ELEMENTOS DE LÓGICA DIFUSA Y OPERADORES MORFOLÓGICOS APLICADOS AL FILTRO DE IMÁGENES MÉDICAS

Wilson Forero **y Carlos Ochoa**
Universidad Nacional, Universidad Distrital
wjforerob@unal.edu.co, oochoac@udistrital.edu.co

En el estudio de las imágenes diagnósticas, la lógica difusa y los operadores morfológicos difusos son una opción para obtener información relevante. En el cursillo se estudian la génesis de los conjuntos difusos y los conceptos necesarios para trabajar con operadores morfológicos, se define la versión clásica y difusa de esta herramienta de análisis de imágenes, se aborda la interpretación de la herramienta por medio del lenguaje de programación Python y se da una corta explicación del algoritmo implementado.

INTRODUCCIÓN A LOS CONJUNTOS DIFUSOS

Loth A. Zadeh divulgó en 1965 las primeras ideas de teoría de conjuntos difusos. La finalidad de esta teoría es encontrar, en las matemáticas, modelos apropiados para el estudio de problemas complejos de control que se presentan en la teoría de la información. La teoría de conjuntos difusos supera la rigidez de la teoría clásica de conjuntos y se relaciona estrechamente con la lógica multivariada dada la posibilidad de clasificar objetos de un universo conocido no solo atendiendo a si verifican o no una propiedad determinada sino si la verifican parcialmente.

Esta relación se puede abordar desde el principio de bivalencia, que establece que una proposición tiene exactamente uno de los dos valores de verdad: verdadero (1) o falso (0), junto con el principio de composición, que indica que el valor de verdad de cada fórmula compuesta bien formada es función del valor de verdad de sus componentes.

Lo anterior indica que una fórmula puede cumplir parcialmente una interpretación dependiendo del grado de pertenencia que tenga respecto al conjunto difuso. Para atender el concepto de conjunto difuso se toma inicialmente la definición dada en Zadeh (1965), la cual se ha constituido en la noción primitiva por excelencia.

Forero, W. y Ochoa, C. (2017). Elementos de lógica difusa y operadores morfológicos aplicados al filtro de imágenes médicas. En P. Perry (Ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 23 (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Definición 1. Sea X un espacio de puntos, con un elemento genérico de X, denotado por x. Un *conjunto difuso* A en X está caracterizado por una función de pertenencia $f_A(x)$ la cual asocia a cada punto de X un número real en el intervalo $[0,1]$; este valor $f_A(x)$ representa el "grado de pertenencia" de x en A.

Normas triangulares (t-normas)

Las normas triangulares en la lógica difusa constituyen la generalización de la intersección.

Definición 2. Una *t-norma* es una operación $*\colon [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ que satisface:

1. Para todo $x, y, z \in [0,1]$:

   $x * y = y * x$

   $(x * y) * z = x * (y * z)$

2. $*$ no es decreciente en ambos argumentos, es decir:

   $x \leq y$ implica que $x * z \leq y * z$

   $x \leq y$ implica que $z * x \leq z * y$

3. $1 * x = x$ y $0 * x = 0$ para todo x en $[0,1]$.

Dada la estructura de orden y topológica que el intervalo $[0,1]$ posee como subespacio de $\mathbb{R}$, es posible considerar la naturaleza de $*$ con respecto al concepto de continuidad. Desde esta perspectiva, siguiendo a Forero (2015) se tiene que $([0,1], \leq, \cap, \cup, *, \rightsquigarrow, 0, 1)$ es un retículo residuado completo con $*$ una t-norma continua a izquierda, donde $x \rightsquigarrow y$ se conoce como el residuo de la t-norma con $x \rightsquigarrow y = \max\{z \mid x * z \leq y\}$.

Ejemplo. Algunos ejemplos conocidos de la Definición 2 son:

$x * y = \min(x, y)$ (t-norma del mínimo o de Gödel),

$x * y = x\, y$ (t-norma del producto),

$x * y = \max(x + y - 1, 0)$ (t-norma de Lukasiewicz).

Interpretación de imágenes con Python

El programa Python permite interpretar una imagen en formato jpg, png, etc., de manera que se forme un arreglo en el que cada elemento corresponde a un pixel de la imagen en la escala de color RGB. Para obtener el mencionado arreglo, se usan la librería PIL y el comando **.load()**. Es posible acceder a estas opciones si en el preámbulo se escribe la línea **from PIL import Image**, **ImageOps.**

Para obtener un dato específico de la imagen es suficiente colocar [x,y] después del nombre del arreglo que definimos con el comando **.load(),** donde x es la fila y y la columna deseada. En caso de necesitar el valor rojo, verde o azul de un pixel basta con extraerlo del arreglo que se generó.

Para graficar un arreglo de datos constituidos por triplas (x, y, z) que están en el rango admitido en la escala RGB se deben convertir dichos datos al formato RGB por medio del comando **Image.fromarray** (nombre del arreglo, 'RGB').

Para visualizar el resultado del procedimiento anterior tan solo se debe poner el nombre de la **imagen.show()** y es posible guardarla usando el comando **.save().** Todo esto permite modificar, filtrar o acceder a regiones determinadas de la imagen de estudio; en particular, permite aplicar los operadores morfológicos difusos.

Operadores morfológicos difusos en Python

Para comenzar, se abordará la concepción de los operadores morfológicos difusos, tratando en primer lugar el caso clásico. Siguiendo a Elorza, Fuentes-González, Bragard y Burrillo (2013), se definen los operadores erosión y dilatación en $X = \mathbb{R}_2$ o $X = \mathbb{Z}_2$, respectivamente por:

1. $\varepsilon_B(A) = \{y \in X \mid \bar{B}_Y \subset A\}$
2. $\delta_B(A) = \{y \in X \mid \mathrm{B}_Y \cap A \neq \emptyset\}$

   donde $\bar{B}_Y = \{y - b \mid \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}$ y $\mathrm{B}_Y = \{y + b \mid b \in B\}$.

Se extienden las ideas anteriores tomando un conjunto arbitrario X y una relación difusa R, que es la proyección del concepto de elemento estructural y, en consecuencia, se denomina "relación estructural". Así, las ecuaciones (1) y (2) se definen en un contexto difuso por medio de $*$ y $\rightsquigarrow$; se define L^X como el conjunto de todas las funciones de X en L, esto es, el conjunto de todos los subconjuntos L-difusos de X.

Definición 3. Sea $(L, \leq, \cap, \cup, *, \rightsquigarrow, 0, 1)$ un retículo residuado completo y dada una relación difusa $R \in L^{X\,x\,X}$, los operadores erosión y dilatación de $\mu \in L^X$ son:

1. $\varepsilon_R(\mu)(x) = (R^{op} \lhd \mu)(x) = \wedge_{y \in X}\{R(y,x)\, \mu(y)\}$
2. $\delta_R(\mu)(x) = (R \circ \mu)(x) = \vee_{y \in X}\{R(x,y) * \mu(y)\}$

Con los operadores antes definidos es posible construir los operadores de apertura $\alpha_R(\mu) = R \circ (R^{op} \lhd \mu)$ y cerradura $\gamma_R(\mu) = R^{op} \lhd (R \circ \mu)$.

La relevancia de estos operadores radica en que permiten eliminar ruido de la imagen de estudio sin alterar su estructura global sujeta al adecuado uso de la relación estructural, debido a que es posible comprobar la indempotencia de los operadores, nociones de interioridad, finidad entre ellos. Esto fue estudiado con respecto al operador apertura y erosión en Ochoa y Forero (2017).

Al implementar los operadores morfológicos clásicos en Python, por medio de la versión de 2007 de los paquetes pymorph (Pymorph: Image morphology in Python)[1] o OpenCV, se encuentran dos limitantes: el elemento estructural es binario y la función de pertenencia es bivaluada. Para solucionar lo anterior se usan los conjuntos difusos, cuya función de pertenencia se construye a partir de un *If* anidado, definiendo el rango de pertenencia en la tonalidad del pixel en formato RGB. En la Figura 1 se aplican los operadores dilatación y erosión en el caso difuso con un elemento estructural en forma de línea diagonal con tonalidad gris oscura a clara.

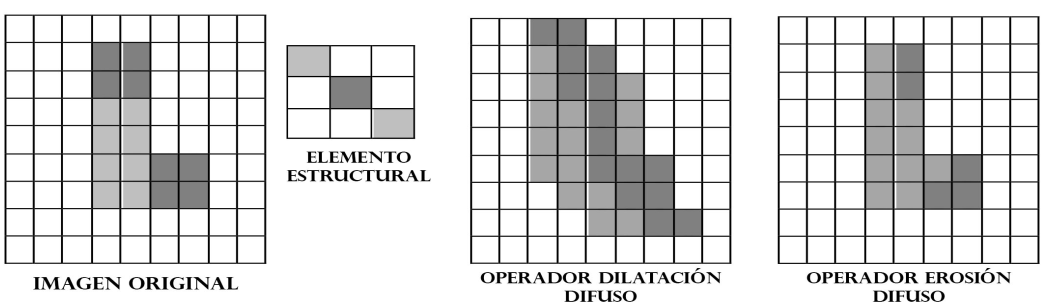

Figura 1. Ejemplo de aplicación de los operadores dilatación y erosión

[1] Disponible en: https://pythonhosted.org/pymorph/

Para eliminar la limitante del elemento estructural binario, se construye un arreglo formado por elementos cuyo valor numérico esté en la escala de RGB de una línea gris, un cuadrado, triángulo, etc. Este arreglo se elige de acuerdo a la imagen de estudio, para luego compararla, pixel a pixel, con la imagen original y filtrarla por medio de los operadores morfológicos difusos, de la siguiente forma:

1. Se crea una malla alrededor del pixel de estudio (denotado pixel[i][j]) de tres por tres pixeles,

2. Por medio de un *if* se pregunta qué tonalidad es más pequeña entre el elemento estructural y los elementos de la imagen que está en la malla del pixel[i][j].

3. El paso 2 crea una lista de nueve arreglos, cada uno de los cuales indica una tonalidad: en el caso de la erosión se toma el más pequeño (esto simula la t-norma del mínimo) y para la erosión, el máximo.

4. Se guarda en la coordenada [i][j] de un arreglo para luego graficarla tras realizar los pasos 1 a 3 con cada pixel de la imagen original.

En la Figura 2 se muestra el resultado de implementar el algoritmo anterior a una imagen médica (izquierda, tomada de Iturralde (2008)) obtenida por contraste, aplicándole los operadores de erosión (centro) y dilatación (derecha):

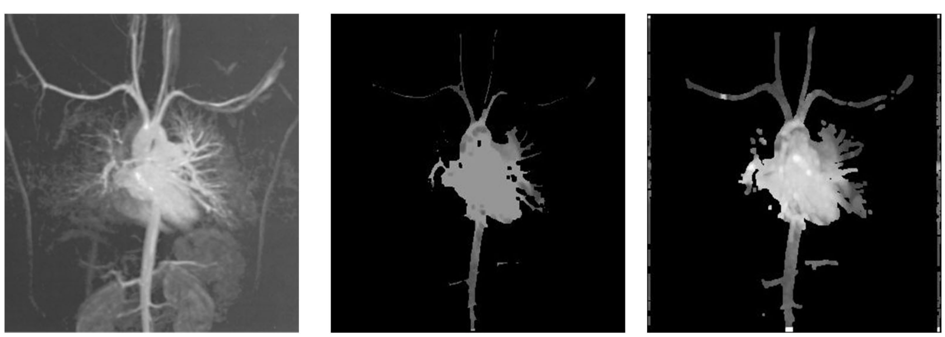

Figura 2. Aplicación de los operadores erosión y dilatación a una imagen médica

En la Figura 3 se ilustra que al ampliar el rango de pertenencia de la tonalidad cuando se filtran las imágenes se produce una reducción del ruido de fondo de la imagen con respecto al caso clásico (derecha).

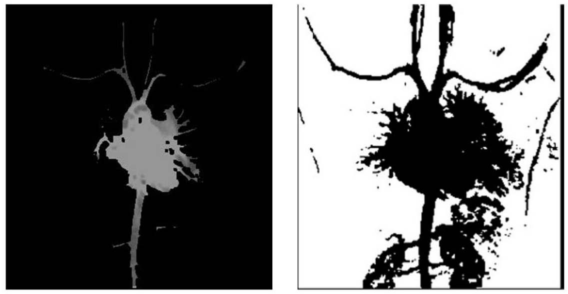

Figura 3. Reducción del ruido de fondo (izquierda) en una imagen en escala de grises

La Figura 4 ilustra la relevancia de escoger un intervalo adecuado en el cual tomar las tonalidades para definir la función de pertenencia. Para la imagen de la izquierda, el intervalo de pertenencia abarca desde el tono gris oscuro (100,100,100) al blanco (255,255,255), mientras que para la imagen de la derecha, abarca desde gris (140,140,140) hasta blanco (255,255,255).

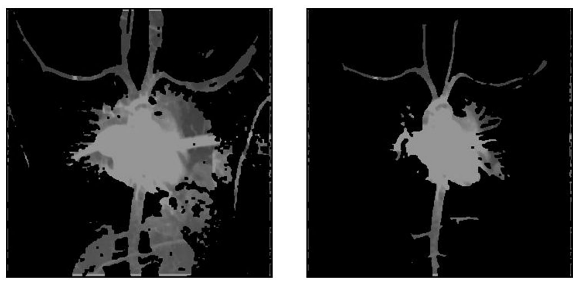

Figura 4. Relevancia de la elección del intervalo de pertenencia para filtrar la imagen

REFERENCIAS

Elorza, J., Fuentes-González, R., Bragard, J. y Burillo, P. (2013). On the relation between fuzzy closing morphological operators, fuzzy consequence operators induced by fuzzy preorders and fuzzy closure and co-closure systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 218, 73-89.

Forero, W. (2015). *Relaciones difusas inducidas por el operador morfológico clausurativo difuso* (Trabajo de grado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Iturralde, A. R. (2008). *Urgencias urológicas*. La Habana, Cuba: Editorial Ciencias Médicas.

Ochoa, C. y Forero, W. (2017). Del operador apertura en la matemática morfológica difusa. *Ingeniería*, *22*(1), 125-139.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control, 8*(3), 338-353.