

# HOMOTECIA USANDO PANTÓGRAFOS Y GEOMETRÍA DINÁMICA: UN ACERCAMIENTO A LA COMPLEMENTARIEDAD DE ARTEFACTOS

**Jhonatan Ortega y Edinsson Fernández-Mosquera**

*Universidad de Nariño*

estivenortega@hotmail.com, edi454@yahoo.com

Se presentan avances de un trabajo de grado que se viene desarrollando en la Universidad de Nariño (Pasto, Colombia), cuya intención es poner en conocimiento cómo una herramienta física como el pantógrafo, y una herramienta virtual como el ambiente de geometría dinámica Cabri II Plus pueden complementarse cuando entran en juego en el proceso de enseñanza del concepto de *homotecia*, bajo el diseño de una secuencia de situaciones didácticas orientadas a estudiantes de grado noveno en Colombia. Se mencionan: intereses investigativos, objetivos, la pregunta de investigación, la justificación, análisis preliminares y resultados obtenidos hasta el momento.

## INTRODUCCIÓN

Se presentan avances del trabajo de grado “Complementariedad de artefactos Cabri II Plus y pantógrafo para la enseñanza de la homotecia: un acercamiento a las representaciones homotéticas cotidianas”, que se está desarrollando en la Universidad de Nariño (Pasto, Colombia). La intención del estudio es mostrar cómo dos artefactos<sup>1</sup> –uno físico y otro virtual– como el pantógrafo y el ambiente de geometría dinámica pueden complementarse bajo el diseño de una situación didáctica que fomente la enseñanza de la homotecia en un curso de noveno grado de Educación Básica Secundaria. El diseño de la secuencia didáctica involucra lo que se ha denominado “representaciones homotéticas cotidianas”, puesto que se pretende despertar el interés de los estudiantes hacia la homotecia, planteándoles situaciones cotidianas que hacen parte de su contexto, y que conlleven al asombro.

Concordando con Ibargüen y Realpe (2012, al citar a Hoyos, 2006), en esta investigación se entiende que la *función complementaria entre artefactos* hace referencia a:

---

<sup>1</sup> Según Rabardel (2011), un artefacto puede ser de carácter físico (material) o abstracto (simbólico).

las características que posee cierto artefacto que le permiten mejorar las de otro o aquellas que tiene un grupo de artefactos que hace posible enriquecerse mutuamente, donde cada artefacto posibilita la construcción de un conocimiento diferente. (p. 8)

Cabe aclarar que el artefacto complementa el pensamiento del estudiante, mas no lo modifica.

## ANTECEDENTES Y JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Dado que esta investigación gravita alrededor de los conceptos de homotecia y complementariedad de artefactos, se ha considerado una elección de documentos publicados durante las dos últimas décadas sobre estos temas. Para ello, se accedió a diferentes bases de datos y repositorios especializados en Educación Matemática. En total, 14 estudios en diferentes modalidades (ponencias, artículos, cursillos y tesis de pregrado) hacen parte de esta masa documental. Así mismo, acorde a la naturaleza de cada uno de ellos, fue posible clasificarlos en tres categorías, a saber:

- estudios acerca de la complementariedad de artefactos,
- estudios en los que no hubo uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC),
- estudios que integran las TIC.

Los estudios acerca de la complementariedad de artefactos hacen referencia a investigaciones que se basaron en el uso complementario de artefactos físicos (e. g., pantógrafos, simetrizadores, palillos, plastilina), o de las TIC (e. g., el programa de geometría dinámica Cabri). En la categoría de estudios en los que no hubo uso de las TIC se incluyeron investigaciones cuyo fin era enseñar la homotecia, pero sin la intervención de artefactos o tecnologías digitales. Y por último, la categoría de los estudios que integran las TIC, reúne las investigaciones que consideraron las TIC como un medio para la comprensión de propiedades, conceptos y procedimientos matemáticos; y que además fueron utilizadas en secuencias de enseñanza<sup>2</sup>.

En los antecedentes, se encontró que el concepto de homotecia no se estudia en la geometría escolar y que los estudiantes tienen dificultades cuando tratan

---

<sup>2</sup> Para mayor información consultar Ortega y Fernández-Mosquera (2015).

de comprenderlo. Así mismo, se encontró que la función complementaria de artefactos fomenta la comprensión de conceptos matemáticos. A raíz de esto, con el propósito de indagar sobre el uso de las TIC y la enseñanza de la homotecia en las clases de matemáticas de algunas instituciones públicas del departamento de Nariño se desarrollaron y aplicaron dos encuestas tipo Likert, dirigidas a 13 docentes de matemáticas en ejercicio y a 30 estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño. De las encuestas se concluyó<sup>3</sup> que la homotecia se estudia de modo ligero o no se estudia, y que las TIC no se utilizan en las clases de estos profesores. Este resultado apoya la importancia de realizar una investigación que fomente el uso de las TIC y el estudio de la homotecia en las clases de matemáticas a través de propuestas didácticas que mejoren la comprensión del mencionado objeto geométrico, acompañadas por el uso complementario de materiales didácticos (manipulativos físicos y virtuales) que garanticen un aprendizaje significativo de las propiedades de la homotecia acorde a las representaciones homotéticas cotidianas y a la resolución de problemas matemáticos.

## PREGUNTA Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

La pregunta que da pie a esta investigación es:

¿Cómo organizar situaciones didácticas bajo una función complementaria de utilización de artefactos como el Cabri y el pantógrafo a través de las representaciones homotéticas cotidianas, para fomentar el aprendizaje de las propiedades de la homotecia en estudiantes de grado noveno de Básica secundaria?

El objetivo general del estudio es:

Determinar el *uso complementario* de artefactos manipulativos como el pantógrafo y Cabri II Plus en el aprendizaje de la homotecia para estudiantes de grado noveno de la Educación Básica Secundaria.

Los objetivos específicos son:

Diseñar una *secuencia didáctica* que comprometa el uso complementario entre el Pantógrafo y Cabri II Plus cuando se les presentan representaciones homotéticas cotidianas a estudiantes de grado noveno de la Educación Básica Secundaria de Colombia, empleando la metodología de micro-ingeniería didáctica.

---

<sup>3</sup> Para mayor información respecto a los resultados, consultar Ortega y Fernández-Mosquera (2016).

Analizar las diferentes estrategias de solución realizadas por los estudiantes al hacer un uso complementario de estos artefactos para que comprendan las propiedades matemáticas de la homotecia.

## ANÁLISIS PRELIMINARES

Se realizaron tres análisis preliminares que hacen parte de la primera fase del marco metodológico adoptado en esta investigación: la micro-ingeniería didáctica (Artigue, 1995), los cuales se presentan en tres dimensiones usuales en el campo de la Didáctica de las Matemáticas de la Escuela Francesa: dimensión histórico-epistemológica, dimensión cognitiva y dimensión didáctica que, según Chamorro (2003), sirven como herramientas profesionales para producir y controlar secuencias de aprendizaje con cierta garantía de éxito. A continuación, se describe de manera sucinta el análisis en cada dimensión:

En la *dimensión histórico-epistemológica* se presentó una aproximación histórica a la homotecia y al artefacto pantógrafo (incluyendo una descripción de su fisionomía y uso); se describieron las características matemáticas de esta transformación geométrica.

Al realizar la aproximación histórica a la homotecia no se identificó qué géometras la han estudiado, pues no se obtuvo información al respecto; sin embargo, según Mrabet (2012), la proposición dos (2) del libro VI de los *Elementos* de Euclides (Euclides, 1994) ofreció la primera declaración histórica del teorema de *Thales* relacionada con la homotecia. No obstante, según Moriena (2006), el *Programa de Erlangen* publicado en 1872, promovido por Klein, dio paso al florecimiento de las propiedades invariantes de las familias de transformaciones geométricas (que incluyen la homotecia).

En este orden de ideas, en una búsqueda histórica alrededor del pantógrafo se concluyó, desde el punto de vista etimológico, que la palabra “pantógrafo” viene de las voces griegas *pan* (todo) y *graphein* (descripción). El pantógrafo, como instrumento de dibujo, permite ampliar o reducir una imagen. Su invención en 1603 se atribuyó al sacerdote jesuita alemán *Christopher Scheiner* (1575-1650), quien se basó en los principios del paralelogramo (impuestos por Descartes). Sus aplicaciones en la historia abarcan un vasto abanico de campos; joyería (diseño de grabados en joyas, metales o monedas), medicina, agricultura.

Por último, precisando las características matemáticas de la homotecia, se tiene que: se llama homotecia de centro  $O$  y razón  $K$  (distinta de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto  $A$  otro  $A'$ , alineado  $A$  con  $O$ , tal que  $OA' = K * OA$ . Si  $K > 0$  se llama homotecia directa, y si  $K < 0$  homotecia inversa (implica rotación sobre  $O$  con un ángulo  $\pi$ ). Algunas de sus propiedades son: un punto de la figura y su imagen correspondiente son colineales con el centro de homotecia; es no isométrica; la imagen de un segmento será otro segmento paralelo; y cada lado es multiplicado por  $|K|$ , (si  $0 < k < 1$  implica una “reducción”).

En la *dimensión cognitiva* se estudió el *Enfoque Instrumental* de Rabardel (2011), para comprender las interacciones entre humanos y máquinas. Asimismo, se presentó un bosquejo general respecto al uso complementario entre materiales manipulativos y Cabri II Plus. También se consideraron los errores, obstáculos y dificultades (Socas, 2000), y se mostraron algunos errores que los estudiantes cometen cuando estudian la homotecia. Resumiendo:

El *Enfoque Instrumental* de Rabardel (2011) es un marco teórico adoptado en la Educación Matemática para comprender el papel que juegan las herramientas en la construcción de conocimiento de quien las usa. Esto implica dos procesos: *instrumentalización* (hacia el artefacto) e *instrumentación* (hacia el sujeto). En el primero, el sujeto descubre las propiedades iniciales del artefacto y las adapta a sus necesidades; en el segundo, el sujeto explota sus potencialidades. El uso complementario se fundamenta en la mejoría de las características intrínsecas de un artefacto, donde factores que son limitados por un artefacto, podrían ser movilizados por el otro. Artefactos como Cabri II Plus y el pantógrafo pueden llegar a complementarse, puesto que ambos ofrecen cualidades distintas (en entornos diferentes) que hacen que los estudiantes exploten sus potencialidades y limitaciones. Por tanto, se constituyen en factores que podrían llegar a ser limitados por uno de ellos, pero podrían ser movilizados y potencializados por el otro.

Por otra parte, según Socas (2000), el proceso de aprendizaje presenta dificultades y obstáculos, que preceden al error. Dificultades que según él, son clasificadas en cinco categorías: complejidad de los objetos matemáticos, procesos de pensamiento matemático, procesos de enseñanza, procesos cognitivos estudiantiles, y la actividad afectiva y emocional del estudiante con las matemáticas. Tanto errores como dificultades, según Socas (2000), proveen

información importante para el docente, puesto que alimentarán estrategias de prevención y remedios en el acto de enseñar.

En este sentido, González y Arias (2017) muestran algunos errores y dificultades cognitivas que presentan los estudiantes al estudiar la homotecia. Los errores implican procesos erróneos al sumar, medir, dividir, y hasta utilizar en forma errada la definición. Las dificultades cognitivas consideran la mala comprensión del concepto.

En este trabajo de grado, en curso, también se han obtenido hasta el momento, algunos resultados similares: los estudiantes no identifican razones entre figuras semejantes, no distinguen una homotecia de una no homotecia, no la reconocen en un ambiente natural, y no generan un pensamiento dinámico (Ortega y Fernández-Mosquera, 2016).

Por último, el análisis en la dimensión didáctica se centró en reconocer el estado de la enseñanza de los objetos en cuestión, el diseño, la intervención y gestión didáctica del profesor. Así, se consideró: la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) de Brousseau (2007), acciones y retroacciones de los artefactos en cuestión, y por último se realizó un *análisis curricular* respecto a la homotecia. En consecuencia:

La TSD considera dos tipos de situaciones, a saber: *didáctica* y *a-didáctica*: la primera considera una situación normal de clase (donde se relaciona la tríada: docente – estudiante – saber), en la segunda el docente deberá plantear *un problema* al estudiante, quien deberá realizar *acciones* sobre un *medio* (artefacto) y recibir de este, *retroacciones* que le permitirán *validar*.

Por otro parte, según Acosta (2010), en Cabri II Plus se pueden realizar dos tipos de acciones con sus respectivas retroacciones: la acción de *construir* que genera como retroacción un *fenómeno estático*, y la acción de *arrastrar* que genera como retroacción un *fenómeno dinámico*. Con el pantógrafo se puede realizar la acción de *construir*, que genera, como retroacción, un *dibujo estático* en una hoja.

Por último, para examinar los aspectos curriculares del pensamiento espacial, en particular, de la homotecia, se tomó como referencia los *Estándares Básicos de Competencias* para el área de Matemáticas planteados por el Ministerio de Educación Nacional (2006), donde se evidenciaron logros que el estudiante debe alcanzar en su proceso de aprendizaje del concepto de

homotecia. Se consideraron los *pensamientos Espacial y Métrico*, por tener una estrecha relación con la homotecia, posteriormente se evaluó la *coherencia vertical y horizontal* en los estándares de los conjuntos de grados 6-7 y 8-9.

## CONCLUSIONES PARCIALES

Según la masa documental establecida en los antecedentes, al igual que los resultados obtenidos en las encuestas tipo Likert, los docentes de matemáticas de varias regiones del país no estudian temas relacionados con las transformaciones geométricas, en particular homotecia, ni mucho menos usan tecnologías digitales o artefactos físicos.

Los artefactos involucrados en este trabajo de grado pueden complementarse debido a que permiten solventar debilidades entre ellos.

Los Estándares Básicos de Competencias para Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006), en relación al pensamiento espacial, consideran una única vez el concepto de homotecia, por lo que se supone que este concepto es considerado como transitorio y sin importancia en el desarrollo del pensamiento espacial para los estudiantes, es por ello que se reivindica aquí la importancia de realizar un estudio alrededor de esta temática.

## REFERENCIAS

- Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. En *Memorias del 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (pp. 132-142). Bogotá, Colombia: ASOCOLME.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamericana.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas* (Dilma Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal (primera edición en francés, 1998).
- Chamorro, M. del C. (2003). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En M. del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas para primaria* (pp. 69-94). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.
- Euclides (1994, trad.). *Elementos: Libros V - IX* (María Luisa Puertas, Tr.; con Introducción de Luis Vega Reñón). Madrid, España: Gredos.

- González, Y. y Arias, I. (2017). *Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica* (Tesis de pregrado). Universidad Nacional de Costa Rica, Heredia, Costa Rica. Recuperado de:  
<http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentacion-digital/category/12-tesis?download=153:gonzalez-y-y-arias-i-2016&start=20> (19/03/17)
- Ibarguen, Y. y Realpe, J. (2012). *La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado de: <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/3858> (28/01/15)
- Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* Bogotá, Colombia: MEN.
- Moriena, S. (2006). *Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano*. Facultad de Humanidades y Ciencias - Universidad Nacional del Litoral, Prov. de Santa Fe, Argentina.
- Mrabet S. (2012). Les axiomatiques autour du théorème de Thalès dans les programmes et les manuels tunisiens. En J.-L. Dorier y S. Coutat S. (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social: enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 480-491). Genève, Suiza: Université de Genève. Recueperado de: <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>
- Ortega, J. y Fernández-Mosquera, E. (2015). Complementariedad de artefactos físicos y Cabri para la comprensión de conceptos geométricos: un estado del arte. En L. A. Zabala y J. A. Rúa (Coords.), *VII Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas* (p. 133). Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.
- Ortega, J. y Fernández-Mosquera, E. (2016). Estudio didáctico para la comprensión de las homotecias en la geometría escolar. En L. A. Zabala y J. A. Rúa (Coords.), *VIII Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas* (pp. ) Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* (Martín Acosta, Trad.). Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Socas, M. (2000). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Editorial Horsori.