

CIRCULARITĂȚILE TEORIILOR FILOSOFICE CONTEMPORANE ASUPRA APLICABILITĂȚII MATEMATICII ÎN UNIVERSUL FIZIC

CĂTĂLIN BĂRBOIANU

Circularities in the Contemporary Philosophical Accounts of the Applicability of Mathematics in the Physical Universe. Contemporary philosophical accounts of the applicability of mathematics in physical sciences and the empirical world are based on formalized relations between the mathematical structures and the physical systems they are supposed to represent within the models. Such relations were constructed to both ensure an adequate representation and allow a justification of the validity of the mathematical models as means of scientific inference. This article puts in evidence the various circularities (logical, epistemic and of definition) that are present in these formal constructions and discusses them as an argument for the alternative semantic and propositional-structure accounts of the applicability of mathematics.

Keywords: philosophy of mathematics; applicability of mathematics; mathematical entities; mapping accounts; semantic accounts; circular definition; epistemic circularity; Frege; formal language; second-order logic; first-order logic; contingent truth; isomorphisms.

I. INTRODUCERE

II. TEORIILE CONTEMPORANE ASUPRA APLICABILITĂȚII MATEMATICII

Până în anii 1990, filosofia matematicii s-a orientat mai mult spre matematica pură, în special spre aspectele ontologice ale obiectelor și structurilor matematice, generând dualitatea nominalism–platonism la care orice teorie contemporană încă se raportează, și oferind un rol central așa-ziselor „argumente de indispensabilitate”¹, precum și pe aspectele de creație a matematicii, generând curente filosofice tradiționale de logicism, formalism și intuiționism. Excepția notabilă care a îndreptat interesul spre *aplicabilitatea* matematicii în universul fizic a fost teoria lui Frege de la sfârșitul secolului al XIX-lea, care, deși centrată în jurul noțiunii de număr, dar generalizabilă la obiectele și structurile matematice în diversitatea lor, a surprins problemele esențiale ale filosofiei aplicabilității. Filosofi contemporani – printre care Mark Steiner – au declarat ca rezolvate de către Frege o parte dintre

¹ Argumentul Quine-Putnam, dezvoltat în diferite forme în lucrări mai recente (vezi [Baker, 2009]).

problemele filosofiei aplicabilității, iar alții (C. Pincock, O. Bueno, M. Colyvan) au dezvoltat teorii mai recente, care au la bază unele principii primare ale teoriei lui Frege.

Problemele de bază ale filosofiei aplicabilității matematicii se grupează în jurul problemei metafizice centrale de a realiza o conexiune/relație optimă între structurile abstracte matematice și sistemele fizice ale universului empiric, care să realizeze – pe de o parte – o *reprezentare* adecvată a sistemului fizic în cadrul modelului matematic, astfel încât să obținem o interpretare semantică riguroasă a propozițiilor mixte cu termeni fizici și matematici, precum și a adevărului contingent al acestora, iar pe de altă parte, să justifice rațional și să ofere un „certificat” de validitate pentru aplicarea matematicii pure în universul empiric, în sensul în care ea este aplicată în mod curent de către matematician. Această nevoie de justificare rațională a aplicării derivă din însăși natura actului de modelare matematică, în care matematicianul interpretează în termenii sistemului fizic modelat rezultatele matematice derivate, cu o eficacitate și acuratețe uimitoare, confirmate pe deplin de-a lungul istoriei științei. Această eficacitate generală, nejustificată satisfăcător până în prezent de nicio teorie filosofică asupra aplicabilității, sintetizată de fizicianul Eugene Wigner prin celebra sintagmă „*eficacitatea irațională a matematicii*”² [Wigner, 1960], a orientat atenția filosofilor către *natura* relației care conectează structurile abstracte cu cele fizice, în ideea că simpla reprezentare – chiar de natură matematică – nu este suficientă pentru a explica succesul aplicării matematice în științele fizice și că matematica trebuie să reprezinte universul fizic *în modul potrivit* pentru a ajunge la justificarea propusă. M. Steiner – care declarase soluțiile lui Frege privind aplicabilitatea semantică a matematicii și relația conceptuală de tip intern dintre obiectul fizic și cel matematic drept complete și necriticabile – a admis totuși drept deschisă și nerezolvată întrebarea retorică

*Cum reușește matematicianul – procedând mai degrabă ca un artist decât ca un explorator – ca, întorcând spatele naturii, să ajungă la cele mai potrivite descrieri ale sale?*³ [Steiner, 1995]

care sintetizează una dintre marile probleme rămase nerezolvate ale filosofiei aplicabilității, anume *justificarea* inferenței prin modele matematice.

Teoriile contemporane mai recente (ale lui C. Pincock și O. Bueno & M. Colyvan), urmărind scopul justificării aplicabilității prin aprofundarea naturii și proprietăților relației dintre structurile matematice și universul fizic, au dezvoltat sisteme formale pentru reprezentarea și descrierea acestei relații, tot *în context matematic*, ca o premisă considerată indispensabilă justificării raționale. În cadrul acestor sisteme formale, s-a urmărit inclusiv funcția *explicativă* a modelului matematic, iar implicarea explicației a generat noi dezbateri privind balanța dintre

² În textul original, „*the unreasonable effectiveness of mathematics*”.

³ În traducere din engleză; sublinierea îmi aparține.

rolul explicativ și cel de reprezentare a matematicii în descrierea fenomenelor fizice, precum și asupra criteriilor care califică o explicație drept *pur* matematică.

O clasificare primară – aparținând lui Pincock – a teoriilor contemporane asupra aplicabilității matematice bazate pe relația dintre structurile matematice și cele fizice are la bază criteriul acceptării propozițiilor mixte. În acest sens, se disting două tipuri de teorii, care vor fi tratate în continuare în legătură cu tema articolului, anume teoriile bazate pe o relație internă și cele bazate pe o relație externă, ultimele denumite și teorii structurale [Pincock, 2004].

Scopul acestui articol nu este de a discuta slăbiciunile acestor teorii în raport cu scopul pe care și-l propun, și implicit a sugera alternative constructive formale, ci de a pune în evidență *circularitățile* prezente în construcțiile lor. Deși voi discuta aspecte ale malignității/benignității circularităților în contextul specific al teoriilor respective, nu le voi eticheta cu unul dintre cele două atribute, argumentând aceasta (în secțiunea următoare) prin inexistența unor criterii obiective universal valabile necesare unui astfel de demers. În schimb, existența circularităților reprezintă un argument în plus – așa cum voi arăta în acest articol – pentru reconsiderarea teoriilor de tip semantic (inițiat și dezvoltat parțial de Frege) și de structuri propoziționale (nedezvoltat încă) ca alternative necirculare.

I.II. CIRCULARITĂȚI EPISTEMICE, LOGICE ȘI DE DEFINIȚIE. MALIGNITATE.

În literatură, circularitățile argumentative sunt clasificate în epistemice și logice, definițiile ambelor tipuri implicând conceptele de argumentație și adevăr. Circularitatea epistemică (CE) implică și conceptul de *credibilitate* a unei surse și de *credință* în adevărul derivat prin argumentație, înglobând astfel o componentă antropocentrică⁴. Se pun în evidență două tipuri de circularitate epistemică – unul în care credința agentului în una dintre premisele argumentației depinde de sursă și altul în care actul de inferență a concluziei este o instanță a dependenței de sursă. Un exemplu clasic al celui de-al doilea tip de circularitate epistemică – tip pe care îl voi numi *circularitate metodologică* – este argumentația inductivă asupra validității inducției.

Circularitatea logică relevă o oarecare analogie structurală cu circularitatea epistemică. Distincția principală între cele două tipuri constă în angajarea conceptului de credibilitate a premisei pentru circularitatea epistemică. Circularitatea logică vizează doar argumentația în sine ca derivare logică, generând chiar un adevăr logic general cu premise posibil false (propoziția $p \rightarrow p$ este adevărată logic, dar nu demonstrează p), pe când cea epistemică vizează atât argumentația, cât și premisele sale, adevărul derivat fiind dependent de credibilitatea premiselor și necesar pentru a „garanta” o premisă.

O problemă filosofică importantă a circularităților rămâne malignitatea/benignitatea acestora, gradul de malignitate (în cazul în care acesta există) și

⁴ Pentru o caracterizare completă a circularității epistemice, vezi [Alston, 1986].

criteriile care califică o circularitate cu unul dintre cele două atribute (dacă acestea există), cu alte cuvinte răspunsul complet la întrebarea „Este circularitatea ceva rău în știință?”. Nu voi insista asupra acestor probleme generale, ci mă voi limita doar la a menționa că tendința generală este de a nu caracteriza circularitățile epistemice drept maligne în sinea lor – împotriva aparențelor –, dar și în efectul lor, și de a caracteriza circularitățile logice drept maligne.

În sensul definiției malignității CE dată de Bergmann [2004], conform căreia CE este malignă dacă împiedică justificarea credințelor „infectate” cu CE (definiție adoptată în teoriile contemporane), primii proponenti ai benignității au fost reliabilisti, ca fiind nevoiți să accepte argumentele de tip *track-record*, teză confirmată și de Alston [1993]. Bergmann propune o contextualizare a CE, identificând contexturi și categorii largi de CE malignă în sinea ei, argumentând că pentru restul categoriilor – reprezentând marea majoritate – CE este benignă. Argumentul său în favoarea benignității pleacă de la teza fundamentalistă că există credințe justificate non-inferențial, iar principiul de bază este că acel care acceptă această teză trebuie să accepte faptul că argumentele de tip track-record nu sunt „ceva rău”⁵. Teza sa este susținută și de principiul primar Reidian că facultățile umane sunt credibile, iar această credință este non-inferențială, deci principiul primar este un autoadevăr contingent [Reid, 1969]. Bergmann identifică CE maligne în ceea ce el numește *context al sursei chestionate*⁶, anume acel context în care agentul începe prin a se îndoii de credibilitatea sursei sale și caută o altă opinie (independentă de percepția sa) asupra acelei surse.

Alte abordări ale CE – pro benignitate – care merită a fi notate pe scurt sunt: cea a lui Goldman [2003], pentru care evaluarea argumentelor și argumentației trebuie făcută exclusiv epistemologic, și nu sintactic (în spiritul tezei lui Sorenson [1991]), și care arată că CE nu este formal vicioasă, dar este deschisă la obiecții epistemologice, iar argumentele în favoarea benignității nu se aplică în cazul argumentației interpersonale; cea a lui Brown [2004], care declară că trebuie să acceptăm argumentația CE dacă ea pleacă de la o postulare epistemică inevitabilă; cea a lui Alexander [2008], care neagă principiul primar de autosuport al argumentației CE, pe motivul că acesta duce la consecința scepticistă în care suntem nevoiți să respingem drept necredibile toate sursele, ca depinzând de niște surse fundamentale pentru care nu putem avea credința justificată că acestea sunt credibile. Între proponentii malignității CE se detașează Fumerton, Vogel și Cohen. Fumerton [1995] și Vogel [2000] nu argumentează în favoarea malignității CE în sinea ei, ci o postulează, rezultatul fiind respingerea reliabilismului în baza principiului că nu putem obține cunoaștere și credințe justificate prin CE. Cohen [2002] afirmă că orice teorie care nu admite următorul principiu (KR) permite o cunoaștere *prea ușoară* asupra credibilității:

⁵ Tot în sensul definiției malignității a lui Bergmann.

⁶ În text original, „*questioned source context*”.

(KR) O sursă potențială de cunoaștere K poate genera cunoaștere pentru agentul S numai dacă S știe că sursa K este credibilă⁷.

Din această trecere în revistă se observă că cercetarea CE în privința malignității/benignității a fost limitată la procesul în sine de obținere a cunoașterii specifice fiecărei teorii infectate cu CE, incluzând atât argumentele, cât și argumentația, dar nu a aprofundat posibilitatea emiterii unor *criterii de decidabilitate* asupra malignității/benignității CE. Abordarea unei teorii a malignității CE trebuie să plece la întrebarea conceptuală: În ce sens trebuie să vedem malignitatea CE? Ca o proprietate internă care caracterizează circularitatea în sinea ei sau un potențial de a produce efecte în teoria din care face parte sau, mai mult, într-o stare mentală a omului de știință anterioară definitivării teoriei în lucru?

Acceptarea malignității CE în sensul definiției dată de Bergmann limitează tot ceea ce înseamnă *efect* al unei CE maligne strict la argumentația căreia îi aparține și prin asta îngreunează demersul pentru un criteriu de decidabilitate. În mod semantic natural, ceva nu poate fi „rău” în sinea lui, ci numai raportat la efectele pe care le are într-un ansamblu sau sistem din care face parte sau cu care relaționează și, mai mult, la scopurile acestui ansamblu sau sistem. Propunerea mea este de a externaliza definiția malignității CE înspre teoria din care face parte și chiar înspre ansamblul teoriilor posibile *alternative* arondate aceluiași scop științific concret. Pentru a putea aborda obiectiv problema decidabilității, este necesar să transferăm atributul de malignitate efectelor pe care CE le poate avea în cadrul teoriei (complete) care o include și raportat la scopurile acesteia, dar și la existența alternativelor neinfectate cu CE. Cu alte cuvinte, o CE nu va fi malignă în sinea ei, ci numai dacă produce efecte „negative” în cadrul teoriei din care face parte, iar malignitatea poate să nici nu fie apelată (ci doar evitată) dacă există alternative acceptabile neinfectate cu CE la teoria infectată, care să servească aceluiași scop⁸. Deoarece o astfel de direcție parțial utilitaristă va întări legătura dintre malignitatea/benignitatea CE și teoria concretă căreia îi aparține, decidabilitatea va căpăta un caracter relativ care va transcende tipurile generale de CE ca obiecte de sine stătătoare, astfel că este de presupus că nu vor exista criterii de decidabilitate *universal valabile*. Această presupunere este susținută și de caracterul antropocentric al CE, așa cum este ea definită, prin noțiunile de credință, credibilitate și argumentație, specifice unui agent rațional, precum și ca parte a unui proces rațional complex care creează o teorie, specific de asemenea minții umane. Dacă

⁷ Teoriile care nu admit KR permit ca o sursă a unei credințe să poată genera cunoaștere înainte ca agentul să știe că acea sursă e credibilă, denumită *cunoaștere primară*; aceste teorii apelează la cunoașterea primară pentru a justifica credibilitatea surselor, iar în obținerea acestei cunoașteri a credibilității, argumentul este infectat cu CE; problema ridicată de Cohen este că în acest mod cunoașterea este obținută prea ușor.

⁸ Formal, dacă pentru o teorie infectată cu CE există o (teorie) alternativă neinfectată servind aceluiași scop, iar cele două teorii nu sunt în rest comparabile prin alte obiecții, vom alege drept „mai bună” teoria neinfectată. În acest sens, CE poate fi văzută ca „malignă” relativ la teoria din care face parte.

acceptăm lipsa universalității criteriilor de decidabilitate (în cazul în care acestea există), principiile expuse mai sus pot fi cel mai bine verificate și dezvoltate în situații concrete ale practicii științifice, iar problema aplicabilității matematicii în universul fizic este o situație relevantă pentru acest demers, așa cum vom arăta în secțiunile următoare, unde voi face referire la aspectele „malignității” circularităților puse în evidență, în lumina acestor principii.

Conceptul de malignitate a unei definiții circulare este exprimat tradițional prin termenul de *nelegitimitate* a definiției, ceea ce sugerează semantic faptul că eventualele criterii de decidabilitate (dacă există) vor viza mai mult ceea ce ține de construcția în sine a definiției și mai puțin de efectele sale în cadrul unei teorii, deoarece efectele sunt strict legate de funcția definiției. În teoriile tradiționale asupra definiției sunt postulate două criterii intuitive prin care se stabilește inclusiv o legitimitate *internă* a unei definiții, anume *conservarea* (definiția nu trebuie să permită stipularea de noi cunoștințe prin ea însăși) și *utilizarea* (definiția trebuie să fixeze utilizarea termenului definit și să fie singurul mijloc de ghidare a acestei utilizări; cu alte cuvinte, trebuie să fixeze înțelesul *definiendum*-ului). În baza acestor intuiții a fost dezvoltată o teorie a definiției bazată pe trei principii: 1) definițiile sunt identități generalizate, 2) structura lor este propozițională și 3) principiul reducerii: orice formulă conținând termenul definit (în limbajul extins) se poate reduce la o formulă în limbajul de bază. Principiul reducerii împreună cu principiul propozițional duc la o versiune mai puternică a criteriului de utilizare, numit criteriul de *eliminare*: definiția trebuie să reducă fiecare formulă care conține termenul definit în limbajul extins la o formulă în limbajul de bază (fără termenul definit), care reprezintă teza distinctivă a teoriei tradiționale.

Criteriile de conservare și eliminare, exprimabile formal sintactic și semantic în termeni de teoria modelelor [Urbaniak & Hămări, 2012], nu reprezintă proprietăți absolute ale unei definiții legitime, deoarece satisfacerea lor este relativă la limbajul de bază. Teoria tradițională nu impune pentru legitimitatea unei definiții o anumită formă structural-sintactică, ci trei cerințe, două logic canonice și una criterială: i) *definiendum*-ul să conțină termenul de definit; ii) *definiendum*-ul și *definiens* să aparțină aceleiași categorii logice; iii) definiția să satisfacă criteriile de conservare și eliminare. În această formă, ansamblul celor trei cerințe exprimă mai mult o definiție generală a definiției și mai puțin un criteriu de legitimitate/malignitate pentru definiții criticabile (cum este cea circulară). Slăbind condițiile de legitimitate, putem găsi definiții circulare care oferă o oarecare ghidare în utilizarea termenului definit (vezi exemplul lui Gupta în [1988/1989]) și, prin aceasta, au o valoare semantică, fiind și valide logic. Mai mult, multe dintre definițiile inductiv-recursive din matematică și logică, aparent circulare, satisfac toate cerințele teoriei tradiționale, deoarece pot fi puse în formă *normală* [Moschovakis, 1974], ceea ce conferă legitimității definiției circulare o relativitate privitor la *tipul* de circularitate cu care este infectată.

Gupta [1988/1989] arată că definițiile circulare nu respectă criteriul eliminării. Pe de altă parte, paralelismul dintre comportamentul conceptului de adevăr și cel al

conceptelor definite circular îi sugerează că, atâta timp cât adevărul este acceptat drept concept legitim, așa trebuie să fie și conceptele definite circular. Mergând pe același paralelism, Gupta și Belnap [1993] dezvoltă o *teorie a revizuirii definițiilor*, în care o definiție circulară conferă termenului definit un înțeles *ipotetic*, iar valoarea semantică a acestuia este o *regulă de revizuire* (spre deosebire de termenul definit printr-o definiție necirculară, în care valoarea semantică este o *regulă de aplicare*). Sub această teorie, pentru definițiile circulare, logica limbajului de bază nu este afectată, criteriul de conservare este respectat, însă criteriul de eliminare nu este respectat, chiar dacă criteriul – mai slab – de utilizare este respectat [Gupta și Belnap, 1993].

În concluzie, calificarea definițiilor circulare drept nelegitime în raport cu criteriile teoriei tradiționale nu le conferă acestora un caracter *malign*, în sens extern (așa cum l-am descris în cazul CE), ci le stabilește apartenența la o clasă restrânsă definită prin proprietăți interne, printre care aceea de a nu respecta criteriul de eliminare. În plus, existența și utilizarea definițiilor circulare în teorii stabile sugerează – ca și în cazul CE – implicarea unui criteriu de *utilitate* externă (dacă acesta există)⁹. Pentru a răspunde la întrebarea dacă externalizarea conceptului de malignitate a definiției circulare este posibilă, trebuie – ca și în cazul CE – să abordăm problema alternativei teoretice¹⁰. Revizuirea Gupta-Belnap a definiției circulare nu rezolvă problema alternativei externe, ci doar pe cea a semanticii, definiția revizuită continuând să nu respecte criteriul de eliminare.

În teoria tradițională sunt menționate tipuri de definiții nelegitime (printre care și circulare) cărora li se recunoaște o oarecare *valoare* raportată la funcția¹¹ pe care o îndeplinesc, iar această valoare este strict legată de *utilitate*. Evident, o posibilă alternativă externă a definiției circulare nu poate fi decât conceptuală și lasă ca temă de cercetare problema externalizării conceptului și criteriilor de malignitate pentru definițiile circulare, cu propunerea de a implica utilitatea și alternativa în practica științifică. Ca și în cazul CE, dar cu o altă motivație, este de presupus că aceste criterii de decidabilitate – dacă există – nu vor fi universale, în primul rând datorită tipologiei destul de vaste a definițiilor¹². În plus, chiar dacă definiția circulară are un caracter antropocentric general, acesta este mult limitat față de cazul CE, neexistând corelarea conceptuală agent-credibilitate în definirea circularității. Cercetarea ulterioară poate stabili dacă circularităților de tip CE sau definiție li se pot acorda atribute de malignitate, în sens netradițional, sau vor rămâne la statutul de obiect *criticabil* de cercetare științifică. Dar însăși acest statut curent ridică problema cel puțin a *alternativei* teoretice, care trebuie astfel corelată cu circularitatea.

⁹ Matematica pură abundă în definiții circulare, a căror circularitate este mai mult sau mai puțin vizibilă. Mă limitez la a menționa definițiile inductive, recursive, sistemele de definiții geometrice prin axiome interdependente și conceptul de probabilitate matematică clasică, care are la bază conceptul primar de evenimente elementare *egal-possibile*.

¹⁰ Este vorba nu de o alternativă a definiției infectate, ci de una procedurală în cadrul teoriei sau chiar de o teorie completă alternativă.

¹¹ Semantică, nominativă, stipulativă, descriptivă, explicativă etc.

¹² Reale, nominale, lexicografice, ostensive, stipulative, descriptive, implicite etc.

II. CIRCULARITATEA GENERICĂ

Ceea ce numesc circularitate generică este tipul de circularitate care apare în punerea problemei și formularea scopului anterior creării teoriei, în cazul nostru găsirea unui mijloc logico-matematic prin care să *reprezentăm* și să *justificăm* rațional aplicarea matematicii și care să ofere o explicație pentru așa-zisa „eficacitate irațională a acesteia” [Wigner, 1960]. În această formulare, echivalentă în fond cu problema găsirii unui (meta)model matematic al modelării matematice, circularitatea terminologică este vizibilă la primul nivel și este una epistemică, mai exact metodologică, așa cum voi argumenta în continuare.

Cerința ca justificarea rațională a aplicabilității matematicii să fie făcută în context logico-matematic este una naturală și totodată limitată de însuși limitele rațiunii umane, deoarece analiza critică a unei metode de investigație științifică nu se poate face decât prin metode cel puțin de aceeași valoare și precizie cu a celei analizate; această cerință este în fond elementul care generează circularitatea metodologică. Între cele două componente funcționale ale modelului teoretic căutat – reprezentarea și justificarea –, prima nu prezintă circularități epistemice *in sine ei*, deși un anumit tip constructiv de reprezentare în cadrul unei teorii specifice poate prezenta circularități mai mult sau mai puțin subtile de definiție, așa cum vom vedea în continuare. Componenta justificativă este cea purtătoare de CE. Prin metamodelul creat nu urmărim justificarea inferenței mijlocită de un model matematic oarecare, anume aplicația matematică în sine ei¹³, ci utilizarea *generală* a unui model matematic în inferență, anume aplicabilitatea universală a matematicii la sistemele fizice. În teoriile contemporane asupra aplicabilității matematicii, această justificare se face prin stabilirea existenței și funcționalității unei *relații* de un anumit tip matematic, care realizează reprezentarea structurilor matematice în sistemele fizice, argumentele justificării fiind bazate pe natura și proprietățile acestei relații.

În termenii teoriei tradiționale a CE, justificarea obținută prin metamodelul creat reprezintă argumentarea faptului că aplicabilitatea matematicii este o sursă credibilă. Însă credibilitatea metamodelului creat se bazează direct pe credibilitatea sursei din concluzie (ca fiind tot un model matematic), ceea ce califică o astfel de argumentație drept circulară, mai exact o circularitate metodologică, ca vizând metoda de investigație. În ceea ce privește malignitatea unei astfel de circularități, în sensul lui Bergmann, rămâne deschisă discuția dacă circularitatea este una în context al sursei chestionate sau nu. Deși formularea standard a problemei nu exprimă o chestionare din partea agentului, o chestionare implicită poate fi considerată ca fiind înglobată în caracterul *generic* al circularității, idee care este confirmată

¹³ Această justificare este făcută în cadrul matematicii pure, în faza de derivare, în termenii lui O. Bueno & M. Colyvan [2011].

dacă privim problema ca pe una general-teoretic-constructivă¹⁴. Nu voi insista asupra acestei încadrări de tip Bergmann, deoarece circularitatea generică are o generalizare imediată care transcede orice malignitate posibilă detectată în teorii particulare. Este vorba de întrebarea fundamentală dacă putem analiza sau critica rațiunea umană prin chiar această rațiune, aplicabilă însuși scopului primar al filosofiei analitice și al filosofiei critice în totalitatea lor, întrebare pusă, dar nerezolvată, de către mai toți marii filosofi clasici¹⁵. Astfel, dacă respingem teoria metamodelului matematic în baza circularității sale generice, ar trebui să respingem în baza aceluiași criteriu întreaga filosofie analitică și critică, din care face parte însăși problema metamodelului matematic. Această contradicție nu este însă un argument pro-benignitate, ci cel mult un principiu de rațiune practică. Evident, problema malignității circularității generice nu poate fi decisă nici în sensul malignității externe propus anterior, deoarece orice alternativă ar presupune utilizarea unui alt tip de rațiune în afara celei logico-matematice. În favoarea benignității circularității generice ca utilitate științifică merită menționat aici și exemplul *metamatemicii*, drept ramură bine stabilită. Circularitatea generică se va manifesta și prin alte tipuri de circularități la nivelul fiecărei teorii specifice asupra aplicabilității matematicii, așa cum voi arăta în secțiunile următoare, pentru care un verdict posibil asupra malignității poate fi obținut prin aplicarea unor criterii de alternativă și utilitate.

III. TEORIILE BAZATE PE O RELAȚIE INTERNĂ

Teoriile asupra aplicabilității matematicii în universul fizic au avut la origine viziunea logicistă a lui Frege asupra aritmeticii în particular, concentrată pe ideea de *număr* ca un concept-proprietate aplicată claselor de obiecte fizice, și implicit nevoia de *interpretare* constantă a propozițiilor mixte în orice context, ca un pas indispensabil în abordarea *adevărului* acestor propoziții. Astfel, de la bun început¹⁶, cercetarea a căpătat o puternică influență *semantică*, abandonată (oarecum inexplicabil) pe parcurs, în detrimentul formalizării relațiilor dintre structurile matematice și cele fizice în context matematic.

¹⁴ Problema găsirii unei teorii raționale care să justifice inferența prin modele matematice, privită ca demers filosofic general și nu ca analiză a unei soluții (teorii) particulare, presupune atât analiza și critica teoriilor existente, cât și construcția alternativelor posibile. În acest context general, analiza are și un caracter dubitativ raportată la agentul rațional, care poate implica o chestionare a unei anumite surse.

¹⁵ Prin distincția făcută între rațiunea teoretică și practică, Kant respinge scepticismul absolut constând în respingerea filosofiei critice în baza acestei circularități, dar distincția a lăsat loc în continuare unor probleme de circularitate privind definițiile descriptive interdependente ale celor două concepte.

¹⁶ Începând cu opera lui Frege [1884].

Pentru a reprezenta aplicabilitatea, a fost nevoie de stabilirea unei relații între universul matematicii pure și cel fizic, astfel încât propozițiile mixte să beneficieze nu numai de o semantică riguroasă, dar și de o interpretare a adevărului lor contingent în baza adevărului necesar matematic. Teoriile care reprezintă subiectul acestei secțiuni au fost dezvoltate în baza principiului că o astfel de relație trebuie să fie de tip intern, în următorul sens: O *relație internă* care leagă un obiect A de alte obiecte este o relație în care A trebuie să se afle pentru a fi acel obiect particular A , adică relația internă este un criteriu de identitate¹⁷. Cel mai elocvent exemplu de relație internă este cea dintre o mulțime și elementele sale.

Teoriile contemporane bazate pe o relație internă au la bază teoria lui Frege asupra conceptului (matematic) de număr, definit ca extensie a unui concept de nivelul doi care conține concepte de nivelul 1, care la rândul lor conțin obiecte fizice. Frege definește numerele naturale în termenii paradigmei de numărare¹⁸, pornind de la ideea că numărul este aplicabil¹⁹ unui concept și nu unui obiect sau grup de obiecte fizice. Spre exemplu, numărul natural 2 este extensia care conține toate conceptele de nivelul 1 care cad sub incidența numărării a două obiecte. În esență, aceasta reprezintă definiția cardinalității în context matematic pur ca și clasă de echivalență, care surprinde calitatea numărului și nu cantitatea, dar este formulată în termeni conceptuali, care pot include și obiecte ale universului fizic. Definiția fregeană a numărului se bazează pe conceptul de *echinumerozitate* și sugerează (pentru prima dată) principiul că mulțimile (clasele) pot fi considerate ca având obiecte fizice drept elemente (membri).

Cu acest concept de număr, Frege rezolvă problema semantică a propozițiilor mixte în care apar numerale. Spre exemplu, în propoziția mixtă „Pe masă sunt 3 mere și 4 pere, deci sunt 7 fructe”, numeralele, luate individual, numesc obiectele matematice „numărul 3”, „numărul 4”, „numărul 7”, dar logico-sintactic sunt predicate care caracterizează acele fructe. Această diferență statutară invalidează următoarea argumentație, specifică aplicării matematicii pure într-un context fizic: (1) $3 + 4 = 7$; (2) Pe masă sunt 3 mere; (3) Pe masă sunt 4 pere; (4) Niciun măr nu este pară; (5) Merele și perele sunt singurele fructe de pe masă. (1) & (2) & (3) & (4) & (5) implică: (6) Pe masă sunt exact 7 fructe. Problema filosofică este de a găsi o interpretare a tuturor celor șase propoziții, care să explice validitatea argumentului, iar prin aceasta legătura cu aplicabilitatea matematicii devine evidentă. Frege a rezolvat această problemă semantică, iar soluția sa este independentă de logicismul său aplicat aritmeticii. În viziunea sa, cu conceptul de număr natural definit drept concept de nivelul 2, orice propoziție mixtă în aritmetică este de forma

¹⁷ Termenul „relație internă” îi aparține lui C. Pincock [2004], fiind adaptat de la Bradley, Russell și Moore.

¹⁸ Numerele reale sunt definite de Frege în termenii paradigmei de *măsurare*. Construcția conceptuală este mult mai complicată decât în cazul numerelor naturale, dar este bazată tot pe o relație internă.

¹⁹ În sens de predicat logic.

„Numărul de F -uri este m ” ($NxFx = m$), unde F este conceptul de nivelul 1 (în exemplul anterior, fructe de un anumit fel), iar „este” reprezintă identitatea. Atribuirile numerice (m) sunt predicate, dar nu pentru obiectele fizice, ci pentru conceptul însuși (F); astfel, atribuirea de predicate numerice este o atribuire de (cel puțin) ordinul doi. Formal, argumentul din exemplul anterior se bazează pe următoarea teoremă:

$$\forall F \forall G (NxFx = m \wedge NxGx = n \wedge \neg \exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow Nx(Fx \vee Gx) = m + n) \quad (T)$$

care exprimă o legătură între adunarea numerelor naturale și reuniunea a două mulțimi disjuncte.

Pentru Frege, (T) este o teoremă de logică pură, deoarece obiectele m și n sunt logice. Pentru a trece la aplicabilitate, următorul pas este particularizarea conceptelor F și G în (T), în cazul exemplului considerat, *mere pe masă* și *pere pe masă*. Deși aceste concepte particularizate nu sunt matematice, rezultatul propoziției este logico-matematic, ceea ce, în cazul demonstrării teoremei, duce la un adevăr *necesar*. Această particularizare conceptuală este de fapt procesul esențial care, în virtutea definiției numărului ca extensie a clasei conceptelor care cad sub incidența sa, realizează aplicarea *semantică* a aritmeticii prin propoziții mixte. Pornind de la conceptul de număr, Frege ajunge să rezolve problema semantică a propozițiilor mixte (nu neapărat limitate la aritmetică) și implicit la o soluție privind *reprezentarea* aplicabilității matematice în baza unei relații interne (căderea sub incidența conceptului) care totodată este de natură semantică. Astfel, în viziunea sa logicist-platonistă, entitățile matematice nu sunt în relație directă cu universul fizic, ci cu concepte, iar conceptele sunt aplicabile universului fizic în mod semantic. Este o soluție care pare să rezolve inclusiv problema metafizică centrală a aplicabilității matematice, anume umplerea „golului” dintre universul matematic și cel fizic, fapt confirmat de Steiner [1998].

Extinderea aplicabilității semantice de la aritmetică la întreaga matematică pură nu depinde exclusiv de logicismul Fregean. Dacă vom considera teoria mulțimilor în locul logicii de ordinul al doilea ca fundație a matematicii²⁰, orice concept matematic poate fi definit în termeni de teoria mulțimilor, iar pentru a aplica matematica în universul fizic este nevoie de identificarea unor funcții de la obiectele fizice la cele matematice; deoarece funcția poate fi considerată o mulțime (de fapt, o pereche ordonată²¹), rezultă că singurul tip de relație necesar reprezentării aplicabilității matematice este apartenența la mulțimi [Steiner, 1998].

Pincock [2004], bazându-se pe acest principiu, preia reprezentarea fregeană a aplicabilității matematice în baza relației interne semantice, încercând să o adapteze la teoria mulțimilor suficient de mult încât să poată renunța la componenta semantică. O motivație (pe care o presupun) ar fi faptul că apelul la semantică în cadrul reprezentării ar împiedica justificarea *complet rațională* a aplicabilității,

²⁰ Conform sistemului axiomatic Zermelo-Fraenkel.

²¹ Perechea ordonată (a, b) este mulțimea $\{a, \{a, b\}\}$.

legăturile semantice neputând fi modelate formal astfel încât să devină operabile într-o argumentație logico-matematică, datorită caracterului lor psihologic.

Pincock tratează extensiile conceptuale ale lui Frege drept mulțimi și, apelând la noțiunea de închidere tranzitivă a unei mulțimi²² și la principiul – sugerat de Frege și motivat de Steiner [1998] – că o mulțime poate avea ca elemente obiecte fizice, stabilește că există o relație internă *directă* între obiectele fizice modelate și obiectele matematice, definibilă în termeni de apartenență la mulțimi. Astfel, în termeni de teoria mulțimilor, numărul 2 este o mulțime (clasă) având ca membri toate mulțimile cu două elemente, anume obiectele la care numărul 2 este *aplicat* prin numărare:

$$2 = (\text{def}) = \left\{ \left\{ O_1^i, O_2^i \right\}_i \right\} \quad (\text{D})$$

Obiectele fizice la care este aplicat numărul natural 2 (prin numărare) vor fi elemente ale unor mulțimi, care la rândul lor sunt elemente al numărului natural 2. În același mod se pot reprezenta toate obiectele matematice, ca mulțimi ale obiectelor fizice la care se aplică. Astfel, fiecare obiect matematic va avea în închiderea sa tranzitivă obiectele fizice la care se aplică și, cum o mulțime se află în relație internă cu toate elementele închiderii sale tranzitive, se stabilește o relație *directă* între obiectele matematice și cele fizice.

În abordarea lui Pincock, unde deja putem vorbi de un metamodel matematic, funcția de reprezentare a metamodelului rămâne valabilă, ca și în abordarea lui Frege, căpătând în plus o (pretinsă) natură pur matematică și un caracter de legătură *directă*. În schimb, funcția de justificare, deși câștigă în capacitate tocmai prin natura reprezentării, nu poate explica (încă) aplicabilitatea complet, deoarece caracterul mult prea general al definiției relației dintre sistemul matematic și cel fizic nu permite reprezentarea structurilor în complexitatea lor, reprezentarea fiind limitată la obiecte și grupuri de obiecte ca entități independente. Ceea ce contrabalansează acest aparent câștig al modelului Pincock este tocmai circularitatea, pe care o voi pune în evidență în continuare.

Relația (D) nu este una circulară, chiar dacă aparent numărul doi figurează în indexarea fiecărei mulțimi-element a membrului drept. În teoria analizată, (D) nu este o definiție, ci o denotație a unei mulțimi definite cu ajutorul obiectului matematic „numărul 2”, căruia îi preia simbolul. Pentru a surprinde circularitatea, trebuie să urmărim nu simbolistica, ci aspectul intențional al demersului științific, precum și scopul teoriei. În acest sens, relația (D) trebuie interpretată într-un anume mod cronologic, astfel:

²² Închiderea tranzitivă a unei mulțimi S este acea mulțime S' care are ca elemente elementele lui S , elementele elementelor lui S (dacă S conține alte mulțimi) și așa mai departe. Dacă $S = \{a, \{b, c\}\}$, atunci $S' = \{a, b, c\}$.

1. (punerea problemei) Obiectul matematic este *dat* și definit, iar mulțimea-extensie a obiectelor este obiectul care trebuie creat și pus în evidență. Scopul este să găsim (să demonstrăm că există) o relație directă²³ între obiectul matematic și fiecare dintre obiectele fizice ale mulțimii-extensie. Mulțimea-extensie este deci obiectul central al argumentației, care trebuie să pornească de la ceea ce este dat (obiectul matematic), acest sens fiind singurul valid logic.

2. (construcția mulțimii-extensie) În crearea mulțimii-extensie, se utilizează proprietatea „obiectul matematic se aplică la”²⁴ ca fiind comună elementelor și definitorie pentru mulțime; însă „aplicabil la” presupune deja existența unei relații directe între obiectul matematic și cel fizic²⁵, adică tocmai ceea ce urmărim ca scop.

3. (punerea în evidență a relației) Odată mulțimea-extensie creată, o identificăm cu obiectul matematic. Identificarea nu înseamnă identitate, ci este o relație între obiecte de categorii diferite, definită prin proprietatea comună a elementelor mulțimii (în cazul în care această proprietate există) și simbolizată în (D) prin semnul „= (def) =”. Însă existența relației directe (ca relație internă de apartenență la o mulțime) depinde de *identitate* în argumentația lui Pincock și nu de un alt tip de relație²⁶. Notând cu O_M obiectul matematic, cu E mulțimea-extensie, cu O_f un obiect fizic al lui E , cu R_a relația binară de apartenență și cu R_p relația binară dintre O_M și E bazată pe proprietatea (matematică) comună elementelor lui E , teoria lui Pincock pune în evidență relația compusă $R_a R_p$, astfel: $O_M R_p E R_a O_f$. Însă relația R_p nu este una de identitate și nici de apartenență și, mai mult, nu este o relație *directă*, ci una de tip conceptual-semantic în sens Frege, astfel că relația $R_a R_p$ care realizează legătura dintre obiectul matematic și cel fizic nu este una directă, așa cum a pretins scopul teoriei²⁷.

În desfășurarea 1 – 3, circularitatea este prezentă la pasul 2. Dacă privim argumentația pasului 2 ca pe un proces de construcție, circularitatea este de tip epistemic-metodologică, deoarece agentul se bazează pe credibilitatea sursei

²³ Deși atribuirea caracterului „direct” unei relații pare pleonastic-circulară, exemplele abordate în acest articol pun în evidență o distincție clară a relațiilor binare în sensul unei conexiuni a obiectelor din domenii neconexe, în sens de categorii logice diferite. O analiză pertinentă a caracterului *direct* nu se poate face decât prin aprofundarea conceptului de relație și va fi subiectul unei lucrări viitoare.

²⁴ Corespondentul fregean este „[conceptul F] *cade sub incidența* [obiectului matematic]”.

²⁵ Mai mult, presupune o relație *externă* (funcție), în sens de corespondență între două domenii distincte.

²⁶ O mulțime A se află în relație internă de tip apartenență cu un obiect doar dacă A este *identică* cu o mulțime conținând acel obiect sau conținând o mulțime care conține acel obiect.

²⁷ În viziunea mea, abordarea relației interne în termenii teoriei mulțimilor nu este completă și ca urmare *justificarea* aplicabilității nu câștigă în precizia metodei de investigație în abordarea lui Pincock, fiind în esență tot o instanță a reprezentării semantice de tip Frege. Această decompensare se adaugă la circularitate în argumentul meu final de orientare către teoriile semantice și propoziționale.

„aplicabilitate” în construcția unui obiect prin care se va argumenta în final aplicabilitatea ca relație. Cu acest statut, nu putem decide asupra malignității acestei circularități în sens tradițional, decât dacă acceptăm încadrarea de tip Bergmann, în favoarea benignității în acest caz particular și susținută de exemplul oarecum similar al inducției matematice.

Dacă privim însă argumentația pasului 2 ca o premisă conținută într-un proces strict deductiv și admițând contextul său logico-matematic, anume:

Ipoteză: P1 – Este dat obiectul matematic O_M , care este definit prin proprietatea p ; P2 – Există o mulțime E de obiecte fizice cu care O_M este într-o relație²⁸ în virtutea proprietății p ²⁹; P3 – Apartenența la o mulțime stabilește o relație între mulțime și element. Concluzie: C - Oricare ar fi $O_f \in E$, există o relație între O_M și O_f , atunci deducția $P1 \wedge P2 \wedge P3 \rightarrow C$ este logic circulară, deoarece atât relația la care face referire concluzia, cât și cea din premisa P2, nu numai că depind de p , dar sunt definite prin p . Astfel, premisa P2 folosește în esență existența relației exprimate prin C. Privită astfel, circularitatea devine logic vicioasă (malignă în sens tradițional).

Procesul argumentativ reprezentat de pașii 2 – 3 poate genera și definiții, pentru care putem pune problema circularității. Doi termeni pot fi obiectul unei definiții: obiectul matematic și mulțimea-extensie. Definiția $O_M = (def) = \{O_f | O_M \text{ se aplică la } O_f\}$ este evident circulară, deoarece conține temenul de definit la primul nivel al *definiens*-ului, însă nu este una efectiv utilizată în procesul 1 – 3, ci una posibilă în cadrul unui posibil proces argumentativ inversat în raport cu scopul propus, anume plecând de la mulțimea-extensie ca fiind dată, către o judecată privind obiectul matematic. O a doua definiție este $E = (def) = \{O_f | O_M \text{ se aplică la } O_f\}$, care are o funcție strict referențială, nefiind circulară. Ea generează însă o argumentație infectată cu CE, atunci când este utilizată în procesul 1 – 3. Aportul de valoare utilitară a definiției circulare a obiectului matematic există (conceptul de mulțime-extensie fiind central), iar inexistența unei alternative necirculare ar inclina balanța în favoarea benignității acestei circularități de definiție, în sens externalizat. Totuși, alternativa există, în teoria aplicabilității semantice a lui Frege, așa cum voi arăta în continuare.

Atât circularitățile de argumentație, cât și cele de definiție, prezentate mai sus, reprezintă efecte ale circularității generice tratate în capitolul anterior, rezultând din „forțarea” unui model pe cât posibil matematic prin care să reprezentăm aplicabilitatea matematicii în genere. O atribuire obiectivă a caracterului malign acestor circularități specifice nu este posibilă în sens tradițional, iar unul

²⁸ De identitate, în abordarea lui Pincock

²⁹ Mulțimea E poate fi chiar vidă.

dintre motive este faptul că tipurile de circularitate pot comuta pentru aceeași instanță între epistemic și logic³⁰, așa cum am arătat anterior.

În abordarea conceptuală a lui Frege, scopul nu reprezintă stabilirea unei relații *directe* între obiectul matematic și cel fizic, ci a unei relații semantice³¹, care conectează două domenii de categorii diferite, cel al conceptelor și cel fizic. Păstrând pe cât posibil analogia (notațiilor și procesului argumentativ) cu descrierii teoriei lui Pincock, avem:

1. Și aici obiectul matematic O_M este dat, iar extensia E (de data aceasta conceptuală și nu ca mulțime în sens de colecție de obiecte de sine stătătoare) este creată.

2. Extensia E folosește drept variabilă conceptul de nivelul unu F , care este de asemenea dat ca interpretare a obiectului fizic O_f ³²: conceptul F este conceptul „a fi obiectul fizic O_f în situația descrisă”, iar E este conceptul de nivelul doi „a fi un concept F care cade sub incidența lui O_M ”. Formularea lui E este logică, deoarece O_M este totodată un *concept* matematic. E nu este o mulțime, ci o extensie conceptuală în termenii lui Frege, care la rândul său este un concept.

3. Identificarea extensiei E cu obiectul matematic O_M este tot de natură semantică, fiind o particularizare prin instanțiere a generalității obiectului O_M , în scop de interpretare: conceptul F generat de situația fizică dată aparține lui E , dar la fel și alte concepte F_1, F_2, \dots care cad sub incidența lui O_M , generate de alte situații fizice similare³³. La acest pas se realizează atribuirea unei interpretări extensiei E , anume conceptul matematic O_M . Această atribuire nu este nici aici o identitate, ci o relație de tip semantic de aceeași natură cu cea care realizează interpretarea obiectului fizic O_f drept conceptul F .

Să observăm că procesul 1 – 3 nu este unul argumentativ sau deductiv, precum cel din cazul abordării în teoria mulțimilor, ci doar unul de compunere a două interpretări semantice. Ca urmare, la pasul doi nu mai putem pune problema

³⁰ Acest exemplu concret în care o circularitate poate comuta din epistemică în logică sugerează nevoia de revizuire a teoriilor privind malignitatea circularităților, aflate încă în formă incipientă.

³¹ Această exprimare este făcută cu rezerva că legătura semantică poate să nu fie considerată o relație, deoarece obiectele care relaționează nu aparțin aceleiași mulțimi universale, ci unor domenii distincte, de categorii diferite.

³² Obiectul fizic trebuie văzut nu în mod general, ci făcând parte din situația fizică specifică aplicației, adică obiectul O_f în situația fizică S_f . În exemplul anterior de numărare a fructelor de pe masă, dacă ne referim la mere, obiectul fizic la care se aplică numărul 3 ca obiect matematic nu este „mere” (în general), ci „mere pe masa dată”.

³³ Particularizând la aplicarea numărului natural în context mixt, F, F_1, F_2, \dots ar fi concepte echinumerose, în termenii lui Frege.

circularității (epistemice sau logice), mai ales că nu mai există scopul punerii în evidență a unei relații directe. Problema circularității de definiție dispăre de asemenea. La pasul 3 (identificarea E cu O_M), prezența termenului O_M în descrierea lui E expune o circularitate doar aparentă, deoarece O_M reprezintă esența capturată în procesul de conceptualizare, fără de care conceptul nu ar putea fi extras, iar circularitatea este permisă în acest sens în orice interpretare semantică. În plus, identificarea $O_M = (\text{def}) = E$ nu reprezintă o definiție în sens tradițional (ca fiind nelegitimă), deoarece *definiendum*-ul și *definiens*-ii nu sunt din aceeași categorie logică și ca urmare nu putem pune problema circularității nici ca definiție.

Rezumând, modelul semantic al lui Frege pune în evidență legătura dintre obiectul fizic și cel matematic ca o compunere de două interpretări semantice, astfel:

$$O_M \xleftarrow{i} E \left\{ \begin{array}{l} F \xleftarrow{i} O_f \\ F_1 \\ F_2 \\ \dots \end{array} \right.$$

Cele două relații R_a și R_p , care se compun în abordarea Pincock devin una și aceeași „relație” la Frege, anume interpretarea conceptual-semantică (denotată prin i în schema de mai sus).

Interpretat ca un concept despre concepte privind obiecte fizice³⁴, conceptul matematic se aplică în mod semantic în universul fizic, fără circularități, asigurând o interpretare riguroasă a oricărei propoziții mixte. În acest model, aplicarea unei teoreme matematice constă în instanțierea unui adevăr logic de grad superior, prin concepte și cuantificare de ordin superior. Pentru Frege, în mod necesar o formulă matematică se poate aplica numai dacă exprimă un gând și este fără sens să inferăm pornind de la ceva care nu a fost niciodată gândit. Răspunsul său la principala problemă metafizică a aplicabilității, anume umplerea „golului” ideatic dintre universul fizic și cel matematic, a fost tranșant: o relație directă între cele două universuri pur și simplu nu există; în schimb, există o relație (semantică) între obiectele matematice și conceptele universului fizic, la fel cum există între aceste concepte și obiectele fizice. Alternativa acestui model sub teoria mulțimilor este reductibilă în ultimă instanță (pasul 3) la modelul Frege. În plus, evitarea circularităților sale nu se poate face decât prin renunțarea la conceptul de „relație directă”. Deși studiul alternativelor necirculare presupune aprofundarea conceptului general de relație, în acest moment sugerez faptul că o astfel de alternativă converge tot către modelul semantic.

³⁴ În altă formulare fregeană, legile matematicii sunt legi ale legilor universului fizic.

IV. TEORIILE BAZATE PE O RELAȚIE EXTERNĂ

Teoriile bazate pe o relație internă asigură funcția de reprezentare a meta-modelului matematic și parțial – mai degrabă principial decât explicativ – funcția de justificare. Însă justificarea explicativă se bazează pe reprezentare, pe natura sa și pe capacitatea sa epistemică, iar tipul de reprezentare creat de teoriile bazate pe o relație internă nu ajunge să captureze structurile interne ale celor două domenii – matematic și fizic – în detaliile lor esențiale pentru aplicarea matematicii. Acesta este motivul pentru care cercetările au urmărit în continuare aspectele de reprezentare *structurală*, urmărind punerea în evidență a unui nou tip de relație între cele două domenii, care să își păstreze caracterul logico-matematic, dar care să poată captura cât mai detaliat posibil aplicația matematică efectivă. Această orientare a dat și denumirea noilor teorii drept teorii structurale.

Pincock [2004], plecând tot de la propozițiile mixte și extinzând scopul teoretic astfel încât să cuprindă nu numai interpretarea lor, dar și adevărul lor ca adevăr derivat (din adevărul necesar matematic), declară necesară existența unei relații externe³⁵ între domeniul matematic și situația fizică modelată. O astfel de abordare este destul de promițătoare, deoarece ar fi rezolvat două deziderate importante: a) Dacă relația este strict externă, atunci ea nu ar afecta necesitatea adevărului matematic, deoarece obiectele matematice și proprietățile lor vor exista independent de universul fizic și b) o soluție riguroasă pentru construcția unei astfel de relații ar putea da garanția aplicabilității matematicii în situații specifice, adică o justificare explicativă a metamodelului.

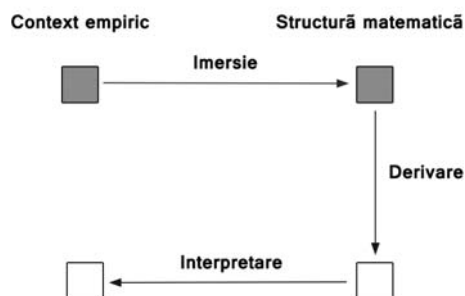
Pincock pleacă de la ideea de *analogie* între structurile matematice și anumite structuri ale universului fizic obținute prin idealizare, care poate fi reprezentată matematic prin noțiunile de homomorfism sau izomorfism³⁶, ca aplicație între două domenii diferite care prezervă structurile³⁷. Astfel, relația externă căutată este o funcție care prezervă structurile. Pincock nu dezvoltă mai departe această teorie, limitându-se la statutul general al acestei relații externe, fără a avansa și un formalism al structurilor puse în corespondență homo/izo-morfică. Formalismul structural este abordat în continuare de Bueno & Colyvan [2011], în modelul lor teoretic bazat pe funcția homo/izo-morfică, denumit de autori „concepția inferențială a aplicării matematicii” (îl voi abrevia ca CIAM). Deși este o extensie a teoriei bazată pe o relație externă a lui Pincock, CIAM nu este exclusiv structural, făcând loc unor caracteristici pragmatice și dependente de context ale procesului de aplicare a matematicii. Principiul esențial al CIAM este acela potrivit căruia rolul fundamental al matematicii aplicate este inferențial (chiar dacă funcțiile unui model matematic sunt multiple) și acest rol depinde în final de abilitatea modelului de a

³⁵ O relație externă este o relație care nu este internă, adică o relație care nu implică criterii de identitate ale obiectelor care relaționează.

³⁶ În funcție de aplicația matematică în cauză.

³⁷ Deși modelul teoretic izomorfic este atribuit lui Pincock, există referiri la acesta în lucrări anterioare precum Baker [2003], Balaguer [1998] sau Leng [2002].

stabili *relații inferențiale* între fenomenele empirice și structurile matematice. În termenii lui Bueno & Colyvan, CIAM constă dintr-o schemă în trei pași:



1. (Imersie) Stabilirea unei funcții homo/izo-morfice de la contextul empiric la o structură matematică convenabilă, care să lege aspectele relevante ale situației empirice de contextul matematic potrivit aplicației.

2. (Derivare) Derivarea consecințelor prin formalismul matematic, în cadrul unei teorii matematice specifice, folosind structurile matematice puse în evidență prin imersie.

3. (Interpretare) Interpretarea consecințelor obținute la pasul de derivare în termenii contextului empiric, prin stabilirea unei funcții homo/izo-morfice de la structura matematică la contextul empiric inițial³⁸.

În acest context teoretic, conceptul de structură este cel „static”, format de o mulțime de obiecte (noduri, poziții, etc.) împreună cu o mulțime de relații între acestea [Resnik, 1997]. Problema epistemologică a structurii universului fizic ca fiind sub incidența acestui concept de structură³⁹ revine la problema universalității metamodelului creat și nu o voi discuta aici, așa cum nu voi discuta punctele forte sau slabe ale acestui tip de model teoretic al aplicabilității, limitându-mă doar la circularități. Problemele de surplus de structură – atât fizică, cât și matematică – care rămân în afara procesului de modelare matematică⁴⁰ sunt asimilate prin introducerea noțiunilor de structuri parțiale și izomorfism/homomorfism parțial⁴¹.

³⁸ Această funcție nu este în mod necesar inversa funcției de imersie, deși în multe situații concrete poate fi.

³⁹ În care relațiile cauzale, ca *explanans* pentru majoritatea fenomenelor, nu pot fi asimilate

⁴⁰ Prima, prin idealizarea sistemului fizic, iar a doua în cadrul pasului de derivare, care presupune selectarea structurii matematice convenabile din contextul matematic mai larg

⁴¹ Batterman [2010] formulează obiecții la teoria CIAM legate de reprezentarea unor tipuri speciale de modele și de asimilarea idealizărilor, punând și întrebarea „Cum pot idealizările [ca presupuneri false, N.A.] să joace un rol explicativ?”. În [Bueno & French, 2012] se găsesc răspunsuri la obiecțiile lui Batterman și poate fi analizată în detaliu formalizarea structurilor parțiale și izo/homomorfismului parțial.

Parțialitatea relațiilor și structurilor reflectă formal incompletitudinea cunoștințelor noastre despre domeniul fizic investigat, având mai degrabă un caracter epistemic decât ontologic. Să observăm totuși că acest formalism al structurilor parțiale surprinde doar aspectul „cantitativ” al idealizării în scopul modelării științifice, neasimilând aspecte cu un puternic caracter antropocentric ale procesului în sine de idealizare, ca proces ce precede pasul de imersie. Procesul de idealizare este esențial în identificarea structurilor (parțiale) care vor fi puse în corespondență și este un test primar în etichetarea unui model matematic drept bun sau prost⁴². Idealizarea (precum întregul pas de imersie) ține de ceea ce Steiner [1995] numea „arta matematicianului”, ca fiind opusă unui proces cu criterii clare de obiectivitate, iar această “artă” încă nu a fost asimilată formal în cadrul unui model teoretic al aplicabilității matematicii.

Voi trece în continuare la evidențierea circularităților prezente în teoriile bazate pe o relație externă, vizând CIAM, ca teorie extinsă a modelului primar Pincock. Circularitățile pot fi surprinse – ca și în cazul teoriilor bazate pe o relație internă – dacă privim procesul 1 – 3 ca pe unul intențional, raportat la scopul său epistemic.

Voi începe cu *domeniul* funcției externe care realizează imersia, anume structura fizică (parțială) din contextul empiric. În formularea autorilor CIAM, structura fizică este „încorporată” în sistemul fizic analizat. Avansarea naturii funcției externe ca fiind izo/homo-morfică (un obiect matematic, necesar funcției de justificare) impune implicit o natură matematică a celor două domenii puse în corespondență, aceea de *structură matematică*, ceea ce revine la a impune structurii fizice o natură matematică. Opțiunile ontologic-structurale privind statutul domeniului fizic față de izo/homo-morfism sunt fie a-l considera o structură (pur) matematică, fie una fizică. Prima opțiune presupune *identificarea* (sub)sistemului fizic cu o structură matematică dată *a priori*, însă identificarea este la rândul ei echivalentă cu stabilirea unei relații *interne* între domeniul fizic și cel matematic, ca fiind necesară drept criteriu de identitate. Astfel, avem de-a face cu o relație internă – care nu este imediat vizibilă în schema redusă CIAM – care, formalizată sub teoria mulțimilor, generează circularități de trei tipuri, așa cum am arătat în capitolul dedicat teoriilor bazate pe o relație internă. Reprezentarea domeniului fizic în cel matematic în modelul CIAM devine astfel o compunere de două relații, una internă și alta externă. Relația externă nu mai este necesară reprezentării – asigurată de relația internă –, dar participă cu surplus explicativ la funcția de justificare a metamodelului; esența reprezentării (și o parte a justificării) o deține însă relația internă, astfel încât în acest caz CIAM își pierde semnificativ din puterea de modelare a aplicabilității. A doua opțiune – păstrarea statutului de (sub)sistem *fizic* al domeniului aplicației – ne obligă la compromisul de a cere cel puțin existența

⁴² Pentru o analiză obiectivă a calității modelelor matematice în viziune epistemologică, vezi [Cartwright, 1983].

structurii în format obiecte-mulțimi-relații, acceptând existența obiectelor fizice ca elemente ale mulțimilor și ca *relata*, dar menținând caracterul matematic al conceptelor de mulțime și relație⁴³, pentru a fi compatibile cu definiția izo/homo-morfismului. Evidențierea structurii în format obiecte-mulțimi-relații, ca un concept matematic, presupune reorganizarea ansamblului fizic și identificarea părților acestuia (ca parte a procesului de idealizare, cuprins în schema CIAM la pasul de imersie) cu mulțimi și relații, care din nou reprezintă o relație internă între domeniul fizic și cel matematic, generatoare de circularități.

Voi trece acum la funcția externă, izo/homo-morfismul. Aceasta nu este dată anterior modelării, iar existența sa (dacă ar fi demonstrată) nu reprezintă o condiție suficientă pentru funcționarea corectă a unui model matematic⁴⁴. Astfel, matematicianul nu își propune numai să stabilească existența unui izo/homo-morfism oarecare între cele două domenii, ci îl alege pe cel *potrivit*. Acest atribut al funcției externe derivă și din formularea pasului de imersie, în care structura matematică care reprezintă co-domeniul funcției externe este „convenabilă” (convenabil *aleasă*, N.A.). Această conveniență nu se referă numai la co-domeniu, ci implicit la întregul ansamblu de corespondență domeniu – funcție externă – co-domeniu. Deoarece nu putem stabili conveniența decât raportată la scopul final, criteriul de alegere nu poate fi decât strict legat de rezultatul ultimului pas, cel de interpretare.

Altfel formulat, dată fiind o funcție care realizează corespondența între domeniul fizic și cel matematic ca mulțimi de obiecte, nu putem decide dacă această funcție este un izo/homo-morfism doar în baza corespondenței respective, fără a cunoaște *complet* structurile celor două domenii care trebuie prezervate, deci inclusiv relațiile din structura fizică care reprezintă ținta inferenței (deci sunt necunoscute anterior modelării) și care sunt stabilite prin interpretare. În concluzie, metoda rațională care trebuie să ducă la interpretare se bazează pe această interpretare, ceea ce reprezintă o instanță de circularitate epistemic-metodologică.

Întrebarea principală și o direcție de cercetare esențială devine: Dat fiind că izo/homo-morfismul nu este determinat prin demonstrație, ci *ales* de către matematician⁴⁵, ca urmare natura izo/homo-morfică a funcției alese este practic *postulată*, cum se explică atunci rata de succes⁴⁶ a acestor alegerilor în general? Întrebarea este o reformulare a întrebării retorice privind „arta matematicianului”

⁴³ Se poate menționa doar un singur tip în loc de două, având în vedere că o relație este o mulțime ca n -uplu ordonat.

⁴⁴ Un model matematic poate furniza rezultate eronate nu numai prin alegerea necorespunzătoare a funcției externe, dar și printr-o idealizare prea restrictivă, iar erorile pot consta nu neapărat în propoziții false în contextul empiric, dar și în rezultate numerice aproximative cu marje de eroare neacceptabile.

⁴⁵ Bineînțeles, o corespondență izo/homo-morfică potrivită poate chiar să nu poată fi stabilită într-o aplicație specifică.

⁴⁶ Succesul însemnând faptul că alegerea unei anumite funcții se dovedește a fi izo/homo-morfism raportată la cele două structuri, prin confirmarea empirică ulterioară modelării, care va stabili empiric relațiile necunoscute din structura fizică

folosită în aplicații și un posibil răspuns pe care îl supun criticii poate fi următorul: Matematicianul alege corespondența obiectelor celor două domenii în baza unei *intuiții* care este susținută, pe de o parte, de însăși interpretarea conceptuală naturală (de tip intern) a acestor obiecte⁴⁷, care se transformă într-un anumit mod într-o interpretare conceptuală inclusiv a relațiilor (deși relațiile nu sunt puse în corespondență precum obiectele lor), iar pe de altă parte, de experiența prin observare a funcționării „parțiale” a izo/homo-morfismului, pentru o mulțime suficient de numeroasă de relații sau non-relații observabile. În acest sens, explicația ar avea și un caracter probabilist bayesian, dar și unul de raționare asimptotică.

Voi exemplifica argumentele de mai sus prezentând un exemplu trivial⁴⁸ de modelare-interpretare matematică a unui context empiric, în care se pot surprinde modul de alegere a funcției externe și efectele alegerii. Exemplul este adaptat dintr-un exemplu prezentat de Lange [2013]⁴⁹, care îl discută în context al purității explicației matematice. Și aici, vom menține *explicația* drept scop principal al modelului.

Context empiric: Mama vrea să împartă douăzeci și unu de căpșuni la cei doi copii ai săi, urmând ca după aceea să împartă alte douăzeci și unu de căpșuni la cei trei prieteni ai copiilor săi. Ea încearcă să împartă căpșunile în mod egal la cei doi copii de mai multe ori, fără a tăia vreuna și (bineînțeles) nu reușește. Scopul modelării: A se găsi o explicație (matematică) a acestei nereușite (fizice). Modelul matematic apelează la noțiunea de divizibilitate în cadrul teoriei numerelor (la pasul de derivare în schema CIAM), rezultatele fiind interpretate în contextul empiric inițial printr-un izomorfism care pune în corespondență următoarele structuri:

Structura fizică a subsistemului fizic care va participa la imersie este formată din:

Obiecte fizice: C – grupul celor doi copii, P – grupul celor trei copii, F – primul lot de douăzeci și unu de căpșuni, G – al doilea lot de douăzeci și unu de căpșuni (4 obiecte)

Relații (binare): R – a nu putea fi împărțite în mod egal la; T – a putea fi împărțite în mod egal la (2 relații); în acest moment nu știm dacă (sau de ce) FRC .

Sistemul fizic complet are o structură mai bogată, putând include ca obiect și pe mamă (și masa pe care sunt căpșunile etc.), precum și relațiile dintre mamă și copii, mamă și fructe sau copii și prieteni. Subsistemul ales reprezintă prima idealizare făcută, a doua fiind ignorarea altor posibile relații în context empiric între cele patru obiecte, ca fiind nerelevante. Structura matematică (aleasă convenabil) care reprezintă co-domeniul funcției externe este $\langle \{2, 3, 21\}, (D, \bar{D}) \rangle$, adică mulțimea formată din numerele naturale 2, 3 și 21 și relațiile D , definită prin „a fi divizibil

⁴⁷ Spre exemplu, grupurile de obiecte fizice având atribuite numerele sunt puse în corespondență *naturală* cu numerele naturale respective, în mod fregean.

⁴⁸ În domeniul filosofiei aplicabilității matematicii, exemplele triviale s-au dovedit a fi cele mai relevante privind aspectele constructive și structurale, fapt confirmat de literatura din domeniu.

⁴⁹ Inspirat de Braine [1978]

cu” și \overline{D} , „a nu fi divizibil cu”. Suprastructura matematică (la care se face apel la pasul de derivare) este mulțimea numerelor naturale cu relațiile D și \overline{D} , iar teoria utilizată este teoria numerelor (teorema împărțirii cu rest, etc.). Alegem funcția externă $f : \{C, P, F, G\} \rightarrow \{2, 3, 21\}$, cu $f(C) = 2, f(P) = 3, f(F) = f(G) = 21$; f este surjectivă și neinjectivă. Această alegere este una naturală, sugerată de interpretarea conceptuală a numeralelor în contextul mixt dat. Observăm că:

în structura matematică	în structura fizică
$f(F)\overline{D}f(C)$	nu știm dacă FRC
$f(G)Df(P)$	GTP
$f(C)$ și $f(P)$ nu sunt în relație	C și P nu sunt în relație

Intuiția că f este un homomorfism între cele două structuri este bazată pe:

a) corespondența realizată de f („grupuri fizice cu numerale” cu „numere naturale”), care induce o corespondență conceptuală a relațiilor (\overline{D} cu R și D cu T) în virtutea *interpretării* naturale „a putea fi împărțit în mod egal” prin conceptul de divizibilitate între numere naturale și

b) experiența că relația T între G și P este prezervată prin f (devenind D) și că C și P nu sunt în nicio relație, așa cum nu sunt nici $f(C)$ și $f(P)$ ⁵⁰; cunoștința GTP poate fi obținută, de exemplu, imaginând efectiv cum cele douăzeci și unu de căpșuni se împart la trei copii prin orice procedeu empiric valid; cunoștința că C și P nu sunt în relație derivă din definiția relațiilor din structura fizică – ele au sens doar de la grupuri de căpșuni la grupuri de copii.

Admițând că f este un homomorfism între cele două structuri, inferăm (prin interpretare, adică prin izomorfismul $g : \{2, 3, 21\} \rightarrow \{C, P, F\}$, cu $g(2) = C, g(3) = P, g(21) = F$ și aceleași relații structurale prezervate de f) faptul că FRC , adică *explanandum*-ul.

Alegerea unei alte funcții externe ar vicia rezultatul inferat. De exemplu, alegând $f(F) = f(G) = 22$ și păstrând restul corespondenței, precum și relațiile anterioare, folosind intuiția că f este homomorfism (obținută de data aceasta doar în baza b)), am infera că FTC , contrar rezultatului anterior și realității. Completarea structurii matematice prin punerea în relație a lui 2 și 3 (\overline{D}) ar anula caracterul homomorfic al funcției f , iar inferența în baza modelului nu ar mai fi posibilă. Completarea structurii fizice cu alte obiecte și/sau relații ar avea același efect, atâta timp cât nu am găsi obiecte și relații analoage în structura matematică. În schimb,

⁵⁰ În formularea sa simplistă cu scop ilustrativ-generic și din motive de spațiu, exemplul nu surprinde o mulțime „numeroasă” de relații și non-relații observabile în baza cărora se intuiește relația necunoscută necesară stabilirii calității homomorifice a lui f (în fapt, surprinde doar o relație și o non-relație). Exemplul se poate extinde prin introducerea altor obiecte, de exemplu, încă un grup de 7 copii la care vor fi împărțite alte 21 de căpșuni, care ar mări numărul observațiilor evidențiale.

ignorarea obiectelor și relațiilor din domeniul fizic care sunt relevante pentru situația descrisă ar vicia de asemenea rezultatul inferenței. Spre exemplu, dacă mama are o anumită problemă de sănătate care îi îngreunează sau limitează acțiunea de împărțire a căpșunilor în anumite condiții, iar aceste fapte fizice sunt considerate nerelevante și nu sunt reprezentate în structură, acest lucru constituie o eroare de modelare, iar inferența anterioară nu mai este relevantă, deși poate funcționa în baza aceluiași principiu homomorfic. Conchid că exemplul prezentat surprinde foarte bine circularitatea generată de procesul de alegere a funcției externe și interpretare în termenii contextului empiric, modul efectiv de modelare și interpretare bazat pe „intuiția” matematicianului și motivația conceptual-experimentală presupusă a acestei intuiții.

În final, voi analiza idealizarea, ca proces care determină domeniul (dar și co-domeniul) funcției externe. Procesul constă de fapt în trei idealizări: Prima realizează reducerea unui sistem fizic extins la un subsistem specific contextului empiric analizat, de unde se va extrage o structură de tip obiecte-mulțimi-relații printr-o a doua idealizare. Această structură fizică parțială provine dintr-o suprastructură din care se elimină un surplus prin criterii de *relevanță* a participării la fenomenul fizic care constituie ținta modelului. O idealizare similară (a treia) are loc și în domeniul matematic. Deși se va lucra formal în cadrul unei teorii matematice unice la pasul de derivare, se va reține doar o anumită structură matematică, renunțându-se la un anumit surplus prin criterii de *conveniență* (în exemplul anterior, nu s-a considerat relația dintre 2 și 3, deși ea exista). Diferența între cele două tipuri de idealizări structurale – în contextul empiric și cel matematic – este faptul că, în timp ce a doua nu pune probleme de adevăr logic actului de inferență formală, prima poate fi epistemic vicioasă prin afectarea adevărului empiric (În exemplul anterior, ipoteza că mama are o problemă de sănătate, nereprezentată structural).

Să observăm că relevanța și conveniența idealizărilor sunt interdependente via construcția funcției externe ca izo/homo-morfism, care urmează cronologic idealizării la pasul de imersie, implicând determinarea domeniului și co-domeniului acestei funcții, precum și caracterul său izo/homo-morfic, ceea ce presupune cunoașterea funcției și a structurilor corespondente anterior idealizării. Avem din nou o circularitate epistemică oarecum similară celei detectate în analiza anterioară a izo/homo-morfismului în raport cu pasul de interpretare, iar cele două circularități sunt reciproc dependente. Stabilirea relevanței și convenienței se bazează pe intuiția matematicianului, iar aceasta nu a fost formalizată în cadrul CIAM. Chiar dacă idealizările pot fi asimilate cu ușurință în formalizarea structurilor parțiale elaborată de Bueno & Colyvan [2011], actul volitiv de construcție și argumentare bazat pe relevanță și conveniență este *prima facie* imposibil de asimilat, datorită componentei sale antropocentrice.

Și circularitățile teoriilor bazate pe o relație externă sunt efectul circularității generice ale metamodelului matematic, deoarece sunt create în jurul obiectului

matematic izo/homo-morfism, ca obiect central prin care se inferează rațional justificarea modelului. Etichetându-le drept benigne prin argumentul derivării lor din circularitatea generică sau prin cel al neîncadrării de tip Bergmann într-un context al sursei chestionate⁵¹, nu ar exclude considerarea alternativelor, și prin prisma altor obiecții asupra teoriilor bazate pe o relație externă, din care menționez aici doar problema derivării adevărului contingent ca adevăr propozițional în context mixt, din adevărul necesar. Orice alternativă teoretică neinfectată cu CE ar trebui fie să elimine cronologia implicită a formalizării CIAM (prezentă și în modelul redus Pincock), fie să propună alte tipuri structurale ale domeniilor, fie să se bazeze pe o altă natură a funcției externe, fie să renunțe pur și simplu la intermedierea funcției externe, ceea ce ar duce la degenerarea modelului teoretic într-unul bazat pe o relație internă.

V. CONCLUZII

În teoriile filosofice contemporane asupra aplicabilității matematicii în universul fizic, am identificat circularități de toate tipurile – epistemice, logice și de definiție – detectabile în special prin punerea în evidență a aspectului intențional al demersului științific și a scopului teoriei, cu excepția teoriei aplicabilității semantice a lui Frege. Problema malignității acestor circularități a fost abordată atât în sens tradițional, cât și în sensul externalizat propus de mine, care implică alternativa teoretică și valoarea utilitară. În lipsa unei teorii bine stabilite asupra malignității circularităților și a unor criterii universale de decidabilitate asupra malignității, nu putem respinge o teorie pe motivul existenței unei circularități. Ca urmare, am analizat circularitățile detectate în contextul lor teoretic specific, constatând următoarele: a) indiferent de tip, circularitățile sunt efecte ale circularității generice a creării unui metamodel matematic pentru a reprezenta și justifica modelul matematic în genere; b) în cazul teoriilor bazate pe o relație internă de tip apartenență la mulțime, tipurile epistemic și logic pot comuta în caracterizarea aceleiași circularități; c) toate circularitățile prezintă o anumită analogie constructiv-epistemică. Analiza alternativelor necirculare pentru fiecare teorie analizată a arătat că acestea sunt posibile numai luând în considerare fie renunțarea la tipul structural fizic obiecte-mulțimi-relații, fie o altă natură a relației directe între domeniul fizic și cel matematic, fie pur și simplu renunțarea la această relație. Acest fapt împreună cu caracterizările a) – c) ale circularităților detectate sugerează revenirea la modelul semantic fregean. Alte puncte slabe ale teoriilor contemporane asupra aplicabilității matematicii în universul fizic – dintre care am menționat doar problema derivării

⁵¹ Acest al doilea argument necesită o analiză ulterioară, mai ales că avem de-a face cu un caracter antropocentric mai pronunțat al procesului argumentativ decât în cazul celorlalte circularități detectate în capitolele anterioare.

adevărului contingent în context empiric din adevărul necesar matematic – sugerează din nou considerarea modelelor de tip semantic. Astfel, pe de o parte, reiese necesitatea implicării componente psihologice – neformalizabilă – care este specifică modelării matematice prin caracterul său antropocentric, iar pe de alta, nevoia unui cadru formal în care un transfer de adevăr între două domenii de naturi diferite să fie posibil și justificat mai mult decât prin interpretare. O propunere pentru un astfel de model teoretic – și subiectul unei lucrări viitoare – este păstrarea principiilor conceptual-semantice fregeane și considerarea structurilor propoziționale în locul celor de tip obiecte-mulțimi-relații, unde transferul și statutul adevărului se pot asimila mult mai bine. O astfel de variantă – dacă se dovedește validă – ar fi acceptabilă atât platonistului, cât și nominalistului.

BIBLIOGRAFIE

- Alexander, D., *In Defense of Epistemic Circularity*. „Acta Analytica”, vol. 26, nr. 3, 2011, pp. 223–241.
- Alston, W.P., *Epistemic circularity*; „Philosophy and Phenomenological Research”, vol. 47, nr. 1, 1986, pp. 1–30.
- Alston, W.P., *The Reliability of Sense Perception*; Ithaca: Cornell University Press, 1993.
- Baker, A., *The Indispensability Argument and Multiple Foundations for Mathematics*; „Philosophical Quarterly”, vol. 53, 2003, pp. 49–67.
- Baker, A., *Mathematical Explanation in Science*. „The British Journal for the Philosophy of Science”, vol. 60, nr. 3, 2009, pp. 611–633.
- Balaguer, M., *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. New York: Oxford University Press, 1998.
- Batterman, R.W., *On the Explanatory Role of Mathematics in Empirical Science*. „The British Journal for the Philosophy of Science”, vol. 61, nr. 1, 2010, pp. 1–25.
- Bergmann, M., *Epistemic Circularity: Malignant and Benign*. „Philosophy and Phenomenological Research”, vol. 69, nr. 3, 2004, pp. 708–725.
- Braine, D., *Varieties of Necessity*. „Supplementary Proceedings of the Aristotelian Society”, nr. 46, 1972, pp. 139–70.
- Brown, J., *Non-inferential justification and epistemic circularity*. „Analysis”, vol. 64, nr. 4, 2004, pp. 339–348.
- Bueno, O. & Colyvan, M., *An Inferential Conception of the Application of Mathematics*. „Noûs”, vol. 45, nr. 2, 2011, pp. 345–374.
- Bueno, O. & French, S., *Can Mathematics Explain Physical Phenomena?* „The British Journal for the Philosophy of Science”, vol. 63, nr. 1, 2012, pp. 85–113.
- Cartwright, N., *How the Laws of Physics Lie*. Oxford: Clarendon Press, 1983.
- Cohen, S., *Basic knowledge and the problem of easy knowledge*. „Philosophy and Phenomenological Research”, vol. 65, nr.2, 2002, pp. 309–329.
- Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koenner, 1884. Translated as *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number*, by J.L. Austin, Oxford: Blackwell, second revised edition, 1974.
- Frege, G., *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a. S.: Louis Nebert, 1889. Translated as *Concept Script, a formal language of pure thought modelled upon that of arithmetic*, by S. Bauer-Mengelberg in J. vanHeijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967.

- Fumerton, R., *Metaepistemology and Scepticism*. Maryland: Rowman and Littlefield, 1995.
- Goldman, A.I., *An Epistemological Approach to Argumentation*. „Informal Logic”, vol. 23, nr. 1, 2003, pp. 51–63.
- Gupta, A., *Remarks on Definitions and the Concept of Truth*. „Proceedings of the Aristotelian Society”, vol. 89, 1988/89, pp. 227–246.
- Gupta, A. & Belnap, N., *The Revision Theory of Truth*. Cambridge MA: MIT Press, 1993.
- Lange, M., *What Makes a Scientific Explanation Distinctively Mathematical?*. „The British Journal for the Philosophy of Science”, vol. 64, nr. 3, 2013, pp. 485–511.
- Leng, M., *What’s Wrong with Indispensability? (Or the Case for Recreational Mathematics)*. „Synthese”, vol. 131, nr. 3, 2002, pp. 395–417.
- Moschovakis, Y., *Elementary Induction on Abstract Structures*, Amsterdam: North-Holland, 1974.
- Pincock, C., *A New Perspective on the Problem of Applying Mathematics*. „Philosophia Mathematica”, vol. 12, nr. 3, 2004, pp. 135–161.
- Reid, T., *Essays on the Intellectual Powers*. Cambridge: MIT Press, 1969 [1785].
- Resnik, M.D., *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford: Clarendon Press, 1997.
- Sorenson, R., *“P, therefore, P” without Circularity*. „Journal of Philosophy”, vol. 88, nr. 5, 1991, pp. 245–266.
- Steiner, M., *The Applicabilities of Mathematics*. „Philosophia Mathematica”, vol. 3, nr. 3, 1995, pp. 129–156.
- Steiner, M., *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998.
- Urbaniak, R. & Hämäri, K.S., *Busting a Myth about Leśniewski and Definitions*. „History and Philosophy of Logic”, vol. 33, nr. 2, 2012, pp. 159–189.
- Vogel, J., *Reliabilism levelled*. „Journal of Philosophy”, vol. 97, nr. 11, 2000, 602–623.
- Wigner, E.P., *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 13, nr. 1, 1960, pp. 1–14.