

# Construction des courbes de fragilité sismique basée sur la méthode de calcul de l'évolution des fonctions de densité de probabilité

C.-T. DANG<sup>a</sup>, T.-P. LE<sup>a</sup>, P. RAY<sup>a</sup>

a. Clermont Université, IFMA, UMR 6602, Institut Pascal, BP10448, F-63000 Clermont Ferrand, France

## Résumé :

Une courbe de fragilité sismique qui présente la probabilité de défaillance d'une structure en fonction d'une intensité sismique est un outil performant pour l'évaluation de la vulnérabilité sismique des structures en génie nucléaire et génie civil. L'hypothèse la plus commune des approches existantes est que la courbe de fragilité est une fonction cumulative de la loi log-normale. Dans cet article, nous proposons une nouvelle technique de construction des courbes de fragilité sismique par simulation numérique en utilisant la méthode de calcul de l'évolution des fonctions de densité de probabilité (Probability Density Evolution Method - PDEM). Proposée par Li et Chen, la méthode PDEM permet d'évaluer la probabilité conjointe entre la réponse structurale et les variables aléatoires du système et de l'excitation. A partir de la probabilité conjointe, la courbe de fragilité sismique peut être déduite sans utiliser l'hypothèse de la loi log-normale. La validation de la technique proposée est réalisée sur deux exemples numériques

## Abstract :

A seismic fragility curve that shows the probability of failure of a structure in function of a seismic intensity, for example peak ground acceleration (PGA), is a powerful tool for the evaluation of the seismic vulnerability of the structures in nuclear engineering and civil engineering. The common assumption of existing approaches is that the fragility curve is a cumulative probability lognormal function. In this paper, we propose a new technique for construction of seismic fragility curves by numerical simulation using the Probability Density Evolution Method (PDEM). Proposed by Li and Chen, the PDEM method was used to evaluate the joint probability between the structural response and random variables of a system and/or excitations. From the joint probability density function, the seismic fragility curve can be derived without the assumption of lognormal law. The validation of the proposed technique is performed on two numerical examples.

**Mots clefs :** courbe de fragilité ; évolution des fonctions de densité de probabilité

## 1 Introduction

Une courbe de fragilité sismique d'une structure est définie comme la probabilité conditionnelle de défaillance pour une intensité du mouvement du sol [4] :

$$F(a) = P[X \geq x_0 | A = a] \quad (1)$$

où la défaillance se produit si la réponse  $X$  dépasse une limite critique  $x_0$  du système,  $A$  est l'intensité caractéristique du mouvement du sol et  $a$  est sa valeur. Plusieurs choix sont possibles pour  $A$ , par exemple le pic d'accélération du sol ( $PGA$ ), le pic de vitesse ( $PGV$ ) ou de déplacement du sol ( $PGD$ ), la réponse spectrale à la fréquence fondamentale de la structure ( $Sa$ )... Le  $PGA$  est choisi dans cette étude à cause de sa commodité et sa popularité dans la littérature. La courbe de fragilité  $F(a)$  joue un rôle très important dans les études probabilistes de sûreté des structures et des systèmes mécaniques.

Elle est l'un des trois ingrédients importants pour l'évaluation probabiliste du risque sismique en compagnie d'aléa sismique et des séquences dominantes conduisant à un endommagement du coeur du réacteur en application à génie nucléaire [3]. Dans le domaine du génie civil, elle est aussi utile pour le plan de prévention, d'intervention lors d'un séisme et de réhabilitation des ouvrages lors de la phase d'après séisme pour les organismes de gestion sociale [5].

La construction des courbes de fragilité sismique peut être classée en trois catégories : (i) par l'avis d'experts [8], (ii) par l'observation des dommages réels post-séisme [9] et (iii) par simulation numérique [11]. L'étude présentée dans ce papier appartient à la troisième approche. La plupart des méthodes existantes acceptent une hypothèse que la courbe de fragilité a la forme de la fonction de répartition de probabilité de la loi log-normal :

$$F(a) = \Phi \left[ \frac{\ln(a/A_m)}{\beta} \right] \quad (2)$$

où  $\Phi(\cdot)$  est la fonction de répartition de probabilité de la loi normale. En acceptant cette hypothèse, la méthode du maximum de vraisemblance (MLE) [9] peut être appliquée pour obtenir une estimation des paramètres inconnus  $A_m$  et  $\beta$  de la courbe de fragilité  $F(a)$  : à partir des simulations numériques, la fonction de vraisemblance  $L(A_m, \beta; a_i)$  associée à l'échantillon  $(A, Y) = \{a_i, y_i\}_{i=1:N}$  peut être contruite par :

$$L(A_m, \beta; a_i) = \prod_{i=1}^N [F(A_m, \beta; a_i)]^{y_i} [1 - F(A_m, \beta; a_i)]^{1-y_i} \quad (3)$$

où la réalisation  $y_i$  de  $Y$  prend donc la valeur 1 si on a défaillance ou 0 s'il n'y a pas défaillance pour le chargement  $a_i$ .

Dans ce papier, nous proposons une nouvelle technique de construction des courbes de fragilité, basée sur le calcul de l'évolution des densités de probabilité établi par Li et Chen [6], [7]. Cette nouvelle technique permet de déduire les courbes de fragilité sans utiliser l'hypothèse de la loi log-normale. La section 2 est réservée à la présentation des bases de la méthode PDEM. Elle est suivie en section 3 par le développement analytique et une procédure détaillée étape-par-étape de la nouvelle technique de construction des courbes de fragilité. La validation de la proposition est réalisée sur deux exemples numériques et elle est présentée en section 4. Finalement, des conclusions sur les résultats obtenus et des discussions sur la perspective de ce travail sont données.

## 2 Bases de la méthode de l'évolution de la densité de probabilité

Cette section vise à présenter les bases de la méthode PDEM permettant de calculer l'évolution des densités de probabilité conjointes entre la réponse dynamique du système et les variables aléatoires (du système ou de l'excitation).

Les structures continues après une discrétisation par la méthode des éléments finis par exemple, sont représentées par l'équation de mouvement sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}(\mathbf{Z})\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{Z})\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{Z})\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{Z}, t) \quad (4)$$

Si le système comporte  $n$  degrés de liberté,  $\mathbf{u}(t)$  est le vecteur  $n \times 1$  de réponse de déplacements au temps  $t$ , et  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de dimension  $n \times n$  de masse, d'amortissement et de rigidité tandis que  $\mathbf{f}$  est le vecteur  $n \times 1$  de force d'excitation.  $\mathbf{Z}$  est le vecteur  $n_Z \times 1$  des paramètres aléatoires qui reflètent l'incertitude en excitations aléatoire (séismes, vent...) et en propriétés des structures mécaniques (module Young, dimensions...). On suppose que les paramètres aléatoires  $\mathbf{Z}$  sont représentés par les distributions déterministes avec les fonctions de densités de probabilité  $p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$  bien connues. Ainsi, pour chaque valeur déterministe  $\mathbf{z}$ , les réponses  $\mathbf{u}(\mathbf{z}, t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, t)$ ,  $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{z}, t)$  sont facilement déterminées par l'analyse dynamique. La réponse structurale  $X$  (déplacement, contrainte, ...) qui caractérise la défaillance dans l'équation (1) est ensuite obtenue par une analyse standard après avoir obtenu les déplacements  $\mathbf{u}(t)$ . Pour un instant  $t$  donné,  $X$  est aléatoire et décrit par la densité de probabilité  $p_X(x, t)$ . La densité de probabilité conjointe entre la variable aléatoire  $X$  au temps  $t$  et les

variables aléatoires  $\mathbf{Z}$  est notée par  $p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t)$ . Li et Chen [6], [7] montre que la fonction de densité de probabilité conjointe  $p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t)$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial t} + \dot{x}(\mathbf{z}, t) \frac{\partial p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

où  $\dot{x}(\mathbf{z}, t)$  est la vitesse obtenue par l'analyse structurale et la condition initiale est écrite sous forme :

$$p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t) = \delta(x - x(t_0))p_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \text{ pour } t = t_0 \quad (6)$$

avec  $\delta(\cdot)$  est la fonction de Dirac. La résolution numérique de l'équation (5) donne la fonction de densité de probabilité conjointe  $p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t)$  et à partir de ce résultat, on peut déduire la densité de probabilité  $p_X(x, t)$  de la réponse  $X(t)$

$$p_X(x, t) = \int_{\Omega_{\mathbf{Z}}} p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t) d\mathbf{z} \quad (7)$$

où est  $\Omega_{\mathbf{Z}}$  le domaine de distribution des variables aléatoires  $\mathbf{Z}$ .

Quant au problème de fiabilité, on peut associer à l'équation (5) la condition aux limites reflétant le domaine de défaillance  $\Omega_f$  :

$$p_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t) = 0 \text{ si } x \in \Omega_f \quad (8)$$

La résolution de l'équation (5) avec la condition initiale (6) et la condition aux limites *absorbantes* (8) permet d'obtenir une nouvelle densité de probabilité conjointe de  $X$  et  $\mathbf{Z}$ , notée  $\check{p}_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t)$ . On note que la probabilité conjointe  $\check{p}_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t)$  est ainsi définie pour  $X$  et  $\mathbf{Z}$  mais  $X$  est limité seulement dans le domaine de sûreté  $\Omega_s = \{-x_0 < X < x_0\}$ . On appelle  $\check{p}_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t)$  la densité de probabilité conjointe de sûreté. La fiabilité temporelle peut être déduite par l'expression :

$$R(t) = P(-x_0 < X < x_0; t) = \int_{-x_0}^{+x_0} \int_{\Omega_{\mathbf{Z}}} \check{p}_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t) d\mathbf{z} dx = \int_{\Omega_s} \int_{\Omega_{\mathbf{Z}}} \check{p}_{X\mathbf{Z}}(x, \mathbf{z}, t) d\mathbf{z} dx \quad (9)$$

### 3 Courbe de fragilité sismique à l'aide de la méthode PDEM

#### 3.1 Développement analytique

Pour faciliter l'écriture des formules, le vecteur des paramètres aléatoires défini dans la section 2 précédente est séparé en deux parties : une variable aléatoire caractérisant le mouvement du sol, le *PGA* dans ce papier, notée par  $A$  et les autres variables aléatoires  $\mathbf{Z}$ . L'inconnue dans ce problème modifié sera  $p_{X\mathbf{Z}A}(x, \mathbf{z}, a, t)$  dans l'équation (5) et la résolution du problème avec la condition initiale et condition aux limites *absorbantes* conduira à la solution de densité de probabilité de sûreté  $\check{p}_{X\mathbf{Z}A}(x, \mathbf{z}, a, t)$ .

La densité de probabilité de l'intensité sismique  $A$  dans le domaine de sûreté s'écrit :

$$\check{p}_A(a, t) = \int_{\Omega_s} \int_{\Omega_{\mathbf{Z}}} \check{p}_{X\mathbf{Z}A}(x, \mathbf{z}, a, t) d\mathbf{z} dx \quad (10)$$

On note que  $P(-x_0 < X < x_0, a \leq A \leq a + da; t) = \check{p}_A(a, t) da$ . La densité de probabilité de  $A$  dans le domaine de défaillance peut être déterminée par la relation suivante :

$$P(|X| \geq x_0, a \leq A \leq a + da; t) = p_A(a) da - \check{p}_A(a, t) da = (p_A(a) - \check{p}_A(a, t)) da \quad (11)$$

où  $p_A(a)$  est la distribution de probabilité initiale connue du paramètre aléatoire  $A$ . La courbe de fragilité  $F(a, t)$  est calculée à travers l'expression de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} F(a, t) &= P(|X| \geq x_0 | A = a; t) = \frac{P(|X| \geq x_0, a \leq A \leq a + da; t)}{P(a \leq A \leq a + da)} = \\ &= \frac{p_A(a) - \check{p}_A(a, t)}{p_A(a)} = 1 - \frac{\check{p}_A(a, t)}{p_A(a)} \end{aligned} \quad (12)$$

L'équation (12) nous permet de construire une *surface* de fragilité  $F(a, t)$ . Comme l'on doit étudier la probabilité de défaillance sur toute la durée de l'excitation, donc, nous proposons de prendre la valeur maximale de  $F(a, t)$  durant les séismes :

$$F(a) = \max_t F(a, t) \quad (13)$$

## 3.2 Schéma numérique

Le schéma numérique pas-à-pas est présenté ci-dessous. Il comprend deux étapes principales :

**Étape 1. Déterminer la fonction de densité de probabilité de sûreté  $\check{p}_{X\mathbf{z}A}(x, \mathbf{z}, a, t)$**

- Discrétiser les variables aléatoires  $\mathbf{Z}$  et  $A$  pour avoir des points représentatifs  $\mathbf{z}$  et  $a$ ,
- Faire une analyse structurale par éléments-finis par exemple, pour chaque paire de valeurs  $\mathbf{z}$  et  $a$ . On obtient la vitesse de la réponse correspondant  $\dot{x}(\mathbf{z}, a, t)$ ,
- Résoudre l'équation différentielle (5) avec la condition initiale (6) et la condition aux limites (8) pour obtenir  $\check{p}_{X\mathbf{z}A}(x, \mathbf{z}, a, t)$ . Le schéma numérique TVD (*scheme with total variation diminishing*) est retenu dans ce papier pour les tests de validation comme la suggestion de Li et Chen [6], [7].

**Étape 2. Etablir la courbe de fragilité  $F(a)$**

- Calculer  $\check{p}_A(a, t)$  suivant l'intégration de l'équation (10),
- Dédire la courbe de fragilité instantanée  $F(a, t)$  suivant l'équation (12),
- Obtenir la courbe de fragilité  $F(a)$  par la recherche de maximum en temps suivant l'équation (13).

## 4 Applications numériques

Dans ce papier, deux exemples numériques, un oscillateur non-linéaire et un système à 2 degrés de liberté sont utilisés pour valider la méthode proposée. Les résultats obtenus sont comparés avec la méthode de Monte Carlo [2] et la méthode du maximum de vraisemblance [9].

### 4.1 Oscillateur non-linéaire

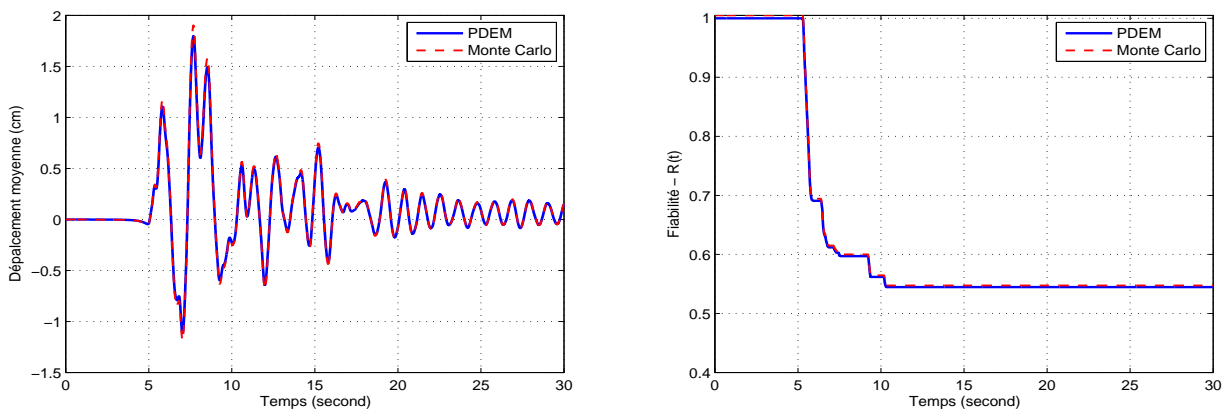


FIGURE 1 – Moyenne de la réponse (à gauche) et fiabilité dynamique (à droite) du premier cas

On reprend ici l'exemple traité par Kafali and Grigoriu [4]. Il s'agit d'un modèle non-linéaire d'hystérésis de Bouc-Wen [10]. L'équation qui régit la dynamique de l'oscillateur non linéaire s'écrit :

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2(\alpha u(t) + (1 - \alpha)W(t)) = -a(t) \quad (14)$$

$$\text{avec } \dot{W}(t) = C_1\dot{u}(t) - C_2|\dot{u}(t)||W(t)|^{n-1}W(t) - C_3\dot{u}(t)|W(t)|^n$$

où  $\omega_0 = 5.97(\text{rad/s})$  est la pulsation propre non amortie ;  $\zeta = 2\%$  est le taux d'amortissement ;  $W(t)$  est le déplacement d'hystérésis défini par le modèle de Bouc-Wen ;  $\alpha = 0.1, C_1 = 1, C_2 = C_3 = 0.5/\text{cm}^n$  et  $n = 1$  sont des constantes. La variable  $X$  de l'équation (5) est le déplacement de la masse et son seuil critique de défaillance est  $x_0 = 5\text{cm}$ . On suppose dans ce test que l'incertitude n'existe qu'en excitation sismique qui se traduit par la distribution du pic d'accélération selon la loi log normale ( $\mu = 150\text{cm/s}^2; \sigma = 30\text{cm/s}^2$ ). On considère trois cas correspondant à trois jeux de données, qui consistent respectivement à 30, 75, 150 enregistrements des séismes selon modèle de Boore [1]. Ces enregistrements sont normés aux valeurs des  $PGA$  discrétisés. La Figure 1 présente les résultats pour la moyenne de la réponse dynamique (à gauche) et la fiabilité dynamique (à droite) obtenues par la méthode PDEM. Ces résultats sont comparés avec la méthode de Monte Carlo classique avec 20.000

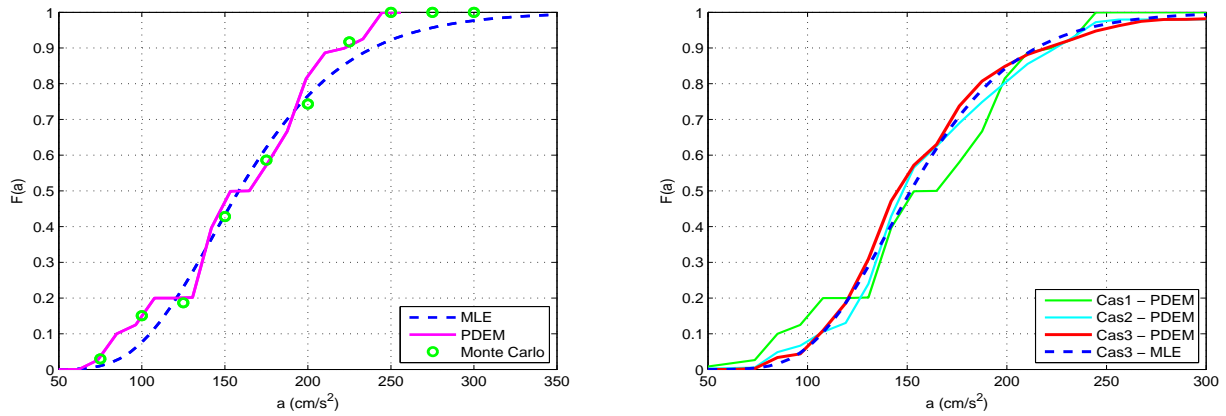


FIGURE 2 – Courbes de fragilité obtenues du premier cas (à gauche) et par PDEM et MLE (à droite)

simulations. On note un accord parfait entre la méthode PDEM et la méthode de Monte Carlo. La courbe de fragilité obtenue du premier cas (30 enregistrements) par PDEM est présentée sur la Figure 2 à gauche. La courbe de fragilité obtenue par la méthode MLE [9] et les points de défaillance évalués par la méthode de Monte Carlo [2] sont également présentés pour la comparaison. On constate que les points de la méthode de Monte Carlo sont très proches de la courbe obtenue par de PDEM et cela confirme bien la validité de PDEM et sa meilleure précision par rapport à la méthode MLE.

Lors qu'on augmentation le nombre d'enregistrements de mouvements du sol (2<sup>e</sup> cas : 75 et 3<sup>e</sup> cas 150), les résultats obtenus par deux méthodes PDEM et MLE sont de plus en plus proches. Cette tendance montre : (i) l'hypothèse de la loi log-normale de la courbe de fragilité semble valide avec un nombre important d'enregistrement ; (ii) la méthode PDEM a besoin d'un nombre d'enregistrements plus faible que la méthode de MLE pour donner un résultat satisfaisant.

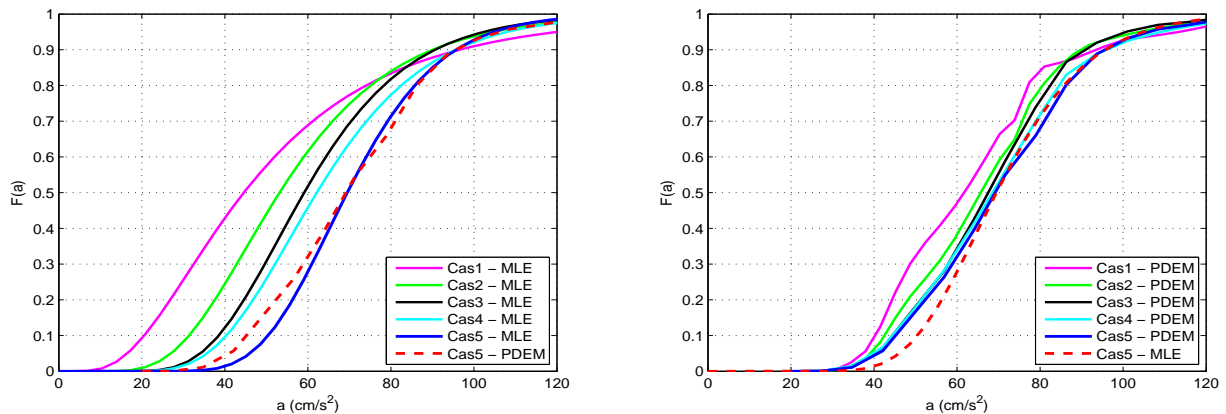


FIGURE 3 – Courbes de fragilité obtenues par MLE et PDEM

### 4.2 Système de 2 degrés de liberté non-linéaire

Un système de 2 degrés de liberté de type masse-ressort-amortisseur est considéré. Les paramètres ont pour valeurs numériques : les masses  $m_1 = m_2 = 1.25 \times 10^6 \text{kg}$  ; les rigidités des ressorts  $k_1 = k_2$  avec le modèle bilinéaire  $K_y/K_0 = 0.1$  où la rigidité initiale est une variable aléatoire distribuée par la loi normale ( $\mu = 2.1 \times 10^8 \text{N/m}$ ,  $\sigma = 1.05 \times 10^7 \text{N/m}$ ) et le seuil élastique  $\Delta_y = 1 \text{cm}$  ; l'amortissement  $\mathbf{C} = 0.01\mathbf{M} + 0.005\mathbf{K}$ . On suppose que  $X$  de l'équation (5) est le déplacement de la masse 2 avec la valeur critique de défaillance  $x_0 = 2.1 \text{cm}$ . Cinq jeux de données correspondant aux nombre d'enregistrements : 30, 50, 75, 100, 150 sont considérés. Ces mouvements du sol sont générés suivant le modèle de Boore

[1]. Le pic d'accélération du sol est une variable aléatoire suivant la loi log normale ( $\mu = 100\text{cm/s}^2$ ,  $\sigma = 10\text{cm/s}^2$ ). Ainsi, deux incertitudes sont introduites : en propriété structurale avec la rigidité  $K_0$  et en excitation avec le pic d'accélération du sol  $A$ . La comparaison entre les courbes de fragilité obtenues par la méthode PDEM et la méthode MLE est donnée à la Figure 3. On peut remarquer les points suivants : (i) les courbes de la méthode MLE sont plus dispersées que celle des de la méthode PDEM ; (ii) plus les nombre d'enregistrement augment, plus les courbes de deux méthodes se rapprochent.

## 5 Conclusions

Une nouvelle technique de construction des courbes de fragilité a été proposée. Elle est basée sur la méthode d'évolution des fonctions de densité de probabilité (PDEM). La nouveauté de cette technique est qu'elle ne fait pas appel à l'hypothèse de la loi log normale, la base de la plupart des méthodes existantes.

Deux exemples numériques non-linéaires ont été utilisés pour valider la proposition. D'abord, les résultats de la courbe de fragilité par la méthode PDEM sont comparés avec la méthode de simulation par Monte Carlo. Une bonne concordance entre les deux confirme la validation de la proposition.

La comparaison ensuite entre les deux méthodes PDEM et MLE nous permet de constater une tendance de rapprochement entre les courbes issues de deux méthodes, une fois que le nombre d'enregistrement des séismes augmente. Cela montre que l'hypothèse de la loi log-normale des courbes de fragilité semble valide dans ces deux exemples traités. A noter qu'on n'a pas encore à notre connaissance, une démonstration explicite de cette hypothèse.

On note également que la dispersion plus importante des courbes de fragilités obtenues par la méthode MLE par rapport à la méthode PDEM. Cette propriété montre une convergence plus rapide des courbes de fragilité de la méthode PDEM en fonction des réenregistrements utilisés. Elle est ainsi plus efficace lors que peu des séismes sont disponibles.

## Références

- [1] Boore, D. M. 2003 Simulation of Ground Motion Using the Stochastic Method. *Pure and Applied Geophysics*. **160** 635-676
- [2] Dang, C.T., Le, T.P., Ray, P. 2013 Fragilité sismique des structures basées sur l'approche stochastique et des méthodes d'approximation. *Conférence Internationale Géotechnique - Ouvrage - Structure (CIGOS 2013)* Lyon, France.
- [3] Ellingwood, B. 1990 Validation studies of seismic PRAs. *Nuclear Engineering and Design*. **123** 189-196
- [4] Kafali, C., Grigoriu, M. 2007 Seismic fragility analysis : Application to simple linear and nonlinear systems. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* **36** 1885-1900
- [5] Karim, K.R., Yamazaki, F. 2003 A simplified method of constructing fragility curves for highway bridges. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics* **32** 1603-1626
- [6] Li, J., Chen, J.B. 2004 Probability density evolution method for dynamic response analysis of structures with uncertain parameters. *Computational Mechanics*. **34** 400-409
- [7] Li, J., Chen, J.B. 2006 The probability density evolution method for dynamic response analysis of non-linear stochastic structures. *International journal for numerical methods in engineering*. **65** 882-903
- [8] Reed, J.W., Kennedy, R.P. 1994 Methodology for developing seismic fragilities. *Final Report TR-103959*. EPRI.
- [9] Shinozuka, M., Feng, M., Lee, J., Naganuma, T. 2000 Statistical Analysis of Fragility Curves. *Journal of Engineering Mechanics*. **126** 1224-1231
- [10] Wen, Y.K. 1976 Method for Random Vibration of Hysteretic Systems. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. **102** 249-263
- [11] Zentner, I. 2010 Numerical computation of fragility curves for NPP equipment. *Nuclear Engineering and Design*. **240** 1614-1621