Szerző:

Dr. Kézi Csaba Gábor

Az elektronikus tananyag elkészítését a Pallas Athéné Domus Sapientiae Alapítvány támogatta.

Szakmai lektor: Dr. Kocsis Imre Tibor

ISBN 978-963-490-061-0

Kiadó: Debreceni Egyetem, Műszaki Kar

(Pallas Athéné Domus Sapientiae Alapítvány támogatásával)

Többváltozós függvények és mátrixok alkalmazásai a közgazdaságtanban

Dr. Kézi Csaba Gábor

PADS

PALLAS ATHÉNÉ
DOMUS SAPIENTIAE
ALAPÍTVÁNY

Előszó

Az oktatási segédanyag elkészülését a Pallas Athéné Domus Sapientiae Alapítvány támogatta.

A tananyag folytatása a Pallas Athéné Domus Animae Alapítvány által támogatott „Differenciál- és integrálszámítás gazdasági alkalmazásokkal” című tananyagnak.

A tananyag célja kettős. Az egyik cél az, hogy segítse a gazdasági képzésben részt vevő hallgatók Gazdasági matematika II. vizsgájára való felkészítését. Tematikájában, felépítésében jól illeszkedik a Gazdasági matematika II. nevű tantárgyhoz, így ahhoz akár tankönyvként is használható.

A jegyzet két fő fejezetet tartalmaz. Az egyik fejezet a mátrixok és lineáris egyenletrendszerek témakört dolgozza fel, míg a másik fejezet a többváltozós függvények gazdasági alkalmazásaival ismerteti meg az olvasót.

Minden fejezet rövid elméleti összefoglalóval kezdődik, melyet részletesen kidolgozott feladatok követnek. A feladatok között megtalálhatóak az egyszerűbb típusfeladatok, melyek megoldásával kellő ismeretet szerezhetnek a hallgatók az adott témakör elsajátításához, valamint megtalálhatóak a feladatok között a bonyolultabbak, összetettebbek is, azok számára, akik mélyebben el szeretnének merülni az adott témakörben.

A tananyag másik célja, hogy megalapozza azokat a matematikai ismereteket, amelyekre a hallgatóknak a későbbi félévek során hallgatott tárgyak során szüksége lesz. Emiatt a jegyzet sok olyan feladatot is tartalmaz, amely ilyen irányú alkalmazásokra helyezi a hangsúlyt.

A tananyag összesen 134 részletesen kidolgozott feladatot tartalmaz.

A segédanyag újszerűsége abban rejlik, hogy a precízen megfogalmazott matematikai ismeretek mellett a megfelelő gazdasági alkalmazásokat is tartalmazza.

A jegyzet lektorálásáért köszönettel tartozom Dr. Kocsis Imre tanszékvezető

főiskolai tanárnak, aki hasznos észrevételekkel segítette munkámat.

Köszönettel tartozom Édesanyámnak és Páromnak, akik mindig mellettem állnak és segítenek.

Dr. Kézi Csaba Gábor
főiskolai docens

1. fejezet

Mátrixok a közgazdaságtanban

1.1. A mátrixokkal kapcsolatos alapfogalmak

Elméleti összefoglaló

1.1.1. **Definíció.** Legyenek m és n pozitív egész számok és $a_{ij} \in \mathbb{R}$ minden $i \in \{1\,; 2;\, \ldots;\, m\}$ és minden $j \in \{1;\, 2;\, \ldots;\, n\}$ esetén. Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

táblázatot $m \times n$*-es* vagy $m \times n$ *típusú mátrix*nak nevezzük. A mátrixokat általában latin nagybetűkkel, míg a mátrix elemeit két indexű latin kisbetűkkel szokás jelölni. Az első index az úgynevezett *sorindex*, a második index az *oszlopindex*. Az $m \times n$-es mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{m\times n}$-el jelöljük.

Azt, hogy az $m \times n$ típusú A mátrix az a_{ij} elemekből áll, úgy is jelöljük, hogy $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Ha egyértelmű (vagy nem lényeges) a mátrix sorainak és oszlopainak a száma, akkor az $A = (a_{ij})$ jelölést is alkalmazzuk.

1.1.2. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

táblázat egy 4×3 típusú mátrix, mert 4 sora és 3 oszlopa van. Például az A mátrix a_{31} eleme: $a_{31} = 3$.

1.1.3. **Definíció.** Legyenek m és n pozitív egész számok, amelyekre $m \leq n$ teljesül. Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrix *főátlójának* vagy más szóval *fődiagonálisának* nevezzük az

$$\big(a_{11};\, a_{22};\, \ldots;\, a_{mm}\big)$$

rendezett szám m-est. Az

$$a_{11};\ a_{22};\ \ldots;\ a_{mm}$$

elemeket *főátlóbeli elemek*nek mondjuk.
Az

$$\left(a_{m1};\ a_{(m-1);2};\ \ldots;\ a_{1m}\right)$$

rendezett szám m-est *mellékátló*nak hívjuk. Az

$$a_{m1};\ a_{(m-1);2};\ \ldots;\ a_{1m}$$

elemeket *mellékátlóbeli elemek*nek nevezzük.

1.1.4. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

mátrix főátlója $(1;\ 5;\ 9)$, mellékátlója $(7;\ 5;\ 3)$.

1.1.5. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix *négyzetes* vagy más szóval *kvadratikus*, ha a sorainak és oszlopainak a száma megegyezik. Egy négyzetes mátrix sorainak (oszlopainak) a számát a mátrix *rend*jének is szokás nevezni.

1.1.6. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix egy 2×2 típusú vagy más szóval másodrendű négyzetes mátrix.

1.1.7. **Definíció.** Egy $1 \times n$ típusú mátrixot *sorvektor*nak vagy *sormátrix*nak, míg egy $n \times 1$ típusú mátrixot *oszlopvektor*nak vagy *oszlopmátrix*nak is nevezünk.

1.1.8. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix egy sorvektor, a

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mátrix egy oszlopvektor.

1.1.9. **Definíció.** *Zérusmátrixok*nak hívjuk az olyan mátrixokat, amelyeknek minden eleme nulla .

1.1.10. **Példa.** Az
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
mátrix a 2×2-es zérusmátrix.

1.1.11. **Definíció.** Az olyan $n \times n$ típusú mátrixot, melynek főátlóbeli elemei egyesek és az összes többi eleme nulla *n-edrendű egységmátrix*nak nevezzük. Jele: E_n.

Megjegyezzük, hogy ha az egységmátrix rendje egyértelmű, akkor az E_n jelölés helyett egyszerűen az E jelölést használjuk.

1.1.12. **Példa.** A harmadrendű egységmátrix:
$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.13. **Definíció.** Az olyan négyzetes mátrixot, amelynek főátlóján kívül minden eleme zérus *diagonális mátrix*nak vagy *diagonálmátrix*nak nevezzük .

1.1.14. **Példa.** Az
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
mátrix egy 3×3-as diagonális mátrix.

1.1.15. **Megjegyzés.** Az egységmátrix olyan diagonális mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme 1-es.

1.1.16. **Definíció.** Két mátrix *egyenlő*, ha a megfelelő helyen lévő elemeik megegyeznek.

1.1.17. **Definíció.** Egy mátrix *transzponált*ján a sorainak és oszlopainak felcserélésével kapott mátrixot értjük, azaz ha $A = (a_{ij})$, akkor a transzponáltja az $A^T = (a_{ji})$ mátrix.

1.1.18. **Megjegyzés.** Egy $m \times n$ típusú mátrix transzponáltja $n \times m$ típusú mátrix.

1.1.19. **Példa.** Az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltja az
$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

mátrix.

1.1.20. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy $n \times n$-es mátrix *szimmetrikus*, ha teljesül, hogy $A = A^T$.

1.1.21. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix szimmetrikus, mert

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

így $A = A^T$.

1.1.22. **Definíció.** Ha egy négyzetes mátrix főátló alatti elemei nullák, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix *felső háromszög alakú* vagy *felső trianguláris*.

Egy mátrix *alsó háromszög alakú* vagy *alsó trianguláris*, ha a főátló feletti elemei nullák.

1.1.23. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrix felső háromszög alakú, a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix alsó háromszög alakú.

1.1.24. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix *trapéz alakú* vagy *lépcsős alakú*, ha a főátló alatti elemei nullák.

1.1.25. **Példa.** Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix trapéz alakú.

Kidolgozott feladatok

1. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 7 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixot!

a) Adjuk meg az A mátrix a_{12} és a_{21} elemeit!
b) Adjuk meg az A mátrix típusát!
c) Határozzuk meg az A mátrix főátlóját!
d) Határozzuk meg az A mátrix mellékátlóját!
e) Négyzetes-e az A mátrix?
f) Felső háromszög alakú-e az A mátrix?
g) Alsó háromszög alakú-e az A mátrix?

Megoldás:

a) Az A mátrix a_{12} eleme az első sor második eleme, azaz $a_{12} = 2$. Az a_{21} elem a második sor első eleme, azaz $a_{21} = 3$.
b) A mátrixnak 4 sora és 4 oszlopa van, így 4×4 típusú.
c) Az A mátrix főátlója: $(1; 7; 3; 0)$.
d) Az A mátrix mellékátlója: $(1; 2; 0; 3)$.
e) A mátrix négyzetes, mert a sorainak száma és oszlopainak száma megegyezik.
f) A mátrix nem felső háromszög alakú, mert nem teljesül az, hogy a főátló „alatt” minden elem 0.
g) A mátrix nem alsó háromszög alakú, mert nem teljesül az, hogy a főátló „fölött” minden elem 0.

2. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixot!

a) Adjuk meg az A mátrix a_{11} és a_{12} elemeit!
b) Adjuk meg az A mátrix típusát!
c) Határozzuk meg az A mátrix főátlóját!
d) Határozzuk meg az A mátrix mellékátlóját!
e) Négyzetes-e az A mátrix?

f) Felső háromszög alakú-e az A mátrix?

g) Alsó háromszög alakú-e az A mátrix?

Megoldás:

a) Az A mátrix a_{11} eleme az első sor első eleme, azaz $a_{11} = 1$. Az a_{12} elem az első sor második eleme, tehát $a_{12} = 4$.

b) A mátrixnak 3 sora és 3 oszlopa van, így 3×3 típusú.

c) Az A mátrix főátlója: $(1; 3; 2)$.

d) Az A mátrix mellékátlója: $(0; 3; 1)$.

e) A mátrix négyzetes, mert a sorainak száma és oszlopainak száma megegyezik.

f) A mátrix felső háromszög alakú, mert a főátló „alatt” minden elem 0.

g) A mátrix nem alsó háromszög alakú, mert nem teljesül az, hogy a főátló „fölött” minden elem 0.

3. **Feladat.** Adjuk meg azt a 3×3 típusú diagonális mátrixot, amelyre $a_{ii} = i^3$ minden $i \in \{1; 2; 3\}$ esetén. Szimmetrikus-e a mátrix?

Megoldás:

A diagonális mátrix definíciója szerint a főátlón kívüli elemek mindegyike zérus. A keresett mátrix tehát:

$$A = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

Mivel $A^T = A$, ezért a mátrix szimmetrikus.

4. **Feladat.** Adjuk meg azt a 3×3 típusú A mátrixot, amelyre $a_{ij} = i \cdot j$ teljesül minden $i \in \{1; 2; 3\}$ és $j \in \{1; 2; 3\}$ esetén.

Megoldás:

A keresett mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. **Feladat.** Adjuk meg azt a 3×3-as mátrixot, amelyre $a_{ij} = i^2 + j^2$ teljesül minden $i \in \{1; 2; 3\}$ és $j \in \{1; 2; 3\}$ esetén.

<u>**Megoldás**</u>:

A keresett mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1^2+1^2 & 1^2+2^2 & 1^2+3^2 \\ 2^2+1^2 & 2^2+2^2 & 2^2+3^2 \\ 3^2+1^2 & 3^2+2^2 & 3^2+3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 5 & 8 & 13 \\ 10 & 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

6. **Feladat.** Adjuk meg a 3×3-as zérusmátrixot!

<u>**Megoldás**</u>:

A 3×3-as zérusmátrix:

$$O_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. **Feladat.** Adjuk meg az x és y valós számokat úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & y \end{pmatrix}$$

mátrixok egyenlőek legyenek!

<u>**Megoldás**</u>:

Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő elemeik egyenlőek, így $x = 7$ és $y = -1$.

8. **Feladat.** Adjuk meg az x és y valós számokat úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & x\cdot y \end{pmatrix}$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

mátrixok egyenlőek legyenek!

<u>**Megoldás**</u>:

Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő elemeik egyenlőek, így teljesülnie kell az

$$x + y = 6$$
$$5 + z = 5$$
$$x \cdot y = 8$$

egyenletrendszernek. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 0$. Az első egyenletből kifejezzük az y ismeretlent:

$$x = 6 - y.$$

Ezt behelyettesítjük a harmadik egyenletbe:

$$(6 - y) \cdot y = 8.$$

A zárójel felbontása után azt kapjuk, hogy

$$6y - y^2 = 8 \qquad \Rightarrow \qquad y^2 - 6y + 8 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletével

$$y_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

adódik, így $y_1 = 4$, illetve $y_2 = 2$. Ezeket behelyettesítve az $x = 6 - y$ egyenletbe azt kapjuk, hogy $x_1 = 2$, illetve $x_2 = 4$.

9. **Feladat.** Adjuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix transzponáltját!

Megoldás:

Egy mátrix transzponáltja a sorok és oszlopok felcserélésével kapott mátrix:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

10. **Feladat.** Szimmetrikus-e az $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ mátrix?

Megoldás:

Mivel az A mátrix transzponáltja:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

ezért $A^T = A$, így az A mátrix szimmetrikus.

11. **Feladat.** Tekintsünk egy olyan áruházi láncot, amelynek 4 üzlete van. Az üzleteket jelölje U_1, U_2, U_3 és U_4. Minden üzletben 6 különböző fajtájú terméket árulnak. Ezeket a termékeket jelölje T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 és T_6. Jelölje az A mátrix a_{ij} eleme az U_i üzletben a T_j termék eladásából származó bevételt egy adott hónapban. Az A mátrix az alábbi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

A mátrixban szereplő értékeket millió forintban értjük.

a) Adjuk meg a mátrix a_{12} elemét! Mit reprezentál ez az érték?
b) Határozzuk meg az A mátrix transzponáltját! Mit mutatnak meg a transzponált mátrix sorai?

Megoldás:

a) Az A mátrix első sorának második eleme $a_{12} = 2$, ami azt jelenti, hogy az U_1 üzletben a T_2 termékből származó bevétel 2 millió forint volt a vizsgált hónapban.

b) Az A mátrix transzponáltja

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

A transzponált mátrix sorai megmutatják, hogy az egyes termékekből a vizsgált hónapban mennyi volt a bevétel.

12. **Feladat.** Adjuk meg az x, y és z valós számokat úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ x & 4 & z \\ y & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix szimmetrikus legyen!

Megoldás:

Az A mátrix transzponáltja

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & z & 1 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix szimmetrikus, ha $A = A^T$, azaz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ x & 4 & z \\ y & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & z & 1 \end{pmatrix}.$$

Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő elemik egyenlőek, így azt kapjuk, hogy $x = 2$, $y = -3$ és $z = 5$.

1.2. Alapműveletek mátrixokkal

Elméleti összefoglaló

1.2.1. **Definíció.** Két azonos típusú mátrix *összeg*én azt a mátrixot értjük, melynek elemei a mátrixok megfelelő helyen lévő elemeinek összege.
Tehát az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és a $B = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix összege az

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$$

mátrix.

1.2.2. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

mátrixok összege

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}.$$

1.2.3. **Definíció.** Egy mátrix *számszoros*án (*skalárszoros*án) azt a mátrixot értjük, melyet úgy kapunk meg, hogy a mátrix minden elemét megszorozzuk az adott számmal, azaz ha $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix, $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor az A mátrix λ-szorosán a

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij}) \qquad (i = 1, \dots, m; \text{ és } j = 1, \dots, n)$$

mátrixot értjük.

1.2.4. **Példa.** Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix 2-szerese a

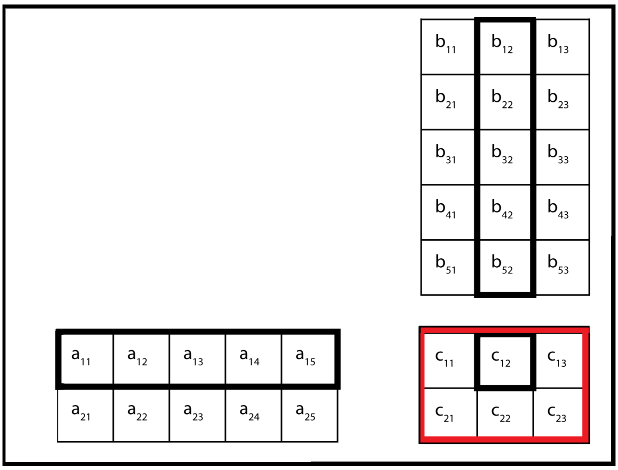
$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

mátrix.

1.2.5. **Definíció.** Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times k}$ és a $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{k\times n}$ mátrixok *szorzat*án azt a $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrixot értjük, amelynek $(i; j)$ indexű elemére teljesül, hogy

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} \cdot b_{sj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

1.2.6. **Megjegyzés.** Két mátrix szorzásakor a szorzatmátrix $(i; j)$ indexű elemét úgy kapjuk meg, hogy az első mátrix i-edik sorát a második mátrix j-edik oszlopával szorozzuk össze úgy, hogy a „megfelelő” elemeket összeszorozzuk és a szorzatokat összeadjuk.



$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + a_{14} \cdot b_{41} + a_{15} \cdot b_{51}\\
c_{12} &= a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} + a_{14} \cdot b_{42} + a_{15} \cdot b_{52}\\
c_{13} &= a_{11} \cdot b_{13} + a_{12} \cdot b_{23} + a_{13} \cdot b_{33} + a_{14} \cdot b_{43} + a_{15} \cdot b_{53}\\
c_{21} &= a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} + a_{24} \cdot b_{41} + a_{25} \cdot b_{51}\\
c_{22} &= a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} + a_{24} \cdot b_{42} + a_{25} \cdot b_{52}\\
c_{23} &= a_{21} \cdot b_{13} + a_{22} \cdot b_{23} + a_{23} \cdot b_{33} + a_{24} \cdot b_{43} + a_{25} \cdot b_{53}
\end{aligned}$$

Az itt látható írásmódot Falk-sémának is nevezik.

1.2.7. **Megjegyzés.** Két mátrix pontosan akkor szorozható össze, ha az első mátrix oszlopainak a száma megegyezik a második mátrix sorainak a számával. Azaz összeszorozni $m \times k$-as mátrixot csak $k \times n$-es mátrixal lehet, és ekkor az eredménymátrix $m \times n$-es lesz.

1.2.8. **Példa.** Az előbbi írásmódot alkalmazva az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok szorzata

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 0 \\ & A \cdot B & & 2 & 0 \\ & & & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array},$$

tehát

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2.9. **Megjegyzés.** A mátrixszorzás nem-kommutatív művelet, azaz általában $A \cdot B \neq B \cdot A$. Elegendő arra gondolnunk, hogy például ha az A mátrix 2×3-as és a B mátrix 3×4-es, akkor az $A \cdot B$ mátrix létezik, míg a $B \cdot A$ mátrix már nem.

Kidolgozott feladatok

13. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ mátrixot! Határozzuk meg a $2A$ és a $-3A$ mátrixokat!

Megoldás:

Egy mátrix számszorosát úgy kapjuk meg, hogy a mátrix minden elemét szorozzuk az adott számmal. Tehát

$$2A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

és

$$-3A = \begin{pmatrix} -6 & -3 & -6 \\ -3 & 0 & -15 \end{pmatrix}.$$

14. **Feladat.** Egy üzletláncnak 3 üzlete van. Minden üzletben 4 különböző típusú terméket árulnak. Az egyes üzletekben az egyes termékek egységárait mutatja az alábbi mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 500 & 800 & 300 & 200 \\ 450 & 700 & 280 & 190 \\ 550 & 850 & 330 & 220 \end{pmatrix}.$$

Minden üzletben minden terméken 10%-os leárazást hajtanak végre. Mennyibe kerülnek az egyes üzletekben az egyes termékek? A megoldást egyetlen mátrixként adjuk meg!

Megoldás:

A leárazás után minden termék ára az eredeti ár 90%-a, így a keresett mátrix

$$0,9A = \begin{pmatrix} 450 & 720 & 270 & 180 \\ 405 & 630 & 252 & 171 \\ 495 & 765 & 297 & 198 \end{pmatrix}.$$

15. **Feladat.** Egy üzletláncnak 3 üzlete van. Minden üzletben 4 különböző típusú terméket árulnak. Az A mátrix mutatja az első félévben az adott termékekből származó bevételeket ezer forintban:

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 & 200 \\ 320 & 740 & 180 & 430 \\ 650 & 450 & 430 & 320 \end{pmatrix}.$$

A B mátrix mutatja az egyes termékekből származó bevételeket a második félévben:

$$B = \begin{pmatrix} 150 & 250 & 320 & 210 \\ 300 & 650 & 120 & 530 \\ 320 & 550 & 220 & 150 \end{pmatrix}.$$

Adjuk meg az egyes üzletekben az egyes termékekből származó éves bevételeket egyetlen mátrixként!

Megoldás:

A keresett mátrix

$$A + B = \begin{pmatrix} 250 & 450 & 620 & 410 \\ 620 & 1\,390 & 300 & 960 \\ 970 & 1\,000 & 650 & 470 \end{pmatrix}.$$

16. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}$ mátrixokat! Határozzuk meg az

a) $A + B$ b) $3A - 2B$

mátrixokat!

Megoldás:

a) Két mátrixot úgy adunk össze, hogy a mátrixok megfelelő helyen lévő elemeit összeadjuk, így

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+3 & 3+5 \\ 4+7 & 5+9 & 6+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 11 & 14 & 17 \end{pmatrix}.$$

b) Először a skalárral való szorzásokat végezzük el (azaz az első mátrix minden elemét 3-mal, a második mátrix minden elemét 2-vel szorozzuk), majd a kapott mátrixokat kivonjuk (az első mátrix megfelelő elemeiből kivonjuk a második mátrix megfelelő elemeit):

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 & 10 \\ 14 & 18 & 22 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

17. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ mátrixokat! Határozzuk meg az

a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

szorzatokat!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az első mátrix 2×2 típusú, a második 2×3 típusú, így a szorzás elvégezhető, és az eredménymátrix 2×3 típusú lesz. A szorzatmátrix $(i; j)$ indexű elemét úgy kapjuk meg, hogy az első mátrix i-edik sorának minden elemét megszorozzuk a második mátrix j-edik oszlopának megfelelő elemeivel, és a kapott eredményeket összeadjuk. Tehát

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+9 & 0-6 & -4+18 \\ 4-3 & 0+2 & -8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 1 & 2 & -14 \end{pmatrix}.$$

b) A $B \cdot A$ szorzat nem létezik, mert az első mátrix oszlopainak száma nem egyezik meg a második mátrix sorainak a számával.

18. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix négyzetét!

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel $A^2 = A \cdot A$, ezért A Falk-séma írásmódot használva

$A \cdot A$		2	1
		3	1
2	1	$2 \cdot 2 + 1 \cdot 3$	$2 \cdot 1 + 1 \cdot 1$
3	1	$3 \cdot 2 + 1 \cdot 3$	$3 \cdot 1 + 1 \cdot 1$

Tehát

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

19. **Feladat.** Tekintsük az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & -1 \end{pmatrix}$ mátrixot! Határozzuk meg a k valós szám értékét úgy, hogy az A^2 mátrix zérusmátrix legyen!

<u>**Megoldás**</u>:

Az A^2 mátrix:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2k & 0 \\ 0 & 2k+1 \end{pmatrix}.$$

A zérusmátrix minden eleme nulla, így azt kapjuk, hogy

$$2k+1=0 \qquad \Rightarrow \qquad k = -\frac{1}{2}.$$

20. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixokat! Határozzuk meg az $(A+2B)\cdot C$ mátrixot!

<u>**Megoldás**</u>:

Mivel

$$2B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

ezért

$$A+2B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ezt felhasználva

$$(A+2B)\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

21. **Feladat.** Legyen A egy 2×2-es mátrix, amelynek a_{ij} elemeire teljesül, hogy $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ minden $i \in \{1;2\}$ és $j \in \{1;2\}$ esetén. Legyen továbbá B egy 2×2-es mátrix, amelynek b_{ij} elemeire teljesül, hogy $b_{ij} = 2^{i+j}$ minden $i \in \{1;2\}$ és $j \in \{1;2\}$ esetén.

a) Adjuk meg az A mátrixot!
b) Adjuk meg a B mátrixot!
c) Szimmetrikus-e az A mátrix?
d) Szimmetrikus-e a B mátrix?
e) Határozzuk meg az $A+B$ mátrixot!
f) Határozzuk meg a $2A$ mátrixot!
g) Határozzuk meg az $A\cdot B$ mátrixot!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az A mátrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) A B mátrix

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

c) Az A mátrix szimmetrikus, mert $A^T = A$.

d) A B mátrix szimmetrikus, mert $B^T = B$.

e) Az $A + B$ mátrix

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}.$$

f) A $2A$ mátrix

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

g) Az $A \cdot B$ mátrix

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

22. **Feladat.** Határozzuk meg az x, y, z, t valós számokat úgy, hogy a

$$3 \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+1 & 4 \\ -6 & -2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{pmatrix}$$

egyenlőség teljesüljön!

<u>**Megoldás**</u>:

Első lépésben az egyenlőség bal oldalán elvégezzük a skalárral való szorzást, jobb oldalán az összeadást, így az

$$\begin{pmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+5 & x+y+4 \\ z+t-6 & 3-2t \end{pmatrix}$$

egyenlőséghez jutunk. Két mátrix pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő elemeik egyenlőek. Tehát az egyenlőség fennállásának szükséges és elégséges feltétele az alábbi egyenletek teljesülése

$$\begin{aligned} 3x &= 2x + 5 \\ 3y &= x + y + 4 \\ 3z &= z + t - 6 \\ 3t &= 3 - 2t. \end{aligned}$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 5$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $y = 4,5$ adódik. Az utolsó egyenletből $t = 0,6$ következik, amit behelyettesítve a harmadik egyenletbe $z = -2,7$ adódik.

1.3. Mátrixműveletek alkalmazása a közgazdaságtanban

Elméleti összefoglaló

1.3.1. **Megjegyzés.** A gazdasági problémák megoldásánál általában nagy mennyiségű adattal dolgozunk. Ezeket feldolgozás céljából érdemes valamilyen módon csoportosítani. Ilyenkor az adatokat táblázatokba foglaljuk, azaz mátrixokkal reprezentáljuk, az adatokkal végzett műveleteket mátrixműveletekként írjuk fel.

1.3.2. **Definíció.** Az úgynevezett *szállítási mátrix*ot olyan esetekben készítik el, ha több raktárban tárolnak termékeket és ezeket több rendeltetési helyre kell kiszállítani. A mátrixban a fajlagos költségeket tűntetik fel, vagyis azt, hogy az áru egy egységének elszállítása mennyibe kerül.

1.3.3. **Példa.** Tekintsük azt az esetet, amikor három raktárból ($R1$, $R2$, $R3$) három helyre ($S1$, $S2$, $S3$) kell szállítani. A raktárok olyanok, hogy mindegyikben csak egyféle termék van, de mindegyikben más-más termék. A fajlagos költségeket ezer forintban az alábbi táblázat tartalmazza:

	S1	**S2**	**S3**
R1	10	20	30
R2	30	20	20
R3	20	15	10

Foglaljuk az adatokat mátrixba:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 30 & 20 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{pmatrix}.$$

Például az első sor második eleme azt jelenti, hogy az első raktárból a második szállítási helyre való szállítás költsége 20 000 Ft. Legyen továbbá az egyes termékek termelési költsége rendre 40 000, 50 000 és 60 000 Ft. Ebből képezzük a

$$B = \begin{pmatrix} 40 & 40 & 40 \\ 50 & 50 & 50 \\ 60 & 60 & 60 \end{pmatrix}$$

mátrixot. A fajlagos termelési és szállítási költségek összegéből álló fajlagos összköltségmátrixot az A és B mátrixot összege adja, azaz az összköltségek ezer forintban:

$$A+B=\begin{pmatrix} 50 & 60 & 70 \\ 80 & 70 & 70 \\ 80 & 75 & 70 \end{pmatrix}.$$

1.3.4. **Definíció.** Tekintsünk egy üzemet, amely különböző termékeket állít elő, és a termékek alőállításához különféle nyersanyagok szükségesek. Ha ezeket az adatokat táblázatba foglaljuk, akkor az így kapott mátrixot *technológiai mátrix*nak nevezzük.

1.3.5. **Definíció.** Tegyük fel, hogy az első évben az A_1, A_2, ..., A_n cég részesedései egy termék piacán $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ahol p_i minden $i \in 1; 2; \ldots; n$ esetén nemnegatív és $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Az i-edik cég részesedése százalékosan kifejezve $p_i \cdot 100\%$.

Ekkor *kezdeti részesedésvektor*nak nevezzük a $p_1; p_2; \ldots; p_n$ valós számokból képzett oszlopvektort.

Ha ismert, hogy a második évben az A_j terméket fogyasztók $t_{ij} \cdot 100\%$-a lett az A_i terméket fogyasztók, akkor a $T = (t_{ij})$ négyzetes mátrixot *átmenet mátrix*nak nevezzük.

1.3.6. **Megjegyzés.** Ha s egy kezdeti részesedésvektor és T egy átmenetmátrix, akkor a $T \cdot s$ szorzat eredménye az első év utáni (új) piaci részesedésvektor, $T^2 \cdot s$ a második év utáni (új) piaci részesedésvektor. Általánosan $T^k \cdot s$ a k-adik év utáni (új) piaci részesedésvektor.

1.3.7. **Példa.** Tegyük fel, hogy három vállalat A, B és C piaci részesedései egy adott termék esetén rendre $0,2$, $0,3$ és $0,5$. Legyen a T átmenetmátrix

$$T=\begin{pmatrix} 0,80 & 0,15 & 0,10 \\ 0,10 & 0,55 & 0,10 \\ 0,10 & 0,30 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

Az előbbiek szerint az s kezdeti piaci részesedésvektor

$$s=\begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,30 \\ 0,50 \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$T \cdot s = \begin{pmatrix} 0,80 & 0,15 & 0,10 \\ 0,10 & 0,55 & 0,10 \\ 0,10 & 0,30 & 0,80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,20 \\ 0,30 \\ 0,50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,255 \\ 0,235 \\ 0,510 \end{pmatrix}.$$

Az előbbi számolás helyességét az alábbi gondolatmenet is alátámasztja.

Az A vállalatnak az a piaci részesedése, amit az első év után is megtart $0,8 \cdot 0,2$. Az A vállalatnak az a részesedése, amit elnyer B-től $0,15 \cdot 0,3$, amit pedig elnyer C-től $0,1 \cdot 0,5$. Tehát az A vállalat piaci részesedése az első év után

$$0,8 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,5 = 0,255,$$

ami éppen a kapott vektor első koordinátája. Hasonlóan kapjuk a B vállalat és a C vállalat piaci részesedését egy év után. Ez azt jelenti, hogy az első év után a piaci részesedésvektor éppen a $T \cdot s$ szorzat eredménye, azaz

$$\begin{pmatrix} 0,255 \\ 0,235 \\ 0,510 \end{pmatrix}.$$

Kidolgozott feladatok

23. **Feladat.** Egy étteremben háromféle levesből eladott adagok számát az alábbi táblázat mutatja:

	gulyásleves	**zöldségleves**	**gyümölcsleves**
hétfő	10	5	5
kedd	20	10	5
szerda	10	10	10
csütörtök	5	20	10
péntek	30	10	20
egységár (Ft/db)	400	200	300

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Hány adag leves fogyott el az egyes levesekből az öt nap alatt összesen?

b) Mennyi az egyes levesfélékből származó bevétel az öt nap alatt összesen?

c) Mennyi a levesekből származó összbevétel az öt nap alatt?

d) Hány adag leves fogyott összesen az egyes napokon?

<u>**Megoldás**</u>:

a) A gulyáslevesből

$$10 + 20 + 10 + 5 + 30 = 75,$$

a zöldséglevesből

$$5 + 10 + 10 + 20 + 10 = 55,$$

a gyümölcslevesből

$$5 + 5 + 10 + 10 + 20 = 50$$

adag fogyott összesen az öt nap alatt.

Ha egy mátrixot balról szorzunk egy olyan sormátrixszal, amelynek minden eleme 1, akkor a szorzás eredménye egy olyan sormátrix, amelynek elemei az eredeti mátrix egy oszlopában lévő elemeinek az összegei. Tehát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 55 & 50 \end{pmatrix}.$$

b) A hétfői napon a bevétel:

$$10 \cdot 400 + 5 \cdot 200 + 5 \cdot 300 = 6\,500.$$

A keddi napon a bevétel:

$$20 \cdot 400 + 10 \cdot 200 + 5 \cdot 300 = 11\,500.$$

A szerdai napon a bevétel:

$$10 \cdot 400 + 10 \cdot 200 + 10 \cdot 300 = 9\,000.$$

A csütörtöki napon a bevétel:

$$5 \cdot 400 + 20 \cdot 200 + 10 \cdot 300 = 9\,000.$$

A pénteki napon a bevétel:

$$30 \cdot 400 + 10 \cdot 200 + 20 \cdot 300 = 20\,000.$$

A számolást mátrixműveletekkel felírva azt kapjuk, hogy az eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,500 \\ 11\,500 \\ 9\,000 \\ 9\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix}.$$

Tehát a levesekből származó bevétel hétfőn $6\,500$ forint, kedden $11\,500$ forint, szerdán és csütörtökön $9\,000$ forint és pénteken $20\,000$ forint volt.

c) A levesekből származó bevétel az öt nap alatt

$$6\,500 + 11\,500 + 9\,000 + 9\,000 + 20\,000 = 56\,000\,\text{Ft}.$$

Az eredményt mátrixművelettel is felírhatjuk. Ha a napi bevételből képzett oszlopmátrixot balról szorozzuk egy olyan mátrixszal, amelynek minden eleme 1, akkor eredményül az oszlopmátrix elemeinek az összegét kapjuk:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\,500 \\ 11\,500 \\ 9\,000 \\ 9\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix} =$$

$$= 6\,500 + 11\,500 + 9\,000 + 9\,000 + 20\,000 = 56\,000,$$

ezért a levesekből származó összbevétel az 5 nap alatt $56\,000$ forint.

d) Hétfőn $10 + 5 + 5 = 20$ adag leves fogyott.
Kedden $20 + 10 + 5 = 35$ adag leves fogyott.
Szerdán $10 + 10 + 10 = 30$ adag leves fogyott.
Csütörtökön $5 + 20 + 10 = 35$ adag leves fogyott.
Pénteken $30 + 10 + 20 = 60$ adag leves fogyott.
Az eredményt tömörebb formában egy mátrixszorzásként is felírhatjuk. A mátrix egy sorában lévő számait szeretnénk összeadni, amit megvalósíthatunk úgy, hogy a mátrixot jobbról szorozzuk egy olyan oszlopmátrixszal, amelynek minden eleme 1-es. Tehát:

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 20 & 10 & 5 \\ 10 & 10 & 10 \\ 5 & 20 & 10 \\ 30 & 10 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 35 \\ 30 \\ 35 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

Összefoglalva tehát elmondhatjuk, hogy a mátrixműveletek segítségével tömörebb, átláthatóbb formában írhatjuk fel az eredményeket, a számolások lényegesen leegyszerűsödnek, különösen nagy adathalmaz esetén.

24. **Feladat.** Egy cég három különböző alapanyagból négyféle terméket állít elő. Az alábbi táblázat megmutatja azt, hogy az egyes termékek előállításához mennyi alapanyag szükséges, továbbá az egyes alapanyagok költségeit, a nyersanyagokból rendelkezésre álló mennyiségeket (kapacitás), valamint a kész termékek eladási árait:

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**költség (Ft/db)**	**kapacitás**
A1	1	2	1	1	30	60
A2	3	0	3	2	20	80
A3	2	2	1	4	10	100
egységár (Ft/db)	200	100	300	150		

Az egyes termékekből rendre 10, 10, 5, 10 darabot gyártunk. Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Elegendő-e a rendelkezésre álló kapacitás?

b) Mennyi a megmaradt alapanyag?

c) Mennyi a termékek előállítási költsége 1-1 darab előállítása esetén?

d) Mekkora az összköltség?

e) Mennyi a bevétel?

f) Mennyi a haszon (profit)?

Megoldás:

a) Az egyes alapanyagokból felhasznált mennyiségeket egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 65 \\ 85 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az első alapanyagból 45 darabot, a második alapanyagból 65 darabot, a harmadik alapanyagból 85 darabot kell felhasználni. Mivel

$$\begin{aligned} 45 &\leq 60 \\ 65 &\leq 80 \\ 85 &\leq 100, \end{aligned}$$

ezért elegendő a rendelkezésre álló alapanyag mennyiség.

b) A megmaradt alapanyag:

$$\begin{pmatrix} 60 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 45 \\ 65 \\ 85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy minden alapanyagból 15 darab maradt meg.

c) Az előállítási költség $1-1$ darab termék gyártása esetén:

$$\begin{pmatrix} 30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 80 & 100 & 110 \end{pmatrix}.$$

Az egyes termékek előállítási költsége tehát rendre 110 forint, 80 forint, 100 forint, 110 forint.

d) Az összköltség:

$$\begin{aligned} C = \begin{pmatrix} 110 & 80 & 100 & 110 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} &= \\ = 110 \cdot 10 + 80 \cdot 10 + 100 \cdot 5 + 110 \cdot 10 = 3\,500. \end{aligned}$$

Az összköltség tehát $3\,500$ forint.

e) A bevétel:

$$R = \begin{pmatrix} 200 & 100 & 300 & 150 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} =$$
$$= 200 \cdot 10 + 100 \cdot 10 + 300 \cdot 5 + 150 \cdot 10 = 6\,000.$$

f) A profit a bevétel és a költség különbsége:

$$\Pi = R - C = 6\,000 - 3\,500 = 2\,500.$$

25. **Feladat.** Egy étteremben négyféle ételből eladott adagok számát az alábbi táblázat mutatja:

	1. étel	**2. étel**	**3. étel**	**4. étel**	**5. étel**
hétfő	10	2	3	4	4
kedd	5	10	7	6	6
szerda	2	5	4	5	2
csütörtök	10	6	1	6	3
péntek	5	10	6	8	4
egységár (Ft/db)	800	600	900	700	1 000

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Hány adag fogyott az egyes ételekből naponta?

b) Mennyi volt a bevétel naponta?

c) Adjuk meg az egyes ételekből származó összbevételt az 5 nap alatt!

d) Mennyivel fogyott több naponta a második ételből, mint az elsőből?

<u>**Megoldás**</u>:

a) Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 10 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 2 \\ 10 & 6 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 33 & 21 & 29 & 19 \end{pmatrix},$$

ezért az első ételből 32 adag, a második ételből 33 adag, a harmadik ételből 21 adag és a negyedik ételből 29 adag, az ötödik ételből 19 adag fogyott összesen az öt nap alatt.

b) A megfelelő eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 10 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 2 \\ 10 & 6 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 900 \\ 700 \\ 1\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\,700 \\ 26\,500 \\ 13\,700 \\ 19\,700 \\ 25\,000 \end{pmatrix},$$

tehát a bevétel hétfőn $18\,700$ forint, kedden $26\,500$ forint, szerdán $13\,700$ forint, csütörtökön $19\,700$ forint és pénteken $25\,000$ forint volt.

c) Mivel

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18\,700 \\ 26\,500 \\ 13\,700 \\ 19\,700 \\ 25\,000 \end{pmatrix} =$$

$$= 18\,700 + 26\,500 + 13\,700 + 19\,700 + 25\,000 = 103\,600,$$

ezért az ételekből származó összbevétel az 5 nap alatt $103\,600$ forint.

d) Az egyes napokon a második ételből

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 10 & 7 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 2 \\ 10 & 6 & 1 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

adaggal fogyott több, mint az elsőből. Pontosabban kedden, szerdán és pénteken a második ételből fogyott több rendre 5, 3 és 5 adaggal, míg hétfőn és csütörtökön az első ételből fogyott több, rendre 8, illetve 4 adaggal.

26. **Feladat.** Egy utazási irodában egy adott héten az eladott jegyek számát négy helyszínre vonatkozóan az alábbi táblázat mutatja:

	London	**Bécs**	**Párizs**	**Velence**
hétfő	20	10	5	8
kedd	6	12	4	9
szerda	10	11	3	9
csütörtök	6	8	8	10
péntek	9	10	12	6
egységár (ezer Ft/db)	20	10	15	25

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Hány darab jegyet adtak el az adott héten összesen az egyes helyszínekre?
b) Hány darab jegyet adtak el összesen az egyes napokon?
c) Mennyi az utazási iroda napi bevétele?
d) Mennyivel volt több a hétfői bevétel, mint a keddi?
e) Mennyivel volt több a pénteki bevétel, mint a csütörtöki?

Megoldás:

a) Az egyes városokba eladott jegyek száma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 10 & 5 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 9 \\ 10 & 11 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 8 & 10 \\ 9 & 10 & 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 51 & 32 & 42 \end{pmatrix}.$$

b) Az eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 & 5 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 9 \\ 10 & 11 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 8 & 10 \\ 9 & 10 & 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 31 \\ 33 \\ 32 \\ 37 \end{pmatrix}.$$

c) A napi bevétel:

$$\begin{pmatrix} 20 & 10 & 5 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 9 \\ 10 & 11 & 3 & 9 \\ 6 & 8 & 8 & 10 \\ 9 & 10 & 12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 15 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 775 \\ 525 \\ 580 \\ 570 \\ 610 \end{pmatrix}.$$

Tehát a hétfői bevétel $775\,000$ forint, a keddi bevétel $525\,000$ forint, a szerdai bevétel $580\,000$ forint, a csütörtöki bevétel $570\,000$ forint, a pénteki bevétel $610\,000$ forint volt.

d) Mivel

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 775 \\ 525 \\ 580 \\ 570 \\ 610 \end{pmatrix} = 150,$$

ezért a hétfői bevétel $150\,000$ forinttal volt több, mint a keddi.

e) Mivel

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 775 \\ 525 \\ 580 \\ 570 \\ 610 \end{pmatrix} = 40,$$

ezért a pénteki bevétel $40\,000$ forinttal volt több, mint a csütörtöki.

27. **Feladat.** Egy cég öt raktárban (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5) négy különböző típusú terméket (T_1, T_2, T_3, T_4) tárol. Az alábbi táblázat mutatja a tárolt mennyiségeket, az egyes termékek egységárait, a raktározási költségeket, valamint az egyes raktárak befogadó képességeit:

	$\mathbf{T_1}$	$\mathbf{T_2}$	$\mathbf{T_3}$	$\mathbf{T_4}$	**költség (Ft/db)**	**kapacitás**
$\mathbf{R_1}$	3	5	4	2	10	20
$\mathbf{R_2}$	5	6	7	4	30	30
$\mathbf{R_3}$	3	6	8	4	25	30
$\mathbf{R_4}$	4	6	5	2	40	20
$\mathbf{R_5}$	2	3	3	5	20	15
egységár (Ft/db)	100	200	300	200		

Válaszoljunk mátrixműveletekkel az alábbi kérdésekre!

a) Összesítsük raktáranként az árukészletet!

b) Mekkora az egyes raktárak szabad kapacitása?

c) Az egyes termékekből összesen hány darabot tárolnak az öt raktárban e-gyütt?

d) Mennyi az egyes termékek raktározási költsége?

e) Mekkora értéket tárolnak az egyes raktárak?

<u>**Megoldás**</u>:

a) Az eredményt egy mátrix és egy vektor szorzata adja:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 21 \\ 17 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

b) Az egyes raktárak szabad kapacitása:

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 30 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 21 \\ 17 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 9 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

c) Az egyes termékekből tárolt mennyiség az öt raktárban:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 26 & 27 & 17 \end{pmatrix}.$$

d) Az egyes termékek raktározási költsége:

$$\begin{pmatrix} 10 & 30 & 25 & 40 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 455 & 680 & 710 & 420 \end{pmatrix}.$$

e) Az egyes raktárakban tárolt értékek:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 7 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,900 \\ 4\,600 \\ 4\,700 \\ 3\,500 \\ 2\,700 \end{pmatrix}.$$

1.3.8. **Példa.** Tegyük fel, hogy három vállalat (A, B és C) piaci részesedései egy adott termék esetén a megfigyelés kezdetekor rendre $0,3$, $0,4$ és $0,3$. Egy év múlva az A vállalat vásárlóinak 90%-a továbbra is az A vállalatnál vásárol, az A vállalat vásárlóinak 5%-a a B-hez, 5%-a a C-hez kerül. A B vállalat vásárlóinak 75%-a továbbra is a B vállalatnál vásárol, a B vállalat vásárlóinak 15%-a az A-hoz, 10%-a a C-hez kerül. A C vállalat vásárlóinak 60%-a továbbra is a C vállalatnál vásárol, a C vállalat vásárlóinak 25%-a az A-hoz, 15%-a a C-hez kerül.

a) Adjuk meg a kezdeti piaci részesedésvektort!

b) Adjuk meg az átmenetmátrixot!

c) Határozzuk meg egy év elteltével a piaci részesedésvektort!

Megoldás:

a) Az s kezdeti piaci részesedésvektor:

$$s = \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,40 \\ 0,30 \end{pmatrix}.$$

b) A T átmenetmátrix:

$$T = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,05 & 0,05 \\ 0,15 & 0,75 & 0,10 \\ 0,25 & 0,15 & 0,60 \end{pmatrix}.$$

c) Egy év múlva a piaci részesedésvektor:

$$T \cdot s = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,05 & 0,05 \\ 0,15 & 0,75 & 0,10 \\ 0,25 & 0,15 & 0,60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,30 \\ 0,40 \\ 0,30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,305 \\ 0,375 \\ 0,315 \end{pmatrix}.$$

Tehát az első év után az A vállalat termékét vásárolja a vásárlók $30,5\%$-a, a B vállalat termékét vásárolja a vásárlók $37,5\%$-a és a C terméket vásárolja a vásárlók $31,5\%$-a.

1.4. Mátrixok determinánsa és inverze

Elméleti összefoglaló

1.4.1. **Megjegyzés.** Ebben a fejezetben bevezetjük a determináns fogalmát, amelyben minden négyzetes mátrixhoz alkalmas módon hozzárendelünk egy valós számot. Ezt a számot a mátrix determinánsának fogjuk nevezni.

A definíciót rekurzióval adjuk meg. Ez azt jelenti, hogy először 1×1-es, majd 2×2-es mátrix determinánsát értelmezzük. Ezután megmondjuk azt, hogyan értelmezzük az $n \times n$-es mátrix determinánsát, ha az $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix determinánsát már ismerjük.

1.4.2. **Definíció.** Az $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ mátrix a_{ij} eleméhez tartozó *minormátrix*án azt az $(m-1) \times (n-1)$-es A_{ij}-vel jelölt mátrixot értjük, melyet az a_{ij} elem sorának és oszlopának elhagyásával kapunk.

1.4.3. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix esetén például az A_{12} minormátrix az a mátrix, amelyet úgy kapunk meg, hogy elhagyjuk az A mátrix első sorát és második oszlopát:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.4.4. **Megjegyzés.** A minormátrix fogalma nem csak négyzetes mátrixokra érvényes.

1.4.5. **Definíció.** Definíció szerint legyen egy 1×1-es mátrix determinánsa a mátrix egyetlen eleme.
Az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

2×2-es mátrix *determinráns*a definíció szerint

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Tegyük fel hogy tetszőleges $(n-1)\times(n-1)$-es mátrix determinánsát már értelmeztük. Ekkor az $n\times n$-es A mátrix *determináns*át az „első sor szerinti kifejtéssel” úgy definájuk, hogy

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot\det A_{11}+$$

$$+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot\det A_{12}+\ldots+(-1)^{1+n}\cdot a_{1n}\cdot\det A_{1n}.$$

Egy $n\times n$-es mátrix determinánsát *n-edrendű determináns*nak is nevezzük. A $\det A_{1k}$ $(k=1,\ldots,n)$ determinánsokat az a_{1k} elemekhez tartozó *aldetermináns*okként is említjük. A $(-1)^{1+k}$ előjellel is ellátott $(-1)^{1+k}\det A_{1k}$ determinánsokat *előjeles aldetermináns*oknak is nevezzük.

A determinánsokat kétféle módon szokás jelölni. Az egyik jelölés, amikor a mátrix elé írjuk a $\det$ szót. A másik jelölés, amikor a mátrixban $(.)$ zárójelek helyett $|.|$ zárójelet írunk.

1.4.6. **Megjegyzés.** Mátrixok determinánsát csak négyzetes mátrixok esetén definiáltuk.

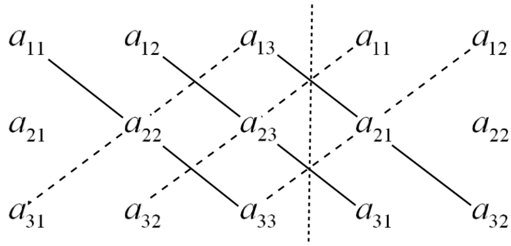
1.4.7. **Példa.** Az

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2\cdot 3 - 1\cdot 0 = 6-0=6.$$

1.4.8. **Megjegyzés.** Harmadrendű mátrix determinánsát kiszámolhatjuk az úgynevezett Sarrus-szabály alkalmazásával is. Ilyenkor a mátrix első két oszlopát a mátrix jobb oldalához hozzáírjuk, majd a mellékátlóban és a vele párhuzamosan, tőle jobbra lévő két másik átlóban lévő elemeket összeszorozzuk, ezen szorzatokat összeadjuk, majd a mellékátló és a vele párhuzamos, tőle jobbra lévő két másik átló elemeit összeszorozzuk, végül ezen szorzatokat kivonjuk az előző összegből.



Tehát

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- \big(a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}\big).$$

Fontos megjegyezni azt, hogy a Sarrus-szabály csak 3×3-as mátrix determinánsának kiszámítására alkalmazható. Hasonló számolási szabály magasabb rendű determinánsokra nem létezik.

1.4.9. **Példa.** Meghatározzuk az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát Sarrus-szabály segítségével. Először leírjuk a mátrix mellé a mátrix első két oszlopát:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{matrix}.$$

Ezután az $1.4.8$ megjegyzésben ismertetett eljárást alkalmazzuk, így azt kapjuk, hogy

$$\det A = \big(-2 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 4\big) -$$
$$- \big(1 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \cdot (-1)\big) = -18.$$

1.4.10. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy egy mátrix *reguláris*, ha a determinánsa nem zérus. Egy mátrix *szinguláris*, ha nem reguláris, azaz ha a determinánsa nulla.

1.4.11. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix reguláris, mert

$$\det A = 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -5 \neq 0.$$

A

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix szinguláris, mert

$$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

1.4.12. **Tétel.** (A determináns tulajdonságai)

1. Ha egy mátrix két sorát felcseréljük, akkor a determinánsának értéke a -1-szeresére változik.
2. Ha egy mátrix egyik sorának minden elemét megszorozzuk a λ valós számmal, akkor a determinánsa értéke λ-szorosára változik.
3. Ha egy mátrix egy sorának minden eleme nulla, akkor a determináns értéke 0.
4. Ha egy mátrix egy sorának valahányszorosát hozzáadjuk egy másik sorához, akkor a determinánsának értéke nem változik.
5. Ha egy mátrix két sora megegyezik, akkor a determinánsa 0.
6. Felső háromszög alakú mátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.
7. Alsó háromszög alakú mátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata.
8. Egy mátrixnak és a transzponáltjának a determinánsa megegyezik.
9. Két négyzetes mátrix szorzatának determinánsa megegyezik a tényező mátrixok determinánsainak szorzatával.

1.4.13. **Megjegyzés.** Egy $n \times n$ $(n \geq 4)$ típusú mátrix determinánsát a gyakorlatban úgy érdemes kiszámolni, hogy először a mátrix első oszlopában az első elem kivételével valamennyi elemet kinullázunk úgy, hogy az első sor valahányszorosát hozzáadjuk a mátrix többi sorához. Ezután a kapott mátrix determinánsát az első oszlop szerinti kifejtéssel számoljuk ki, így egy darab $(n-1)\times(n-1)$ típusú mátrix determinánsát kell kiszámolni. A kapott mátrixra ismételten alkalmazzuk az előző eljárást.

1.4.14. **Definíció.** Az $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ négyzetes mátrixot *invertálható*nak nevezzük, ha létezik olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ négyzetes mátrix, melyre $A \cdot B = B \cdot A = E_n$ teljesül, ahol E_n az n-edrendű egységmátrix. Ilyenkor a B mátrixot az A mátrix *inverz*ének nevezzük. Jelölése: A^{-1}.

1.4.15. **Példa.** Az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ mátrix inverze $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, ugyanis

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4.16. **Tétel.** Ha egy mátrixnak létezik inverze, akkor az egyértelműen meghatározott.

1.4.17. **Tétel.** Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla.

1.4.18. **Tétel.** Ha az A mátrix invertálható, akkor

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

1.4.19. **Tétel.** (mátrix inverzének meghatározása determinánsokkal)
Egy invertálható mátrix inverzét meghatározhatjuk úgy, hogy a mátrix determinánsának reciprokával megszorozzuk azt a mátrixot, amelyet úgy kapunk meg, hogy képezzük az eredeti mátrix elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltját. Ha az A mátrix invertálható, az inverzének b_{ij} eleme úgy számolható ki, hogy

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot A_{ji}}{\det A},$$

ahol A_{ji} egy minormátrix, vagyis az a mátrix, amelyet az A mátrixból úgy kapunk meg, hogy annak j-edik sorát és i-edik oszlopát töröljük.

1.4.20. **Példa.** Az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa $\det A = -2$. A mátrix inverzének b_{12} eleme

$$b_{12} = \frac{(-1)^3 \cdot \det A_{21}}{\det A} = \frac{-\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{-2} = -2.$$

Kidolgozott feladatok

28. **Feladat.** Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát!

<u>**Megoldás**</u>:

Egy 2×2 típusú mátrix determinánsa a főátlóbeli és mellékátlóbeli elemek szorzatának különbsége, így

$$\det A = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 = -1 - 6 = -7.$$

29. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsát kifejtési tétel segítségével!

<u>**Megoldás**</u>:

Egy $n \times n$-es mátrix determinánsának kiszámításához egy tetszőleges sor (vagy oszlop) minden elemét meg kell szoroznunk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és összegeznünk kell a kapott számokat. Ha lehetséges, akkor érdemes olyan sort, vagy oszlopot választani, mely a lehető legtöbb zérust tartalmazza. Jelen esetben válasszuk ki a mátrix harmadik oszlopát. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} +$$

$$+ 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kiszámolva a 2×2-es determinánsokat

$$\det A = 0 \cdot (12 - 0) - 2 \cdot (8 + 1) + 0 \cdot (0 + 3) = -18$$

adódik.

30. **Feladat.** Számoljuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix determinánsát!

<u>**Megoldás**</u>:

Első lépésben az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz, az első sor -3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz és az első sor -4-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz. Ekkor a determináns értéke nem fog változni. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -5 & -6 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -14 \\ 0 & -7 & -14 & -20 \end{pmatrix}.$$

Az első oszlop szerinti kifejtést alkalmazzuk, majd a keletkező háromszor hármas determinánst például Sarrus szabállyal számolhatjuk ki:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} -5 & -6 & -8 \\ -4 & -8 & -14 \\ -7 & -14 & -20 \end{pmatrix}.$$

Tehát

$$\det A = \det\begin{pmatrix} -5 & -6 & -8 \\ -4 & -8 & -14 \\ -7 & -14 & -20 \end{pmatrix}.$$

Azért, hogy a további számolás egyszerűsödjön az első sor -1-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz és az első sor -2-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz. Ekkor a determináns értéke nem változik, de a mátrix elemei kisebb abszolútértékű számok lesznek. Tehát

$$\det A = \det\begin{pmatrix} -5 & -6 & -8 \\ 1 & -2 & -6 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$\det\begin{pmatrix} -5 & -6 & -8 \\ 1 & -2 & -6 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{matrix} -5 & -6 \\ 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{matrix} = -40+108+16-(48-60+24) = 72,$$

ezért $\det A = 72$.

31. **Feladat.** Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható legyen!

Megoldás:

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla. Tehát első lépésben kiszámoljuk a mátrix determinánsát:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 - x = 9 - x.$$

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla. Jelen esetben az A mátrix pontosan akkor invertálható, ha $x \neq 9$.

32. **Feladat.** Határozzuk meg az x valós szám értékét úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} x & 4 \\ 4 & x \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható legyen!

Megoldás:

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla. Az A mátrix determinánsa

$$\det A = \det\begin{pmatrix} x & 4 \\ 4 & x \end{pmatrix} = x^2 - 16,$$

ami pontosan akkor nem nulla, ha $x \neq \pm 4$.

33. **Feladat.** Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy a

$$A = \begin{pmatrix} x & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható legyen!

Megoldás:

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla. Ezért első lépésben kiszámoljuk a mátrix determinánsát:

$$\det A = \det\begin{pmatrix} x & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 6x - 6,$$

ami pontosan akkor nem nulla, ha $x \neq 1$.

34. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\det\begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 5 & 2^x \end{pmatrix} = -4$$

egyenletet!

<u>Megoldás</u>:

A determináns:

$$\det\begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 5 & 2^x \end{pmatrix} = 2^{2x} - 5 \cdot 2^x.$$

A megoldandó egyenlet tehát:

$$2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Vezessük be a $2^x = a$ jelölést. Ekkor az

$$a^2 - 5a + 4 = 0$$

egyenletet kapjuk. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva:

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $a_1 = 4$, illetve $a_2 = 1$. Mivel $2^x = a$, ezért $2^x = 2^2$, így $x_1 = 2$, illetve $2^x = 2^0$, ezért $x_2 = 0$.

35. **Feladat.** Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\det\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = 0$$

egyenletet!

<u>Megoldás</u>:

Mivel egyrészt

$$\det\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} = 1,$$

másrészt

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 1,$$

így az $1 + x^2 - 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, amelyre azt kapjuk, hogy $x = 0$.

36. **Feladat.** Határozzuk meg a p valós szám értékét úgy, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 2p & 3 \\ -4p & p \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa $\det A = -10$ legyen!

Megoldás:

Az A mátrix determinánsa

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 2p & 3 \\ -4p & p \end{pmatrix} = 2p^2 + 12p.$$

Mivel $\det A = -10$, ezért a

$$2p^2 + 12p = -10$$

egyenletet kell megoldanunk, amely ekvivalens a

$$p^2 + 6p + 5 = 0$$

egyenlettel. A másodfokú egyenlet megoldóképletével azt kapjuk, hogy

$$p_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{-6 \pm 4}{2},$$

így a keresett p értékek: $p_1 = -1$, illetve $p_2 = -5$.

37. **Feladat.** Az inverzmátrix definíciójának felhasználásával határozzuk meg az

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét!

Megoldás:

Keressük azt az A^{-1} mátrixot, melyre $A \cdot A^{-1} = E_2$. Legyen az A^{-1} mátrix az alábbi alakú:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrixnak a másodrendű egységmátrixal kell egyenlőnek lennie, azaz

$$\begin{pmatrix} a \cdot e + b \cdot g & a \cdot f + b \cdot h \\ c \cdot e + d \cdot g & c \cdot f + d \cdot h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A két mátrix pontosan akkor lesz egyenlő, ha teljesülnek az alábbi egyenletek:

$$\begin{aligned} a \cdot e + b \cdot g &= 1 \\ a \cdot f + b \cdot h &= 0 \\ c \cdot e + d \cdot g &= 0 \\ d \cdot f + d \cdot h &= 1. \end{aligned}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldjuk az e, f, g, h ismeretlenekre. A harmadik egyenletből kifejezzük az e ismeretlent, amit visszahelyettesítünk az első e-gyenletbe:

$$(*)\ e = -\frac{d \cdot g}{c} \qquad \Rightarrow \qquad -a \cdot \frac{d \cdot g}{c} + b \cdot g = 1.$$

A kapott egyenletet c-vel szorozzuk, majd g-t kiemeljük, végül annak együtthatójával osztunk, így kifejezzük g-t:

$$\begin{aligned} -a \cdot d \cdot g + b \cdot g \cdot c &= 1 \\ g \cdot (b \cdot c - a \cdot d) &= c \\ \frac{-c}{a \cdot d - b \cdot c} &= g. \end{aligned}$$

Ezt visszahelyettesítve a $(*)$ egyenletbe

$$e = -\frac{d \cdot g}{c} = -\frac{d \cdot \frac{-c}{a \cdot d - b \cdot c}}{c} = \frac{d}{a \cdot d - b \cdot c}$$

adódik. Hasonlóan kapjuk meg az f és a h értékeket is:

$$f = \frac{-b}{a \cdot d - b \cdot c}, \quad h = \frac{a}{a \cdot d - b \cdot c}.$$

Tehát az inverzmátrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{a \cdot d - b \cdot c} & \dfrac{-b}{a \cdot d - b \cdot c} \\ \dfrac{-c}{a \cdot d - b \cdot c} & \dfrac{a}{a \cdot d - b \cdot c} \end{pmatrix} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

ha $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$. Azt kaptuk tehát, hogy egy 2×2-es mátrix inverzét úgy határozhatjuk meg, hogy a főátlóbeli elemek szorzatából kivonjuk a mellékátlóbeli elemek szorzatát, az így kapott értéknek vesszük a reciprokát, majd ezt megszorozzuk azzal a mátrixal, amit az eredeti mátrixból úgy kapunk meg, hogy annak főtálóbeli elemeit felcseréljük és a mellékátlóbeli elemeinek veszszük a -1-szeresét.

Tehát kaptunk egy képletet, amibe behelyettesítve a mátrix elemeit ki tudjuk számolni egy 2×2-es mátrix determinánsát.

38. **Feladat.** Mutassuk meg, hogy az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

mátrix invertálható, majd az előző feladat eredményét felhasználva számoljuk ki a mátrix inverzét!

<u>**Megoldás**</u>:

Az A mátrix determinánsa:

$$\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2,$$

ami nem nulla, így a mátrixnak létezik inverze.

Felhasználva az 37 feladat eredményét azt kapjuk, hogy az inverzmátrix

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

39. **Feladat.** Számoljuk ki az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét! Az inverzmátrix definíciója alapján ellenőrizzük a megoldást!

<u>**Megoldás**</u>:

A mátrix determinánsát kiszámolhatjuk például Sarrus-szabállyal

$$\begin{aligned} \det A = \big(1 \cdot 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 0\big) - \\ - \big(1 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \cdot 2\big) = 3, \end{aligned}$$

ami nem nulla, így a mátrixnak létezik inverze.

Az A mátrix inverzének b_{ij} elemét úgy kapjuk, hogy

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji}}{\det A},$$

ahol $\det A_{ji}$ az A mátrix j-edik sorának és i-edik oszlopának törlésével kapott mátrix determinánsa.
A b_{11}-es elem:

$$b_{11} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot \det A_{11}}{\det A} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{3} = -\frac{2}{3}.$$

A b_{12}-es elem:

$$b_{12} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \det A_{21}}{\det A} = \frac{-1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{4}{3}.$$

A b_{13}-es elem:

$$b_{13} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot \det A_{31}}{\det A} = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{5}{3}.$$

A b_{21}-es elem:

$$b_{21} = \frac{(-1)^{2+1} \cdot \det A_{12}}{\det A} = \frac{-1 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{2}{3}.$$

A b_{22}-es elem:

$$b_{22} = \frac{(-1)^{2+2} \cdot \det A_{22}}{\det A} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{3} = -\frac{1}{3}.$$

A b_{23}-es elem:

$$b_{23} = \frac{(-1)^{2+3} \cdot \det A_{32}}{\det A} = \frac{-1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{3} = -\frac{2}{3}.$$

A b_{31}-es elem:

$$b_{31} = \frac{(-1)^{3+1} \cdot \det A_{13}}{\det A} = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{3} = -\frac{1}{3}.$$

A b_{32}-es elem:

$$b_{32} = \frac{(-1)^{3+2} \cdot \det A_{23}}{\det A} = \frac{-1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{3} = \frac{2}{3}.$$

A b_{33}-es elem:

$$b_{33} = \frac{(-1)^{3+3} \cdot \det A_{33}}{\det A} = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Az inverzmátrix tehát:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrzésképpen kiszámoljuk az $A^{-1} \cdot A$ szorzatot:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eredményül a 3×3-as egységmátrixot kaptuk, amivel ellenőriztük az inverzmátrix helyességét.

Megjegyezzük, hogy az inverzmátrix helyességének ellenőrzéséhez az $A \cdot A^{-1}$ szorzatot is ki kellene számolni. Azonban bizonyítható, hogy ha $A^{-1} \cdot A = E_n$, akkor abból már az is következik, hogy $A \cdot A^{-1} = E_n$, ahol E_n az $n \times n$-es egységmátrixot jelöli.

40. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrixot!

a) Határozzuk meg az A mátrix determinánsát!

b) Milyen x valós szám esetén nem invertálható A?

c) Számoljuk ki az A mátrix inverzét $x = 1$ esetén!

Megoldás:

a) Az A mátrix determinánsa:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} x & 1 & 2 & x & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right| =$$
$$= -2x + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = -2x.$$

b) Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla, így $-2x \neq 0$ kell, hogy teljesüljön, amiből $x \neq 0$ adódik.

c) Ha $x = 1$, akkor $\det A = -2 \cdot 1 = -2$, így az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrix inverze

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

41. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot!

a) Határozzuk meg az A mátrix transzponáltját!

b) Szimmetrikus-e az A mátrix?

c) Számoljuk ki a mátrix determinánsát!

d) Invertálható-e az A mátrix?

e) Adjuk meg az A mátrix inverzének b_{12} elemét!

Megoldás:

a) A mátrix transzponáltja

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) A mátrix nem szimmetrikus, mert $A \neq A^T$.

c) Az A mátrix első sorának -2-szeresét adjuk hozzá a harmadik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

A második sor 3-szorosát adjuk hozzá a harmadik sorhoz és a második sor -1-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Az első oszlop szerinti kifejtéssel

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

adódik. A kapott mátrixot szintén az első oszlopa szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$\det A = \det \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = (-3) \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 = 10.$$

d) Mivel $\det A \neq 0$, ezért az A mátrix invertálható.

e) A mátrix inverzének b_{12} eleme:

$$b_{12} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \det A_{21}}{\det A},$$

ahol

$$\det A_{21} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A determinánst számolhatjuk például Sarrus-szabállyal:

$$\det A_{21} = 8 + 3 - (0 + 4 - 3) = 10.$$

Az A mátrix inverzének b_{12} eleme:

$$b_{12} = \frac{(-1)^3 \cdot 10}{10} = -1.$$

42. **Feladat.** Tekintsük az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

és a

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixokat!

a) Adjuk meg az $A \cdot B$ mátrixot!
b) Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrix determinánsát!
c) Invertálható-e az $A \cdot B$ mátrix?
d) Ha invertálható, határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrix inverzét!
e) Adjuk meg a $B \cdot A$ mátrixot!
f) Határozzuk meg a $B \cdot A$ mátrix determinánsát!
g) Invertálható-e a $B \cdot A$ mátrix?

Megoldás:

a) Az $A \cdot B$ mátrix:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Az $A \cdot B$ mátrix determinánsa:

$$\det(A \cdot B) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = 0 \cdot 7 - 3 \cdot 1 = -3.$$

c) Mivel $\det(A \cdot B) \neq 0$, ezért $A \cdot B$ invertálható.

d) Az $A \cdot B$ mátrix inverze:

$$(A \cdot B)^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) A $B \cdot A$ mátrix:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

f) A $B \cdot A$ mátrix determinánsa:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = 0.$$

g) Mivel a $B \cdot A$ mátrix determinánsa nulla, ezért a $B \cdot A$ mátrix nem invertálható.

1.5. Alapfogalmak vektorterekben, mátrix rangja

Elméleti összefoglaló

1.5.1. **Definíció.** Egy $X \neq \emptyset$ halmazt *vektortér*nek vagy más szóval *lineáris tér*nek nevezünk, ha adva van rajta két művelet, nevezetesen egy összeadás és egy skalárral való szorzás, melyek teljesítik az alábbi tulajdonságokat:

- az összeadás kommutatív, azaz minden $x, y \in X$ esetén
$$x + y = y + x;$$
- az összeadás asszociatív, azaz minden $x, y, z \in X$ esetén
$$(x + y) + z = x + (y + z);$$
- létezik zéruselem, azaz létezik $0 \in X$ úgy, hogy $x + 0 = x$ minden $x \in X$ esetén;
- minden elemnek létezik additív inverze, azaz minden $x \in X$ esetén létezik $-x \in X$ úgy, hogy $x + (-x) = 0$;
- minden $x \in X$ esetén $1 \cdot x = x$;
- minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, minden $x \in X$ esetén
$$(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x);$$
- minden $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, minden $x \in X$ esetén
$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x;$$
- minden $\lambda \in \mathbb{R}$, minden $x, y \in X$ esetén
$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y.$$

Egy lineáris tér elemeit *vektor*oknak nevezzük.

1.5.2. **Példa.** Az
$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$
halmaz az
$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

módon definiált összeadással és a

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

előírással definiált skalárral való szorzással vektorteret alkot.

1.5.3. **Példa.** Az

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 \in \mathbb{R},\, x_2 \in \mathbb{R},\, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

halmaz az

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

módon definiált összeadással és a

$$\lambda \cdot x = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \lambda \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

előírással definiált skalárral való szorzással vektorteret alkot.

1.5.4. **Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy az $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ vektortér elemeit általánosan sorvektorokként és oszlopvektorokként egyaránt szokás írni. Az oszlopvektoros írásmód sok esetben áttekinthetőbb, azonban bizonyos esetekben a könnyebb áttekinthetőség és a kevesebb helyigény miatt a sorvektorost használjuk.

Az $\mathbb{R}^2$ és az $\mathbb{R}^3$ vektortér elemeit geometriai vektoroknak is nevezzük.

Az $\mathbb{R}^2$ vektortér elemeit a sík geometriai vektorainak, az $\mathbb{R}^3$ vektortér elemeit a tér geometriai vektorainak is hívjuk.

1.5.5. **Példa.** Az $m \times n$ típusú mátrixok halmaza a mátrixok halmazán definiált összeadással és skalárral való szorzással vektorteret alkot.

1.5.6. **Definíció.** Az X vektortér elemeinek egy

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$$

halmazát *vektorrendszer*nek nevezzük.

1.5.7. **Példa.** Tekintsük az $\mathbb{R}^2$ vektorteret és legyenek adottak az

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorok. Ekkor az $\{a_1; a_2; a_3\}$ halmaz egy vektorrendszert alkot $\mathbb{R}^2$-ben.

1.5.8. **Definíció.** Az X vektortér $a_1; a_2; \ldots; a_n$ vektorainak $x_1; x_2; \ldots; x_n$ valós számokkal képzett *lineáris kombinációján* az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n$$

vektort értjük.

1.5.9. **Példa.** Az $a_1; a_2; a_3; a_4$ vektorok egy lineáris kombinációja például

$$5 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 - 5a_3 + a_4.$$

1.5.10. **Definíció.** Legyen X egy vektortér. Azt mondjuk, hogy a $b \in X$ vektor *lineárisan kifejezhető* az $a_1; a_2; \ldots; a_n \in X$ vektorok segítségével, ha léteznek olyan $x_1; x_2; \ldots; x_n$ valós számok, melyekre

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n.$$

Ilyenkor azt is mondjuk, hogy b *előállítható* az $a_1; a_2; \ldots; a_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.

1.5.11. **Példa.** Írjuk fel a $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektort az

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

és az

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vektorok lineáris kombinációjaként!
Könnyen látható, hogy a keresett lineáris kombináció $b = a_1 + a_2$.

1.5.12. **Megjegyzés.** Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektoroknak azokat az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ együtthatóit, amelyek lineáris kombinációjaként a b vektor előáll, egy elsőfokú egyenletrendszer megoldásával kapjuk meg.

1.5.13. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy az

$$\{a_1; a_2; \ldots; a_n\} \subset X$$

vektorrendszer *lineárisan független*, ha a tagjai a zérusvektort csak triviális lineáris kombinációval állítják elő, azaz ha az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = 0$$

egyenlőségből következik, hogy

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Ha egy vektorrendszer nem lineárisan független, akkor azt mondjuk, hogy *lineárisan függő*.

1.5.14. **Példa.** Az $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ és az $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorok lineárisan független vektorrendszert alkotnak, ugyanis az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = 0$$

egyenletrendszert részletesen felírva

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

adódik. Az első egyenlet kétszereséből kivonva a második egyenletet azt kapjuk, hogy $x_2 = 0$, amit például az első egyenletbe visszahelyettesítve $x_1 = 0$ adódik, tehát az a_1 és a_2 vektorok a zérusvektort csak triviális lineáris kombinációval állítják elő.

1.5.15. **Példa.** Az $a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ és az $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ vektorok lineárisan függő vektorrendszert alkotnak, ugyanis az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = 0$$

egyenletrendszert részletesebben felírva

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

adódik. Látható, hogy a második egyenlet kétszerese az elsőnek, így az egyik egyenlet elhagyható.

Az egyenletrendszernek tehát minden olyan $(x_1; x_2)$ számpár megoldása, amelyre

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

teljesül. Például $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ is megoldás, tehát az a_1 és a_2 vektorok nem csak triviális lineáris kombinációval állítják elő a zérusvektort, így a vektorok lineárisan függők.

1.5.16. **Megjegyzés.** A síkon két geometriai vektor pontosan akkor lineárisan függő, ha egyik a másiknak számszorosa.

A síkon két geometriai vektor pontosan akkor lineárisan független, ha nem esnek egy egyenesre, azaz ha egyik sem skalárszorosa a másiknak.

1.5.17. **Definíció.** Egy vektortér maximális elemszámú lineárisan független vektorrendszerét *bázis*nak nevezzük. A maximális tagszám alatt azt értjük, hogy ha hozzáveszünk egy vektort a vektorrendszer tagjaihoz, akkor az már lineárisan függővé válik.

1.5.18. **Megjegyzés.** Egy vektortérben minden bázid azonos elemszámú.

1.5.19. **Definíció.** Egy vektortér egy bázisában lévő vektorainak számát a vektortér *dimenzió*jának mondjuk.

1.5.20. **Tétel.** Egy n dimenziós vektortérben minden, legalább $n+1$ elemszámú vektorrendszer lineárisan függő.

1.5.21. **Példa.** Az $\mathbb{R}^2$ vektortér 2 dimenziós, mert a vektortérnek egy bázisa $\{(1;0),(0;1)\}$, ugyanis egyrészt a vektorok lineárisan függetlenek, mert az

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletrendszerből következik, hogy $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$.

Másrészt ha $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges, akkor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vagyis a vektortér minden eleme előáll $(1;0)$ és $(0;1)$ lineáris kombinációjaként.

1.5.22. **Definíció.** Az $\mathbb{R}^n$ vektortér n-dimenziós, ugyanis egy bázisa az

$$\begin{aligned} e_1 &= (1;0;0;\ldots;0); \\ e_2 &= (0;1;0;\ldots;0); \\ &\vdots \\ e_n &= (0;0;0;\ldots;1) \end{aligned}$$

vektorokból álló vektorrendszer.

Ezt a bázist *természetes bázis*nak vagy *kanonikus bázis*nak nevezzük.

1.5.23. **Tétel.** Ha egy vektorrendszer bázisa a V vektortérnek, akkor a vektortér minden vektora egyértelműen előáll a bázisbeli vektorok lineáris kombinációjaként. Az itt fellépő együtthatókat a vektor adott bázisra vonatkozó *koordinátá*inak mondjuk. Tehát ha

$$\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$$

az X vektortér egy bázisa, akkor tetszőleges $b \in X$ vektor esetén egyértelműen léteznek olyan $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok, hogy

$$b = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n.$$

Az $x_1, x_2, \dots, x_n$ számok a b vektor

$$\{a_1; a_2; \dots; a_n\}$$

bázisra vonatkozó koordinátái.

1.5.24. **Definíció.** Egy vektorrendszer *rang*ja a maximális elemszámú lineárisan független részrendszerének elemszáma.

1.5.25. **Definíció.** Egy mátrix *rang*ja a mátrix oszlopvektoraiból képzett vektorrendszer rangja.

1.5.26. **Tétel.** Az alábbi állítások mátrixok rangja, determinánsa és lineáris függetlensége közötti összefüggéseket adják meg:

1) Egy mátrixnak és a transzponáltjának a rangja megegyezik.

2) Egy mátrix rangja megegyezik a mátrix sorvektoraiból képzett vektorrendszer rangjával.

3) Egy n-edrenű kvadratikus mátrix rangja pontosan akkor n, ha a mátrix determinánsa nem nulla.

4) Egy n-dimenziós vektortérben egy n elemű vektorrendszer pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorokból, mint oszlopvektorokból képzett mátrix determinánsa nulla.

5) Egy n-dimenziós vektortérben egy n elemű vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a vektorokból, mint oszlopvektorokból képzett mátrix determinánsa nem nulla.

6) Egy n-dimenziós vektortérben egy n elemű vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha a vektorokból, mint oszlopvektorokból képzett mátrix determinánsa

nem nulla.

7) Egy n-dimenziós térben egy n-elemű vektorrendszer pontosan akkor bázis, ha a vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix determinánsa nem nulla.

1.5.27. **Példa.** Bázist alkotnak-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben az

$$a_1 = (1;2;3),\ a_2 = (2;3;4),\ a_3 = (3;4;5)$$

vektorok?

Mivel az

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa:

$$\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \end{array} \right. = 15 + 24 + 24 - (27 + 16 + 20) = 0,$$

ezért a vektorrendszer lineárisan függő, tehát nem bázis.

1.5.28. **Tétel.** Egy mátrix rangja nem változik, ha

- bármely két sorát felcseréljük;
- bármelyik sorát nullától különböző számmal szorozzuk;
- bármelyik sorához hozzáadjuk egy másik sorának valahányszorosát.

1.5.29. **Példa.** Határozzuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ mátrix rangját!

Első lépésben az első sor -3-szorosát hozzádjuk a második sorhoz és az első sor -4-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Második lépésben a második sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az alkalmazott eljárás után kapott mátrixban két nemzérus vektor van és ezek lineárisan függetlenek, ezért a rangja 2.

Kidolgozott feladatok

43. **Feladat.** Adjuk meg az $a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ és az $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektoroknak a $3a_1 + 2a_2$ lineáris kombinációját!

Megoldás:

A keresett lineáris kombináció

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

44. **Feladat.** Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}?$$

Megoldás:

Tekintsük az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = 0$$

lineáris kombinációt. Behelyettesítve az a_1, a_2 vektorokat

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

adódik. Elvégezve a skalárral való szorzást, majd az összeadást azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Két vektor pontosan akkor egyenlő, ha a megfelelő helyen lévő koordinátáik egyenlőek, így azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + 3x_2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Az első egyenletből $x_1 = -x_2$ adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $-5x_2 + 3x_2 = 0$, tehát $x_2 = 0$. Mivel $x_1 = -x_2$, ezért $x_1 = 0$. Tehát a vektorok lineárisan független vektorrendszert alkotnak.

A lineáris függetlenséget eldönthetjük az egyes vektorokból képzett mátrix determinánsának kiszámításával is. Ha a determináns értéke nullától különböző,

akkor a vektorok lineárisan függetlenek, egyébként lineárisan függők. Jelen esetben
$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 10 = -4,$$
így a vektorok lineárisan függetlenek.

45. **Feladat.** Lineárisan függetlenek-e az alábbi vektorok:
$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}?$$

Megoldás:

Mivel az
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
mátrix determinánsa
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$
ezért a vektorok linárisan függetlenek.

46. **Feladat.** Határozzuk meg az
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$
mátrix rangját!

Megoldás:

Első lépésben az első sor -2-szeresét hozzádjuk a második sorhoz, az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz és az első sor -4-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

A második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és a második sor -3-szorosát hozzáadjuk a negyedik sorhoz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az alkalmazott eljárás után kapott mátrixban két nemzérus vektor van és ezek lineárisan függetlenek, ezért a rangja 2.

47. **Feladat.** Határozzuk meg az x valós számot úgy, hogy az

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_2 = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorok linárisan függők legyenek!

Megoldás:

A három vektor pontosan akkor lineárisan függő, ha a vektorok által meghatározott

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa zérus. Az A mátrix determinánsa

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 + x + 4 - (-2 + 1 + 2x) = -x + 4.$$

Tehát a determináns értéke pontosan akkor zérus, ha $-x + 4 = 0$, vagyis ha $x = 4$.

1.6. Lineáris egyenletrendszerek megoldási módszerei

Elméleti összefoglaló

1.6.1. **Definíció.** Legyenek a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ és $b_1, \ldots, b_m$ adott valós számok. Ekkor az

$$\left.\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert *lineáris egyenletrendszer*nek hívjuk. Az a_{ij} valós számokat az egyenletrendszer *együtthatói*nak, az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számokat az egyenletrendszer *ismeretlen*einek mondjuk.

Ha az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő minden valós szám zérus (vagyis $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$), akkor azt mondjuk, hogy az egyenletrendszer *homogén*, ellenkező esetben *inhomogén*.

Ha az egyenletrendszernek létezik megoldása, akkor azt mondjuk, hogy *megoldható*, ellenkező esetben azt, hogy *ellentmondásos*.

Ha egy megoldható lineáris egyenletrendszer megoldása egyértelmű, akkor az egyenletrendszert *határozott*nak vagy más szóval *reguláris*nak nevezzük, ellenkező esetben *határozatlan*nak vagy más szóval *irreguláris*nak hívjuk.

Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrixot az egyenletrendszer *alapmátrixa*ként említjük, míg az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

mátrixot az egyenletrendszer *kibővített mátrixának* hívjuk.

Azt mondjuk, hogy két lineáris egyenletrendszer *ekvivalens*, ha ugyanaz a megoldásuk.

1.6.2. **Példa.** Az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 7 \end{array}\right\}$$

lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek x_1, x_2, x_3.

Az egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \end{array}\right).$$

1.6.3. **Definíció.** Ha az 1.6.1 definícióban szereplő lineáris egyenletrendszer esetén bevezetjük az

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix};\ a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix};\ \ldots; a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

valamint a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

jelöléseket, akkor az

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \ldots + x_n \cdot a_n = b$$

összefüggést a lineáris egyenletrendszer *vektori alak*jának nevezzük.

1.6.4. **Példa.** Az 1.6.2 példában szereplő egyenletrendszer esetén bevezetve az

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \; a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}; \; a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

valamint a

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

jelöléseket, akkor az egyenletrendszer vektori alakja

$$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 = b.$$

1.6.5. **Definíció.** Ha az 1.6.1 definícióban szereplő lineáris egyenletrendszer esetén az ismeretleneket az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

oszlopvektor, a jobb oldalt a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oszlopvektor jelöli, akkor az egyenletrendszer az

$$A \cdot x = b$$

alakban írható fel, amelyet a lineáris egyenletrendszer *mátrixos alak*jának nevezünk, ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa.

1.6.6. **Tétel.** (Kronecker-Capelli)
Egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha az alapmátrixának és kibővített mátrixának a rangja megegyezik.

1.6.7. **Megjegyzés.** Amennyiben egy lineáris egyenletrendszer nem megoldható, vagyis az alapmátrixának és kibővített mátrixának a rangja nem egyezik meg, az azt jelenti, hogy az egyenletrendszer trapéz alakú kibővített mátrixának van olyan sora, amelynek csak az utolsó eleme nem nulla.

1.6.8. **Példa.** Az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right).$$

Ha az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz és az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

Ha a második sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz, akkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszer ellentmondásos (nem megoldható), mert a kibővített mátrixának van olyan sora (a harmadik), amelyiknek csak az utolsó eleme nem nulla.

1.6.9. **Tétel.** Egy (megoldható) lineáris egyenletrendszer megoldása akkor és csak akkor egyértelmű, ha az alapmátrix (és így a kibővített mátrix) rangja megegyezik az ismeretlenek számával.

1.6.10. **Tétel.** Ha egy lineáris egyenletrendszer irreguláris, akkor a szabad paraméterek száma az ismeretlenek számának és az alapmátrix rangjának a különbsége.

1.6.11. **Tétel.** Egy lineáris egyenletrendszer megoldása nem változik, ha

- két egyenletet felcserélünk;
- egy egyenletet zérustól különböző számmal szorzunk;
- egy egyenlethez hozzáadjuk egy másik egyenlet valahányszorosát.

1.6.12. **Tétel.** Az előbbi tulajdonságok felhasználásával tetszőleges lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa trapéz alakra hozható úgy, hogy az eredeti kibővített mátrixhoz tartozó egyenletrendszer és a trapéz alakú mátrixhoz tartozó egyenletrendszer ekvivalens legyen.

1.6.13. **Definíció.** A trapéz alakra hozás algoritmusát *Gauss eliminációnak* nevezzük.

1.6.14. **Eljárás.** (Gauss-elimináció)
Legyenek a_{ij} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$ és $b_1, \ldots, b_m$ adott valós számok. Tekintsük az

$$\left.\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

lineáris egyenletrendszert. Tegyük fel, hogy $a_{11} \neq 0$. (Ha $a_{11} = 0$ lenne a kiindulási egyenletrendszer kibővített mátrixában, akkor először cseréljünk fel két sort úgy, hogy a sorcsere után már $a_{11} \neq 0$ teljesüljön.)

A kibővített mátrix első sorának skalárszorosát adjuk hozzá a többi sorhoz úgy, hogy a kibővített mátrixban az a_{11} oszlopában az a_{11} elem alatt valamennyi elem nullává váljon.

Ezután tekintsük az a_{22} elemet az átalakított mátrixban. Ha $a_{22} \neq 0$, akkor a második sor skalárszorosát a többi (alatta lévő) sorhoz hozzáadva elérjük, hogy a mátrixban az a_{22} elem oszlopában az a_{22} alatt valamennyi elem nullává váljon.

Ha az első lépés után az átalakított mátrixban $a_{22} = 0$, akkor a második egyenletet cseréljük meg valamelyik alatta lévő egyenlettel úgy, hogy a csere után $a_{22} \neq 0$ teljesüljön. (Ha nincs mód ilyen cserére, azaz a második oszlopban az a_{22} elem alatt is csupa nulla áll, akkor a második sorban egyet jobbra lépve, az ott lévő elemmel nullázzuk ki az alatta lévőket.)

Folytassuk tovább az előbbi eljárást addig, amíg a főátló alatti elemek mindegyike nullává nem válik.

1.6.15. **Példa.** Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & & & = & 21 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert! Homogén vagy inhomogén az egyenletrendszer? Írjuk fel az egyenletrendszer alapmátrixát és a kibővített mátrixát! Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját! Határozzuk meg az alapmátrix rangját! Határozzuk meg a kibővített mátrix rangját! Megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer? Amennyiben megoldható, reguláris vagy irreguláris? Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását!

Megoldás:

Az egyenletrendszer inhomogén, mert az egyenletrendszer jobb oldalán nem csak nulla számok vannak.

A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa az egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból képzett mátrix, azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 11 \\ 3 & 4 & 0 & 21 \end{array}\right).$$

Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Bevezetve az x és b jelöléseket a mátrixos alak

$$A \cdot x = b$$

formában írható fel, ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa, x az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor, azaz

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

és b az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektor, azaz

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját egyszerre határozzuk meg. A keresett rangok meghatározásához Gauss-eliminációt alkalmazunk. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 3 & 5 & 0 & 21 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -3 & 12 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -8-szorosához hozzáadjuk a harmadik sor 3-szorosát, így azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla elemeket tartalmazó sorok száma. Így az alapmátrix rangja 3.

A kibővített mátrix rangja 3.

Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának és a kibővített mátrixának a rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

Az alapmátrix rangja és az ismeretlenek száma egyenlő, így az egyenletrendszer reguláris (határozott), azaz egyértelmű a megoldása.

A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ & & & - & x_3 & = & -4 \end{array}\right\}.$$

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $x_3 = 4$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$3x_2 - 4 = 5$$

adódik, így $x_2 = 3$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x_1 = 2$.

1.6.16. **Tétel.** (Cramer-szabály)
Ha egy lineáris egyenletrendszer alapmátrixa négyzetes és determinánsa nem nulla, akkor az egyenletrendszer k-adik ismeretlene:

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A} = \frac{D_k}{D},$$

ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa, A_k pedig az a mátrix, amelyet az alapmátrixból úgy kapunk meg, hogy annak k-adik oszlopát az egyenletrendszer jobb oldalán szereplő számokból képzett oszlopvektorra cseréljük ki.

1.6.17. **Példa.** Oldjuk meg Cramer-szabállyal az

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 13 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 16 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert!
Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2.$$

Az első ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix első oszlopát kicseréljük az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektorra. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként áll elő az x_1 ismeretlen. Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 13 & 5 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 78 - 80 = -2,$$

ezért

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

A második ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát kicseréljük az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektorra. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként kapjuk az x_2 ismeretlent. Mivel

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 48 - 52 = -4,$$

ezért

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az egyenletrendszer megoldása: $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$.

1.6.18. **Tétel.** (inverzmátrix-módszer)
Ha az A mátrix olyan kvadratikus mátrix, melynek a determinánsa nem nulla, akkor az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszer megoldása:

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

1.6.19. **Példa.** Oldjuk meg inverzmátrix-módszerrel az

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &= 13 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 16 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert!

Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$A = \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 18 - 20 = -2 \neq 0,$$

így alkalmazható a módszer. Az A mátrix inverze:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

így az egyenletrendszer megoldása

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy $x_1 = 1$ és $x_2 = 2$.

1.6.20. **Megjegyzés.** Az inverzmátrix-módszer egyik fontos előnye, hogy ha ismerjük az alapmátrix inverzét, akkor az

$$A \cdot x = b$$

lineáris egyenletrendszer megoldása bármely b esetén megadható egy mátrix-szorzás elvégzésével.

Kidolgozott feladatok

48. **Feladat.** Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 11 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert!

a) Homogén vagy inhomogén az egyenletrendszer?

b) Írjuk fel az egyenletrendszer alapmátrixát!

c) Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát!

d) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!

e) Határozzuk meg az alapmátrix rangját!

f) Határozzuk meg a kibővített mátrix rangját!

g) Megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer?

h) Amennyiben megoldható, reguláris vagy irreguláris?

i) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását! Irreguláris esetben adjunk meg egy partikuláris megoldást is!

Megoldás:

a) Az egyenletrendszer inhomogén, mert az egyenletrendszer jobb oldalán nem csak nulla számok vannak.

b) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa az egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból képzett mátrix, azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right).$$

d) Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Bevezetve az x és b jelöléseket a mátrixos alak

$$A \cdot x = b$$

formában írható fel, ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa, x az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor, azaz

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

és b az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektor, azaz

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

e) Az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját egyszerre határozzuk meg. A keresett rangok meghatározásához Gauss-eliminációt alkalmazunk. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sor 5-szöröséhez, így azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla elemeket tartalmazó sorok száma. Így az alapmátrix rangja 3.

f) A kibővített mátrix rangja 3.

g) Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának és a kibővített mátrixának a rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

h) Az alapmátrix rangja és az ismeretlenek száma egyenlő, így az egyenletrendszer reguláris (határozott), azaz egyértelmű a megoldása.

i) A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ & & & & 9x_3 & = & 27 \end{array}\right\}.$$

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $x_3 = 3$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-5x_2 + 9 = -1$$

adódik, így $x_2 = 2$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x_1 = 1$.

49. **Feladat.** Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & + & 3x_4 & = & 7 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert!

a) Homogén vagy inhomogén az egyenletrendszer?

b) Írjuk fel az egyenletrendszer alapmátrixát!

c) Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát!

d) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!

e) Határozzuk meg az alapmátrix rangját!

f) Határozzuk meg a kibővített mátrix rangját!

g) Megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer?

h) Amennyiben megoldható, reguláris vagy irreguláris?

i) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását! Irreguláris esetben adjunk meg egy partikuláris megoldást is!

Megoldás:

a) Az egyenletrendszer inhomogén, mert az egyenletrendszer jobb oldalán nem csak nulla számok vannak.

b) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa az egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból képzett mátrix, azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

d) Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Bevezetve az x és b jelöléseket a mátrixos alak

$$A \cdot x = b$$

formában írható fel, ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa, x az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor, azaz

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

és b az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektor, azaz

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

e) Az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját egyszerre határozzuk meg. A keresett rangok meghatározásához Gauss-eliminációt alkalmazunk. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, illetve az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -1-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz, így azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla elemeket tartalmazó sorok száma. Így az alapmátrix rangja 2.

f) A kibővített mátrix rangja 2.

g) Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának és a kibővített mátrixának a rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

h) Az alapmátrix rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma, így az egyenletrendszer irreguláris (határozatlan), azaz végtelen sok megoldása van.

i) A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & - & 5x_2 & + & 3x_3 & & & = & -2 \end{array}\right\}.$$

Az egyenletek száma 2, az ismeretlenek száma 4, ezért $4 - 2 = 2$ darab szabad paramétert kell bevezetnünk. Legyen például $x_4 = k$ és $x_2 = l$, ahol $k, l \in \mathbb{R}$. Ekkor az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x_3 = \frac{5l - 2}{3}.$$

Az első egyenletből

$$x_1 = 3 - 2l - k + \frac{5l - 2}{3} = \frac{7 - t - 3k}{3}$$

adódik.

Például ha $k = 1$ és $l = 1$, akkor az egyenletrendszer egy partikuláris megoldása $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ és $x_4 = 1$.

50. **Feladat.** Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 7 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & + & 7x_4 & = & 7 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert!

a) Homogén vagy inhomogén az egyenletrendszer?
b) Írjuk fel az egyenletrendszer alapmátrixát!
c) Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát!
d) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
e) Határozzuk meg az alapmátrix rangját!
f) Határozzuk meg a kibővített mátrix rangját!
g) Megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer?
h) Amennyiben megoldható, reguláris vagy irreguláris?
i) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását! Irreguláris esetben adjunk meg egy partikuláris megoldást is!

Megoldás:

a) Az egyenletrendszer inhomogén, mert az egyenletrendszer jobb oldalán nem csak nulla számok vannak.
b) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa az egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból képzett mátrix, azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

c) A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{array}\right).$$

d) Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bevezetve az x és b jelöléseket a mátrixos alak

$$A \cdot x = b$$

formában írható fel, ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa, x az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor, azaz

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

és b az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektor, azaz

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

e) Az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját egyszerre határozzuk meg. A keresett rangok meghatározásához Gauss-eliminációt alkalmazunk. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz és az első sor -4-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right).$$

Második lépésben a második sor -2-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és a második sor -3-szorosát hozzáadjuk a negyedik sorhoz, így azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla elemeket tartalmazó sorok száma. Így az alapmátrix rangja 2.

f) A kibővített mátrix rangja 2.

g) Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának és a kibővített mátrixának a rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

h) Az alapmátrix rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma, így az egyenletrendszer irreguláris (határozatlan), azaz végtelen sok megoldása van.

i) A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}\right\}.$$

Az egyenletek száma 2, az ismeretlenek száma 4, ezért $4-2=2$ darab szabad paramétert kell bevezetnünk. Legyen például $x_4 = k$ és $x_3 = l$, ahol $k, l \in \mathbb{R}$. Ekkor az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x_2 = -2l - 3k.$$

Az első egyenletből

$$x_1 - 2l - 3k + l + k = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 1 + l + 2k$$

adódik.

Például ha $k = 0$ és $l = 0$, akkor az egyenletrendszer egy partikuláris megoldása $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ és $x_4 = 0$.

51. **Feladat.** Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert!

a) Homogén vagy inhomogén az egyenletrendszer?
b) Írjuk fel az egyenletrendszer alapmátrixát!
c) Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát!
d) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
e) Határozzuk meg az alapmátrix rangját!
f) Határozzuk meg a kibővített mátrix rangját!
g) Megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer?
h) Amennyiben megoldható, reguláris vagy irreguláris?
i) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását! Irreguláris esetben adjunk meg egy partikuláris megoldást is!

Megoldás:

a) Az egyenletrendszer inhomogén, mert az egyenletrendszer jobb oldalán nem csak nulla számok vannak.

b) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa az egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból képzett mátrix, azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 8 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

d) Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bevezetve az x és b jelöléseket a mátrixos alak

$$A \cdot x = b$$

formában írható fel, ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa, x az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor, azaz

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

és b az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektor, azaz

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

e) Az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját egyszerre határozzuk meg. A keresett rangok meghatározásához Gauss-eliminációt alkalmazunk. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz és az első sor -4-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 8 \\ 4 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \end{array}\right).$$

Második lépésben megcseréljük a második és a harmadik sort

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \end{array}\right).$$

Most a második sort osztjuk 2-vel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \end{array}\right).$$

Ezután a második sor -5-szörösét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és a második sor -9-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz, így azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -9 & 5 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right).$$

Végül a harmadik sor -2-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz. Ekkor

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

adódik. Az utolsó sor elhagyható, mert minden eleme nulla:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla elemeket tartalmazó sorok száma. Így az alapmátrix rangja 3.

f) A kibővített mátrix rangja 3.

g) Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának és a kibővített mátrixának a rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

h) Az alapmátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával, így az egyenletrendszer reguláris (határozott), azaz egyértelmű a megoldása.

i) A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & - & 2x_3 & = & -6 \end{array}\right\}.$$

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $x_3 = 3$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$x_2 = 3 - 1 = 2$$

adódik. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x_1 + 2 - 1 = 2,$$

így $x_1 = 1$.

52. **Feladat.** Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & u & + & v & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & - & u & & & = & 1 \\ 3x & & & & & & & + & v & = & 4 \\ 4x & + & y & + & & + & u & & & = & 6 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert!

a) Homogén vagy inhomogén az egyenletrendszer?

b) Írjuk fel az egyenletrendszer alapmátrixát!

c) Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát!

d) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!

e) Határozzuk meg az alapmátrix rangját!

f) Határozzuk meg a kibővített mátrix rangját!

g) Megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer?

h) Amennyiben megoldható, reguláris vagy irreguláris?

i) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását! Irreguláris esetben adjunk meg egy partikuláris megoldást is!

Megoldás:

a) Az egyenletrendszer inhomogén, mert az egyenletrendszer jobb oldalán nem csak nulla számok vannak.

b) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa az egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból képzett mátrix, azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

d) Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bevezetve az x és b jelöléseket a mátrixos alak

$$A \cdot v = b$$

formában írható fel, ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa, v az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor, azaz

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix}$$

és b az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektor, azaz

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

e) Az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját egyszerre határozzuk meg. A keresett rangok meghatározásához Gauss-eliminációt alkalmazunk. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz, az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz és az első sor -4-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & -4 & -3 & -4 & -6 \end{array}\right).$$

Második lépésben az előbbi mátrix második sorának -1-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz és a második sor -5-szörösét hozzáadjuk a negyedik sor 3-szorosához, így azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -2 & 7 \end{array}\right).$$

A második sor minden eleme zérus, így az a sor elhagyható. Ekkor az alábbi mátrixot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -2 & 7 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla elemeket tartalmazó sorok száma. Így az alapmátrix rangja 3.

f) A kibővített mátrix rangja 3.

g) Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának és a kibővített mátrixának a rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

h) Az alapmátrix rangja kisebb, mint az ismeretlenek száma, így az egyenletrendszer irreguláris (határozatlan), azaz végtelen sok megoldása van.

i) A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & - & y & + & z & + & u & + & v & = & 1 \\ & & 3y & - & 3z & - & 3u & - & 2v & = & -5 \\ & & 3z & & & + & 6u & + & 2v & = & 7 \end{array}\right\}.$$

Az egyenletek száma 3, az ismeretlenek száma 5, ezért $5-3=2$ darab szabad paramétert kell bevezetnünk. Legyen például $u=k$ és $z=l$, ahol $k,l\in\mathbb{R}$. Ekkor az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy

$$v=\frac{3l+6k-7}{2}.$$

A második egyenletből

$$3y=6l+9k-12 \qquad \Rightarrow \qquad y=2l+3k-4$$

adódik.

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x=3+2l+3k-4-l-k-\frac{3l+6k-7}{2}=\frac{5-l-2k}{2}.$$

Például ha $k=1$ és $l=1$, akkor az egyenletrendszer egy partikuláris megoldása $x=1$, $y=1$, $z=1$, $u=1$ és $v=1$.

53. **Feladat.** Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 11 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert!

a) Homogén vagy inhomogén az egyenletrendszer?
b) Írjuk fel az egyenletrendszer alapmátrixát!
c) Írjuk fel az egyenletrendszer kibővített mátrixát!
d) Adjuk meg az egyenletrendszer mátrixos alakját!
e) Határozzuk meg az alapmátrix rangját!
f) Határozzuk meg a kibővített mátrix rangját!
g) Megoldható vagy ellentmondásos a lineáris egyenletrendszer?
h) Amennyiben megoldható, reguláris vagy irreguláris?
i) Adjuk meg az egyenletrendszer általános megoldását! Irreguláris esetben adjunk meg egy partikuláris megoldást is!

Megoldás:

a) Az egyenletrendszer inhomogén, mert az egyenletrendszer jobb oldalán nem csak nulla számok vannak.

b) A lineáris egyenletrendszer alapmátrixa az egyenletrendszer ismeretleneinek együtthatóiból képzett mátrix, azaz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right).$$

d) Az egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Bevezetve az x és b jelöléseket a mátrixos alak

$$A \cdot x = b$$

formában írható fel, ahol A az egyenletrendszer alapmátrixa, x az ismeretleneket tartalmazó oszlopvektor, azaz

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

és b az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektor, azaz

$$b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

e) Az alapmátrix és a kibővített mátrix rangját egyszerre határozzuk meg. A keresett rangok meghatározásához Gauss-eliminációt alkalmazunk. Első lépésben a kibővített mátrix első sorának -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz és az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \end{array}\right).$$

Második lépésben megcseréljük a második és a harmadik sort

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

Most a második sor 3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrix rangja a nem csupa nulla elemeket tartalmazó sorok száma. Így az alapmátrix rangja 3.

f) A kibővített mátrix rangja 3.

g) Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának és a kibővített mátrixának a rangja megegyezik, ezért az egyenletrendszer megoldható.

h) Az alapmátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával, így az egyenletrendszer reguláris (határozott), azaz egyértelmű a megoldása.

i) A Gauss-elimináció elvégzése után kapott kibővített mátrixból felírva az egyenletrendszert azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -7 \\ & & & - & 9x_3 & = & -27 \end{array}\right\}.$$

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $x_3 = 3$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$x_2 = -7 + 9 = 2$$

adódik. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x_1 + 2 + 3 = 6,$$

így $x_1 = 1$.

54. **Feladat.** Tekintsük az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

mátrixot, valamint az

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

és a

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

vektorokat!

a) Írjuk fel az $A \cdot x = b$ egyenletrendszert alkotó egyenleteket!
b) Adjuk meg az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsát!
c) Alkalmazható-e a Cramer-szabály az egyenletrendszer megoldására?
d) Amennyiben lehetséges, oldjuk meg az egyenletrendszert a Cramer-szabály felhasználásával!

a) Az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszer egyenletei:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & = & 4 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right\}.$$

Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$D = \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 - (-3 + 8) = -3.$$

b) Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának a determinánsa nem nulla, ezért alkalmazható a Cramer-szabály.

c) Az első ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix első oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként áll elő az x_1. Mivel

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -3, \text{ ezért } x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

A második ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként kapjuk x_2-t. Mivel

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} = -6, \text{ ezért } x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-6}{-2} = 2.$$

A harmadik ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix harmadik oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként kapjuk az x_3 ismeretlent. Mivel

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} = -9, \text{ ezért } x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

55. **Feladat.** Tekintsük az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & ay & + & z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 7 \\ 3x & + & y & & & = & 4 \end{array}\right\}.$$

egyenletrendszert!

a) Milyen a valós szám esetén alkalmazható a Cramer-szabály?

b) Ha $x = 1$, akkor határozzuk meg az a értékét!

Megoldás:

a) A Cramer-szabály pontosan akkor alkalmazható, ha az alapmátrix determinánsa nem zérus. Az alapmátrix determinánsa

$$D = \det A = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 9a + 2 - (-3 + 3) = 9a + 2,$$

ami pontosan akkor nem zérus, ha

$$9a + 2 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad a \neq -\frac{2}{9}.$$

b) Mivel

$$D_1 = \det \begin{pmatrix} 4 & a & 1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 12a + 7 - (-4 + 12) = 12a - 1,$$

ezért

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{12a-1}{9a+2}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$1 = \frac{12a-1}{9a+2}.$$

A kapott egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$9a + 2 = 12a - 1,$$

amiből $a = 1$ adódik.

56. **Feladat.** Milyen c valós szám esetén van megoldása az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 9 \\ x & + & 2y & + & z & = & 12 \\ -x & + & -y & + & 4z & = & -12 \\ -2x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right\}.$$

egyenletrendszernek? Ezen c érték esetén adjuk is meg az egyenletrendszer megoldását!

Megoldás:

Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \\ -1 & -1 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & 1 & c \end{array}\right).$$

Az első sor -1-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz, az első sort adjuk hozzá a harmadik sorhoz és az első sor 2-szeresét adjuk hozzá a negyedik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 12 \\ -1 & -1 & 4 & -12 \\ -2 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 18+c \end{array}\right).$$

A második sor -3-szorosát adjuk hozzá a negyedik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 18+c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 9+c \end{array}\right).$$

A harmadik sort elosztjuk 3-mal, majd az új harmadik sor 7-szeresét hozzáadjuk a negyedik sorhoz. Ekkor

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -7 & 9+c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2+c \end{array}\right)$$

adódik. Az egyenletrendszer pontosan akkor megoldható, ha $2 + c = 0$, azaz ha $c = -2$. Ekkor azt kapjuk, hogy $z = -1$, $y = 5$ és $x = 3$.

1.7. Lineáris egyenletrendszerek alkalmazása a közgazdaságtanban

57. **Feladat.** Egy vállalkozó háromféle terméket (T_1, T_2, T_3) állít elő három különböző alapanyagból (A_1, A_2, A_3). A T_1 termék egy darabjának előállításához az egyes alapanyagokból rendre $1; 2; 3$ egységre van szükség. A T_2 termék egy darabjának előállításához az egyes alapanyagokból rendre $2; 1; 2$ egységre van szükség. A T_3 termék egy darabjának előállításához az egyes alapanyagokból rendre $3; 1; 4$ egységre van szükség. Az egyes alapanyagokból rendelkezésre álló mennyiségek rendre $90; 50; 130$. Hány darabot kell előállítanunk az egyes termékekből ahhoz, hogy a rendelkezésre álló alapanyagmennyiséget teljesen felhasználjuk?

a) Adjuk meg a feladatot modellező egyenleteket!
b) Adjuk meg a kapott egyenletrendszer alapmátrixát!
c) Adjuk meg az egyenletrendszer kibővített mátrixát!
d) Oldjuk meg az egyenletrendszert Gauss-eliminációval!
e) Oldjuk meg az egyenletrendszert Cramer-szabály segítségével!
f) Oldjuk meg az egyenletrendszert inverz mátrix módszerrel!

<u>**Megoldás**</u>:

a) Ha az első termékből x_1, a második termékből x_2 és a harmadik termékből x_3 darabot állítunk elő, akkor a feltételek szerint az alábbi egyenletrendszernek kell teljesülni

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 90 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 50 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 130 \end{array}\right\}.$$

b) Az egyenletrendszer alapmátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

c) Az egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 2 & 3 & 90 \\ 2 & 1 & 1 & 50 \\ 3 & 2 & 4 & 130 \end{array}\right).$$

d) Az első sor -2-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz és az első sor -3-szorosát hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 90 \\ 0 & -3 & -5 & -130 \\ 0 & -4 & -5 & -140 \end{array}\right).$$

A második sor -4-szeresét hozzáadjuk a harmadik sor 3-szorosához. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 90 \\ 0 & -3 & -5 & -130 \\ 0 & 0 & 5 & 100 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott mátrixból felírva az egyenleteket az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 90 \\ & - & 3x_2 & - & 5x_3 & = & -130 \\ & & & & 5x_3 & = & 100 \end{array}\right\}.$$

egyenletrendszerhez jutunk.

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $x_3 = 20$. A második egyenletből $x_2 = 10$ adódik. Az első egyenletből

$$x_1 + 20 + 60 = 90 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 10.$$

Tehát az első termékből 10, a második termékből 10 és a harmadik termékből 20 darabot kell előállítanunk.

e) Az egyenletrendszer alapmátrixának determinánsa:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 22 - 27 = -5.$$

Mivel az egyenletrendszer alapmátrixának a determinánsa nem nulla, ezért alkalmazható a Cramer-szabály.

Az első ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix első oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként áll elő az x_1. Mivel

$$D_1 = \begin{vmatrix} 90 & 2 & 3 \\ 50 & 1 & 1 \\ 130 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -50, \text{ ezért } x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-50}{-5} = 10.$$

A második ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix második oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadosaként kapjuk x_2-t. Mivel

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 90 & 3 \\ 2 & 50 & 1 \\ 3 & 130 & 4 \end{vmatrix} = -50, \text{ ezért } x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-50}{-5} = 10.$$

A harmadik ismeretlent úgy kapjuk meg, hogy az alapmátrix harmadik oszlopát töröljük, majd annak helyére az egyenletrendszer jobb oldalából képzett oszlopvektort írjuk. Ezután a kapott mátrix determinánsának és az alapmátrix determinánsának hányadossként kapjuk az x_3 ismeretlent. Mivel

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 90 \\ 2 & 1 & 50 \\ 3 & 2 & 130 \end{vmatrix} = -100, \text{ ezért } x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-100}{-5} = 20.$$

f) Az $A \cdot x = b$ lineáris egyenletrendszer megoldása $x = A^{-1} \cdot b$.

Az inverzmátrix b_{11} eleme:

$$b_{11} = \frac{(-1)^{1+1} \cdot \det A_{11}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{2}{5}.$$

A b_{12} elem:

$$b_{12} = \frac{(-1)^{1+2} \cdot \det A_{21}}{\det A} = \frac{-1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{2}{5}.$$

A b_{13} elem:

$$b_{13} = \frac{(-1)^{1+3} \cdot \det A_{31}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1}{5}.$$

A b_{21} elem:

$$b_{21} = \frac{-1^{2+1} \cdot \det A_{12}}{\det A} = \frac{(-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = 1.$$

A b_{22} elem:

$$b_{22} = \frac{(-1)^{2+2} \cdot \det A_{22}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}}{-5} = 1.$$

A b_{23} elem:

$$b_{23} = \frac{(-1)^{2+3} \cdot \det A_{32}}{\det A} = \frac{-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = -1.$$

A b_{31} elem:

$$b_{31} = \frac{(-1)^{3+1} \cdot \det A_{13}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{1}{5}.$$

A b_{32} elem:

$$b_{32} = \frac{(-1)^{3+2} \cdot \det A_{23}}{\det A} = \frac{-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = -\frac{4}{5}.$$

A b_{33} elem:

$$b_{33} = \frac{(-1)^{3+3} \cdot \det A_{33}}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3}{5}.$$

Az inverzmátrix tehát:

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & -5 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Mivel

$$A^{-1} \cdot b = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -5 & -5 & 5 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 90 \\ 50 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix},$$

így $x_1 = 10$, $x_2 = 10$ és $x_3 = 20$.

58. **Feladat.** Egy vállalat költségfüggvényét másodfokú polinomfüggvénnyel modellezzük. Tudjuk, hogy a fixköltség 5 millió forint. Tudjuk továbbá, hogy ezer darab termék előállítási költsége 12 millió forint és kétezer darab termék előállítási költsége 23 millió forint. Adjuk meg a költségfüggvényt!

Megoldás:

Mivel a költségfüggvény másodfokú polinomfüggvény, ezért azokat az a, b, c együtthatókat kell meghatároznunk, amelyekre

$$C(q) = a \cdot q^2 + b \cdot q + c$$

teljesül. Mivel a fixköltség 5 millió forint, ezért

$$C(0) = c = 5.$$

Mivel $C(1) = 12$, ezért

$$a + b + c = 12.$$

Mivel $C(2) = 23$, ezért

$$4a + 2b + c = 23.$$

Tehát az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 12 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 23 \\ & & & & c & = & 5 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 4 & 2 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Az első sor -4-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & -3 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 12 \\ & - & 2b & - & 3c & = & -25 \\ & & & & c & = & 5 \end{array}\right\}.$$

Mivel $c = 5$, ezért a második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$-2b - 15 = -25 \qquad \Rightarrow \qquad b = 5.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$a + 5 + 5 = 12 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2.$$

Tehát a költségfüggvény

$$C(q) = 2q^2 + 5q + 5.$$

59. **Feladat.** Egy vállalat költségfüggvényét másodfokú polinomfüggvénnyel modellezzük. Tudjuk, hogy a fixköltség 50 millió forint. Tudjuk továbbá, hogy ezer darab termék előállítási költsége 75 millió forint és kétezer darab termék előállítási költsége 110 millió forint.

a) Adjuk meg a költségfüggvényt!

b) Határozzuk meg a változóköltség függvény!

c) Adjuk meg a határköltség függvényt!

d) Határozzuk meg az átlagköltség függvényt!

Megoldás:

a) Mivel a költségfüggvény másodfokú polinomfüggvény, ezért meg kell határoznunk azokat az a, b, c együtthatókat, amelyekre

$$C(q) = a \cdot q^2 + b \cdot q + c$$

teljesül. Mivel a fixköltség 50 millió forint, ezért

$$C(0) = c = 50.$$

Mivel $C(1) = 75$, ezért

$$a + b + c = 75.$$

Mivel $C(2) = 110$, ezért

$$4a + 2b + c = 110.$$

Tehát az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 50 \\ 4a & + & 2b & + & c & = & 75 \\ & & & & c & = & 110 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 4 & 2 & 1 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 110 \end{array}\right).$$

Az első sor -4-szeresét adjuk hozzá a második sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & -2 & -3 & -190 \\ 0 & 0 & 1 & 50 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 12 \\ & - & 2b & - & 3c & = & -190 \\ & & & & c & = & 50 \end{array}\right\}.$$

Mivel $c = 50$, ezért a második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$-2b - 150 = -190 \qquad \Rightarrow \qquad b = 20.$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$a + 20 + 50 = 75 \qquad \Rightarrow \qquad a = 5.$$

Tehát a költségfüggvény

$$C(q) = 5q^2 + 20q + 50.$$

b) A változóköltség függvény

$$VC(q) = 5q^2 + 20q.$$

c) A határköltség függvény

$$MC(q) = 10q + 20.$$

d) Az átlagköltség függvény

$$AC(q) = 5q + 20 + \frac{50}{q}.$$

60. **Feladat.** Egy vállalat költségfüggvényét harmadfokú polinomfüggvénnyel modellezzük. Tudjuk, hogy a fixköltség 5 millió forint. Tudjuk továbbá, hogy ezer darab termék előállítási költsége 20 millió forint, kétezer darab termék előállítási költsége 29 millió forint és háromezer darab termék előállítási költsége 38 millió forint.

a) Adjuk meg a költségfüggvényt!

b) Határozzuk meg a változóköltség függvény!

c) Adjuk meg a határköltség függvényt!

d) Határozzuk meg az átlagköltség függvényt!

Megoldás:

a) Mivel a költségfüggvény harmadfokú polinomfüggvény, ezért meg kell határoznunk azokat az a, b, c, d együtthatókat, amelyekre

$$C(q) = a \cdot q^3 + b \cdot q^2 + c \cdot q + d$$

teljesül. Mivel a fixköltség 5 millió forint, ezért

$$C(0) = d = 5.$$

Mivel $C(1) = 20$, ezért

$$a + b + c + d = 20.$$

Mivel $C(2) = 29$, ezért

$$8a + 4b + 2c + d = 29.$$

Mivel $C(3) = 38$, ezért

$$27a + 9b + 3c + d = 38.$$

Tehát az

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & b & + & c & + & d & = & 20 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 29 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & 38 \\ & & & & & & d & = & 5 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Az egyenletrendszer kibővített mátrixa

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 29 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 38 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Az első sor -8-szeresét hozzáadjuk a második sorhoz és az első sor -27-szeresét hozzáadjuk a harmadik sorhoz. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -131 \\ 0 & -18 & -24 & -26 & -502 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

A második sor -9-szeresét hozzáadjuk a harmadik sor 2-szereséhez. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -131 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & 175 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

A Gauss-elimináció után kapott egyenletrendszer:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} a & + & b & + & c & + & d & = & 12 \\ & - & 4b & - & 6c & - & 7d & = & -190 \\ & & & & 6c & + & 11d & = & 175 \\ & & & & & & d & = & 5 \end{array}\right\}.$$

Mivel $d = 5$, ezért a harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy

$$6c + 55 = 175 \qquad \Rightarrow \qquad c = 20.$$

A második egyenletből

$$-4b - 120 - 35 = -131 \qquad \Rightarrow \qquad b = -6$$

adódik. Az első egyenletből

$$a - 6 + 20 + 5 = 20 \qquad \Rightarrow \qquad a = 1$$

adódik.

Tehát a költségfüggvény

$$C(q) = q^3 - 6q^2 + 20q + 5.$$

b) A változóköltség függvény

$$VC(q) = q^3 - 6q^2 + 20q.$$

c) A határköltség függvény

$$MC(q) = 3q^2 - 12q + 20.$$

d) Az átlagköltség függvény

$$AC(q) = q^2 - 6q + 20 + \frac{5}{q}.$$

2. fejezet

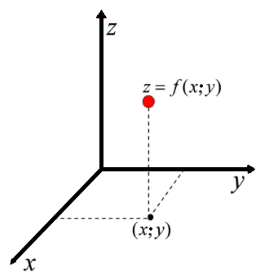
Többváltozós függvények differenciálszámítása

2.1. Alapfogalmak

Elméleti összefoglaló

2.1.1. **Definíció.** Tekintsük a $D \subset \mathbb{R}^n$ halmazt. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvényt n-*változós* függvénynek nevezzük.

2.1.2. **Megjegyzés.** Ha speciálisan az f többváltozós függvényünk kétváltozós, akkor geometriai interpretációját a háromdimenziós Descartes-féle koordinátarendszerben úgy kapjuk, hogy az xy síkban az $(x; y)$ koordinátájú ponthoz az f által hozzárendelt z értéket mérjük fel merőlegesen. Az $\big(x; y; f(x; y)\big)$ pontok által meghatározott alakzat geometriai reprezentációja a függvény grafikonja, amit általában felületnek is szokás nevezni.



2.1.3. **Megjegyzés.** Egy termék iránti kereslet az áron kívül egyéb tényezőktől is függhet. Például a vásárló jövedelmétől, az adott termékre fordított reklámtól. A keresleti függvényt ilyenkor egy többváltozós függvény adja meg.

2.1.4. **Példa.** Richard Stone angliai közgazdász az angliai sörkeresletre az alábbi 4-változós függvényt adta meg:

$$f(x; y; z; u) = 1,058 \cdot x^{0,136} \cdot y^{-0,727} \cdot z^{0,914} \cdot u^{0,816},$$

ahol x a fogyasztó jövedelme, y a sör ára, z egy általános árindex, amely a fogyasztó által a vásárolt egyéb termékekre vonatkozik, u a sör alkoholtartalma.

Érdemes a függvény leképezési szabályában szereplő egyes tényezőket is megvizsgálni.

Észrevehetjük, hogy ha a sör ára növekszik, akkor az iránta való kereslet csökken, hiszen, ha az x, z, u értékek rögzítettek, akkor az y függvényében a függvény monoton csökkenő.

Mivel az x kitevője „kicsi”, ezért, ha a jövedelem nagy, akkor a jövedelem megváltozása alig befolyásolja a keresletet.

Rögzítve az x, y, z értékeket, akkor az u változó függvényében az f függvény monoton növekvő, tehát az angolok a magasabb alkoholtartalmú söröket preferálják.

2.1.5. **Definíció.** Legyen A pozitív valós szám és $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tetszőleges valós számok. Az

$$f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

n-változós függvényt *Cobb-Douglas* függvénynek nevezzük. Ezek a függvények fontos szerepet töltenek be a közgazdaságtani vizsgálatok elméletében.

2.1.6. **Megjegyzés.** A (2.1.4) példában szereplő függvény Cobb-Douglas függvény.

2.1.7. **Példa.** Ragnar Frisch és Trygve Haavelmo közgazdászok tanulmányukban a tej keresletére vonatkozó alábbi függvényt adták meg

$$f(x; y) = A \cdot x^{2{,}08} \cdot y^{-1{,}5} \qquad (x \geq 0,\ y \geq 0),$$

ahol x egy család jövedelme és y a tej relatív ára. Vegyük észre, hogy ez a függvény rögzített x esetén y-ban monoton csökkenő és rögzített y esetén x-ben monoton növekvő. Ez azt jelenti, hogy ha változatlan jövedelem esetén a tej ára nő, akkor a tej iránti kereslet csökken és ha változatlan a tej egységára, akkor növekvő jövedelem esetén több tejet fogunk vásárolni.

2.1.8. **Definíció.** A közgazdaságtanban fontos szerepet töltenek be az úgynevezett *termelési függvény*ek. A termelési függvények a termelési tényezők kombinációi és az általuk termelhető maximális termékmennyiség közötti összefüggést adják meg.

A termelési tényezőknek általában két csoportját különböztetjük meg. Ezek a munkaerő mennyisége (L) és az úgynevezett tőkejavak (K). Például L lehet egy vállalatnál dolgozó munkások száma és K az alkalmazott munkaeszközök mennyisége.

2.1.9. **Definíció.** Egy fogyasztónak el kell döntenie, hogy valamely időszakban n különböző jószágból milyen mennyiségeket vásároljon. A hasznosságelmélet szerint a fogyasztó preferenciái egy $U(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ *hasznossági függvény*nyel reprezentálhatóak, amely a fogyasztó elégedettségét méri akkor, ha az első termékből x_1 mennyiséget, a második termékből x_2 mennyiséget, stb. az n-edik termékből x_n mennyiséget vásárol.

2.1.10. **Definíció.** Az $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény c valós számhoz tartozó szintvonala az $f(x;y) = c$ egyenlet megoldásainak halmaza. Tehát a c értékhez tartozó szintvonal az

$$\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x;y) = c\}$$

halmaz.

2.1.11. **Példa.** Az $f(x,y) = x^2+y^2$ függvény $c \geq 0$ értékhez tartozó szintvonala azon pontok halmaza a síkon, amelyekre az $x^2 + y^2 = c$ egyenlet teljesül. Tehát a szintvonalak a $\sqrt{c}$ sugarú körök.

2.1.12. **Definíció.** Jelölje $f(K;L)$ egy cég kibocsátását (termelési függvény), K a felhasznált tőke mennyisége és L a felhasznált munkaerő mennyisége. Ezen függvény szintvonalainak halmazát *izokvant görbék*nek nevezzük.

2.1.13. **Megjegyzés.** Az izokvant görbék a mikroökonómiai termeléselméletben fontos szerepet töltenek be.

A termeléselmélet modelljében a vállalatok termelési tényezőket alakítanak át kibocsátássá. Az izokvant görbéket a kétdimenziós Descartes-féle koordinátarendszerben ábrázolhatjuk úgy, hogy az egyik tengelye az egyik tényező (például a munkaerő), másik tengelye pedig a másik tényező (például a tőke) mennyiségét reprezentálja.

Egy izokvant görbe azon tényezőkombinációk halmaza, amelyekhez ugyanaz a kibocsátási szint tartozik.

Például ha a termelési függvény $f(K;L) = K \cdot L$, ahol K a tőke és L a munkaerő, akkor például $f(2;3) = f(3;2)$, ami azt jelenti, hogy 2 egységnyi tőke és 3 egységnyi (például 3 órányi) munkaidő ugyanazt a kibocsátást adja, mint 3 egységnyi tőke és 2 egységnyi (például 2 órányi) munkaidő. Ez azt jelenti, hogy a $(2;3)$ pont és a $(3;2)$ pont ugyanazon az izokvant görbén van rajta.

2.1.14. **Definíció.** Egy kétváltozós hasznossági függvény szintvonalait a hasznossági függvény *közömbösségi görbé*inek nevezzük.

2.1.15. **Megjegyzés.** A közömbösségi görbe a mikroökonómiai fogyasztáselmélet egyik fontos fogalma. Ebben a modellben a fogyasztó csak két termékből vásárolhat különböző mennyiségeket. A közömbösségi görbék a kétdimenziós Descartes-féle koordinátarendszerben ábrázolhatók. A keletkezett görbe pontjainak első koordinátája az egyik, második koordinátája a másik termékből vásárolt mennyiséget reprezentálja.

Egy közömbösségi görbe azon termékkombinációk halmaza, amelyek közül a vásárló számára mindegy, hogy melyiket választja, tehát ezek a „termékkombinációk” egyforma hasznosságúak, egyenértékűek, közömbösek számára.

Például egy fogyasztó két terméket vásárolhat: almát és körtét. Hasznossági függvénye $U(x;y) = x + 2y$, ahol x az almából vásárolt mennyiséget és y a körtéből vásárolt mennyiséget jelenti. Mivel $U(3;1) = U(1;2)$, ezért 3 alma és 1 körte a fogyasztó számára ugyanannyit ér, mint 1 alma és 2 körte. Ez azt is jelenti, hogy ugyanazon a közömbösségi görbén van rajta a $(3;1)$ pont és az $(1;2)$ pont.

Kidolgozott feladatok

61. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(K;L) = 2 \cdot K^{\frac{3}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}}$$

termelési függvényt, ahol L a munkások száma és K az alkalmazott munkaeszközök száma! Milyen termelési szintet reprezentál a termelési függvény, ha a munkások száma 25 fő és a munkaeszközök száma 100 darab?

Megoldás:

A feladat az, hogy számoljuk ki az f függvény helyettesítési értékét a $K = 100$, $L = 25$ helyen! A helyettesítési érték, azaz a termelési szint

$$f(100;25) = 2 \cdot 100^{\frac{3}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} = 2 \cdot 1\,000 \cdot 5 = 10\,000.$$

62. **Feladat.** Egy fogyasztó két terméket fogyaszt. Az A termékből x darabot és a B termékből y darabot. Hasznossági függvénye

$$U(x;y) = 10xy.$$

Milyen hasznossági szint tartozik ahhoz az esethez, ahol az A termékből 5 és B termékből 3 darab terméket fogyaszt a fogyasztó?

Megoldás:

Ki kell számolnunk az U függvény helyettesítési értékét az $(5;3)$ helyen:

$$U(5;3) = 10 \cdot 5 \cdot 3 = 150.$$

63. **Feladat.** Egy gyár kétféle terméket állít elő, A és B termékeket. Az A termékből q_1 darabot, a B termékből q_2 darabot gyártanak. A gyár együttes költségfüggvénye

$$C(q_1;q_2) = 40q_1 + 30q_2 + q_1 \cdot q_2 + 10\,000.$$

A költséget forintban értjük.

a) Adjuk meg a költségfüggvényt, ha az A termékből 100 darabot gyártanak!
b) Adjuk meg a költséget, ha az A termékből 10 darabot és a B termékből 20 darabot gyártanak.
c) Határozzuk meg a költségfüggvényt, ha csak az A terméket gyártjuk.
d) Határozzuk meg a költségfüggvényt, ha csak a B terméket gyártjuk.
e) Olcsóbb-e a két terméket együtt termelni, mint külön-külön?

Megoldás:

a) Ha az A termékből 100 darabot gyártanak, akkor a költségfüggvény

$$C(100; q_2) = 40 \cdot 100 + 30q_2 + 100q_2 + 10\,000 = 14\,000 + 130q_2.$$

b) A költség

$$C(10; 20) = 40 \cdot 10 + 30 \cdot 20 + 10 \cdot 20 + 10\,000 = 11\,200.$$

c) Ha csak az A terméket gyártjuk, akkor a költségfüggvény

$$C(q_1; 0) = 40q_1 + 10\,000.$$

d) Ha csak a B terméket gyártjuk, akkor a költségfüggvény

$$C(0; q_2) = 30q_2 + 10\,000.$$

e) A két terméket olcsóbb együtt termelni, ha

$$C(q_1) + C(q_2) - C(q_1; q_2) > 0.$$

Mivel

$$\begin{aligned} C(q_1; 0) + C(0; q_2) - C(q_1; q_2) &= 40q_1 + 30q_2 + 20\,000 - \\ &- 40q_1 - 30q_2 - q_1 \cdot q_2 - 10\,000 = \\ &= 10\,000 - q_1 \cdot q_2, \end{aligned}$$

ezért a két terméket akkor éri meg jobban együtt termelni, mint külön-külön, ha

$$10\,000 - q_1 \cdot q_2 > 0,$$

azaz ha $q_1 \cdot q_2 < 10\,000$.

64. **Feladat.** Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2$ síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x; y) = \ln x + \ln y$$

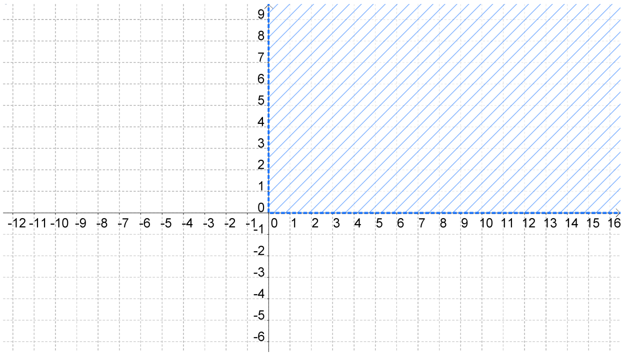
függvény értelmezve van és ábrázoljuk a kapott halmazt!

Megoldás:

Az f függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza a síkon, amelyekre teljesül, hogy $x > 0$ és $y > 0$. Tehát az értelmezési tartomány

$$D_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \text{ és } y > 0\}.$$

Az értelmezési tartomány ábrázolása:



65. **Feladat.** Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2$ síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x;y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

függvény értelmezve van és ábrázoljuk a kapott halmazt!

Megoldás:

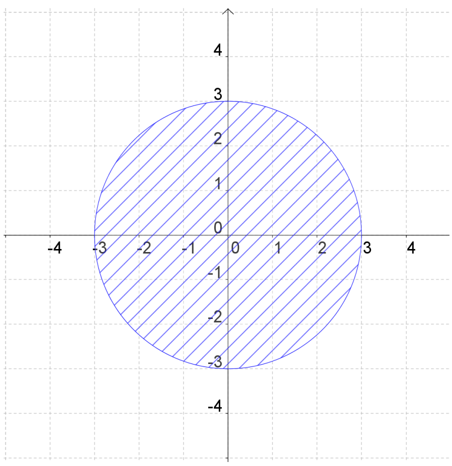
Az f függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza a síkon, amelyekre teljesül, hogy

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 9.$$

Tehát az értelmezési tartomány egy origó középpontú, 3 egység sugarú zárt körlemez:

$$D_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

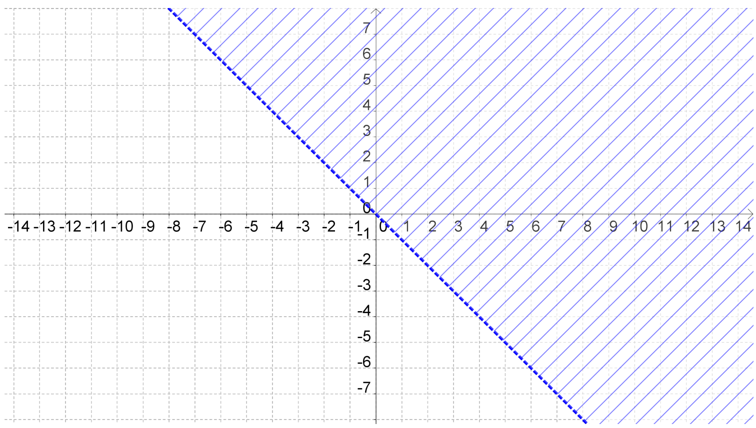
Az értelmezési tartomány ábrázolása:



66. **Feladat.** Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2$ síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az
$$f(x;y) = \ln(x+y)$$
függvény értelmezve van és ábrázoljuk a kapott halmazt!

Megoldás:

Az f függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza a síkon, amelyekre teljesül, hogy
$$x + y > 0 \quad \Rightarrow \quad y > -x.$$
Tehát az értelmezési tartomány:
$$D_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > -x\}.$$
Az értelmezési tartomány ábrázolása:



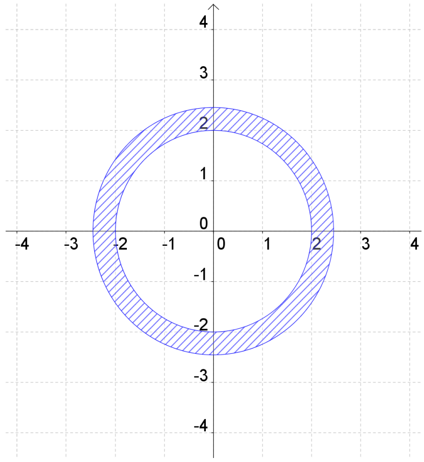
67. **Feladat.** Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2$ síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az
$$f(x;y) = \arcsin\left(x^2 + y^2 - 5\right)$$
függvény értelmezve van és ábrázoljuk a kapott halmazt!

Megoldás:

Az f függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza a síkon, amelyekre teljesül, hogy
$$-1 \leq x^2 + y^2 - 5 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 6.$$
Tehát az értelmezési tartomány:
$$D_f = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 6\}.$$

Az értelmezési tartomány tehát egy origó középpontú 2 sugarú és egy origó középpontú $\sqrt{6}$ sugarú kör által határolt körgyűrű.

Az értelmezési tartomány ábrázolása:



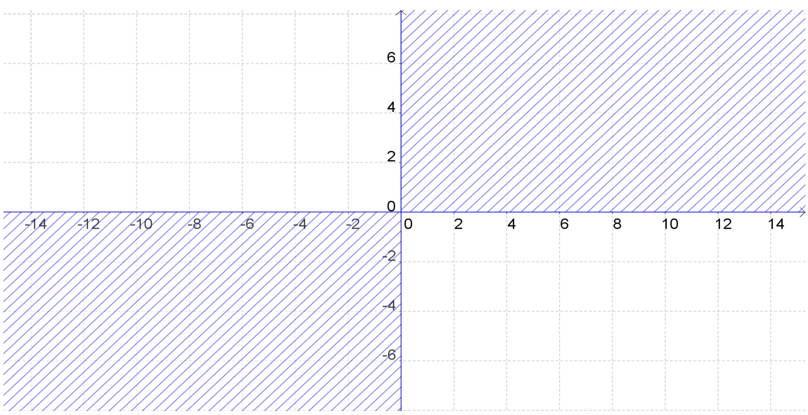
68. **Feladat.** Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2$ síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x;y) = \ln(x \cdot y)$$

függvény értelmezve van és ábrázoljuk a kapott halmazt!

Megoldás:

Az f függvény értelmezési tartománya azon pontok halmaza a síkon, amelyekre teljesül, hogy $x \cdot y > 0$. Ez úgy lehet, ha $x > 0$ és $y > 0$ vagy $x < 0$ és $y < 0$. Az értelmezési tartomány ábrázolása:



69. **Feladat.** Tekintsük az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x;y) = x^2 + y^2$ függvényt!

a) Határozzuk meg az $\mathbb{R}^2$ síknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az f függvény értelmezve van!

b) Számoljuk ki az $f(1;2)$ függvényértéket!

c) Számoljuk ki az $f(-2;3)$ függvényértéket!

d) Oldjuk meg az $f(x;2) = 8$ egyenletet!

e) Adjuk meg az f függvény értékkészletét!

f) Határozzuk meg az f függvény $z = 4$ értékhez tartozó szintvonalát és ábrázoljuk a szintvonalat!

g) Határozzuk meg az f függvény $z = c$ $(c \in \mathbb{R})$értékhez tartozó szintvonalát!

h) Adjuk meg az $x = 2$ értékhez tartozó paramétervonalat!

i) Adjuk meg az $y = 1$ értékhez tartozó paramétervonalat!

j) Ábrázoljuk az f függvény grafikonját!

Megoldás:

a) Az f függvény értelmezési tartomány a teljes $\mathbb{R}^2$ sík.

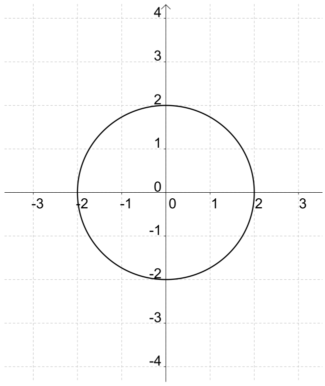
b) Behelyettesítve az f függvénybe az $x = 1$ és $y = 2$ értékeket azt kapjuk, hogy
$$f(1;2) = 1^2 + 2^2 = 5.$$

c) Behelyettesítve az f függvénybe az $x = -2$ és $y = 3$ értékeket azt kapjuk, hogy
$$f(-2;3) = (-2)^2 + 3^2 = 13.$$

d) Mivel $f(x;2) = x^2 + 4$, ezért az $x^2 + 4 = 8$ egyenletet kell megoldanunk, amiből azt kapjuk, hogy $x = \pm 2$.

e) Az f függvény leképzési szabálya $f(x;y) = x^2 + y^2$. Mivel $x^2 \geq 0$ és $y^2 \geq 0$, ezért az f függvény értékkészlete
$$f(x;y) \in [0;\infty[.$$

f) A $z = 4$ értékhez tartozó szintvonal azon $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ pontok halmaza, amelyekre $x^2 + y^2 = 4$ teljesül, amely egy origó középpontú, 2 sugarú körvonal:



g) A szintvonalak az

$$x^2 + y^2 = c,$$

egyenlet megoldásai, azaz origó középpontú, $\sqrt{c}$ sugarú körvonalak.

h) Az $x = 2$ értékhez tartozó paramétervonal

$$f(2; y) = 4 + y^2,$$

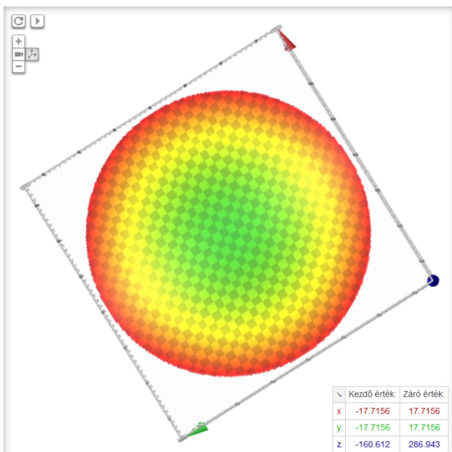
azaz egy parabola.

i) Az $y = 1$ értékhez tartozó paramétervonal

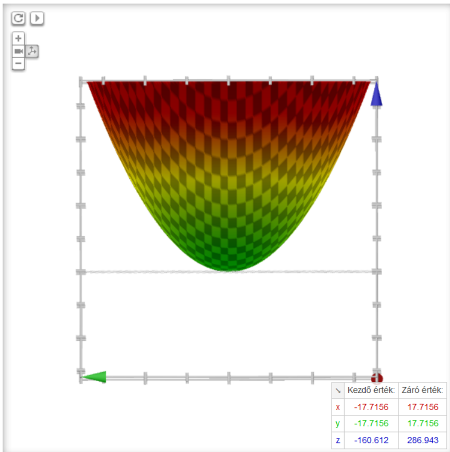
$$f(x; 1) = x^2 + 1,$$

azaz szintén egy parabolát kaptunk.

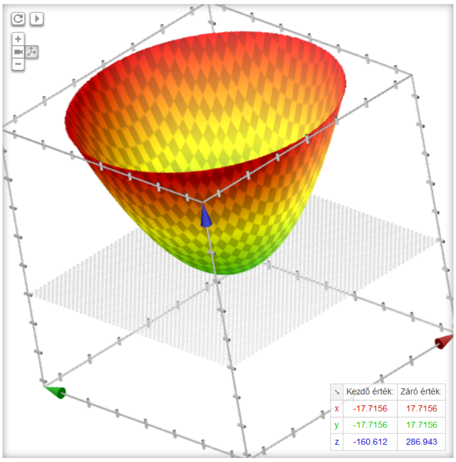
j) A korábbiakban azt kaptuk, hogy a függvény szintvonalai origó középpontú, koncentrikus körvonalak:



A paramétervonalak parabolák:



Tehát a függvény grafikonja:

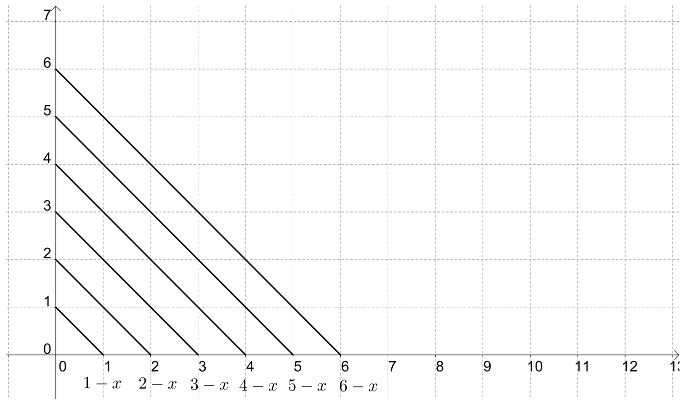


70. **Feladat.** Határozzuk meg az $U(x;y) = x+y$ $(x, y \geq 0)$ hasznossági függvény közömbösségi görbéit! Ábrázoljuk a $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ értékekhez tartozó közömbösségi görbéket!

Megoldás:

Mivel $c \geq 0$ esetén a közömbösségi görbéket az $x + y = c$ egyenlet határozza meg, ami azt jelenti, hogy $y = c - x$, ezért a közömbösségi görbék -1 meredekségű, egymással párhuzamos egyenesek.

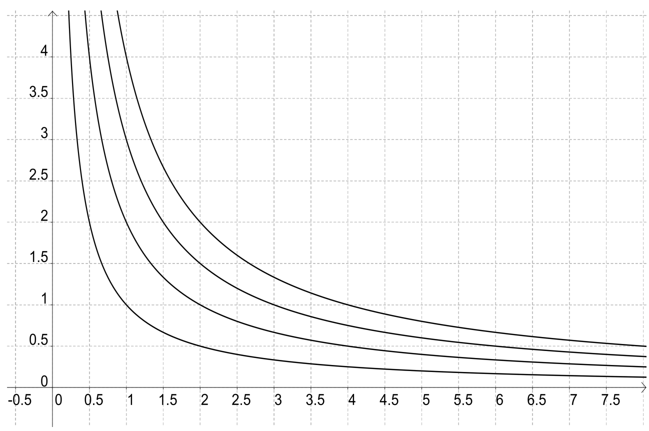
A $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ értékekhez tartozó közömbösségi görbék ábrázolása:



71. **Feladat.** Határozzuk meg az $U(x;y) = x \cdot y$ $(x, y > 0)$ hasznossági függvény közömbösségi görbéit! Ábrázoljuk a $c = 1, 2, 3, 4$ értékekhez tartozó közömbösségi görbéket!

Megoldás:

Mivel minden c esetén a közömbösségi görbéket az $x \cdot y = c$ egyenlet határozza meg, ezért azt kapjuk, hogy $y = \frac{c}{x}$, ezért a közömbösségi görbék hiperbolák. A $c = 1, 2, 3, 4$ értékekhez tartozó közömbösségi görbék ábrázolása:



2.2. Parciális deriválás

Elméleti összefoglaló

2.2.1. **Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *parciálisan differenciálható* az x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ változó szerint az értelmezési tartományának egy $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ pontjában, ha az

$$x_i \mapsto f(p_1; p_2; \dots; p_{i-1}; x_i; p_{i+1}; \dots; p_n)$$

függvény differenciálható az p_i helyen. Ekkor az előbbi függvény p_i-beli deriváltját az f függvény x_i szerinti *parciális derivált*jának nevezzük a P pontban.

Az f függvény x_i változó szerinti parciális deriváltjának jelölései:

$$f'_{x_i}(x_1; x_2; \dots; x_n); \qquad \partial_{x_i} f(x_1; x_2; \dots; x_n);$$

$$\partial_i f(x_1; x_2; \dots; x_n); \qquad \frac{\partial f(x_1; x_2; \dots; x_n)}{\partial x_i};$$

$$\frac{df(x_1; x_2; \dots; x_n)}{dx_i}.$$

Amennyiben a függvény változói egyértelműek, úgy azokat a parciális deriváltakban elhagyhatjuk.

Magát az

$$x_i \mapsto f'_{x_i}(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

leképezést *parciális derivált függvény*nek nevezzük.

Többváltozós függvények esetén az „x_i változó szerinti parciális derivált” elnevezés helyett az „x_i változó szerinti derivált” rövidebb elnevezést is fogjuk használni.

2.2.2. **Megjegyzés.** Az előbbi definíció speciálisan kétváltozós függvényekre az alábbi módon fogalmazható meg.

Az $(x; y) \mapsto f(x; y)$ függvény parciálisan differenciálható az x változó szerint az értelmezési tartományának egy $(a; b)$ pontjában, ha rögzített második változó esetén az első változóban differenciálható az a helyen, azaz ha létezik a

$$f'_x(a; b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x; b) - f(a; b)}{x - a}$$

véges határérték.

Az $(x;y) \mapsto f(x;y)$ függvény parciálisan differenciálható az y változó szerint az értelmezési tartományának egy $(a;b)$ pontjában, ha rögzített első változó esetén a második változóban differenciálható a b helyen, azaz ha létezik a

$$f'_y(a;b) = \lim_{y \to b} \frac{f(a;y) - f(a;b)}{y - b}$$

véges határérték.

2.2.3. **Definíció.** Többváltozós függvény *másodrendű parciális derivált függvény*ei az elsőrendű parciális derivált függvények parciális derivált függvényei. Többváltozós függvény *m-edrendű parciális derivált függvényei* az $m-1$-edrendű parciális derivált függvények parciális derivált függvényei.

A másodrendű parciális derivált függvény jelölése: $f''_{x_i x_j}$.

Az m-edrendű parciális derivált függvény jelölése: $f^{(m)}_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}$.

Az $f^{(m)}_{x_{i_1} \dots x_{i_m}}$ parciális derivált függvényeket *tiszta m-edrendű parciális derivált függvények*nek mondjuk, ha $i_1 = \ldots = i_m$. Ellenkező esetben *vegyes másodrendű parciális derivált függvények*ről beszélünk.

2.2.4. **Megjegyzés.** Az $(x;y) \mapsto f(x;y)$ kétváltozós függvény tiszta másodrendű derivált függvényei f''_{xx} és f''_{yy}, vegyes parciális derivált függvényei f''_{xy} és f''_{yx}.

2.2.5. **Tétel.** (Young-tétel.)
Ha egy többváltozós függvény parciális derivált függvényei folytonos függvények, akkor a vegyes másodrendű parciális derivált függvényei egyenlőek.

2.2.6. **Következmény.** Az $(x;y) \mapsto f(x;y)$ függvény esetén, ha f''_{xy} és f''_{yx} folytonos függvények, akkor

$$f''_{xy}(x;y) = f''_{yx}(x;y).$$

2.2.7. **Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *(totálisan) differenciálható* a $P = (p_1;\ldots;p_n) \in D$ pontban, ha léteznek olyan $A_1 \ldots, A_n$ valós számok, amelyekre az

$$\frac{f(x_1;\ldots;x_n) - \big(A_1 \cdot (x_1 - p_1) + \ldots + A_n \cdot (x_n - p_n) + f(p_1;\ldots;p_n)\big)}{\sqrt{(x_1 - p_1)^2 + \ldots + (x_n - p_n)^2}}$$

függvény határértéke 0, ha $(x_1;\ldots;x_n) \to (p_1;\ldots;p_n)$.

2.2.8. **Tétel.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Ha az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény (totálisan) differenciálható a $P \in D$ pontban, akkor minden változója szerint léteznek a parciális derivált függvényei a P pontban. Tehát a totális differenciálhatóság elégséges feltétele a parciális derivált függvények létezésének.

2.2.9. **Tétel.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz. Ha az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvénynek a $P \in D$ pont egy környezetében léteznek a parciális derivált függvényei és azok folytonos függvények, akkor f (totálisan) differenciálható a P pontban.

Kidolgozott feladatok

72. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y) = x^2 + 3xy + y^3$$

függvény első- és másodrendű parciális derivált függvényeit! Adjuk meg a derivált függvények helyettesítési értékét az $(1;0)$ helyen!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális derivált függvények

$$f'_x(x;y) = 2x + 3y$$
$$f'_y(x;y) = 3x + 3y^2.$$

A másodrendű parciális derivált függvények

$$f''_{xx}(x;y) = 2 \qquad f''_{xy}(x;y) = 3$$
$$f''_{yx}(x;y) = 3 \qquad f''_{yy}(x;y) = 6y.$$

Az elsőrendű parciális derivált függvények helyettesítési értékei az $(1;0)$ helyen

$$f'_x(1;0) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 2$$
$$f'_y(1;0) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0^2 = 3.$$

A másodrendű parciális derivált függvények helyettesítési értékei az $(1;0)$ helyen

$$f''_{xx}(1;0) = 2 \qquad f''_{xy}(1;0) = 3$$
$$f''_{yx}(1;0) = 3 \qquad f''_{yy}(1;0) = 6 \cdot 0 = 0.$$

73. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = \ln(x^2 + y^3)$ függvény első- és másodrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

Az f függvény összetett függvény. A külső függvény $k(x) = \ln x$, a belső függvény $b(x;y) = x^2 + y^3$.

A külső függvény deriváltja $k'(x) = \dfrac{1}{x}$.

A belső függvény x változó szerinti derivált függvénye: $b'_x(x;y) = 2x$.

A belső függvény y változó szerinti derivált függvénye: $b'_y(x;y) = 3y^2$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális derivált függvények

$$f'_x(x;y) = \frac{1}{x^2+y^3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+y^3};$$

$$f'_y(x;y) = \frac{1}{x^2+y^3} \cdot 3y^2 = \frac{3y^2}{x^2+y^3}.$$

A másodrendű parciális derivált függvények kiszámolásához a törtfüggvény deriválási szabályát kell alkalmaznunk:

$$f''_{xx}(x;y) = \frac{2\cdot(x^2+y^3) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^3)^2} = \frac{2y^3-2x^2}{(x^2+y^3)^2};$$

$$f''_{xy}(x;y) = \frac{-3y^2\cdot 2x}{(x^2+y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2};$$

$$f''_{yx}(x;y) = \frac{-2x\cdot 3y^2}{(x^2+y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2};$$

$$f''_{yy}(x;y) = \frac{6y\cdot(x^2+y^3) - 3y^2\cdot 3y^2}{(x^2+y^3)^2} = \frac{6x^2y-3y^4}{(x^2+y^3)^2}.$$

74. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = \sqrt{x+y^2}$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

Az f függvény összetett függvény. A külső függvény

$$k(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

a belső függvény $b(x;y) = x + y^2$.
A külső függvény deriváltja

$$k'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}.$$

A belső függvény x változó szerinti derivált függvénye: $b'_x(x;y) = 1$.

A belső függvény y változó szerinti derivált függvénye: $b'_y(x;y) = 2y$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális derivált függvények

$$f'_x(x;y) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+y^2}}\cdot 1 = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+y^2}};$$

$$f'_y(x;y) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x+y^2}}\cdot 2y = \frac{2y}{2\cdot\sqrt{x+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}.$$

75. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = \mathrm{e}^{xy}$ függvény első- és másodrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

Az f függvény összetett függvény. A külső függvény $k(x) = \mathrm{e}^x$, a belső függvény $b(x;y) = xy$.
A külső függvény deriváltja $k'(x) = \mathrm{e}^x$.

A belső függvény x változó szerinti derivált függvénye: $b'_x(x;y) = y$.

A belső függvény y változó szerinti derivált függvénye: $b'_y(x;y) = x$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális derivált függvények

$$f'_x(x;y) = \mathrm{e}^{xy}\cdot y;$$

$$f'_y(x;y) = \mathrm{e}^{xy}\cdot x.$$

A másodrendű parciális derivált függvények kiszámolásához a szorzatfüggvényre és a konstansszorzóra vonatkozó deriválási szabályt alkalmazzuk:

$$f''_{xx}(x;y) = \mathrm{e}^{xy}\cdot y^2;$$

$$f''_{xy}(x;y) = \mathrm{e}^{xy}\cdot xy + \mathrm{e}^{xy}\cdot 1 = \mathrm{e}^{xy}\cdot(xy+1);$$

$$f''_{yx}(x;y) = \mathrm{e}^{xy}\cdot xy + \mathrm{e}^{xy}\cdot 1 = \mathrm{e}^{xy}\cdot(xy+1);$$

$$f''_{yy}(x;y) = \mathrm{e}^{xy}\cdot x^2.$$

76. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y) = \sqrt{x^2+6xy+y^3}$$

függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

Az f függvény összetett függvény. A külső függvény

$$k(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

a belső függvény $b(x;y) = x^2 + 6xy + y^3$.
A külső függvény deriváltja

$$k'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}.$$

A belső függvény x változó szerinti derivált függvénye: $b'_x(x;y) = 2x + 6y$.

A belső függvény y változó szerinti derivált függvénye: $b'_y(x;y) = 6x + 3y^2$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával.

Tehát az x változó szerinti parciális derivált függvény

$$f'_x(x;y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 6xy + y^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 6y) = \frac{2x + 6y}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 6xy + y^3}} =$$
$$= \frac{x + 3y}{\sqrt{x^2 + 6xy + y^3}}.$$

Az y változó szerinti parciális derivált függvény

$$f'_y(x;y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 6xy + y^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (6y + 3y^2) = \frac{6y + 3y^2}{2 \cdot \sqrt{x^2 + 6xy + y^3}}.$$

77. **Feladat.** Adjuk meg az $f(x;y) = \mathrm{tg}(x^2 + y^2)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjait és az $f''_{xx}(x;y)$ másodrendű parciális deriváltat!

Megoldás:

Az f függvény összetett függvény. A külső függvény $k(x) = \mathrm{tg}x$, a belső függvény $b(x;y) = x^2 + y^2$.

A külső függvény deriváltja $k'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

A belső függvény x változó szerinti derivált függvénye: $b'_x(x;y) = 2x$.

A belső függvény y változó szerinti derivált függvénye: $b'_y(x;y) = 2y$.

Az összetett függvény deriválási szabálya szerint a külső függvény deriváltjába a változó helyére beírjuk az eredeti belső függvényt, majd az eredményt szorozzuk a belső függvény deriváltjával. Tehát az elsőrendű parciális derivált függvények

$$f'_x(x;y) = \frac{1}{\cos^2(x^2+y^2)} \cdot 2x = \frac{2x}{\cos^2(x^2+y^2)};$$

$$f'_y(x;y) = \frac{1}{\cos^2(x^2+y^2)} \cdot 2y = \frac{2y}{\cos^2(x^2+y^2)}.$$

Az f''_{xx} parciális derivált függvényt a hányados függvény és az összetett függvény deriválási szabályával kapjuk:

$$f''_{xx}(x;y) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2+y^2) - 2x \cdot 2 \cdot \cos(x^2+y^2) \cdot \big(-\sin(x^2+y^2)\big) \cdot 2x}{\cos^4(x^2+y^2)}.$$

Tehát

$$f''_{xx}(x;y) = \frac{\cos(x^2+y^2) \cdot \big(2\cos(x^2+y^2) + 8x^2 \cdot \sin(x^2+y^2)\big)}{\cos^4(x^2+y^2)} = $$
$$= \frac{2\cos(x^2+y^2) + 8x^2 \cdot \sin(x^2+y^2)}{\cos^3(x^2+y^2)}.$$

78. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y) = x^2 \cdot \sin(x^3+y^4)$$

függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

Az x szerinti parciális deriváltnál a szorzat függvény deriválási szabályát használjuk fel. Tehát

$$f'_x(x;y) = 2x \cdot \sin(x^3+y^4) + x^2 \cdot \big(\cos(x^3+y^4)\big) \cdot 3x^2 =$$
$$= 2x \cdot \sin(x^3+y^4) + 3x^4 \cdot \cos(x^3+y^4).$$

Az y szerinti parciális derivált meghatározásakor az x^2 konstansszorzó. Ennek megfelelően az y változó szerinti parciális derivált függvény

$$f'_y(x;y) = 4x^2 \cdot y^3 \cdot \cos(x^3+y^4).$$

79. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y) = \frac{x^5+xy}{(x+y)^3}$$

függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális deriváltak kiszámolásához a hányados függvény deriválási szabályát alkalmazzuk úgy, hogy a nevező összetett függvény:

$$f'_x(x;y) = \frac{(5x^4+y)\cdot(x+y)^3 - (x^5+xy)\cdot 3\cdot(x+y)^2}{(x+y)^6}$$

$$f'_y(x;y) = \frac{x\cdot(x+y)^3 - (x^5+xy)\cdot 3\cdot(x+y)^2}{(x+y)^6}.$$

80. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y) = x^5 \cdot \mathrm{e}^{2xy}$$

függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

Az x szerinti parciális deriváltnál a szorzat deriválási szabályát használjuk fel, az y szerinti parciális derivált meghatározásakor az x^5 konstansszorzó. Mindkét deriváltnál e^{2xy} összetett függvény, ahol a külső függvény e^x, a belső függvény $2xy$. Az összetett függvény deriválási szabálya szerint először deriváljuk a külső függvényt, ami jelen esetben e^x, amibe „beírjuk" az eredeti belső függvényt, így e^{2xy} adódik, majd ezt szorozzuk a belső függvény deriváltjával, ami az x szerinti deriválásnál $2y$, az y szerintinél $2x$. Ennek megfelelően az elsőrendű parciális derivált függvények

$$f'_x(x;y) = 5x^4\cdot\mathrm{e}^{2xy} + x^5\cdot\mathrm{e}^{2xy}\cdot 2y$$
$$f'_y(x;y) = x^5\cdot\mathrm{e}^{2xy}\cdot 2x = 2x^6\cdot\mathrm{e}^{2xy}.$$

81. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y) = x^y + y^x$$

függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

Felhasználjuk, hogy összeget tagonként differenciálunk, továbbá az x szerinti parciális deriváltnál az x^y függvénynél a kitevő konstans, így a deriváltja $y\cdot x^{y-1}$, az y^x függvény esetében az alap a konstans, így a deriváltja $y^x\cdot\ln y$.

Az y szerinti deriváltat „fordított szereposztással" hasonlóan kapjuk. Tehát az elsőrendű parciális derivált függvények

$$f'_x(x;y) = y \cdot x^{y-1} + y^x \cdot \ln y$$
$$f'_y(x;y) = x^y \cdot \ln x + x \cdot y^{x-1}.$$

82. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y;z) = x^2 + y^5 \cdot \sin z + 3xyz$ függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!

Megoldás:

Az elsőrendű parciális derivált függvények

$$f'_x(x;y;z) = 2x + 3xz;$$
$$f'_y(x;y;z) = 5y^4 \cdot \sin z + 3xz$$
$$f'_z(x;y;z) = y^5 \cdot \cos z + 3xy.$$

83. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y) = \frac{\mathrm{e}^{x^2y^4}}{x^2+2x}$$

függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit, továbbá az $f''_{xy}(x;y)$ másodrendű parciális derivált függvényt!

Megoldás:

Az x szerinti derivált kiszámolásához a hányados deriválási szabályát alkalmazzuk, figyelembe véve, hogy a számláló összetett függvény, ahol a külső függvény e^x, a belső függvény x^2y^4. A külső függvény deriváltja e^x, amibe behelyettesítve az eredeti belső függvényt $\mathrm{e}^{x^2y^4}$ adódik. A belső függvény x változó szerinti parciális derivált függvénye $2xy^4$, így azt kapjuk, hogy

$$f'_x(x;y) = \frac{\mathrm{e}^{x^2y^4} \cdot 2xy^4 \cdot (x^2+2x) - \mathrm{e}^{x^2y^4} \cdot (2x+4)}{(x^2+2x)^2}.$$

Az y változó szerinti parciális derivált függvény

$$f'_y(x;y) = \frac{\mathrm{e}^{x^2y^4} \cdot (4x^2y^3)}{x^2+2x}.$$

A keresett másodrendű derivált meghatározásához a hányados deriválási szabályát alkalmazzuk úgy, hogy a számláló egy szorzat, aminek az első tényezője összett függvény:

$$f''_{xy}(x;y) = \frac{(e^{x^2y^4} \cdot 2xy^4 \cdot 4x^2y^3 + e^{x^2y^4} \cdot 8xy^3) \cdot (x^2+2x)}{(x^2+2x)^2} -$$
$$- \frac{e^{x^2y^4} \cdot (4x^2y^3) \cdot (2x+2)}{(x^2+2x)^2}.$$

84. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(x;y;z) = \ln(x^2+yz+1)$$

függvényt!

a) Adjuk meg az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit!
b) Határozzuk meg az(oka)t a ponto(ka)t, amely(ek)ben az f függvény valamennyi elsőrendű parciális derivált függvénye zérus!
c) Adjuk meg az f függvény tiszta másodrendű parciális derivált függvényeit!
d) Határozzuk meg az f''_{xy} parciális derivált függvényt!
e) Számoljuk ki az $f''_{xy}(1;0;1)$ értéket!

Megoldás:

a) Az f függvény x változó szerinti derivált függvénye

$$f_x(x;y;z) = \frac{2x}{x^2+yz+1}.$$

Az f függvény y változó szerinti derivált függvénye

$$f_x(x;y;z) = \frac{z}{x^2+yz+1}.$$

Az f függvény z változó szerinti derivált függvénye

$$f_x(x;y;z) = \frac{y}{x^2+yz+1}.$$

b) Meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x}{x^2+yz+1} &= 0 \\ \frac{z}{x^2+yz+1} &= 0 \\ \frac{y}{x^2+yz+1} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenlet megoldása $x = 0$, a második egyenlet megoldása $y = 0$, a harmadik egyenlet megoldása $z = 0$, így $(0;0;0)$ az egyetlen olyan pont, amelyben az f elsőrendű parciális derivált függvényei nullák.

c) Az f függvény x változó szerinti derivált függvényének x változó szerinti derivált függvénye

$$f''_{xx}(x;y;z) = \frac{2 \cdot (x^2 + yz) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + yz + 1)^2} = \frac{2yz - 2x^2}{(x^2 + yz + 1)^2}.$$

Az f függvény y változó szerinti derivált függvényének y változó szerinti derivált függvénye

$$f''_{yy}(x;y;z) = \frac{-z^2}{(x^2 + yz + 1)^2}.$$

Az f függvény z változó szerinti derivált függvényének z változó szerinti derivált függvénye

$$f''_{zz}(x;y;z) = \frac{-y^2}{(x^2 + yz + 1)^2}.$$

d) A keresett derivált függvény

$$f''_{xy}(x;y;z) = \frac{-2xz}{(x^2 + yz + 1)^2}.$$

e) Az $f''_{xy}(1;0;1)$ érték

$$f_{xy}(1;0;1) = \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}.$$

2.3. Parciális deriváltak a közgazdaságtanban

Elméleti összefoglaló

Ebben a fejezetben használni fogjuk a többváltozós konkáv függvény fogalmát, ezért első lépésben definiáljuk a a konkáv függvényeket.

2.3.1. **Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *konkáv*, ha az

$$f\big(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y\big) \geq \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y)$$

egyenlőtlenség teljesül minden $x, y \in D$ és minden $\lambda \in [0;1]$ valós szám esetén.

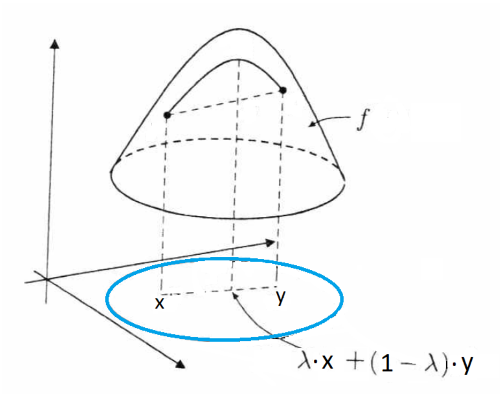
2.3.2. **Megjegyzés.** Megjegyezzük, hogy egy halmaz konvex, ha bármely két pontját összekötő szakasz teljes egészében a halmazban van.

A

$$\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y \qquad (\lambda \in [0;1])$$

az x és y pontokat összekötő szakasz.

Az alábbi ábra egy kétváltozós konkáv függvény grafikonját szemlélteti:



2.3.3. **Definíció.** Legyen $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex halmaz. Az $f\colon D \to \mathbb{R}$ függvény *konvex*, ha az

$$f\big(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y\big) \leq \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y)$$

egyenlőtlenség teljesül minden $x, y \in D$ és minden $\lambda \in [0;1]$ valós szám esetén.

2.3.4. **Definíció.** Egy n-változós U hasznossági függvény i-edik termékhez ($1 \leq i \leq n$) tartozó *határhaszná*n a hasznossági függvény i-edik változója szerinti parciális deriváltját értjük. A határhaszon szokásos jele MU, amely az angol marginal utility kifejezésből származik.

2.3.5. **Megjegyzés.** A határhaszon megmutatja, hogyan változik egy fogyasztó összhaszna egy adott termékből, ha egy egységgel többet vásárol (fogyaszt) belőle. Rendszerint az első egység elfogyasztása jár a legnagyobb haszonnal, az ezután következő egységek már kevésbé hasznosak, így kisebb mértékben növelik az összhasznot.

Egy termék fogyasztását növelve, miközben a többi termék fogyasztása változatlan a hasznosságérzet fokozatosan nő, de ez a javulás egyre kisebb mértékű és egy bizonyos pont után a hasznosságérzet már csökken. Ha feltesszük, hogy U egy n-változós konkáv hasznossági függvény, akkor $n-1$ változót rögzítve, a határhaszon a fogyasztott mennyiségnek csökkenő függvénye lesz. A közgazdaságtanban ez a megállapítás az úgynevezett csökkenő határhaszon elveként vagy más néven Gossen I. törvényeként ismert.

Ezt a törvényt jól illusztrálja az a példa, hogy ha édességet szeretnénk enni, és tortát eszünk, akkor az első szelet torta elfogyasztása fog a legjobban esni (annak lesz a legnagyobb haszna), majd az egymás után elfogyasztott tortaszeletek esetén, például még a harmadik vagy negyedik tortaszeletig nő ugyan a hasznosság, de egyre kisebb mértékű a növekedés, míg a negyedik vagy ötödik szelet torta után már csökken a hasznosság, hiszen ha azt el kellene fogyasztanunk, akkor az már akár gyomorrontást is okozna számunkra.

Ha a hasznossági függvény kétváltozós, akkor definiálhatjuk az úgynevezett helyettesítési határrátát.

2.3.6. **Definíció.** A *helyettesítési határráta* a két termék közötti „átválthatóság mutatószáma”. Jele: MRS. Az MRS megmutatja, hogy az egyik termék mennyiségének egységnyi növelését a másik termék mennyiségének mekkora csökkentése ellensúlyozza, ha azt akarjuk, hogy a haszon értéke ne változzon.

2.3.7. **Tétel.** Ha $(x; y) \mapsto U(x; y)$ kétváltozós hasznossági függvény, akkor a helyettesítése határráta

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y},$$

ahol MU_x az U függvény x változó szerinti parciális deriváltja és MU_y az U függvény y változó szerinti parciális deriváltja.

2.3.8. **Megjegyzés.** Az MRS a közömbösségi görbe érintőegyenese meredekségének -1-szerese.

2.3.9. **Definíció.** Kétváltozós hasznossági függvény esetén *tökéletes helyettesítés*ről beszélünk, ha valamennyi első termék elfogyasztása pontosan ugyanannyit ér a fogyasztó számára, mint valamennyi második termék elfogyasztása. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a két termék tökéletesen helyettesíti egymást, vagyis tökéletes helyettesítők.

2.3.10. **Megjegyzés.** Legyenek a és b pozitív valós számok. Általános esetben a tökéletesen helyettesítő hasznossági függvények

$$U(x; y) = a \cdot x + b \cdot y$$

alakúak. Ilyenkor a közömbösségi görbék

$$c = a \cdot x + b \cdot y \qquad \Rightarrow \qquad y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b} \cdot x$$

alakúak, vagyis a közömbösségi görbék egymással párhuzamos egyenesek.

Ebben az esetben a határhaszon függvények $MU_x = a$ és $MU_y = b$, így a helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{a}{b}$$

konstans.

2.3.11. **Példa.** Tegyük fel, hogy két terméket fogyasztunk, kávét és teát, kávéból x és teából y csészével. A hasznossági függvény legyen

$$U(x; y) = 2x + y.$$

Ekkor a két termék tökéletes helyettesítő, mert 1 csésze kávé elfogyasztása ugyananakkora hasznosságú, mint két csésze tea elfogyasztása.

Az első termékhez tartozó határhaszon függvény $MU_x = 2$, a második termékhez tartozó határhaszon függvény $MU_y = 1$.

A helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{2}{1} = 2,$$

így a termékek valóban tökéletesen helyettesítők.

2.3.12. **Definíció.** Azt mondjuk, hogy két termék egymásnak *tökéletes kiegészítő*je, ha meghatározott arányban és mindig együtt kerülnek fogyasztásra. Például ha egy dobozos üdítőitalt szeretnénk megvásárolni, akkor meg kell venni az italt és az azt tartalmazó dobozt is. Vehetünk éppenséggel több italt, mint amennyi dobozunk van, vagy fordítva, több dobozt, mint amennyi italunk van, de annak nem lenne értelme.

2.3.13. **Megjegyzés.** Legyenek a és b pozitív valós számok. Általános esetben a tökéletesen kiegészítő hasznossági függvények

$$U(x; y) = \min\{ax; by\}$$

alakúak. Ilyenkor a közömbösségi görbék

$$c = \min\{ax; by\}$$

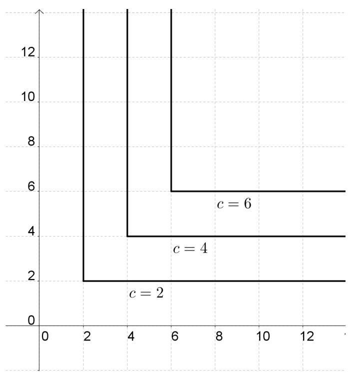
alakúak, vagyis a közömbösségi görbék L-alakúak.

Ebben az esetben a helyettesítési határráta zérus, a „sarokpontok” kivételével, a sarokpontokban ugyanis nem értelmezhető.

2.3.14. **Példa.** Tekintsük az

$$U(x; y) = \min\{x; y\}$$

hasznossági függvényt! Ekkor a $c = 2; 4; 6$ szintekhez tartozó közömbösségi görbék:



2.3.15. **Definíció.** Legyenek a és b pozitív valós számok. Azt mondjuk, hogy az U hasznossági függvény *Cobb-Douglas* típusú, ha

$$U(x;y) = x^a \cdot y^b.$$

2.3.16. **Megjegyzés.** Legyenek a és b pozitív valós számok. Cobb-Douglas típusú hasznossági függvény esetén a közömbösségi görbék

$$y = \sqrt[b]{\frac{c}{x^a}}.$$

A határhaszon függvények

$$MU_x = a \cdot x^{a-1} \cdot y^b$$

és

$$MU_y = b \cdot y^{b-1} \cdot x^a,$$

így a helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{a \cdot x^{a-1} \cdot y^b}{b \cdot y^{b-1} \cdot x^a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x}.$$

2.3.17. **Definíció.** Ha $(K;L) \mapsto f(K;L)$ egy termelési függvény (ahol a korábbi jelöléseket megtartva K a tőke, L a munka mennyisége), akkor az f függvény K változó szerinti parciális deriváltja a *tőke határtermék függvény*e vagy a *tőke határtermelékenység*e. Jele: MP_K.

Az f függvény L változó szerinti parciális deriváltja a *munka határtermék függvény*e vagy más szóval a *munka határtermelékenység*e. Jele: MP_L.

2.3.18. **Megjegyzés.** A tőke határtermelékenysége azt fejezi ki, hogy mennyivel változik a kibocsátás, ha egy egységgel változtatjuk a tőkeállományt.

A munka határtermelékenysége azt fejezi ki, hogy mennyivel változik a kibocsátás, ha egy egységgel változtatjuk a munkaerőmennyiséget.

2.3.19. **Definíció.** A munka és a tőke határtermék függvényeinek hányadosát *technikai helyettesítési határrátá*nak nevezzük. Jele: $MRTS$.

2.3.20. **Megjegyzés.** A technikai helyettesítés határrátája azt fejezi ki, hogy az egyik tényező (munka) egy egysége hány egységnyi másik tényezőt (tőkét) képes helyettesíteni, változatlan termelést biztosítva.

2.3.21. **Definíció.** Rögzített K érték esetén az $L \mapsto f(K;L)$ egyváltozós függvényt *parciális termelési függvény*nek nevezzük.

2.3.22. **Megjegyzés.** Legyen $(K; L) \mapsto f(K; L)$ egy termelési függvény. Ha a tőke egységára p_K és a munka egységára p_L, akkor a teljes költség

$$p_K \cdot K + p_L \cdot L.$$

Kidolgozott feladatok

85. **Feladat.** Egy fogyasztó két terméket vásárol. Preferenciáit az

$$U(x;y) = x \cdot y$$

hasznossági függvény írja le. Határozzuk meg a helyettesítési határrátát!

Megoldás:

Az első termékre vonatkozó határhaszon függvény

$$U'_x(x;y) = MU_x = y.$$

A második termékre vonatkozó határhaszon függvény

$$U'_x(x;y) = MU_y = x.$$

A helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x}.$$

86. **Feladat.** Egy fogyasztó két terméket vásárol. Preferenciáit az

$$U(x;y) = x^2 \cdot y^3$$

hasznossági függvény írja le. Határozzuk meg a helyettesítési határrátát!

Megoldás:

Az első termékre vonatkozó határhaszon függvény

$$U'_x(x;y) = MU_x = 2xy^3.$$

A második termékre vonatkozó határhaszon függvény

$$U'_x(x;y) = MU_y = 3x^2y^2.$$

A helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{2xy^3}{3x^2y^2} = \frac{2y}{3x}.$$

87. **Feladat.** Egy fogyasztó két terméket fogyaszt. Preferenciáit az

$$U(x;y) = xy + 2y$$

hasznossági függvény írja le.

a) Írjuk fel a $(3;8)$ ponton áthaladó közömbösségi görbe egyenletét!

b) Ábrázoljuk a hasznossági függvény azon közömbösségi görbéjét, amely áthalad a $(3; 8)$ ponton!

c) Adjuk meg a helyettesítési határrátát!

d) Számoljuk ki a helyettesítési határrátát a $(3; 8)$ pontban!

e) Határozzunk meg egy további fogyasztási szintet, amely ugyanazon a közömbösségi görbén van, mint a $(3; 8)$ pont!

Megoldás:

a) A közömbösségi görbék egyenlete

$$xy + 2y = c \qquad \Rightarrow \qquad y \cdot (x + 2) = c,$$

így

$$y = \frac{c}{x+2}.$$

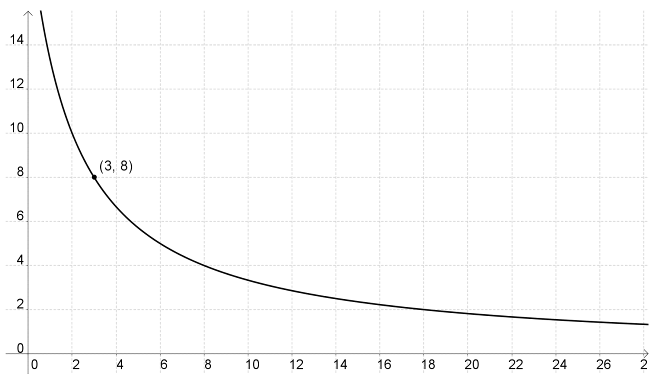
Mivel azt a görbét keressük, amelyik áthalad a $(3; 8)$ ponton, ezért

$$8 = \frac{c}{5} \qquad \Rightarrow \qquad c = 40.$$

Tehát a $(3; 8)$ ponton áthaladó közömbösség görbe

$$y = \frac{40}{x+2}.$$

b) A hasznossági függvény azon közömbösségi görbéje, amely áthalad a $(3; 8)$ ponton:



c) Az első termékre vonatkozó határhaszon függvény

$$MU_x = y.$$

A második termékre vonatkozó határhaszon függvény

$$MU_y = x + 2.$$

A helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{y}{x+2}.$$

d) A helyettesítési határráta a $(3;8)$ pontban

$$MRS(3;8) = \frac{8}{3+2} = 1,6.$$

e) Ugyanazon a közömbösségi görbén van a $(3;8)$ pont és a $(2;10)$ pont is. Ez azt jelenti, hogy ha az első termékből 3 egységet és a második termékből 8 egységet fogyaszt a vásárló, az számára ugyanazzal a hasznossággal jár, mint az, ha az első termékből 2 egységet és a második termékből 10 egységet fogyaszt.

88. **Feladat.** Egy fogyasztó két terméket fogyaszt. Preferenciáit az

$$U(x;y) = \sqrt{x \cdot y^3}$$

hasznossági függvény írja le.

a) Határozzuk meg az $U = 100$ hasznossági szinthez tartozó közömbösségi görbe egyenletét!
b) Ábrázoljuk az $U = 100$ hasznossági szinthez tartozó közömbösségi görbét!
c) Adjuk meg mindkét termék határhaszon függvényét!
d) Határozzuk meg a helyettesítési határrátát!
e) Az $U = 200$ hasznossági szinthez tartozó közömbösségi görbe melyik pontjában lesz a helyettesítési határráta $\frac{4}{3}$?

Megoldás:

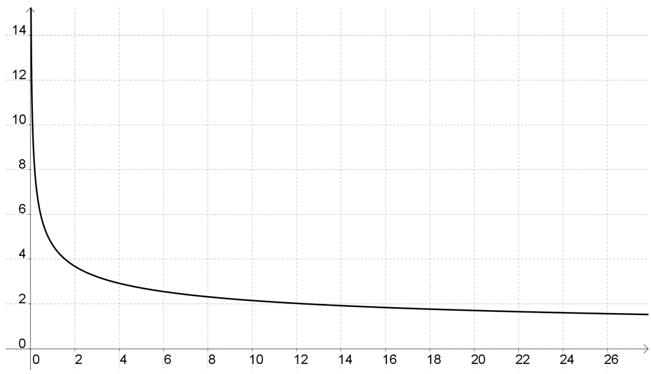
a) A közömbösségi görbék egyenlete

$$10 = \sqrt{x \cdot y^3} \qquad \Rightarrow \qquad 100 = x \cdot y^3,$$

így

$$y = \sqrt[3]{\frac{100}{x}}.$$

b) A hasznossági függvény azon közömbösségi görbéje, amely áthalad a $(3;8)$ ponton:



c) Az U függvény átalakítva

$$U(x;y) = x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}}.$$

Az első termékre vonatkozó határhaszon függvény

$$MU_x = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{y^3}{x}}.$$

A második termékre vonatkozó határhaszon függvény

$$MU_y = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x \cdot y}.$$

d) A helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{3}x^{-1} \cdot y = \frac{y}{3x}.$$

e) Az $U = 200$ hasznossági szinthez tartozó közömbösségi görbe teljesíti az

$$x \cdot y^3 = 40\,000$$

egyenletet. Másrészt

$$MRS = \frac{y}{3x},$$

így jelen esetben

$$\frac{y}{3x} = \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \qquad y = 4x.$$

Tehát az

$$\left.\begin{aligned} x \cdot y^3 &= 40\,000 \\ y &= 4x \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. Felhasználva, hogy $y = 4x$, az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$x \cdot (4x)^3 = 40\,000.$$

Tehát

$$64x^4 = 40\,000 \qquad \Rightarrow \qquad x^4 = 625,$$

így $x > 0$ miatt $x = 5$ adódik, amiből azt kapjuk, hogy $y = 4 \cdot 5 = 20$. Tehát a keresett pont $(5; 20)$.

89. **Feladat.** Egy fogyasztó preferenciáit az

$$U(x; y) = 16x^2 + 8xy + y^2$$

hasznossági függvény írja le, ha az A termékből x és a B termékből y mennyiséget fogyaszt.

a) Határozzuk meg az A termékre vonatkozó határhaszon függvényt!

b) Határozzuk meg a B termékre vonatkozó határhaszon függvényt!

c) Adjuk meg a helyettesítési határrátát!

d) Milyen preferenciákkal rendelkezik a fogyasztó?

Megoldás:

a) Az A termékre vonatkozó határhaszon függvény az U függvény x változó szerinti parciáls deriváltja, vagyis

$$MU_x = 32x + 8y.$$

b) A B termékre vonatkozó határhaszon függvény, vagyis az U függvény y változó szerinti parciáls deriváltja

$$MU_y = 8x + 2y.$$

c) A helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{32x + 8y}{8x + 2y} = \frac{8 \cdot (4x + 2y)}{2 \cdot (4x + y)} = 4.$$

d) Mivel MRS konstans pozitív valós szám, ezért a két termék tökéletesen helyettesítő. A B termékből 4 egység helyettesít az A termékből 1 egységet.

90. **Feladat.** Bettina banánra és kivire vonatkozó hasznossági függvénye

$$U(x;y) = x \cdot \sqrt{y},$$

ahol x a banán és y a kivi mennyisége kg-ban.

a) Adjuk meg a banánra vonatkozó határhaszon függvényt!
b) Adjuk meg a kivire vonatkozó határhaszon függvényt!
c) Határozzuk meg a helyettesítési határrátát!
d) Milyen típusú a hasznossági függvény?
e) Tegyük fel, hogy az $U = 8$ hasznossági szinthez tartozó közömbösségi görbe esetén Bettina már $4\,[\mathrm{kg}]$ banánt megvásárolt. Mennyi kivit kell vennie? Mennyi ebben a pontban a helyettesítési határráta?

Megoldás:

a) A banánra vonatkozó határhaszon függvény

$$MU_x = \sqrt{y}.$$

b) A kivire vonatkozó határhaszon függvény

$$MU_y = x \cdot \frac{1}{2} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{y}}.$$

c) A helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{\sqrt{y} \cdot 2 \cdot \sqrt{y}}{x} = \frac{2y}{x}.$$

d) A hasznossági függvény Cobb-Douglas típusú.

e) Mivel $U = 8$ és $x = 4$, ezért

$$8 = 4 \cdot \sqrt{y},$$

így $y = 4$. Tehát $4\,[\mathrm{kg}]$ kivit kell vásárolni. Ekkor a helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{2 \cdot 4}{4} = 2.$$

91. **Feladat.** Egy vállalat termelési függvénye

$$f(K;L) = K \cdot L.$$

a) Mekkora a termelés, ha $K = 5$ és $L = 10$?
b) Adjuk meg a $Q = 100$ szinthez tartozó izokvant görbe egyenletét!
c) Ábrázoljuk a $Q = 100$ szinthez tarozó izokvant görbét!

d) Határozzuk meg $K = 5$ esetén a parciális termelési függvényt!

e) Adjuk meg a tőke határtermék függvényét!

f) Adjuk meg a munka határtermék függvényét!

g) Határozzuk meg a technikai helyettesítési határrátát!

Megoldás:

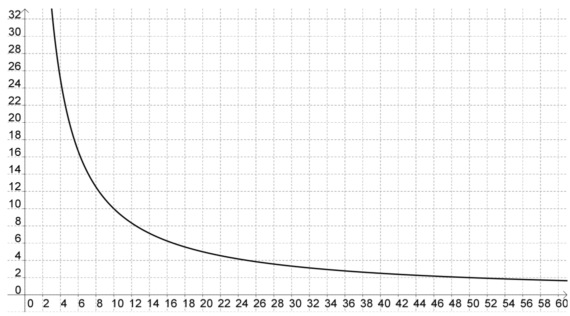
a) A termelés $K = 5$ és $L = 10$ esetén

$$f(5; 10) = 5 \cdot 10 = 50.$$

b) A $Q = 100$ szinthez tartozó izokvant görbe egyenlete

$$100 = K \cdot L \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{100}{L}.$$

c) A $Q = 100$ szinthez tarozó izokvant görbe:



d) Ha $K = 5$, akkor a parciális termelési függvény

$$f(5; L) = 5L.$$

e) A tőke határtermék függvénye: $MP_K = L$.

f) A munka határtermék függvénye: $MP_L = K$.

g) A technikai helyettesítési határráta

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{K}{L}.$$

92. **Feladat.** Egy vállalat termelési függvénye

$$f(K, L) = \sqrt[3]{K^2 \cdot L}.$$

a) Mekkora a termelés, ha $K = 8$ és $L = 27$?

b) Adjuk meg a $Q = 500$ szinthez tartozó izokvant görbe egyenletét!

c) Ábrázoljuk a $Q = 500$ szinthez tarozó izokvant görbét!

d) Határozzuk meg $K = 8$ esetén a parciális termelési függvényt!

e) Adjuk meg a tőke határtermék függvényét!

f) Adjuk meg a munka határtermék függvényét!

g) Határozzuk meg a technikai helyettesítési határrátát!

<u>**Megoldás**</u>:

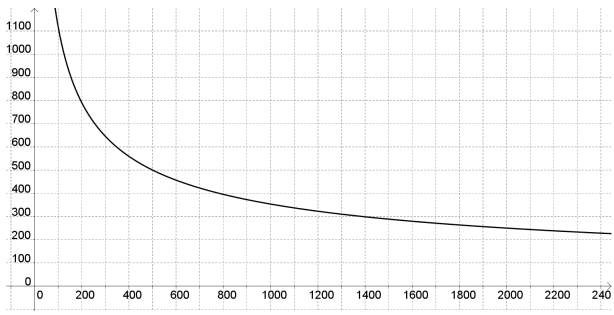
a) A termelés $K = 8$ és $L = 27$ esetén

$$f(8;27) = \sqrt[3]{64 \cdot 27} = 12.$$

b) A $Q = 500$ szinthez tartozó izokvant görbe egyenlete

$$500 = \sqrt[3]{K^2 \cdot L} \qquad \Rightarrow \qquad K = \sqrt{\frac{500^3}{L}}.$$

c) A $Q = 500$ szinthez tarozó izokvant görbe:



d) Ha $K = 8$, akkor a parciális termelési függvény

$$f(8;L) = 4L.$$

e) A tőke határtermék függvénye

$$MP_K = \frac{2}{3} \cdot L^{-\frac{1}{3}} \cdot L^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{L}{K}}.$$

f) A munka határtermék függvénye

$$MP_L = \frac{1}{3} \cdot L^{-\frac{2}{3}} \cdot K^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{K^2}{L^2}}.$$

g) A technikai helyettesítési határráta

$$MRTS = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{L}.$$

93. **Feladat.** Egy vállalat termelési függvénye

$$f(K; L) = 5 \cdot \sqrt{K \cdot L}.$$

A felhasznált tőke mennyisége 16 egység. A felhasznált munka egységára 10€, a tőke ára 50€.

a) Határozzuk meg a költségfüggvényt!

b) Adjuk meg a fixköltséget!

c) Adjuk meg a változó költség függvényt!

d) Határozzuk meg az átlag költség függvényt!

e) Határozzuk meg az átlagos fix költség függvényt!

f) Adjuk meg az átlagos változó költség függvényt!

Megoldás:

a) Mivel $K = 16$, ezért

$$q = 5 \cdot \sqrt{16 \cdot L} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 20 \cdot \sqrt{L},$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$L = \frac{q^2}{400}.$$

Másrészt $p_K = 50$ és $p_L = 10$, így a teljes költség függvény

$$C(q) = p_K \cdot K + p_L \cdot L = 800 + 10 \cdot \frac{q^2}{400} = 800 + \frac{q^2}{40}.$$

b) A fixköltség $FC = 40$.

c) A változó költség függvény

$$VC(q) = \frac{q^2}{40}.$$

d) Az átlag költség függvény

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{800}{q} + \frac{q}{40}.$$

e) Az átlagos fix költség függvény

$$AFC(q) = \frac{FC}{q} = \frac{800}{q}.$$

f) Az átlagos változó költség függvény

$$AVC(q) = \frac{VC(q)}{q} = \frac{q}{40}.$$

2.4. Kétváltozós függvények szélsőértékszámítása

Elméleti összefoglaló

2.4.1. **Tétel.** (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele)
Ha az $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (totálisan) differenciálható függvénynek lokális szélsőértéke van az $(x_0; y_0) \in D$ pontban, akkor az $(x_0; y_0)$ pontban az elsőrendű parciális derivált függvényei nullák, azaz $f'_x(x_0; y_0) = 0$ és $f'_y(x_0; y_0) = 0$.

2.4.2. **Definíció.** Az $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény *Hesse-mátrixa* az $(x_0; y_0) \in D$ pontban

$$M(x_0; y_0) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x \qquad\qquad & \qquad y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{yx}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{pmatrix} \end{array}.$$

2.4.3. **Tétel.** (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele)
Legyen $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az f függvénynek az $(x_0; y_0) \in D$ pontban az elsőrendű parciális derivált függvényei nullák. Ilyenkor az $(x_0; y_0)$ pontot *stacionárius pont*nak is nevezzük. Tekinstük az f függvény másodrendű parciális deriváltjaiból képzett

$$M(x_0; y_0) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x \qquad\qquad & \qquad y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0; y_0) & f''_{xy}(x_0; y_0) \\ f''_{yx}(x_0; y_0) & f''_{yy}(x_0; y_0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-mátrixot. Legyen $D_1 = f''_{xx}(x_0; y_0)$ és $D_2 = \det\big(M(x_0; y_0)\big)$.

Ha $D_1 > 0$ és $D_2 > 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban lokális minimuma van.

Ha $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban lokális maximuma van.

Ha $D_2 < 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban nincs szélsőértéke.

Ha $D_1 = 0$ és $D_2 = 0$ vagy $D_1 = 0$ és $D_2 > 0$ vagy $D_1 > 0$ és $D_2 = 0$ vagy $D_1 < 0$ és $D_2 = 0$, akkor a Hesse-mátrix vizsgálatával nem dönthető el, hogy az f függvénynek az $(x_0; y_0)$ pontban van-e szélsőértéke.

2.4.4. **Megjegyzés.** Kétváltozós függvény lokális szélsőértékének meghatározása a gyakorlatban:

1. Kiszámoljuk az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit, vagyis az f'_x és f'_y deriváltakat.
2. Megoldjuk az

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x;y) &= 0 \\ f'_y(x;y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

   egyenletrendszert. Az egyenletrendszer megoldásai a lehetséges szélsőértékek, más szóval stacionárius pontok.
3. Kiszámoljuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd azokból előállítjuk az

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \qquad x \qquad & \qquad y \qquad \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{xy}(x;y) \\ f''_{yx}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

   Hesse-mátrixot.
4. Kiértékeljük a Hesse-mátrixot a stacionárius pontokban és alkalmazzuk a 2.4.3 tételt annak eldöntésére, hogy a stacionárius pontban van-e szélsőérték és ha igen, milyen típusú.

2.4.5. **Példa.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x^3 + 8y^3 - 12xy$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y) &= 3x^2 - 12y \\ f'_y(x;y) &= 24y^2 - 12x. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 12y &= 0 \\ 24y^2 - 12x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenlet osztható 3-mal, a második osztható 12-vel így az

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 4y &= 0 \\ 2y^2 - x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. A második egyenletből $x = 2y^2$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$4y^4 - 4y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y^4 - y = 0.$$

Az egyenletből y-t kiemelve

$$y \cdot (y^3 - 1) = 0$$

adódik, így $y_1 = 0$ és $y_2 = 1$. A megfelelő x értékek $x_1 = 2$ és $x_2 = 1$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0)$ és $P_2 = (2; 1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x \quad & \quad y \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{xy}(x;y) \\ f''_{yx}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = 6x \qquad\qquad f''_{xy}(x;y) = -12$$
$$f''_{yx}(x;y) = -12 \qquad\qquad f''_{yy}(x;y) = 48y,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \;x\; & \;\;y\; \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6x & -12 \\ -12 & 48y \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -12 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 144 = -144.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 12$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix} = 12 \cdot 48 - 12^2 = 432.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(2;1) = 2^3 + 8 \cdot 1^3 - 12 \cdot 2 \cdot 1 = -8.$$

Kidolgozott feladatok

94. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x^3 + y^3 - 3xy$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = 3x^2 - 3y$$
$$f'_y(x;y) = 3y^2 - 3x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Mindkét egyenlet osztható 3-mal, így az

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $y = x^2$ adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(x^2)^2 - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^4 - x = 0.$$

Az egyenletből x-et kiemelve

$$x \cdot (x^3 - 1) = 0$$

adódik, így $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = 1$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0;0)$ és $P_2 = (1;1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} x & \qquad y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{xy}(x;y) \\ f''_{yx}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = 6x \qquad f''_{xy}(x;y) = -3$$
$$f''_{yx}(x;y) = -3 \qquad f''_{yy}(x;y) = 6y,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 9 = -9.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 6$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 36 - 9 = 27.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1.$$

95. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x^3 + y^2 - 6xy$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = 3x^2 - 6y$$
$$f'_y(x;y) = 2y - 6x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 6y &= 0 \\ 2y - 6x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből $y = 3x$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3x^2 - 18x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3x \cdot (x - 6) = 0,$$

így $x_1 = 0$ és $x_2 = 6$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = 18$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0)$ és $P_2 = (6; 18)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x \quad & \quad y \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{yx}(x;y) \\ f''_{xy}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x;y) &= 6x & \qquad f''_{xy}(x;y) &= -6 \\ f''_{yx}(x;y) &= -6 & \qquad f''_{yy}(x;y) &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 0 - 36 = -36.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 36$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 72 - 36 = 26.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(1;1) = 6^3 + 18^2 - 6 \cdot 6 \cdot 18 = 216 + 324 - 648 = -108.$$

96. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x^3 - 3x^2 + 6xy + y^2$ függvény lokális szélsőértékeit!

<u>**Megoldás**</u>:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y) &= 3x^2 - 6x + 6y \\ f'_y(x;y) &= 6x + 2y. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 - 6x + 6y &= 0 \\ 6x + 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenlet osztható 3-mal, a második egyenlet osztható 2-vel, így az

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2y &= 0 \\ 3x + y &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletből $y = -3x$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$x^2 - 2x - 3x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 5x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (x - 5) = 0,$$

így $x_1 = 0$ és $x_2 = 5$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = -15$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0;0)$ és $P_2 = (5;-15)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{yx}(x;y) \\ f''_{xy}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = 6x - 6 \qquad f''_{xy}(x;y) = 6$$
$$f''_{yx}(x;y) = 6 \qquad f''_{yy}(x;y) = 2,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 6x-6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -6$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = -12 - 36 = -48.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 24$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 24 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = 48 - 36 = 12.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(5;-15) = 5^3 - 3\cdot 5^2 + 6\cdot 5\cdot(-15) + (-15)^2 = 125 - 75 - 450 + 225 = -108.$$

97. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x^3+y^2-75x-2y$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = 3x^2 - 75$$
$$f'_y(x;y) = 2y - 2.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 75 &= 0 \\ 2y - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $3x^2 = 75$, amiből $x^2 = 25$ következik, tehát $x = \pm 5$. A második egyenletből $y = 1$ adódik.

Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (5;2)$ és $P_2 = (-5;2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x \quad & \quad y \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{yx}(x;y) \\ f''_{xy}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = 6x \qquad f''_{xy}(x;y) = 0$$
$$f''_{yx}(x;y) = 0 \qquad f''_{yy}(x;y) = 2,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 30$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 60 - 0 = 60.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_1 pontban lokális minimuma van az f függvénynek. Értéke

$$f(5;2) = 5^3 + 2^2 - 75 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = -250$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -30$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -60 - 0 = -60.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_2 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

98. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x^3 + y^3 - 9xy$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = 3x^2 - 9y$$
$$f'_y(x;y) = 3y^2 - 9x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 9y &= 0 \\ 3y^2 - 9x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Mindkét egyenlet osztható 3-mal, így az

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 3y &= 0 \\ y^2 - 3x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $y = \frac{x^2}{3}$ adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 - 3x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^4}{9} - 3x = 0.$$

Tehát $x^4 - 27x = 0$. Az egyenletből x-et kiemelve

$$x \cdot (x^3 - 27) = 0$$

adódik, így $x_1 = 0$ és $x_2 = 3$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = 3$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0;0)$ és $P_2 = (1;1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \quad x & \qquad y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{xy}(x;y) \\ f''_{yx}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = 6x \qquad f''_{xy}(x;y) = -9$$
$$f''_{yx}(x;y) = -9 \qquad f''_{yy}(x;y) = 6y,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & \quad y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 81 = -81.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 18$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} = 324 - 81 = 243.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(3;3) = 3^3 + 3^3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27.$$

99. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = (x-2)^2 + (y+3)^2 + 2$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = 2 \cdot (x-2)$$
$$f'_y(x;y) = 2 \cdot (y+3).$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 2 \cdot (x-2) &= 0 \\ 2 \cdot (y+3) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 2$, $y = -3$.

Tehát az f függvénynek egy stacionárius pontja van: $P = (2;-3)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x \quad & \quad y \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{xy}(x;y) \\ f''_{yx}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = 2 \qquad\qquad f''_{xy}(x;y) = 0$$
$$f''_{yx}(x;y) = 0 \qquad\qquad f''_{yy}(x;y) = 2,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 2$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(2;-3) = (2-2)^2 + (-3+3)^2 + 2 = 2.$$

100. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = \mathrm{e}^{xy}$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = \mathrm{e}^{xy} \cdot y$$
$$f'_y(x;y) = \mathrm{e}^{xy} \cdot x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^{xy} \cdot y &= 0 \\ \mathrm{e}^{xy} \cdot x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Mivel $\mathrm{e}^{xy} \neq 0$, ezért az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = 0$, míg a második egyenletből azt, hogy $x = 0$, így az egyetlen stacionárius pont $P = (0;0)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x \quad & \quad\quad y \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{yx}(x;y) \\ f''_{xy}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = \mathrm{e}^{xy} \cdot y^2 \qquad f''_{xy}(x;y) = \mathrm{e}^{xy} \cdot xy + \mathrm{e}^{xy}$$
$$f''_{yx}(x;y) = \mathrm{e}^{xy} \cdot xy + \mathrm{e}^{xy} \qquad f''_{yy}(x;y) = \mathrm{e}^{xy} \cdot x^2,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} e^{xy}\cdot y^2 & e^{xy}\cdot xy + e^{xy} \\ e^{xy}\cdot xy + e^{xy} & e^{xy}\cdot x^2 \end{pmatrix}$}} \\ y & & \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 1 = -1.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

101. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy$ $(x > 0, y > 0)$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = -\frac{20}{x^2} + y$$
$$f'_y(x;y) = -\frac{50}{y^2} + x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} -\frac{20}{x^2} + y = 0 \\ -\frac{50}{y^2} + x = 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$-\frac{20}{x^2} + y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{20}{x^2}.$$

Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-\frac{50}{\left(\frac{20}{x^2}\right)^2} + x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -50 \cdot \frac{x^4}{400} + x = 0$$

adódik. Tehát

$$-\frac{x^4}{8}+x=0 \qquad \Rightarrow \qquad -x^4+8x=0 \qquad \Rightarrow \qquad x\cdot(-x^3+8)=0.$$

Egy szorzat csak úgy lehet nulla, ha valamelyik tényezője nulla, így azt kapjuk, hogy $x=0$ vagy $x=2$. Mivel $x>0$, ezért az egyetlen megoldás $x=2$. Ekkor $y=5$. Tehát az egyetlen stacionárius pont $P=(2;5)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{yx}(x;y) \\ f''_{xy}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y)=\frac{40}{x^3} \qquad f''_{xy}(x;y)=2$$

$$f''_{yx}(x;y)=2 \qquad f''_{yy}(x;y)=\frac{100}{y^3},$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{40}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{100}{y^3} \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P)=\begin{pmatrix} \frac{40}{2^3} & 1 \\ 1 & \frac{100}{5^3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1=5$, illetve

$$D_2=\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}=4-1=3.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek. Értéke

$$f(2;5)=\frac{20}{2}+\frac{50}{5}+2\cdot 5=30.$$

102. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$$

$$f'_y(x;y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} &= 0 \\ \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 0$, míg a másodikból azt, hogy $y = 0$. Tehát az egyetlen stacionárius pont $P = (0;0)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x \quad & \quad y \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{yx}(x;y) \\ f''_{xy}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot.

A tiszta másodrendű parciális derivált függvények

$$f''_{xx}(x;y) = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

és

$$f''_{yy}(x;y) = \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + 1) - 4y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2 + 2}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

A vegyes másodrendű parciális derivált függvények

$$f''_{yx}(x;y) = f''_{xy}(x;y) = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Tehát a másodrendű parciális derivált függvényekből képzett mátrix

$$M(x;y)=\begin{array}{c} \\ x \\ y \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad x \quad & \quad y \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dfrac{-2x^2+2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} & \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} \\[2ex] \dfrac{-4xy}{(x^2+y^2+1)^2} & \dfrac{2x^2-2y^2+2}{(x^2+y^2+1)^2} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1=1$, illetve

$$D_2=\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=1-0=0.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek. Értéke

$$f(0;0)=\ln(0^2+0^2+1)=0.$$

103. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y)=\mathrm{e}^x\cdot(x+y^2)$ függvény lokális szélsőértékeit!

<u>**Megoldás**:</u>

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y)&=\mathrm{e}^x\cdot(x+y^2)+\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cdot(1+x+y^2) \\ f'_y(x;y)&=\mathrm{e}^x\cdot 2y. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^x\cdot(1+x+y^2)=0 \\ \mathrm{e}^x\cdot 2y=0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $y=0$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe $x=-1$ adódik. Tehát az egyetlen stacionárius pont $P=(-1;0)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az

azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{yx}(x;y) \\ f''_{xy}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot.

A tiszta másodrendű parciális derivált függvények

$$f''_{xx}(x;y) = \mathrm{e}^x \cdot (1 + x + y^2) + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot (2 + x + y^2)$$

és

$$f''_{yy}(x;y) = \mathrm{e}^x \cdot 2.$$

A vegyes másodrendű parciális derivált függvények

$$f''_{yx}(x;y) = f''_{xy}(x;y) = \mathrm{e}^x \cdot 2y.$$

Tehát a másodrendű parciális derivált függvényekből képzett mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \cdot (1 + x + y^2) + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \cdot (2 + x + y^2) & \mathrm{e}^x \cdot 2y \\ \mathrm{e}^x \cdot 2y & \mathrm{e}^x \cdot 2 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 1$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 0 = 2.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek. Értéke

$$f(0;0) = \mathrm{e}^0 \cdot (-1 + 0) = -1.$$

104. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x \cdot y$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = y$$
$$f'_y(x;y) = x.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (0; 0)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{xy}(x;y) \\ f''_{yx}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = 0 \qquad f''_{xy}(x;y) = 1$$
$$f''_{yx}(x;y) = 1 \qquad f''_{yy}(x;y) = 0,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 1 = -1.$$

Mivel $D_2 < 0$, ezért nincs szélsőértéke az f függvénynek.

105. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x^2 + 5y^2 + x^2y + 2y^3$ függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = 2x + 2xy$$
$$f'_y(x;y) = 10y + x^2 + 6y^2.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2xy &= 0 \\ 10y + x^2 + 6y^2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből $2x$-et kiemelve azt kapjuk, hogy

$$2x \cdot (1 + y) = 0,$$

így $x = 0$ vagy $y = -1$.

Ha $x = 0$, akkor a második egyenletből

$$6y^2 + 10y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2y \cdot (3y + 5) = 0$$

adódik, így $y = 0$ vagy $y = -\frac{5}{3}$.

Ha $y = -1$, akkor a második egyenletből

$$-10 + x^2 + 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 4$$

adódik, így $x = 2$ vagy $x = -2$.

Tehát az f függvénynek négy stacionárius pontja van. Ezek

$$P_1 = (0;0) \qquad\qquad P_2 = (2;-1)$$
$$P_3 = \left(0; -\frac{5}{3}\right) \qquad\qquad P_4 = (-2;-1).$$

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{xy}(x;y) \\ f''_{yx}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = 2 + 2y \qquad\qquad f''_{xy}(x;y) = 2x$$
$$f''_{yx}(x;y) = 2x \qquad\qquad f''_{yy}(x;y) = 10 + 12y,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 10+12y \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 2$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = 20.$$

Mivel $D_1 > 0$ és $D_2 > 0$, ezért lokális minimuma van f függvénynek a P_1 pontban. Az értéke

$$f(0;0) = 0.$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -\frac{4}{3}$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = \frac{40}{3}.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért lokális maximuma van az f függvénynek a P_2 pontban. Az értéke

$$f\left(0; -\frac{5}{3}\right) = \frac{125}{27}.$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_3 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = -16.$$

Mivel $D_2 < 0$, ezért nincs szélsőértéke az f függvénynek a P_3 pontban.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_4 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = -16.$$

Mivel $D_2 < 0$, ezért nincs szélsőértéke az f függvénynek a P_4 pontban.

106. **Feladat.** Az $f(x;y) = x^2 + 3y^2 + 2xy + ax + by + c$ függvénynek a $(3;1)$ pontban lokális minimuma van, amelynek értéke 15. Számoljuk ki az a és a b konstansok értékét!

<u>**Megoldás**</u>:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y) &= 2x + 2y + a \\ f'_y(x;y) &= 6y + 2x + b. \end{aligned}$$

Mivel $(3;1)$ lokális szélsőértéke az f függvénynek, ezért

$$\left.\begin{aligned} f'_x(3;1) = 0 \\ f'_y(3;1) = 0 \end{aligned}\right\},$$

azaz

$$\left.\begin{aligned} 6 + 2 + a = 0 \\ 6 + 6 + b = 0 \end{aligned}\right\},$$

így $a = -8$ és $b = -12$.

Mivel a szélsőérték értéke 15, ezért

$$f(3;1) = 15 \qquad \Rightarrow \qquad 9 + 3 + 6 - 24 - 12 + c = 15,$$

tehát $c = 33$.

107. **Feladat.** Egy téglatest egy csúcsából induló éleinek az összege $12\,\mathrm{cm}$. Határozzuk meg az éleit úgy, hogy a térfogata maximális legyen! Adjuk meg a maximális térfogatot is!

<u>**Megoldás**</u>:

A téglatest egy csúcsból induló éleit jelölje: a, b és c. Ekkor

$$a + b + c = 12 \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0),$$

amiből például a c ismeretlent kifejezve azt kapjuk, hogy $c = 12 - a - b$. A téglatest térfogata

$$V = a \cdot b \cdot c = a \cdot b \cdot (12 - a - b) = 12ab - a^2b - ab^2.$$

A feladat tehát a

$$V(a; b) = 12ab - a^2b - ab^2$$

kétváltozós függvény szélsőértékének meghatározása.

A V függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$V'_a(a; b) = 12b - 2ab - b^2$$
$$V'_b(a; b) = 12a - a^2 - 2ab.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 12b - 2ab - b^2 &= 0 \\ 12a - a^2 - 2ab &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Mivel $b \neq 0$ és $a \neq 0$, ezért az első egyenletet oszthatjuk b-vel és a második egyenletet oszthatjuk a-val. Ekkor az

$$12 - 2a - b = 0$$
$$12 - a - 2b = 0$$

egyenletrendszerhez jutunk. Ha az első egyenlet kétszereséből kivonjuk a második egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy $12 - 3a = 0$, így $a = 4$. Ezt az értéket visszahelyettesítve például a $12-2a-b = 0$ egyenletbe azt kapjuk, hogy $b = 3$. Tehát a V függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (4; 4)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk a V függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(a; b) = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad a \quad & \quad\quad b \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} V''_{aa}(a; b) & V''_{ab}(a; b) \\ V''_{ba}(a; b) & V''_{bb}(a; b) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$V''_{aa}(a;b) = -2b \qquad V''_{ba}(a;b) = 12 - 2a - 2b$$
$$V''_{ab}(a;b) = 12 - 2a - 2b \qquad V''_{bb}(a;b) = -2a,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(a;b) = \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} -2b & 12-2a-2b \\ 12-2a-2b & -2a \end{pmatrix}$}} \\ b & & \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a stacionárius pontban, akkor

$$M(a;b) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -8$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = 64 - 16 = 48.$$

Mivel D_1 negatív és D_2 pozitív előjelű, ezért a P pontban lokális maximum van.

Mivel $a = b = 4$, ezért $c = 12 - 4 - 4 = 4\,\mathrm{cm}$, ezért a téglatest térfogata $a = b = c = 4\,\mathrm{cm}$ oldalak esetén lesz maximális. Ekkor a térfogat

$$V = 4^3 = 64\,\mathrm{cm}^3.$$

108. **Feladat.** Egy felül nyitott téglatest alakú doboz térfogata $32\,\mathrm{dm}^3$. Határozzuk meg az éleit úgy, hogy a felszíne a lehető legkisebb legyen. Adjuk meg a minimális felszínt is!

Megoldás:

A téglatest egy csúcsból induló éleit jelölje: a, b és c, úgy, hogy az alapélek legyenek a és b. Ekkor a térfogat

$$a \cdot b \cdot c = 32 \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0),$$

amiből például a c ismeretlent kifejezve azt kapjuk, hogy $c = \frac{32}{ab}$. A doboz felszíne

$$A = ab + 2ac + 2bc = ab + 2a \cdot \frac{32}{ab} + 2b \cdot \frac{32}{ab} = ab + \frac{64}{b} + \frac{64}{a}.$$

A feladat tehát az

$$A(a;b) = ab + \frac{64}{b} + \frac{64}{a} = ab + 64 \cdot b^{-1} + 64 \cdot a^{-1}$$

kétváltozós függvény szélsőértékének meghatározása.

Az A függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$A'_a(a;b) = b - 64 \cdot a^{-2} = b - \frac{64}{a^2}$$
$$A'_b(a;b) = a - 64 \cdot b^{-2} = a - \frac{64}{b^2}.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} b - \frac{64}{a^2} &= 0 \\ a - \frac{64}{b^2} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből kifejezve a b ismeretlent azt kapjuk, hogy $b = \frac{64}{a^2}$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$a - \frac{64}{\left(\frac{64}{a^2}\right)^2} = 0$$

adódik. Az egyenletet átalakítva azt kapjuk, hogy

$$a - \frac{64}{\frac{4\,096}{a^4}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a - \frac{a^4}{64} = 0,$$

így

$$64a - a^4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a \cdot (64 - a^3) = 0.$$

Mivel $a \neq 0$, ezért $64 = a^3$, tehát $a = 4$. Ezt az értéket behelyettesítve például a $b - \frac{64}{a^2} = 0$ egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$b - \frac{64}{16} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 4.$$

Tehát az A függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (4;4)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az A függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(a;b) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} A''_{aa}(a;b) & A''_{ab}(a;b) \\ A''_{ba}(a;b) & A''_{bb}(a;b) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$A''_{aa}(a;b) = 128a^{-3} \qquad A''_{ab}(a;b) = 1$$
$$A''_{ba}(a;b) = 1 \qquad A''_{bb}(a;b) = 128b^{-3},$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(a;b) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{128}{a^3} & 1 \\ & \\ 1 & \frac{128}{b^3} \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a stacionárius pontban, akkor

$$M(a;b) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -8$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix} = 64 - 16 = 48.$$

Mivel D_1 negatív és D_2 pozitív előjelű, ezért a P pontban lokális maximum van.

Mivel $a = b = 4$, ezért $c = 12 - 4 - 4 = 4\,\mathrm{cm}$, ezért a téglatest térfogata $a = b = c = 4\,\mathrm{cm}$ oldalak esetén lesz maximális. Ekkor a térfogat

$$V = 4^3 = 64\,\mathrm{cm}^3.$$

109. **Feladat.** Három szám összege 120. Határozzuk meg a számokat úgy, hogy a négyzetösszegük minimális legyen!

Megoldás:

Legyenek a keresett számok x, y és z. Ekkor

$$x + y + z = 120.$$

A z ismeretlent kifejezve azt kapjuk, hogy

$$z = 120 - x - y.$$

Keressük az

$$f(x;y) = x^2 + y^2 + (120 - x - y)^2$$

függvény minimumát.

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y) = 2x + 2 \cdot (120 - x - y) \cdot (-1) = 4x + 2y - 240$$

$$f'_y(x;y) = 2y + 2 \cdot (120 - x - y) \cdot (-1) = 2x + 4y - 240.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 4x + 2y - 240 &= 0 \\ 2x + 4y - 240 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Ha az első egyenletből kivonjuk a második egyenlet kétszeresét, akkor azt kapjuk, hogy $y = 40$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe $x = 40$ adódik. Tehát az egyetlen stacionárius pont $P = (40; 40)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx}(x;y) & f''_{yx}(x;y) \\ f''_{xy}(x;y) & f''_{yy}(x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot.

Mivel

$$f''_{xx}(x;y) = 4 \qquad f''_{xy}(x;y) = 2$$
$$f''_{yx}(x;y) = 2 \qquad f''_{yy}(x;y) = 4,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ha a mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 4$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 16 - 4 = 12.$$

Mivel D_1 és D_2 pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek. A z értéke

$$z = 120 - 40 - 40 = 40.$$

A minimális négyzetösszeg

$$40^2 + 40^2 + 40^2 = 4\,800.$$

2.5. Kétváltozós függvények szélsőértékszámítása gazdasági feladatokban

110. **Feladat.** Tekintsük az

$$f(K;L) = 18,9K^2 - 0,9K^3 + 5,4L^2 - 0,2L^3$$

termelési függvényt, ahol K a munkaeszközök darabszáma, L a munkások száma. Hogyan válasszuk meg a K és L értékeket ahhoz, hogy a termelt mennyiség a lehető legnagyobb legyen? Mennyi ekkor a termelt mennyiség? A termelt mennyiséget (egy hétre vonatkozóan) darabban értjük.

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_K(K;L) = 37,8K - 2,7K^2$$
$$f'_L(K;L) = 10,8L - 0,6L^2.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 37,8K - 2,7K^2 = 0 \\ 10,8L - 0,6L^2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletben K-t kiemelve azt kapjuk, hogy

$$K \cdot (37,8 - 2,7K) = 0,$$

így $K_1 = 0$, illetve $K_2 = 14$.

A második egyenletben L-et kiemelve azt kapjuk, hogy

$$L \cdot (10,8 - 0,6L) = 0,$$

így $L_1 = 0$, illetve $L_2 = 18$.

Tehát a stacionárius pontok: $P_1 = (0;0)$, $P_2 = (0;18)$; $P_3 = (14;0)$ és $P_4 = (14;18)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(K;L) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} K & L \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{KK}(K;L) & f''_{KL}(K;L) \\ f''_{LK}(K;L) & f''_{LL}(K;L) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{KK}(K;L) = 3,78 - 0,54k \qquad f''_{KL}(K;L) = 0$$
$$f''_{LK}(K;L) = 0 \qquad f''_{LL}(K;L) = 1,08 - 0,12l,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(K;L) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} K & \qquad\qquad L \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ L \end{array} & \begin{pmatrix} 3,78 - 0,54K & 0 \\ 0 & 1,08 - 0,12L \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 3,78 & 0 \\ 0 & 1,08 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 3,78$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 3,78 & 0 \\ 0 & 1,08 \end{pmatrix} = 3,78 \cdot 1,08 - 0 = 4,0824.$$

Mivel $D_1 > 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P_1 pontban lokális minimuma van az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 3,78 & 0 \\ 0 & -1,08 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 3,78$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 3,78 & 0 \\ 0 & -1,08 \end{pmatrix} = -4,0824.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_2 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_3 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_3) = \begin{pmatrix} -3,78 & 0 \\ 0 & 1,08 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -3,78$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -3,78 & 0 \\ 0 & 1,08 \end{pmatrix} = -3,78 \cdot 1,08 - 0 = -4,0824.$$

Mivel $D_2 < 0$, ezért a P_3 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_4 pontban, akkor

$$M(P_4) = \begin{pmatrix} -3,78 & 0 \\ 0 & -1,08 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -3,78$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -3,78 & 0 \\ 0 & -1,08 \end{pmatrix} = 4,0824.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P_4 pontban lokális maximuma van az f függvénynek. Ennek az értéke

$$f(14;18) = 18,9 \cdot 14^2 - 0,9 \cdot 14^3 + 5,4 \cdot 18^2 - 0,2 \cdot 18^3 = 1\,818.$$

111. **Feladat.** Egy irodában kétféle számítógép működik, C és D. A C számítógép c órát működik, a D számítógép d órát üzemel naponta. A napi teljesítményt az

$$f(c;d) = 18c + 20d - 2c^2 - 4d^2 - cd$$

függvény írja le, ami a naponta tesztelt programok számát jelenti. Tudjuk azt is, hogy egyik számítógép sem üzemelhet egy nap 5 óránál tovább. Határozzuk meg, hogy hány órát működjenek az egyes gépek optimális esetben, azaz, ha a lehető legnagyobb teljesítményt szeretnénk elérni.

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_c(c;d) = 18 - 4c - d$$
$$f'_d(c;d) = 20 - 8d - c.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{array}{r} 18 - 4c - d = 0 \\ 20 - 8d - c = 0 \end{array}\right\}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből kifejezve a c ismeretlent azt kapjuk, hogy

$$c = 20 - 8d.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$18 - 80 + 32d - d = 0$$

adódik, így $d = 2$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$c = 20 - 8 \cdot 2 = 4.$$

Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (4; 2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(c;d) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{cc}(c;d) & f''_{cd}(c;d) \\ f''_{dc}(c;d) & f''_{dd}(c;d) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{cc}(c;d) = -4 \qquad f''_{cd}(c;d) = -1$$
$$f''_{dc}(c;d) = -1 \qquad f''_{dd}(c;d) = -8,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(c;d) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -4$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -8 \end{pmatrix} = 32 - 1 = 31.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P pontban lokális maximuma van az f függvénynek.

Tehát 4 órát kell az első számítógépnek és 2 órát a második számítógépnek üzemelni. Mivel

$$f(4;2) = 72 + 40 - 32 - 16 - 8 = 46,$$

ezért napi 46 program tesztelése a maximális teljesítmény.

112. **Feladat.** Egy vállalat kétféle terméket forgalmaz. Az A termékből q_1 darabot, a B termékből q_2 darabot ad el. Az A és B termékekhez tartozó inverz keresleti függvények rendre

$$f_1(q_1) = 100 - q_1$$

és

$$f_2(q_2) = 84 - q_2.$$

A termékek egységárait dollárban értjük.

A két termékhez tartozó együttes költségfüggvény

$$C(q_1; q_2) = 600 + 4q_1 + 4q_2.$$

Határozzuk meg, hogy hány terméket forgalmazzon az egyes termékekből a vállalat ahhoz, hogy a nyeresége a lehető legnagyobb legyen! Mennyi ekkor a nyereség? Maximális nyereség esetén mennyi az egyes termékek egységára?

<u>**Megoldás**</u>:

A nyereségfüggvény

$$\begin{aligned}\Pi(q_1; q_2) &= q_1 \cdot (100 - q_1) + q_2 \cdot (84 - q_2) - 600 - 4q_1 - 4q_2 = \\ &= 100q_1 - q_1^2 + 84q_2 - q_2^2 - 600 - 4q_1 - 4q_2 = \\ &= -q_1^2 - q_2^2 + 96q_1 + 80q_2 - 600.\end{aligned}$$

A Π függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned}\Pi'_{q_1}(q_1; q_2) &= -2q_1 + 96 \\ \Pi'_{q_2}(q_1; q_2) &= -2q_2 + 80.\end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned}-2q_1 + 96 = 0 \\ -2q_2 + 80 = 0\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $q_1 = 48$, a másodikból pedig azt, hogy $q_2 = 40$.

Tehát a Π függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (48; 40)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk a Π függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(q_1; q_2) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \Pi''_{q_1 q_2}(q_1; q_2) & \Pi''_{q_1 q_2}(q_1; q_2) \\ \Pi''_{q_2 q_1}(q_1; q_2) & \Pi''_{q_2 q_2}(q_1; q_2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\Pi''_{q_1q_1}(q_1;q_2) = -2 \qquad \Pi''_{q_1q_2}(q_1;q_2) = 0$$
$$\Pi''_{q_2q_1}(q_1;q_2) = 0 \qquad \Pi''_{q_2q_2}(q_1;q_2) = -2,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(q_1;q_2) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -2$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P pontban lokális maximuma van a Π függvénynek.

Tehát az első termékből 48 darabot, a második termékből 40 darabot kell értékesíteni. Ekkor

$$\Pi(48;40) = 3\,304.$$

Az első termék egységára ekkor $f_1(48) = 52$, a második termék egységára $f_2(40) = 44$ dollár.

113. **Feladat.** Egy vállalat kétféle terméket forgalmaz. Az A termékből q_1 darabot, a B termékből q_2 darabot ad el. Az A és B termékekhez tartozó inverz keresleti függvények rendre

$$f_1(q_1) = 92 - 2q_1$$

és

$$f_2(q_2) = 176 - 5q_2.$$

A termékek egységárait dollárban értjük.

A két termékhez tartozó együttes költségfüggvény

$$C(q_1;q_2) = 3q_1^2 + 2q_2^2 + q_1 \cdot q_2 + 424.$$

Határozzuk meg, hogy hány terméket forgalmazzon a vállalat az egyes termékekből ahhoz, hogy a nyeresége a lehető legnagyobb legyen! Mennyi ekkor a nyereség? Maximális nyereség esetén mennyi az egyes termékek egységára?

Megoldás:

A nyereségfüggvény

$$\begin{aligned}\Pi(q_1;q_2) &= q_1\cdot(92-2q_1)+q_2\cdot(176-5q_2)-3q_1^2-2q_2^2-q_1\cdot q_2-424=\\ &=92q_1-3q_1^2+176q_2-5q_2^2-3q_1^2-2q_2^2-q_1\cdot q_2-424=\\ &=-5q_1^2-7q_2^2+92q_1+176q_2-q_1\cdot q_2-424.\end{aligned}$$

A Π függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned}\Pi'_{q_1}(q_1;q_2) &= -10q_1+92-q_2\\ \Pi'_{q_2}(q_1;q_2) &= -14q_2+176-q_1.\end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned}-10q_1+\ \ 92-q_2&=0\\ -14q_2+176-q_1&=0\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $q_2=92-10q_1$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-1\,288+140q_1+176-q_1=0$$

adódik, amiből azt kapjuk, hogy $q_1=8$. Ezt felhasználva

$$q_2=92-10\cdot 8=12.$$

Tehát a Π függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P=(8;12)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk a Π függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(q_1;q_2)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \quad q_1 \quad\quad & \quad\quad q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} & \begin{pmatrix} \Pi''_{q_1q_2}(q_1;q_2) & \Pi''_{q_1q_2}(q_1;q_2) \\ \Pi''_{q_2q_1}(q_1;q_2) & \Pi''_{q_2q_2}(q_1;q_2) \end{pmatrix}\end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned}\Pi''_{q_1q_1}(q_1;q_2)&=-10 \qquad\qquad & \Pi''_{q_1q_2}(q_1;q_2)&=-1\\ \Pi''_{q_2q_1}(q_1;q_2)&=-1 & \Pi''_{q_2q_2}(q_1;q_2)&=-14,\end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(q_1;q_2) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} q_1 & q_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} q_1 \\ q_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ -1 & -14 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ -1 & -14 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -10$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -10 & -1 \\ -1 & -14 \end{pmatrix} = 140 - 1 = 139.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P pontban lokális maximuma van a Π függvénynek.

Tehát az első termékből 8 darabot, a második termékből 12 darabot kell értékesíteni. Ekkor

$$\Pi(8;12) = 1\,000.$$

Az első termék egységára ekkor $f_1(8) = 76$. A második termék egységára $f_2(12) = 116$ dollár.

114. **Feladat.** Egy paradicsomtermesztéssel foglalkozó vállalat egy négyzetméter termőterületből származó bevételét (dollárban) az

$$R(T;x) = 5T \cdot (1 - \mathrm{e}^{-x}),$$

függvény írja le, ahol T a fóliasátorban lévő hőmérséklet és x a négyzetméterenként felhasznált műtrágya mennyisége. Tudjuk, hogy a műtrágya négyzetméterenkénti költsége $20x$ dollár és a megfelelő hőmérséklet fenntartásának költsége $0,1T^2$ dollár négyzetméterenként.

a) Írjuk fel a költségfüggvényt!
b) Adjuk meg a nyereségfüggvényt!
c) Milyen hőmérséklet és műtrágyafelhasználás esetén érjük el a lehető legnagyobb hasznot?

Megoldás:

a) A költségfüggvény
$$C(T;x) = 20x + 0,1T^2.$$

b) A nyereségfüggvény
$$\Pi(T;x) = 5T \cdot (1 - \mathrm{e}^{-x}) - 20x - 0,1T^2.$$

c) A Π függvény elsőrendű parciális derivált függvényei
$$\Pi'_T(T;x) = 5 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-x}) - 0,2T$$
$$\Pi'_x(T;x) = 5T \cdot \mathrm{e}^{-x} - 20.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a
$$\left.\begin{aligned} 5 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-x}) - 0,2T = 0 \\ 5T \cdot \mathrm{e}^{-x} - 20 = 0 \end{aligned}\right\}$$
egyenletrendszert.

A második egyenletből azt kapjuk, hogy
$$T = \frac{4}{\mathrm{e}^{-x}}.$$

Ezt behelyettesítve az első egyenletbe
$$5 - 5\mathrm{e}^{-x} - \frac{0,8}{\mathrm{e}^{-x}} = 0$$
adódik, amit átalakítva az
$$-5\mathrm{e}^{-x} + 5\mathrm{e}^{-x} - 0,8 = 0$$
egyenlethez jutunk. Bevezetve az $\mathrm{e}^{-x} = y$ jelölést a
$$-5y^2 + 5y - 0,8 = 0$$
másodfokú egyenletet kapjuk. A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva
$$y_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{-10}$$
adódik, így $y_1 = \frac{1}{5}$, illetve $y_2 = \frac{4}{5}$.

Mivel $y = \mathrm{e}^{-x}$, ezért egyrészt
$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{5} \qquad \Rightarrow \qquad -x = \ln\frac{1}{5} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \ln 5,$$

másrészt

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad -x = \ln\frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \ln\frac{5}{4}.$$

Mivel $x_1 = \ln 5$, ezért

$$T_1 = \frac{4}{\frac{1}{5}} = 20.$$

Mivel $x_2 = \ln\frac{5}{4}$, ezért

$$T_2 = \frac{4}{\frac{4}{5}} = 5.$$

Tehát a Π függvénynek két stacionárius pontja van, ezek $P_1 = (20; \ln 5)$ és $P_2 = \left(5; \ln\frac{5}{4}\right)$.

A lokális szélsőérték létezése elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk a Π függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(T;x) = \begin{array}{c} \\ T \\ x \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad T \qquad\qquad & \qquad x \end{array} \\ \begin{pmatrix} \Pi''_{TT}(T;x) & \Pi''_{Tx}(T;x) \\ \Pi''_{xT}(T;x) & \Pi''_{xx}(T;x) \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\Pi''_{TT}(T;x) = -0,2 \qquad \Pi''_{Tx}(T;x) = 5\mathrm{e}^{-x}$$
$$\Pi''_{xT}(T;x) = 5\mathrm{e}^{-x} \qquad \Pi''_{xx}(T;x) = -5T\cdot\mathrm{e}^{-x},$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(T;x) = \begin{array}{c} \\ T \\ x \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad T \qquad & \qquad x \end{array} \\ \begin{pmatrix} -0,2 & 5\mathrm{e}^{-x} \\ 5\mathrm{e}^{-x} & -5T\cdot\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} -0,2 & 1 \\ 1 & -20 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -0,2$, illetve

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} -0,2 & 1 \\ 1 & -20 \end{pmatrix} = 3.$$

Mivel $D_1 < 0$ és $D_2 > 0$, ezért a P_1 pontban lokális maximuma van a Π függvénynek.

Tehát $20°\mathrm{C}$ hőmérsékletet kell biztosítani a fóliasátorban és $\ln 5 \approx 1,61$ egység műtrágyát kell négyzetméterenként felhasználni. Ekkor egy négyzetméter termőterületből a nyereség

$$\Pi(5; \ln 5) = 100 \cdot \frac{4}{5} - 20 \ln 5 - 40 = 40 - 20 \ln 5 \approx 7,81 \text{ dollár.}$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} -0,2 & 4 \\ 4 & -20 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -0,2$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -0,2 & 4 \\ 4 & -20 \end{pmatrix} = -6.$$

Mivel $D_1 < 0$, ezért a P_2 pontban nincs szélsőértéke a Π függvénynek.

2.6. Három- és többváltozós függvények szélsőértékszámítása

Elméleti összefoglaló

2.6.1. **Megjegyzés.** Megállapodunk abban, hogy ebben a fejezetben a másodrendű parciális derivált függgvények esetén a függvény argumentumában a változókat nem írjuk ki.

2.6.2. **Tétel.** (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele)
Ha az $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvénynek a $P \in D$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor az P pontban az elsőrendű parciális derivált függvényei nullák.

2.6.3. **Definíció.** Az $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény *Hesse-mátrixa* az $P \in D$ pontban

$$M(P) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) & \dots & f''_{x_1x_n}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) & \dots & f''_{x_2x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots \\ f''_{x_nx_1}(P) & f''_{x_nx_2}(P) & \dots & f''_{x_nx_n}(P) \end{pmatrix} \end{array}.$$

2.6.4. **Tétel.** (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele)
Legyen $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy az f függvénynek az $P \in D$ pontban az elsőrendű parciális deriváltjai nullák. Ilyenkor a P pontot *stacionárius pont*nak is nevezzük. Tekintsük az f függvény másodrendű parciális deriváltjaiból képzett

$$M(P) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) & \dots & f''_{x_1x_n}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) & \dots & f''_{x_2x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots \\ f''_{x_nx_1}(P) & f''_{x_nx_2}(P) & \dots & f''_{x_nx_n}(P) \end{pmatrix} \end{array}.$$

Hesse-mátrixot.

Legyenek D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ az $M(P)$ mátrix bal felső sarokdeterminánsai, azaz legyen

$$D_1 = f''_{x_1x_1}(P),$$

legyen

$$D_2 = \det\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) \end{pmatrix},$$

általánosan

$$D_i = \det\begin{pmatrix} f''_{x_1x_1}(P) & f''_{x_1x_2}(P) & \ldots & f''_{x_1x_i}(P) \\ f''_{x_2x_1}(P) & f''_{x_2x_2}(P) & \ldots & f''_{x_2x_i}(P) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ f''_{x_ix_1}(P) & f''_{x_ix_2}(P) & \ldots & f''_{x_ix_i}(P) \end{pmatrix}.$$

Ha $D_i > 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén, akkor az f függvénynek a P pontban lokális minimuma van.

Ha $(-1)^i \cdot D_i > 0$, akkor az f függvénynek a P pontban lokális maximuma van.

Ha $D_i \leq 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén és létezik olyan i szám, melyre $D_i = 0$ vagy $(-1)^i \cdot D_i > 0$ és létezik olyan i szám, melyre $D_i = 0$, akkor a sarokdeterminánsok vizsgálatával nem dönthető el, hogy létezik-e szélsőértéke az f függvénynek a P pontban.

Ha a sarokdeterminánsok előjelére az előbb felsorolt esetek egyike sem teljesül, akkor az f függvénynek nincs szélsőértéke a P pontban.

2.6.5. **Megjegyzés.** Többváltozós függvény lokális szélsőértékének meghatározása a gyakorlatban:

1. Kiszámoljuk az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit.
2. Megoldjuk az

$$\left.\begin{aligned} f'_{x_1}(x_1; x_2; \ldots; x_n) &= 0 \\ f'_{x_2}(x_1; x_2; \ldots; x_n) &= 0 \\ &\ldots \\ f'_{x_n}(x_1; x_2; \ldots; x_n) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

   egyenletrendszert.

   Az egyenletrendszer megoldásai a lehetséges szélsőértékek, más szóval stacionárius pontok.

3. Kiszámoljuk az f függvény másodrendű parciális deriváltjait, majd azokból előállítjuk az

$$M(x_1;x_2;\dots;x_n)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \dots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \dots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \dots & f''_{x_nx_n} \end{pmatrix} \end{array}.$$

   Hesse-mátrixot.

4. Kiértékeljük a Hesse-mátrixot a stacionárius pontokban és alkalmazzuk a 2.6.4 tételt annak eldöntésére, hogy a stacionárius pontban van-e szélsőérték és ha igen, milyen típusú.

2.6.6. **Példa.** Határozzuk meg az

$$f(x;y;z)=x^2-xy+y^2+z^2-2z$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y;z)&=2x-y \\ f'_y(x;y;z)&=-x+2y \\ f'_z(x;y;z)&=2z-2. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 2x-y&=0 \\ -x+2y&=0 \\ 2z-2&=0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y=2x$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe $x=0$ adódik, így $y=0$. A harmadik egyenletből $z=1$ következik.

Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P=(0;0;2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az

azokból képzett

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = 2 & f''_{xy} = -1 & f''_{xz} = 0 \\ f''_{yx} = -1 & f''_{yy} = 2 & f''_{yz} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = 2$. A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(0;0;2) = 0^2 - 0 \cdot 0 + 0^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Kidolgozott feladatok

115. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y;z) = x^3 + y^3 - 3xy + z^2 - 2z + 1$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y;z) &= 3x^2 - 3y \\ f'_y(x;y;z) &= 3y^2 - 3x \\ f'_z(x;y;z) &= 2z - 2. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 3y^2 - 3x &= 0 \\ 2z - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 1$. Az első és második egyenlet osztható 3-mal, így az

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 0 \\ y^2 - x &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $y = x^2$ adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$(x^2)^2 - x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^4 - x = 0.$$

Az egyenletből x-et kiemelve

$$x \cdot (x^3 - 1) = 0$$

adódik, így $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = 1$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0;0;0)$ és $P_2 = (1;1;1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{aligned} f''_{xx} &= 6x & f''_{xy} &= -3 & f''_{xz} &= 0 \\ f''_{yx} &= -3 & f''_{yy} &= 6y & f''_{yz} &= 0 \\ f''_{zx} &= 0 & f''_{zy} &= 0 & f''_{zz} &= 2, \end{aligned}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 9 = -9.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első felső sarokdeterminánsa $D_1 = 6$. A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} = 36 - 9 = 27.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^6 \cdot (36 - 9) = 54.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(1;1;1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = -1.$$

116. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y;z) = 2x^2 + xy + 4y^2 + xz + z^2 + 2$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y;z) &= 4x + y + z \\ f'_y(x;y;z) &= x + 8y \\ f'_z(x;y;z) &= x + 2z. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 4x + y + z &= 0 \\ x + 8y &= 0 \\ x + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből kivonva a harmadikat azt kapjuk, hogy $z = 4y$. A második egyenletből $x = -8y$ adódik. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-32y + y + 4y = 0,$$

így $y = 0$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy $z = 0$ és $x = 0$.

Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (0;0;0)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = 4 & f''_{xy} = 1 & f''_{xz} = 1 \\ f''_{yx} = 1 & f''_{yy} = 8 & f''_{yz} = 0 \\ f''_{zx} = 1 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 4$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = 32 - 1 = 31.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 64 - 8 - 2 = 54.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(0;0;0) = 2.$$

117. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y;z) = -x^2 + 6x - 2y^2 - 8y - 4z^2 - 4yz$$

függvény lokális szélsőértékeit!

<u>**Megoldás**</u>:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y;z) &= -2x + 6 \\ f'_y(x;y;z) &= -4x - 8 - 4z \\ f'_z(x;y;z) &= -8z - 4y. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} -2x + 6 &= 0 \\ -4y - 8 - 4z &= 0 \\ -8z - 4y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 3$. A harmadik egyenletből $y = -2z$ adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$8z - 8 - 4z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = 2.$$

Ezt felhasználva $y = -4$ adódik. Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (3; -4; 2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = -2 & f''_{xy} = 0 & f''_{xz} = 0 \\ f''_{yx} = 0 & f''_{yy} = -4 & f''_{yz} = -4 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = -4 & f''_{zz} = -8, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = -2$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 8 - 0 = 8,$$

továbbá a harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} = -64 + 32 = -32.$$

Mivel $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ és $D_3 < 0$, ezért a P pontban lokális maximuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(3;-4;2) = -9 + 18 - 32 + 32 - 16 + 32 = 25.$$

118. **Feladat.** Legyen $x > 0$, $y > 0$ és $z \in \mathbb{R}$. Határozzuk meg az

$$f(x;y;z) = \frac{20}{x} + \frac{50}{y} + xy + z^2 - 2z + 1$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$f'_x(x;y;z) = -\frac{20}{x^2} + y$$

$$f'_y(x;y;z) = -\frac{50}{y^2} + x$$

$$f'_z(x;y;z) = 2z - 2.$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} \frac{20}{x^2} + y &= 0 \\ -\frac{50}{y^2} + x &= 0 \\ 2z - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert.

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = \frac{20}{x^2}$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe

$$-\frac{50}{\left(\frac{20}{x^2}\right)^2} + x = 0$$

adódik, ami ekvivalens az

$$-\frac{50}{\frac{400}{x^4}} + x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{x^4}{8} + x = 0$$

egyenlettel. Az egyenlet mindkét oldalát szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy

$$-x^4 + 8x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x \cdot (-x^3 + 8) = 0.$$

Mivel $x \neq 0$, ezért $x = 2$. Ezt felhasználva $y = 5$ adódik. A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 1$. Tehát az f függvény stacionárius pontja: $P = (2; 5; 1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$f''_{xx} = \frac{40}{x^3} \qquad f''_{xy} = 1 \qquad f''_{xz} = 0$$

$$f''_{yx} = 1 \qquad f''_{yy} = \frac{100}{y^3} \qquad f''_{yz} = 0$$

$$f''_{zx} = 0 \qquad f''_{zy} = 0 \qquad f''_{zz} = 2,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{40}{x^3} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{100}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = 5$. A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 - 2 = 6.$$

Mivel $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ és $D_3 > 0$, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(5;2;1) = 10 + 10 + 10 + 1 - 2 + 1 = 30.$$

119. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y;z) = x^3 + y^2 + 6xy + 7y + z^2 - 6z$$

függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y;z) &= 3x^2 + 6y \\ f'_y(x;y;z) &= 6x + 2y + 7 \\ f'_z(x;y;z) &= 2z - 6. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 + 6y = 0 \\ 6x + 2y + 7 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 3$. A második egyenletből kifejezve az y ismeretlent

$$y = -3x - 3,5$$

adódik. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3x^2 - 18x - 21 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 - 6x - 7 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2},$$

így $x_1 = -1$, illetve $x_2 = 7$. Ezt felhasználva $y_1 = -0,5$, illetve $y_2 = -24,5$.

Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (-1; -0,5; 3)$ és $P_2 = (7; -24,5; 3)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = 6x & f''_{xy} = 6 & f''_{xz} = 0 \\ f''_{yx} = 6 & f''_{yy} = 2 & f''_{yz} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6x & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = -6$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = -12 - 36 = -48.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 42 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első felső sarokdeterminánsa $D_1 = 42$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 42 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = 84 - 36 = 48.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 42 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 168 - 32 = 136.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(7; -24,5; 3) = -266,25.$$

120. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x; y; z) = x^3 + y^3 - 9xy + z^2 - 4z + 1$$

függvény lokális szélsőértékeit!

<u>**Megoldás**</u>:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x; y; z) &= 3x^2 - 9y \\ f'_y(x; y; z) &= 3y^2 - 9x \\ f'_z(x; y; z) &= 2z - 4. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 9y &= 0 \\ 3y^2 - 9x &= 0 \\ 2z - 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $z = 2$. Az első és második egyenlet osztható 3-mal, így az

$$\begin{aligned} x^2 - 3y &= 0 \\ y^2 - 3x &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Az első egyenletből $y = \frac{1}{3} \cdot x^2$ adódik, amit behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{9} \cdot x^4 - 3x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^4 - 27x = 0.$$

Az egyenletből x-et kiemelve

$$x \cdot (x^3 - 27) = 0$$

adódik, így $x_1 = 0$ és $x_2 = 3$. A megfelelő y értékek $y_1 = 0$ és $y_2 = 3$. Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0; 0)$ és $P_2 = (3; 3; 2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = 6x & f''_{xy} = -9 & f''_{xz} = 0 \\ f''_{yx} = -9 & f''_{yy} = 6y & f''_{yz} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 6x & -9 & 0 \\ -9 & 6y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 0 \\ -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix bal felső sarokdeterminánsai $D_1 = 0$, illetve

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = 0 - 81 = -81.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 18 & -9 & 0 \\ -9 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első felső sarokdeterminánsa $D_1 = 18$. A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix} = 324 - 81 = 243.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 18 & -9 & 0 \\ -9 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^6 \cdot (324 - 81) = 486.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(3;3;2) = 3^3 + 3^3 - 9 \cdot 3 \cdot 3 + 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -30.$$

121. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y;z;u) = x^2 + y^2 - 3x - xy + z^2 - 2z + u^2 - 4u$$

függvény lokális szélsőértékeit!

<u>**Megoldás**</u>:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y;z;u) &= 2x - 3 - y \\ f'_y(x;y;z;u) &= 2y - x \\ f'_z(x;y;z;u) &= 2z - 2 \\ f'_u(x;y;z;u) &= 2u - 4. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3 - y &= 0 \\ 2y - x &= 0 \\ 2z - 2 &= 0 \\ 2u - 4 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $u = 2$, míg a harmadikból azt, hogy $z = 1$. A második egyenletből $x = 2y$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy $y = 1$. Ezt felhasználva $x = 2$ adódik.

Tehát az f függvénynek egyetlen stacionárius pontja van, ami $P = (2;1;1;2)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y;z;u) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} & f''_{xu} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} & f''_{yu} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & f''_{zu} \\ f''_{ux} & f''_{uy} & f''_{uz} & f''_{uu} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{llll} f''_{xx} = 2 & f''_{xy} = -1 & f''_{xz} = 0 & f''_{xu} = 0 \\ f''_{yx} = -1 & f''_{yy} = 2 & f''_{yz} = 0 & f''_{yu} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2 & f''_{zu} = 0 \\ f''_{ux} = 0 & f''_{uy} = 0 & f''_{uz} = 0 & f''_{uu} = 2 \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P stacionárius pontban, akkor

$$M(P) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = 2$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - 1 = 3.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 6.$$

A negyedik bal felső sarokdetermináns

$$D_4 = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-1)^8 \cdot 6 = 12.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P pontban lokális minimuma van az f függvénynek, amelynek értéke

$$f(2;1;1;2) = 4 + 1 - 6 - 2 + 1 - 2 + 4 - 8 = -8.$$

122. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y;z) = 2x^2 + 2y^3 + z^2 + 24xy + 2z$$

függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y;z) &= 4x + 24y \\ f'_y(x;y;z) &= 6y^2 + 24x \\ f'_z(x;y;z) &= 2z + 2. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 4x + 24y &= 0 \\ 6y^2 + 24x &= 0 \\ 2z + 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $z = -1$. At első egyenletből kifejezve az x ismeretlent

$$x = -6y$$

adódik. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$6y^2 - 144y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 6y \cdot (y - 24) = 0,$$

így $y_1 = 0$, illetve $y_2 = 24$. Ezt felhasználva $x_1 = 0$, illetve $x_2 = -144$ adódik.

Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0;0;-1)$ és $P_2 = (-144;24;-1)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = 4 & f''_{xy} = 24 & f''_{xz} = 0 \\ f''_{yx} = 24 & f''_{yy} = 12y & f''_{yz} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 24 & 0 \\ 24 & 12y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 4 & 24 & 0 \\ 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = 4$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 24 \\ 24 & 0 \end{pmatrix} = -576.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 4 & 24 & 0 \\ 0 & 288 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első felső sarokdeterminánsa $D_1 = 4$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 4 & 24 \\ 0 & 288 \end{pmatrix} = 1\,1152.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 4 & 24 & 0 \\ 0 & 288 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,304.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek.

123. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y;z;u) = x^3 + y^2 - 6xy + z^2 - 4z + u^2 - 6u$$

függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y;z;u) &= 3x^2 - 6y \\ f'_y(x;y;z;u) &= 2y - 6x \\ f'_z(x;y;z;u) &= 2z - 4 \\ f'_u(x;y;z;u) &= 2u - 6. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 6y &= 0 \\ 2y - 6x &= 0 \\ 2z - 4 &= 0 \\ 2u - 6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $u = 3$, míg a harmadikból azt, hogy $z = 2$. A második egyenletből $y = 3x$ adódik, amit behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$3x^2 - 18x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 3x \cdot (x - 6) = 0.$$

Ezt felhasználva $y_1 = 0$, illetve $y_2 = 18$ adódik.

Tehát az f függvénynek két stacionárius pontja van. Ezek $P_1 = (0; 0; 2; 3)$, illetve $P_2 = (6; 18; 2; 3)$.

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x; y; z; u) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ u \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} & f''_{xu} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} & f''_{yu} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} & f''_{zu} \\ f''_{ux} & f''_{uy} & f''_{uz} & f''_{uu} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{llll} f''_{xx} = 6x & f''_{xy} = -6 & f''_{xz} = 0 & f''_{xu} = 0 \\ f''_{yx} = -6 & f''_{yy} = 2 & f''_{yz} = 0 & f''_{yu} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2 & f''_{zu} = 0 \\ f''_{ux} = 0 & f''_{uy} = 0 & f''_{uz} = 0 & f''_{uu} = 2 \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x; y; z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ u \end{array} & \begin{pmatrix} 6x & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = 0$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = -36.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 36 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = 36$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 36 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 36.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 36 & -6 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 36 = 72.$$

A negyedik bal felső sarokdetermináns

$$D_4 = \det \begin{pmatrix} 36 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 72 = 144.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek.

124. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x;y;z) = x^3 - 3x + y^3 - 3y^2 + z^2 - 2z + 1$$

függvény lokális szélsőérték helyeit!

Megoldás:

Az f függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x;y;z) &= 3x^2 - 3 \\ f'_y(x;y;z) &= 3y^2 - 6y \\ f'_z(x;y;z) &= 2z - 2. \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák legyenek, így meg kell oldanunk a

$$\left.\begin{aligned} 3x^2 - 3 &= 0 \\ 3y^2 - 6y &= 0 \\ 2z - 2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $x = \pm 1$, a második egyenletből azt, hogy $y = 0$, illetve $y = 2$, míg az utolsó egyenletből azt, hogy $z = 1$. Tehát az f függvénynek négy stacionárius pontja van. Ezek

$$\begin{aligned} P_1 &= (1;0;1) P_3 = (-1;0;1) \\ P_2 &= (1;2;1) P_4 = (-1;2;1). \end{aligned}$$

A lokális szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az f függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{yx} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hesse-féle mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} f''_{xx} = 6x & f''_{xy} = 0 & f''_{xz} = 0 \\ f''_{yx} = 0 & f''_{yy} = 6y - 6 & f''_{yz} = 0 \\ f''_{zx} = 0 & f''_{zy} = 0 & f''_{zz} = 2, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(x;y;z) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 6y-6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_1 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = 4$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = -36.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_1 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_2 pontban, akkor

$$M(P_2) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első felső sarokdeterminánsa $D_1 = 6$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = 36.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 72.$$

Mivel minden bal felső sarokdetermináns pozitív, ezért a P_2 pontban lokális minimuma van az f függvénynek.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_3 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = 4$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = 36.$$

A harmadik bal felső sarokdetermináns

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 72.$$

Tehát a P_3 pontban nincs szélsőérték.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a P_4 stacionárius pontban, akkor

$$M(P_4) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix első bal felső sarokdeterminánsa $D_1 = -6$.

A második bal felső sarokdetermináns

$$D_2 = \det \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = -36.$$

Mivel D_2 negatív, ezért a P_4 pontban nincs szélsőértéke az f függvénynek.

2.7. Feltételes szélsőértékszámítás

Elméleti összefoglaló

Feltételes szélsőérték meghatározásakor bizonyos értelmezési tartományra vonatkozó feltételeket is figyelembe veszünk a szélsőérték meghatározásához.

2.7.1. **Definíció.** Tekintsük az $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt és a $g_i\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényeket, ahol $i = 1, \ldots, m < n$. Ekkor az

$$\begin{aligned} L(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, x_1, x_2 \ldots, x_n) = {} & \lambda_1 \cdot g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ & + \lambda_2 \cdot g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \\ & + \lambda_m \cdot g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ & + f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

függvényt *Lagrange-függvény*nek nevezzük.

2.7.2. **Tétel.** (lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele)
Tekintsük az $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvényt, továbbá legyenek $g_i\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, ahol $i = 1, \ldots, m < n$.

Ha az f függvénynek a $P \in D$ pontban a

$$g_1(P) = 0,\ g_2(P) = 0,\ \ldots,\ g_m(P) = 0$$

feltételek mellett lokális szélsőértéke van és a g_i „feltételek” $(i = 1, \ldots, m)$ egymástól függetlenek, azaz a

$$\begin{pmatrix} (g_1)'_{x_1}(P) & \ldots & (g_1)'_{x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_m)'_{x_1}(P) & \ldots & (g_m)'_{x_n}(P) \end{pmatrix}$$

mátrix rangja m, akkor létezik olyan $Q \in \mathbb{R}^m$ pont, hogy a Lagrange-függvény elsőrendű parciális derivált függvényei a $(Q; P) \in \mathbb{R}^m \times D$ pontban nullák.

2.7.3. **Tétel.** (lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele)
Tekintsük az $f\colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvényt és legyenek

minden $i = 1, \dots, m < n$ esetén $g_i \colon D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy a $(Q; P) \in \mathbb{R}^m \times D$ pontban a Lagrange-függvény elsőrendű parciális derivált függvényei nullák valamint a

$$\begin{pmatrix} (g_1)'_{x_1}(P) & \dots & (g_1)'_{x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_m)'_{x_1}(P) & \dots & (g_m)'_{x_n}(P) \end{pmatrix}$$

mátrix rangja m. Tekintsük az L függvény másdorendű parciális derivált függvényeiből képzett

$M(Q; P) =$

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1}(Q;P) & \dots & L''_{\lambda_1\lambda_m}(Q;P) & L''_{\lambda_1 x_1}(Q;P) & \dots & L''_{\lambda_1 x_n}(Q;P) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L''_{\lambda_m\lambda_1}(Q;P) & \dots & L''_{\lambda_m\lambda_m}(Q;P) & L''_{\lambda_m x_1}(Q;P) & \dots & L''_{\lambda_m x_n}(Q;P) \\ L''_{x_1\lambda_1}(Q;P) & \dots & L''_{x_1\lambda_m}(Q;P) & L''_{x_1 x_1}(Q;P) & \dots & L''_{x_1 x_n}(Q;P) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L''_{x_n\lambda_1}(Q;P) & \dots & L''_{x_n\lambda_m}(Q;P) & L''_{x_n x_1}(Q;P) & \dots & L''_{x_n x_n}(Q;P) \end{pmatrix}$$

mátrixot. Jelölje D_j az $M(Q; P)$ mátrix bal felső sarokdeterminánsait.

Ha $(-1)^m \cdot D_j > 0$ minden $j = 2m + 1, \dots, n + m$ esetén, akkor az f függvénynek a P pontban lokális minimuma van a megadott feltételek mellett.

Ha $(-1)^{m+j} \cdot D_j > 0$ minden $j = 2m + 1, \dots, n + m$ esetén, akkor az f függvénynek a P pontban lokális maximuma van a megadott feltételek mellett.

2.7.4. **Megjegyzés.** Feltételes szélsőérték meghatározása a gyakorlatban:

1. Meghatározzuk a 2.7.1 módon definiált Lagrange-függvényt.
2. Kiszámoljuk a Lagrange-függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit.
3. Az elsőrendű parciális derivált függvényeket egyenlővé tesszük nullával és megoldjuk a kapott $m + n$ darab ismeretlent tartalmazó egyenletrendszert. Az egyenletrendszer megoldásvektorának utolsó n koordinátáiból képzett pontok az f függvény lehetséges szélsőértékei, más szóval stacionárius pontjai.
4. Megkonstruáljuk a Lagrange-függvény másodrendű parciális derivált függvényeiből álló 2.7.3 tételben szereplő mátrixot, amit kiértékelünk azon stacionárius pontokban, amelyekben a 2.7.2 tételben szereplő mátrix rangja m és alkalmazzuk a 2.7.3 tételt annak eldöntésére, hogy a stacionárius pontban van-e szélsőérték és ha igen, milyen típusú.

2.7.5. **Megjegyzés.** Tekintsük azt a speciális esetet, amikor az $(x;y) \mapsto f(x;y)$ függvény kétváltozós és egyetlen $g(x;y)=0$ feltételünk van. Ekkor a (feltételes) szélsőérték meghatározása az alábbi módon történik.

1. Meghatározzuk az

$$L(\lambda;x;y) = \lambda \cdot g(x;y) + f(x;y)$$

Lagrange-függvényt.

2. Kiszámoljuk a Lagrange-függvény elsőrendű parciális derivált függvényeit.
3. Az elsőrendű parciális derivált függvényeket egyenlővé tesszük nullával, azaz megoldjuk a

$$\left.\begin{aligned} L'_\lambda(\lambda;x;y) &= 0 \\ L'_x(\lambda;x;y) &= 0 \\ L'_y(\lambda;x;y) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert. Legyen az egyenletrendszer megoldása, azaz a stacionárius pont $(\lambda_0;x_0;y_0)$.

4. Megkonstruáljuk a Lagrange-függvény másodrendű parciális derivált függvényeiből álló

$$M(\lambda;x;y) = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{xx}(\lambda;x;y) & L''_{xy}(\lambda;x;y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{yx}(\lambda;x;y) & L''_{yy}(\lambda;x;y) \end{pmatrix}$$

mátrixot. Kiértékeljük a mátrixot a stacionárius pontokban. A 2.7.3 tételben $n=2$ és $m=1$, ezért $2m+1=3$ és $n+m=3$, tehát csak a

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda_0;x_0;y_0) & L''_{\lambda x}(\lambda_0;x_0;y_0) & L''_{\lambda y}(\lambda_0;x_0;y_0) \\ L''_{x\lambda}(\lambda_0;x_0;y_0) & L''_{xx}(\lambda_0;x_0;y_0) & L''_{xy}(\lambda_0;x_0;y_0) \\ L''_{y\lambda}(\lambda_0;x_0;y_0) & L''_{yx}(\lambda_0;x_0;y_0) & L''_{yy}(\lambda_0;x_0;y_0) \end{pmatrix}$$

determinánst kell tekintenünk.

Ha $(-1)^1 \cdot D_3 > 0$, azaz $D_3 < 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0;y_0)$ pontban lokális minimuma van.

Ha $(-1)^{1+3} \cdot D_3 > 0$, azaz $D_3 > 0$, akkor az f függvénynek az $(x_0;y_0)$ pontban lokális maximuma van.

2.7.6. **Példa.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x+y$ függvénynek az $x^2+y^2 = 50$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g(x;y) = x^2 + y^2 - 50$. A Lagrange-függvény

$$\begin{aligned} L(\lambda;x;y) &= \lambda \cdot g(x;y) + f(x;y) = \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 50) + x + y = \\ &= \lambda \cdot x^2 + \lambda \cdot y^2 - 50\lambda + x + y. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} L'_\lambda(\lambda;x;y) &= x^2 + y^2 - 50 \\ L'_x(\lambda;x;y) &= 2\lambda x + 1 \\ L'_y(\lambda;x;y) &= 2\lambda y + 1. \end{aligned}$$

Tehát az

$$\left.\begin{aligned} x^2 + x^2 = 50 \\ 2\lambda x + 1 = 0 \\ 2\lambda y + 1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből $x = -\frac{1}{2\lambda}$, a harmadik egyenletből $y = -\frac{1}{2\lambda}$ adódik. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 50.$$

Tehát

$$\frac{\lambda^2}{2} = 50 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 = 100,$$

így $\lambda_1 = \frac{1}{10}$ és $\lambda_2 = -\frac{1}{10}$. Tehát $x_1 = -5$ és $y_2 = -5$, illetve $x_2 = 5$ és $y = 5$ adódik.

Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontjai $(Q_1;P_1) = \left(\frac{1}{10};-5;-5\right)$ és $(Q_2;P_2) = \left(-\frac{1}{10};5;5\right)$.

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az

azokból képzett

$$M(\lambda;x;y)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}\lambda & x & y\end{array}\\ \begin{array}{c}\lambda\\ x\\ y\end{array} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)\\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{xy}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)\\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{yx}(\lambda;x;y) & L''_{yy}(\lambda;x;y)\end{pmatrix}\end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y)=0 & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y)=2x & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)=2y\\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y)=2x & L''_{xy}(\lambda;x;y)=2\lambda & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)=0\\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y)=2y & L''_{yx}(\lambda;x;y)=0 & L''_{yy}(\lambda;x;y)=2\lambda, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda;x;y)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}\lambda & x & y\end{array}\\ \begin{array}{c}\lambda\\ x\\ y\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y\\ 2x & 2\lambda & 0\\ 2a & 0 & 2\end{pmatrix}\end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q_1;P_1)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_1;P_1)=\begin{pmatrix} 0 & -10 & -10\\ -10 & \frac{1}{5} & 0\\ -10 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_1;P_1)$ mátrix determinánsa

$$D_3=\det\begin{pmatrix} 0 & -10 & -10\\ -10 & \frac{1}{5} & 0\\ -10 & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=-40<0,$$

ezért a 2.7.5 megjegyzés szerint az f függvénynek minimuma van a $P_1=(-5;-5)$ pontban. A minimum érték

$$f(-5;-5)=-10.$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a $(Q_2; P_2)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_2; P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 10 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 10 & 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_2; P_2)$ mátrix determinánsa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & -10 & -10 \\ -10 & \frac{1}{5} & 0 \\ -10 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = 40 > 0,$$

ezért a 2.7.5 megjegyzés szerint az f függvénynek minimuma van a $P_2 = (5; 5)$ pontban. A minimum érték

$$f(5; 5) = 10.$$

Kidolgozott feladatok

125. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x^2 + y$ függvénynek az $x - y = 0$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g(x;y) = x - y$. A Lagrange-függvény

$$\begin{aligned} L(\lambda;x;y) &= \lambda \cdot g(x;y) + f(x;y) = \lambda \cdot (x-y) + x^2 + y = \\ &= \lambda \cdot x - \lambda \cdot y + x^2 + y. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$L'_\lambda(\lambda;x;y) = x - y$$

$$L'_x(\lambda;x;y) = \lambda + 2x$$

$$L'_y(\lambda;x;y) = -\lambda + 1.$$

Tehát az

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 0 \\ \lambda + 2x &= 0 \\ -\lambda + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A harmadik egyenletből $\lambda = 1$ adódik. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy $x = -\frac{1}{2}$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $y = -\frac{1}{2}$.

Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja $(Q;P) = \left(1; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda;x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{xy}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{yx}(\lambda;x;y) & L''_{yy}(\lambda;x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y)=0 \qquad L''_{\lambda x}(\lambda;x;y)=1 \qquad L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)=-1$$

$$L''_{x\lambda}(\lambda;x;y)=1 \qquad L''_{xy}(\lambda;x;y)=2 \qquad L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)=0$$

$$L''_{y\lambda}(\lambda;x;y)=-1 \qquad L''_{yx}(\lambda;x;y)=0 \qquad L''_{yy}(\lambda;x;y)=0,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda;x;y)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q;P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q;P)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q;P)$ mátrix determinánsa

$$D_3=\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=-2<0,$$

ezért az f függvénynek minimuma van a $P=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ pontban. A minimum érték

$$f\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}.$$

126. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y)=x\cdot y$ függvénynek az $x+y=100$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

A feladat feltétele szerint

$$x+y=100 \qquad \Rightarrow \qquad x+y-100=0,$$

így legyen $g(x;y)=x+y-100$.

A Lagrange-függvény

$$\begin{aligned} L(\lambda;x;y) &= \lambda\cdot g(x;y)+f(x;y)=\lambda\cdot(x+y-100)+x\cdot y= \\ &= \lambda\cdot x+\lambda\cdot y-10\lambda+x\cdot y. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} L'_\lambda(\lambda;x;y) &= x+y-100 \\ L'_x(\lambda;x;y) &= \lambda+y \\ L'_y(\lambda;x;y) &= \lambda+x. \end{aligned}$$

Tehát az

$$\left.\begin{aligned} x+y-100&=0 \\ \lambda+y&=0 \\ \lambda+x&=0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből kivonva a harmadik egyenletet azt kapjuk, hogy $y=x$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe $2x=100$ adódik, így $x=50$, ami azt jelenti, hogy $y=50$ és $\lambda=-50$. Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja $(Q;P)=(-50;50;50)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda;x;y)=\begin{array}{c} \\ \lambda \\ x \\ y \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \quad\lambda\quad & \quad\quad x\quad\quad & \quad y\quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{xy}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{yx}(\lambda;x;y) & L''_{yy}(\lambda;x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y)=0 & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y)=1 & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)=1 \\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y)=1 & L''_{xy}(\lambda;x;y)=0 & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)=1 \\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y)=1 & L''_{yx}(\lambda;x;y)=1 & L''_{yy}(\lambda;x;y)=0, \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda;x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q;P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q;P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q;P)$ mátrix determinánsa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 > 0,$$

ezért az f függvénynek maximuma van a $P = (50;50)$ pontban. A maximum érték $f(50;50) = 2\,500$.

127. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x;y) = x^2+y^2$ függvénynek az $x+y = 8$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g(x;y) = x + y - 8$. A Lagrange-függvény

$$L(\lambda;x;y) = \lambda \cdot g(x;y) + f(x;y) = \lambda \cdot (x + y - 8) + x^2 + y^2 =$$
$$= \lambda \cdot x + \lambda \cdot y - 8\lambda + x^2 + y^2.$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$L'_\lambda(\lambda;x;y) = x + y - 8$$
$$L'_x(\lambda;x;y) = \lambda + 2x$$
$$L'_y(\lambda;x;y) = \lambda + 2y.$$

Tehát az

$$\left.\begin{aligned} x + y - 8 &= 0 \\ \lambda + 2x &= 0 \\ \lambda + 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Kivonva a második egyenletből a harmadikat, akkor azt kapjuk, hogy $x = y$. Ezt az első egyenletbe behelyettesítve $x = 4$ adódik, így azt kapjuk, hogy $y = 4$. A második egyenletből $\lambda = -8$ következik.

Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja $(Q; P) = (-8; 4; 4)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; x; y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{pmatrix} \end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) = 0 \qquad L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) = 1 \qquad L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) = 1$$

$$L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) = 1 \qquad L''_{xy}(\lambda; x; y) = 2 \qquad L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) = 0$$

$$L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) = 1 \qquad L''_{yx}(\lambda; x; y) = 0 \qquad L''_{yy}(\lambda; x; y) = 2,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q; P)$ mátrix determinánsa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -4 < 0,$$

ezért az f függvénynek minimuma van a $P = (4;4)$ pontban. A minimum érték

$$f\,(4;4) = 4^2 + 4^2 = 32.$$

128. **Feladat.** Egy téglatest térfogata $64\,\mathrm{cm}^3$. Határozzuk meg az éleit úgy, hogy a felszíne a lehető legkisebb legyen!

<u>**Megoldás**</u>:

Legyenek a téglatest élei a, b és c. Ekkor a térfogata

$$V = a \cdot b \cdot c = 64.$$

Legyen $g(a;b;c) = a \cdot b \cdot c - 64$. A téglatest felszíne

$$A(a;b;c) = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c.$$

A Lagrange-függvény

$$\begin{aligned} L(\lambda;a;b;c) &= \lambda \cdot g(a;b;c) + A(a;b;c) = \\ &= \lambda \cdot (a \cdot b \cdot c - 64) + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = \\ &= \lambda \cdot a \cdot b \cdot c - 64\lambda + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$L'_\lambda(\lambda;a;b;c) = a \cdot b \cdot c - 64$$

$$L'_a(\lambda;a;b;c) = \lambda \cdot b \cdot c + b + c$$

$$L'_b(\lambda;a;b;c) = \lambda \cdot a \cdot c + a + c$$

$$L'_c(\lambda;a;b;c) = \lambda \cdot a \cdot b + a + b.$$

Tehát az

$$\left.\begin{aligned} a \cdot b \cdot c - 64 &= 0 \\ \lambda \cdot b \cdot c + b + c &= 0 \\ \lambda \cdot a \cdot c + a + c &= 0 \\ \lambda \cdot a \cdot b + a + b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Kivonva a második egyenletből a harmadikat, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lambda \cdot c \cdot (b - a) + b - a = 0,$$

így

$$(b - a) \cdot (\lambda \cdot c + 1) = 0.$$

Ez csak úgy lehet, ha $b = a$ vagy $\lambda \cdot c + 1 = 0$, azonban ha $\lambda \cdot c + 1 = 0$, akkor a harmadik egyenletből $c = 0$ adódik, ami nem lehetséges.

Kivonva a második egyenletből a negyediket, akkor azt kapjuk, hogy

$$\lambda \cdot b \cdot (c - a) + c - a = 0,$$

így

$$(c - a) \cdot (\lambda \cdot b + 1) = 0.$$

Ez csak úgy lehet, ha $c = a$ vagy $\lambda \cdot b + 1 = 0$, azonban ha $\lambda \cdot b + 1 = 0$, akkor a negyedik egyenletből $b = 0$ adódik, ami nem lehetséges.

Tehát azt kaptuk, hogy $a = b = c$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$a^3 = 64 \qquad \Rightarrow a = 4$$

adódik, így $a = b = c = 4$. A második egyenletből azt kapjuk, hogy $\lambda = -\frac{1}{2}$. Tehát a Lagrange-függvény stacionárius pontja $(Q; P) = \left(-\frac{1}{2}; 4; 4; 4\right)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; a; b; c) = \begin{array}{c} \\ \lambda \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda \qquad\qquad & a \qquad\qquad & b \qquad\qquad & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; a; b; c) & L''_{\lambda a}(\lambda; a; b; c) & L''_{\lambda b}(\lambda; a; b; c) & L''_{\lambda c}(\lambda; a; b; c) \\ L''_{a\lambda}(\lambda; a; b; c) & L''_{aa}(\lambda; a; b; c) & L''_{ab}(\lambda; a; b; c) & L''_{ac}(\lambda; a; b; c) \\ L''_{b\lambda}(\lambda; a; b; c) & L''_{ba}(\lambda; a; b; c) & L''_{bb}(\lambda; a; b; c) & L''_{bc}(\lambda; a; b; c) \\ L''_{c\lambda}(\lambda; a; b; c) & L''_{ca}(\lambda; a; b; c) & L''_{cb}(\lambda; a; b; c) & L''_{cc}(\lambda; a; b; c) \end{pmatrix} \end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$L''_{\lambda\lambda}(\lambda; a; b; c) = 0 \qquad L''_{\lambda a}(\lambda; a; b; c) = b \cdot c$$

$$L''_{a\lambda}(\lambda; a; b; c) = b \cdot c \qquad L''_{aa}(\lambda; a; b; c) = 0$$

$$L''_{b\lambda}(\lambda; a; b; c) = a \cdot c \qquad L''_{ba}(\lambda; a; b; c) = \lambda \cdot c + 1$$

$$L''_{c\lambda}(\lambda; a; b; c) = a \cdot b \qquad L''_{ca}(\lambda; a; b; c) = \lambda \cdot b + 1$$

és

$$L''_{\lambda b}(\lambda;a;b;c) = a\cdot c \qquad L''_{\lambda c}(\lambda;a;b;c) = a\cdot b$$

$$L''_{ab}(\lambda;a;b;c) = \lambda\cdot c+1 \qquad L''_{ac}(\lambda;a;b;c) = \lambda\cdot b+1$$

$$L''_{bb}(\lambda;a;b;c) = 0 \qquad L''_{bc}(\lambda;a;b;c) = \lambda\cdot a+1$$

$$L''_{cb}(\lambda;a;b;c) = \lambda\cdot a+1 \qquad L''_{cc}(\lambda;a;b;c) = 0,$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda;a;b;c) = \begin{array}{c} \\ \lambda \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \lambda & a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & b\cdot c & a\cdot c & a\cdot b \\ b\cdot c & 0 & \lambda\cdot c+1 & \lambda\cdot b+1 \\ a\cdot c & \lambda\cdot c+1 & 0 & \lambda\cdot a+1 \\ a\cdot b & \lambda\cdot b+1 & \lambda\cdot a+1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q;P) = \left(-\frac{1}{2};4;4;4\right)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q;P) = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -1 & 0 \\ 16 & -1 & 0 & -1 \\ 16 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A 2.7.3 tételben $m = 1$ és $n = 3$, ugyanis egy feltétel van és 3 változós a függvény, így a D_3 és D_4 sarokdeterminánsokat kell kiszámolnunk. A D_3 sarokdetermináns értéke

$$D_3 = \det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -1 \\ 16 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -512.$$

A

$$D_4 = \det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -1 & 0 \\ 16 & -1 & 0 & -1 \\ 16 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

determinéns értékének kiszámolásához először a harmadik sorból vonjuk ki a második sort és a negyedik sorból vonjuk ki a második sort. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -1 & 0 \\ 16 & -1 & 0 & -1 \\ 16 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 16 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst a negyedik sora szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$D_4 = \det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 16 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1\cdot(-1)^6\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 16 & 16 \\ 16 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = -512$$

Mivel $(-1)^1 \cdot D_3 = 512$ és $(-1)^1 \cdot D_4 = 512$, így $D_3 > 0$ és $D_4 > 0$, ezért az A függvénynek minimuma van a $P = (4; 4; 4)$ pontban. A minimum érték

$$A\,(4; 4; 4) = 32 + 32 + 32 = 96\,\mathrm{cm}^2.$$

129. **Feladat.** Határozzuk meg az

$$f(x; y; z; u) = x^2 + 2y + z^2 + 6u$$

függvénynek a $2x + y - z = 20$ és $-y + u = 40$ feltételek mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g_1(x; y; z; u) = 2x + y - z - 20$ és $g_2(x; y; z; u) = -y + u$. A Lagrange-függvény

$$\begin{aligned} L(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) &= \lambda_1 \cdot g_1(x; y; z; u) + \\ &+ \lambda_1 \cdot g_2(x; y; z; u) + f(x; y; z; u) = \\ &= \lambda_1 \cdot (2x + y - z - 20) + \lambda_2 \cdot (-y + u - 40) + \\ &+ x^2 + 2y + z^2 + 6u. \end{aligned}$$

A zárójeleket felbontva

$$\begin{aligned} L(\lambda_1; \lambda_2; x; y; z; u) &= 2\lambda_1 \cdot x + \lambda_1 \cdot y - \lambda_1 \cdot z - 20\lambda_1 - \\ &- \lambda_2 \cdot y + \lambda_2 \cdot u - 40\lambda_2 + x^2 + 2y + z^2 + 6u \end{aligned}$$

adódik. Mivel az

$$\begin{pmatrix} (g_1)'_x & (g_1)'_y & (g_1)'_z & (g_1)'_u \\ (g_2)'_x & (g_2)'_y & (g_2)'_z & (g_2)'_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrix rangja 2, ezért alkalmazható a 2.7.2 tétel.

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned}
L'_{\lambda_1}(\lambda_1;\lambda_2;x;y;z;u) &= 2x + y - z - 20\\
L'_{\lambda_2}(\lambda_1;\lambda_2;x;y;z;u) &= -y + u - 40\\
L'_{x}(\lambda_1;\lambda_2;x;y;z;u) &= 2\lambda_1 + 2x\\
L'_{y}(\lambda_1;\lambda_2;x;y;z;u) &= \lambda_1 - \lambda_2 + 2\\
L'_{z}(\lambda_1;\lambda_2;x;y;z;u) &= -\lambda_1 + 2z\\
L'_{u}(\lambda_1;\lambda_2;x;y;z;u) &= \lambda_2 + 6.
\end{aligned}$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele szerint az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényeinek nullának kell lenni, így az

$$\left.\begin{aligned}
2x + y - z - 20 &= 0\\
-y + u - 40 &= 0\\
2\lambda_1 + 2x &= 0\\
\lambda_1 - \lambda_2 + 2 &= 0\\
-\lambda_1 + 2z &= 0\\
\lambda_2 + 6 &= 0
\end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az utolsó egyenletből $\lambda_2 = -6$ adódik. Ezt behelyettesítve a negyedik egyenletbe azt kapjuk, hogy $\lambda_1 = -8$. Ezt behelyettesítve az ötödik egyenletbe $z = -4$ adódik.

A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy $x = 8$, az elsőből pedig azt, hogy $y = 0$, végül a második egyenletből azt, hogy $u = 0$.

Tehát $Q = (-8;-6)$ és $P(8;0;-4;0)$, így a Lagrange-függvény stacionárius pontja $(Q;P) = (-8;-6;8;0;-4;0)$.

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az

azokból képzett

$$M(\lambda_1;\lambda_2;x;y;z;u) = \begin{array}{c} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x \\ y \\ z \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & x & y & z & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1\lambda_2} & L''_{\lambda_1 x} & L''_{\lambda_1 y} & L''_{\lambda_1 z} & L''_{\lambda_1 u} \\ L''_{\lambda_2\lambda_1} & L''_{\lambda_2\lambda_2} & L''_{\lambda_2 x} & L''_{\lambda_2 y} & L''_{\lambda_2 z} & L''_{\lambda_2 u} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{x\lambda_2} & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} & L''_{xu} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{y\lambda_2} & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} & L''_{yu} \\ L''_{z\lambda_1} & L''_{z\lambda_2} & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} & L''_{zu} \\ L''_{u\lambda_1} & L''_{u\lambda_2} & L''_{ux} & L''_{uy} & L''_{uz} & L''_{uu} \end{pmatrix} \end{array}$$

mátrixot. A megfelelő deriváltakat kiszámolva az előbbi mátrix

$$M(\lambda_1;\lambda_2;x;y;z;u;v) = \begin{array}{c} \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ x \\ y \\ z \\ u \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \lambda_1 & \lambda_2 & x & y & z & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q;P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q;P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a 2.7.3 tételben most $n = 4$ és $m = 2$, ezért a D_5 és D_6 determinánsokat kell kiszámolnunk.

A

$$D_5 = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determináns értének kiszámolását a második sor szerinti kifejtéssel végezzük:

$$D_5 = (-1)^6 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst a második oszlopa szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$D_5 = (-1)^5 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

A kapott mátrix determinánsát Sarrus-szabállyal számolva

$$D_5 = -1 \cdot (0 - 6) = 6.$$

A

$$D_6 = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinánst az utolsó sor szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$D_6 = (-1)^8 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

A kapott determinánst a második sora szerint kifejtve

$$D_6 = (-1)^7 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

adódik. A kapott determinánst a harmadik oszlopa szerint kifejtve azt kapjuk, hogy

$$D_6 = (-1) \cdot (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

Mivel $(-1)^2 \cdot D_5 > 0$ és $(-1)^2 \cdot D_6 > 0$, ezért az f függvénynek minimuma van a $P = (8; 0; -4; 0)$ pontban. A minimum érték

$$f\,(8; 0; -4; 0) = 8^2 + (-4)^2 = 80.$$

130. **Feladat.** Határozzuk meg az $f(x; y) = x^2 + xy + y^2$ függvénynek az $x^2 + y^2 = 8$ feltétel mellett a lokális szélsőértékét!

Megoldás:

Legyen $g(x; y) = x^2 + y^2 - 8$. A Lagrange-függvény

$$L(\lambda; x; y) = \lambda \cdot g(x; y) + f(x; y) = \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 8) + x^2 + xy + y^2 =$$
$$= \lambda \cdot x^2 + \lambda \cdot y^2 - 8\lambda + x^2 + xy + y^2.$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$L'_\lambda(\lambda; x; y) = x^2 + y^2 - 8$$

$$L'_x(\lambda; x; y) = 2\lambda x + 2x + y$$

$$L'_y(\lambda; x; y) = 2\lambda y + x + 2y.$$

Tehát az

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 8 &= 0 \\ 2\lambda x + 2x + y &= 0 \\ 2\lambda y + x + 2y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből

$$y = -2x - 2\lambda x$$

adódik. Ezt behelyettesítve a harmadik egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$-4\lambda x - 4\lambda^2 x + x - 4x - 4\lambda x = 0,$$

így az

$$-8\lambda x - 3x - 4\lambda^2 x = 0$$

egyenlethez jutunk, amiből x-et kiemelve az

$$x \cdot (-8\lambda - 3 - 4\lambda^2) = 0$$

egyenlet adódik. Egy szorzat csak úgy lehet zérus, ha valamelyik tényezője zérus, így azt kapjuk, hogy $x = 0$ vagy $4\lambda^2 + 8\lambda + 3 = 0$.

Ha $x = 0$, akkor a második egyenletből $y = 0$ következik, ami ellentmondást ad az első egyenlettel.

Ha $4\lambda^2 + 8\lambda + 3 = 0$, akkor a másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva

$$\lambda_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{-8 \pm 4}{8}$$

adódik, így $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, illetve $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$.

Ha $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, akkor a második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$-x + 2x + y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = -x,$$

így az első egyenletből $x^2 = 4$, azaz $x = \pm 2$ adódik. Ha $x = 2$, akkor $y = -2$, illetve ha $x = -2$, akkor $y = 2$.

Ha $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$, akkor a második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$-3x + 2x + y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y = x,$$

így az első egyenletből $x^2 = 4$, azaz $x = \pm 2$ adódik. Ha $x = 2$, akkor $y = 2$, illetve ha $x = -2$, akkor $y = -2$.

Tehát négy stacionárius pont van, nevezetesen

$$(Q_1; P_1) = \left(-\frac{1}{2}; 2; -2\right) \qquad (Q_2; P_2) = \left(-\frac{1}{2}; -2; 2\right)$$

$$(Q_3; P_3) = \left(\frac{1}{2}; 2; 2\right) \qquad (Q_4; P_4) = \left(\frac{1}{2}; -2; -2\right).$$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda;x;y)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\lambda & x & y\end{array}\\ \begin{array}{c}\lambda\\ x\\ y\end{array} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)\\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{xy}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)\\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{yx}(\lambda;x;y) & L''_{yy}(\lambda;x;y)\end{pmatrix}\end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y)=0 & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y)=2x & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)=2y\\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y)=2x & L''_{xy}(\lambda;x;y)=2\lambda+2 & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y)=1\\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y)=2y & L''_{yx}(\lambda;x;y)=1 & L''_{yy}(\lambda;x;y)=2\lambda+2,\end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda;x;y)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\lambda & x & y\end{array}\\ \begin{array}{c}\lambda\\ x\\ y\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y\\ 2x & 2\lambda+2 & 1\\ 2y & 1 & 2\lambda+2\end{pmatrix}\end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q_1;P_1)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_1;P_1)=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4\\ 4 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_1;P_1)$ mátrix determinánsa

$$D_3=\det\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4\\ 4 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}=-64<0,$$

ezért az f függvénynek minimuma van a $P_1=(2;-2)$ pontban. A minimum érték

$$f\,(2;-2)=4.$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a $(Q_2; P_2)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_2; P_2) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_2; P_2)$ mátrix determinánsa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -64 < 0,$$

ezért az f függvénynek minimuma van a $P_2 = (2; -2)$ pontban. A minimum érték

$$f(-2; 2) = 4.$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a $(Q_3; P_3)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_3; P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_3; P_3)$ mátrix determinánsa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 64 > 0,$$

ezért az f függvénynek maximuma van a $P_3 = (2; 2)$ pontban. A maximum érték

$$f(2; 2) = 12.$$

Ha az M mátrixot kiértékeljük a $(Q_4; P_4)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_4; P_4) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_4; P_4)$ mátrix determinánsa

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 64 > 0,$$

ezért az f függvénynek maximuma van a $P_4 = (-2; -2)$ pontban. A maximum érték

$$f(-2; -2) = 12.$$

2.8. Feltételes szélsőérték gazdasági feladatokban

131. **Feladat.** Egy fogyasztó két terméket fogyaszt, ezek X és Y; az X termékből x, az Y termékből y darabot. Hasznossági függvénye

$$U(x;y) = \ln x + y.$$

Az X termék egységára 20 forint, az Y termék egységára 100 forint. A fogyasztó pontosan 3 000 forintot szeretne költeni a két termékre. Határozzuk meg, hogy melyik termékből hány darabot vásároljon, ha azt szeretné, hogy a haszna a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

A feladat feltétele szerint

$$20x + 100y = 3\,000.$$

Az $U(x;y)$ függvény szélsőértékét keressük a $20x + 100y = 3\,000$ feltétel mellett.

Legyen $g(x;y) = 20x + 100y - 3\,000$.

A Lagrange-függvény

$$\begin{aligned} L(\lambda;x;y) &= \lambda \cdot g(x;y) + U(x;y) = \lambda \cdot (20x + 100y - 3\,000) + \ln x + y = \\ &= 20\lambda x + 100\lambda y - 3\,000\lambda + \ln x + y. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$\begin{aligned} L'_\lambda(\lambda;x;y) &= 20x + 100y - 3\,000 \\ L'_x(\lambda;x;y) &= 20\lambda + \frac{1}{x} \\ L'_y(\lambda;x;y) &= 100\lambda + 1. \end{aligned}$$

Tehát a

$$\left.\begin{aligned} 20x + 100y - 3\,000 &= 0 \\ 20\lambda + \frac{1}{x} &= 0 \\ 100\lambda + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy $\lambda = -\frac{1}{100}$. Ezt behelyettesítve a második egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{5} = 0,$$

így $x = 5$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe

$$100 + 100y = 3\,000 \qquad \Rightarrow \qquad y = 29$$

adódik. Tehát a stacionárius pont $(Q;P) = \left(-\frac{1}{100};5;29\right)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda;x;y) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{xy}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{yx}(\lambda;x;y) & L''_{yy}(\lambda;x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y) = 0 \qquad L''_{\lambda x}(\lambda;x;y) = 20 \qquad L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) = 100$$

$$L''_{x\lambda}(\lambda;x;y) = 20 \qquad L''_{xy}(\lambda;x;y) = -\frac{1}{x^2} \qquad L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) = 0$$

$$L''_{y\lambda}(\lambda;x;y) = 100 \qquad L''_{yx}(\lambda;x;y) = 0 \qquad L''_{yy}(\lambda;x;y) = 0$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda;x;y) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & 100 \\ 20 & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q;P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q;P) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 100 \\ 20 & -\frac{1}{25} & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q;P)$ mátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} 0 & 20 & 100 \\ 20 & -\frac{1}{25} & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 400 > 0,$$

ezért az U függvénynek maximuma van a P pontban. Tehát az X termékből 5 darabot, az Y terméből 29 terméket kell fogyasztanunk ahhoz, hogy a haszon a lehető legnagyobb legyen.

132. **Feladat.** Egy fogyasztó két terméket fogyaszt, ezek X és Y; az X termékből x, az Y termékből y darabot. Hasznossági függvénye

$$U(x; y) = xy.$$

Az X termék egységára 20 forint, az Y termék egységára 20 forint. A fogyasztó pontosan 1 000 forintot szeretne költeni a két termékre. Határozzuk meg, hogy melyik termékből hány darabot vásároljon, ha azt szeretné, hogy a haszna a lehető legnagyobb legyen!

Megoldás:

A feladat feltétele szerint

$$20x + 20y = 1\,000.$$

Az $U(x; y)$ függvény szélsőértékét keressük a $20x + 20y = 1\,000$ feltétel mellett.

Legyen $g(x; y) = 20x + 20y - 1\,000$.

A Lagrange-függvény

$$\begin{aligned} L(\lambda; x; y) &= \lambda \cdot g(x; y) + U(x; y) = \lambda \cdot (20x + 20y - 1\,000) + xy = \\ &= 20\lambda x + 20\lambda y - 1\,000\lambda + xy. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$L'_\lambda(\lambda; x; y) = 20x + 20y - 1\,000$$

$$L'_x(\lambda; x; y) = 20\lambda + y$$

$$L'_y(\lambda; x; y) = 20\lambda + x.$$

Tehát a

$$\left.\begin{aligned} 20x + 20y - 1\,000 &= 0 \\ 20\lambda + y &= 0 \\ 20\lambda + x &= 0. \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A második és harmadik egyenletet kivonva egymásból azt kapjuk, hogy $y = x$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$20x + 20x - 1\,000 = 0,$$

így $x = 25$. Mivel $y = x$, ezért $y = 25$ adódik, így $\lambda = -\frac{5}{4}$. Tehát a stacionárius pont $(Q; P) = \left(-\frac{5}{4}; 25; 25\right)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; x; y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{pmatrix} \end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) = 0 & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) = 20 & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) = 20 \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) = 20 & L''_{xy}(\lambda; x; y) = 0 & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) = 1 \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) = 20 & L''_{yx}(\lambda; x; y) = 1 & L''_{yy}(\lambda; x; y) = 0 \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 \\ 20 & 0 & 1 \\ 100 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q; P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q; P) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 20 \\ 20 & 0 & 1 \\ 20 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q; P)$ mátrix determinánsa

$$\begin{vmatrix} 0 & 20 & 20 \\ 20 & 0 & 1 \\ 20 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 800 > 0,$$

ezért az U függvénynek maximuma van a P pontban. Tehát az X termékből 25 darabot és az Y terméből is 25 terméket kell fogyasztanunk ahhoz, hogy a haszon a lehető legnagyobb legyen.

2.9. Összetett gazdasági feladatok

133. **Feladat.** Egy fogyasztó hetente $6\,000$ forintot költ teára és kávéra. Egy csésze tea ára 200 forint, egy csésze kávé ára 300 forint. A teából x darabot, a kávéból y darabot vásárol a fogyasztó. A fogyasztó preferenciáit az

$$U(x; y) = 6xy$$

függvény írja le.

a) Határozzuk meg a hasznosságot, ha 1 csésze teát és 2 csésze kávét vásárol a fogyasztó.
b) Adjuk meg a közömbösségi görbék egyenletét!
c) Határozzuk meg azon közömbösségi görbe egyenletét, amely az $U = 12$ hasznossági szinthez tartozik és rajzoljuk fel a görbét!
d) Adjunk meg egy olyan termékkombinációt, amely az $U = 12$ hasznossági szinthez tartozik.
e) Határozzuk meg a tea határhaszon függvényét!
f) Határozzuk meg a kávé határhaszon függvényét!
g) Adjuk meg a helyettesítési határrátát!
h) Mennyi lesz a racionális fogyasztó heti tea- és kávéfogyasztása, azaz hány csésze teát és hány csésze kávét vásárol az a fogyasztó, aki hasznossága maximalizálására törekszik?
i) Milyen hasznossági szint tartozik a racionális fogyasztáshoz?
j) Ábrázoljuk közös koordinátarendszerben azt a közömbösségi görbét, amely a maximális hasznossági szinthez tartozik és a költségvetési egyenest!
k) Adjuk meg a jövedelem-fogyasztás görbe egyenletét!

Megoldás:

a) Ha 1 csésze teát és 2 csésze kávét vásárol a fogyasztó, akkor a hasznosság

$$U(1; 2) = 6 \cdot 1 \cdot 2 = 12.$$

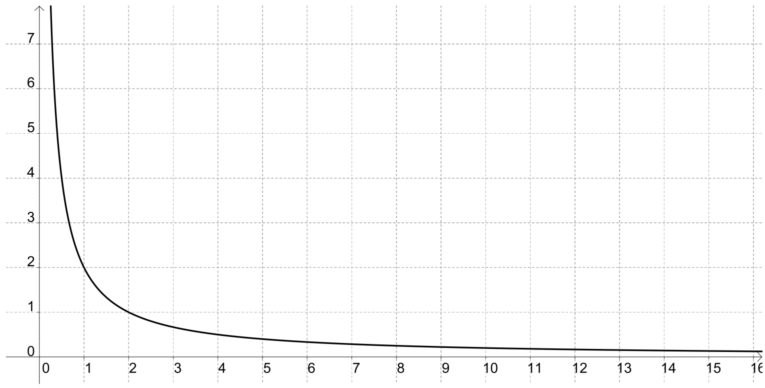
b) A közömbösségi görbék egyenlete

$$6xy = c \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{c}{6x}.$$

c) A közömbösségi görbe egyenlete

$$y = \frac{12}{6x} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{x}.$$

A közömbösségi görbe ábrázolása:



d) Az előbbi közömbösségi görbére illeszkedik például az $(1; 2)$ vagy a $(2; 1)$ pont. Ez azt jelenti, hogy egy csésze tea és két csésze kávé, vagy egy csésze kávé és két csésze tea ugyanazt a hasznossági szintet eredményezi a fogyasztó számára.

e) A tea határhaszon függvénye

$$MU_x = 6y.$$

f) A kávé határhaszon függvénye

$$MU_y = 6x.$$

g) A helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{6y}{6x} = \frac{y}{x}.$$

h) A feladat feltétele szerint

$$200x + 300y = 6\,000.$$

Az U függvény szélsőértékét keressük a $200x + 300y = 6\,000$ feltétel mellett.

Legyen $g(x; y) = 200x + 300y - 6\,000$.

A Lagrange függvény

$$\begin{aligned} L(\lambda;x;y) &= \lambda\cdot g(x;y)+U(x;y)= \\ &= \lambda\cdot(200x+300y-6\,000)+6xy= \\ &= 200\lambda x+300\lambda y-6\,000\lambda+6xy. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$L'_\lambda(\lambda;x;y)=200x+300y-6\,000$$

$$L'_x(\lambda;x;y)=200\lambda+6y$$

$$L'_y(\lambda;x;y)=300\lambda+6x.$$

Tehát a

$$\left.\begin{aligned} 200x+300y-6\,000&=0 \\ 200\lambda+6y&=0 \\ 300\lambda+6x&=0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\lambda=-\frac{6}{200}y.$$

A harmadik egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\lambda=-\frac{6}{300}x.$$

Tehát az előbbi két egyenletből

$$-\frac{6}{200}y=-\frac{6}{300}x$$

adódik, így $y=\dfrac{2}{3}x$. Ezt behelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$200x+200x=6\,000 \qquad \Rightarrow \qquad x=15.$$

Ezt felhasználva

$$y=\frac{2}{3}x=10.$$

Tehát

$$\lambda=-\frac{3}{100}\cdot 10=-\frac{3}{10}.$$

Tehát a stacionárius pont $(Q;P)=\left(-\frac{3}{10};15;10\right)$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda;x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda x}(\lambda;x;y) & L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{xx}(\lambda;x;y) & L''_{xy}(\lambda;x;y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda;x;y) & L''_{yx}(\lambda;x;y) & L''_{yy}(\lambda;x;y) \end{pmatrix} \end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$L''_{\lambda\lambda}(\lambda;x;y) = 0 \qquad L''_{\lambda x}(\lambda;x;y) = 200 \qquad L''_{\lambda y}(\lambda;x;y) = 300$$

$$L''_{x\lambda}(\lambda;x;y) = 200 \qquad L''_{xx}(\lambda;x;y) = 0 \qquad L''_{xy}(\lambda;x;y) = 6$$

$$L''_{y\lambda}(\lambda;x;y) = 300 \qquad L''_{yx}(\lambda;x;y) = 6 \qquad L''_{yy}(\lambda;x;y) = 0$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda;x;y) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{array}{c} \lambda \\ x \\ y \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 200 & 300 \\ 200 & 0 & 6 \\ 300 & 6 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q;P)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q;P) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 100 \\ 20 & -\frac{1}{25} & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q;P)$ mátrix determinánsa

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 20 & 100 \\ 20 & -\frac{1}{25} & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 480\,000 > 0,$$

ezért az U függvénynek maximuma van a $P = (15;10)$ pontban. Tehát 15 csésze teát és 10 csésze kávét kell hetente fogyasztania ahhoz, hogy a lehető legnagyobb hasznosságot érje el a racionális fogyasztó.

i) A hasznossági szint $x = 10$ és $y = 15$ esetén

$$U(10; 15) = 6 \cdot 10 \cdot 15 = 900$$

j) A haszonmaximumhoz tartozó közömbösségi görbe egyenlete

$$6xy = 900 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{150}{x}.$$

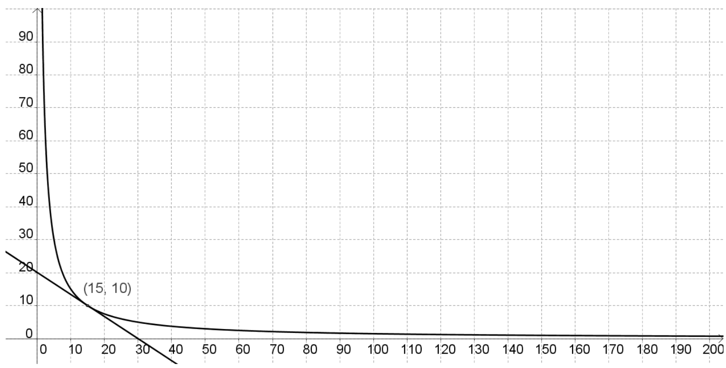
A költségvetési egyenes egyenlete

$$p_x \cdot x + p_y \cdot y = I,$$

ahol p_x annak a terméknek az ára, amelyből x mennyiséget fogyaszt a fogyasztó, p_y pedig annak a terméknek az ára, amelyből y mennyiséget fogyaszt a fogyasztó és I az a jövedelem, amelyet a fogyasztó a két termékre teljes egészében elkölt. Jelen esetben a költségvetési egyenes egyenlete

$$200x + 300y = 6\,000.$$

A közömbösségi görbe és a költségvetési egyenes:



k) Gossen második törvényéből következik, hogy

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y},$$

ahol p_x annak a terméknek az ára, amelyből x mennyiséget fogyaszt a fogyasztó, p_y pedig annak a terméknek az ára, amelyből y mennyiséget fogyaszt a fogyasztó. Tehát jelen esetben

$$\frac{y}{x} = \frac{200}{300},$$

így a jövedelem-fogyasztás görbe egyenlete

$$y = \frac{2}{3}x.$$

Megjegyezzük, hogy a racionális döntést hozó fogyasztó optimális maximális hasznossági szintet eredményező termékválasztását úgy is meghatározhatjuk, hogy megoldjuk a

$$200x + 300y = 6\,000$$
$$y = \frac{2}{3}x$$

egyenletrendszert, melynek megoldására szintén a korábban kapott $x = 15$ és $y = 10$ eredményeket kapjuk. Ez a módszer egyszerűbb az általánosan alkalmazható feltételes szélsőérték számításnál, azonban csak kétváltozós hasznossági függvény esetén alkalmazható.

134. **Feladat.** Egy fogyasztó havonta 3 000 forintot költ sós ropira és csokira. Egy csomag ropi ára 100 forint, egy tábla csoki ára 250 forint. A ropiból x csomagot, a csokiból y darabot vásárol a fogyasztó. A fogyasztó preferenciáit az

$$U(x; y) = 4xy^2$$

függvény írja le.

a) Határozzuk meg a hasznosságot, ha 2 csomag ropit és 3 tábla csokit vásárol a fogyasztó.
b) Adjuk meg a közömbösségi görbék egyenletét!
c) Határozzuk meg azon közömbösségi görbe egyenletét, amely az $U = 200$ hasznossági szinthez tartozik és rajzoljuk fel a görbét!
d) Adjunk meg egy olyan termékkombinációt, amely az $U = 200$ hasznossági szinthez tartozik.
e) Határozzuk meg a ropi határhaszon függvényét!
f) Határozzuk meg a csoki határhaszon függvényét!
g) Adjuk meg a helyettesítési határrátát!
h) Mennyi lesz a racionális fogyasztó havi ropi- és csokifogyasztása?
i) Milyen hasznossági szint tartozik a racionális fogyasztáshoz?
j) Adjuk meg a jövedelem-fogyasztás görbe egyenletét!

Megoldás:

a) Ha 2 csomag ropit és 3 tábla csokit vásárol a fogyasztó, akkor a hasznosság

$$U(2;3) = 4 \cdot 2 \cdot 9 = 72.$$

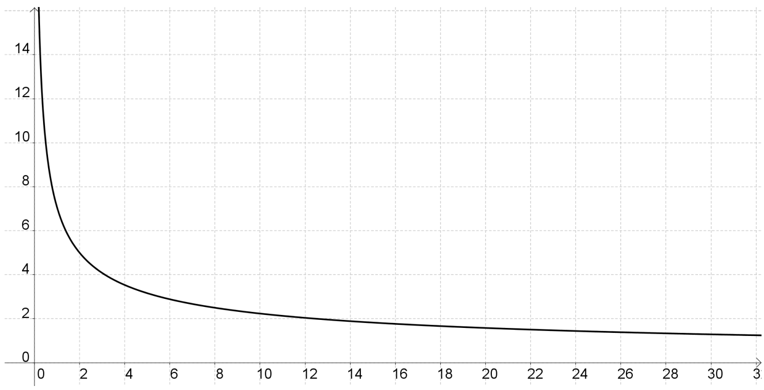
b) A közömbösségi görbék egyenlete

$$4xy^2 = c \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{c}{4x}}.$$

c) A közömbösségi görbe egyenlete

$$y = \sqrt{\frac{200}{4x}} \qquad \Rightarrow \qquad y = \sqrt{\frac{50}{x}}.$$

A közömbösségi görbe ábrázolása:



d) Az előbbi közömbösségi görbére illeszkedik például a $(2;5)$ pont. Ez azt jelenti, hogy például 2 csomag ropi és 5 tábla csoki az $U = 200$ hasznossági szintet eredményezi.

e) A ropi határhaszon függvénye

$$MU_x = 4y^2.$$

f) A csoki határhaszon függvénye

$$MU_y = 8xy.$$

g) A helyettesítési határráta

$$MRS = \frac{MU_x}{MU_y} = \frac{4y^2}{8xy} = \frac{y}{2x}.$$

h) A feladat feltétele szerint

$$100x + 250y = 3\,000.$$

Az U függvény szélsőértékét keressük a $100x + 250y = 3\,000$ feltétel mellett.

Legyen $g(x; y) = 100x + 250y - 3\,000$.

A Lagrange függvény

$$\begin{aligned} L(\lambda; x; y) &= \lambda \cdot g(x; y) + U(x; y) = \\ &= \lambda \cdot (100x + 250y - 3\,000) + 4xy^2 = \\ &= 100\lambda x + 250\lambda y - 3\,000\lambda + 4xy^2. \end{aligned}$$

Az L függvény elsőrendű parciális derivált függvényei

$$L'_\lambda(\lambda; x; y) = 100x + 250y - 3\,000$$

$$L'_x(\lambda; x; y) = 100\lambda + 4y^2$$

$$L'_y(\lambda; x; y) = 250\lambda + 8xy.$$

Tehát a

$$\left.\begin{aligned} 100x + 250y - 3\,000 &= 0 \\ 100\lambda + 4y^2 &= 0 \\ 250\lambda + 8xy &= 0 \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenletből azt kapjuk, hogy

$$\lambda = -\frac{y^2}{25}.$$

Ezt a harmadik egyenletbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$250 \cdot \frac{-y^2}{25} + 8xy = 0,$$

tehát

$$-10y^2 + 8xy = 0,$$

így

$$y \cdot (-10y + 8x) = 0,$$

ami azt jelenti, hogy $y_1 = 0$ vagy $y = \frac{4}{5}x$.

Az első egyenletből $y_1 = 0$ esetén $x_1 = 30$ adódik, így $\lambda = 0$.

Szintén az első egyenletből $y = \frac{4}{5}x$ esetén

$$100x + 200x = 3\,000 \qquad \Rightarrow \qquad x = 10$$

adódik, így $y = 8$ és $\lambda = -\dfrac{64}{25}$.

Tehát két stacionárius pontja van a Lagrange függvénynek. Ezek

$$(Q_1; P_1) = (0; 30; 0)\,;\ (Q_2; P_2) = \left(-\frac{64}{25}; 10; 8\right).$$

A feltételes szélsőérték létezésének elegendő feltételének alkalmazásához meghatározzuk az L függvény másodrendű parciális derivált függvényeit, majd az azokból képzett

$$M(\lambda; x; y) = \begin{array}{c} \\ \lambda \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{xx}(\lambda; x; y) & L''_{xy}(\lambda; x; y) \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) & L''_{yx}(\lambda; x; y) & L''_{yy}(\lambda; x; y) \end{pmatrix} \end{array}$$

mátrixot. Mivel

$$\begin{array}{lll} L''_{\lambda\lambda}(\lambda; x; y) = 0 & L''_{\lambda x}(\lambda; x; y) = 100 & L''_{\lambda y}(\lambda; x; y) = 250 \\ L''_{x\lambda}(\lambda; x; y) = 100 & L''_{xx}(\lambda; x; y) = 0 & L''_{xy}(\lambda; x; y) = 8y \\ L''_{y\lambda}(\lambda; x; y) = 250 & L''_{yx}(\lambda; x; y) = 8y & L''_{yy}(\lambda; x; y) = 8x \end{array}$$

ezért az előbbi mátrix

$$M(\lambda; x; y) = \begin{array}{c} \\ \lambda \\ x \\ y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda & x & y \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 100 & 250 \\ 100 & 0 & 8y \\ 250 & 8y & 8x \end{pmatrix} \end{array}$$

lesz. Ha a mátrixot kiértékeljük a $(Q_1; P_1)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_1; P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 250 \\ 100 & 0 & 0 \\ 250 & 0 & 240 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_1; P_1)$ mátrix determinánsa

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 100 & 250 \\ 100 & 0 & 0 \\ 250 & 0 & 240 \end{pmatrix} = -2\,400\,000 < 0,$$

ezért az U függvénynek minimuma van a $P_1 = (30; 0)$ pontban.

Ha az M mátrixot kiértékeljük a $(Q_2; P_2)$ stacionárius pontban, akkor

$$M(Q_2; P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 100 & 250 \\ 100 & 0 & 64 \\ 250 & 64 & 80 \end{pmatrix}.$$

Mivel az $M(Q_1; P_1)$ mátrix determinánsa

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 100 & 250 \\ 100 & 0 & 64 \\ 250 & 64 & 80 \end{pmatrix} = 2\,400\,000 > 0,$$

ezért az U függvénynek maximuma van a $P_2 = (10; 8)$ pontban. Tehát 10 csomag ropit és 8 tábla csokit kell havonta vásárolnia a fogyasztónak.

i) Gossen második törvényéből következik, hogy

$$\frac{MU_x}{MU_y} = \frac{p_x}{p_y},$$

ahol p_x annak a terméknek az ára, amelyből x mennyiséget fogyaszt a fogyasztó, p_y pedig annak a terméknek az ára, amelyből y mennyiséget fogyaszt a fogyasztó. Tehát jelen esetben

$$\frac{y}{2x} = \frac{100}{250},$$

így a jövedelem-fogyasztás görbe egyenlete

$$y = \frac{4}{5}x.$$

Irodalomjegyzék

[1] Berde Éva, *Mikroökonómiai és piacelméleti feladatgyűjtemény*, TOKK, Budapest, 2009.

[2] Teresa Bradley, *Essential Mathematics for Economics and Business*, Bell and Bain ltd, Glasgow, 2013.

[3] Ernest F. Haeussler, Richard S. Paul, Richard S. Wood, *Introductory mathematical analysis for Business, Economics, and the Life and Social Sciences*, Prentice Hall, 2011.

[4] Ernest F. Haeussler, *Introductory Mathematical Analysis for Business, Economics, the Life and Social Sciences*, Prentice Hall, 2011.

[5] J. Harcet, L. Heinrichs, P. M. Seiler, M. T. Skoumal, *Mathematics Higher Level*, Oxford University Press, 2012.

[6] Jakus G. – Kis M. – Magyar T. – Zombori N., *Analízis példatár*, Budapest, 2014.

[7] Kézi Csaba Gábor, *Mátrixok és lineáris egyenletrendszerek gazdasági és mérnöki alkalmazásokkal*, DUPress, 2018.

[8] Kézi Csaba Gábor, *Mátrixok és lineáris egyenletrendszerek gazdasági és mérnöki alkalmazásokkal: feladatgyűjtemény*, DUPress, 2018.

[9] Lial M. L., Greenwell R. N.,Ritchey N. P., *Calculus with applications*, Pearson, 2012.

[10] Mendelson E., *3000 solved problems in calculus*, McGraw-Hill Companies, 1988.

[11] Rosser M., *Basic mathematics for economists*, Routledge, 2003.

[12] Knut Sydsaeter, Peter Hammond, *Matematika közgazdászoknak*, Aula, 2006.

[13] Szentelekiné Dr. Páles Ilona, *Analízis példatár*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2011.

[14] Stewart J., *Calculus*, Brooks/Cole, 2012.

[15] Tan S. T., *Applied Calculus for the Managerial*, Life and Social Sciences, Brooks/Cole, 1999.

[16] Thomas G. B., Weir M. D., Hass J., Giordano F. R., *Thomas féle kalkulus I. kötet*, Typotex, Budapest, 2008.

Tartalomjegyzék