

# Des bi-cristaux aux inclusions sphériques : contraintes internes en présence de gradients de déformation plastique

T. RICHTON<sup>a</sup>, S. BERBENNI<sup>a</sup>

a. *Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux, LEM3, UMR CNRS 7239 et Laboratoire d'Excellence « DAMAS », Université de Lorraine, Metz, France*

Les solutions analytiques des contraintes dans un bi-cristal infini avec interface plane et plasticité uniforme par morceaux [1] sont tout d'abord étendues au cas où des variations de distorsion plastique le long de la normale à l'interface sont autorisées. Il est ensuite montré que le champ de contrainte associé au problème classique de l'inclusion d'Eshelby peut être retrouvé dans le cas d'une sphère par une superposition appropriée des solutions précédentes liées au problème du bi-cristal infini. L'enveloppe externe d'une sphère peut en effet être définie comme la superposition continue de plans tangents à la sphère (FIG. 1).

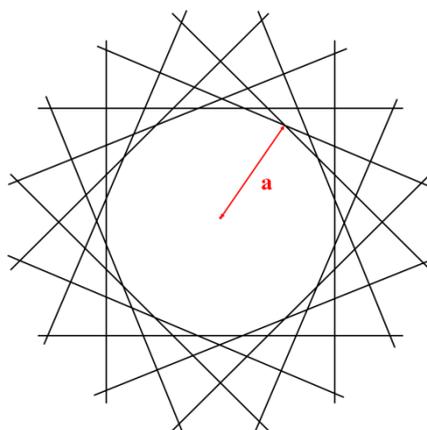


FIG. 1 – Coupe 2D d'une sphère définie par l'intersection de plans tangents continûment superposés.

La méthodologie est explicitée à la fois pour les points à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion. Cette méthode de superposition fournit une interprétation géométrique aux résultats de l'inclusion d'Eshelby. De plus, elle se généralise pour traiter les problèmes d'inclusion où la déformation plastique est non-uniformément distribuée dans l'inclusion. En particulier, la méthode est adaptée pour aborder aisément les problèmes de déformation plastique polynomiale avec des exposants pairs ou toute déformation plastique développable en série entière avec uniquement des exposants pairs comme  $\cos(x)$ ,  $\cosh(x)$ ,  $\sin(x)/x$  ou  $\sinh(x)/x$ . L'expression analytique explicite du tenseur intérieur des contraintes est alors déterminée pour un problème d'inclusion où la déformation plastique dans l'inclusion varie en loi de puissance avec un exposant pair quelconque.

Enfin, on s'intéresse au cas d'une déformation plastique qui varie suivant  $\sinh(r/l)/(r/l)$  à l'intérieur de l'inclusion,  $r$  étant la distance au centre de l'inclusion et  $l$  une longueur caractéristique. En fonction de la valeur du paramètre  $l$ , cette description permet en effet de rendre compte de manière versatile des gradients de déformation plastique à l'intérieur d'un grain, tels ceux dus à des empilements de dislocations. De très fortes concentrations de contrainte sont trouvées proches de l'interface (FIG. 2). Il est à noter qu'en dépit de la relaxation plastique, la contrainte locale peut même être supérieure à la contrainte macroscopique à l'intérieur de l'inclusion (FIG. 2). En outre, la méthode de superposition des bi-cristaux permet aussi d'obtenir une expression analytique explicite de l'énergie élastique interne. Dans un diagramme *log-log*, l'énergie élastique interne normalisée par le carré de la déformation plastique moyenne dans l'inclusion a l'allure d'une fonction *tanh* en fonction du rapport  $l/a$  ( $a$  étant le rayon de l'inclusion) (FIG. 3).

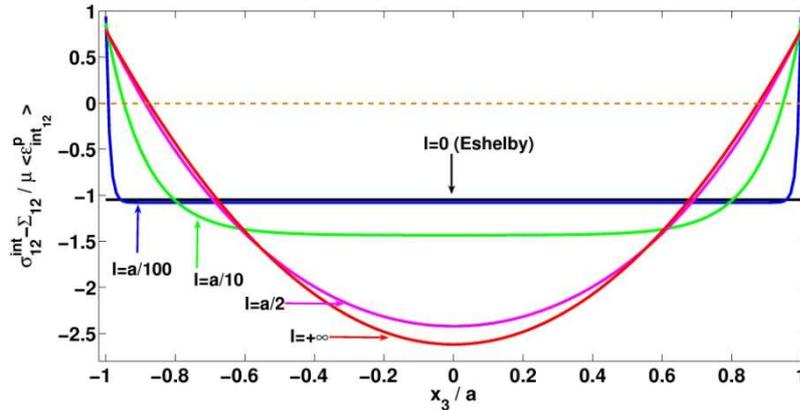


FIG. 2 – Profil de  $\sigma_{12}$  le long de  $x_3$  à l'intérieur de l'inclusion dû à une déformation plastique variant en  $\sinh(r/l)/(r/l)$ . Le profil sera différent pour une autre direction angulaire.

Cette forme de courbe en  $\tanh$  rappelle celles obtenues à partir de théories de milieux généralisés quand la contrainte d'écoulement est tracée en fonction de la longueur caractéristique du modèle [2-4]. La pertinence de cette analogie se trouve dans la signification physique de l'énergie normalisée. Cette énergie varie en effet comme la contrainte cinématique moyenne sur l'inclusion dû à un processus de plastification n'impliquant pas de variation des longueurs  $l$  et  $a$ . L'allure en  $\tanh$  se caractérise par deux plateaux de saturation, entre lesquels une zone de transition dépendant du rapport  $l/a$  est observée (FIG. 3). Cette zone de transition met en évidence une loi d'échelle en fonction de  $l/a$ . Différentes lois d'échelle sont obtenues en approximant la fonction  $\sinh(r/l)/(r/l)$  de la déformation plastique par des développements de Taylor à différents ordres  $p$  (FIG. 3). A partir de ces résultats, il est envisageable de formuler de nouvelles lois d'interaction polycristalline dépendantes de la taille de grains et de longueurs internes intra-granulaires puis de les intégrer dans des schémas de transition d'échelles.

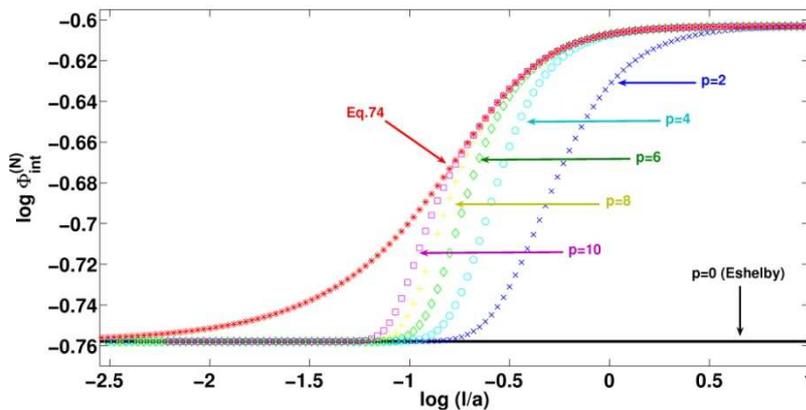


FIG. 3 – Evolution de l'énergie élastique interne normalisée en fonction de  $l/a$  due à une déformation plastique variant en  $\sinh(r/l)/(r/l)$ . Des comparaisons sont effectuées avec des déformations plastiques où la fonction  $\sinh(r/l)/(r/l)$  est approximée par des développements de Taylor à différents ordres  $p$ .

## Références

- [1] Richeton T., Berbenni S., Effects of heterogeneous elasticity coupled to plasticity on stresses and lattice rotations in bicrystals: A Field Dislocation Mechanics viewpoint. Eur. J. Mech. A/Sol., 37, 231-247, 2013.
- [2] Cordero N.M., Gaubert A., Forest S., Busso E.P., Gallerneau F. Kruch S., Size effects in generalised continuum crystal plasticity for two-phase laminates. J. Mech. Phys. Solids, 58, 1963-1994, 2010.
- [3] Cordero N.M., Forest S., Busso E.P., Berbenni S., Cherkaoui M. Grain size effects on plastic strain and dislocation density tensor fields in metal polycrystals. Comp. Mater. Sci., 52, 7-13, 2012.
- [4] Cordero N.M., Forest S., Busso E.P., Generalised continuum modelling of grain size effects in polycrystals. Comptes Rendus Méca., 340, 4-5, 261-274, 2012.