

Compaction de plaques minces: Instabilités et motifs

Jérémy Hure^{ab}, Benoît Roman^b et José Bico^b

a. DEN/DANS/DMN/SEMI/LCMI, CEA Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette, France

b. PMMH, CNRS UMR 7636, UPMC & Univ. Paris Diderot, ESPCI-ParisTech, 10 rue Vauquelin, 75231 Paris Cedex 05, France

Résumé :

Lorsqu'une plaque mince est comprimée entre deux moules sphériques, les contraintes compressives orthoradiales entraînent l'apparition de plis. L'amplitude de ces plis est contrainte géométriquement par la distance entre les deux moules. Ce système simple présente deux caractéristiques majeures : le nombre de plis tend vers une limite finie lorsque l'espacement tend vers l'épaisseur de la plaque, et la force de compaction présente un maximum qui ne dépend pas de l'épaisseur de la plaque. Des arguments en lois d'échelle nous permettent d'expliquer ces observations. Un modèle 1D analytique nous permet finalement de prédire ces deux caractéristiques.

Abstract :

When a thin flat sheet is compressed inside a spherical mold, the resulting orthoradial compressive stresses induce the formation of wrinkles. The amplitude of these wrinkles is geometrically constrained by the gap between the opposite walls of the mold. This simple system exhibits two main features : the number of wrinkles reaches a finite value as the gap vanishes, and the compaction force passes through a maximum independent of the plate's thickness. Scaling laws arguments are discussed to explain these observations. A 1D analytical model allows us to give predictions for these two experimental facts.

Mots clefs : Plaques minces ; Instabilités ; Motifs

1 Observations expérimentales

Des instabilités mécaniques sont observées lors de l'emboutissage de plaques métalliques dans des moules sphériques [1,2,3] (Fig. 1a). Lorsque l'espacement entre les moules diminue, les contraintes orthoradiales compressives au bord de la plaque [4] entraînent une instabilité de flambement qui conduit à l'apparition de plis radiaux (Fig. 1b).

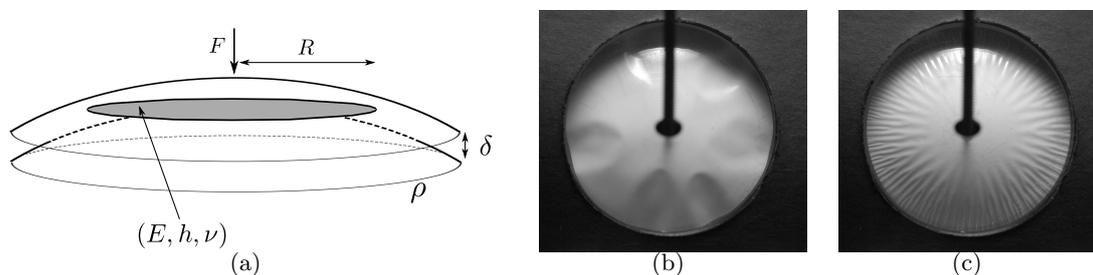


FIGURE 1 – (a) : Dispositif expérimental. Une plaque circulaire de rayon R et d'épaisseur h est comprimée entre deux hémisphères rigides de rayon ρ . L'espacement entre les deux sphères est noté δ . (b, c) : Vue du dessus. Observations expérimentales des plis formés lorsque δ décroît ($R = 25$ mm, $\rho = 58$ mm et $h = 58$ μ m).

Nous étudions le cas d'une plaque mince circulaire élastique comprimée entre deux moules sphériques lorsque l'espace est de l'ordre de l'épaisseur de la plaque. (Fig. 1c). En particulier, nous observons que :

- Le nombre de plis tend vers une limite finie lorsque $\delta \rightarrow h$ (Fig. 1c et Fig. 2a)
- La force de compaction F passe par un maximum indépendant de l'épaisseur de la plaque (Fig. 2b)

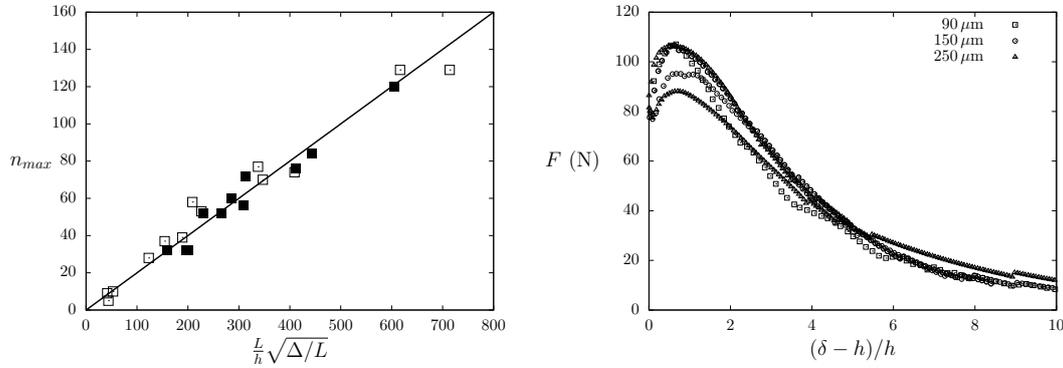


FIGURE 2 – (a) Évolution du nombre maximal de plis en fonction de $(L/h)\sqrt{\Delta/L}$ (voir section 2). Pour le cas 2D (carrés blancs), n_{max} correspond au nombre maximal de plis à l'extrémité, $L = 2\pi R$ et $\Delta/L = \epsilon_{\theta\theta}(r = R) = R^2/8\rho^2$ [4]. (b) Force nécessaire pour comprimer une plaque de rayon 25 mm et d'épaisseur allant de 90 μm à 250 μm , avec $E = 2200$ MPa, $\rho = 58$ mm : celle-ci est pratiquement indépendante de l'épaisseur.

Dans la suite, nous ne nous intéressons qu'à la partie de la plaque proche du bord ($r \approx R$) dans la limite $\delta \rightarrow h$. Celle-ci se trouve dans un état de compression unidirectionnel tel que $\epsilon_{\theta\theta} = R^2/8\rho^2$ [4], ce qui nous permet d'utiliser un modèle 1D. Une analyse plus détaillée de la variation du nombre de plis en fonction de la position radiale est disponible dans [5,6].

2 Un modèle unidimensionnel

Considérons une plaque élastique (de module d'Young E et de coefficient de Poisson ν) de longueur L , d'épaisseur h et de largeur unité. Les déplacements des extrémités sont imposés $u(\pm L/2) = \pm\Delta/2$ (Fig. 3) [7]. L'amplitude de la plaque est contrainte à une valeur inférieure à δ . Nous appelons A l'amplitude des plis, *i.e.*, l'amplitude du plan médian, avec $A = \delta - h$.

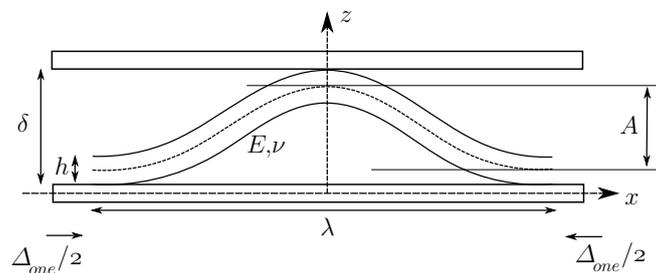


FIGURE 3 – Dispositif 1D : une plaque de longueur L , d'épaisseur h et de largeur unité est soumise à des déplacements imposés $u(\pm L/2) = \pm\Delta/2$ et à une amplitude maximale δ . Nous considérons que n plis similaires se forment ($\Delta_{one} = \Delta/n$) de longueur d'onde $\lambda = L/n$ et d'amplitude A , avec $A = \delta - h$.

Pour de faibles pentes, la déflexion d'un seul pli peut s'écrire $w(-\lambda/2 \leq x \leq \lambda/2) = A/2[1 + \cos(2\pi x/\lambda)]$, avec λ la longueur d'onde. L'énergie de courbure s'écrit $\mathcal{E}_b = \frac{B}{2} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} w_{,xx}^2$, avec $B = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ le module de courbure [8]. L'équilibre membranaire s'écrivant $\partial_x \sigma = 0$, la contrainte σ et la déformation ϵ au plan médian sont constantes, d'où $\epsilon = [\int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} (u_{,x} + w_{,x}^2/2)]/\lambda$. L'énergie d'extension s'écrit alors $\mathcal{E}_s = \frac{C}{2}\epsilon^2\lambda$, avec $C = Eh/(1-\nu^2)$ le module d'extension.

Nous faisons finalement l'hypothèse de présence de n plis identiques. En introduisant $n\lambda = L$ et $n\Delta_{one} = \Delta$ dans l'expression des énergies de courbure et d'extension, et en minimisant par rapport au nombre de plis, nous trouvons :

$$\frac{d(\mathcal{E}_b + \mathcal{E}_s)}{dn} = 0 \Rightarrow n^2 = \frac{12(\Delta/L)L^2}{3\pi^2 A^2 + 8\pi^2 h^2} \quad (1)$$

Lorsque l'amplitude tend vers zéro $A \rightarrow 0$, le nombre de plis tend vers une limite finie :

$$n_{max} = 0.39(L/h)\sqrt{\Delta/L} \quad (2)$$

Il est également possible d'obtenir la force verticale de compaction F , en utilisant le nombre de plis donné par l'équation 1 :

$$F = \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial A} \right| = \frac{24\alpha(L/h)(\Delta/L)^2}{9\alpha^4 + 48\alpha^2 + 64} C \quad (3)$$

en posant $\alpha = A/h$ l'amplitude adimensionnée. Nous notons que la force verticale passe par un maximum qui vaut :

$$F_{max} = 0.20EL \frac{(\Delta/L)^2}{1-\nu^2} \quad \text{pour } \alpha = 0.94 \quad (4)$$

Ce modèle 1D analytique permet de retrouver les caractéristiques de notre système initial (Fig. 2). Pour une ligne élastique en compression et d'amplitude contrainte, le nombre de plis tend vers une limite finie (Eq. 2) lorsque l'amplitude tend vers zéro et la force de compaction présente un maximum indépendant de l'épaisseur (Eq. 4 et Fig. 1b).

3 Discussion et conclusions

Comment comprendre qu'à partir d'un certain espacement de l'ordre de l'épaisseur, le nombre de plis cesse d'augmenter et qu'alors seule leur amplitude diminue? Pour cela, il faut revenir à l'expérience. Pour une amplitude donnée, imaginons qu'il existe n plis identiques. Lorsque l'amplitude décroît, des zones planes apparaissent entre les plis (Fig. 4). Lorsque l'une de ces zones planes est suffisamment longue compte tenu de la compression qu'elle subit, son seuil de flambement peut être atteint (typiquement lorsque $\Delta/L > (h/L)^2$ [7]) et nous passons à un nouveau nombre de plis. Si nous supposons que la longueur de ces zones planes est de l'ordre de la longueur d'onde des plis, l'apparition de nouveaux plis n'est donc possible que lorsque :

$$\frac{h^2}{\lambda^2} \ll \epsilon \sim \frac{A^2}{\lambda^2} \Rightarrow A \gg h \quad (5)$$

Dès que l'amplitude est contrainte à être de l'ordre de l'épaisseur de la plaque, le nombre de plis cesse ainsi de croître.

De même, nous pouvons comprendre aisément que la force présente un maximum indépendante de l'épaisseur de la plaque. Pour $A \gg h$, la force verticale pour confiner la plaque est très faible ou nulle, et elle est également nulle pour $\delta = h$, puisque nous retrouvons le cas d'une plaque parfaitement plane en compression qui est une solution d'équilibre (instable) sans force verticale. Il doit donc y avoir un maximum entre ces deux états. Pour ce qui est de la valeur du maximum, nous pouvons la retrouver en faisant l'analogie avec la loi de Laplace $p = \gamma/\rho$, qui correspond aussi à l'équilibre d'une membrane

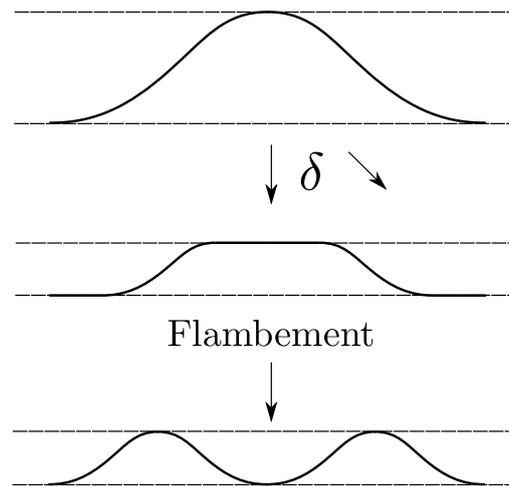


FIGURE 4 – La transition entre deux nombres de plis passe par le flambement des zones planes.

courbée. Dans notre cas, pour un pli très confiné, nous avons $1/\rho \sim h/(L/n)^2$, $\gamma \sim Eh(\Delta/L)^2$ ce qui conduit à une pression de l'ordre de $p \sim E(\Delta/L)^2$. La force verticale totale vaut : $F \sim pL \sim EL(\Delta/L)^2$.

En conclusion, nous avons présenté le cas de plaques comprimées plissées dont l'amplitude est contrainte à être de l'ordre de leur épaisseur. Un modèle analytique unidimensionnel nous a permis de dégager les principales caractéristiques de ce type de système, à savoir un nombre fini de plis dû à la compression dans le plan, une force verticale passant par un maximum pour $A \approx h$ et dont la valeur est indépendante de l'épaisseur de la plaque, en accord avec les résultats expérimentaux. Notons pour finir qu'il est possible d'étendre cette modélisation 1D à des cas plus complexes, comme discuté dans [5,6].

Références

- [1] Yu T.X., Johnson W., Stronge W.J. 1984 Stamping and springback of circular plates deformed in hemispherical dies *Int. J. Mech. Sci.* **26** :131–148.
- [2] Yu T.X., Stronge W.J. 1985 Wrinkling of a circular elastic plate stamped by a spherical punch *Int. J. Sol. Struct.* **21** :995–1003.
- [3] Stronge W.J., Sutcliffe M.P.F., Yu T.X. 1986 Wrinkling of elastoplastic circular plates during stamping *Exp. Mech.* **26** :345–353.
- [4] Majidi C., Fearing R.S. 2008 Adhesion of an elastic plate to a sphere *Proc. Roy. Soc. A* **464** :1309–1317.
- [5] Hure J., Roman B., Bico J. 2012 Stamping and wrinkling of elastic plates *Phys. Rev. Lett.* **109** :054302.
- [6] Hure J. 2012 Adhésion, délamination, décompaction de plaques minces. Thèse de l'université Paris 7 - Paris Diderot.
- [7] Roman B., Pocheau A. 1999 Buckling cascade of thin plates : Forms, constraints and similarity *EPL* **46** :602.
- [8] Timoshenko S.P., Gere J.M. 2009 Theory of Elastic Stability. Dover.