cabo tienen en el horizonte implementar el modelo de enseñanza en una comunidad de aprendizaje donde el investigador sea quien guíe toda la secuencia de enseñanza. Particularmente se busca instruir a alumnos de zonas marginadas de México.

7. Referencias bibliográficas

Behr, M., Harel, G., Post, T., y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan Publishing. M. Recuperado de http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/92_1.html#top

Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press. Recuperado de: http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/83_1.html

Bright, G., Behr, M., Post, T., y Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19(3)*, 215–232.

Brousseau, G., Brousseau, N., y Warfield, G. (2014). *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment*. Dordrecht, Heidelberg, New-York, London: Springer.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la Familia de Problemas Aritmético- Algebraicos*. Valencia: Servicio de publicaciones de la Universitat de València.

Contreras, M. (2012). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje* (Tesis de Doctorado). Universidad de Valencia, España.

Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA*, *8*(1), 1-20.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la Escuela Primaria*. Valencia: Universitat de València.

Fernández, A. y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5, 397–416.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales* (Tesis de Doctorado). Cinvestav, México.

Filloy, E., Rojano, T. Puig, L. y Rubio, G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrech: D. Reidel.

Consejería de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana. (2014). *DECRETO 108/2014, de 4 de julio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la educación primaria en la Comunitat Valenciana, 7311*, 16325-16694

González, Y., Garín, M., Nieto, M., Ramírez, R., Bernabeu, J., Pérez, M., Pérez, B., Morales, F., González, J., García, J., Hoz, V., Rocafor, J., Campos, F., Fisa, X., Bravo, J., y Alomar, J. (2015). *Matemáticas. 6 Primaria*. España: SM.

Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. (2009). Explorador Excale (INEE). Recuperado de http://www.inee.edu.mx/explorador/index.php?ok=1 [consultado 20 de julio de 2015]

Kieran, C. y Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 99–152). Dordrecht: Kluwer.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundation of rational numbers. En R. A. Lesh, y D.A. Bradbar (Eds.), *Number and measurement, Papers from a Reseach Workshop* (pp 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operationd in the Middle Grades* (pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieren, T. E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotient Fields to Recursive Understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y Romberg T. A., (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp. 49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mitchell, A. y Horne, M. (2008). Fraction number line tasks and the additivity concept of length measurement. In M. Goos, R. Brown, y K. Makar (Eds.), *Navigating currents and charting directions: Proceedings of the 31st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 353–360). Brisbane, Queensland, Australia: Mathematics Education Research Group of Australasia.

Ni, Y. y Zhou, Y-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educ. Psychol*. 40, 27–52

Petit, M., Laird, R., y Marsden, E. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge-Taylor Francis Group.

Puig, L. (1994). Fracciones. En E. Sánchez (Ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos Seleccionados* (pp. 7-44). México: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp.61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Real, C. (2013). *Modelo de enseñanza de fracciones: introducción al estudio de los números racionales en los libros de texto de la ESO* (Memoria de Trabajo de Fin de Máster). Universitat de València, España.

Real, R. y Figueras, O. (2015). A network of notions, concepts and processes for fractions and rational numbers as an interpretation of didactical phenomenology. *Pre-proceedings of CERME9*. Recuperado de www.cerme9.org/products/wg2/

Salat, R. (2012). El potencial de los sistemas de álgebra computacional. *Revista de Didáctica de las Matemáticas Números,* 81, 15-24.

Santos-Trigo, M. (2004). Students' Processes of Reconstructing Mathematical Relationships Through the use of Dynamic Software. En D. E. McDougall, y J. A. Ross (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 475- 489). Toronto: OISE/UT.

Saxe, G. B., Shaughnessey, M., Shannon, A., Langer-Osuna, J., Chinn, R., y Gearhart, M. (2007). Learning about fractions as points on a number line. En W.G. Martin, M.E. Strutchens, y P. C. Eliot (Eds.), *The learning of mathematics 2007 yearbook* (pp. 221–236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Saxe, G. B., Taylor, E. V., McIntosh, C., y Gearhart, M. (2005). Representing Fractions with Standard Notation: A Developmental Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36, 57–137.

Schoenfeld, A. (1985). Making Sense of "Out Loud" Problem-Solving Protocols. *Journal of Mathematical Behavior*, *4*(2), 171-191.

Siegler, R., Fazio, L., Bailey. D., y Zhou, X. (2013). Fractions: the new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Sciences*, 17(1), 151–152.

Siegler, S., Duncan, J., Davis-Kean, E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., *et al*. (2012) Early predictors of high school mathematics achievement. *Journal of the Association for Psychological Science*, *23*(7), 691-697.

Steffe, L. y Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. Dordrecht Heidelberg London: Springer New York. doi: 10.1007/978-1-4419-0591-8.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education. A paradigm of development research*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1993). The design of a mathematics course. A theoretical reflection. *Educational Studies in Mathematics, 25* (1), 109-135.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, 390–416.

Usiskin, Z. (1979). The Future of Fractions. *Arithmetic Teacher*, *26*, 18-20.

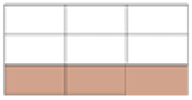
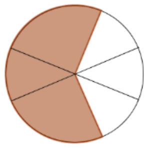
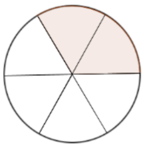
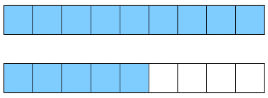
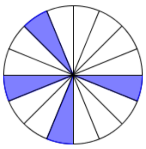
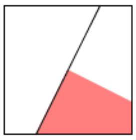
ANEXOS

Pretest

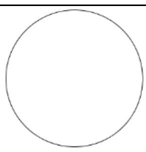
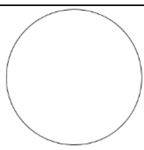
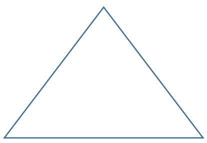
Nombre: ____ Grado: _________

¿Has utilizado alguna tableta, móvil u ordenador para jugar alguna vez un juego de matemáticas? _______ ¿Cuál juego? _______________________________________

1. En las siguientes figuras, ¿Qué fracción representa la parte sombreada? Escribe tus respuestas en la línea que está dentro del recuadro.

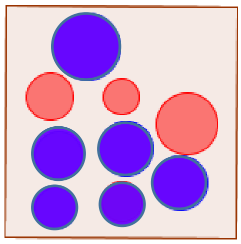
a) 	______	e) 	______
b) 	______	f) 	______
c) 	______	g) 	______
d) 	______	h) 	______

2. En las siguientes figuras, representa la fracción que se indica en el recuadro.

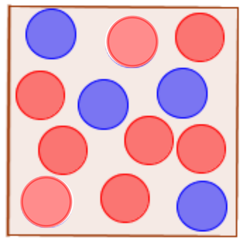
a) 	$\frac{1}{10}$	c) 	$\frac{4}{3}$
b) 	$\frac{1}{5}$	d) 	$\frac{1}{3}$

3. ¿Qué fracción del total de canicas contenidas en las siguientes cajas son rojas o azules? Completa las oraciones con tu respuesta.

Caja 1.



Caja 2.



____es la fracción de canicas azules.

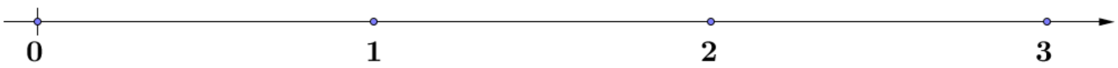
Hay ____ de canicas rojas que de azules.

____ es la fracción de canicas rojas.

Hay ____ de canicas azules que de rojas.

4. Representa en la recta numérica las siguientes fracciones.

a) $\frac{2}{12}$	b) $\frac{6}{5}$	c) $\frac{7}{3}$	d) $\frac{4}{8}$	e) $\frac{2}{10}$	f) $\frac{1}{4}$	g) $\frac{5}{2}$	h) $\frac{8}{7}$	i) $\frac{12}{9}$	j) $\frac{1}{6}$



5. Escribe las fracciones que se te piden

   a) Dos fracciones entre el 0 y 1 ________
   b) Dos fracciones entre 3 y 4 ________
   c) Una fracción entre 7/8 y 8/9 ________
   d) Dos fracciones propias ________
   e) Dos fracciones impropias ________

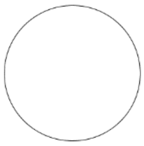
6. En la cafetería de la escuela venden pizza por rebanadas iguales. Si durante el día se vendieron 4 y $\frac{3}{8}$ de pizza.

   a) ¿Cuántas rebanadas tiene cada pizza y cuántas rebanadas faltaron para completar la venta de 5 pizzas?
   b) Sí Xavi comió cuatro rebanadas, ¿qué fracción de la pizza comió?
   c) Sí Vanesa comió 3/4 de pizza, ¿quién comió más, Xavi o Vanesa? ¿Por qué?
   d) Si la pizza completa cuesta 6 euros, ¿cuánto cuesta cada rebanada?

Postest

Nombre: ____ Grado: _________

1. En las siguientes figuras, representa la fracción que se indica en el recuadro.

a)	$\frac{1}{3}$	c) 	$\frac{5}{8}$
b) 	$\frac{2}{5}$	d) 	$\frac{4}{3}$

2. Representa en la recta numérica las siguientes fracciones.

a) $\frac{6}{5}$ b) $\frac{4}{8}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{8}{7}$ e) $\frac{1}{6}$

3. Escribe las fracciones que se te piden

   a) Dos fracciones con numerador 7 ________________
   b) Dos fracciones con denominador 25 ________________
   c) Dos fracciones entre el 0 y 1 ________________
   d) Dos fracciones entre 3 y 4 ________________
   e) Una fracción entre 7/8 y 8/9 ________________
   f) Dos fracciones propias ________________
   g) Dos fracciones impropias ________________