



Estudio analítico de la ecuación de Black-Scholes, solución a través del método de descomposición de Adomian y el método de Harper

Luis Hernán Guerrero Luna

Universidad Tecnológica de Pereira
Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas
Pereira, Colombia
Noviembre de 2016

Estudio analítico de la ecuación de Black-Scholes, solución a través del método de descomposición de Adomian y el método de Harper

Luis Hernán Guerrero Luna

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Director:
José Rodrigo González Granada, Ph.D

Línea de Investigación:
Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales
Universidad Tecnológica de Pereira
Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas
Pereira, Colombia
Noviembre de 2016

Dedicatoria

Quiero dedicar este trabajo a mi esposa Yadir y a mi hijo Emmanuel quienes sin ser eruditos en el área contribuyeron enormemente en su desarrollo, pues aportaron otro tipo de ingredientes que también son fundamentales como el cariño, la alegría, la serenidad y la paciencia, todo de forma abundante, constante e incondicional.

Agradecimientos

A quien fue el Director de esta tesis y también mi Maestro, Ph.D. José Rodrigo González Granada, por su valiosa asesoría y apoyo permanente.

A mi esposa Yadiry por acompañarme durante todo este proceso con cariño, disposición y paciencia. Gracias por brindarme espacios propios del hogar para el desarrollo de este trabajo.

A mi hijo Emmanuel por no dejarme perder nunca la esperanza.

A mis padres, pues gracias a ellos soy lo que soy por sus esfuerzos y sacrificios.

Atentamente,

LUIS HERNÁN GUERRERO LUNA
Universidad Tecnológica de Pereira
Noviembre 2016

Contenido

Agradecimientos	IV
Resumen	VIII
1. Introducción	1
2. El Modelo de Black-Scholes	4
2.1. Conceptos necesarios de la teoría de probabilidad	4
2.2. Conceptos necesarios de la teoría de opciones	9
2.3. Deducción del modelo de Black-Scholes	11
2.3.1. Precio de la prima de una opción europea de compra	12
2.4. Modelo de Black-Scholes no lineal	15
3. Método de Descomposición de Adomian	17
3.1. Estudio del método	17
3.1.1. Solución de la ecuación de difusión unidimensional a través del método de descomposición	19
4. El método de Harper	26
4.1. Estudio del método	26
5. Aplicaciones	31
5.1. Solución de la ecuación diferencial parcial lineal, unidimensional y dependiente del tiempo a través del método de descomposición de Adomian	31
5.2. Solución de la ecuación de Black-Scholes a través del método de descomposi- ción de Adomian	33
5.3. Solución de la ecuación de Black-Scholes a través del método de Harper . . .	37
5.4. Análisis comparativo entre el método de descomposición de Adomian y el método de Harper	42
5.5. Solución de una generalización del modelo de Black-Scholes a partir del mé- todo de descomposición de Adomian para mercados sin liquidez	43
5.6. Simulaciones numéricas del modelo de Black- Scholes mediante el método de descomposición de Adomian para problemas no lineales	48

6. Conclusiones y recomendaciones	57
6.1. Conclusiones	57
Bibliografía	58

Resumen

Fisher Black y Myron Scholes encontraron una ecuación para la valoración de determinados bienes y/o activos lo cual los hizo merecedores del premio nobel en economía, sin embargo años más tarde se comienza a detectar que, de manera creciente el precio del mercado de las opciones diverge del precio de las opciones calculado mediante la ecuación Black-Scholes por el hecho de que el mercado aplica volatilidades diferentes para estimar la prima de la opción sobre el mismo subyacente, rompiendo el supuesto de volatilidad constante el cual es uno de los requisitos del modelo de Black-Scholes.

En este trabajo se realiza un estudio analítico de una generalización de la ecuación de Black-Scholes en la que se considera la volatilidad como una función no constante, es decir para mercados sin liquidez, para ello se utiliza el Método de Descomposición de Adomian.

Además se resuelve la ecuación que representa el modelo de Black-Scholes considerando la volatilidad constante utilizando el método de Harper y la técnica mencionada anteriormente, con el fin de mostrar la eficiencia del método de descomposición tanto para ecuaciones diferenciales parciales lineales como no lineales.

Palabras clave: Modelo De Black-Scholes, volatilidad, Método de Harper, método de descomposición de Adomian.

Abstract

Fisher Black and Myron Scholes found an equation for the valuation of certain assets and/or assets which made them worthy of the Nobel Prize in economics, however some years later it began to detect that, increasingly, the market price of the options diverges from the option price calculated by the Black-Scholes equation because of the market applies different volatilities to estimate the premium option on the same underlying, breaking the constant volatility assumption which is one of the requirements of Black-Scholes formula.

In this work an analytical study of a generalization of the equation of Black-Scholes is conducted in which volatility is considered as a non-constant function, for this is used the Adomian decomposition method.

It also solves the equation that represents the Black-Scholes model considering the constant volatility using the Harper method and the technique mentioned previously, in order to show the efficiency of the decomposition method for both linear and non-linear partial differential equations.

Keywords: Black-Scholes model, volatility, Harper's method, Adomian decomposition method.

1 Introducción

Uno de los grandes retos de la economía y alrededor del cual expertos de esta ciencia han realizado encomiables esfuerzos, es el de modelar ámbitos financieros para la toma de decisiones que minimicen el error del valor calculado a partir de un modelo y el valor real. Aunque existen diferentes formas de tratar este problema una de las más fructíferas ha sido utilizar ecuaciones diferenciales. La teoría de las ecuaciones diferenciales es sin duda una de las disciplinas de las matemáticas cuya versatilidad permite que sean aplicadas de forma eficiente a diversas áreas del conocimiento, por ejemplo, en la biología permite modelar el estudio de especies biológicas, en la estadística permite modelar procesos estocásticos, en la física permite estudiar diferentes fenómenos como el movimiento ondulatorio, la ecuación de difusión, en la economía generar modelos de optimización de rendimiento, por mencionar algunos.

Por otra parte, el avance que en las últimas décadas han tenido las técnicas de administración de riesgos de mercados, obligan a los profesionales de las finanzas a contar con un marco de referencia que unifique los fundamentos de matemáticas financieras modernas con un tratamiento comprensivo de los diversos riesgos que enfrentan las corporaciones. En esta línea de acción Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton en el año 1973 [4] lograron un gran avance proponiendo una ecuación para la valoración de determinados bienes y/o activos llamados también derivados u opciones demostrando una visión exhaustiva de conocimientos tanto en el uso de modelos matemáticos como en el análisis de distintos tipos de riesgos financieros.

Esta ecuación surge del movimiento Browniano [16]. En 1827, cuando Robert Brown examinaba las partículas del polen de una planta de la especie *Clarckia Pulcella*, con gran desconcierto encontró que dichas partículas se movían sin cesar y se desplazaban de forma errática. Desde entonces el estudio de dicho fenómeno ha causado gran interés por parte de diferentes expertos en distintas ciencias, entre ellas las matemáticas, por esta razón la ecuación de Black-Scholes merece la dedicación, el esfuerzo y el tratamiento matemático necesario para comprenderla y apreciarla mejor.

Bajo ciertos supuestos, como se puede ver en [16] Black y Scholes publicaron a principios de la década de los setentas su artículo *the pricing of options and corporate liabilities* en el cual presentaron la ecuación diferencial parcial de segundo orden de tipo parabólico:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t - rc = 0, \quad (1-1)$$

donde:

$C(S, t)$: es el precio de una opción de compra europea.

t : el tiempo de inicio del contrato.

S_t : el precio del activo.

σ : la volatilidad.

r : la tasa de interés.

Su solución es el precio de una opción europea¹. En su investigación, Black y Scholes proponen ciertos cambios de variables para transformar su ecuación en una ecuación de difusión.

Desafortunadamente existen muchos problemas asociados al uso del modelo Black-Scholes para valorar opciones, como se puede ver en [11]. A partir del año 1987, se comienza a detectar que, de manera creciente, el precio de mercado de las opciones diverge del precio de las opciones calculado mediante la ecuación Black-Scholes por el hecho de que el mercado aplica volatilidades diferentes para estimar la prima de una opción sobre el mismo subyacente, es decir la volatilidad puede variar durante la vida de la opción contradiciendo uno de los postulados del modelo.

Los mercados del mundo real tienen comportamientos no lineales, un modelo con tendencia constante y volatilidad no constante modificada por el mercado tiene diferentes tratamientos, al modificarse la volatilidad el modelo afecta el costo de las transacciones, mercados ilíquidos y largas transacciones, en [10] se presenta una versión no lineal del modelo de Black-Scholes, en él se considera la volatilidad como una función que depende del tiempo, del precio del subyacente y de la prima de la opción. Este trabajo centra especial atención al problema de la volatilidad no constante, por ser a juicio de los expertos la variable fundamental en la ecuación de Black-Scholes [11].

En este proyecto se propone una visión alternativa para resolver tanto la ecuación con volatilidad constante como el modelo generalizado, haciendo un análisis fundamentalmente matemático pero sin descuidar la importancia y/o utilidad financiera. Para ello se utilizan

¹Una opción que puede ejercerse solamente durante un período de ejercicio limitado al final de la vida de la opción. Esto contrasta con la opción de tipo americano, que puede ejercerse en cualquier momento. Los términos europea y americana se derivan de las regiones en las que aparecieron estas opciones en primer lugar, pero los términos ya no tienen sentido desde el punto de vista geográfico (ver [6]).

dos técnicas. La primera de ellas fue desarrollada por George Adomian en el año 1983 (ver [2] y [1]). Esta poderosa y eficaz técnica permite resolver una amplia variedad de ecuaciones diferenciales lineales, no lineales, ordinarias, parciales, determinísticas o estocásticas. La segunda de ellas fue desarrollada por J.F Harper (ver [12]). Esta novedosa técnica consiste en transformar la forma canónica de una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico en una ecuación más sencilla y cuya solución estará dada en términos de la ecuación de calor.

Las herramientas utilizadas para resolver la ecuación de Black-Scholes son teorías complejas de cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales parciales, algunos autores han utilizado técnicas como diferencias finitas, métodos de aproximación analíticos, métodos de transformadas, entre otros. La importancia de utilizar el método de descomposición de Adomian a esta ecuación, reside en que este método aborda el problema sin necesidad de utilizar ningún método restrictivo como la linealización que hiciera perder información o modificar el comportamiento físico del modelo en discusión [2].

El desarrollo de este trabajo consta de cuatro capítulos:

1. En el primer capítulo se presentan algunos conceptos del cálculo de probabilidades y del cálculo estocástico, también se proporcionan algunas definiciones de finanzas necesarias para presentar al lector el modelo clásico de Black-Scholes, posteriormente con fundamento en lo anterior se muestra la deducción de la ecuación que permite deducir el costo la prima de una opción europea de compra o venta. Finalmente se muestra una generalización del modelo en la cual se considera a la volatilidad como una función.
2. En el segundo capítulo se realiza un estudio del método de descomposición de Adomian, acompañado de ejemplos.
3. En el tercer capítulo se demuestra el teorema que generaliza el método de Harper para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales de tipo parabólico.
4. El cuarto capítulo es uno de los más importantes puesto que en el se muestra la efectividad de los métodos mencionados anteriormente. Se desarrollan cuatro teoremas, en el primero se encuentra la solución de cualquier ecuación diferencial parcial lineal unidimensional sujeta a una condición inicial o de frontera. En el segundo teorema se encuentra una nueva solución de la ecuación lineal de Black-Scholes. En el tercer teorema se deduce a partir del método de Harper la conocida solución de la ecuación de Black-Scholes. En el cuarto teorema se encuentra una solución analítica aproximada utilizando el método de descomposición de Adomian de la ecuación no lineal de Black-Scholes, es decir aquella en la que la volatilidad no es constante. Además se realiza una comparación entre los dos métodos y se presentan algunas simulaciones.

2 El Modelo de Black-Scholes

El objetivo de este capítulo es presentar el modelo de Black-Scholes, para conseguirlo, éste se ha dividido en tres secciones, en las dos primeras se presentan los conceptos necesarios para la deducción del modelo, de la siguiente manera, la primera presenta una breve reseña del cálculo de probabilidades y del cálculo estocástico. En la segunda sección se presentan las definiciones del análisis financiero que permitirán al lector sumergirse en el espacio ambientado por el modelo de Black-Scholes. Finalmente en la tercera sección se presenta la deducción del modelo, el cual en líneas generales permite conocer el precio de la prima de una opción de compra o venta, lo cual, como se analizará más adelante es un problema muy relevante desde el punto de vista financiero, además desde la perspectiva de las matemáticas dicho modelo contiene una gran riqueza de conceptos puesto que se fundamenta en el movimiento browniano y el cálculo estocástico pasando al campo de las ecuaciones diferenciales parciales en donde se trabajará con novedosos y poderosos métodos para resolverlo.

Para lograr este propósito, se consideran las teorías, definiciones y teoremas desarrollados en [13] y [16].

2.1. Conceptos necesarios de la teoría de probabilidad

Definición 2.1.1 (Espacio de probabilidad). *Un espacio de probabilidad es una terna (Ω, \mathcal{F}, P) , en donde:*

- i. Ω es el espacio muestral, es decir el conjunto de todos los posibles resultados que se pueden obtener de un experimento aleatorio.*
- ii. \mathcal{F} es una σ -álgebra, es decir una familia de subconjuntos de Ω que satisface tres propiedades:*
 - a. $\Omega \in \mathcal{F}$.*
 - b. Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$.*
 - c. Si $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

iii. $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una aplicación que cumple con tres axiomas introducidos por Kolmogorov (1933):

a. $P(A) \geq 0$.

b. $P(\emptyset) = 0$ y $P(\Omega) = 1$.

c. Si $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en \mathcal{F} con $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, entonces:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A la pareja (Ω, \mathcal{F}) se le denomina espacio medible y a los elementos de \mathcal{F} se les llama eventos o conjuntos medibles. En particular si $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ denota la σ -álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de \mathbb{R} , se tiene al espacio medible de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. A los elementos de la σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ se les llama Borelianos o conjuntos Borel medibles.

Definición 2.1.2 (Variable aleatoria). *Una variable aleatoria (v.a.) es una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que transforma a los elementos de Ω en números reales y es tal que para cualquier conjunto Boreliano B se cumple que $X^{-1}(B)$ es un elemento de \mathcal{F} . En este caso también se dice que X es una función medible $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, o simplemente que es \mathcal{F} -medible.*

Definición 2.1.3 (Función de distribución). *Sea el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) y la variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, (es decir X es $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -medible) entonces se define la función de distribución como:*

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} = P\{X^{-1}(-\infty, x]\}.$$

Evidentemente $F_X(-\infty) = 0$ y $F_X(+\infty) = 1$, además F_X es continua por la derecha, si X es una variable aleatoria continua, entonces existe una función de densidad f_X tal que:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx.$$

Por ejemplo, la variable aleatoria X tiene una distribución Normal o Gaussiana con parámetros $\mu \in (-\infty, +\infty)$ y $\sigma^2 \in (0, +\infty)$, la cual se denota por $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si su función de distribución es:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(u-\mu)^2/2\sigma^2} du.$$

Otro concepto fundamental no sólo en el desarrollo de la teoría de probabilidad, sino también en la teoría financiera es el proceso estocástico, dado que este, es útil para definir el comportamiento aleatorio de las variables financieras en el tiempo. Intuitivamente un proceso

estocástico es un modelo matemático del comportamiento en el tiempo de un fenómeno aleatorio. La aleatoriedad se estudia a través de un espacio medible (Ω, \mathcal{F}) . formalmente se tiene:

Definición 2.1.4 (Proceso estocástico). *Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y sea \mathcal{T} un intervalo de tiempo. Un proceso estocástico de dimensión 1 es un mapeo $X : \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $t \in \mathcal{T}$ la función:*

$$X_t : \omega \rightarrow X(\omega, t) \equiv X_t(\omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

satisface $X_t^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$, para toda $x \in \mathbb{R}$, es decir X_t es una función \mathcal{F} -medible.

Si X_t es un proceso estocástico, entonces para cada $\omega \in \Omega$ la función $t \rightarrow X(\omega, t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$, es llamada una trayectoria del proceso. Si cada una de estas trayectorias es continua en cada punto de \mathcal{T} el proceso estocástico se dice que es continuo.

Con mucha frecuencia, cuando se estudian modelos matemáticos basados en procesos estocásticos, es importante identificar el tipo de información que está disponible en cada punto en el tiempo. Esta idea se formaliza con el concepto de filtración.

Definición 2.1.5 (Filtración). *una filtración es una familia $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ de σ -álgebras tales que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ para toda $t \in \mathcal{T}$.*

Un proceso estocástico de gran importancia y que será fundamental en la deducción del modelo de Black-Scholes es el Movimiento Browniano. En líneas generales este movimiento es un fenómeno natural descubierto en 1827 por el botánico Robert Brown cuando observaba las partículas de polen suspendidas en cierta sustancia, las cuales realizaban movimientos irregulares e inexplicables. Después de diversas discusiones e hipótesis, actualmente se ha logrado comprender que este fenómeno ocurre por las múltiples colisiones aleatorias entre las moléculas del líquido y los granos de polen. Por otra parte el científico Albert Einstein (ver [7]) proporcionó una formulación matemática del movimiento, de la cual se deduce que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en una sustancia, en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo.

Los estudios realizados sugieren que el Movimiento Browniano cumple con las siguientes propiedades:

1. El movimiento es continuo.
2. El movimiento tiene desplazamientos independientes en intervalos de tiempo disjuntos.
3. Debido a la gran cantidad de colisiones del grano de polen con las moléculas circundantes en longitudes de tiempo considerables, y teniendo en cuenta el teorema del límite

central, los incrementos pueden modelarse como variables aleatorias Gaussianas.

La definición de proceso estocástico ha sido acertada para modelar este tipo de fenómenos. En este orden de ideas se presenta a continuación la definición formal de movimiento Browniano:

Definición 2.1.6 (Movimiento Browniano). *Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad fijo, el Movimiento Browniano (estándar unidimensional) es una función:*

$$W : [0, \infty] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada $t \geq 0$, la función:

$$W(t, \bullet) : \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

es una variable aleatoria definida en (Ω, \mathcal{F}) . Mientras que para cada $\omega \in \Omega$, la función:

$$W(\bullet, \omega) : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R},$$

es continua en $[0, \infty]$, cada una de estas funciones se denomina trayectoria.

La familia de variables aleatorias $W(t, \bullet)$, usualmente se denota como $\{W_t\}_{t \geq 0}$ y satisface las siguientes propiedades adicionales:

1. $W_0 = 0$ casi siempre, es decir:

$$P\{\omega \in W/W_0(\omega) = 0\} = 1.$$

2. El proceso tiene incrementos independientes, es decir para cualquier conjunto de tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$, los incrementos:

$$W_{t_1} - W_{t_0}, \quad W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}.$$

son estocásticamente independientes.

3. Para cualquier par de tiempos t y s con $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.

Un ejemplo particular de este proceso estocástico es el movimiento Browniano con deriva, el cual desempeña un papel importante en el desarrollo de la teoría financiera, pues constituye un puente para definir otro tipo de proceso que será utilizado en la deducción del modelo de Black-Scholes.

Definición 2.1.7 (Movimiento Browniano con deriva). *Sea W_t un movimiento Browniano, el proceso (X_t) definido por:*

$$X_t = \sigma W_t + \mu t, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0,$$

se le conoce como movimiento Browniano con deriva μ . La constante σ^2 se le conoce como coeficiente de difusión.

Aún cuando el movimiento Browniano es una de las bases en la construcción de riesgos financieros y económicos, éste no puede, por sí mismo, representar el comportamiento de todas las variables financieras. Los precios de los activos por ejemplo, no son descritos apropiadamente por el movimiento Browniano estándar, ya que los precios no parten de cero. Sus incrementos podrían tener medias distintas de cero, o bien podrían tener varianzas que no necesariamente son proporcionales al tiempo. En general, los precios de los activos comienzan en valores diferentes de cero, tienen incrementos con medias diferentes de cero, varianzas que no son proporcionales al tiempo y covarianzas diferentes de cero.

Por esta razón Black y Scholes utilizaron el movimiento Browniano Geométrico para modelar la especulación de los precios. Este proceso se obtiene a partir de una transformación exponencial del modelo Browniano con deriva, formalmente se enuncia de la siguiente manera:

Definición 2.1.8 (Movimiento Browniano geométrico). Sea W_t un movimiento Browniano, el proceso S_t definido por.

$$S_t = e^{\sigma W_t + \mu t},$$

se llama movimiento Browniano geométrico. Para un t fijo la variable aleatoria S_t tiene una distribución lognormal con media μt y varianza $\sigma^2 t$, es decir,

$$\ln S_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t).$$

Se puede generalizar el movimiento Browniano geométrico S_t al definir:

$$S_t = S_0 e^{X_t},$$

donde X_t es una variable aleatoria.

Actualmente, un número considerable de investigaciones en finanzas se fundamentan a partir de una rama de la teoría de los procesos estocásticos que ha ido cobrando creciente importancia debido a la utilidad en el modelado de tiempo continuo, ésta es el cálculo estocástico. El punto de partida es el concepto de integral estocástica.

Definición 2.1.9 (Integral estocástica). Sea $\{W_t, t \geq 0\}$ un movimiento Browniano unidimensional sobre el espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) . Una integral estocástica unidimensional (o proceso de Itô) es un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ sobre (Ω, \mathcal{F}, P) tal que:

$$X_t = X_0(w) + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dW_s.$$

Observe que la primer integral es de Riemann y la segunda integral es estocástica.

Teorema 2.1.1 (Fórmula de Itô). *Sea una integral o proceso estocástico $dX_t = udt + vdW_t$, con $\{X_t, t \geq 0\}$, y sea $g(t, x) \in C^2([0, +\infty] \times \mathbb{R})$, entonces $\{Y_t, t \geq 0\}$, con $Y_t = g(t, X_t)$, es también un proceso estocástico y obedece a la ecuación:*

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2,$$

donde $(dX_t)^2$, se determina mediante las fórmulas:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0, \quad dW_t \cdot dW_t = dt.$$

Este resultado se conoce también como el teorema fundamental del cálculo estocástico.

De la integral estocástica se deriva el concepto de ecuación diferencial estocástica, este nuevo concepto constituye una valiosa herramienta para la construcción y análisis de modelos estocásticos.

Definición 2.1.10 (Ecuación diferencial estocástica). *Sea (W_t) un movimiento Browniano. Una ecuación diferencial estocástica dirigida por el movimiento Browniano es una ecuación escrita en la forma:*

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \quad X_0 = x_0,$$

en donde las funciones $\mu(x, t)$ y $\sigma(x, t)$ se conocen como coeficiente de deriva y coeficiente de difusión, respectivamente; X_0 es la variable inicial y X_t define al proceso desconocido.

2.2. Conceptos necesarios de la teoría de opciones

Las opciones son uno de los derivados financieros más importantes, su uso data de mucho tiempo atrás, sin embargo hace varias décadas eran herramientas financieras poco conocidas, puesto que no había un procedimiento para determinar un precio justo de la opción.

Los derivados financieros, como su nombre lo indica, son instrumentos cuyo valor se deriva de la evolución de precios de otros activos llamados activos subyacentes [11]. Los derivados pueden subdividirse en contratos adelantados (forwards, futuros), swaps y como se mencionó anteriormente en opciones.

Definición 2.2.1 (Opción). *Una opción es un acuerdo entre dos personas para vender o comprar un activo en una fecha futura a un precio establecido. La persona que compra la opción tiene derecho a comprar o vender el activo subyacente, mientras el emisor de la opción*

tiene la obligación de cumplir el contrato, independientemente si le conviene o no; es decir, cuando llega la fecha de vencimiento el comprador de la opción decide si el trato se lleva a cabo o no.

A simple vista, el acuerdo parece ser desfavorable para el que emite la opción, para compensar esto, el que adquiere la opción debe pagar una cantidad llamada prima al vendedor, con el pago de la prima el comprador adquiere derechos y ninguna obligación.

Las opciones pueden ser clasificadas de acuerdo al derecho que otorgan o en función del momento en que pueden ejercerse.

Cuando las opciones son clasificadas dependiendo el tiempo en que pueden ser cobradas, resaltan dos tipos de opciones:

Definición 2.2.2 (Opción europea). *Es aquella que sólo puede ser ejercida en la fecha de vencimiento.*

Definición 2.2.3 (Opción americana). *Es aquella que puede ejercerse en cualquier momento, a partir de la fecha en que se realiza el acuerdo hasta la fecha del vencimiento.*

Cuando las opciones son clasificadas de acuerdo al derecho que otorgan, existen dos tipos, estos son:

Definición 2.2.4 (Opción de compra (option call)). *Es aquella que otorga al propietario el derecho, más no la obligación de comprar un activo a un precio K determinado, en una fecha futura T determinada.*

Definición 2.2.5 (Opción de venta (option put)). *Es aquella que otorga al propietario el derecho, más no la obligación de vender un activo a un precio K determinado, en un tiempo T futuro también determinado.*

De las definiciones anteriores y utilizando las siguientes convenciones:

- C : Es la prima de una opción de compra.
- P : Es la prima de una opción de venta.
- T : Es el tiempo de vencimiento.
- S_T : Es el precio del activo en el tiempo de vencimiento.

Se puede concluir:

	Opción de compra	Opción de venta
Beneficio al comprar	$b_c = \max\{0, S_T - K\} - C$	$b_v = \max\{0, K - S_T\} - P$
Beneficio al vender	$b_c^* = C - \max\{0, S_T - K\}$	$b_v^* = P - \max\{0, K - S_T\}$

Tabla 2-1: Beneficio de comprar o vender una opción.

En la deducción de la prima de una opción, influyen varias variables como el precio del ejercicio, el tiempo de vida del contrato, el interés y la volatilidad. Esta última juega un papel importante en el modelo de Black-Scholes, a continuación se define el concepto.

Definición 2.2.6 (Volatilidad). *Se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente. Estadísticamente es la dispersión del rendimiento del activo subyacente, definiendo como rendimiento a las variaciones del precio.*

De esta definición se deduce que entre mayor volatilidad demuestre el activo subyacente, mayor será el costo de la prima de la opción (esto se evidenciará en la solución del modelo).

La volatilidad se puede clasificar en tres tipos:

- 1. Volatilidad histórica:** Si un operador pretende utilizar un modelo teórico de precios deberá realizar la estimación más acertada sobre la volatilidad futura. un punto de partida para ello es calcular sobre la base de la información pasada.
- 2. Volatilidad futura:** Es el dato que a cualquier operador en opciones le gustaría conocer. con él, se puede valor correctamente las opciones y ganar dinero aprovechando los errores en las expectativas de otros agentes. en teoría este es el dato de volatilidad que se ingresa en el modelo teórico de precio. los operadores raramente hablan de volatilidad futura ya que es imposible saber lo que depara el destino.
- 3. Volatilidad implícita:** A diferencia de la volatilidad futura e histórica que están asociadas a un contrato subyacente, la volatilidad implícita se asocia con una opción. La volatilidad implícita es una conjunción de las expectativas sobre la volatilidad futura que poseen los operadores del mercado. Esta se verá reflejada en el precio de las opciones, es decir, en su prima.

2.3. Deducción del modelo de Black-Scholes

Es innegable el impulso que el cálculo estocástico le ha suministrado al desarrollo de la teoría financiera, prueba de ello es la ecuación de Black-Scholes la cual bajo ciertas condiciones,

permite determinar el costo de la prima de una opción europea de compra. Por estas contribuciones Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton se hicieron acreedores al premio Nobel en Economía en el año 1997. Los supuestos del modelo son:

1. El activo subyacente es una acción que no paga dividendos durante la vida del contrato.
2. El precio del activo subyacente es guiado por un movimiento Browniano geométrico; es decir, el precio es log-normal y los rendimientos son normales.
3. La volatilidad del precio del activo subyacente se mantiene constante a través del tiempo.
4. Las ventas en corto del subyacente en cuestión son permitidas; podemos vender el activo subyacentes aunque aun no lo tengamos.
5. El mercado del subyacente es líquido y divisible; es decir, el subyacente se puede vender o comprar en cualquier fracción de unidad.
6. No hay costos de transacción (comisiones e impuestos).
7. El mercado opera en forma continua, es decir no hay fines de semana, ni días festivos.
8. Existe un mercado de crédito, un sistema bancario en el que los agentes pueden prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante a todos los plazos y libre de riesgo de incumplimiento.
9. Los mercados están en equilibrio; es decir, no existen oportunidades de arbitraje.

2.3.1. Precio de la prima de una opción europea de compra

El precio de la prima de una opción europea de compra C depende de varios parámetros que interviene en las cláusulas del contrato. Precisamente depende de:

- K : Es el Precio del ejercicio.
- La vida del contrato $T - t$, donde T es la fecha de vencimiento y t es la fecha de inicio del contrato.
- S_t : Es el precio del activo.
- μ : Es el rendimiento esperado.
- σ : Es la volatilidad.
- r : Representa la tasa de interés.

De esta manera, se tiene:

$$C = C(S_t, t; K, T, \sigma, \mu, r).$$

Cabe resaltar que las variables más significativas son S_t y t por lo que, para fines prácticos el precio de la prima de la opción se denota por: $C = C(S_t, t)$.

Por el segundo supuesto, S_t es modelado por un movimiento geométrico Browniano, es decir:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \quad (2-1)$$

Por otra parte el cambio marginal en el precio de una opción se obtiene de la siguiente manera: $C = C(S_t, t)$, aplicando la fórmula de Itô se tiene:

$$dC = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} (dS_t)^2. \quad (2-2)$$

De (2-1) se tiene que $(dS_t)^2 = \mu S_t^2 dt \cdot dt + 2\mu\sigma S_t^2 dt \cdot dW_t + \sigma^2 S_t^2 dW_t \cdot dW_t$, usando nuevamente la formula de Itô, se tiene:

$$(dS_t)^2 = \sigma^2 S_t^2 dt. \quad (2-3)$$

Sustituyendo (2-3) en (2-2) se tiene:

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial S_t} \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) dt + \frac{\partial C}{\partial S_t} \sigma S_t dW_t. \quad (2-4)$$

Por otra parte el precio de un portafolio Π_t conformado por x_1 unidades del activo subyacente a un precio de S_t y x_2 unidades de una opción de compra sobre el subyacente de precio $C(S_t, t)$, está dado por:

$$\Pi_t = x_1 S_t + x_2 C(S_t, t). \quad (2-5)$$

Por lo que, el cambio en el valor del portafolio en el instante dt es:

$$d\Pi_t = x_1 dS_t + x_2 dC(S_t, t). \quad (2-6)$$

Al sustituir en (2-6) las ecuaciones (2-1) y (2-4) se obtiene:

$$\Pi_t = \left(x_1 + x_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) \mu S_t dt + \left(x_1 + x_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} \right) \sigma S_t dW_t + x_2 \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \quad (2-7)$$

Para eliminar el riesgo del portafolio, x_1 y x_2 se deben escoger de tal forma que se cancele el término estocástico, esto es:

$$x_1 + x_2 \frac{\partial C}{\partial S_t} = 0.$$

Desde una perspectiva matemática dicha ecuación tiene infinitas soluciones, sin embargo desde el punto de vista financiero, se recomienda utilizar la cobertura Delta¹, dicha estrategia, consiste en la elección particular de los valores:

$$x_1 = -\frac{\partial C}{\partial S_t} = -\Delta, \quad x_2 = 1.$$

En este orden, utilizando la cobertura delta en (2-7) se tiene:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \quad (2-8)$$

Y al utilizar nuevamente la cobertura delta en (2-5) se tiene:

$$\Pi_t^{(\Delta)} = C - \Delta S_t. \quad (2-9)$$

A una tasa de interés de r , esta cantidad depositada en un banco² viene dada por la ecuación:

$$d\Pi_t^{(r)} = d\Pi_t^{(\Delta)} r dt = (C - \Delta S_t) r dt. \quad (2-10)$$

Por el noveno supuesto, no existen oportunidades de arbitraje, de lo contrario habría la posibilidad de realizar una inversión libre de riesgo y hacer dinero de forma indefinida, por lo tanto se tiene:

$$d\Pi_t^{(\Delta)} = d\Pi_t^{(r)}. \quad (2-11)$$

Finalmente, al sustituir (2-8) y (2-10) en (2-12) se tiene:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt = \left(-\frac{\partial C}{\partial S_t} S_t + C \right) r dt,$$

organizando términos la ecuación toma la forma:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 + \frac{\partial C}{\partial S_t} S_t r - Cr = 0. \quad (2-12)$$

¹Se refiere a la estrategia de gestión de riesgos utilizada por los mediadores de opciones y otros. Esencialmente, el mediador de opciones mantiene una posición en opciones sobre un subyacente específico. En conjunto, estas opciones exponen al agente a un riesgo delta. Es decir, el libro (o cartera) general de opciones tiene una delta positiva o negativa de manera que un cambio en el precio del subyacente provocará una pérdida o una ganancia en el libro general de opciones. El mediador toma una posición de compensación del subyacente, que siempre tiene una delta de valor uno. El resultado es que la combinación de las opciones y la posición de compensación del subyacente tiene una delta de valor cero. Esto se denomina neutral a la delta. (tomado de [6]).

²Si un agente deposita B_0 unidades monetarias, entonces el saldo en su cuenta bancaria, al tiempo t , está dado por: $B_t = B_0 e^{rt}$, de esta manera, el rendimiento en su cuenta bancaria satisface: $dB_t = rB_t dt$ ([16]).

Ésta es la ecuación de Black-Scholes, la cual ha sido ampliamente usada para la valorización de opciones europeas de compra y de venta. En el caso de la opción de compra, ésta será ejercida si $S_T > K$, por lo que se tiene la condición inicial:

$$C(S_t, T) = \text{máx} \{S_T - k, 0\}. \quad (2-13)$$

La opción europea de venta es similar a la opción de compra, en este caso, el contrato será ejercido si $K > S_T$, por lo que se tiene el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t + \frac{\partial P}{\partial S_t} S_t r - Pr = 0 \\ P(S_t, T) = \text{máx} \{k - S_T, 0\}. \end{cases} \quad (2-14)$$

2.4. Modelo de Black-Scholes no lineal

Sin lugar a dudas el modelo de Black-Scholes marcó el inicio de las finanzas modernas, sin embargo su exigencia en una serie de supuestos (por ejemplo, la volatilidad debe ser constante, no hay costos de transacción, el mercado es perfectamente líquido entre otros) hicieron que este no tuviera el éxito esperado, por esta razón, fue modificado llegando a versiones no lineales del mismo.

Bakstein y Howison (2003) presentan un modelo para un mercado sin liquidez que da lugar a la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \left(1 + 2\rho S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) + \frac{1}{2} \rho^2 (1 - \alpha)^2 \sigma^2 S_t^4 \left[\frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right]^3 + r S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - rC = 0. \quad (2-15)$$

En ella, $\sigma \in \mathbb{R}$ es una medida de la liquidez del mercado α es una medida del impacto del precio de deslizamiento de un comercio afectada por todos los participantes en el mercado.

El caso $\alpha = 1$, corresponde a un mercado sin ningún deslizamiento y el modelo (2-15) se reduce a la ecuación dada por:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \left(1 + 2\rho S_t \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \right) + r S_t \frac{\partial C}{\partial S_t} - rC = 0 \\ C(S_t, T) = f(S_T). \end{cases} \quad (2-16)$$

Esekon (2013), encontró una solución analítica de esta ecuación, para ello la deriva dos veces con respecto al precio del activo, posteriormente realiza algunas sustituciones y transformaciones con lo que obtiene una ecuación parabólica no lineal del tipo medio poroso. Después

de resolver todas las ecuaciones transformadas obtiene la siguiente solución analítica de la ecuación no lineal de Black-Scholes:

$$C(S_t, t) = S_t - \frac{\sqrt{S_0}}{\rho} \left(\sqrt{S_t} e^{\left(\frac{r+\sigma^2/4}{2}\right)t} + \frac{\sqrt{S_0}}{4} e^{(r+\sigma^2/4)t} \right), \quad (2-17)$$

donde S_0 es el precio inicial del activo.

Más adelante, se muestra una solución analítica aproximada utilizando el método de descomposición de Adomian.

3 Método de Descomposición de Adomian

En una amplia variedad de situaciones provenientes de las ciencias y la ingeniería aparecen las ecuaciones diferenciales no lineales, si bien existen diversos métodos para encontrar soluciones analíticas para casos lineales, no existen métodos generales para resolver ecuaciones diferenciales no lineales, pues los métodos existentes son aplicados para resolver casos específicos. Por otra parte, la solución analítica (generalmente deseada) de un problema cuya modelación conduce a una ecuación diferencial no lineal, en muchas ocasiones requiere de supuestos que restringen o simplifican para poder ser solucionadas, sin embargo dichas restricciones pueden alterar la realidad física del modelo. El método de descomposición de Adomian constituye una buena alternativa para el estudio de dichas ecuaciones.

La ventaja del método radica en su rápida convergencia lo cual implica menor número de iteraciones, pero principalmente en que no requiere de ninguna técnica de discretización, linealización o perturbación lo cual podría afectar la solución del modelo real. El método de descomposición tiene muchas características similares con otros métodos, sin embargo en un estudio más detallado este ofrece varias ventajas significativas como se verá posteriormente.

3.1. Estudio del método

Pese a que el método de descomposición de Adomian se puede aplicar para resolver ecuaciones diferenciales lineales, no lineales ordinarias, parciales, determinísticas o estocásticas en este documento para fines del mismo se mostrará la idea para ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

El método consiste en encontrar la solución en forma de serie, para ello el operador diferencial se descompone en su parte lineal y no lineal, adicionalmente del operador lineal se elige el termino cuya derivada sea de mayor orden, esto puede evitar dificultades al integrar cuando resultan funciones de Green. Se supone la solución como una serie y se expresa la parte no lineal en términos de los polinomios de Adomian. Finalmente se busca de forma sucesiva la serie que corresponde a la solución por una relación de recurrencia. En este sentido el bosquejo del método es el siguiente:

Sea la ecuación diferencial:

$$Fu(t) = g(t). \quad (3-1)$$

En ella, F representa un operador diferencial no lineal y g es una función que depende de las variables independientes. De acuerdo a lo mencionado, se descompone el operador en su parte lineal y no lineal de la siguiente manera: $Fu = Lu + Ru + Nu$, donde L es un operador lineal que se supone invertible y corresponde a la derivada de mayor orden, R el resto de los términos lineales y N la parte no lineal; de esta manera, la ecuación (3-1) se puede reescribir como:

$$Lu(t) + Ru(t) + Nu(t) = g(t). \quad (3-2)$$

Como L es invertible entonces:

$$L^{-1}Lu(t) = L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t). \quad (3-3)$$

Si se tiene un problema de valor inicial, el operador diferencial L^{-1} será una integral definida de t_0 a t . Por ejemplo, si L es un operador diferencial de segundo orden, entonces L^{-1} será un operador integral doble, en cuyo caso

$$L^{-1}Lu = u - u(t_0) - (t - t_0)u'(t_0). \quad (3-4)$$

El éxito de este método se encuentra en expresar la parte no lineal en términos de los polinomios de Adomian, denotados de aquí en adelante como A_i y la solución de la ecuación u a través de la serie:

$$Nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (3-5)$$

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n. \quad (3-6)$$

Sustituyendo en (3-3) se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}Ru(t) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (3-7)$$

Para el caso de un operador diferencial de segundo orden se tiene $u_0 = u(t_0) + (t - t_0)u'(t_0) - L^{-1}g(t)$. Cada término de la serie (3-7) fue definido por Adomian de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0, \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1, \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n. \end{aligned}$$

Para una definición completa del método es necesario definir los términos A_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$ los cuales se conocen como polinomios de Adomian. Una revisión en la literatura muestra que en la actualidad existe una gran variedad de maneras para calcular los polinomios, sin embargo cada método tiene sus ventajas y desventajas, además lejos de ser un objetivo de este trabajo es el analizar cuál forma puede llegar a ser más eficiente, por lo que dando fidelidad al método se trabajará con la forma propuesta originalmente por Adomian.

La primera consideración es que cada polinomio A_n depende únicamente de las variables independientes, es decir:

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0(u_0), \\ A_1 &= A_1(u_0, u_1), \\ A_2 &= A_2(u_0, u_1, u_2), \\ &\vdots \\ A_n &= A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

De esta forma estos se definen así:

$$\begin{aligned} A_0 &= N(u_0), \\ A_1 &= u_1 N'(u_0), \\ A_2 &= u_2 N'(u_0) + \frac{u_1^2}{2!} N''(u_0), \\ A_3 &= u_3 N'(u_0) + u_1 u_2 N''(u_0) + \frac{u_1^3}{3!} N'''(u_0), \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{v=1}^n \lambda^v u_v \right) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente cabe resaltar que sea han realizado varias modificaciones tanto al algoritmo para calcular los polinomios de Adomian, como al método, ya que con ellos se puede reducir la cantidad de cálculos y acelerar la convergencia de la solución.

3.1.1. Solución de la ecuación de difusión unidimensional a través del método de descomposición

En este apartado se considera la ecuación de difusión por dos razones, la primera de ellas por su importancia en el campo de la física y la segunda porque como se verá posteriormente la ecuación de Black-Scholes mediante ciertos cambios de variables se puede expresar como una ecuación de difusión.

Ecuación de difusión homogénea unidimensional

Considere la ecuación:

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u|_{\Gamma_0} = t & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} = \frac{x^2}{2} & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (3-8)$$

Donde Γ_0 es la curva inicial. Sea $L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ y $L_t = \frac{\partial}{\partial t}$, entonces la ecuación (3-8) se puede expresar como:

$$L_x u - L_t u = 0. \quad (3-9)$$

Aplicando el operador inverso L_x^{-1} en la ecuación (3-9) se tiene:

$$\begin{aligned} L_x^{-1} L_x u &= L_x^{-1} L_t u \\ u &= u(0, t) + L_x^{-1} L_t u. \end{aligned} \quad (3-10)$$

De igual forma, aplicando el operador inverso L_t^{-1} en la ecuación (3-9) se tiene:

$$\begin{aligned} L_t^{-1} L_t u &= L_t^{-1} L_x u \\ u &= u(x, 0) + L_t^{-1} L_x u. \end{aligned} \quad (3-11)$$

Sumando las ecuaciones (3-10) y (3-11) se tiene:

$$u = \frac{1}{2}[u(0, t) + u(x, 0)] + \frac{1}{2}[L_x^{-1} L_t u + L_t^{-1} L_x] \sum u_n. \quad (3-12)$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2} \left[t + \frac{x^2}{2} \right], \\ u_1 &= \frac{1}{2} [L_x^{-1} L_t + L_t^{-1} L_x] u_0 = \frac{1}{4} \left[t + \frac{x^2}{2} \right], \\ u_2 &= \frac{1}{2} [L_x^{-1} L_t + L_t^{-1} L_x] u_1 = \frac{1}{8} \left[t + \frac{x^2}{2} \right], \\ &\vdots \\ u_n &= \frac{1}{2} [L_x^{-1} L_t + L_t^{-1} L_x] u_1 = \frac{1}{2^{n+1}} \left[t + \frac{x^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Así, se obtiene la solución de la ecuación de difusión:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \left[t + \frac{x^2}{2} \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \left[t + \frac{x^2}{2} \right].$$

Al contrastarse con otro tipo de métodos, es importante resaltar que éste posee una rápida convergencia hacia la solución de esta ecuación; por ejemplo, con tan solo seis términos de la serie el error con la solución es del 2% y con diez términos el error es sólo del 0.1%.

Ecuación de difusión no homogénea en una varilla

En este apartado se muestra la efectividad del método para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales, para ello se considera un problema de valor inicial para la ecuación de difusión no homogénea:

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = P(x, t) & x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{\Gamma_0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (3-13)$$

Donde Γ_0 es la curva inicial y $P(x, t)$ es un polinomio en las variables x y t .

Sin pérdida de generalidad se considera esta condición inicial, puesto que si los resultados fueran otros tipos funciones con un cambio de variable apropiado se puede volver a la forma propuesta.

Para comenzar, se consideran los operadores diferenciales: $L_x = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}$ y $L_t = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$, con los cuales la ecuación se puede escribir cómo:

$$L_x u = L_t u + P(x, t).$$

Al aplicar el operador inverso L_x^{-1} se tiene:

$$L_x^{-1} L_x u = L_x^{-1} L_t u + L_x^{-1} P(x, t),$$

$$u = L_x^{-1} P(x, t) - u(0, t) - x \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + L_x^{-1} L_t \sum_{i=0}^n u_i. \quad (3-14)$$

A continuación se consideran cuatro situaciones que permitirán generalizar el problema.

- Primera situación $P(x, t) = t^m$.

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = t^m & x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{\Gamma_0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (3-15)$$

Aplicando la fórmula (3-14) se tiene:

$$u = L_x^{-1} t^m + L_x^{-1} L_t \sum_{i=0}^n u_i,$$

de donde

$$u = \frac{x^2 t^m}{2} + L_x^{-1} L_t \sum_{i=0}^n u_i.$$

Ahora se propone

$$u_0 = \frac{x^2 t^m}{2},$$

con el cual se obtiene el resto de los términos que conforman a la solución así:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_x^{-1} L_t \left[\frac{x^2 t^m}{2} \right] = L_x^{-1} \left[\frac{x^2 m t^{m-1}}{2} \right] = \frac{x^4 m t^{m-1}}{4!}, \\ u_2 &= L_x^{-1} L_t \left[\frac{x^4 m t^{m-1}}{4!} \right] = L_x^{-1} \left[\frac{x^4 m(m-1) t^{m-2}}{4!} \right] = \frac{x^6 m(m-1) t^{m-2}}{6!}, \\ u_3 &= L_x^{-1} L_t \left[\frac{x^6 m(m-1) t^{m-2}}{6!} \right] = L_x^{-1} \left[\frac{x^6 m(m-1)(m-2) t^{m-3}}{6!} \right] \\ &= \frac{x^8 m(m-1)(m-2) t^{m-3}}{8!}, \\ &\vdots \\ u_n &= \begin{cases} \frac{m!}{(2n+2)!} \frac{x^{2n+2}}{(m-n)!} t^{m-n}, & \text{si } n \leq m \\ 0, & \text{si } n > m. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto la solución está dada por:

$$u = \sum_{n=0}^m \frac{m!}{(2n+2)!} \frac{x^{2n+2} t^{m-n}}{(m-n)!}.$$

- Segunda situación $P(x, t) = x^p$.

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = x^p & x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{\Gamma_0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (3-16)$$

Aplicando la fórmula (3-14) se tiene:

$$u = L_x^{-1} x^p + L_x^{-1} L_t \sum_{i=0}^n u_i,$$

de donde

$$u = \frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + L_x^{-1} L_t \sum_{i=0}^n u_i.$$

Ahora se propone

$$u_0 = \frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)}$$

con el cual se obtiene el resto de los términos que conforman a la solución así:

$$\begin{aligned} u_1 &= L_x^{-1} L_t \left[\frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right] = 0, \\ u_2 &= 0, \\ &\vdots \\ u_n &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera la solución al problema de valor inicial es

$$u = \left[\frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \right].$$

- Tercera situación $P(x, t) = t^m + x^p$.

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = t^m + x^p & x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{\Gamma_0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (3-17)$$

Teniendo en cuenta las dos soluciones obtenidas y el principio de superposición, la solución de este problema de valor inicial es:

$$u = \frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)} + \sum_{n=0}^m \frac{m!}{(2n+2)!(m-n)!} x^{2n+2} t^{m-n}.$$

- Cuarta situación $P(x, t) = t^m x^p$.

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = t^m x^p & x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{\Gamma_0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (3-18)$$

Aplicando la fórmula (3-14) se tiene:

$$u = L_x^{-1} x^p t^m + L_x^{-1} L_t \sum_{i=0}^n u_i,$$

de donde

$$u = \frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \frac{t^m}{t^m} + L_x^{-1} L_t \sum_{i=0}^n u_i.$$

Ahora se propone

$$u_0 = \frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)} \frac{t^m}{t^m},$$

con el cual se obtiene el resto de los términos que conforman a la solución así:

$$\begin{aligned}
u_1 &= L_x^{-1} L_t \left[\frac{x^{p+2} t^m}{(p+1)(p+2)} \right] = L_x^{-1} \left[\frac{x^{p+2} m t^{m-1}}{(p+1)(p+2)} \right] \\
&= \frac{x^{p+4} m t^{m-1}}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}, \\
u_2 &= L_x^{-1} L_t \left[\frac{x^{p+4} m t^{m-1}}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} \right] = L_x^{-1} \left[\frac{x^{p+4} m(m-1)t^{m-2}}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)} \right] \\
&= \frac{x^{p+4} m(m-1)t^{m-2}}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)(p+5)(p+6)}, \\
&\vdots \\
u_n &= \begin{cases} \frac{x^{p+2n+2} p! m! t^{m-n}}{(p+2n+2)!(m-n)!}, & \text{si } n \leq m \\ 0, & \text{si } n > m. \end{cases}
\end{aligned}$$

De esta manera la solución al problema de valor inicial (3-18) está dado a continuación:

$$u = \sum_{n=0}^m \frac{x^{p+2n+2} p! m! t^{m-n}}{(p+2n+2)!(m-n)!}.$$

De esta forma para el problema general:

$$\begin{cases} \Delta u - u_t = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p a_{ij} x^i t^j & x > 0, \quad t > 0 \\ u|_{\Gamma_0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{t=0} = 0 & x > 0, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (3-19)$$

se procede aplicando la fórmula (3-14) con lo cual se obtiene:

$$u(x, t) = L_x^{-1} \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p a_{ij} x^i t^j + L_x^{-1} L_t \sum_{i=0}^n u_i,$$

de donde

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+2} t^j}{(i+1)(i+2)} + L_x^{-1} L_t \sum_{i=0}^n u_i.$$

Al suponer

$$u_0(x, t) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+2} t^j}{(i+1)(i+2)},$$

se obtiene el resto de los términos que conforman la solución:

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= L_x^{-1} L_t \left[\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+2} t^j}{(i+1)(i+2)} \right] = L_x^{-1} \left[\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+2} j t^{j-1}}{(i+1)(i+2)} \right] \\
&= \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+4} j t^{j-1}}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}, \\
u_2(x, t) &= L_x^{-1} L_t \left[\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+4} j t^{j-1}}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} \right] \\
&= L_x^{-1} \left[\sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+4} j(j-1) t^{j-2}}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)} \right] \\
&= \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+4} j(j-1) t^{j-2}}{(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)(i+5)(i+6)}, \\
&\vdots \\
u_n(x, t) &= \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+2n+2} i! j! t^{j-n}}{(i+2n+2)!(j-n)!}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la solución está dada por:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^p \frac{a_{ij} x^{i+2n+2} i! j! t^{j-n}}{(i+2n+2)!(j-n)!}.$$

4 El método de Harper

En su artículo Reducing Parabolic Partial Differential Equations to Canonical Form [12], J.F Harper propone un método que permite reducir una ecuación diferencial de tipo parabólico a la ecuación de difusión. Para mostrar su aplicación, en este capítulo se mostrará una generalización de este procedimiento.

El método se aplica sobre ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólico en las que solamente aparece un término que implica la segunda derivada, es decir ecuaciones de la forma:

$$u_{x^0 x^0} + au_t + bu + \sum_{i=0}^n d^i u_{x^i}. \quad (4-1)$$

En ella t es el tiempo, a, b, d^i son funciones que dependen de x^i .

En este método se propone en primer lugar ignorar el término con segunda derivada obteniendo una ecuación diferencial parcial de primer orden, la cual de ahora en adelante se mencionará como ecuación auxiliar. El siguiente paso consiste en resolver esta ecuación la cual se puede abordar por el método de las características o el método de Charpit. Esta solución se puede expresar en la forma: $w = \Psi f(X^0, \dots, X^{n-1}, T)$, donde f es una función de $n + 1$ variables y X^j, T, Ψ son funciones que dependen de x^i y t . En este punto se supone la solución de la ecuación inicial similar a la solución de la ecuación auxiliar, es decir de la forma $w = \Psi F(X^0, \dots, X^n, T)$ donde F es ahora una función de $n + 2$ variables y la variable X^n no depende de x^0 . Después de derivar y sustituir en (4-1) se obtiene la ecuación de difusión, en caso contrario al repetir este procedimiento nuevamente, se puede llegar a la ecuación de difusión.

4.1. Estudio del método

Harper ilustra su método, resolviendo tres ecuaciones: la ecuación de Black-Scholes, la ecuación de Okunev y una ecuación de mecánica de fluidos. En esta sección se pretende generalizar el método para una ecuación diferencial parcial de tipo parabólico con una variable dependiente y dos variables independientes.

Teorema 4.1.1. *La ecuación diferencial parcial parabólica:*

$$Au_{xx} + Bu_x + cu_t + Du = E, \quad (4-2)$$

en la cual A, B, C, D, E son funciones de x y t tiene como solución:

$$u(x, t) = f(x) + g(t)G(Z(X, T), T(t)), W(T(t)).$$

Donde $G(Z, T)$ es la solución de la ecuación de difusión homogénea,

$$\begin{aligned} X &= \int \frac{dx}{B} - \int \frac{dt}{C}, \\ T &= T(t), \\ Z &= \int \frac{dX}{B_1} - \int \frac{dT}{C_1}, \\ W &= W(T), \end{aligned}$$

y las funciones $f(x)$ y $g(t)$ deben cumplir con:

$$Af_{xx} + Bf_x + Df = E,$$

$$Cg_t + Dg = 0.$$

Demostración. En primer lugar, se ignora por un momento el término que involucra la segunda derivada y se considera la ecuación auxiliar:

$$Bv_x + cv_t + Dv = E, \quad (4-3)$$

la cual tiene como sistema de ecuaciones características:

$$\frac{dx}{B} = \frac{dt}{C} = \frac{dv}{E - Dv}.$$

Consideramos la ecuación $\frac{dx}{B} = \frac{dt}{C}$, de donde se obtiene la primer curva característica

$$\varphi(x, t) = \int \frac{dx}{B} - \int \frac{dt}{C} = C_0. \quad (4-4)$$

Como consecuencia, es fácil ver que esta curva satisface a la ecuación diferencial:

$$B\varphi_x + C\varphi_t = 0. \quad (4-5)$$

De la ecuación (4-4), se pueden obtener las variables x y t de la forma:

$$x = \phi_0(t, c_0)$$

$$t = \phi_1(x, c_0).$$

Se considera ahora la ecuación $\frac{dx}{B} = \frac{dv}{E-Dv}$, la cual es una ecuación diferencial ordinaria que se puede escribir organizando los términos y utilizando la forma propuesta para la variable x como:

$$\frac{dv(x, \phi_1(x, c_0))}{dx} + \frac{D(x, \phi_1(x, c_0))}{B(x, \phi_1(x, c_0))}v(x, \phi_1(x, c_0)) = \frac{E(x, \phi_1(x, c_0))}{B(x, \phi_1(x, c_0))}.$$

A multiplicar esta ecuación por el factor integrante $\mu = e^{\int \frac{B(x, \phi_0(x, c_0))}{D(x, \phi_0(x, c_0))} dx}$, se tiene:

$$e^{\int \frac{D}{B} dx} \frac{dv}{dx} + e^{\int \frac{D}{B} dx} \frac{D}{B} v = e^{\int \frac{D}{B} dx} \frac{E}{B},$$

la cual se puede escribir de la forma

$$\frac{d}{dx} \left[v e^{\int \frac{D}{B} dx} \right] = \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx},$$

por lo que:

$$v e^{\int \frac{D}{B} dx} = \int \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx} dx + C_1,$$

de donde se obtiene v dado por la forma:

$$v = e^{-\int \frac{D}{B} dx} \int \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx} dx + e^{-\int \frac{D}{B} dx} \Psi(\varphi(x, t)).$$

En ella $C_1 = \Psi(C_0)$, pero $C_0 = \varphi(x, t)$, por lo que $C_1 = \Psi(\varphi(x, t))$. Ecuación que se puede expresar en términos del factor integrante $\sigma(\varphi(t, C_0), t) = e^{\int \frac{D(\varphi(t, C_0), t)}{B(\varphi(t, C_0), t)} dt}$ y $\varsigma = \int \frac{dx}{B} - \int \frac{dt}{C}$ como:

$$v = e^{-\int \frac{D}{B} dx} \int \frac{E}{B} e^{\int \frac{D}{B} dx} dx + \sigma^{-1}(\varphi(t, C_0), t) \Psi(\varsigma).$$

El método propone suponer la solución de (4-1) similar a la ecuación anterior, es decir una expresión de la forma:

$$u(x, t) = f(x) + g(t)F(X, T). \quad (4-6)$$

En esta ecuación, se definen las variables X y T de la siguiente manera:

$$X = \int \frac{dx}{B} - \int \frac{dt}{C}, \quad (4-7)$$

$$T = T(t). \quad (4-8)$$

Las funciones $f(x)$ y $g(t)$ son funciones arbitrarias que se eligen para eliminar el término no homogéneo y el término que acompaña a F respectivamente como se mostrará más adelante.

Será útil tener en cuenta que al igual que la función φ , X también satisface la ecuación diferencial:

$$BX_x + CX_t = 0. \quad (4-9)$$

Derivando parcialmente (4-6), teniendo en cuenta la forma en que se definió las variables X y T , al sustituir en la ecuación (4-1), se obtiene

$$gAX_x^2 F_{XX} + [gAX_{xx} + gBX_x + gCX_t] F_X + gCT_t F_T + [Cg_t + Dg] F + Af_{xx} + Bf_x + Df = E. \quad (4-10)$$

Como se mencionó anteriormente las funciones $f(x)$ y $g(t)$ se eligen de tal forma que cumplan la condición:

$$\begin{aligned} Af_{xx} + Bf_x + Df &= E, \\ Cg_t + Dg &= 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (4-10) y teniendo en cuenta (4-9) la ecuación toma la forma:

$$AX_x^2 F_{XX} + AX_{xx} F_X + CT_t F_T = 0.$$

Con el fin de simplificar la expresión se proponen los siguiente cambios:

$$\begin{aligned} A_1 &= AX_x, \\ B_1 &= AX_{xx}, \\ C_1 &= C. \end{aligned}$$

Además, sin pérdida de generalidad podemos considerar $T_t = 1$, con lo cual la ecuación puede expresarse:

$$A_1 F_{XX} + B_1 F_X + C_1 F_T = 0. \quad (4-11)$$

En muchas situaciones particulares, en este punto se podría tener la ecuación de calor, en otras, como en este caso, es necesario repetir el proceso. En este orden de ideas, se considera la ecuación auxiliar:

$$B_1 V_X + C_1 V_T = 0.$$

Para ella, el sistema de ecuaciones características es:

$$\frac{dX}{B_1} = \frac{dT}{C_1} = \frac{dV}{0}.$$

Si se considera de este sistema la ecuación: $\frac{dX}{B_1} = \frac{dT}{C_1}$ se obtiene la curva característica:

$$\Phi(X, T) = \int \frac{dX}{B_1} - \int \frac{dT}{C_1} = C_2. \quad (4-12)$$

Curva que satisface la ecuación:

$$B_1\Phi_X + C_1\Phi_Y = 0.$$

En este punto, se considera del sistema de ecuaciones características la ecuación:

$$\frac{dX_1}{B_1} = \frac{dV}{0}.$$

De donde se obtiene la curva característica:

$$V(X, Y) = C_3.$$

En la cual $C_3 = \psi(C_2) = \psi(\Phi(X, T))$ por lo que:

$$V(X, Y) = \psi(\Phi(X, T)). \quad (4-13)$$

De igual manera, se propone para la ecuación (4-11) una solución similar a (4-13), en este caso, una expresión de la forma:

$$F(X, Y) = G(Z, W). \quad (4-14)$$

Donde las variables Z y W se definen como:

$$\begin{aligned} Z &= \int \frac{dX}{B_1} - \int \frac{dT}{C_1} = C_4, \\ W &= W(T). \end{aligned}$$

Considerando lo anterior, suponiendo que $Z_{xx} = 0$, al derivar parcialmente (4-14) y sustituyendo en (4-11) se obtiene la relación:

$$A_1 G_{ZZ} Z_X^2 + [B_1 Z_X + C_1 Z_T] G_Z + C_1 W_T G_W = 0.$$

Dado que $Z(X, T) = \Phi(X, T)$, se llega a $B_1 Z_X + C_1 Z_T = 0$. De esta manera la ecuación la ecuación se determina por:

$$A_1 G_{ZZ} Z_X^2 + C_1 W_T G_W = 0.$$

Finalmente haciendo $W_T = -\frac{A_1 Z_X^2}{C_1}$, se obtiene la ecuación de difusión:

$$G_{ZZ} = G_W. \quad (4-15)$$

De las ecuaciones (4-6) y (4-14), se puede concluir que la solución de la ecuación (4-1) esta dada por:

$$u(x, t) = f(x) + g(t)G(Z(X, T), T(t)), W(T(t)). \quad (4-16)$$

□

5 Aplicaciones

El propósito de este capítulo es encontrar la solución tanto de la ecuación de Black-Scholes con volatilidad constante como del modelo generalizado a partir de los métodos descritos en los capítulos anteriores.

5.1. Solución de la ecuación diferencial parcial lineal, unidimensional y dependiente del tiempo a través del método de descomposición de Adomian

En esta sección se utiliza el método de descomposición para encontrar la solución general de cualquier ecuación diferencial parcial lineal, unidimensional y dependiente del tiempo sujeto a una condición inicial o condición en la frontera (ver [14]).

Teorema 5.1.1. Sean las funciones: $\alpha_n(x, t)$, $n = 0, 1, \dots, N$ y $\beta_m(x, t)$, $m = 0, 1, \dots, M$, $N, M \in \mathbb{Z}^+$, y $G_n = \frac{\partial^n}{\partial t^n}$, $F_m = \frac{\partial^m}{\partial x^m}$ dos operadores diferenciales, entonces la ecuación diferencial parcial lineal:

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(x, t) G_n u(x, t) = \sum_{m=1}^M \beta_m(x, t) F_m u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad (5-1)$$

con condición inicial:

$$G_n u(x, 0) = g_n(x), \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (5-2)$$

o con condición en la frontera:

$$F_m u(0, t) = f_n(x), \quad m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (5-3)$$

tiene como solución:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t),$$

donde los términos $u_k(x, t)$ están dados para el problema de condición inicial de la forma:

$$u_0(x, t) = G_N^{-1} \left[\frac{f(x, t)}{\alpha_N(x, t)} \right] + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t^n}{n!} g_n(x),$$

$$u_{k+1}(x, t) = \sum_{m=1}^M G_N^{-1} \left[\frac{\beta_m(x, t)}{\alpha_N(x, t)} F_m u_k(x, t) \right] - \sum_{n=0}^{N-1} G_N^{-1} \left[\frac{\alpha_n(x, t)}{\alpha_N(x, t)} G_n u_k(x, t) \right]$$

y para el problema con condición en la frontera de la forma:

$$u_0(x, t) = -F_M^{-1} \left[\frac{f(x, t)}{\beta_M(x, t)} \right] + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{x^m}{m!} f_m(x),$$

$$u_{k+1}(x, t) = \sum_{n=0}^N F_M^{-1} \left[\frac{\alpha_n(x, t)}{\beta_M(x, t)} G_n u_k(x, t) \right] - \sum_{m=1}^{M-1} F_M^{-1} \left[\frac{\beta_m(x, t)}{\beta_M(x, t)} F_m u_k(x, t) \right].$$

Demostración. Para iniciar se consideran los operadores integrales inversos G_N^{-1} y F_M^{-1} :

$$G_N^{-1} = \int_0^{t_0} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{N-1}} dt_N \dots dt_2 dt_1; \quad (5-4)$$

$$F_M^{-1} = \int_0^{x_0} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \cdots \int_0^{x_{M-1}} dx_M \dots dx_2 dx_1. \quad (5-5)$$

Para resolver la ecuación (5-1) sujeto a la condición inicial (5-2) se debe aplicar el operador integral inverso dado por (5-4), con lo cual se obtiene:

$$G_N u(x, t) = \frac{f(x, t)}{\alpha_N(x, t)} + \sum_{m=1}^M \frac{\beta_m(x, t)}{\alpha_N(x, t)} F_m u(x, t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\alpha_n(x, t)}{\alpha_N(x, t)} G_n u(x, t),$$

de donde:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= G_N^{-1} \left[\frac{f(x, t)}{\alpha_N(x, t)} \right] + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t^n}{n!} g_n(x) + \sum_{m=1}^M G_N^{-1} \left[\frac{\beta_m(x, t)}{\alpha_N(x, t)} F_m u(x, t) \right] \\ &- \sum_{n=0}^{N-1} G_N^{-1} \left[\frac{\alpha_n(x, t)}{\alpha_N(x, t)} G_n u(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (5-6)$$

Ahora, aplicando el método de descomposición se tiene:

$$u_0(x, t) = G_N^{-1} \left[\frac{f(x, t)}{\alpha_N(x, t)} \right] + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t^n}{n!} g_n(x), \quad (5-7)$$

$$u_{k+1} = \sum_{m=1}^M G_N^{-1} \left[\frac{\beta_m(x, t)}{\alpha_N(x, t)} F_m u_k(x, t) \right] - \sum_{n=0}^{N-1} G_N^{-1} \left[\frac{\alpha_n(x, t)}{\alpha_N(x, t)} G_n u_k(x, t) \right]. \quad (5-8)$$

Por lo que la solución del problema de valor inicial está dado por:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x, t). \quad (5-9)$$

De manera similar, para resolver (5-1) sujeto con la condición de frontera (5-3) se debe aplicar el operador inverso definido en (5-5), con lo cual se obtiene:

$$F_M u(x, t) = -\frac{f(x, t)}{\beta_M(x, t)} + \sum_{n=0}^N \frac{\alpha_n(x, t)}{\beta_M(x, t)} G_n u(x, t) - \sum_{m=1}^{M-1} \frac{\beta_m(x, t)}{\beta_M(x, t)} F_m u(x, t),$$

de donde:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -F_M^{-1} \left[\frac{f(x, t)}{\beta_M(x, t)} \right] + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{x^m}{m!} f_m(x) + \sum_{n=0}^N F_M^{-1} \left[\frac{\alpha_n(x, t)}{\beta_M(x, t)} G_n u(x, t) \right] \\ &- \sum_{m=1}^{M-1} F_M^{-1} \left[\frac{\beta_m(x, t)}{\beta_M(x, t)} F_m u(x, t) \right]. \end{aligned} \quad (5-10)$$

Aplicando el método de descomposición se tiene:

$$u_0(x, t) = -F_M^{-1} \left[\frac{f(x, t)}{\beta_M(x, t)} \right] + \sum_{m=1}^{M-1} \frac{x^m}{m!} f_m(x), \quad (5-11)$$

$$u_{k+1} = \sum_{n=0}^N F_M^{-1} \left[\frac{\alpha_n(x, t)}{\beta_M(x, t)} G_n u_k(x, t) \right] - \sum_{m=1}^{M-1} F_M^{-1} \left[\frac{\beta_m(x, t)}{\beta_M(x, t)} F_m u_k(x, t) \right]. \quad (5-12)$$

Y la solución tiene la misma forma de (5-9). □

5.2. Solución de la ecuación de Black-Scholes a través del método de descomposición de Adomian

En la sección anterior se encontró la solución de una generalización de la ecuación diferencial parcial lineal, unidimensional y dependiente del tiempo, ella fue escogida ya que el modelo de Black-Scholes con volatilidad constante se describe a partir de una ecuación con estas características. A continuación se presenta la solución del modelo (ver [5]).

Teorema 5.2.1. *La ecuación de Black-Scholes con volatilidad constante y condición inicial:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}(S, t) + rSC_S(S, t) + C_t(S, t) - rC(S, t) = 0 \\ C(S, T) = \text{máx} \{S - k, 0\}, \end{cases} \quad (5-13)$$

tiene como solución: $C(S, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(S, t)$, en la cual:

$$C_k(S, t) = \left[\sum_{m=0}^{2k} \left\{ \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_v^k \right\} S^m g^{(m)}(S) \right] \frac{(T-t)^k}{k!}, \quad (5-14)$$

donde:

$$\rho_m = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 m + r \right) (m-1). \quad (5-15)$$

Demostración. De acuerdo con la ecuación (5-1), se tiene:

$$N = 1, \quad M = 2, \quad \alpha_0 = r, \quad \alpha_1 = -1, \quad \beta_1 = rS, \quad \beta_2 = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2,$$

$$f(S, t) = 0, \quad u(x, t) = C(S, t).$$

Puesto que es un problema con condición inicial se debe aplicar (5-7) y (5-8) se tiene:

$$C_0(S, t) = g(S), \quad (5-16)$$

$$\begin{aligned} C_{k+1}(S, t) &= \sum_{m=1}^2 G_1^{-1} \left(\frac{\beta_m(S, t)}{\alpha_1(S, t)} F_m(C_k(S, t)) \right) - \sum_{n=0}^0 G_1^{-1} \left(\frac{\alpha_n(S, t)}{\alpha_1(S, t)} G_n(C_k(S, t)) \right) \\ &= G_1^{-1} \left[-rS \frac{\partial C_k(S, t)}{\partial S} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_k(S, t)}{\partial S^2} + rC_k(S, t) \right], \end{aligned} \quad (5-17)$$

de donde:

$$C_{k+1}(S, t) = \int_t^T \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_k(S, \tau)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_k(S, \tau)}{\partial S} - rC_k(S, \tau) \right] d\tau. \quad (5-18)$$

Por lo que la solución del problema de valor inicial está dado por: $C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k$.

Se debe mostrar que la ecuación dada en (5-14) satisface ésta solución, para ello se debe verificar las expresiones (5-16) y (5-17). Para la primera, se tiene que:

$$C_0(S, t) = \left[\sum_{m=0}^0 \left\{ \sum_{v=0}^0 \frac{(-1)^0}{0!(0)!} \rho_v^0 \right\} S^0 g^{(0)}(S) \right] \frac{(T-t)^0}{0!} = g(S).$$

Para demostrar la segunda expresión, por comodidad en la escritura se considera:

$$D_k(S) = \left[\sum_{m=0}^{2k} \left\{ \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_v^k \right\} S^m g^{(m)}(S) \right],$$

por lo que $C_k(S, t) = D_k(S) \frac{(T-t)^k}{k!}$. Ahora se calcula:

$$\begin{aligned} & \int_t^T \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_k(S, \tau)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_k(S, \tau)}{\partial S} - rC_k(S, \tau) \right] d\tau \\ &= \int_t^T \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 D_k''(S) \frac{(T-\tau)^k}{k!} + rS D_k'(S) \frac{(T-\tau)^k}{k!} - rD_k(S) \frac{(T-\tau)^k}{k!} \right] d\tau \\ &= \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 D_k''(S) + rS D_k'(S) - rD_k(S) \right] \frac{(T-t)^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned} \quad (5-19)$$

Ahora, se debe probar que:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 D_k''(S) + rS D_k'(S) - rD_k(S) = D_{k+1}(S).$$

Por conveniencia se introduce la notación:

$$\gamma_m^{(k)} = \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_v^k, \quad (5-20)$$

entonces D_k se puede escribir como:

$$D_k(S) = \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} S^m g^{(m)}(S). \quad (5-21)$$

De donde:

$$D_k'(S) = \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} [mS^{m-1} g^{(m)}(S) + S^m g^{(m+1)}(S)], \quad (5-22)$$

$$D_k''(S) = \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} [m(m-1)S^{m-2} g^{(m)}(S) + 2mS^{m-1} g^{(m+1)}(S) + S^m g^{(m+2)}(S)]. \quad (5-23)$$

Por lo que al sustituir en la ecuación:

$$\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 D_k''(S) + rS D_k'(S) - rD_k(S), \quad (5-24)$$

se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} [m(m-1)S^{m-2}g^{(m)}(S) + 2mS^{m-1}g^{(m+1)}(S) + S^m g^{(m+2)}(S)] \\ & + rS \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} [mS^{m-1}g^{(m)}(S) + S^m g^{(m+1)}(S)] - r \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} S^m g^{(m)}(S) \end{aligned} \quad (5-25)$$

$$\begin{aligned} = & \sum_{m=0}^{2k} \left[\frac{1}{2}\sigma^2 m(m-1) + rm - r \right] \gamma_m^{(k)} S^m g^{(m)}(S) + \sum_{m=1}^{2k+1} [\sigma^2(m-1) + r] \gamma_{m-1}^{(k)} S^m g^{(m)} \\ & + \sum_{m=2}^{2k+2} \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma_{m-2}^{(k)} S^m g^{(m)}(S). \end{aligned} \quad (5-26)$$

Para completar la demostración solo falta probar que:

$$\left[\frac{1}{2}\sigma^2 m(m-1) + rm - r \right] \gamma_m^{(k)} + [\sigma^2(m-1) + r] \gamma_{m-1}^{(k)} + \frac{1}{2}\sigma^2 \gamma_{m-2}^{(k)} = \gamma_m^{(k+1)}. \quad (5-27)$$

Para ello, en primer lugar note que a partir de (5-15) se tiene que: $\rho_m = \frac{1}{2}\sigma^2 m(m-1) + rm - r$ y $\rho_m - \rho_{m-1} = \sigma^2(m-1) + r$, por lo que sustituyendo estas expresiones y (5-20) en (5-27) se tiene:

$$\begin{aligned} & \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_v^k \rho_m + \sum_{v=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-1-v}}{v!(m-1-v)!} \rho_v^k [\rho_m - \rho_{m-1}] + \sum_{v=0}^{m-2} \frac{(-1)^{m-2-v}}{v!(m-2-v)!} \rho_v^k \frac{1}{2}\sigma^2 \\ & - \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_v^{k+1} \end{aligned} \quad (5-28)$$

$$\begin{aligned} = & \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_v^k [\rho_m - \rho_v] - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-1-v)!} \rho_v^k [\rho_m - \rho_{m-1}] \\ & + \sum_{v=0}^{m-2} \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-2-v)!} \rho_v^k \frac{1}{2}\sigma^2 \end{aligned} \quad (5-29)$$

$$= \sum_{v=0}^{m-2} \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_v^k \left[\rho_m - \rho_v - (m-v)(\rho_m - \rho_{m-1}) + (m-v)(m-v-1)\frac{1}{2}\sigma^2 \right] = 0. \quad (5-30)$$

Sustituyendo en (5-27) en (5-26) se puede concluir que:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 D_k''(S) + rSD_k'(S) - rD_k(S) = \sum_{m=0}^{2k+2} \gamma_m^{(k+1)} S^m g^{(m)}(S) = D_{k+1}(S). \quad (5-31)$$

Finalmente al remplazar en (5-32) en (5-19) se tiene:

$$\begin{aligned} \int_t^T \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_k(S, \tau)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C_k(S, \tau)}{\partial S} - rC_k(S, \tau) \right] d\tau \\ = D_{k+1}(S) \frac{(T-t)^k}{k!} = C_{k+1}(S, t), \end{aligned} \quad (5-32)$$

con lo cual termina la demostración. \square

5.3. Solución de la ecuación de Black-Scholes a través del método de Harper

Desde su publicación en el año 1984, el modelo de Black-Scholes ha cautivado la atención no sólo de expertos en finanzas, sino también de una amplia variedad de matemáticos, de ahí que la ecuación en la actualidad posee un gran número de formas para solucionarla, algunas versiones utilizan transformadas de Laplace, transformadas de Fourier e incluso la teoría de grupos de Lie, más aún J.F Harper motivó su trabajo a partir de esta ecuación.

En este sentido, el propósito de este apartado es mostrar al lector de forma clara y complementando algunos detalles el procedimiento en que Harper aplica su método para resolver esta célebre ecuación.

Teorema 5.3.1. *La ecuación de Black-Scholes con condición inicial:*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}(S, t) + rSC_s(S, t) + C_t(S, t) - rC(S, t) = 0 \\ C(0, t) = 0 \\ C(S, T) = \max\{S - k, 0\}, \end{cases} \quad (5-33)$$

tiene como solución:

$$C(S, t) = SN(d_1) - ke^{r(T-t)}N(d_2),$$

donde:

$$d_1 = \frac{Z}{\sqrt{2W}} + \sqrt{2W} = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} + \sqrt{\sigma^2(T-t)} = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$

$$d_2 = \frac{Z}{\sqrt{2W}} = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

Demostración. De acuerdo al método se considera en primer lugar la ecuación auxiliar:

$$rSC_s(S, t) + C_t(S, t) - rC(S, t) = 0,$$

para la cual, el sistema de ecuaciones características es:

$$\frac{dS}{rS} = \frac{dt}{1} = \frac{dC}{rC}.$$

Considerando de este sistema, la ecuación: $\frac{dS}{rS} = \frac{dt}{1}$, la cual, al ser integrada en el intervalo $[t, T]$, toma la forma:

$$\ln S - C_1 = r(t - T).$$

Donde C_1 es la constante de integración. Haciendo $C_1 = \ln k$ y organizando términos se tiene:

$$X = \ln \frac{S}{k} - r(t - T) = C_2, \quad C_2 \text{ Constante.}$$

Ahora considerando del sistema la ecuación: $\frac{dt}{1} = \frac{dC}{rC}$, la cual al ser integrada en el intervalo $[t, T]$ se tiene:

$$\ln C - C_3 = r(t - T),$$

de donde:

$$C = C_4 e^{r(t-T)}, \quad C_4 \text{ Constante.}$$

Sea $C_4 = \varphi(C_2) = \varphi(X)$, por lo que:

$$C = \varphi(X) e^{r(t-T)}.$$

Se supone la solución de la ecuación (5-33) similar a la solución de la ecuación auxiliar encontrada pero con una variable más, es decir una expresión de la forma:

$$C = \Phi(X, \tau) e^{r(t-T)}. \quad (5-34)$$

Donde:

$$X = \ln \frac{S}{k} - r(t - T),$$

$$\tau = \tau(t).$$

A continuación se encuentran las derivadas parciales.

$$C_S = \Phi_X \frac{1}{S} e^{r(t-T)},$$

$$C_{SS} = \left[\Phi_{XX} \frac{1}{S^2} - \Phi_X \frac{1}{S^2} \right] e^{r(t-T)},$$

$$C_t = re^{r(t-T)}\Phi + e^{r(t-T)}[-\Phi_X r + \Phi_\tau \tau_t].$$

Sustituyendo en la ecuación (5-33) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \left[\Phi_{XX} \frac{1}{S^2} - \Phi_X \frac{1}{S^2} \right] e^{r(t-T)} + rS\Phi_X \frac{1}{S} e^{r(t-T)} + re^{r(t-T)}\Phi + e^{r(t-T)}[-\Phi_X r + \Phi_\tau \tau_t] \\ - r\varphi e^{r(t-T)} = 0. \end{aligned}$$

Simplificando el término $e^{r(t-T)}$ y agrupando términos la ecuación toma la forma:

$$\frac{1}{2}\sigma^2\Phi_{XX} - \frac{1}{2}\sigma^2\Phi_X + \Phi_\tau \tau_t = 0.$$

Con el fin de simplificar esta expresión se supone que $\tau_t = \frac{1}{2}\sigma^2$, por lo que podemos considerar $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(t - T)$. De esta manera la ecuación se reduce a:

$$\Phi_{XX} - \Phi_X + \Phi_\tau = 0. \quad (5-35)$$

Al considerar en esta expresión su ecuación auxiliar:

$$-\Phi_X + \Phi_\tau = 0,$$

cuyo sistema de ecuaciones características se expresa por:

$$\frac{dX}{-1} = \frac{d\tau}{1} = \frac{d\Phi}{0}.$$

Al considerar la ecuación:

$$\frac{dX}{-1} = \frac{d\tau}{1},$$

su curva característica esta dada por $Z = X + \tau = C_5$, donde C_5 es una constante, y de la ecuación:

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{d\Phi}{0},$$

se tiene

$$\Phi = C_6,$$

donde

$$C_6 = g(C_5) = g(Z) \quad \text{es decir} \quad \Phi = g(Z).$$

Se supone la solución de (5-35) similar a la solución anterior, es decir una función de la forma:

$$\Phi(X, \tau) = G(Z, W).$$

Donde $Z = X + \tau$ y $W = W(\tau)$, por lo que derivando esta expresión dos veces con respecto a X y una vez con respecto a τ se tiene:

$$\Phi_X = G_Z Z_x = G_Z,$$

$$\Phi_{XX} = G_{ZZ} Z_x = G_Z,$$

$$\Phi_\tau = G_Z Z_\tau + G_W W_\tau = G_Z + G_W W_\tau.$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación (5-35), ésta se transforma en:

$$G_{ZZ} + G_W W_\tau = 0.$$

Haciendo $W = -\tau$, la expresión resultante es una ecuación de difusión homogénea dada por:

$$G_{ZZ} = G_W.$$

Sustituyendo en (5-34) se tiene que la solución de la ecuación (5-33) está dada por:

$$C(S, t) = e^{r(t-T)} G(Z, W). \quad (5-36)$$

Donde:

$$Z = X + \tau = \ln \frac{S}{k} - r(t - T) + \frac{1}{2} \sigma^2 (t - T) = \ln \frac{S}{k} + (r - \frac{1}{2} \sigma^2) (T - t)$$

$$W = -\tau = \frac{1}{2} \sigma^2 (T - t).$$

Para completar la solución es necesario resolver la ecuación de difusión $G_{ZZ} = G_W$, pero antes, es necesario encontrar la condición inicial $G(Z, 0)$. Para ello, se debe tener en cuenta que cuando $W = 0$, se sigue que $\tau = 0$, por lo que $t = T$ y $Z = \ln \frac{S}{k}$. De esta manera se tiene:

$$G(Z, 0) = C(ke^Z, T) = \text{máx} \{ke^Z - k, 0\}.$$

La solución de esta ecuación esta dada por:

$$G(Z, W) = \frac{1}{2\sqrt{\pi W}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, 0) e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4W}} d\xi.$$

El objetivo es transformar esta integral en la función de distribución normal. Para ello se utiliza el cambio de variable:

$$\xi = \varsigma\sqrt{2W} + Z,$$

por lo que:

$$d\xi = \sqrt{2W}d\varsigma.$$

Sustituyendo en la integral se tiene:

$$\begin{aligned} G(Z, W) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\varsigma\sqrt{2W} + Z, 0) e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left\{ke^{\varsigma\sqrt{2W}+Z} - k, 0\right\} e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma. \end{aligned}$$

Para utilizar la condición: $ke^{\varsigma\sqrt{2W}+Z} - k \geq 0$, se observa que $\varsigma \geq \frac{-Z}{\sqrt{2W}}$ por lo que la ecuación se transforma en:

$$G(Z, W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} (ke^{\varsigma\sqrt{2W}+Z} - k) e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma.$$

De donde:

$$\begin{aligned} G(Z, W) &= \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} (e^{\varsigma\sqrt{2W}+Z}) e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma \\ &= \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{\varsigma\sqrt{2W}+Z-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma \\ &= \frac{ke^Z}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{\varsigma\sqrt{2W}-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma. \end{aligned}$$

Completando cuadrados en la primera integral se obtiene:

$$\begin{aligned} G(Z, W) &= \frac{ke^Z}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{(\varsigma-\sqrt{2W})^2+W} d\varsigma - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma \\ &= \frac{ke^{Z+W}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{(\varsigma-\sqrt{2W})^2} d\varsigma - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma. \end{aligned}$$

Considere el cambio: $\mu = \varsigma - \sqrt{2W}$, con el que se obtiene:

$$G(Z, W) = \frac{ke^{Z+W}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}-\sqrt{2W}}^{+\infty} e^{-\frac{(\mu)^2}{2}} d\mu - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}}^{+\infty} e^{-\frac{(\varsigma)^2}{2}} d\varsigma.$$

Como la función de distribución normal es simétrica con respecto a la media, se tiene:

$$G(Z, W) = \frac{ke^{Z+W}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{Z}{\sqrt{2W}} + \sqrt{2W}} e^{-\frac{(\mu)^2}{2}} d\zeta - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-Z}{\sqrt{2W}}} e^{-\frac{(\zeta)^2}{2}} d\zeta.$$

Se define $d_1 = \frac{Z}{\sqrt{2W}} + \sqrt{2W}$ y $d_2 = \frac{Z}{\sqrt{2W}}$, con lo que se obtiene:

$$G(Z, W) = ke^{Z+W} N(d_1) - kN(d_2).$$

Finalmente sustituyendo estos resultados en la ecuación (5-42) se tiene:

$$C(S, t) = e^{r(t-T)} \left[ke^{\ln \frac{S}{k} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} N(d_1) - kN(d_2) \right],$$

en la cual, al simplificar se tiene:

$$C(S, t) = SN(d_1) - ke^{r(T-t)} N(d_2),$$

donde:

$$d_1 = \frac{Z}{\sqrt{2W}} + \sqrt{2W} = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sqrt{\sigma^2(T-t)}} + \sqrt{\sigma^2(T-t)} = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}},$$

$$d_2 = \frac{Z}{\sqrt{2W}} = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

□

5.4. Análisis comparativo entre el método de descomposición de Adomian y el método de Harper

La siguiente tabla presenta un análisis comparativo entre el método de descomposición de Adomian y el método de Harper.

Método de descomposición de Adomian	Método de Harper
Las dos técnicas no utilizan ningún método restrictivo como la linealización que hicieran perder información o modificar el comportamiento físico del modelo estudiado.	
El método de descomposición de Adomian permite resolver ecuaciones diferenciales lineales, no lineales, ordinarias, parciales, determinísticas o estocásticas.	El método de Harper permite resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales de tipo parabólico.
Se fundamenta en el uso de un tipo especial de polinomios.	El método se fundamenta en transformar la ecuación en su forma canónica, para ello hace uso de sustituciones, la principal de ellas se obtiene al solucionar la ecuación auxiliar, es decir aquella que se consigue al eliminar el término con segunda derivada.
Proporciona una solución analítica dada como una suma de funciones infinitas.	Proporciona una solución analítica.
La solución de la ecuación de Black-Scholes mediante el método de descomposición es:	La solución de la ecuación de Black-Scholes mediante el método de Harper:
$C(S, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(S, t),$	$C(S, t) = SN(d_1) - ke^{r(T-t)}N(d_2)$
Donde:	donde:
$C_k(S, t) = \frac{(T-t)^k}{k!} \times \left[\sum_{m=0}^{2k} \left\{ \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_v^k \right\} S^m g^{(m)}(S) \right].$	$d_1 = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$ $d_2 = \frac{\ln \frac{S}{k} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$

Tabla 5-1: Comparación entre el método de descomposición y el método de Harper

5.5. Solución de una generalización del modelo de Black-Scholes a partir del método de descomposición de Adomian para mercados sin liquidez

Este trabajo presta especial atención al modelo de Black-Scholes generalizado, es decir aquel que considera la volatilidad como una función dependiente del tiempo, del precio del sub-

yacente y de la prima de la opción, en primer lugar por que a juicio de los expertos la volatilidad es una de las principales variables en el modelo y los mercados no obedecen a comportamientos lineales.

Teorema 5.5.1. *El modelo de Black-Scholes generalizado con volatilidad no constante*

$$\sigma^*(S, t, C_s, C_{ss}) = \frac{\sigma}{1 - \rho S \lambda(S) C_{ss}},$$

se puede expresar como:

$$\begin{cases} C_t(S, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}(S, t)(1 + 2\rho S C_{ss}(S, t)) + r S C_s(S, t) - r C(S, t) = 0 \\ C(S, T) = f(S), \quad S \in [0, \infty], \end{cases} \quad (5-37)$$

y su solución se puede escribir de forma aproximada como:

$$\begin{aligned} C \approx & f(S) - \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + r S f'(S) - r f(S) + \rho \sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 \right] t + \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 [1 + 4\rho S f''(S)] \right. \\ & \left[\sigma^2 f''(S) + 2\sigma^2 S f'''(S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f^{(iv)}(S) + r f''(S) + r S f'''(S) + 6\rho \sigma^2 S [f''(S)]^2 + \right. \\ & \left. 12\rho \sigma^2 S^2 f'''(S) f''(S) + 2\rho \sigma^2 S^3 [f'''(S)]^2 + 2\rho \sigma^2 S^3 f^{(iv)}(S) f''(S) \right] + r \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) - \right. \\ & \left. r S f'(S) + r f(S) + 2\rho \sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 S^3 f'''(S) + r S^2 f''(S) + 2\rho \sigma^2 S^4 [f''(S)]^2 \right] \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Demostración. La ecuación diferencial parcial lineal propuesta por Black-Scholes para valorar la prima de una opción de compra europea está dada por:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}(S, t) + r S C_s(S, t) + C_t(S, t) - r C(S, t) = 0 \\ C(S, T) = \max\{S - k, 0\}, \end{cases} \quad (5-38)$$

en ella, σ es la constante de volatilidad dada por el modelo, la cual es considerada como la desviación estándar de los cambios del precio de un activo. En los mercados reales esta generalmente, no se mantiene constante. Frey (2000) propone una función para la volatilidad la cual depende del tiempo, del precio del activo y de la prima de la opción basado principalmente en el estudio de mercados ilíquidos, es decir la volatilidad que permite caracterizar una versión no lineal del modelo de Black-Scholes viene dada por:

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{1 - \rho S \lambda(S) C_{ss}}, \quad (5-39)$$

donde σ es la volatilidad tradicional, ρ es una constante que se desprende de los mercados financieros y λ es el precio del riesgo, la cual es una función positiva que describe la liquidez del mercado. Al sustituir (5-39) en la ecuación (5-38) se tiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{C_{SS}(S,t)}{[1-\rho S\lambda(S)C_{SS}]^2} + rSC_S(S,t) + C_t(S,t) - rC(S,t) = 0 \\ C(S,T) = f(S). \end{cases} \quad (5-40)$$

Liu, Yong (2005) probaron la existencia y unicidad de una solución clásica de esta ecuación. Para el caso $\lambda(S) = 1$, $\|\rho SC_{SS}\| < \epsilon$, con $\epsilon > 0$ dado y del hecho de que $\frac{1}{(1-F)^2} \approx 1 + 2F + O(F)^3$ se llega a que la ecuación (5-40) se expresa como:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}(S,t) (1 + 2\rho SC_{SS}(S,t)) + rSC_S(S,t) + C_t(S,t) - rC(S,t) = 0 \\ C(S,T) = f(S). \end{cases} \quad (5-41)$$

Ahora, se consideran los operadores diferenciales:

$$L = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}; \quad R = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial S^2} + rS \frac{\partial(\cdot)}{\partial S} - r(\cdot); \quad N = \rho\sigma^2 S^3 \left[\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial S^2} \right]^2.$$

Con los cuales, se puede escribir la ecuación (5-37) como:

$$LC + RC + NC = 0,$$

de donde:

$$LC = -RC - NC,$$

como L es un operador invertible, existe L^{-1} , por lo que al aplicar este operador la ecuación toma la forma:

$$\begin{aligned} L^{-1}LC &= -L^{-1}RC - L^{-1}NC \\ C &= C_0 - L^{-1}RC - L^{-1}NC. \end{aligned}$$

De acuerdo al método de descomposición se tiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = C_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} C_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (5-42)$$

donde los A_n están dados por:

$$\begin{aligned}
A_0 &= C_{0,SS}^2, \\
A_1 &= \frac{d}{d\lambda} [(C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda)^2]_{\lambda=0} = [2(C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda) C_{1,SS}]_{\lambda=0} \\
&= 2C_{0,SS}C_{1,SS}, \\
A_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} [(C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda + C_{2,SS}\lambda^2)^2]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{d\lambda} [2(C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda + C_{2,SS}\lambda^2)(C_{1,SS} + 2C_{2,SS}\lambda)]_{\lambda=0} \\
&= [(C_{1,SS} + 2C_{2,SS}\lambda)^2 + (C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda + C_{2,SS}\lambda^2) 2C_{2,SS}]_{\lambda=0} \\
&= (C_{1,SS})^2 + 2C_{0,SS}C_{2,SS}, \\
A_3 &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} [(C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda + C_{2,SS}\lambda^2 + C_{3,SS}\lambda^3)^2]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{6} \frac{d^2}{d\lambda^2} [2(C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda + C_{2,SS}\lambda^2 + C_{3,SS}\lambda^3)(C_{1,SS} + 2C_{2,SS}\lambda + 3C_{3,SS}\lambda^2)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{3} \frac{d}{d\lambda} [(C_{1,SS} + 2C_{2,SS}\lambda + 3C_{3,SS}\lambda^2)^2 \\
&\quad + (C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda + C_{2,SS}\lambda^2 + C_{3,SS}\lambda^3)(2C_{2,SS} + 6C_{3,SS}\lambda)]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{3} [2(C_{1,SS} + 2C_{2,SS}\lambda + 3C_{3,SS}\lambda^2)(2C_{2,SS} + 6C_{3,SS}\lambda) + (C_{1,SS} + 2C_{2,SS}\lambda + 3C_{3,SS}\lambda^2) \\
&\quad (2C_{2,SS} + 6C_{3,SS}\lambda) + (C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda + C_{2,SS}\lambda^2 + C_{3,SS}\lambda^3) 6C_{3,SS}]_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{3} [2(C_{1,SS})(2C_{2,SS}) + (C_{1,SS})(2C_{2,SS}) + (C_{0,SS}) 6C_{3,SS}] \\
&= 2C_{1,SS}C_{2,SS} + 2C_{0,SS}C_{3,SS}, \\
A_4 &= \frac{1}{4!} \frac{d^4}{d\lambda^4} [(C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda + C_{2,SS}\lambda^2 + C_{3,SS}\lambda^3 + C_{4,SS}\lambda^4)^2]_{\lambda=0} \\
&= (C_{2,SS})^2 + 2C_{1,SS}C_{3,SS} + 2C_{0,SS}C_{4,SS} \\
&\vdots \\
A_n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [(C_{0,SS} + C_{1,SS}\lambda + C_{2,SS}\lambda^2 + C_{3,SS}\lambda^3 + C_{4,SS}\lambda^4 + \cdots + C_{n,SS}\lambda^n)^2]_{\lambda=0}.
\end{aligned}$$

De esta manera los términos C_n que conforman la solución general son:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= f(S), \\
 C_1 &= -L^{-1}R(C_0) - L^{-1}A_0 \\
 &= -\int_0^t \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + rSf'(S) - rf(S) \right] d\tau - \int_0^t \rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 d\tau \\
 &= -\left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + rSf'(S) - rf(S) \right] t - \rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 t \\
 &= -\left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + rSf'(S) - rf(S) + \rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 \right] t, \\
 C_2 &= -L^{-1}R(C_1) - L^{-1}A_1 \\
 &= \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + rSf'(S) - rf(S) + \rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 \right) \tau \right] d\tau \\
 &\quad + \int_0^t rS \frac{\partial}{\partial S} \left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + rSf'(S) - rf(S) + \rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 \right) \tau \right] d\tau \\
 &\quad - \int_0^t r \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + rSf'(S) - rf(S) + \rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 \right) \tau d\tau \\
 &\quad + \int_0^t 2\rho\sigma^2 S^3 f''(S) \frac{\partial^2}{\partial S^2} \left[\left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + rSf'(S) - rf(S) + \rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 \right) \tau \right] d\tau \\
 &= \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left[\sigma^2 f''(S) + 2\sigma^2 S f'''(S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f^{(iv)}(S) + r f''(S) + rS f'''(S) + 6\rho\sigma^2 S \right. \\
 &\quad \left. [f''(S)]^2 + 12\rho\sigma^2 S^2 f'''(S) f''(S) + 2\rho\sigma^2 S^3 [f'''(S)]^2 + 2\rho\sigma^2 S^3 f^{(iv)}(S) f''(S) \right] \tau d\tau + \\
 &\quad \int_0^t rS [\sigma^2 S f''(S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f'''(S) + rS f''(S) + 3\rho\sigma^2 S^2 [f''(S)]^2 + 2\rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2] \tau d\tau \\
 &\quad - \int_0^t r \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f''(S) + rSf'(S) - rf(S) + \rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 \right) \tau d\tau + \int_0^t 2\rho\sigma^2 S^3 f''(S) \\
 &\quad \left[\sigma^2 f''(S) + 2\sigma^2 S f'''(S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f^{(iv)}(S) + r f''(S) + rS f'''(S) + 6\rho\sigma^2 S [f''(S)]^2 + \right. \\
 &\quad \left. 12\rho\sigma^2 S^2 f'''(S) f''(S) + 2\rho\sigma^2 S^3 [f'''(S)]^2 + 2\rho\sigma^2 S^3 f^{(iv)}(S) f''(S) \right] \tau d\tau \\
 &= \left[\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 [1 + 4\rho S f''(S)] \left[\sigma^2 f''(S) + 2\sigma^2 S f'''(S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f^{(iv)}(S) + r f''(S) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. rS f'''(S) + 6\rho\sigma^2 S [f''(S)]^2 + 12\rho\sigma^2 S^2 f'''(S) f''(S) + 2\rho\sigma^2 S^3 [f'''(S)]^2 + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. 2\rho\sigma^2 S^3 f^{(iv)}(S) f''(S) \right] + r \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f''(S) - r S f'(S) + r f(S) + 2\rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \sigma^2 S^3 f'''(S) + r S^2 f''(S) + 2\rho\sigma^2 S^4 [f''(S)]^2 \right] \left. \right] \frac{t^2}{2}, \\
& \vdots
\end{aligned}$$

por lo que una solución analítica aproximada para la ecuación (5-37) tiene la forma:

$$\begin{aligned}
C \approx & f(S) - \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f''(S) + r S f'(S) - r f(S) + \rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 \right] t + \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 [1 + 4\rho S f''(S)] \right. \\
& \left[\sigma^2 f''(S) + 2\sigma^2 S f'''(S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f^{(iv)}(S) + r f''(S) + r S f'''(S) + 6\rho\sigma^2 S [f''(S)]^2 + \right. \\
& \left. 12\rho\sigma^2 S^2 f'''(S) f''(S) + 2\rho\sigma^2 S^3 [f'''(S)]^2 + 2\rho\sigma^2 S^3 f^{(iv)}(S) f''(S) \right] + r \left[\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 f''(S) - \right. \\
& \left. r S f'(S) + r f(S) + 2\rho\sigma^2 S^3 [f''(S)]^2 + \frac{1}{2} \sigma^2 S^3 f'''(S) + r S^2 f''(S) + 2\rho\sigma^2 S^4 [f''(S)]^2 \right] \left. \right] \frac{t^2}{2}.
\end{aligned}$$

□

Con lo anterior se demostró que el modelo de Black-Scholes no lineal con volatilidad:

$$\sigma^*(S, t, C_s, C_{ss}) = \frac{\sigma}{1 - \rho S \lambda(S) C_{ss}},$$

posee solución y se encontró una forma analítica aproximada de ella.

5.6. Simulaciones numéricas del modelo de Black-Scholes mediante el método de descomposición de Adomian para problemas no lineales

En este apartado se realizan simulaciones numéricas del modelo de Black-Scholes no lineal para obtener el valor de una opción de compra europea utilizando el método de descomposición de Adomian tal como se indicó en la sección anterior. A continuación se presentan algunos resultados relevantes para ciertas situaciones.

1. Sea el modelo de Black-Scholes (5-37), donde:

$$\sigma = 0,15, \quad |\rho| = 0,011, \quad r = 0, \quad f(S) = 2S + 7\sqrt{S} + \frac{7}{2}. \quad (5-43)$$

Para el cual los polinomios y los términos que conforman la solución están dados por:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{3,0625}{S^3}, & C_0 &= 2S + 7\sqrt{S} + 3,5 \\ A_1 &= \frac{-0,01722t}{S^3}, & C_1 &= -1,9687 \times 10^{-2}\sqrt{S}t + 7,57968 \times 10^{-4}t \\ A_2 &= \frac{4,8449 \times 10^{-5}t^2}{S^3}, & C_2 &= 2,7685 \times 10^{-5}\sqrt{S}t^2 + 2,1317 \times 10^{-6}t^2 \\ A_3 &= \frac{-9,0843 \times 10^{-8}t^3}{S^3}, & C_3 &= -2,5955 \times 10^{-8}\sqrt{S}t^3 - 3,9971 \times 10^{-9}t^3 \\ A_4 &= \frac{1,2774 \times 10^{-10}t^4}{S^3}, & C_4 &= 1,8249 \times 10^{-11}\sqrt{S}t^4 + 5,6209 \times 10^{-12}t^4. \end{aligned}$$

De esta manera, una solución analítica aproximada, tiene la forma:

$$\begin{aligned} C(S, t) \approx & 2S + 7\sqrt{S} + 3,5 - 1,9687 \times 10^{-2}\sqrt{S}t + 7,57968 \times 10^{-4}t + 2,7685 \\ & \times 10^{-5}\sqrt{S}t^2 + 2,1317 \times 10^{-6}t^2 - 2,5955 \times 10^{-8}\sqrt{S}t^3 - 3,9971 \times 10^{-9}t^3 \\ & + 1,8249 \times 10^{-11}\sqrt{S}t^4 + 5,6209 \times 10^{-12}t^4. \end{aligned}$$

La tabla (5-2) muestra el precio de una opción de compra para un activo con las características dadas en (5-43) y con un costo variando entre 0,1 y 3,5 unidades monetarias entre un periodo de tiempo de 3 años, además la figura (5-1) muestra la curva del precio de la opción para $T = 0,5$ y $T = 3$ años.

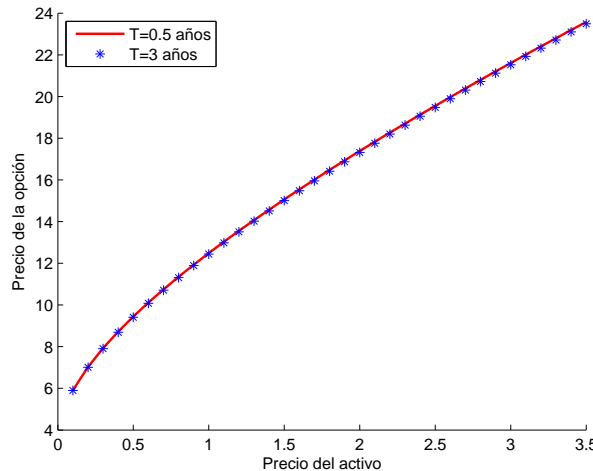


Figura 5-1: $\sigma = 0,15, \quad |\rho| = 0,011, \quad r = 0, \quad f(S) = 2S + 7\sqrt{S} + \frac{7}{2}.$

S	$T = 0,5$	$T = 1$	$T = 1,5$	$T = 2$	$T = 2,5$	$T = 3$
0,1	5,9108632	5,908137472	5,905417169	5,902702281	5,899992801	5,897288716
0,2	7,02647552	7,022463116	7,018457948	7,014459997	7,01046926	7,006485719
0,3	7,929049564	7,924049861	7,919058778	7,914076301	7,909102419	7,904137115
0,4	8,721346882	8,715514847	8,709692601	8,703880128	8,698077418	8,69228445
0,5	9,443171295	9,436605959	94,30051443	9,423507731	9,416974808	9,410452653
0,6	10,11493661	10,10770834	10,10049179	10,093287	10,0860939	10,07891252
0,7	10,74876962	10,74093169	10,73310636	10,72529362	10,71749344	10,70970583
0,8	11,35257152	11,34416614	11,33577417	11,32739557	11,31903034	11,31067845
0,9	11,93183057	11,92289223	11,91396805	11,90505799	11,89616204	11,88728019
1	12,49054268	12,48110026	12,47167269	12,46225997	12,45286205	12,44347896
1,1	13,0317245	13,02180263	13,01189628	13,00200546	12,99213011	12,98227026
1,2	13,5577196	13,54733962	13,53697582	13,52662817	13,51629665	13,50598124
1,3	14,07039178	14,05957242	14,04876983	14,03798404	14,02721498	14,01646266
1,4	14,57125212	14,56000997	14,5487852	14,53757779	14,52638773	14,51521499
1,5	15,06154601	15,04989592	15,03826377	15,02664959	15,01505329	15,00347491
1,6	15,54231424	15,5302696	15,51824347	15,50623584	15,49424665	15,48227592
1,7	16,01443722	16,00201018	15,98960218	15,97721321	15,96484323	15,95249225
1,8	16,47866752	16,46586916	16,45309036	16,44033113	16,42759141	16,41487119
1,9	16,9356545	16,92249499	16,90935558	16,89623623	16,88313689	16,87005756
2	17,38596307	17,37245181	17,35896115	17,34549103	17,33204143	17,31861232
2,1	17,83008831	17,816234	17,80240075	17,78858854	17,77479732	17,76102708
2,2	18,26846702	18,25427772	18,24010996	18,22596371	18,21183891	18,19773557
2,3	18,70148684	18,6869701	18,67247534	18,65800256	18,64355167	18,62912271
2,4	19,12949372	19,11465658	19,09984185	19,08504956	19,07027962	19,05553205
2,5	19,55279791	19,53764697	19,52251889	19,50741368	19,49233126	19,47727165
2,6	19,97167894	19,95622041	19,94078518	19,92537325	19,90998454	19,89461906
2,7	20,38638965	20,3706294	20,35489287	20,33918005	20,32349088	20,30782539
2,8	20,79715971	20,78110327	20,76507097	20,74906279	20,73307869	20,71711866
2,9	21,20419845	21,18785107	21,17152822	21,15522993	21,13895611	21,12270677
3	21,60769727	21,59106392	21,57445551	21,55787205	21,54131346	21,52477976
3,1	22,00783178	21,99091718	21,97402794	21,95716401	21,94032538	21,92351201
3,2	22,40476351	22,38757218	22,37040657	22,3532667	22,33615247	22,31906393
3,3	22,79864149	22,7811777	22,76374004	22,74632847	22,72894295	22,71158348
3,4	23,18960352	23,17187138	23,15416575	23,13648659	23,11883384	23,10120752
3,5	23,57777733	23,55978075	23,54181106	23,5238682	23,50595214	23,48806286

Tabla 5-2: Modelo de Black-Scholes para: $\sigma = 0,15$, $|\rho| = 0,011$, $r = 0$, $f(S) = 2S + 7\sqrt{S} + \frac{7}{2}$.

2. El modelo de Black-Scholes (5-37) en el cual:

$$\sigma = 0,033, \quad \rho = -0,02, \quad r = 0,04, \quad f(S) = 3S + 125\sqrt{S} + 75. \quad (5-44)$$

Tiene como polinomios de Adomian:

$$A_0 = \frac{976,5625}{S^3}$$

$$A_1 = \frac{38,7966t}{S^3}$$

$$A_2 = \frac{0,7706t^2}{S^3}$$

$$A_3 = \frac{1,0205 \times 10^{-2}t^3}{S^3}$$

$$A_4 = \frac{1,0135 \times 10^{-4}t^4}{S^3},$$

y los primeros términos que conforman la solución son:

$$C_0 = 3S + 125\sqrt{S} + 75$$

$$C_1 = -1,7015 \times 10^{-2}\sqrt{S}t + 4 \times 10^{-2}S \left(3 + \frac{62,5}{\sqrt{S}} \right) t - 6,1269 \times 10^{-2}$$

$$C_2 = 4 \times 10^{-2}t + 0,5 \left[-3,3799 \times 10^{-4}\sqrt{S} + 4 \times 10^{-2}S \left(\frac{1,2414}{\sqrt{S}} + 0,12 \right) \right] t^2 + 4,2249 \times 10^{-4}t^2$$

$$C_3 = 4 \times 10^{-2}t + 0,3333 \left[-3,3569 \times 10^{-6}\sqrt{S} + 2 \times 10^{-2}S \left(\frac{2,4660 \times 10^{-2}}{\sqrt{S}} + 4,8 \times 10^{-3} \right) \right] t^3 + 5,5949 \times 10^{-6}t^3$$

$$C_4 = -4 \times 10^{-2}t + 0,25 \left[-2,2227 \times 10^{-8}\sqrt{S} + 1,333 \times 10^{-2}S \left(\frac{2,4492 \times 10^{-4}}{\sqrt{S}} + 9,6 \times 10^{-5} \right) \right] t^4 + 5,5568 \times 10^{-8}t^4.$$

Con los cuales se obtiene la solución analítica aproximada:

$$C(S, t) \approx 3S + 125\sqrt{S} + 75 - 1,7015 \times 10^{-2}\sqrt{S}t + 4 \times 10^{-2}S \left(3 + \frac{62,5}{\sqrt{S}} \right) t - 6,126 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-2}t + 0,5 \left[-3,379 \times 10^{-4}\sqrt{S} + 4 \times 10^{-2}S \left(\frac{1,241}{\sqrt{S}} + 0,12 \right) \right] t^2$$

$$\begin{aligned}
& + 4,2249 \times 10^{-4}t^2 + 4 \times 10^{-2}t + 0,33333 \left[- 3,3569 \times 10^{-6}\sqrt{S} + 2 \right. \\
& \times 10^{-2}S \left(\frac{2,4660 \times 10^{-2}}{\sqrt{S}} + 4,8 \times 10^{-3} \right) \left. \right] t^3 + 5,5949 \times 10^{-6}t^3 - 4 \times 10^{-2}t \\
& + 0,25 \left[- 2,222 \times 10^{-8}\sqrt{S} + 1,333 \times 10^{-2}S \left(\frac{2,449 \times 10^{-4}}{\sqrt{S}} + 9,6 \times 10^{-5} \right) \right] t^4 \\
& + 5,5568 \times 10^{-8}t^4.
\end{aligned}$$

De forma similar a la simulación anterior, la tabla (5-3) muestra el valor de una opción de compra europea para un activo con las características dadas en (5-44) y con un costo variando entre 0,1 y 3,5 unidades monetarias entre un periodo de tiempo de 3 años.

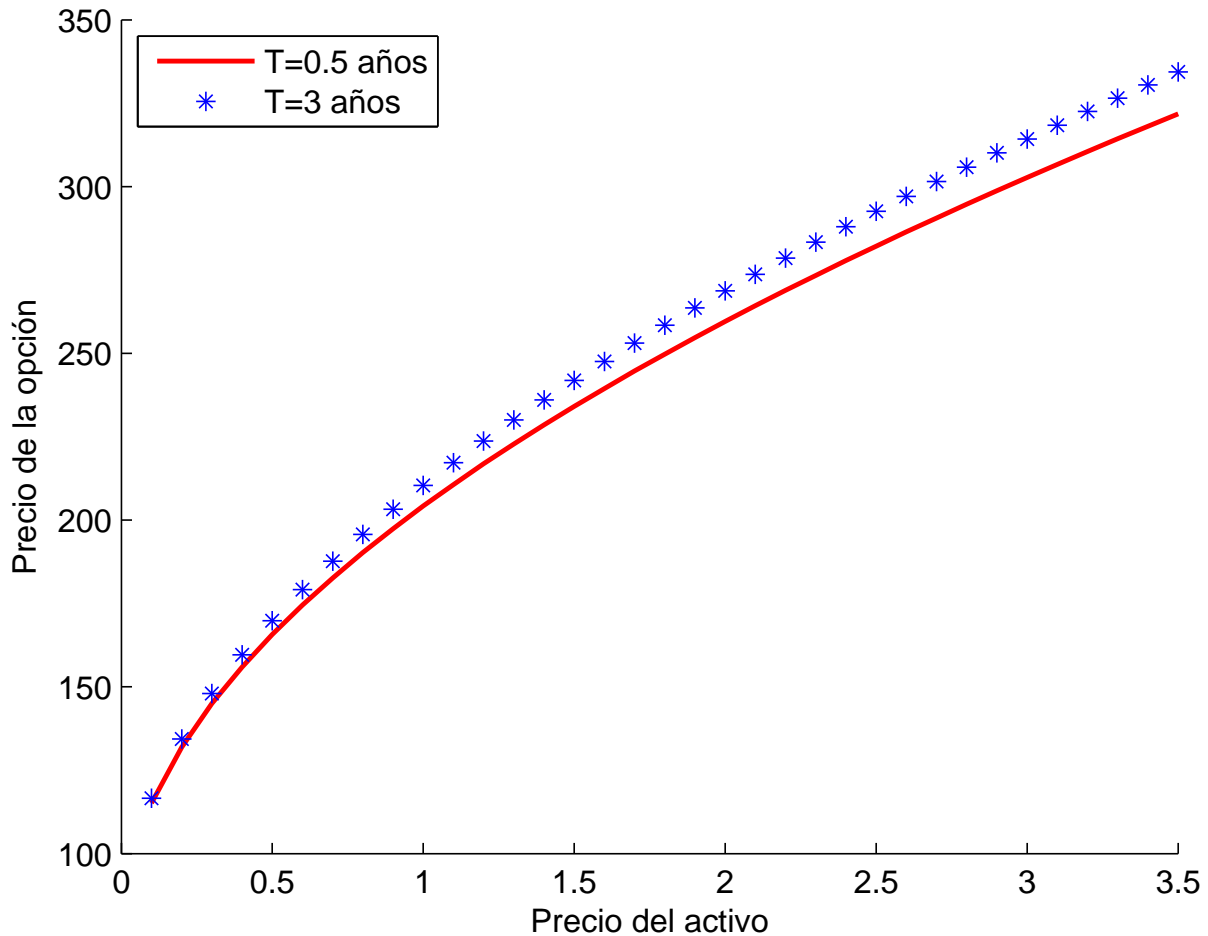


Figura 5-2: $\sigma = 0,033$, $\rho = -0,02$, $r = 0,04$, $f(S) = 3S + 125\sqrt{S} + 75$.

S	$T = 0,5$	$T = 1$	$T = 1,5$	$T = 2$	$T = 2,5$	$T = 3$
0,1	115,1185531	115,4129116	115,7115923	116,0146417	116,3221072	116,6340365
0,2	131,9612702	132,426871	132,8985663	133,3764218	133,8605039	134,3508796
0,3	144,9563537	145,5547918	146,1607133	146,7741996	147,3953318	148,0241931
0,4	155,9597553	156,671151	157,3912207	158,1200591	158,8577604	159,6044212
0,5	165,6903626	166,5020115	167,3233983	168,1546293	168,9958113	169,8470529
0,6	174,5168647	175,4197425	176,3333321	177,2577505	178,1931161	179,1395482
0,7	182,6582799	183,6455484	184,6444345	185,655065	186,6775691	187,7120765
0,8	190,2573107	191,3235563	192,4022708	193,4935914	194,5976562	195,7146059
0,9	197,4130786	198,5538769	199,7079514	200,8754486	202,0565162	203,2513043
1	204,1977534	205,4094003	206,6350938	207,8749894	209,1292438	210,398016
1,1	210,6658175	211,9451529	213,2392736	214,5483437	215,8725291	217,2119974
1,2	216,8595985	218,2038844	219,5636673	220,9391194	222,3304151	223,7377308
1,3	222,8127565	224,2195914	225,6426106	227,0819948	228,5379266	230,0105904
1,4	228,5525841	230,0198385	231,5039437	233,0050878	234,5234617	236,0592583
1,5	234,1015735	235,6273427	237,1706098	238,731571	240,3104246	241,9073716
1,6	239,4785224	241,0610891	242,6617839	244,2808103	245,9183746	247,5746855
1,7	244,6993314	246,337137	247,9936853	249,6691873	251,3638565	253,0779095
1,8	249,7775925	251,4692144	253,1801792	254,9107053	256,6610138	258,4313282
1,9	254,7250338	256,4691661	258,2332286	260,017447	261,8220492	263,6472667
2	259,5518577	261,3472965	263,1632408	264,9999232	266,8575791	268,7364466
2,1	264,2670063	266,1126369	267,9793373	269,8673467	271,7769078	273,7082656
2,2	268,8783678	270,7731541	272,6895643	274,627844	276,588243	278,571013
2,3	273,3929441	275,3359202	277,3010644	279,288629	281,2988705	283,3320479
2,4	277,8169826	279,8072449	281,8202101	283,8561381	285,9152911	287,9979354
2,5	282,1560873	284,192788	286,2527183	288,3361444	290,4433355	292,5745647
2,6	286,4153058	288,4976475	290,6037375	292,7338486	294,8882565	297,0672407
2,7	290,5992053	292,7264363	294,8779267	297,0539559	299,2548058	301,4807627
2,8	294,7119338	296,8833434	299,0795168	301,3007393	303,5472995	305,8194902
2,9	298,7572716	300,9721874	303,2123645	305,4780941	307,7696718	310,087396
3	302,738676	304,9964598	307,2799958	309,5895819	311,9255194	314,2881132
3,1	306,6593184	308,9593636	311,2856462	313,6384699	316,0181423	318,4249749
3,2	310,5221163	312,8638457	315,2322915	317,6277639	320,0505766	322,5010471
3,3	314,3297608	316,7126237	319,1226771	321,5602368	324,0256223	326,5191578
3,4	318,0847409	320,5082119	322,9593417	325,4384523	327,9458692	330,4819228
3,5	321,7893638	324,25294	326,7446386	329,2647876	331,813718	334,3917666

Tabla 5-3: Modelo de Black-Scholes para: $\sigma = 0,033$, $\rho = -0,02$, $r = 0,04$, $f(S) = 3S + 125\sqrt{S} + 75$.

3. Sea el modelo de Black-Scholes (5-37), donde:

$$\sigma = 0,2, \quad |\rho| = 0,01, \quad r = 0, \quad f(S) = S + 18\sqrt{S} + 1. \quad (5-45)$$

Conforme con el método de descomposición de Adomian, los polinomios y los términos que conforman la solución están dados por:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{20,25}{S^3}, & C_0 &= S + 18\sqrt{S} + 1 \\ A_1 &= \frac{-0,2025t}{S^3}, & C_1 &= -0,09\sqrt{S}t + 0,0081t \\ A_2 &= \frac{1,0125 \times 10^{-3}t^2}{S^3}, & C_2 &= 2,25 \times 10^{-4}\sqrt{S}t^2 + 4,05 \times 10^{-5}t^2 \\ A_3 &= \frac{-3,375 \times 10^{-6}t^3}{S^3}, & C_3 &= -3,75 \times 10^{-7}\sqrt{S}t^3 - 1,35 \times 10^{-7}t^3 \\ A_4 &= \frac{8,437 \times 10^{-9}t^4}{S^3}, & C_4 &= 4,687 \times 10^{-10}\sqrt{S}t^4 + 3,375 \times 10^{-10}t^4. \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} C(S, t) \approx & S + 18\sqrt{S} + 1 - 0,09\sqrt{S}t + 0,0081t + 2,25 \times 10^{-4}\sqrt{S}t^2 + 4,05 \times 10^{-5}t^2 \\ & - 3,75 \times 10^{-7}\sqrt{S}t^3 - 1,35 \times 10^{-7}t^3 + 4,687 \times 10^{-10}\sqrt{S}t^4 + 3,375 \times 10^{-10}t^4. \end{aligned}$$

La tabla (5-4) muestra el precio de una opción de compra para un activo con las características dadas en (5-43) y con un costo variando entre 0,1 y 3,5 unidades monetarias entre un periodo de tiempo de 3 años, además la figura (5-3) muestra la curva del precio de la opción para $T = 0,5$ y $T = 3$.

S	$T = 0,5$	$T = 1$	$T = 1,5$	$T = 2$	$T = 2,5$	$T = 3$
0,1	6,781947	6,771851	6,761809	6,751823	6,741892	6,732016
0,2	9,233805	9,217836	9,201937	9,186108	9,170349	9,154659
0,3	11,13845	11,11797	11,09758	11,07727	11,05704	11,03689
0,4	12,75983	12,73556	12,71138	12,68729	12,66328	12,63937
0,5	14,2002	14,17258	14,14506	14,11764	14,09031	14,06309
0,6	15,51199	15,48134	15,4508	15,42037	15,39004	15,35982
0,7	16,72634	16,69291	16,65959	16,62639	16,5933	16,56033
0,8	17,86355	17,82753	17,79163	17,75586	17,7202	17,68466
0,9	18,93772	18,89927	18,86095	18,82275	18,78468	18,74673
1	19,95912	19,91836	19,87775	19,83726	19,7969	19,75668
1,1	20,93548	20,89254	20,84974	20,80708	20,76455	20,72216
1,2	21,87284	21,82781	21,78292	21,73818	21,69357	21,64911
1,3	22,77597	22,72894	22,68205	22,63531	22,58872	22,54227
1,4	23,64877	23,5998	23,55099	23,50233	23,45382	23,40546
1,5	24,49442	24,4436	24,39293	24,34241	24,29206	24,24186
1,6	25,31561	25,26298	25,21052	25,15821	25,10607	25,05408
1,7	26,11459	26,06022	26,00601	25,95197	25,89809	25,84438
1,8	26,8933	26,83723	26,78133	26,7256	26,67004	26,61466
1,9	27,6534	27,59568	27,53814	27,48077	27,42358	27,36656
2	28,39634	28,33702	28,27788	28,21892	28,16013	28,10152
2,1	29,12341	29,06252	29,00182	28,94129	28,88095	28,82079
2,2	29,83571	29,7733	29,71107	29,64902	29,58716	29,52549
2,3	30,53425	30,47034	30,40662	30,34309	30,27975	30,21659
2,4	31,21991	31,15454	31,08936	31,02438	30,95958	30,89498
2,5	31,8935	31,82669	31,76008	31,69367	31,62746	31,56144
2,6	32,55572	32,48751	32,4195	32,35169	32,28409	32,21668
2,7	33,20723	33,13764	33,06826	32,99908	32,93011	32,86133
2,8	33,84862	33,77768	33,70695	33,63643	33,56611	33,496
2,9	34,48042	34,40815	34,3361	34,26425	34,19262	34,12119
3	35,10313	35,02956	34,9562	34,88306	34,81013	34,73741
3,1	35,7172	35,64234	35,56771	35,49329	35,41908	35,34509
3,2	36,32304	36,24692	36,17103	36,09535	36,01989	35,94465
3,3	36,92104	36,84368	36,76654	36,68963	36,61294	36,53647
3,4	37,51155	37,43296	37,3546	37,27647	37,19856	37,12088
3,5	38,09489	38,0151	37,93554	37,85621	37,7771	37,69822

Tabla 5-4: Modelo de Black-Scholes para: $\sigma = 0,2$, $|\rho| = 0,01$, $r = 0$, $f(S) = S + 18\sqrt{S} + 1$.

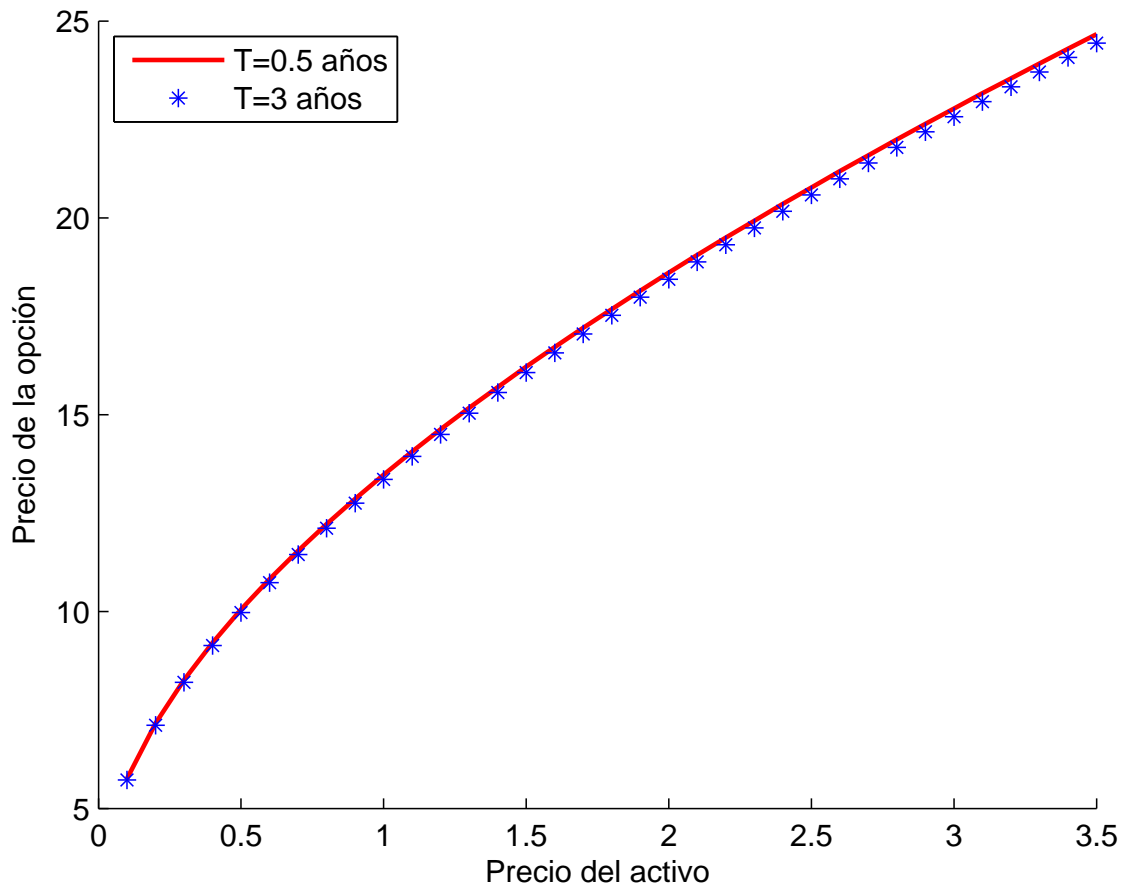


Figura 5-3: $\sigma = 0,2$, $|\rho| = 0,01$, $r = 0$, $f(S) = S + 18\sqrt{S} + 1$.

En las simulaciones presentadas anteriormente se puede apreciar como el método converge rápidamente, por ejemplo, en la primera y tercera simulación se puede apreciar que en ambos casos el cuarto término que conforma a la solución posee coeficientes de orden 10^{-10} . En la segunda simulación la convergencia aunque no es tan rápida si es considerable, esto se debe a la elección de la condición inicial. La programación del algoritmo es bastante sencilla por lo que el modelo de Black-Scholes no lineal junto con método de descomposición de Adomian constituyen dos valiosas herramientas para la valorización de opciones.

6 Conclusiones y recomendaciones

6.1. Conclusiones

A través del desarrollo de este trabajo se generaron resultados de especial interés, enmarcados en el campo de las ecuaciones diferenciales parciales, puesto que se mostró la efectividad de dos métodos distintos a las teorías convencionales para encontrar soluciones de estas, sin necesidad de utilizar métodos restrictivos como la linealización o discretización que hicieran perder información o alterar el comportamiento físico en el caso de modelación. También en el campo de la economía se presenta un estudio detallado de un modelo de gran importancia en esta área y se encontraron nuevas soluciones de este tanto para el caso lineal como el no lineal.

De esta forma, algunos aportes de relevancia que brinda este trabajo son:

- Se demostró el teorema que generaliza el método de Harper para ecuaciones de tipo parabólico.
- Se encontró mediante el método de descomposición de Adomian la solución de la ecuación diferencial parcial lineal, unidimensional y dependiente del tiempo sujeta a una condición inicial o condición en la frontera
- Se mostró la eficiencia de los métodos de Harper y Adomian para resolver ecuaciones diferenciales parciales lineales al encontrar la solución de la ecuación de Black-Scholes con volatilidad constante.
- Se encontró una solución analítica aproximada de la ecuación no lineal que representa el modelo de Black-Scholes generalizado, es decir aquel que considera la volatilidad como una función que depende del tiempo, del precio del subyacente y de la prima de la opción.
- El método de descomposición de Adomian resultó una técnica eficiente para resolver la ecuación que representa el modelo de Black-Scholes, puesto que proporcionó una solución analítica aproximada para la cual simulaciones numéricas muestran que está converge rápidamente, por lo que el modelo y técnica de solución constituyen dos herramientas valiosas para la valorización una opción de compra europea.

Bibliografía

- [1] ADOMIAN, G: The decomposition method. En: *Solving Frontier Problems of Physics Kluwer, Boston, MA* (1994)
- [2] ADOMIAN, George ; BELLOMO, N ; RIGANTI, R: Semilinear stochastic systems: Analysis with the method of the stochastic Green's function and application in mechanics. En: *Journal of mathematical analysis and applications* 96 (1983), Nr. 2, p. 330–340
- [3] BAKSTEIN, David ; HOWISON, Sam: A non-arbitrage liquidity model with observable parameters for derivatives. En: *Mathematical Finance* (2003)
- [4] BLACK, Fischer ; SCHOLES, Myron: The pricing of options and corporate liabilities. En: *The journal of political economy* (1973), p. 637–654
- [5] BOHNER, Martin ; ZHENG, Yao: On analytical solutions of the Black–Scholes equation. En: *Applied Mathematics Letters* 22 (2009), Nr. 3, p. 309–313
- [6] ECONOMIA, E d.: La gran Enciclopedia de la Economía. En: *Obtenido de <http://www.economia48.com/spa/d/covarianza/covarianza.htm>* (2009)
- [7] EINSTEIN, Albert: *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Courier Corporation, 1956
- [8] ESEKON, Joseph E.: Analytic solution of a nonlinear Black-Scholes equation. En: *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 82 (2013), Nr. 4, p. 547–555
- [9] EVANS, Lawrence C.: Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer. En: *Current developments in mathematics* (1997), p. 65–126
- [10] FREY, Rüdiger: Market illiquidity as a source of model risk in dynamic hedging. En: *Model Risk* (2000), p. 125–136
- [11] GARCÍA ESTÉVEZ, Pablo ; LAMOTHE FERNÁNDEZ, Prosper: La volatilidad implícita en las opciones sobre índices bursátiles. Propuesta de metodología de estimación. En: *Análisis Financiero* (2005), Nr. DO CUATRIMESTRE (98, p. 6–14
- [12] HARPER, JF [u. a.]: Reducing parabolic partial differential equations to canonical form. En: *European Journal of Applied Mathematics* 5 (1994), Nr. 2, p. 159–164

-
- [13] HULL, John C John C. ; VALDÉS, P ; VALDÉS, RodrigoRodrigo ; MENESES, AlejandroAlejandro M. ; BUSTAMANTE, AlejandroERIZE ; MIRO, ENRIQUE ; ERIZE, DANIEL A E. ; BUSTAMANTE, Alejandro ; MIRÓ, Daniel ; BUSTAMANTE, AlejandroMIRO [u. a.]: *Introducción a los mercados de futuros y opciones*. Pearson Educación,, 2009
- [14] LESNIC, Daniel: The decomposition method for linear, one-dimensional, time-dependent partial differential equations. En: *International journal of mathematics and mathematical sciences* 2006 (2006)
- [15] LIU, Hong ; YONG, Jiongmin: Option pricing with an illiquid underlying asset market. En: *Journal of Economic Dynamics and Control* 29 (2005), Nr. 12, p. 2125–2156
- [16] MARTÍNEZ, Francisco V.: *Riesgos financieros y económicos*. Cengage Learning Editores, 2006
- [17] RODRIGO, Marianito R. ; MAMON, Rogemar S.: An alternative approach to solving the Black–Scholes equation with time-varying parameters. En: *Applied Mathematics Letters* 19 (2006), Nr. 4, p. 398–402
- [18] SHINGAREVA, Inna ; CELAYA, Carlos L.: Método de descomposición de Adomian: soluciones analíticas aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. En: *Memorias de la XXII Semana de Investigación Nivel: Superior y Docencia en Matemáticas* (2012), p. 21–27